CLASIFICAR Y SIGNIFICAR.

Luis Puig
Universitat de València

1. No es fácil dar cumplida cuenta en esta réplica de todo lo que los tres textos en torno a la clasificación de problemas aditivos presentados para ser debatidos en este seminario contienen o suscitan. Son textos largos y minuciosos no pergeñados para la ocasión, sino que responden a trabajos de investigación ya culminados, que se encuentran en ejecución o que se enmarcan en programas de investigación de largo alcance. Simplemente por ello la réplica sería ardua en cualquier caso, pero en mi caso se añade el hecho de que, a diferencia de sus autores, yo no me he visto involucrado en ninguna investigación empírica sobre el asunto. Lo que sí que he hecho ha sido dedicar tiempo —y el esfuerzo que González Mari pregunta al comienzo de su texto si merece la pena— a su estudio.

La lectura de un texto se hace siempre a partir de lo que uno sabe —no podría ser de otro modo—, con ello es con lo que se le da sentido, ésa es nuestra lectura; pero lo que uno sabe tiene el sentido que le confiere el uso que uno le da. Por ello me ha parecido conveniente comenzar por esa diferencia entre lo que yo sé sobre clasificar problemas aditivos y lo que comparten los textos presentados a este seminario.

2. Hay otra diferencia aún que quiero señalar: Fernando Cerdán y yo estudiamos sistemáticamente y en detalle cómo clasificar los problemas aritméticos hace ya más de diez años. Al libro *Problemas aritméticos escolares* que escribimos entonces he vuelto a menudo y lo he usado con fines diversos y en distintos contextos, pero aquí no creo que tenga sentido exponerlo ni menos aún hacer su exégesis: lo que sí que me interesa es el poso que ha dejado en mí tras lo que el paso del tiempo ha ido relegando en el olvido, porque, a mi entender, permite pensar el asunto que nos ocupa de otra manera que también merece la pena ser explorada. Esto es pues lo que me parece pertinente traer a colación aquí:

- Los problemas aritméticos escolares, en particular los problemas aditivos, desempeñan un papel crucial para la constitución del campo semántico de las operaciones aritméticas. Una vez hemos establecido que las operaciones aritméticas, vistas desde su uso civil, tienen significados distintos en su uso en contextos distintos, los problemas son una de las tareas que proporcionan a los alumnos la oportunidad de enfrentarse a tales significados de las operaciones. Además, hay problemas que conllevan significados de las operaciones que no forman parte de los significados primarios de éstas: es el caso, por ejemplo, de los problemas de comparación; por lo que los problemas también amplían en este nuevo sentido el campo semántico de las operaciones.

- La descripción de los problemas puede hacerse tomando en consideración gran número de variables de distinta naturaleza. Sin embargo, para organizar el conjunto de las variables conviene adoptar como punto de vista central lo que permite distinguir significados distintos o formas de significar distintas. Esto se desprende de gran número de estudios empíricos y además es coherente con el papel de los problemas en la constitución del campo semántico de las operaciones aritméticas, que acabo de señalar.

  A este respecto, me parece importante subrayar que “el orden de las operaciones” no es una variable semántica[1], ya se represente con expresiones del tipo

$$a + b = \square \qquad a + \square = c \qquad \square + b = c$$

  o con esquemas como

$$\square + \bigcirc = \square \qquad \square + \square = \bigcirc .$$

- La estructura de un problema aritmético de varias operaciones combinadas (PAVOC), examinada desde el punto de vista del proceso de resolución, no puede describirse como acumulación de las de varios problemas de una etapa, ya que en su proceso de resolución intervienen elementos que no están presentes en el de los de una etapa y que son de naturaleza diferente; en concreto, la determinación de las incógnitas auxiliares o cantidades intermedias y la elaboración de una cadena de operaciones que conduce desde los datos a la incógnita. Además, la clasificación de esas cadenas en tipos se enfrenta, por pocas operaciones que intervengan, a la explosión combinatoria, si se distinguen los problemas de una etapa que se engarzan en la cadena en función de su categoría semántica. El caso de los problemas de dos etapas es singular porque sólo hay en ellos una incógnita auxiliar —lo

