Carlos Ivorra Castillo

CARDINALES GRANDES

The infinite! No other question has ever moved so profoundly the spirit of man.

D. Hilbert

Índice General

Preámbulo

Los libros *Pruebas de consistencia* [PC], *Teoría descriptiva de conjuntos* [TD] y *Cardinales grandes* [CG] suponen al lector familiarizado con mi libro de *Teoría de conjuntos* [TC], en parte también con mi libro de *Topología* [T] y, en menor medida, con el de *Lógica matemática* [LM].

Más explícitamente, para seguir [PC], un lector familiarizado con [TC] pero no con [LM] debería asimilar al menos el Capítulo I de [LM] sobre lenguajes formales y, sobre todo, estudiar la axiomática de ZFC hasta el punto en que vea evidente que todos los resultados demostrados en [TC] a partir de los axiomas de NBG son demostrables (con los mismos argumentos, una vez establecidos con técnicas distintas los hechos más básicos) en ZFC. En particular esto supone familiarizarse con el uso informal de clases propias en ZFC. Para ello el lector puede revisar las secciones 3.2, 3.3 y 10.3 de [LM]. El capítulo I de [PC] está dedicado a discutir los principales conceptos y resultados que vamos a necesitar de [LM], con el fin de que un lector no familiarizado en profundidad con [LM] pueda seguir igualmente [PC] consultando [LM] de forma puntual cuando así se requiera. Las referencias a [T] en [PC] se dan principalmente en el capítulo VI y en algunos otros puntos aislados, en relación a aplicaciones concretas.

Por otra parte, en [CG] no hay ninguna referencia directa a [T] o a [LM], pero sí que hay una fuerte dependencia respecto a [TC].

En [TD] tampoco hay referencias a [LM], pero sí que requiere esencialmnte el capítulo VI de [T], dedicado a los espacios polacos, y también en parte de algunos resultados de [TC], sobre todo relacionados con la teoría de la medida, con cardinales y con el axioma de Martin.

En cuanto a las interdependencias entre [TD], [PC] y [CG], la tabla de la página siguiente muestra un posible orden de lectura simultánea.

En realidad, [TD] no requiere nada de los otros dos libros hasta la sección 4.7, donde se usan algunos resultados del capítulo II de [PC]. La dependencia con [PC] se vuelve más estrecha a partir del capítulo VI, donde se usan además algunos resultados del capítulo III de [CG]. Los capítulos X y XI requieren esencialmente resultados de [CG], sobre todo del capítulo VII.

Por su parte, [PC] depende de [TD] únicamente en los capítulos VI y IX, y de [CG] únicamente en la aplicación presentada en la sección 12.1 y en la prueba de la consistencia del axioma de los preórdenes propios en el capítulo XIII.

Descriptiva	Consistencia	Cardinales
TD I	**PC I**	
Ctos. de Borel y analíticos	Preliminares	
TD II	**PC II**	**CG I**
Conjuntos proyectivos	Modelos de ZF	Ultrapotencias
TD III	**PC III**	**CG II**
Teoría de la recursión	Constructibilidad	Consistentes con L
TD IV	**PC IV**	**CG III**
La teoría efectiva	Extensiones genéricas	Indiscernibles de Silver
TD V	**PC V**	**CG IV**
Ctos. hiperaritméticos	Aplicaciones	Erdős y Ramsey
TD VI	**PC VI**	**CG V**
Pruebas de consistencia	Reales genéricos	Medibles
TD VII	**PC VII**	**CG VI**
Juegos infinitos	Extensiones iteradas	Débilmente medibles
TD VIII	**PC VIII**	**CG VII**
Grados de Wadge	La independencia de AE	Fuertes y superfuertes
TD IX	**PC IX**	**CG VIII**
Wadge Borel	El modelo de Solovay	Compactos, supercompactos
TD X	**PC X**	**CG IX**
La consistencia de ADP	El Tª de los ultrafiltros	Los mayores cardinales
TD XI	**PC XI**	**CG X**
La consistencia de AD	Extensiones propias	Iteraciones de Easton
	PC XII	**CG XI**
	Aplicaciones	La independencia de la HCS
	PC XIII	
	El axioma APP	

En cambio, [CG] depende esencialmente de los primeros capítulos de [PC]. El capítulo I puede leerse tras el capítulo II de [PC] (como indica la tabla) salvo la sección final 1.8, que requiere el capítulo III de [PC] (constructibilidad). Los capítulos IV y V de [PC] (sobre extensiones genéricas) se requieren ocasionalmente en el capítulo VI de [CG], pero no vuelven a ser necesarios hasta los capítulos X y XI, donde se requiere también el capítulo VII de [PC].

