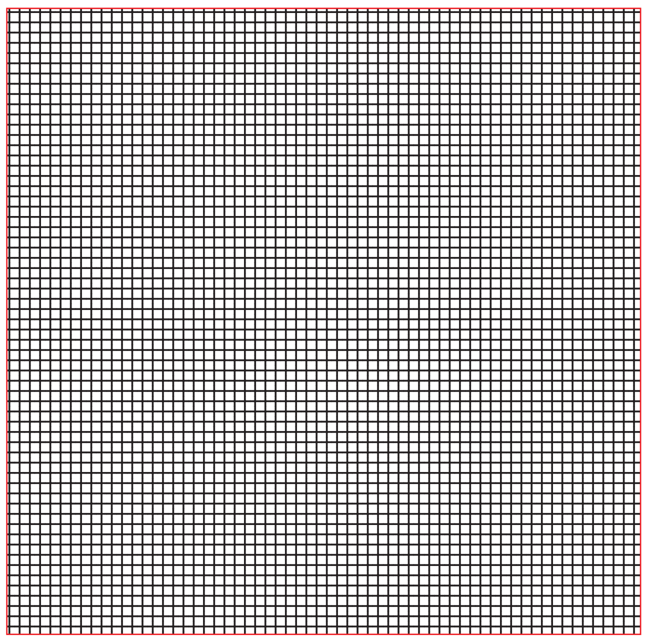
Semiótica y Matemáticas



Luis Puig

Eutopías Series
Working Papers

Vol. 51 1994

EUTOPÍAS/Documentos de trabajo
Colección interdisciplinar de estudios culturales

Distribución y pedidos/ Distribution & Orders:
Episteme, S. L.
Apartado postal 12085/46080 Valencia, España
Telf. y Fax (34) 96334 8149
E-mail: 'episteme@dirac.es'
WWW: 'http://www.uv.es/~eutopias'

en colaboración con

Departament de Teoria dels Llenguatges
Departament de Filosofia
Departament d'Història Contemporània,
(Universitat de València. Estudi General)
Departamento de Lingüística General y Teoría de la Literatura
(Universidad de Granada)
Instituto Miguel de Unamuno de Humanidades y Comunicación
(Universidad Carlos III de Madrid)
Asociación Andaluza de Semiótica
Asociación Vasca de Semiótica

Impreso en E. C. LLISO
Bilbao 10, pasaje / 46009 Valencia, España
ISSN: 0213246X/Depósito legal: V-327-1985

SEMIÓTICA Y MATEMÁTICAS

¿Tratan las matemáticas de signos escritos? Tan poco como el ajedrez trata de figuras de madera.
Wittgenstein, *Gramática filosófica.*

Quiero decir: lo importante de las matemáticas es que sus signos son usados también por los acusmáticos.[1]
Wittgenstein, *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática.*

1.— *Instantáneas.*

Hans Freudenthal escribió, hace ya más de veinte años, que consideraba importante abordar la relación entre matemáticas y lenguaje sin presuponer ningún tipo de primacía de lo uno sobre lo otro, al subrayar que se desconocía qué había inventado primero el hombre, si la escritura o la aritmética[2]. Hoy sabemos, gracias a descubrimientos arqueológicos recientes[3], que los primeros signos escritos que crearon un pueblo sumerio en el sur de Mesopotamia y uno elamita en Susa, en el actual Irán —el desarrollo de cuyos sistemas de escritura se ha podido reconstruir paso a paso desde sus inicios alrededor del 3500 antes de nuestra era— fueron signos aritméticos. Esos signos, marcados con un estilete de marfil en el exterior de bolas huecas de barro blando, se correspondían con unos guijarros de distintas formas contenidos en el interior de las bolas, tanto en la forma como en el número[4]: las marcas eran pues iconos que representaban los guijarros ocultos, y bastaba romper la bola, si se quería verificar que efectivamente estaban en el lugar de los objetos representados. Pero esta presencia simultánea de marcas y guijarros sólo se produce en el segundo momento de la historia que se ha podido reconstruir a partir de los restos encontrados, un período que aparece como de transición entre otro inicial, en que las bolas de barro contienen guijarros pero no llevan ninguna marca en el exterior, y un tercer momento en que desaparecen los guijarros ocultos —y con ellos la necesidad de modelar bolas huecas— para dar paso a tablillas compactas más o menos planas con las marcas sobre ellas.

En cualquiera de los momentos de esta historia, bolas huecas o tablillas son registros de transacciones comerciales, *cuentas*. Y, por ello, los objetos representados por las primeras marcas escritas —durante un tiempo, presentes aunque ocultos— son también signos aritméticos: cada uno de los guijarros encerrados en las bolas huecas representa convencionalmente, según sea su forma, una cantidad distinta de objetos. En efecto, esos guijarros han sido manipulados para realizar una cuenta en el curso de una transacción comercial y han sido encerrados en una bola de barro para dejar constancia del acuerdo entre las partes que comercian sobre cuál es la cantidad que ha intervenido en la transacción. Los signos escritos aritméticos están pues en el lugar de otros signos aritméticos cuya materia de la expresión es diferente y acaban substituyéndolos en los registros. Ahora bien, sólo cabe que los substituyan en los registros, ya que esos signos escritos pueden dar cuenta de los *resultados* de las acciones realizadas con los guijarros-signos que representan, pero carecen de capacidad operatoria, es decir, no es posible realizar directamente con ellos las acciones realizables con los guijarros, sólo están allí para dar fe del acuerdo alcanzado ante quien no haya estado presente o en el futuro.

