COMPONENTES DE UNA HISTORIA DEL ÁLGEBRA
EL TEXTO DE AL-KHWÂRIZMÎ RESTAURADO

Luis Puig
Departament de Didàctica de la Matemàtica
Universitat de València

1. INTRODUCCIÓN.

La historia oficial del álgebra, la que aparece narrada en los manuales de historia de las matemáticas o la que se menciona como referencia cuando se habla de ella en los textos de enseñanza, suele tomar la forma del relato del progreso, lento pero inexorable, en el descubrimiento de técnicas y fórmulas para la resolución de ecuaciones y en el descubrimiento de un lenguaje en el que esas técnicas y esas fórmulas aparecen, al final de la historia, verdaderamente expresadas. Ese progreso se periodiza habitualmente mediante los términos “álgebra retórica”, “álgebra sincopada” y “álgebra simbólica”, que puntúan la línea de avance que culmina con Vieta y Descartes en los siglos XVI y XVII, desde una etapa primitiva en que el “álgebra” es “retórica”, ya que los textos se escriben en lenguaje vernáculo —la época paleobabilónica entre 2000 y 1600 a. n. e.—, pasando por una etapa —representada por las *Aritméticas* de Diofanto (s. III)— en que los textos siguen escritos en vernáculo, pero con algunos términos técnicos escritos mediante abreviaturas. Esta segunda etapa es la que se denomina con el nombre que ideó Nesselman en 1842 de “álgebra sincopada”[1].

Pero un relato que se quiera canónico no puede dejar fuera de la historia el momento en que se constituye lo que llamamos matemáticas, es decir, la época de la Grecia clásica, que Diofanto, demasiado tardío, no puede representar. Zeuthen tuvo la idea afortunada, en 1886, de calificar de “álgebra geométrica” el libro segundo de los *Elementos* de Euclides[2], con lo que, al añadirse esta supuesta álgebra a las otras especies de álgebras, ya no había ninguna dificultad para seguir la doctrina según la cual “la ciencia clásica es europea y sus orígenes son legibles directamente en la ciencia y en la filosofía griegas”[3].

[1] El texto en que G. H. F. Nesselman introdujo ese término es *Versuch einer Kritischen Geschichte der Algebra, 1. Teil. Die Algebra der Griechen*. Berlin: G. Reimer, 1842. También en ese texto habla de “álgebra retórica”, pero, por supuesto, sin referirse con este término al álgebra babilónica, cuyo corpus aún no había sido establecido.

[2] Según Árpád Szabó, Tannery habló ya en 1882 de proposiciones algebraicas bajo forma geométrica. El texto en que Hieronimus Georg Zeuthen introduce esta noción de “álgebra geométrica” es *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*. Kopenhagen: Höst & Sohn, 1886. Como el mismo Szabó señala, aunque es cierto que los enunciados de esas proposiciones pueden traducirse con facilidad a enunciados algebraicos, desde ningún otro punto de vista puede calificarse esa parte del texto euclídeo de algebraico (cf. Árpád Szabó. *Les débuts des mathématiques grecques.* Paris: Vrin, 1977, págs. 367 y ss.).

[3] Cf. Roshdi Rashed, “La notion de science occidentale”. En *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l’histoire des Mathématiques arabes.* Paris: Les Belles Lettres, 1984, pág. 301. En este texto,

Si la historia se narra siguiendo ese hilo, el álgebra árabe clásica, la que se desarrolla desde el siglo IX a partir del *Libro conciso de cálculo de al-jabr y al-muqâbala —al-kitâb al-mukhtasar fî hisâb al-jabr wa'l-muqâbala—* de Muhammad ibn Mûsâ al-Khwârizmî, de cuyo título ha tomado su nombre el álgebra en la mayoría de las lenguas europeas, queda relegada al papel de mero intermediario entre la herencia griega y el Occidente cristiano medieval[4], y, además, de intermediario malo, ya que no significa progreso alguno, sino que, por el contrario, se ve como un retroceso a la etapa del "álgebra retórica".

En este texto, pretendo mostrar que la historia puede narrarse de otra manera y presentar un borrador de esa narración usando el texto de al-Khwârizmî como material bruto. Esa historia puede hacerse gracias a que desde hace ya una treintena de años trabajos como los de Roshdi Rashed y de Jens Høyrup están urdiendo una trama distinta, pero hace falta además que no se quiera componer con los nuevos hilos de nuevo una historia lineal. A mi entender es preciso que la historia del álgebra se narre entrelazando varias historias: la historia del sistema matemático de signos del álgebra, en particular, la historia del cálculo en el plano de la expresión sin recurso al plano del contenido; la historia de los conceptos de número; la historia de las tradiciones subcientíficas de resolución de problemas y la historia del método de análisis para resolver problemas. Éstos al menos han de ser los componentes de la historia del álgebra que creo que hay que considerar.

2. RESTAURAR EL ÁLGEBRA ÁRABE.

En este apartado presento un esbozo comprimido de resultados de los trabajos de Roshdi Rashed y Jens Høyrup.

Roshdi Rashed ha hecho visibles un conjunto de textos árabes medievales como parte de un proyecto general[5] que, precisamente por tomar las matemáticas árabes clásicas como un corpus específico y no como mero transmisor de otros legados, hace buscar los documentos cruciales y no los anecdóticos. Una de las consecuencias de esa consideración de estos textos es que la obra de al-Khwârizmî no aparece como un intermediario, sino como el comienzo de una disciplina, que otros muchos matemáticos reconocen de inmediato que empieza con él y que se desarrolla a lo largo de varios siglos.

En primer lugar, el texto de cuatro de los libros de las *Aritméticas*[6] de Diofanto que se daban por perdidos, en una traducción árabe de Qustâ ibn Lûqâ, hecha en el siglo IX

Rashed denuncia la existencia de esta doctrina, implícita o explícitamente, en la mayor parte de los trabajos de historia de las matemáticas y las consecuencias que tiene para la consideración de lo que se ha hecho fuera del Occidente cristiano.

[4] O, incluso, desaparece. Esto es lo que sucede en el libro de Nicholas Bourbaki *Éléments d'Histoire des Mathématiques* [Paris: Hermann, 1969], en cuyo capítulo *L'Évolution de l'Algèbre* el álgebra árabe ni se menciona.

[5] Este proyecto se describe en su recopilación de artículos *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des Mathématiques arabes*, op. cit.

[6] Según Hogendijk, el manuscrito fue descubierto en 1968 por Fuat Sezgin. Jacques Sesiano estableció el texto y lo tradujo al inglés en su tesis doctoral de 1975, que luego convirtió en libro en 1982 con el

pocos años después de la aparición del libro de al-Khwârizmî. Para la historia del álgebra, este texto es importante ya que permite saber, por un lado, en qué momento se conoce la obra de Diofanto entre los árabes y, por otro, que la traducción se hace al lenguaje del álgebra recién establecido por al-Khwârizmî.