Por último, hay que señalar que, para entender plenamente las introducciones a [TD] y [CG] es necesario conocer algunos hechos básicos de [PC], hasta el capítulo III en algunos puntos.

Introducción

No existe ninguna definición precisa de “cardinal grande”, sino que se llama así a a una familia de cardinales con definiciones y propiedades diversas, sin que ninguna de ellas en particular los caracterice como tales. No obstante, vamos a tratar de formarnos una idea sobre cuáles son esas propiedades.

Cardinales pequeños Tratemos de precisar en primer lugar la idea de qué cardinales podríamos considerar como “grandes”, en comparación con los cardinales que utilizan cotidianamente los matemáticos. Para empezar se nos presenta un problema, y es que, en ese sentido, $2^{\aleph_0}$ no es en absoluto un cardinal grande, pues los matemáticos tratan habitualmente con conjuntos de este tamaño, e incluso mayores, como el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, pero no podemos estimar la magnitud de $2^{\aleph_0}$, que podría ser igualmente $\aleph_1$ que $\aleph_{\omega^5+7}$. Por consiguiente, no podemos afirmar si $\aleph_{15}$ es un cardinal grande o pequeño.

Pero podemos eludir este problema recurriendo a la función $\beth$. Así, un candidato a cardinal grande podría ser $\beth_\omega$, que es el menor cardinal mayor que $\beth_0 = 2^{\aleph_0}$, $\beth_1 = 2^{2^{\aleph_0}}$, $\beth_2 = 2^{2^{2^{\aleph_0}}}$, etc. Más en general, podemos pensar en los cardinales límite fuerte $\beth_\lambda$, donde λ es un ordinal límite. Todos ellos tienen la propiedad de que si $\kappa < \beth_\lambda$, entonces $2^\kappa < \beth_\lambda$.

Es raro que un matemático trabaje con conjuntos de magnitud $\beth_\omega$, pero puede construirlos fácilmente si se lo propone. Una posibilidad para alejarnos drásticamente de los cardinales de los conjuntos que un matemático puede construir sería considerar como cardinales grandes a los puntos fijos de la función $\beth$, es decir, cardinales κ que cumplan $\kappa = \beth_\kappa$. Un cardinal así deja κ cardinales límite fuerte bajo sí, pero todavía es accesible al empeño constructor de los matemáticos, pues siempre es posible construir un conjunto de cardinal $\beth_0$, otro de cardinal $\beth_{\beth_0}$, otro de cardinal $\beth_{\beth_{\beth_0}}$, y finalmente tomar la unión de la sucesión así generada. El cardinal del resultado será un punto fijo de $\beth$.

Pues bien, aunque estamos considerando cardinales cada vez mayores, ninguno de los cardinales que hemos mencionado hasta ahora merece el calificativo de “grande” en el sentido usual en teoría de conjuntos, pues, aunque ya hemos dicho que no existe una definición precisa de “cardinal grande”, una condición que se exige inexcusablemente para que un cardinal pueda ser considerado como tal es que su existencia no pueda ser demostrada en ZFC y, más concretamente, que ello se deba a que su existencia implica la existencia de un modelo de ZFC.

Cardinales universales Se dice que un cardinal κ es *universal* si $V_\kappa \vDash \mathrm{ZFC}$, es decir, si al prescindir de todos los conjuntos de rango $\geq \kappa$ los conjuntos que nos quedan son suficientes para que se cumplan todos los axiomas (y todos los teoremas) de ZFC, de modo que ningún matemático echará de menos la pérdida.