[1] Esto no quiere decir que las expresiones en cuestión “carezcan de significado” o sean “puramente sintácticas”. Lo que quiere decir es que para examinar desde el punto de vista del significado estas expresiones ya no debemos recurrir a las categorías semánticas, que lo describen en función del significado de las cantidades en la historia que narra el enunciado del problema verbal (inicial, final, de cambio, parte, todo, comparada, de referencia, etc.), ni a las variables semánticas que describen el tipo de dependencia semántica que establece que las relaciones lógicas entre las proposiciones del enunciado tengan la estructura de un problema aditivo.

que hace que sólo haya una cadena—, pero esto no los salvaguarda de la explosión combinatoria.

- Hay situaciones en que las categorías semánticas que sirven para clasificar los problemas de una etapa se extienden naturalmente, como consecuencia de la adopción de nuevos significados para las operaciones implicadas. Hacia los PAVOC esto sucede cuando se itera una misma operación con el mismo significado. Para lo que persigue el texto de Socas, Hernández y Noda, esto sucede cuando las operaciones adquieren nuevos significados al realizarse con números distintos de los naturales, como señalaré más adelante.
- La noción de campo conceptual tal como la usa Vergnaud es demasiado grande para ser eficaz en el estudio de los problemas con que los alumnos son enfrentados en la escuela primaria. Lo que Vergnaud llama campo multiplicativo contiene partes que se describen conceptualmente de la misma manera, pero que vistas desde lo que los alumnos han de aprender en la escuela son mucho más diferentes entre sí que lo son las partes de los campos conceptuales aditivo y multiplicativo con que los alumnos se enfrentan en ella. Si un estudio pretende elaborar modelos teóricos locales, es conveniente reinterpretar los productos de los análisis de Vergnaud en el terreno local en cuestión.

3. De las observaciones generales que acabo de exponer se desprende que mi contestación a las preguntas de González Mari “¿Es posible obtener una categorización exhaustiva y minuciosa de las tareas de un campo conceptual?; ¿merece la pena dedicar esfuerzos a obtener categorizaciones de tal tipo?” tiene que ser, al menos si me atengo a la letra de lo que él ha escrito, que no es posible, ni deseable. La explosión combinatoria nos lo impide —pero no sólo es un problema de tamaño, la ambición de catalogar el mundo siempre tropezará con posibilidades y singularidades impensadas o no describibles sin salirse del sistema de catalogación— y, lo que desde mi particular punto de vista es más importante, un programa de investigación que tiene como idea motriz la elaboración de modelos teóricos locales no lo desea, no sólo por el carácter local de los modelos, sino también por la naturaleza recursiva del proceso de su elaboración.

4. Dicho esto sobre la ambición del proyecto de clasificar los problemas aditivos, quiero ahora subrayar que no se trata de abandonar todo empeño analítico —que siempre conlleva clasificar—, sino por el contrario de subrayar que el análisis de las tareas es crucial tanto para la organización de la enseñanza —y de Freudenthal he aprendido una forma de abordar ese análisis— como para la organización de la investigación. Por ello voy a entretenerme ahora en presentar un esbozo de análisis que sirva de

contraste más que de réplica al análisis presentado por Castro y otros del caso singular de PAVOC que son los problemas aritméticos de dos operaciones combinadas (PADOC).

Lo que presento puede verse como un ejercicio de lectura: para entender el análisis de Castro y otros, decidí esbozar cómo hubiera hecho yo el análisis de los PADOC, siguiendo la vía abierta por el análisis que Fernando Cerdán y yo hicimos de PAVOC y problemas aritméticos elementales verbales (PAEV), y usar lo que produjera para interpretar el análisis de Castro y otros.