En segundo lugar, el texto de un *Tratado sobre las ecuaciones* de Sharaf al-Dîn al-Tûsî (s. XII), que desarrolla la obra algebraica ya conocida de ᶜUmar al-Khayyâm, abordando lo que ahora llamamos ecuaciones de tercer grado.

Por otro lado, los textos de los libros de al-Hasan Ibn al-Hasan Ibn al-Haytham *Tratado sobre el Análisis y la Síntesis* y *Tratado sobre los Conocidos*. En el primero de estos dos voluminosos libros no sólo se retoma este método griego, sino que se desglosa considerando subtipos de los dos tipos, teorético y problemático, distinguidos por Pappus, y se presentan ejemplos de aplicación de cada uno de los subtipos en las distintas partes de las matemáticas. El segundo está concebido de forma similar a como puede considerarse el *Data* de Euclides, es decir, como una recopilación de lo que ha sido ya establecido (dado o conocido) y, por tanto, conviene tener a mano en número tan grande como sea posible al usar el método de análisis, ya que éste persigue reducir el problema al que se aplica a uno que ya haya sido dado[7].

Jens Høyrup, por su parte, ha realizado una nueva lectura de los textos algebraicos babilónicos que se propone no proyectar sobre ellos el álgebra posterior, sino recomponer el sentido del texto a partir de los usos de los términos técnicos —y, en general, la estructura del sistema matemático de signos con que están escritos— que están efectivamente presentes en ellos.

Esta lectura ha tenido como consecuencia dejar de verlos como textos que tratan sobre números y propiedades aritméticas, para mostrarlos como textos geométricos en los que, sin embargo, los objetos y relaciones geométricos carecen de compromiso ontológico y pueden, por tanto, usarse para *representar* otros tipos de objetos[8].

---

título *Books IV to VII of Diophantus' Aritmética in the Arabic Translation Attributed to Qustâ ibn Lûqâ*. New York: Springer Verlag. Cuando escribí este artículo acababa de conocer la existencia de la edición de Sesiano, de la que no di cuenta entonces. Con posterioridad he conocido las agrias disputas que ha mantenido Rashed a propósito de ésta y otras ediciones de textos árabes medievales, ante las que una respuesta contundente es el artículo de Hogendijk en *Historia Mathematica* "Two editions of Ibn al-Haytham's Completion of the Conics" (Hogendijk, 2002). [Nota añadida en 2003.]

[7] Los dos primeros están editados por Les Belles Lettres en la colección *Sciences et Philosophie Arabes*, que dirige el propio Rashed: Diophante, *Tome III. Les Arithmétiques. Livre IV,* et *Tome IV, Livres V, VI et VII.* Texte de la traduction arabe de Qustâ ibn Lûqâ établi et traduit par Roshdi Rashed. Paris: Les Belles Lettres, 1984; Sharaf al-Dîn al-Tûsî, *Œuvres mathématiques, Algèbre et Géométrie au XII^e^ siècle. Tomes I et II.* Texte établi et traduit par Roshdi Rashed. Paris: Les Belles Lettres, 1986. Los otros dos son los primeros de una serie de tres artículos que han aparecido en *Mélanges de l'Institut Dominicain d'Études Orientales du Caire*: Roshdi Rashed, "La philosophie des mathématiques d'Ibn al-Haytham", suivi du "Traité d'al-Hasan Ibn al-Hasan Ibn al-Haytham sur l'analyse et la synthèse", *MIDEO*, vol. 20, págs. 31-231, 1990; y Roshdi Rashed, "La philosophie des mathématiques d'Ibn al-Haytham, – II: «Les Connus»", suivi du "Traité d'al-Hasan Ibn al-Hasan Ibn al-Haytham sur les connus", *MIDEO*, vol. 21, págs. 87-276, 1993.

[8] Cf. Jens Høyrup. "Algebra and Naïve Geometry. An investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought". *Altorientalische Forschungen*. Vol. 17, págs. 27-69 y 262-354, 1990.

Además, Høyrup ha rastreado varias tradiciones de planteamiento de problemas con formato de enigmas o pasatiempos y de técnicas para su resolución, presentes desde la época paleobabilónica hasta la Edad Media. La fuente de esos problemas, cuyos enunciados los presentan como si fueran problemas del "mundo real", pero que, en todos los casos, es imposible que se presenten en la actividad práctica, la sitúa Høyrup en dos tipos de prácticas: por un lado, la de los ejercicios escolares en los que se pretende entrenar en el uso de técnicas y, por otro lado, la exhibición de la maestría en el dominio de las técnicas de una profesión. Esta última práctica, de los agrimensores en particular, habría constituido una tradición "subcientífica" persistente a través de los siglos en la que se habrían generado incluso técnicas para resolver problemas ahora ya ajenos a la actividad profesional y planteados con el único objetivo de mostrar el orgullo de la profesión, en concreto, las técnicas para resolver los problemas "de segundo grado"[9].

Esa nueva lectura de los textos babilónicos de "álgebra" y ese establecimiento de tradiciones "subcientíficas" de resolución de problemas proporcionan unos antecedentes nuevos para el álgebra árabe clásica, que Høyrup no sólo postula como posibles, sino que presenta una prueba[10] de que efectivamente actuaron como antecedentes de alguna manera. La prueba es un *Liber mensurationum*, escrito por un tal Abû Bakr, probablemente a comienzos del siglo IX y, en todo caso, antes del libro de al-Khwârizmî, cuyo original árabe no se ha encontrado, pero del que hay editada[11] una traducción latina del siglo XII, hecha por Gerardo de Cremona. Una parte de ese libro contiene una serie de problemas que están resueltos de dos maneras: una que sigue una pauta similar a la de los textos paleobabilónicos y otra que Abû Bakr indica que está hecha "según *al-jabr*" y que es muy similar a la que aparece en el libro de al-Khwârizmî. Esta segunda técnica correspondería a otra tradición subcientífica, propia de los que Thâbit ibn Qurrah llama "gentes de *al-jabr*" o "seguidores de *al-jabr*"[12], que probablemente eran algún tipo de contables.

Combinando lo que nos enseña Rashed con lo que nos enseña Høyrup, el libro de al-Khwârizmî aparece pues como el momento de fundación de una nueva disciplina teórica, a partir de la crítica de las técnicas desarrolladas en tradiciones "subcientíficas" ligadas a

---

[9] Cf. Jens Høyrup. "'Algèbre d'al-gabr' et 'algèbre d'arpentage' au neuvième siècle islamique et la question de l'influence babylonienne", in Fr. Mawet & Ph. Talon, eds., *D'Imhotep à Copernic. Astronomie et mathématiques des origines orientales au moyen âge*, pp. 83-110. Actes du Colloque International, Université Libre de Bruxelles, 3-4 novembre 1989 (Lettres Orientales, 2) Leuven: Peeters, 1992; y Jens Høyrup, "The Antecedents of Algebra", *Filosofi og videnskabsteori på Roskilde Universitetcenter. 3. Række: Preprint og Reprints* 1994 nr. 1.