Los cardinales universales son nuestro primer ejemplo de cardinales grandes. No es posible demostrar que existan en ZFC (por lo que ningún matemático definirá nunca ningún conjunto con un cardinal así). Esto puede razonarse de dos modos. Por una parte, como un cardinal universal implica la existencia de un modelo de ZFC, se cumple que

$$\underset{\mathrm{ZFC}}{\vdash} \text{Existe un cardinal universal} \rightarrow \mathrm{Consis}\,\mathrm{ZFC},$$

donde Consis ZFC es la sentencia aritmética que afirma la consistencia de ZFC. Si se pudiera demostrar en ZFC la existencia de un cardinal universal, tendríamos que

$$\underset{\mathrm{ZFC}}{\vdash} \mathrm{Consis}\,\mathrm{ZFC},$$

y el segundo teorema de incompletitud de Gödel afirma que esto sólo es posible si ZFC es contradictorio.

Otro argumento mucho más directo es que si en ZFC pudiera demostrarse que existe un cardinal universal, entonces, si κ es cualquiera de ellos, tendríamos que

$$V_\kappa \vDash \bigvee\mu\ \mu \text{ es universal},$$

y es fácil ver que "ser universal" es absoluto para V_κ, por lo que tendríamos que existiría un $\mu < \kappa$ universal. Pero esto es un descenso infinito que contradice la existencia de un mínimo cardinal universal. En suma, ZFC sería contradictorio, tal y como Gödel predecía en general.

Como en ZFC puede probarse la existencia de una clase cerrada y no acotada de puntos fijos de la función $\beth$ (véase [TC 6.6]), resulta que si κ es universal, entonces κ contiene un subconjunto cerrado y no acotado de puntos fijos de la función $\beth$, y en particular él mismo cumple $\kappa = \beth_\kappa$. Por lo tanto, el menor cardinal universal (si existe) tiene que ser mucho mayor que el menor punto fijo de la función $\beth$, que era a lo máximo a lo que habíamos llegado en el apartado anterior como candidato a "cardinal grande".

Salvo unas pocas excepciones que "desdibujan" ligeramente la base de la escala de cardinales grandes (los relacionados con los cardinales débilmente inaccesibles, de los que hablaremos luego), todos los cardinales considerados "grandes" son universales. Esto debe llevarnos a una reflexión: si aceptamos que todo cardinal grande es universal (lo cual es casi cierto), el siguiente de un cardinal universal no es un cardinal grande (pues es fácil ver que para ser un cardinal universal hay que ser un cardinal límite). Por lo tanto, debemos concluir que el concepto de “cardinal grande” usado en teoría de conjuntos no es realmente un concepto cuantitativo (relacionado con el tamaño del cardinal) sino cualitativo (relacionado con las propiedades que satisface, como que V_κ sea un modelo de ZFC).

Podríamos pensar que los “cardinales grandes” son cardinales que exhiben propiedades que garantizan que son muy grandes, si bien un cardinal puede ser mucho mayor y no exhibir ninguna de esas propiedades, y entonces no es considerado como “cardinal grande”. En particular, todos los cardinales considerados como “grandes”, son —sin excepciones— cardinales límite.

Cardinales α-universales No se puede demostrar que existan cardinales universales, y suponiendo que exista uno, no se puede demostrar que haya otro más. La razón es que si κ es el menor cardinal universal y μ es el siguiente, entonces V_μ es un modelo de ZFC en el que sólo existe un cardinal universal, luego no se puede demostrar que haya dos.

Por consiguiente, suponer que existen dos cardinales universales es una hipótesis más fuerte que suponer que hay uno, y a su vez es más débil que suponer que hay tres, o que hay infinitos. Esto nos abre un camino para definir cardinales “aún más grandes” que los que meramente son universales. Para ello vamos a llamar cardinales 0-*universales* a los cardinales universales, y definimos los cardinales 1-*universales* como los cardinales 0-universales κ tales que el conjunto de los cardinales 0-universales menores que κ no está acotado en κ.

Así, suponer que existe un cardinal 1-universal es más fuerte que suponer que existen infinitos cardinales 0-universales pues si κ es el menor cardinal 1-universal, entonces V_κ es un modelo de ZFC en el que hay infinitos cardinales 0-universales pero no hay cardinales 1-universales.