5. Señalaré para empezar que el análisis de los PAEV que realizamos toma en consideración lo siguiente:

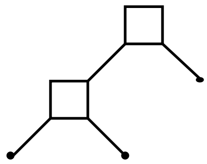
- La situación subyacente.
- El significado de las cantidades involucradas.
- La traducción del texto a una expresión aritmética.
- La operación que resuelve el problema, si la solución consiste en realizar una operación aritmética.
- Los límites que las categorías semánticas imponen a las estrategias afortunadas, en función de las representaciones correspondientes.
- El desprendimiento del significado de la situación y la elaboración de un texto más abstracto. La resolución a partir de los significados de esos textos más abstractos.

Con ello los problemas escolares se ven también como mundos creados para el desarrollo de la competencia aritmética, a partir de la elaboración de significados para las operaciones mediante su uso en los problemas.

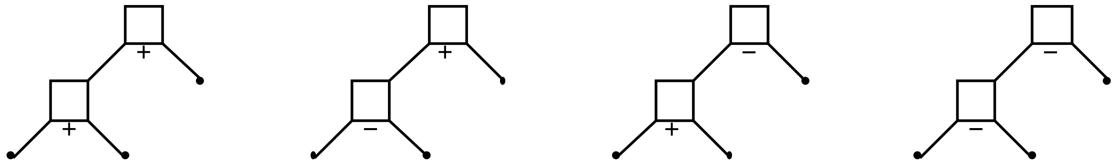
Cuando entran en escena los PADOC, mi análisis toma muy en serio, por tanto, la importancia explicativa de las categorías semánticas y lo integra en lo que mi análisis de los PAVOC mostró como nuevo y característico de esta clase de problemas, a saber, la elaboración de la cadena de operaciones, para cuya descripción usamos el diagrama descrito en nuestro libro *Problemas aritméticos escolares*.

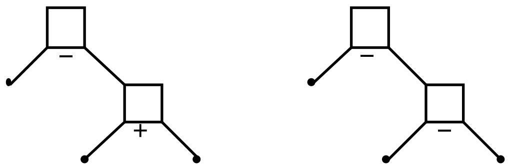
6. El esbozo que presento comienza pues con 1) la consideración del diagrama de un PADOC e incorpora progresivamente a él 2) las operaciones que resuelven los PAEV combinados y 3) las categorías semánticas de cada uno de ellos. El empeño subsiguiente será averiguar si todas las combinaciones obtenidas pueden ser efectivamente PADOC a los que se pueda dotar de sentido en algún contexto.

6.1. Desde el punto de vista del diagrama de análisis-síntesis, como un PADOC tiene una incógnita, tres datos y una incógnita auxiliar, no hay más que un tipo de problema. La estructura del proceso de resolución de un PADOC es única:



6.2. Esta única estructura puede ahora desglosarse en tipos en función de las operaciones que resuelven cada uno de los dos PAEV involucrados. Si consideramos sólo los problemas aditivos y, por tanto, las operaciones de adición y substracción, obtenemos los siguientes diagramas:





Si consideramos las cuatro operaciones elementales, el número de diagramas se hace ya grande, lo que hará aumentar extraordinariamente las clasificaciones subsiguientes, por lo que sólo voy a considerar estas dos operaciones.

6.3. Hagamos ahora entrar en juego las categorías semánticas. Lo más simple es comenzar considerando que los dos PAEV pertenecen a la categoría semántica combinación ya que ésta sólo tiene dos subcategorías, que se corresponden con los diagramas siguientes:

combinación 1 — incógnita: el todo

combinación 2 — incógnita: una parte

7. Así que, si los dos PAEV son de combinación, no hay más que añadir a las posibilidades que hemos encontrado. Se trata ahora de dilucidar si las combinaciones obtenidas pueden ser efectivamente PADOC a los que se pueda dotar de sentido en algún contexto. Para ello hay que encontrar situaciones de combinación que den lugar a problemas cuya solución se pueda describir con esos diagramas. Para conseguirlo, necesité recurrir a situaciones de tres tipos:

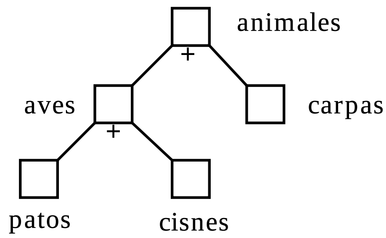
7.1. Un ejemplo del primero es la siguiente situación:

> En un estanque hay 3 patos, 5 cisnes, 7 carpas, 8 aves, 15 animales.