No voy a seguir aquí la historia de la creación de la escritura cuneiforme a partir de estos primeros signos aritméticos escritos, ni tampoco voy a entrar en los detalles singulares del uso de la escritura cuneiforme sumeria para escribir en una lengua semítica, el acadio, la mayor parte de las tablillas con textos matemáticos que han aparecido y han sido descifradas. En la época paleobabilónica (2000 a 1600 a.n.e.) a la que pertenecen esas tablillas, ya no hay en ellas sólo registros de transacciones sino, sobre todo, textos escolares, que son básicamente de dos tipos: colecciones de problemas en las que, tras el enunciado de cada uno, se dan instrucciones para obtener su resultado —unas veces en futuro, otras en imperativo; siempre en segunda persona—, y tablas con resultados de operaciones aritméticas. En los registros de transacciones, la falta de operatividad de los signos escritos aritméticos no tenía mayores consecuencias para quien tuviera que leer esos textos, ya que lo que se registraba en ellos era el *resultado* de una operación que se había realizado en presencia de testigos y de la que había que dar fe, y, además, siempre cabía el recurso a los guijarros-signos a los que éstos remitían. Ahora bien, la lectura de un texto que es un problema de matemáticas no puede limitarse a verificar la constatación del resultado de una acción, sino que conlleva desencadenar acciones para resolver el problema. Debido a la falta de operatividad de su sistema de signos escritos, los escolares babilonios tenían que realizar esas acciones, por un lado, usando otro sistema de signos del que no nos han quedado huellas—probablemente, realizando dibujos[5] en la arena o en algún tipo de tablero espolvoreado— y, por otro, recurriendo, a la hora de la realización de los cálculos aritméticos, a las extensas tablas de resultados de operaciones aritméticas, cuyo registro en series de tablillas, de las que se han conservado gran cantidad, les permitía no tener que reiterar la realización material de los cálculos.

Si los signos aritméticos que están en el origen de la escritura cuneiforme cayeron en desuso hace ya milenios, los pastores etruscos, lejos de las transacciones comerciales y las escuelas de los escribas del creciente fértil, haciendo muescas en un palo, una por cada cabeza contada, crearon un sistema de numeración que, aunque marginalmente, aún usamos: el que se conoce como sistema de numeración romano.

Los signos que hemos heredado de ellos para la representacion de los números parecen en efecto haberse desarrollado como consecuencia de su inscripción material en un registro lineal[6]. Así, la primitiva reiteración de las muescas, | | | | | | | | | …, pasó a estar estructurada mediante marcas especiales cada cinco muescas, con el fin de facilitar la cuenta en la expresión: una marca inclinada en el quinto lugar, una marca con forma de aspa en el décimo, etc., dando origen, para registrar un rebaño de veintitrés cabezas, a marcas como | | | | / | | | | X | | | | / | | | | X | | |. Muescas primarias y marcas estructurantes acabaron convirtiéndose en las letras del alfabeto I, V, X, al integrarse con la escritura e identificarse con las letras a las que más se parecían.

Siendo lugares en una serie, ni la V ni la X significaban los cardinales ‘cinco’ o ‘diez’, sino los lugares quinto y décimo en la serie. De hecho, las primeras escrituras para ‘cinco’ y ‘diez’ no fueron V y X, sino IIIIV y IIIIVIIIIX, que, éstas sí, representan cardinales y en las que tanto I como V representan una unidad. Sólo en un segundo momento un criterio de economía hizo que V representara IIIIV y por tanto cinco unidades. Los signos V y X funcionaron inicialmente como puntos de referencia en la serie también en otro sentido: IV llegó a significar ‘cuatro’ no por una regla substractiva entre los cardinales designados por I y V, sino porque la presencia del signo V permitía saber que se estaba designando la marca inmediatamente anterior a V en la serie. De la misma manera, VI no llegó a significar ‘seis’ por ninguna regla aditiva, sino por designar la marca inmediatamente posterior a V. Sólo cuando los signos V y X adquirieron el significado cardinal —al estar en el lugar de IIIIV y IIIIVIIIIX—, las reglas anteriores, que trataban sobre posiciones en una serie, se reinterpretaron como reglas aditivas y substractivas entre cardinales. En la historia así narrada, las transformaciones en la expresión producidas por procesos de abreviación dotaron de sentidos nuevos tanto a los signos elementales como a las reglas de formación de signos compuestos, sentidos que son los significados con que ahora se enseñan en las escuelas.

Árpád Szabó[7] ha argumentado que la geometría griega era primitivamente una especie de ἱστορία[8], una indagación empírica sobre las propiedades de las figuras geométricas, basada en la vista. Por eso, cuando, como hace Euclides, los objetos de la geometría se definen desprendiéndose de las propiedades sensibles de las figuras geométricas trazadas en la tierra, como medios de organización de éstas[9] ("Un punto es lo que no tiene partes." "Una línea es una longitud sin anchura."), esas definiciones han de acompañarse del postulado de las condiciones mismas del discurso en el que ha de dialogar el lector. Szabó afirma que la palabra que usa Euclides y que traducimos por postulado, αἰτήματα, designa en la dialéctica una petición a la que el interlocutor no asiente de inmediato, sino ante la que tiene reservas. Por eso Euclides escribe en imperativo: "Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera", y de la misma manera el resto de los cinco postulados, con el fin de señalar al lector cuáles son los poderes constructivos de los que ha de dotarse quien haya de construir los objetos geométricos que van a estudiarse en los *Elementos*.

Las figuras geométricas que aparecen en el texto de los *Elementos*, y las que puedan trazarse en la tierra, no son ya pues el objeto de estudio de la geometría, sino signos que están en el lugar de esos objetos geométricos cuya posibilidad de construcción se postula[10], y las propiedades de esos objetos no pueden examinarse cortando y pegando las figuras geométricas, más que a condición de que se haya establecido la crítica de ese procedimiento empírico[11]. Las propiedades de los objetos no son desveladas por la vista, sino que cada proposición demostrada construye un sentido nuevo para los objetos implicados; cada proposición aceptada por la comunidad de los matemáticos institucionaliza ese sentido como significado, como unidad del contenido culturalmente establecida.