Pero nada nos impide ir más lejos y definir los cardinales 2-*universales* como los cardinales 1-universales κ tales que el conjunto de los cardinales 1-universales menores que κ no está acotado en κ.

En general, si K es una clase de cardinales, conviene definir $\mathcal{I}(K)$ como la clase de los cardinales $\kappa \in K$ tales que $\kappa \cap K$ no está acotado en κ. De este modo podemos definir U_0 como la clase de los cardinales 0-universales y, por recurrencia,[1]

$$U_{\alpha+1} = \mathcal{I}(U_\alpha), \qquad U_\lambda = \bigcap_{\delta<\lambda} U_\delta.$$

La clase U_α es la clase de los cardinales α-*universales.* Los cardinales 0-universales, 1-universales y 2-universales según esta definición son los que ya hemos descrito, los ω-universales son los que son n-universales para todo $n \in \omega$, los $\omega+1$-universales son los que son ω-universales y tienen por debajo un conjunto no acotado de cardinales ω-universales, etc.

[1] No es inmediato que esta definición recurrente de clases que pueden ser propias sea formalizable en ZFC, pero lo es. Véase en [TC 6.34] la forma de hacerlo para el operador $\mathcal{M}$ que recordaremos en breve, que vale igualmente con el operador $\mathcal{I}$.

Cardinales α-hiper-universales En general, si K es una clase de cardinales y construimos la jerarquía

$$K_0 = K, \quad K_{\alpha+1} = \mathfrak{I}(K_\alpha), \qquad K_\lambda = \bigcap_{\delta<\lambda} K_\delta,$$

es claro que si $\kappa \in K_\alpha$, la aplicación $\alpha \longrightarrow \kappa$ que a cada $\beta < \alpha$ le asigna el mínimo de K_β es estrictamente creciente, por lo que necesariamente $\alpha \leq \kappa$. En otras palabras, un cardinal κ no puede pertenecer a ninguna clase K_α con $\alpha > \kappa$.

En el caso concreto de los cardinales α-universales, esto significa que un cardinal κ puede ser a lo sumo κ-universal. El lector ingenuo pensará que hemos llegado a la cima de la jerarquía de los cardinales universales, pero no es así. Por el contrario, podemos llamar cardinales *hiper-universales* a los cardinales κ que son κ-universales y tomar la clase de los cardinales hiper-universales como base de una nueva jerarquía: llamamos 0-hiper-universales a los cardinales hiper-universales, llamamos 1-hiper-universales a los cardinales 0-hiper-universales que tienen por debajo un conjunto no acotado de cardinales 0-hiper-universales, etc. En general, así podemos definir cardinales α-hiper-universales para cada ordinal α.

Nuevamente, un cardinal κ puede ser a lo sumo κ-hiper-universal, pero nada nos impide definir los cardinales *hiper-hiper-universales,* o *hiper^2-universales,* como los cardinales κ que son κ-hiper-universales y tomarlos como base de una nueva jerarquía.

Del mismo modo se pueden definir los cardinales *hiper^3-universales* y *hiper^4-universales,* etc., y a su vez los *hiper$^\omega$-universales* como los cardinales que son hiper^n-universales para todo $n \in \omega$. Más en general, así podemos definir los cardinales *hiper$^\beta$-universales* para cada ordinal β, cada uno de los cuales genera su propia jerarquía de cardinales α-hiper$^\beta$-universales.

Nuevamente, cada cardinal κ es a lo sumo κ-hiper$^\kappa$-universal, luego estos cardinales pueden tomarse como base para una nueva jerarquía, y así podemos continuar *ad nauseam.*[2]

Cardinales inaccesibles Si el lector ingenuo piensa que el proceso de iterar una y otra vez la universalidad de los cardinales pone fin por aburrimiento a la generación de nuevos cardinales grandes, se equivoca nuevamente. Podemos trascender todas esas iteraciones con una nueva definición que el lector ya conoce: un cardinal inaccesible es un cardinal límite fuerte regular no numerable.