En esta situación, las cantidades están relacionadas así:

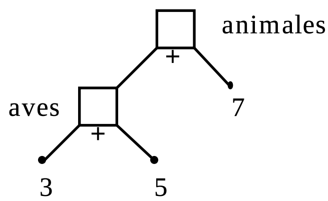
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{patos}\\ \text{cisnes}\end{array}\right\}\text{aves}\\ \text{carpas}\end{array}\right\}\text{animales}$$

El diagrama correspondiente es:

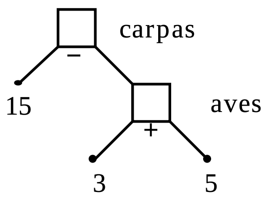


A partir de ella pueden escribirse problemas tomando como incógnita cualquiera de las cuatro cantidades, que no se encuentran en el diagrama en la posición de la cantidad intermedia (las aves) y dando como datos las tres restantes:

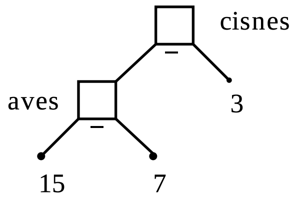
> En un estanque hay 3 patos, 5 cisnes y 7 carpas. ¿Cuántos animales?



> En un estanque hay 3 patos, 5 cisnes y algunas carpas. Hay 15 animales. ¿Cuántas carpas?



En un estanque hay 3 patos, algunos cisnes y 7 carpas. Hay 15 animales. ¿Cuántos cisnes?

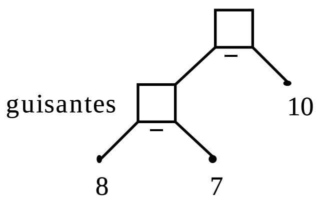


Si la incógnita es los patos, el diagrama es igual que en el caso de que sea los cisnes, y, si la incógnita es las aves, el problema no es PADOC. Así que esta situación da origen a tres tipos de problemas. Por la forma del diagrama podemos llamarlos problemas de "combinación encadenada".
7.2. El segundo tipo de situación consiste en un universo dividido dicotómicamente dos veces. Un ejemplo es:

15 guisantes. 8 verdes y 7 amarillos. 10 lisos y 5 rugosos.

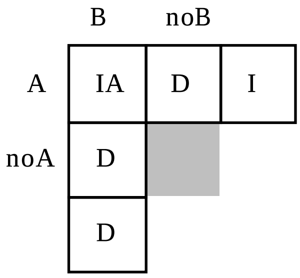
A partir de ella pueden escribirse problemas tomando como incógnita cualquiera de las cinco cantidades. Ahora bien, si la incógnita es el número de guisantes y tres de las otras cuatro cantidades son datos, no es un PADOC. Las otras cuatro elecciones de incógnita conducen a diagramas iguales desde el punto de vista del significado de las cantidades y de las relaciones entre cantidades, que es el criterio de igualdad que estoy utilizando, siempre que los guisantes no sea un dato, porque en ese caso no es un PADOC. Un ejemplo es:

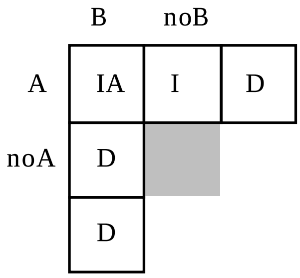
Hay guisantes. 8 verdes y 7 amarillos. 10 lisos. ¿Cuántos rugosos?



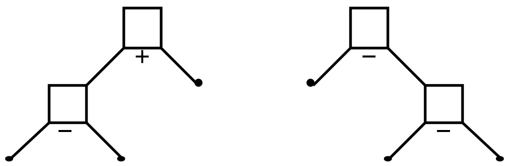
La doble división del universo me sugirió el nombre de "combinación cruzada".
7.3. La tercera situación la daré sólo esbozada. Se trata de un universo dividido dicotómicamente dos veces mediante dos propiedades cuya unión cubre el universo.