[10] Cf. Jens Høyrup, "Al-Khwârizmî, Ibn Turk, and the Liber Mensurationum: On the Origins of Islamic Algebra", *ERDEM*, vol. 2, págs. 445-484, 1986.

[11] Hubert L. L. Busard, "L'algèbre au Moyen Âge: Le "Liber Mensurationum" d'Abu Bekr", *Journal des Savants*, avril-juin, págs. 65-125, 1968.

[12] La edición del texto de Thâbit ibn Qurrah, escrito unos cincuenta años después de la aparición del de al-Khwârizmî, en el que figura esta denominación es de Paul Luckey "Tâbit b. Qurra über den geometrischen Richtigkeitsnachweis der Auflösung der quadratischen Gleichungen", *Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Berichte* 93, págs. 93-114, 1941.

distintas prácticas, que es reconocido inmediatamente como una nueva disciplina y que tiene una continuación floreciente durante varios siglos en el mundo árabe.

3. UNA MIRADA DE CERCA AL TEXTO DE AL-KHWÂRIZMÎ.

Una vez situado el libro conciso de cálculo de *al-jabr* y *al-muqâbala* en el lugar en que lo he situado en el apartado anterior, lo que me propongo ahora es presentar un apunte de sus rasgos característicos. Para ello examinaré algunos de los términos técnicos que usa al-Khwârizmî, la organización general del libro, el enunciado de una regla para resolver un tipo de ecuación y su demostración, la forma general de presentación de los problemas y sus soluciones, las operaciones del cálculo, y tres problemas que se resuelven con la regla enunciada anteriormente como ejemplos de la forma de presentación y de la ejecución de las etapas de las soluciones de los problemas.

3.1. *Los términos primitivos y la "cosa".*

Si el libro de al-Khwârizmî se traduce al sistema matemático de signos (SMS) del álgebra elemental actual —como se ha hecho habitualmente—, trata de la resolución de ecuaciones cuadráticas y de problemas que pueden resolverse mediante éstas. Ahora bien, esa traducción hace que a menudo los enunciados de al-Khwârizmî parezcan torpes, redundantes o carentes de sentido. Ello se debe a que los términos que utiliza no tienen el mismo significado que los componentes de una expresión como $ax^2 + bx + c = 0$ en el SMS de ese álgebra.

En efecto, al comienzo del libro, al-Khwârizmî introduce lo que él llama "las tres especies de números", que normalmente se han traducido por los tres términos del trinomio. Ahora bien, la palabra que en esas traducciones se ha hecho corresponder al cuadrado de la x no es la palabra árabe que significa 'cuadrado', sino la palabra *mâl*, cuyo significado es 'posesión' o 'tesoro'. Como veremos repetidas veces en lo que sigue, el uso de la palabra *mâl* en este libro de al-Khwârizmî no se corresponde con el uso de 'cuadrado' en el SMS del álgebra elemental actual. Por eso, he decidido mantener la traducción literal 'tesoro' para *mâl* con el fin de evitar su identificación con x^2. Høyrup da tres razones contundentes para no traducir *mâl* por 'cuadrado'[13]. En primer lugar, 'cuadrado' tiene un significado geométrico del que *mâl* carece; traducir *mâl* por 'cuadrado' hace incomprensible el esfuerzo de al-Khwârizmî para explicar que *mâl* puede representarse mediante un cuadrado (en el apartado 3.3, veremos cómo lo hace). En segundo lugar, el significado de x^2 como cuadrado de la incógnita, propio del álgebra elemental actual, hace que para un lector actual carezca de sentido considerar el cuadrado como incógnita; por lo tanto, una consecuencia de traducir *mâl* por 'cuadrado' es que entonces no parece tener sentido que al-Khwârizmî, después de encontrar la raíz, calcule

[13] Høyrup ha utilizado para traducir *mâl* las palabras inglesas "treasure", "fortune" y "wealth" y la palabra francesa "trésor". Las razones para no traducir *mâl* por 'cuadrado' están en la nota 11 de su trabajo "'Oxford' and 'Cremona': On the relations between two Versions of al-Khwârizmî's Algebra". *Filosofi og videnskabsteori på Roskilde Universitetcenter. 3. Række: Preprint og Reprints* 1991 nr. 1.

también el *mâl*, cuando es éste la incógnita, y se le atribuye torpeza por hacerlo. En tercer lugar, la identificación de *mâl* con x^2 conlleva la identificación de la *raíz* con la *raíz de la ecuación*, cuando para al-Khwârizmî es la *raíz del mâl*, la *raíz del tesoro*.

Traducido así, el texto en que al-Khwârizmî define las especies de números queda como sigue[14]:

> Encontré que los números que son necesarios para calcular por *al-jabr* y *al-muqâbala* son de tres especies, a saber, raíces, tesoros y simples números no atribuidos a raíz ni a tesoro.
> Una raíz es cualquier cosa que será multiplicada por sí misma, consistente en la unidad o números, hacia arriba, o fracciones, hacia abajo.
> Un tesoro es la cuantía total de una raíz multiplicada por sí misma.
> Un simple número es un número cualquiera que puede expresarse sin atribuirlo a raíz ni a tesoro (pág. 3)[15].

El carácter monetario de *mâl*[16] aún queda más subrayado en otros enunciados en los que explica el significado de las "ecuaciones" y, al hacerlo, los "simples números" pasan a ser *dirhams*, es decir, una moneda:

> Raíces y tesoro igualan números; es como si tú dices, "un tesoro y diez raíces del mismo, igualan treinta y nueve dirhams"; es decir, ¿cuál será el tesoro que, cuando se aumenta con diez de sus propias raíces, asciende a treinta y nueve? (pág. 5).