Los cardinales universales son cardinales límite fuerte no numerables, pero no son necesariamente regulares. De hecho, si κ es un cardinal inaccesible, el teorema [PC 2.15] nos da que el conjunto de los cardinales universales menores que κ contiene un c.n.a. En particular κ es 1-universal. Por lo tanto, si κ es el menor cardinal inaccesible, hay κ cardinales universales menores que κ, que no serán regulares.

[2]Es decir, hasta que el aburrimiento nos lleve a pasar a otra cosa.

Ejercicio: Demostrar que, si existe un cardinal universal, el menor de ellos tiene cofinalidad numerable. AYUDA: Probar que si κ es un cardinal universal de cofinalidad no numerable, entonces existe otro cardinal universal menor. Adaptar para ello la prueba del teorema de reflexión.

Ahora conviene observar un hecho general:

> *Sea K_0 una clase de cardinales y consideremos la jerarquía dada por la recurrencia $K_{\alpha+1} = \mathfrak{I}(K_\alpha)$, $K_\lambda = \bigcap\limits_{\delta<\lambda} K_\delta$. Si $\kappa \in K_0$ es un cardinal débilmente inaccesible[3] y $\kappa \cap K_0$ es estacionario en κ, entonces $\kappa \in K_\kappa$. Más aún, si HK_0 es la clase de los cardinales que cumplen $\mu \in K_\mu$, entonces $HK_0 \cap \kappa$ es estacionario en κ.*

En efecto, razonamos que $\kappa \in K_\alpha$ para $\alpha \leq \kappa$ por inducción sobre α. El caso límite es trivial. Supongamos que $\kappa \in K_\alpha$, con $\alpha < \kappa$ y veamos que $\kappa \in K_{\alpha+1}$. Podemos suponer que $\alpha > 0$ porque de la hipótesis se sigue inmediatamente que $\kappa \in K_1$.

Para cada $\delta < \alpha$ tenemos que $\kappa \in K_{\delta+1}$, luego el conjunto $K_\delta \cap \kappa$ no está acotado en κ, luego podemos considerar la función $f_\delta : \kappa \longrightarrow \kappa$ que a cada $\gamma < \kappa$ le asigna el menor elemento de K_δ mayor que γ. El teorema [TC 6.7] nos da que el conjunto $C \subset \kappa$ formado por los ordinales cerrados para las funciones f_δ es c.n.a. en κ, al igual que $C \setminus \gamma$, para cualquier $\gamma < \kappa$ prefijado. Como $\kappa \cap K_0$ es estacionario, tenemos que existe $\mu \in (C \setminus \gamma) \cap K_0$, y esto significa que $\mu \geq \gamma$ y $K_\delta \cap \mu$ no está acotado en μ para todo $\delta < \alpha$. Como $\mu \in K_0$, una simple inducción, a partir de la mera definición, prueba entonces que $\mu \in K_\alpha$. Por lo tanto, $K_\alpha \cap \kappa$ no está acotado en κ, luego $\kappa \in K_{\alpha+1}$.

Para la segunda parte definimos una sucesión $\{C_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ de c.n.a.s en κ. Concretamente, $C_0 = \kappa$, $C_{\alpha+1}$ es la intersección de C_α y el conjunto C que hemos construido en la inducción anterior, y $C_\lambda = \bigcap\limits_{\delta<\lambda} C_\delta$. De este modo, se cumple que $C_\alpha \cap K_0 \subset K_\alpha$ (lo hemos probado para el caso sucesor y el caso límite es trivial). Consideramos ahora la intersección diagonal $D = \mathop{\triangle}\limits_{\delta<\kappa} C_\delta$, que es c.n.a. en κ.

Si C es cualquier c.n.a. en κ, entonces $C \cap D \cap K_0 \neq \varnothing$, porque $K_0 \cap \kappa$ es estacionario, y si $\mu \in C \cap D \cap K_0$, tenemos que $\mu \in C_\delta \cap K_0$ para todo $\delta < \mu$, luego $\mu \in K_\delta$ para todo $\delta < \mu$, luego $\mu \in K_\mu$. Por lo tanto, $\mu \in HK_0 \cap C \neq \varnothing$, y esto prueba que HK_0 es estacionario en κ.