Hay dos problemas posibles, según la incógnita sea uno de los todos o una de las partes. La incógnita auxiliar ha de ser siempre la intersección, para poder tener un PADOC con sentido.
Estos diagramas de Carroll de la situación, con indicación de los dos problemas, ilustran su diferencia con la situación anterior:

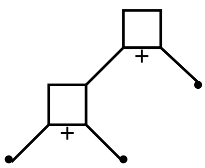




Los diagramas correspondientes son:

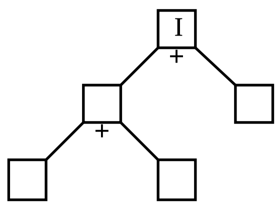


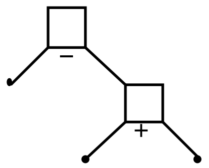
El nombre con el que me pareció oportuno bautizar esta situación, sugerido por el sombreado del diagrama de Carroll, fue “combinación sin exterior”.
La consideración de la categoría semántica de combinación en las posibilidades generadas por la consideración de las operaciones que resuelven los PAEV involucrados no introducen, por tanto, nuevos tipos, sino que reaparecen los seis ya obtenidos, sin que falte ni sobre ninguno. Lo que obtenemos ahora es una subdivisión en función de los tipos de situaciones subyacentes.
8. Partiendo de otras premisas, Nesher y Hershkovitz (1994) también obtuvieron seis esquemas, que se corresponden con éstos como muestro a continuación (aprovechando la figura para identificar mis diagramas con siglas que usaré en lo que sigue):



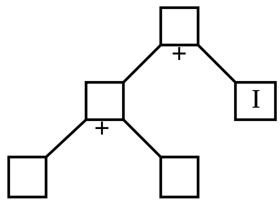
CE_1

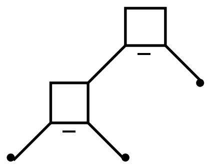
“combinación encadenada” equivale a “jerárquico”



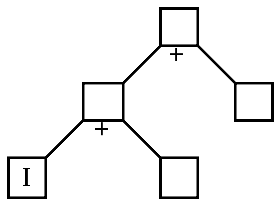


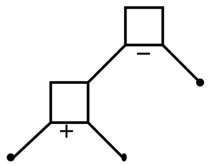
CE$_2$





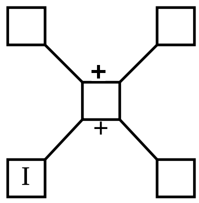
CE$_3$

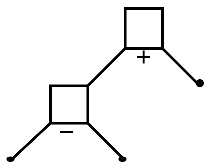




CC

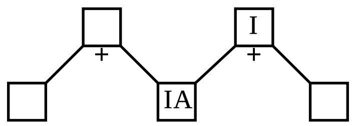
"combinación
cruzada"
equivale a
"compartir el todo"

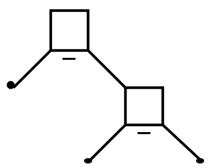




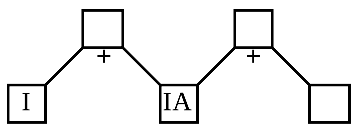
CSE$_1$

"combinación
sin exterior"
equivale a
"compartir una parte"





CSE$_2$



Mis diagramas representan la solución, por eso son todos iguales, salvo la combinatoria de las operaciones; y esta combinatoira produce todos los tipos y, en un cierto sentido, garantiza que no hay más posibilidades teóricas. Los esquemas de Nesher y Hershkovitz ponen de relieve las tres situaciones que yo he encontrado al querer dotar de sentido a las posibilidades teóricas[2] una vez se introduce en el análisis la consideración de las categorías semánticas.