En este texto, además, puede verse que la identificación de la palabra 'raíz' con la incógnita o con la *x* tampoco es adecuada: por un lado, en el texto no se dice simplemente "la raíz", sino "la raíz del tesoro"; por otro lado, el resultado del problema

[14] Como mi conocimiento de la lengua árabe es rudimentario, las versiones castellanas que presento aquí del texto de al-Khwârizmî están realizadas de la siguiente manera. He utilizado la edición de Rosen del libro de al-Khwârizmî [Frederic Rosen. *The algebra of Mohammed Ben Musa.* London: Oriental Translation Fund, 1831]. He contrastado el texto árabe de esa edición con la traducción inglesa de Rosen. He modificado la traducción de Rosen adoptando traducciones más literales de los términos y expresiones técnicos y manteniéndolas sistemáticamente, cosa que él no hace. He tenido en cuenta las observaciones que Høyrup hace en su trabajo " 'Oxford' and 'Cremona': On the relations between two Versions of al-Khwârizmî's Algebra", op. cit. También he consultado las traducciones latinas medievales editadas por Barnabas Hughes, "Gerard of Cremona's Translation of al-Khwârizmî's al-jabr: A Critical Edition", *Mediaeval Studies*, 48, págs. 211-263, 1986, y *Robert of Chester's Translation of al-Khwârizmî's al-jabr: A New Critical Edition*, Boethius, Band XIV. Franz Steiner Verlag: Stuttgart, 1989; sobre todo la de Cremona que, como señala Høyrup, sigue muy al pie de la letra el texto árabe. Combinando todo ello, he compuesto la versión castellana.

[15] La numeración de las páginas es la del texto árabe de la edición de Rosen citada, que también figura en el margen de su traducción inglesa.

[16] En la traducción de Gerardo de Cremona *mâl* mantiene ese carácter, ya que éste utilizó en su lugar el término latino *census*. Robert de Chester, sin embargo, lo tradujo por *substantia*. Ni uno ni otro pues lo tradujo por 'cuadrado'. La traducción de Gerardo de Cremona hizo fortuna y puede encontrarse en un buen número de libros medievales. También subraya este carácter monetario el término que usó Finzi en el siglo XV al traducir al hebreo el libro de álgebra de Abû Kâmil (finales del siglo IX y comienzos del X). Finzi tradujo *mâl* por la palabra tomada prestada del castellano 'algos', con el significado obvio de 'una cierta cantidad (de dinero)' (cf. *The Algebra of Abû Kâmil, in a Commentary by Mordecai Finzi.* Hebrew text and translation, and commentary by Martin Levey. Madison, WI: The University of Wisconsin Press, 1966).

tal como lo da al-Khwârizmî deja bien claro que lo que se busca —la incógnita— no es la raíz, sino el tesoro:

> […] queda tres, que es la raíz del tesoro que buscabas; el tesoro mismo es nueve (pág. 5),

de modo que, en todo caso, el enunciado de este problema habría que traducirlo al SMS del álgebra elemental actual por $x + 10\sqrt{x} = 39$, mejor que por $x^2 + 10x = 39$.

Tesoros, raíces y simples números o *dirhams* son pues los términos primitivos, las especies de números, cuyas combinaciones permiten establecer "todo lo que es necesario para calcular" en la práctica. Con ellos, puede atender al-Khwârizmî la petición del califa al-Maʼmûn de

> componer un tratado conciso sobre el cálculo por *al-jabr* y *al-muqâbala*, reducido a lo que es brillante e importante en las aritméticas utilizadas constantemente en los asuntos de herencias y legaciones, en los repartos y los procesos legales, en el comercio y en todos sus asuntos de agrimensura, de excavación de canales, de cálculos geométricos y otras cosas variadas de especie parecida (pág. 2).

La conceptualización básicamente monetaria de los términos primitivos proviene probablemente de la tradición de "las gentes de *al-jabr*", pero desde el principio representan *especies de números que se usan en cálculos*, de modo que las distintas combinaciones de esos términos primitivos pueden concebirse como moldes formales. Veremos en la descripción del esquema general del libro que lo que viene inmediatamente después de la exposición de que éstos son los términos primitivos es precisamente el establecimiento de todas sus combinaciones posibles.

Al-Khwârizmî utiliza pues estos términos monetarios para representar las posibilidades que pueden presentarse al hacer los cálculos. Ahora bien, cuando lo que aborda es la resolución de un problema concreto utiliza otro término técnico, que nunca aparece en los enunciados de los problemas: la palabra árabe *shay*', que se traduce habitualmente por 'cosa'[17]. Según Rashed, esta palabra es un término coránico y de la lengua filosófica, y en ese contexto significa "todo lo que puede ser imaginado, sin realizarse sin embargo en un objeto", por lo que tiene un carácter "vacío", susceptible de recibir cualquier contenido y, por tanto, es un candidato ideal para nombrar una incógnita que pueda ser un número o una magnitud[18], o para desarrollar un cálculo en el plano de la expresión. A menudo, se ha identificado también la cosa con la *x*, la incógnita o la raíz. Sin embargo, en el libro de al-Khwârizmî la relación entre los términos primitivos tesoro, raíz y número o dirham, la incógnita del problema y la cosa es más compleja. En ocasiones, la incógnita del problema es un tesoro y éste se representa mediante la cosa; otras veces, la cosa representa la raíz de un tesoro y la raíz es la

[17] En el álgebra de Abû Kâmil hay algunos problemas que se resuelven de dos maneras: una, expresando la incógnita con el término 'cosa'; la otra, representando además otras incógnitas auxiliares. Para ello, Abû Kâmil utiliza también términos monetarios: las palabras *dinar* y *fals*, que son los nombres de dos monedas árabes. (Cf. *The Algebra of Abû Kâmil…*, op. cit., págs. 102, 116, 133, 136 y 140, entre otras.)

[18] Cf. Roshdi Rashed. Introduction et notes à *Les Arithmétiques, tome III*, op. cit., págs. 120-123.

incógnita; también puede suceder que la incógnita sea un tesoro y que éste se represente mediante la cosa, pero que en el curso de la solución la cosa se haya de multiplicar por sí misma y, por tanto, se convierta en la raíz de otro tesoro. En lo que sigue hay ejemplos de varias de estas situaciones.

3.2. *La organización general del libro.*

En este apartado, voy a presentar una división del libro de al-Khwârizmî en partes con el fin de tener una visión general de su organización. Los títulos de las partes son míos. El libro comienza con un prólogo en el que figura el encargo del califa al-Maʾmûn que ya he citado.

1) Los términos primitivos.

Ya hemos visto en el apartado 3.1 que, tras el prólogo, lo primero que aparece en el libro es el establecimiento de los términos primitivos —tesoros, raíces y simples números— como las especies de números que se usan en los cálculos.

2) Las formas normales.

A continuación, al-Khwârizmî plantea que esas especies de números "unos pueden ser iguales a otros" y establece todas las posibilidades, tres simples y tres compuestas:

tesoro igual a raíces,
tesoro igual a números,
raíces igual a números,
tesoro y raíces igual a números,
tesoro y números igual a raíces, y
raíces y números igual a tesoro.

Estas seis posibilidades de combinación de las especies de números tienen el carácter del conjunto completo de formas normales. El resto del cálculo consistirá pues fundamentalmente en mostrar cómo resolver cada una de estas formas normales y cómo reducir cualquier problema a una de ellas.

3) Las reglas que resuelven cada una de las formas normales.