En particular, si κ es inaccesible hemos visto que $\kappa \cap U_0$ contiene un c.n.a., luego es estacionario, luego todo cardinal inaccesible es hiper-universal. Pero a su vez tenemos que el conjunto de cardinales hiper-universales menores que κ es estacionario en κ, de donde resulta que κ también es hiper^2-universal, etc.

De hecho, es fácil ver que todo cardinal inaccesible κ es hiper$^\beta$-universal para todo $\beta \leq \kappa$. Para ello tenemos en cuenta que, en el contexto general, hemos

[3]Recordemos que los cardinales débilmente inaccesibles son los cardinales límite regulares no numerables. Luego entraremos en su situación como cardinales grandes.

probado que $HK_0 \cap \kappa$ contiene un conjunto de la forma $D \cap K_0$, donde D es c.n.a. en κ, por lo que, por ejemplo, podemos construir una sucesión de c.n.a.s D_n para cada $n < \omega$ tales que los elementos de $D_n \cap K_0$ sean hiper^n-universales, y así $\bigcap\limits_{n<\omega} D_n \cap K_0$ es un conjunto estacionario de cardinales hiper$^\omega$-universales, que permite proseguir la inducción.

Más aún, podemos probar que todo cardinal inaccesible κ es hiper$^\kappa$-universal, y que está también en la κ-ésima clase de la jerarquía que parte de los cardinales κ-hiper$^\kappa$-universales, y así sucesivamente, *ad nauseam.*

Cardinales α-hiper$^\beta$-inaccesibles Con los cardinales inaccesibles podemos partir de cero como hemos hecho con los cardinales universales exactamente con los mismos razonamientos: la existencia de un cardinal inaccesible no implica la existencia de dos, y ésta no implica la de tres, ni mucho menos la de infinitos, ni tampoco la existencia de un cardinal 1-inaccesible, definido como un cardinal 0-inaccesible (es decir, inaccesible) κ tal que el conjunto de los cardinales 0-inaccesibles menores que κ no esté acotado en κ. En otras palabras, podemos definir I_0 como la clase de los cardinales inaccesibles y construir a partir de ella la jerarquía dada por $I_{\alpha+1} = \mathcal{I}(I_\alpha)$, $I_\lambda = \bigcap\limits_{\delta<\lambda} I_\delta$ de los cardinales α-inaccesibles.

Nuevamente, un cardinal κ puede ser a lo sumo κ-inaccesible, pero esto permite definir el concepto de cardinal hiper-inaccesible e iterar a su vez, con lo que obtenemos la clase de los cardinales hiper$^\beta$-inaccesibles, que a su vez puede iterarse para definir los α-hiper$^\beta$-inaccesibles, hasta llegar a los cardinales κ que son κ-hiper$^\kappa$-inaccesibles, que a su vez pueden servir de base para una nueva jerarquía, y así una vez más se puede seguir *ad nauseam.*

Cardinales de Mahlo El argumento que nos ha permitido probar que los cardinales inaccesibles están por encima de todas las jerarquías de cardinales universales puede utilizarse para construir una nueva clase de cardinales por encima de todas las jerarquías de cardinales inaccesibles. Para ello conviene introducir el operador de Mahlo: dada una clase de cardinales regulares K, definimos

$$\mathcal{M}(K) = \{\kappa \in K \mid \kappa \cap K \text{ es estacionario en } \kappa\}.$$

Cuando aplicamos este operador a la clase I_0 de los cardinales inaccesibles obtenemos la clase de los cardinales de Mahlo, es decir, un cardinal κ es de Mahlo si es inaccesible y contiene un conjunto estacionario de cardinales inaccesibles.

El resultado general que hemos probado antes, aplicado ahora a la clase I_0, prueba que todo cardinal de Mahlo κ, es hiper-inaccesible y, de hecho, hiper$^\kappa$-inaccesible y, en general, que está en cualquier nivel de las jerarquías de cardinales inaccesibles.