2.— *Sistemas matemáticos de signos.*

Es habitual que una descripción del lenguaje en que están escritos los textos matemáticos distinga dos subconjuntos de signos en él: uno formado por signos que se ven como propios de las matemáticas y suelen calificarse de "artificiales", y otro formado por los signos de alguna lengua vernácula. Así lo hace, por ejemplo, Javier de Lorenzo, que atribuye al lenguaje usual "una muy clara misión: ser el vehículo o instrumento práctico que permite indicar cómo han de manejarse los elementos del lenguaje artificial"[12]. Esa separación en dos subconjuntos se torna radical cuando se concibe que las verdaderas matemáticas son las escritas en un lenguaje totalmente formalizado y el lenguaje usual aparece como un substituto torpe y grosero de éste[13], pero está presente también en descripciones hechas desde presupuestos filosóficos contrarios al formalismo. Es el caso de Brian Rotman quien, desde una posición que él califica de postestructuralista, afirma que la distinción entre lo que llama en su modelo semiótico de la actividad matemática el "Código" y el "metaCódigo" "opera tanto dentro del término 'símbolo' como contra él. De ello se sigue la oposición entre ideogramas concebidos formalmente (+, ×, 0, 1 2, 3, =, >, sen t, …, dy/dx, log(z), etc.), que se corresponden con signos en su manifestación Codificada, propia —podríamos llamarla 'literal'—, y los diagramas matemáticos (puntos, líneas, círculos, ángulos, aplicaciones, curvas, triángulos, gráficas, figuras, flechas, gráficos, etc.), que constituyen el campo del metaCódigo, es decir del discurso matemático informal —que podríamos llamar 'metafórico'—", y que "el legado de la persecución del rigor ha sido la marginación del metaCódigo […] en favor de los textos formales del Código."[14]

La distinción entre signos matemáticos "artificiales" y el lenguaje natural se acompaña pues de una tipología de los signos "artificiales". En el caso de Rotman, es una simple dicotomía entre diagramas, que se usan metafóricamente, y lo que parece ser que concibe como los signos propiamente matemáticos que "han de ser entendidos como *ideogramas* en el sentido usual de caracteres escritos que invocan, transmiten o denotan un contenido conceptual"[15]. Javier de Lorenzo es más prolijo y distingue entre 1) *signo estrictamente artificial*, como $\in$, ∇, $\wp$, $\cap$, que carecen de referente en el lenguaje natural; 2) *signo gráfico único*, como todas las letras de diversos alfabetos, N, e, π, $\aleph$, con las que se designa convencionalmente diversos objetos matemáticos; 3) *signo compuesto por varias letras*, como dx, ln, tg, que provienen de abreviaturas de palabras con las que se designan términos técnicos; 4) *término*, como 'grupo', 'anillo', 'cuerpo', 'matriz', que existen en el lenguaje natural, pero que se usan en los textos matemáticos con un significado ajeno a su campo semántico en el lenguaje natural; 5) *figura*, como las figuras geométricas, diagramas de Euler-Venn, etc., y 6) *signo artificial*, como 0, 1, (,), cuyo uso no es exclusivo de los textos matemáticos[16]. Ahora bien, Javier de Lorenzo señala que "la caracterización del texto matemático no va a estar en la mera utilización del signo artificial, sino en el modo de emplearlo y en el modo por el cual se le da un referente o contenido semántico posterior"[17] y de ahí deriva el interés que pueda tener la elaboración de una tipología de los modos de uso o de asignación de referente de los signos "artificiales" en los textos matemáticos a lo largo de la historia y la determinación de lo que llama "estilos matemáticos".

Sin embargo, desde el punto de vista en que yo quiero situarme, una semiótica de las matemáticas no ha de centrarse en el estudio de los signos, sino de los sistemas de significación y los procesos de producción de sentido. Entonces, esa diferencia entre un "signo artificial" —que sería el propiamente matemático y cuyos modos de uso o de asignación de referente específicos habría que estudiar— deja de ser crucial, para colocar en primer plano el sistema de signos considerado globalmente —o los sistemas de signos—, y lo que hay que calificar de "matemático" no es sólo un tipo particular de signos, sino sobre todo determinados sistemas de signos —es decir, no hay que hablar de sistemas de signos matemáticos sino de sistemas matemáticos de signos, y sólo en el interior de tales sistemas matemáticos habrá que estudiar el modo particular de combinación en que se presentan signos cuya materia de la expresión es heterogénea.

Eugenio Filloy introdujo hace ya algún tiempo la necesidad de usar una noción de sistemas matemáticos de signos lo suficientemente amplia como para que pueda servir como herramienta de análisis de los textos que producen los alumnos cuando se les está enseñando matemáticas en los sistemas escolares —y estos textos se conciben como el resultado de procesos de producción de sentido—, así como de los textos matemáticos históricos —tomados como monumentos, petrificaciones de la acción humana o de procesos de cognición propios de una episteme[18]. Al tomar como objeto de estudio estos textos matemáticos y no unos supuestos textos ideales concebidos como manifestaciones del "lenguaje matemático", o textos que se miden con respecto a ellos[19], tanto la noción de sistemas matemáticos de signos como la de texto ha de abrirse en varias direcciones.

Así, Filloy afirma que hay que hablar de sistema matemático de signos, con su código correspondiente, cuando se da la posibilidad convencionalizada socialmente de generar funciones sígnicas (mediante el uso de un functor de signos), incluso cuando las correlaciones funcionales han sido establecidas en el uso de artefactos didácticos en una situación de enseñanza, con la intención de que sean efímeras. Por otro lado, también hay que considerar los sistemas de signos o —como diremos más adelante con más precisión— los estratos de sistemas de signos que los aprendices producen con el fin de dotar de sentido a lo que se les presenta en la situación de enseñanza, aunque se rijan por un sistema de correspondencias que no ha sido socialmente establecido, sino que es idiosincrático. Como los textos no han de concebirse como manifestaciones del lenguaje matemático, ni identificarse con los textos escritos, es pertinente utilizar la noción de texto elaborada por Jenaro

Talens y Juan Miguel Company como "el resultado de un trabajo de lectura / transformación hecho sobre un espacio textual" y la distinción que ellos introducen entre *significado* y *sentido*.[20] Con ello, el sujeto empírico, que no tenía cabida en el reino de las matemáticas, retorna como aprendiz, productor de sentido.

3.— *La fenomenología didáctica de Hans Freudenthal.*

En el capítulo titulado "El método" de *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*[21], Hans Freudenthal expone dos ideas a partir de cuya combinación, reelaboración y articulación con la noción de sistemas matemáticos de signos y la distinción entre significado y sentido puedo explicar la semiosis matemática como un proceso que remite a un mundo de productos de otras semiosis.