9. Para continuar mi análisis de los PADOC en la vía trazada, basta con cambiar de categoría semántica y reiterar la búsqueda de situaciones en que se puedan dotar de sentido a las posibilidades teóricas. Sin embargo, como mi intención no es ser exhaustivo sino desarrollar un instrumento para leer el análisis de Castro y otros, éste está hecho a partir de los esquemas de Nesher y Hershkovitz, y acabo de establecer una correspondencia entre mis diagramas y esos esquemas, ya puedo realizar una lectura de los tipos de Castro y otros con mis diagramas.

El resultado de esa lectura es esquemáticamente el siguiente:

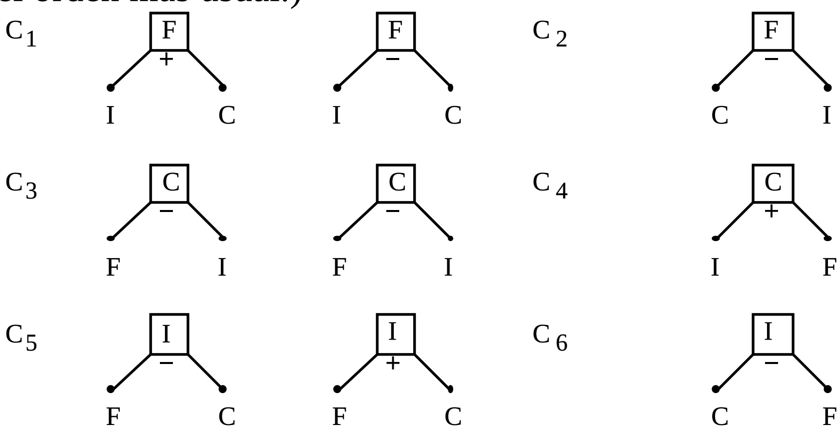
- El tipo 1 de Castro y otros es mi CE_1, salvo que los PAEV involucrados no son ambos de la categoría semántica combinación, sino que uno es de cambio y el otro de combinación.
- El tipo 2 es CE_3, salvo que es cambio y cambio.
- El tipo 3 es CC, salvo que es combinación y cambio.
- El tipo 4 es CSE_1, salvo que es combinación y cambio.
- El tipo 5 es CC, aunque esté calificado como “jerárquico” en la terminología de Nesher y Hershkovitz y, por tanto, tendría que ser CE en la mía. La diferencia con el tipo 3 es la subcategoría a la que pertenece el problema de cambio.
- El tipo 6 es CSE_2.

Leído pues con mis diagramas, la tipología de Castro y otros tiene dos tipos que son iguales y no recoge uno de los tipos (CE_2). Además, esta tipología no incorpora de manera sistemática las categorías semánticas en ella.

10. Aunque ya he dicho que no voy a proseguir esa incorporación sistemática sí que quiero esbozar las modificaciones que es preciso realizar en los diagramas anteriores tan pronto como se va más allá de la

[2] En realidad Nesher y Hershkovitz no usan esos esquemas para describir las mismas situaciones que yo he encontrado, ya que las mías son situaciones aditivas en las que el significado de las cantidades y de las relaciones entre ellas es siempre el de las propias de la categoría semántica de combinación. Nesher y Hershkovitz usan sus esquemas para describir situaciones en los que hay una relación aditiva de combinación y una relación multiplicativa. Aunque no me he entretenido en desbrozar este caso, no me parece que pueda tratarse de la misma manera una relación aditiva de combinación —que se caracteriza porque dos cantidades tienen el mismo significado y, por tanto, sólo dan origen a dos tipos de problemas— y una relación multiplicativa en que los factores tienen significados distintos, multiplicador y multiplicando, y dan origen por tanto a tres tipos de problemas.