Cardinales α-hiper$^\beta$-Mahlo La clase de los cardinales de Mahlo es en realidad el primer paso de una jerarquía de cardinales:[4]

$$M_0 = \mathcal{M}(I_0), \qquad M_{\alpha+1} = \mathcal{M}(M_\alpha), \qquad M_\lambda = \bigcap_{\delta<\lambda} M_\delta.$$

Así podemos hablar de cardinales α-Mahlo, de modo que un cardinal κ puede ser a lo sumo κ-Mahlo, lo que lleva a la definición de los cardinales hiper-Mahlo, y más en general de los α-hiper$^\beta$-Mahlo y así—una vez más— *ad nauseam.*

Hemos descrito estas jerarquías de cardinales grandes para dar una idea de cómo de grande es un cardinal grande, y aun así el lector no puede formarse una idea adecuada con lo visto, porque todos los cardinales que hemos considerado hasta aquí son cardinales grandes "muy pequeños" en comparación con la mayoría de los cardinales grandes.

En realidad las jerarquías de cardinales obtenidas a partir de los operadores $\mathcal{I}$ o $\mathcal{M}$ tienen un interés muy limitado, pues a menudo las definiciones interesantes de cardinales grandes que superan a una dada no son las que resultan de construir estas jerarquías monótonas (también en el sentido de aburridas), sino las que las superan por completo, como sucede al pasar de los cardinales universales a los inaccesibles, o de éstos a los de Mahlo, etc. Pero no está de más ser conscientes del salto cuantitativo que supone cada uno de estos saltos cualitativos, lo cual se pone de manifiesto al comprender que estos saltos cualitativos superan las monótonas jerarquías de cardinales.

Axiomas de cardinales grandes En [TC] hemos estudiado superficialmente algunas clases de cardinales grandes interesantes, como los cardinales débilmente compactos [TC 11.8] o los cardinales medibles [TC 7.70].

Puesto que todos los cardinales grandes tienen en común que no puede probarse que existen en ZFC, cada definición de un cardinal grande tiene asociados diversos axiomas de existencia. Por ejemplo, a partir de la definición de cardinal inaccesible podemos formar el axioma "existe un cardinal inaccesible", o "existen dos cardinales inaccesibles" o "existen infinitos cardinales inaccesibles", o "la clase de los cardinales inaccesibles no está acotada en Ω (o, lo que es lo mismo, no es un conjunto)", etc. También se pueden formar axiomas que combinen varias definiciones, como "existe un cardinal inaccesible mayor que un cardinal medible", etc. Para entender las relaciones entre estos axiomas conviene hacer algunas consideraciones generales:

Comparación de cardinales grandes En cierto sentido, podemos pensar que si un cardinal inaccesible es "grande", entonces un cardinal de Mahlo es "mucho mayor", y un cardinal 1-Mahlo es "mucho mayor aún", pero esto hay que entenderlo adecuadamente, pues, por ejemplo, nada impide tener un cardinal de Mahlo que sea estrictamente menor que otro inaccesible (que no sea de Mahlo).

[4]Notemos que los cardinales que con esta definición son 0-Mahlo son los que en [PC 6.26] eran 1-Mahlo, pero esto es irrelevante.

En general, nada impide que un cardinal grande sea mayor que otro con una definición más "fuerte", pero aun así, podemos ordenar los distintos tipos de cardinales grandes en varios sentidos que a menudo son equivalentes, pero no siempre.

En el caso que estamos considerando, podemos decir que los cardinales de Mahlo son "más fuertes" que los inaccesibles en referencia a cualquiera de los hechos siguientes:

- Todo cardinal de Mahlo es inaccesible, pero el recíproco no es cierto.
- Todo cardinal de Mahlo κ tiene por debajo κ cardinales inaccesibles.
- El menor cardinal de Mahlo (si existe) es necesariamente mayor que el menor cardinal inaccesible.
- Si κ es un cardinal de Mahlo, entonces $V_\kappa \vDash \mathrm{ZFC}$ + existe una clase propia de cardinales inaccesibles.