La primera atañe a la naturaleza de los objetos matemáticos y de la práctica matemática. Para Freudenthal, los objetos matemáticos se construyen en la práctica matemática como *medios de organización* de lo que él llama "fenómenos tanto del mundo real como de las matemáticas" y el análisis fenomenológico de "un concepto matemático, de una estructura matemática o una idea matemática significa [. . .] describir[lo] en su relación con los fenómenos para los cuales es el medio de organización, indicando cuáles son los fenómenos para cuya organización fue creado y a cuáles puede ser extendido, de qué manera actúa sobre esos fenómenos como medio de organización y de qué poder nos dota sobre esos fenómenos."[22] Aunque el término 'fenómeno' no me parezca muy afortunado y, de hecho, Freudenthal apenas se entretenga en justificar su adopción, lo usaré como una manera de hablar para referirme a los objetos del mundo, sus propiedades, las acciones que hacemos sobre ellos o las propiedades de esas acciones, para cuya organización han sido creados los objetos matemáticos, cuando objetos, propiedades, acciones o propiedades de acciones son vistos como lo que organizan esos medios de organización y se consideran en su relación con ellos. Además, al incluir en esa lista las "acciones que hacemos sobre ellos" no sólo pretendo que consideremos las acciones que efectivamente realizamos o podemos realizar, sino las acciones que estipulamos que son realizables mediante los sistemas matemáticos de signos con los que describimos y producimos esos objetos matemáticos, en un sentido similar al que Philip Kitcher alude cuando afirma que "una manera de articular el contenido de la ciencia es concebir las matemáticas como una colección de relatos sobre las actuaciones de un sujeto ideal al que atribuimos poderes con la esperanza de iluminar las capacidades que tenemos de estructurar nuestro entorno”[23].

La concepción de los objetos matemáticos como medios de organización de “fenómenos” separa pues a Freudenthal de las filosofías de las matemáticas que se ha dado en llamar “realistas” o “platónicas”, que conciben los objetos matemáticos con una existencia anterior a la actividad matemática y ésta como el descubrimiento de la geografía del mundo en el que están esos objetos. Pero, además, Freudenthal no se queda en lo que él mismo llamará en otras ocasiones “el nivel más bajo” en que se da la relación “fenómenos”/modos de organización —entre otras cosas, porque no podría dar cuenta de las matemáticas producidas a lo largo de la historia—, sino que el proceso de creación de objetos matemáticos como medios de organización se acompaña de un proceso que convierte a esos modos de organización en un campo de fenómenos. Podríamos decir que para él el “mundo” que los objetos matemáticos organizan crece, se amplía al incorporarse a él los propios objetos matemáticos, que ya no son vistos como medios de organización sino como objetos, cuyas propiedades, las acciones que hacemos sobre ellos o las propiedades de estas acciones están pidiendo nuevos medios de organización que den cuenta de todo ello. Entendiendo pues “mundo” en este sentido, es decir, entendiendo que contiene también el producto de la actividad humana, cualquier objeto matemático —número, triángulo o grupo de Lie— puede verse como medio de organización de objetos del mundo, propiedades, acciones o propiedades de las acciones.

La segunda idea que quiero tomar de este texto de Freudenthal es para él una toma de partido didáctica: lo que llama la constitución de objetos mentales frente a la adquisición de conceptos, como objetivo de la acción educativa. Describiré lo que me interesa de esta idea en términos semióticos, en vez de en los términos que utiliza Freudenthal, usando como ejemplo un concepto complejo y múltiple como es el de número.

En el mundo, el número o, mejor, los números se usan en contextos de secuencia, recuento, cardinal, ordinal, medida, etiqueta, guarismo escrito, mágico, cálculo[24]. Los usos de los números en cada uno de esos contextos siguen reglas distintas: así, por ejemplo, cuando se dice “mi número de teléfono es tres, ochenta y seis, cuarenta y cuatro, ochenta y seis”, el número se refiere a un objeto y no describe ninguna propiedad suya ni de su relación con otros, sino que sirve para identificarlo —ése es el contexto de etiqueta, y en él, cuando la expresión es oral, las cifras que componen el número suelen expresarse aisladamente o en bloques de dos, como en el ejemplo que he referido—; en un contexto ordinal, el número se refiere a un objeto que está en un conjunto ordenado de objetos y describe qué lugar ocupa —"llegó el tercero" o "es el que hace tres"—; en un contexto cardinal, el número se refiere a un conjunto de objetos (sin orden o cuyo orden no se toma en consideración) y describe la numerosidad del conjunto —"hay tres"—; etc.

La totalidad de los usos de los números en todos los contextos constituye el *campo semántico* de "número", el significado enciclopédico de "número". La identificación del contexto en que el número se está usando permite a quien lee el texto, o recibe el mensaje, atenerse a la *restricción semántica* que establece el contexto y le permite así poder interpretarlo de forma afortunada. Ahora bien, el sujeto que lee un texto o ha de interpretar un mensaje no opera en el conjunto de la enciclopedia —es decir, la totalidad de los usos producidos en una cultura o una episteme— sino en su campo semántico personal, que ha ido elaborando produciendo sentido —sentidos que se convierten en significados si la interpretación es afortunada— en situaciones o contextos que le exigían nuevos usos para "número" o los números. Lo que Freudenthal llama "objeto mental número" equivale en cierta manera a lo que estoy llamando "campo semántico personal", y la toma de partido didáctica de Freudenthal es que la intención de los sistemas educativos tendría que ser, expresada en los términos que yo estoy usando, que el campo semántico personal de los alumnos sea lo suficientemente rico —abarque suficientemente la enciclopedia— como para permitirle interpretar de forma afortunada todas las situaciones en las que haya de usar "número" o los números.

La adquisición del concepto es, para Freudenthal, un objetivo educativo secundario, que puede posponerse a una sólida constitución de los objetos mentales, y, en todo caso, es posterior a ésta. En efecto, desde la descripción semiótica que estoy haciendo, cualquier concepto matemático de número que quiera examinarse una vez ya constituido aparece en su primera formulación como un *recorte del campo semántico*. Así, por ejemplo, el concepto de número natural elaborado por Peano —sobre todo en sus versiones más modernas— puede verse como el desmenuzamiento del significado propio del contexto de secuencia y su presentación en forma de una serie de axiomas, que dan cuenta exhaustiva de sus componentes. El concepto de número natural que se deriva de la construcción cantoriana, por su parte, se adscribe, desde el propio nombre que le dio Cantor en su intención original, al contexto cardinal.