Veremos la regla correspondiente a la quinta forma normal en 3.3. Las reglas se enuncian para un tesoro; luego se dice que, si hay varios tesoros, hay que *reducir* la expresión para que sólo haya uno; y que, si hay parte o partes de un tesoro, hay que *completar* el tesoro para que haya uno. En el apartado 3.5, veremos que *reducir* a un solo tesoro y *completar* el tesoro son, junto con las dos operaciones que dan nombre al cálculo (*al-jabr* y *al-muqâbala*), las operaciones mediante las que se reduce una expresión cualquiera que traduce el enunciado del problema en términos de operaciones con la 'cosa' a una de las formas normales.

4) Las demostraciones de las reglas.

Examinaremos en 3.3, a título de ejemplo, la demostración de la regla para la quinta forma normal, "tesoro y números igual a raíces".

5) Cálculo con la cosa.

Al-Khwârizmî comienza este capítulo —que él titula "Sobre la multiplicación"— diciendo que va a referir en él "cómo multiplicar la cosa […] tanto si está sola, como si se le añaden números o se le quitan números o se quita de números" (pág. 15). Pero antes efectúa tres multiplicaciones en las que no interviene la cosa, sino sólo números, 10+1 por 10+2, 10–1 por 10–1 y 10+2 por 10–1, y justifica comenzar por esas multiplicaciones con números por razones didácticas: "he explicado esto, que puede servir como introducción a la multiplicación de la cosa cuando se le añaden números […]" (pág. 16).

Traduzco aquí una de las multiplicaciones que al-Khwârizmî explica a continuación, como muestra de la forma que adopta en su cálculo lo que para nosotros es la "regla de los signos".

> Cuando dices diez menos cosa por diez y cosa, dices diez por diez, cien, y menos cosa por diez, diez cosas "substractivas", y cosa por diez, diez cosas "aditivas", y menos cosa por cosa, tesoro "substractivo"; por tanto, el producto es cien dirhams menos un tesoro[19] (pág. 17).

6) Cálculo con "radicales".

Diversas operaciones con raíces de números y de tesoros, que se presentan como modelos de la forma de actuar con "cualquier raíz, aditiva o substractiva, conocida o sorda" [es decir, racional o irracional] (pág. 20).

7) "Los seis problemas".

Seis problemas que sirven de modelo del uso de las seis formas normales. En este capítulo es en el que aparecen las dos operaciones que dan nombre al cálculo (*al-jabr* y *al-muqâbala*). La presentación de los problemas y sus soluciones sigue siempre el mismo esquema, que presentaremos en 3.4. En 3.6, veremos el problema que se reduce a la quinta forma normal.

---

[19] En vez de "negativas" y "positivas", he traducido "substractivas" y "aditivas", como hace Adel Anbouba, para ser menos anacrónico y mostrar que esas palabras derivan de los verbos "decrecer" y "añadir". Ahora bien, al-Khwârizmî, gracias a la esquematización del lenguaje que usa, puede decir también "menos cosa". Adel Anbouba señala que una expresión como "menos cosa por menos cosa igual tesoro aditivo" "va contra la gramática […] pero es didácticamente cómoda" (cf. Adel Anbouba. "L'algèbre arabe aux IX^e^ et X^e^ siècles. Aperçu général". *Journal for the History of Arabic Science* vol. 2, págs. 66-100, 1978). Está claro que aquí no hay idea alguna de número negativo, pero la operatividad con lo substractivo es mayor que la que hay en las *Aritméticas* de Diofanto, ya que el SMS con que éstas se escriben no permite más que una inscripción de la *leipsis* en cada expresión.

8) Más problemas variados.

Un conjunto de problemas, que ocupan las páginas 30 a 48. En 3.6, veremos dos de ellos, que también se reducen a la quinta forma normal.

9) Un corto capítulo sobre problemas de transacciones mercantiles.

10) Un capítulo de problemas de medidas de áreas, longitudes y volúmenes de figuras geométricas.

11) Un larguísimo capítulo de problemas de herencias, que ocupa de hecho la mitad del libro (págs. 65 a 122).

Estos problemas de herencias son de primer grado. Ahora bien, al-Khwârizmî usa en casi todos ellos el término *mâl*, 'tesoro', para referirse a la cantidad de dinero dejada en herencia, con lo que se muestra de nuevo aquí lo erróneo de identificar *mâl* con x^2.

Esta descripción somera que acabo de hacer habla por sí sola: la organización del libro no tiene nada que ver con la de sus antecedentes, que se presentan siempre como colecciones de problemas, ordenados en ocasiones por las configuraciones geométricas de las que tratan (es el caso de muchas series de tablillas babilónicas) o por otros criterios, pero nunca presentados después de un catálogo completo de formas normales a las que pueden reducirse, ni con el acompañamiento de un cálculo que se desarrolla en el plano de la expresión, al hacerse con formas vacías, 'cosas'.

3.3. *La quinta forma normal como ejemplo: enunciado de la regla y su demostración.*

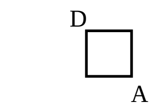
1) La quinta forma normal y su regla:

> Tesoro y números igual a raíces; es como si tú dices, "un tesoro y veintiuno en números igualan diez raíces del mismo tesoro". Es decir, ¿cuál será la cuantía del tesoro que, cuando se le añade veintiún dirhams, iguala el equivalente de diez raíces del mismo tesoro?
> Solución: Divide en dos las raíces; la mitad es cinco. Multiplícalo por sí mismo; resulta de ello veinticinco. Quítale el veintiuno asociado con el tesoro; el resto es cuatro. Extrae su raíz, es dos. Quítalo de la mitad de las raíces, que es cinco; queda tres. Esto es la raíz del tesoro que pedías y el tesoro es nueve. O puedes añadir la raíz a la mitad de las raíces, eso será siete; es la raíz del tesoro que tú pedías y el tesoro mismo es cuarente y nueve.
> Cuando encuentres un ejemplo que te conduzca a este caso, intenta la solución por adición, y si esto no te ayuda, la substracción servirá ciertamente. Porque en este caso se puede emplear tanto la adición como la substracción, lo que no vale en ninguno de los otros casos en los que haya que dividir en dos las raíces. (pág. 7)

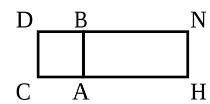
2) La demostración de la regla.

La demostración de la validez de la regla la presento desmenuzada, y acompaño cada fragmento del texto con la figura que se va construyendo para justificar sus pasos. En el texto original sólo aparece la figura final después de la frase “Ésta es la figura”. Además del carácter didáctico de la justificación de la regla, vale la pena entretenerse en observar el cuidado que tiene al-Khwârizmî de indicar que el cuadrado es una *representación* del tesoro —distinción que obviamente desaparece si se traduce *mâl* por ‘cuadrado’ o por x^2—, y la distinción que hace entre la raíz del tesoro, que está representada por un lado del cuadrado que representa el tesoro, y la raíz de la superficie, que es un rectángulo de lado la raíz del tesoro y ancho una unidad, lo que le permite representar las diez raíces[20].