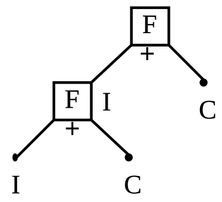
categoría semántica de combinación. En efecto, cualquiera de las otras categorías semánticas de los problemas aditivos se diferencian de la de combinación en que las tres cantidades tienen significados diferentes[3]. Esto obliga a incorporar el significado de las cantidades en el diagrama de análisis para poder dar cuenta de todas las subcategorías establecidas. En la ilustración siguiente muestro esto y añado las otras tres posibilidades que aparecen al combinar sistemáticamente los significados de las cantidades, la cantidad que es desconocida y las operaciones que resuelven el problema. Esas tres posibilidades que aparecen en columna a la derecha no pueden dotarse de sentido en ningún contexto mientras los números sean naturales y las operaciones tengan el significado de aumento o disminución correspondiente. Es posible dotarlas de sentido si se extiende el significado correspondiente de las operaciones incorporando el que conlleva su extensión a los números negativos. (Las letras designan lo habitual. I: cantidad inicial, C: cantidad de cambio, F: cantidad final, C_i: cada una de las seis subcategorías de la categoría semántica de cambio en el orden más usual.)



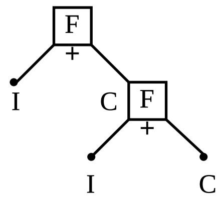
Si estas son las piezas con que se construyen los diagramas de los PADOC de dos cambios, las posibilidades son numerosas y se trata de nuevo de buscar situaciones en que se pueda dotar de sentido a estas posibilidades teóricas.

A título de ejemplo, presento el caso en que el PADOC está formado por dos C_1, que tiene dos posibilidades, que acompaño de dos enunciados esquemáticos:

[3] Esto también ocurre en las categorías semánticas de los problemas multiplicativos, salvo en la de producto de medidas, pero aquí me estoy restringiendo a los PADOC formados por dos relaciones aditivas.

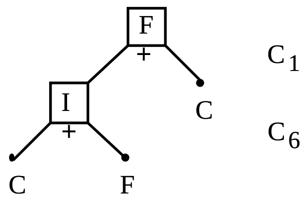


Juan tiene 4.
Le dan 3.
Le dan 5.
¿Cuántos tiene?

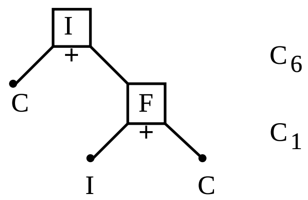


Juan tiene 4.
Le dan 3.
Pepe tiene 6.
Juan le da todo lo que tiene.
¿Cuánto tiene Pepe?

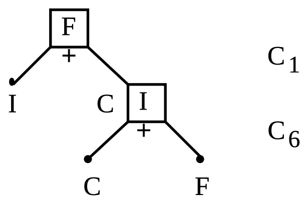
A título de ejemplo más complejo, presento el caso en que el PADOC está formado por un C_1 y un C_6, que tiene cuatro posibilidades. Acompaño las posibilidades de dos enunciados esquemáticos e invito al lector a buscar enunciados para las dos restantes.

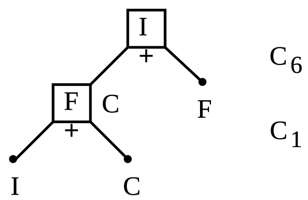


Pepe tenía.
Perdió 3.
Le quedan 7.
Si hubiera ganado 4,
¿cuántos tendría?



Si Pepe tuviera 4
y ganara 3,
tendría los mismos que
si pierde 5.
¿Cuántos tiene?





Todos estos tipos son "jerárquicos", en la terminología de Nesher y Hershkovitz o de Castro y otros.