La imagen de las matemáticas que dibujan estas dos ideas de Freudenthal está trazada pues por un movimiento horizontal de despliegue y ampliación de campos semánticos y un movimiento vertical de creación de conceptos, movimiento que, a mi entender, no puede desligarse de la elaboración simultánea de los sistemas matemáticos de signos. En el apartado siguiente, presento en forma de tesis algunos de los resultados que se derivan de la consideración simultánea de las ideas que acabo de analizar y su uso para la observación y análisis de textos de la historia de las matemáticas y textos producidos en situaciones de enseñanza en los sistemas escolares.

4.— *Tesis.*

I.— Los textos matemáticos se producen mediante sistemas matemáticos de signos estratificados y con materias de la expresión heterogéneas.

Con esta afirmación pretendo, en primer lugar, ir en contra de la idea de la existencia de un texto escrito en un lenguaje totalmente formalizado, que, aunque nunca se actualiza, está en el horizonte como el texto al que alude el que realmente se produce, mediante operaciones que se conciben como "abusos de lenguaje". Pero también quiero oponerla a la idea de Rotman según la cual hay un texto riguroso siempre presente como el propio de un Código que establece las reglas del texto matemático riguroso, pero que está envuelto en un texto informal organizado por el metaCódigo, aunque Rotman afirme, al revés que en el caso anterior, que el texto del metaCódigo es ineludible porque es el único modo de garantizar la *persuasión*, que es, según él, una necesidad intrínseca propia de todo texto matemático. Para Rotman, además, al hacer que no se pueda prescindir del metaCódigo, "los textos matemáticos se abren al tipo de actividad crítica que ya es familiar en las humanidades". Ahora bien, esto no significa, según Rotman, que "las formas de producir sentido, comunicar, significar y permitir interpretaciones múltiples hayan de ser asimiladas a las de los textos escritos convencionalmente en las humanidades", ya que en los textos matemáticos hay signos que no son del lenguaje natural. Salvado pues el peligro de reducción del texto matemático al texto ideal, parece que se trate para Rotman de salvar el peligro simétrico de reducción al texto escrito en vernáculo, ya que se pregunta "qué es indecible (de hecho, impensable, inescribible) excepto mediante símbolos matemáticos"[25]. Yo, por el contrario, no encuentro que sea tan singular analizar un texto en el que no sólo aparezca el lenguaje natural, ya que la semiótica se ha encargado de abordar el análisis del cine, la música o la danza, por ejemplo, cuya expresión es heterogénea al combinar materias de origen diverso; y encuentro que es más adecuado estudiar cuál es el tipo de combinación de materias de la expresión heterogéneas propio de los textos matemáticos, que la búsqueda de algo sólo expresable gracias a una materia expresiva que sería específica de las matemáticas.

Ahora bien, abandonar la idea de un texto formalizado o riguroso como el transfondo que regula de una u otra forma el análisis de los textos matemáticos no me hace negar el papel desempeñado efectivamente en la práctica por la ilusión del texto formalizado, ya que esta ilusión ha formado parte de la idea que los matemáticos se han hecho de las reglas de su práctica. El modo de combinación de las materias de la expresión procedentes de lenguajes distintos y el modo de relación entre los estratos de los sistemas matemáticos de signos está marcado entre otras cosas por ese componente no discursivo de la práctica matemática, como lo están los textos que se produjeron en un período histórico dado de entre todos los que podían haberse producido.[26]

II.— La heterogeneidad de la materia de la expresión se manifiesta en la presencia en los textos de segmentos de lenguaje natural, algebraico, figuras geométricas y otros diagramas, etc.

Esos segmentos, aunque procedan de lenguajes con los que pueden producirse textos según sistemas de reglas propias de cada uno de ellos, no están regulados por separado en los textos matemáticos por las reglas propias de cada uno de esos lenguajes, sino que las reglas de unos lenguajes contaminan las de los otros, de modo que los sistemas matemáticos de signos se rigen por reglas nuevas, creadas a partir de las de los distintos lenguajes que incorporan.

Así, por ejemplo, la expresión “siete menos cuatro” está construida importando al castellano la forma de la expresión aritmética 7–4. Esta extrañeza al castellano de expresiones como ésta, que ahora puede pasarnos desapercibida, es patente cuando se examinan textos escolares de comienzos del siglo XIX y se observa que, en cualquiera de ellos, esas expresiones se introducen como algo cuyo significado hay que explicar recurriendo a la expresión del lenguaje vernáculo “restar tanto de tanto”. Vallejo, por ejemplo, escribe: “la espresion 5—3=2, quiere decir que despues de quitar 3 unidades del 5 quedan 2, y se lee *cinco menos tres igual ó es igual á dos.*”[27]

III.— Los textos matemáticos llevan inscritos deícticos que refieren entre sí elementos de segmentos de naturaleza diferente.

Por ejemplo, la expresión “el punto A, el punto B, el segmento AB”, acompañada de la figura geométrica correspondiente, ya sea trazada materialmente o imaginada, en la que las letras traban entre sí palabras, figuras y símbolos literales y la operatividad de las letras o las figuras en la propia expresión suple la falta de operatividad del lenguaje natural; o las múltiples referencias entre “la hipotenusa *c*”, la letra *c* escrita junto a uno de los lados de un triángulo trazado en el papel y la expresión algebraica $a^2+b^2=c^2$, que permiten saber que el texto estipula que la figura trazada que *parece* un triángulo rectángulo representa efectivamente ese objeto geométrico y que $a^2+b^2=c^2$ enuncia el teorema de Pitágoras.

IV.— Gracias a estos deícticos, se inscriben en el texto indicaciones de *traducciones* entre los elementos mutuamente referidos, que son marcas que el propio texto lleva del campo semántico a partir del cual el lector ha de producir sentido. Excepto si se admite la deriva hacia lecturas aberrantes, estas indicaciones son necesarias porque toda lectura de un texto matemático constituye para el lector empírico un proceso de aprendizaje, en un sentido no trivial[28].