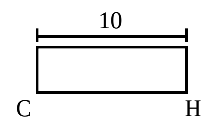
Cuando un tesoro y veintiún dirhams son iguales a diez raíces, representamos el tesoro como un cuadrado cuyos lados son desconocidos, que es la superficie *AD*.



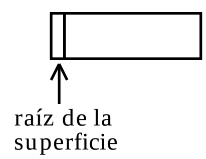
A ésta añadimos un paralelogramo, la superficie *HB*, cuya anchura, esto es, el lado *HN*, es igual a uno de los lados de la superficie *AD*.



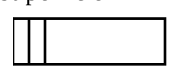
La longitud de las dos superficies juntas es igual al lado *HC*. Sabemos que su longitud es en números diez, ya que cada cuadrado tiene iguales sus lados y sus ángulos, y,



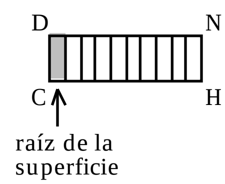
si uno de sus lados se multiplica por uno, eso da la raíz de la superficie,



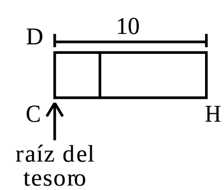
y, por dos, dos de sus raíces.



Cuando se declara que el tesoro y veintiún números es igual a diez de sus raíces,

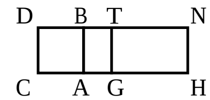


sabemos que la longitud del lado *HC* es igual a diez números, ya que el lado *CD* es una raíz del tesoro.

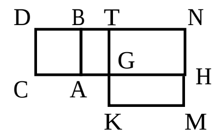


[20] Esta distinción entre la raíz del tesoro, que es una línea, y la raíz de la superficie, se convierte en el *Tratado de las ecuaciones* de Sharaf al-Dîn al-Tûsî, en el que lo que se estudia son las cúbicas, en muchas más distinciones: hay raíces lineales, planas y sólidas, y, lo que es más interesante, tesoros planos y sólidos. La raíz sólida es “un sólido cuya base es una raíz plana y la altura una unidad lineal” y el tesoro sólido “es un sólido cuya base es el tesoro plano y cuya altura es una unidad lineal” (cf. Sharaf al-Dîn al-Tûsî, op. cit., tome I, págs. 15-16).

Dividimos el lado *CH* en dos mitades por el punto *G*. Entonces sabes que la línea *HG* es igual a la línea *GC*, y que la línea *GT* es igual a la línea *CD*.



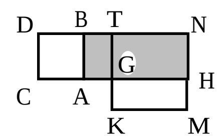
Entonces extendemos la línea *GT* una distancia igual a la diferencia entre la línea *CG* y la línea *GT* para cuadrar la superficie. Entonces la línea *TK* es igual a la línea *KM*, y resulta un cuadrado, de lados y ángulos iguales, que es la superficie *MT*.



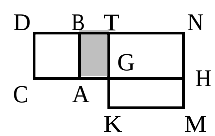
Sabemos que la línea *TK* es cinco y ésa es consecuentemente la longitud de los otros lados.

Su superficie es veinticinco, obtenida por la multiplicación de la mitad de las raíces por sí mismo, que es cinco por cinco, igual a veinticinco.

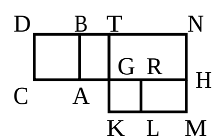
Sabemos que la superficie *HB* representa los veintiún números que se añaden al tesoro.



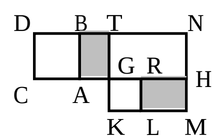
De la superficie *HB*, cortamos por la línea *TK*, uno de los lados de la superficie *MT*, dejando la superficie *TA*.



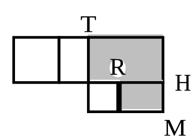
Tomamos de la línea *KM* la línea *KL*, que es igual a la línea *GK*.

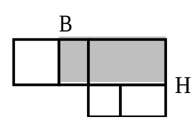


Sabemos que la línea *TG* es igual a la línea *ML* y que la línea *LK*, cortada de la línea *MK*, es igual a *KG*. Entonces la superficie *MR* es igual a la superficie *TA*.

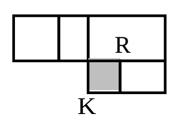


Sabemos que la superficie *HT* añadida a la superficie *MR* es igual a la superficie *HB* que es veintiuno.

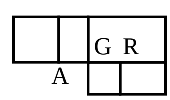




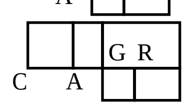
Pero la superficie *MT* es veinticinco. Y así, restamos de la superficie *MT*, la superficie *HT* y la superficie *MR*, entre ambas igual a veintiuno. Nos queda una superficie pequeña *RK*, que es veinticinco menos veintiuno, que es cuatro.



Su raíz, la línea *RG*, es igual a la línea *GA*, que es dos.

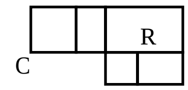


Si lo restamos de la línea *CG*, que es la mitad de las raíces, queda la línea *AC*, que es 3.



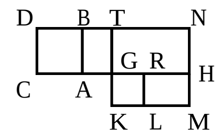
Ésta es la raíz del primer tesoro.

Si se añade la línea *GC*, que es la mitad de las raíces, resulta siete, o la línea *RC*, la raíz de un tesoro más grande.



Si se añade veintiuno a este tesoro, también el resultado será diez de sus raíces.

Ésta es la figura. (págs. 11-13)



3.4. *El esquema de presentación de los problemas y sus soluciones.*

Al-Khwârizmî es sistemático en la presentación de las soluciones de los problemas, tanto en la parte del libro que he denominado “los seis problemas” como en la parte siguiente, “los problemas variados”. Para describir el esquema que sigue al-Khwârizmî, lo he dividido en etapas sucesivas, que he denominado *enunciado*, *construcción de la ecuación*, *reducción a una forma normal*, *aplicación de la regla algorítmica*, *enunciado del resultado*, *comentario*. En este apartado sólo voy a hacer consideraciones de carácter general sobre alguna de las etapas. Los problemas que presento en el apartado 3.6 están divididos de acuerdo con ellas, y sirven como ejemplo para explicar en qué consiste cada una.

Los *enunciados* de los problemas son de dos tipos:

a) La historia trata sobre el número diez, que se ha dividido en dos partes; se han realizado varias operaciones aritméticas con las partes y se da el resultado de esas operaciones o una igualdad entre los resultados de series de operaciones. Las incógnitas del problema son las dos partes en que se ha dividido diez.

b) La historia trata de un tesoro al que se le han realizado varias operaciones aritméticas y se da el resultado de ellas en dirhams o en tesoros. La incógnita es el tesoro.