11. Los análisis que he realizado hasta aquí están hechos sobre la base de los primeros significados asociados a las operaciones aditivas. Esto es razonable para empezar. Para empezar tanto desde el punto de vista de no complicar de entrada el análisis, pero también porque ésos son los significados con que los alumnos van a tener que tratar en los primeros años de su escolaridad. Ahora bien, de la misma manera que avanzan los alumnos, también lo han de hacer los análisis no situándose perpetuamente en lo que Freudenthal llamaba "el nivel más bajo". Los significados de las operaciones se amplían y se modifican en dos direcciones distintas: una por ampliación del campo semántico al usarse en nuevas situaciones con nuevos tipos de números (una dirección más o menos horizontal, como lo es la de la "matematización horizontal"), y otra por desprendimiento de los significados de las situaciones concretas en que se usan, su algoritmización y la constitución de nuevos significados puramente aritméticos (una dirección vertical, como lo es la de la "matematización vertical"). Esta última dirección se ve favorecida en el propio campo de los problemas por la mediación de los problemas de ábaco, en los que las historias que se narran tratan sobre números y los acontecimientos que se producen son operaciones aritméticas. No voy a intentar siquiera esbozar las consecuencias que el avance en esta dirección tiene para los análisis de los PADOC que estamos tratando. Pero sí que voy a usar el avance en la primera dirección para apuntar una lectura del comienzo del texto de Socas y otros que conduciría a un análisis de los problemas en que aparecen cantidades discretas relativas más parsimonioso.

12. La lectura consiste simplemente en nombrar las cantidades que aparecen en los ejemplos que ellos traen a colación y en mostrar que pueden clasificarse con arreglo a las categorías usuales, con sólo tomar en consideración que las operaciones y las cantidades tienen los nuevos significados involucrados por los nuevos tipos de números.

El problema

> Juan tiene 6 boliches y juega una partida con Luis y pierde 8 boliches. ¿Cuántos boliches debe Juan a Luis?

tiene
una cantidad inicial: los boliches de Juan,
una cantidad de cambio: los boliches que pierde Juan,
una cantidad final: los boliches que Juan debe.
El cambio es de disminución y la incógnita es la cantidad final, así que se trata de C_2.

O bien, se corresponde con el diagrama que en la ilustración anterior está junto a C_2 y que antes hemos dicho que carecía de sentido, salvo teniendo en cuenta los nuevos significados que ahora estamos considerando.
El problema

> En el recreo Juan ganó 6 canicas y Pedro ganó 5 más que Juan. ¿Cuántas canicas ganó Pedro?

tiene
una cantidad de referencia: las canicas que ganó Juan,
una cantidad comparada: las canicas que ganó Pedro,
una cantidad de diferencia: las canicas que Pedro ganó más que Juan.
La comparación es del tipo “más que” y la incógnita es la cantidad comparada, así que nada impide clasificar este problema en esa subcategoría de la categoría de comparar. Digo simplemente que nada lo impide, otra cosa es argumentar qué se gana y qué se pierde usando de forma nueva la vieja clasificación o elaborando una nueva.
13. El final del párrafo anterior ya indica que mi réplica no acaba con conclusiones concretas sobre las clasificaciones expuestas en los tres textos presentados al seminario. Durante el tiempo que le he dedicado a la lectura de esos textos y la preparación de mis notas para la réplica, al embarcarme yo también en la minucia de un análisis pormenorizado y cuidadoso en los detalles para poder ver qué sentido puedo darle a análisis de ese estilo, no he dejado de tener presente un libro que leí por primera vez hace ya veinte años y al que he vuelto recientemente de la mano de mi hija quinceañera. Se trata del libro de Robert Pirsig, *Zen y el arte del mantenimiento de la motocicleta*, que lleva como subtítulo “Una indagación en los valores”. No está lejos el trabajo de desmenuzamiento de los problemas aritméticos escolares, en los análisis que he estado realizando o examinando, del arte del mantenimiento de la motocicleta, que exige el conocimiento minucioso de cada una de sus piezas, hasta el tornillo más menudo, y de las herramientas para montarlas y desmontarlas, cuidarlas, afinarlas y tener cada una a punto para que la motocicleta funcione con suavidad. Para Pirsig, el arte del mantenimiento de la motocicleta tiene como objetivo la paz espiritual y sólo ésta permite tratar con parsimonia cada uno de los detalles del mantenimiento.

Referencias
Nesher, P. and Hershkovitz, S. 1994. The role of schemes in two-step problems: analysis and research findings. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 26, págs. 1-23.

Pirsig, R. P. 1974. *Zen and the Art of Motorcycle Maintenance. An Inquiry into Values*. London: Vintage.

Puig, L. y Cerdán, F. 1988. *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.