V.— Los objetos de los que tratan las matemáticas son creados en un movimiento fenómenos/medios de organización por los sistemas matemáticos de signos que los describen, y, ya que ese movimiento de ascenso de los fenómenos a los medios de organización no se desarrolla siempre en el mismo nivel, es decir, lo que se toma como fenómenos que piden ser organizados por nuevos medios no está en un mundo inmutable, cuyo conjunto de fenómenos fuera el objeto de estudio de las matemáticas, las matemáticas generan su propio contenido. Un aspecto importante de ese movimiento puede denominarse “abstracción”. La estratificación de los sistemas matemáticos de signos con que se producen los textos matemáticos tiene que ver con esos procesos de abstracción.

VI.— El que los sistemas matemáticos de signos sean el producto de un proceso de abstracción progresiva, ya sea en la historia de las matemáticas o en la historia personal de un sujeto empírico, hace que los que realmente se usan estén formados por estratos provenientes de distintos momentos del proceso, relacionados entre sí por las correspondencias que éste ha establecido.

VII.— La lectura/transformación de un texto/espacio textual puede hacerse entonces usando distintos estratos del sistema matemático de signos, recurriendo a conceptos, acciones o propiedades de conceptos o acciones, que están descritos en alguno de los estratos. Los textos producidos por lecturas que usen estratos distintos o una combinación distinta de estratos pueden ser traducidos unos a otros y reconocidos como "equivalentes", a condición de que en el sistema matemático de signos estén descritas también las correspondencias pertinentes entre los elementos utilizados. En ocasiones, dos espacios textuales ET y ET' no pueden ser leídos/transformados mediante un sistema matemático de signos estratificado L, recurriendo a los mismos conceptos, acciones o propiedades de conceptos o acciones, que están descritos en alguno de los estratos; mientras que esto sí que puede hacerse en otro sistema matemático de signos M[29]. Entonces, M es "más abstracto" que L, respecto a ET y ET'. En ocasiones, durante un proceso de enseñanza y aprendizaje, un alumno es incapaz de transformar un espacio textual ET' mediante un sistema matemático de signos estratificado L, recurriendo a los mismos conceptos, acciones o propiedades de conceptos o acciones con los que ha transformado un espacio textual ET; la ruptura de esta imposibilidad, el aprendizaje, se produce cuando modifica el estrato de lenguaje en que están descritos los medios de transformación, creando un nuevo sistema matemático de signos M, en el que los espacios textuales ET y ET' se identifican como transformables con los mismos medios[30]. La creación de M es un "proceso de abstracción", que conlleva también la elaboración de conceptos o acciones "más abstractos" (los que están descritos en el estrato de lenguaje modificado).

VIII.— En esas modificaciones de estratos de lenguaje que conducen a identificar conceptos o acciones, desempeña un papel importante la autonomización de las transformaciones de la expresión con respecto al contenido, de modo que éstas puedan efectuarse de acuerdo con las reglas sin tener que contrastar el resultado de las transformaciones de la expresión con respecto al contenido, en cada uno de los pasos, sino sólo eventualmente o una vez se ha dado por concluido el conjunto de transformaciones.

Umberto Eco señala que en las expresiones algebraicas como en todos los signos que él llama 'diagramas' "existen correspondencias puntuales entre expresión y contenido" por lo que "las operaciones que se llevan a cabo en la expresión modifican el contenido; y si estas operaciones se llevan a cabo conforme a ciertas reglas, el resultado proporciona nuevas informaciones sobre el contenido"[31]. Las figuras geométricas también son diagramas en este sentido, ya se tracen para representar objetos geométricos —como en los *Elementos* de Euclides— o para representar cantidades algebraicas —como se hace en el artefacto didáctico que Filloy describe en el artículo citado en la nota 30 o como hace al-Khwârizmî en *El libro conciso del cálculo de al jabr y al muqâbala*. Ahora bien, yo no diría como Eco que lo que el resultado de las transformaciones de la expresión proporciona pueda calificarse siempre de "nueva información sobre el contenido". En ocasiones, dotar de sentido al resultado de una transformación en la expresión supone ampliar el campo semántico de los objetos o las acciones implicados, como muestra un ejemplo tan simple como la identificación de a^0 con 1, gracias a que unas reglas producen $a^n / a^n = a^{n-n} = a^0$ y otras $a^n / a^n = 1$, con lo que la expresión a^0, que literalmente quiere decir "*a* multiplicado por sí mismo cero veces", lo que no significa nada, se ve dotada de sentido ampliando el campo semántico de "multiplicar" y "veces". La autonomización de la expresión lleva consigo pues un poder para generar contenido. Desde la inscripción de los primeros signos aritméticos escritos, que como he mostrado en las instantáneas históricas iniciales, carecían de capacidad operatoria, los matemáticos han ido desarrollado a lo largo de la historia sistemas de signos, cuya expresión tuviera cada vez más poder de generar contenido. De modo que, a mi entender, examinar las matemáticas como un sistema de signos y mostrar el papel crucial que desempeña la autonomización de la expresión no tiene por qué conducir a nada similar a la famosa conclusión de Russell de que "las proposiciones de las matemáticas son puramente lingüísticas y tienen que ver con la sintaxis".[32]

Luis Puig
Universitat de València

NOTAS

[1] Este término griego no está en el texto de Wittgenstein. Yo lo he usado en esta traducción tomándolo de la leyenda que cuenta que en la secta de los pitagóricos había dos categorías: una formada por los miembros esotéricos, que recibían el nombre de 'matemáticos' y conocían toda la doctrina, y otra, por los miembros exotéricos, que sólo conocían y tenían que seguir las reglas de conducta: éstos eran los 'acusmáticos'. (Véase Sir Thomas Heath. *A History of Greek Mathematics. Volume I. From Thales to Euclid*. New York: Dover, 1981, pág. 11. Reimpresión de la ed. original en Oxford: Clarendon Press, 1921.)

[2] Con esa afirmación comienza su libro *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel Publishing Co., 1973.

[3] James Ritter da noticia de ello en "A cada uno su verdad: las matemáticas en Egipto y en Mesopotamia", traducción de Luis Puig, contenido en Michel Serres, ed., *Historia de las Ciencias*. Madrid: Cátedra, 1991.

[4] Una descripción detallada de las formas de los guijarros y de los signos, las cantidades que representaba cada uno y las diferencias entre los casos sumerio y elamita puede verse en Georges Ifrah, *Las cifras. Historia de una gran invención*, versión española de Drakman traducciones. Madrid: Alianza, 1987.