En ninguno de los casos aparece el término ‘cosa’ en el enunciado del problema.

La *construcción de la ecuación* se realiza analizando el enunciado del problema. Una incognita del problema —ya sea una parte de diez, o el tesoro del enunciado— se designa mediante ‘cosa’. Las operaciones narradas en el enunciado se expresan como operaciones con la cosa. Las expresiones resultantes se transforman recurriendo a los resultados establecidos en el capítulo que he llamado “cálculo con la cosa”. Finalmente se igualan dos expresiones para formar una ecuación.

La *reducción a una forma normal* se realiza aplicando las operaciones propias del cálculo que describo en el apartado 3.5.

La *aplicación de la regla algorítmica* a la ecuación en forma normal obtenida produce como resultado un número (o dos), que se expresa a continuación en términos de la incógnita del problema como una de las partes de diez o el tesoro. Finalmente, hay siempre un *comentario* de orden didáctico.

3.5. *Las operaciones del cálculo*.

Las operaciones del cálculo de *al-jabr* y *al-muqâbala* son cuatro. Su objetivo es reducir cualquiera de las ecuaciones obtenidas en la etapa "construcción de la ecuación" de la solución de un problema a una de las formas normales. Para ello hace falta que no aparezca ninguna cantidad "substractiva" y que no haya cantidades de la misma especie en las expresiones que se igualan en la ecuación. Pero además hace falta que sólo haya un tesoro, ya que las reglas algorítmicas para resolver las formas normales están enunciadas para un tesoro.

La operación *al-jabr*, o *restauración*, se encarga de eliminar las cantidades "substractivas". Así, por ejemplo, si la ecuación es la que aparece en 3.6.a, "cien y dos tesoros menos veinte cosas igual a cincuenta y ocho dirhams", al-Khwârizmî nos dice: "*restaura* […] esos cien y dos tesoros de las veinte cosas substraídas y súmalas a los cincuenta y ocho".

La operación *al-muqâbala*, u *oposición*, se encarga de eliminar la repetición de especies. Las dos cantidades igualadas se "oponen", es decir, se comparan especie a especie y, si una especie está repetida, se restan los números correspondientes.

Las otras dos operaciones se encargan de que sólo haya un tesoro. Si hay varios tesoros, hay que *reducir, radd,* la ecuación para que haya sólo uno. Si hay parte o partes de un tesoro, hay que *completar, ikmâl* o *takmîl*. En ambos casos, la ecuación se trata como un todo que se opera, como deja bien claro la forma en que al-Khwârizmî expresa la operación en la solución del problema que presento en 3.6.a: "Reduce luego eso a un solo tesoro tomando la mitad *del conjunto*" (cursiva mía).

Además, las operaciones que en cada caso es necesario efectuar se realizan siempre en el mismo orden, que es: restaurar, reducir, oponer y completar.

3.6. *Tres problemas que se reducen a la quinta forma normal*.

a) El problema de "los seis problemas".

Enunciado

> He dividido diez en dos partes; luego he multiplicado cada parte por sí misma y sumadas resulta cincuenta y ocho dirhams.

Construcción de la ecuación:

Procedimiento. Haces una de las partes cosa y la otra diez menos cosa.	Si representamos cosa con *c*, entonces: c, 10-c
Multiplica luego diez menos cosa por sí mismo, resulta cien y un tesoro menos veinte cosas.	Si representamos tesoro con *t*, entonces: (10-c)(10-c) es 100+t-20c
Multiplica luego cosa por cosa, resulta tesoro.	c·c es t

Suma luego ambos, resulta la suma cien y dos tesoros menos veinte cosas igual a cincuenta y ocho dirhams.	100+2t-20c=58

Reducción a la forma normal:

Restaura luego esos cien y dos tesoros de las veinte cosas substraídas y súmalas a los cincuenta y ocho, resulta cien y dos tesoros igual a cincuenta y ocho dirhams y veinte cosas.	100+2t=58+20c
Reduce luego eso a un solo tesoro tomando la mitad del conjunto, resulta cincuenta dirhams y un tesoro igual a veintinueve dirhams y diez cosas.	50+t=29+10c
Opón luego con ése el otro, quitando veintinueve de cincuenta, queda veintiún y tesoro igual a diez cosas.	21+t=10c

Aplicación de la regla:

> Entonces halla la mitad de las raíces, resulta cinco; multiplica por sí mismo, resulta veinticinco.
> Quita luego de esto el veintiuno conectado con el tesoro, queda cuatro.
> Extrae luego su raíz, es dos.
> Quítala luego de la mitad de las raíces, que es cinco, queda tres.

Resultado:

> Es una de las dos partes, y la otra es siete.

Comentario:

> Este problema se refiere a uno de los seis tipos, que es 'tesoro y números igual a raíces'. (págs. 28-29)

b) Un problema del tipo "10 dividido en dos partes".

Enunciado

> Si una persona te pide esto: "He dividido diez en dos partes, y cuando he multiplicado la una por la otra, resultó veintiuno";

Construcción de la ecuación:

entonces tú sabes que una de las dos partes de diez es cosa y la otra diez menos cosa.	c, 10-c

Multiplica por tanto cosa por diez menos cosa; entonces tendrás diez cosas menos un tesoro igual a veintiuno.

c(10-c)
10c-t=21

Reducción a la forma normal:

Restaura luego las diez cosas del tesoro [substraído] y añádelo a veintiuno. Resulta entonces diez cosas, que igualan veintiún dirhams y un tesoro.

10c=21+t

Aplicacion de la regla:

> Quita luego la mitad de las raíces y multiplica el cinco que queda por sí mismo; es veinticinco. Quítale luego el veintiuno asociado con el tesoro; queda cuatro. Extrae luego su raíz, es dos. Quítalo luego de la mitad de las raíces, a saber, cinco; queda tres,

Resultado:

> ésa es una de las dos partes. O, si lo prefieres, puedes añadir la raíz de cuatro a la mitad de las raíces. Entonces la suma es siete, lo que también es una de las partes.

Comentario:

> Éste es uno de los problemas que puede resolverse por adición o substracción (pág. 30).

c) Un problema del tipo “un tesoro…”.

Éste es el problema número 10 del capítulo de problemas variados (págs. 40-41). Lo que presento no es la traducción completa del texto, sino sólo aquellas partes que permiten examinar cómo en el curso de la construcción de la ecuación se intercambian los significados de tesoro, raíz y cosa entre las cantidades que se van construyendo. Éste es para mí un ejemplo crucial para entender que en el libro de al-Khwârizmî, tesoro, raíz y dirham no se corresponden con los tres términos de una ecuación de segundo grado, que cosa no se identifica con raíz y sus relaciones con la incógnita del problema.

Enunciado:

Sea un tesoro, cuyo tercio y tres dirhams se le quita y luego se multiplica lo que queda por sí mismo y resulta el tesoro.

La incógnita es por tanto el tesoro. El enunciado podríamos traducirlo por:

$$\left[t-\left(\frac{1}{3}t+3\right)\right]\cdot\left[t-\left(\frac{1}{3}t+3\right)\right]=t$$

Construcción de la ecuación:

Su procedimiento. Quita un tercio y tres dirhams del tesoro, queda dos tercios de él menos tres dirhams, *lo que es la raíz* (cursiva mía).

Si designamos la raíz con r:

$$t-\left(\frac{1}{3}t+3\right)=\frac{2}{3}t-3=r$$

Esa expresión se identifica con la raíz, ya que multiplicada por sí misma es el tesoro.

Multiplica por tanto dos tercios de cosa, *esto es del tesoro*, menos tres dirhams por sí mismo (cursiva mía).

El tesoro se identifica con la cosa $t \longrightarrow c$.

$$\left(\frac{2}{3}c-3\right)\cdot\left(\frac{2}{3}c-3\right)\ [=c]$$

Dos tercios multiplicado por dos tercios resulta cuatro novenos del tesoro
y tres dirhams substractivos por dos tercios de cosa, resulta dos raíces.

La cosa, que ha substituido al tesoro, como se multiplica por sí misma, da origen a una nueva cantidad que es un tesoro: $cc \longrightarrow t$.

De nuevo tres dirhams substractivos por dos tercios de cosa, resulta dos raíces y menos tres por menos tres, resulta nueve dirhams. Son por tanto cuatro novenos de tesoro y nueve dirhams menos cuatro raíces, igual a una raíz.

Y como es una cantidad que se multiplica por sí misma, es ahora una raíz: $c \longrightarrow r$.

$$\frac{4}{9}t+9-4r=r$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANBOUBA, Adel. 1978. "L'algèbre arabe aux IX^{e} et X^{e} siècles. Aperçu général". *Journal for the History of Arabic Science* vol. 2, págs. 66-100.

BOURBAKI, Nicholas. 1969. *Éléments d'Histoire des Mathématiques.* Paris: Hermann.

BUSARD, Hubert L. L. 1968. "L'algèbre au Moyen Âge: Le "Liber Mensurationum" d'Abu Bekr", *Journal des Savants*, avril-juin, págs. 65-125.

DIOPHANTE. 1984. *Tome III. Les Arithmétiques. Livre IV,* et *Tome IV, Livres V, VI et VII.* Texte de la traduction arabe de Qustâ ibn Lûqâ établi et traduit par Roshdi Rashed. Paris: Les Belles Lettres.

HOGENDIJK, Jan P. 2002. "Two editions of Ibn al-Haytham's Completion of the Conics", *Historia Mathematica*, vol. 29, págs. 247-265.

HØYRUP, Jens. 1986. "Al-Khwârizmî, Ibn Turk, and the Liber Mensurationum: On the Origins of Islamic Algebra", *ERDEM*, vol. 2, págs. 445-484.

HØYRUP, Jens. 1990. "Algebra and Naïve Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought". *Altorientalische Forschungen.* Vol. 17, págs. 27-69 y 262-354.

HØYRUP, Jens. 1991. " 'Oxford' and 'Cremona': On the relations between two Versions of al-Khwârizmî's Algebra". *Filosofi og videnskabsteori på Roskilde Universitetcenter. 3. Række: Preprint og Reprints* nr. 1.

HØYRUP, Jens. 1992. " 'Algèbre d'al-gabr' et 'algèbre d'arpentage' au neuvième siècle islamique et la question de l'influence babylonienne", in Fr. Mawet & Ph. Talon, eds., *D'Imhotep à Copernic. Astronomie et mathématiques des origines orientales au moyen âge*, pp. 83-110. Actes du Colloque International, Université Libre de Bruxelles, 3-4 novembre 1989 (Lettres Orientales, 2) Leuven: Peeters.

HØYRUP, Jens. 1994. "The Antecedents of Algebra", *Filosofi og videnskabsteori på Roskilde Universitetcenter. 3. Række: Preprint og Reprints* 1994 nr. 1.

HUGHES, Barnabas. 1986. "Gerard of Cremona's Translation of al-Khwârizmî's al-jabr: A Critical Edition", *Mediaeval Studies*, 48, págs. 211-263.

HUGHES, Barnabas. 1989. *Robert of Chester's Translation of al-Khwârizmî's al-jabr: A New Critical Edition*, Boethius, Band XIV. Franz Steiner Verlag: Stuttgart.

LEVEY, Martin, ed. 1966. *The Algebra of Abû Kâmil, in a Commentary by Mordecai Finzi*. Hebrew text and translation, and commentary. Madison, WI: The University of Wisconsin Press.

LUCKEY, Paul. 1941. "Tâbit b. Qurra über den geometrischen Richtigkeitsnachweis der Auflösung der quadratischen Gleichungen", *Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Berichte* 93, págs. 93-114.

NESSELMAN, G. H. F. 1842. *Versuch einer Kritischen Geschichte der Algebra, 1. Teil. Die Algebra der Griechen*. Berlin: G. Reimer.

RASHED, Roshdi. 1984. *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des Mathématiques arabes.* Paris: Les Belles Lettres.

RASHED, Roshdi. 1990. "La philosophie des mathématiques d'Ibn al-Haytham", suivi du "Traité d'al-Hasan Ibn al-Hasan Ibn al-Haytham sur l'analyse et la synthèse", *Mélanges de l'Institut Dominicain d'Études Orientales du Caire*: vol. 20, págs. 31-231.

RASHED, Roshdi. 1993. "La philosophie des mathématiques d'Ibn al-Haytham, – II: «Les Connus»", suivi du "Traité d'al-Hasan Ibn al-Hasan Ibn al-Haytham sur les connus", *Mélanges de l'Institut Dominicain d'Études Orientales du Caire*: vol. 21, págs. 87-276.

ROSEN, Frederic. 1831. *The algebra of Mohammed Ben Musa.* London: Oriental Translation Fund.

SESIANO, Jacques. 1982. *Books IV to VII of Diophantus' Aritmética in the Arabic Translation Attributed to Qustâ ibn Lûqâ*. New York: Springer Verlag.

SZABÓ, Árpád. 1977.*Les débuts des mathématiques grecques*. Paris: Vrin.

AL-TÛSÎ, Sharaf al-Dîn. 1986. *Œuvres mathématiques, Algèbre et Géométrie au XII^e^ siècle. Tomes I et II.* Texte établi et traduit par Roshdi Rashed. Paris: Les Belles Lettres.

ZEUTHEN, Hieronimus Georg. 1886. *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum.* Kopenhagen: Höst & Sohn.