[5] La arcilla se presta mal a hacer otras inscripciones que no sean las propias de la escritura cuneiforme, así que los textos matemáticos babilónicos no contienen figuras. Høyrup apunta que esta dificultad material para la inscripción de figuras junto a los signos cuneiformes tiene su reflejo en que la forma de presentar los procedimientos de solución de los problemas sea la de una serie de prescripciones. (Cf. Jens Høyrup, "Al-Khwârizmî, Ibn Turk, and the Liber Mensurationum: On the Origins of Islamic Algebra". *ERDEM*, 2, págs. 445-484, 1986.) El uso de otros medios materiales como el papiro hace posible la presencia de figuras en el cuerpo mismo de los textos y la inscripción en ellos de indicaciones desde el texto escrito a las figuras.

[6] Cf. G. Ifrah, op. cit.

[7] En *Les débuts des mathématiques grèques*. Traduit de l'allemand par Michel Federspiel. Paris: Vrin, 1977.

[8] Así dice Jámblico que la llamaba Pitágoras, según relata Sir Thomas Heath, op. cit., pág. 166. Paul Tannery, sin embargo, en su trabajo clásico de 1887, niega que el texto de Jámblico pueda interpretarse en ese sentido. Véase *La géométrie grecque*. Paris: Gauthier-Villars, 1887. Reedición en Paris: Éditions Jacques Gabay, 1988, pág. 81.

[9] Desde el punto de vista de las filosofías de las matemáticas que se ha dado en llamar "realistas" o "platónicas" esas definiciones refieren a objetos que tienen una existencia previa en otro mundo. Desde ese punto de vista, quizá más coherente con el texto euclídeo, no hay pues "desprendimiento de las propiedades sensibles", ni puede decirse que los objetos geométricos sean

"medios de organización" de las figuras geométricas trazadas en la tierra: el mundo matemático está ya dado y los mátemáticos describen su geografía, descubriendo nuevos objetos y nuevas propiedades de ellos. Yo apunto ya, por el contrario, con esta lectura del comienzo del texto euclídeo, a una explicación de la práctica matemática según la cual los objetos matemáticos se construyen para dar cuenta de un mundo de objetos y acciones sobre ellos, usando sistemas de signos que los describen y los construyen a la vez, mediante procesos de abstracción que se desarrollan creando estratos de los sistemas matemáticos de signos que se usan.

10 Protágoras, el sofista, aún pretenderá refutar a los matemáticos argumentando que una tangente a una circunferencia, la toca οὐ κατὰ στιγμήν, Ωλλὰ κατὰ μ∂κος, no en un punto, sino en toda una longitud, que es lo que efectivamente se ve que ocurre cuando las figuras geométricas se trazan en la tierra o el pergamino, y seguirá usando para 'punto' la palabra στιγμή, la incisión hecha con un objeto punzante, en vez de la palabra que usará Euclides en los *Elementos*, y la que usarán generalmente los matemáticos, que es σημεῖον, signo.

11 El libro II de los *Elementos* puede interpretarse como la crítica de los procedimientos de cortar y pegar de la tradición de los agrimensores babilónicos. Esto es lo que hace Jens Høyrup al escribir que las pruebas de la mayor parte de las proposiciones de ese libro pueden dividirse en dos secciones, "una primera que construye el diagrama y prueba que sus partes son realmente cuadrados, rectángulos, etc., y que lo que se supone que es igual realmente lo es. Una vez hecho esto, la segunda ejecuta las operaciones usuales de cortar y pegar – que ya no son, empero, "ingenuas", gracias a la primera parte de la prueba." (Jens Høyrup, "The Antecedents of Algebra". *Filosofi og videnskabsteori på Roskilde Universitetcenter. 3. Række: Preprint og Reprints* 1994 nr. 1, pág. 20. Ver también su texto "»The Four Sides and the Area«. Oblique Light on the Prehistory of Algebra." To be published in Ronald Calinger (ed.), *History of Mathematics: Sources, Studies, and Pedagogic Integration.* Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 1994.)

12 *Introducción al estilo matemático.* Madrid: Tecnos, 1971, pág. 25.

13 La ilusión de un texto escrito en una lengua matemática formalizada, que nunca está presente, pero al que el texto que realmente se escribe alude no puede encontrarse mejor expresada que en la Introducción al libro I de los *Éléments de Mathématique* de Nicolas Bourbaki [Paris: Hermann, 1966]: "Nous abandonnerons donc très tôt la Mathématique formalisée […] Les facilités qu'apportent les premiers «abus de langage» ainsi introduits nous permettront d'écrire le reste de ce Traité […] comme le sont en pratique tous les textes mathématiques, c'est-à-dire en partie en langage courant et en partie au moyen de formules constituant des formalisations partielles, particulières et incomplètes, et dont celles du calcul algébrique fournissent l'exemple le plus connu. Souvant même on se servira du langage courant d'une manière bien plus libre encore, par des abus de langage volontaires, par l'omission pur et simple des passages qu'on présume pouvoir être restitués aisément par un

lecteur tant soit peu exercé, par des indications intraduisibles en langage formalisé [...] Ainsi, rédigé suivant la méthode axiomatique, et conservant toujours présente, comme une sorte d'horizon, la possibilité d'une formalisation totale, notre Traité vise à une riguer parfaite [...]" (págs. 6-7). La expresión "abuso de lenguaje", que califica la operación fundamental que permite abandonar la escritura del texto formalizado y referirse a él, aparece recurrentemente a lo largo del tratado.

14 Brian Rotman, *Mathematical Writing, Thinking, and Virtual Reality*, en Paul Ernest, ed. *Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective.* London: The Falmer Press, 1994, pág. 80. Rotman presentó una primera versión de su modelo semiótico de la actividad matemática en su artículo "Toward a semiotics of mathematics", *Semiotica,* 72, págs. 1-35, 1988. Una versión más reciente, modificada y más extensa está en el capítulo 3 de su libro *Ad Infinitum... The Ghost in Turing's Machine.* Stanford, CA: Stanford University Press, 1993, que comienza anunciando que "Lo que propongo aquí es un modelo semiótico de la actividad matemática fabricado alrededor de la idea de un experimento mental. El modelo identifica el razonamiento matemático en su totalidad —pruebas, justificaciones, demostraciones, verificaciones— con la ejecución de cadenas de acciones imaginadas que detallan la realización de un cierto tipo de relato simbólicamente instituido y experimentado mentalmente." [pág. 66] La distinción entre Código y metaCódigo pretende dar cuenta de "los dos modos en que dividen los matemáticos contemporáneos su actividad: el formal y el informal." El Código es "el sistema unificado de todas las reglas, convenciones, protocolos y artefactos lingüísticos asociados que sancionan lo que ha de ser entendido por la comunidad matemática como uso correcto y aceptable de los signos"; el metaCódigo es "una colección de instrumentos discursivos y semióticos heterogénea y divergente" que dan cuenta de la "masa de actividades de significación y comunicación que en la práctica acompañan el primer modo [formal y riguroso] de presentar las matemáticas" [pág. 69]. En el modelo aún hay un tercer elemento al que Rotman llama el "subCódigo" o "Código virtual", y tres personajes: el Sujeto, que usa los signos del Código; la Persona, que usa los del metaCódigo, y el Agente, los del Código virtual.

15 Brian Rotman, *Ad Infinitum...*, op. cit., pág. 26.

16 Resumo brevemente lo que expone Javier de Lorenzo, op. cit., págs. 38-42.

17 Op. cit., pág. 47.

18 El programa de investigación generado, en el que mi trabajo se enmarca, aparece por primera vez esbozado en Eugenio Filloy y Teresa Rojano. "La aparición del lenguaje aritmético-algebraico". *L'educazione matematica* vol V, págs. 1-16, 1984. Esta noción de "sistemas matemáticos de signos" se introduce en Carolyn Kieran y Eugenio Filloy. "El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica". Traducción de Luis Puig. *Enseñanza de las ciencias,* vol 7, págs. 229-240, 1989. Algunos análisis de textos históricos realizados desde esta perspectiva están reunidos en Eugenio Filloy, Luis Puig y Teresa Rojano, eds. *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre*

Investigación en Educación Matemática. Historia de las ideas algebraicas. México, D.F: CINVESTAV/PNFAPM, 1993. Un panorama reciente de sus productos y los trabajos en ejecución está contenido en Eugenio Filloy. "Tendencias cognitivas y procesos de abstracción en el aprendizaje del álgebra y de la geometría". *Enseñanza de las ciencias*, vol. 11, núm. 2, 1993, págs. 160-166.

19 Para Thomas Tymoczko, una vez abandonada la búsqueda de fundamentos, "la filosofía de las matemáticas puede comenzarse de nuevo examinando las prácticas reales de los matemáticos y de los que usan las matemáticas" ("Introduction", en Thomas Tymoczko, ed. *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. Boston: Birkhäuser, 1986, pág. xvi.) Desde mi punto de vista también vale la pena considerar esos usuarios de las matemáticas que son los escolares.

20 Jenaro Talens and Juan M. Company. "The Textual Space: On the Notion of Text". *The Journal of the Midwest Modern Language Association*, vol. 17, num. 2, 1984, pág. 32.

21 Hans Freudenthal. *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel, 1983.

22 Op. cit., pág. 28.

23 Philip Kitcher. "Mathematical Naturalism", en William Aspray & Philip Kitcher, eds., *History and Philosophy of Modern Mathematics.* Minneapolis, MN: The University of Minnesota Press, 1988, pág. 313.

24 Esta lista de tipos de contextos está desarrollada a partir de la que estableció Karen Fuson en su libro *Children's Counting and Concepts of Number.* New York: Springer Verlag, 1988. Yo he adaptado algunos nombres de contextos e introducido otros nuevos.

25 Brian Rotman. *Mathematical Writing, Thinking, and Virtual Reality,* op. cit., pág. 81.

26 Desde esta perspectiva puede examinarse, por ejemplo, la clásica discusión sobre la desaparición de los análisis en el texto de Euclides en beneficio de la presentación sintética.

27 José Mariano Vallejo. *Tratado elemental de Matemáticas, escrito de orden de S. M. para uso de los caballeros seminaristas del seminario de nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino. Cuarta edición corregida y considerablemente aumentada. Tomo I. Parte primera, que contiene la Aritmética y Álgebra*. Madrid: Imprenta Garrasayaza, 1841, pág. 26.

28 El origen de la palabra 'matemática' señala este carácter: son matemáticas aquellas cosas que han de ser aprendidas, las cosas de las que nada puede decirse si no interviene un proceso de enseñanza y aprendizaje. Cuenta Anatolio, según relata Heath, op. cit., págs. 10-11, que "los peripatéticos explicaban el uso especial de la palabra μαθήματα de esta manera: indicaban que, mientras que cosas tales como la retórica, la poesía y el conjunto de la μουσική popular pueden ser entendidas por quien no las haya aprendido, las materias denominadas con el nombre especial de μαθήματα no pueden ser

conocidas por nadie que no haya seguido previamente un curso de instrucción en ellas, por esta razón esos estudios acabaron llamándose μαθηματική."

29 Así sucede, por ejemplo, en el libro *De Numeris Datis* con dos proposiciones que Jordanus Nemorarius transforma recurriendo a procedimientos distintos, y que, sin embargo, podrían transformarse de la misma manera usando el sistema de signos del álgebra simbólica, según la interpretación que hago en mi trabajo "El *De Numeris Datis* de Jordanus Nemorarius como sistema matemático de signos", *Mathesis,* México D. F.: UNAM, Vol. 10, 1994, págs. 47-92.

30 Una descripción algo más detallada de los episodios de un proceso en el que se producen estos hechos, y el análisis que yo reproduzco aquí con ligeros cambios, puede verse en Eugenio Filloy. "Tendencias cognitivas y procesos de abstracción en el aprendizaje del álgebra y de la geometría", op. cit.

31 *Semiótica y filosofía del lenguaje.* Traducción R. P. Barcelona: Lumen, 1990, pág. 24.

32 Bertrand Russell. "Is Mathematics purely Linguistic?", en *Essays in Analysis* by Bertrand Russell, edited by Douglas Lackey. London: George Allen & Unwin Ltd., 1973, pág. 306.