En general, dados dos axiomas de cardinales grandes A y B, pueden darse entre ellos relaciones como las anteriores u otras similares, pero la que siempre se da en todos los casos es una de las tres posibilidades siguientes, mutuamente excluyentes:

a) $\underset{\mathrm{ZFC}}{\vdash} \mathrm{Consis}\,(\mathrm{ZFC} + A) \leftrightarrow \mathrm{Consis}\,(\mathrm{ZFC} + B)$.

b) $\underset{\mathrm{ZFC}+A}{\vdash} \mathrm{Consis}\,(\mathrm{ZFC} + B)$.

c) $\underset{\mathrm{ZFC}+B}{\vdash} \mathrm{Consis}\,(\mathrm{ZFC} + A)$.

Las tres posibilidades son mutuamente excluyentes en el supuesto de que las teorías correspondientes sean consistentes, pues, por ejemplo, si se dieran a la vez b) y c), entonces en ZFC + A se podría probar la consistencia de esta misma teoría,[5] luego sería contradictoria.

No existe ninguna demostración de que tenga que darse necesariamente uno de estos tres casos, pero lo cierto es que así sucede con todas las definiciones de cardinales grandes que se manejan actualmente. Por ello la consistencia relativa es el criterio principal para ordenar las definiciones de cardinales grandes.

Concretamente, un axioma de cardinales grandes A es más fuerte (en cuanto a consistencia) que otro axioma B si se cumple el caso b), mientras que ambos son equiconsistentes (ocupan el mismo lugar en la escala de consistencia) si se da el caso a).

Por ejemplo, si comparamos los cardinales débilmente inaccesibles con los fuertemente inaccesibles, nos encontramos con que son equiconsistentes, pues todo cardinal fuertemente inaccesible es débilmente inaccesible y, aunque el

[5]En ZFC + A podría probarse la existencia de un modelo de ZFC + B, el cual contendría un modelo de ZFC + A, luego en ZFC + A podríamos construir un modelo de ZFC + A.

recíproco no es necesariamente cierto, todo cardinal κ débilmente inaccesible es fuertemente inaccesible^L, luego ambos conceptos ocupan la misma altura en la escala de los cardinales grandes en términos de consistencia relativa. Lo mismo sucede con los cardinales α-débilmente inaccesibles y los α-fuertemente inaccesibles, o los α-débilmente Mahlo y los α-fuertemente Mahlo.

En cambio, si comparamos un cardinal de Mahlo con un cardinal inaccesible, estamos en el caso b): en ZFC + la existencia de un cardinal de Mahlo se puede probar la consistencia (la existencia, de hecho) de un cardinal inaccesible. Por lo tanto, los cardinales de Mahlo están por encima de los cardinales inaccesibles en la escala de los cardinales grandes en cuanto a consistencia relativa.

Notemos que, por ejemplo, la existencia de dos cardinales inaccesibles es más fuerte en cuanto a consistencia que la existencia de uno solo, pues si existen dos cardinales inaccesibles $\kappa < \mu$, entonces V_μ es un modelo de la existencia de un cardinal inaccesible.

En general, tenemos el siguiente hecho fundamental:

> *El hecho de que un axioma A sea más fuerte en cuanto a consistencia que otro axioma B se traduce en que no es posible demostrar la consistencia de* ZFC+A *ni siquiera suponiendo la consistencia de* ZFC+B *(salvo que ambas teorías sean contradictorias.).*

Más concretamente: hay dos formas típicas de obtener pruebas de consistencia relativas entre dos teorías. Para probar que la consistencia de ZFC+B implica la de ZFC+A:

a) Construimos un modelo interno M de ZFC+A en ZFC+B, o bien,

b) Para cada conjunto finito $\Gamma \subset$ ZFC+A, demostramos en ZFC+B que existe un modelo M de Γ en el sentido usual de la teoría de modelos (es decir, un modelo que sea un conjunto y no una clase propia).

En el primer caso, la demostración puede formalizarse en ZFC para probar que si $N \vDash \mathrm{ZFC} + B$ (en el sentido usual de la teoría de modelos), entonces la relativización a N de la definición del modelo interno M nos da un $M \subset N$ que, con la definición correspondiente de la relación de pertenencia (que no tiene por qué ser la misma que la de N) se cumple que $M \vDash \mathrm{ZFC} + A$.

En el segundo caso, la formalización del argumento nos lleva a que en ZFC podemos probar que si $N \vDash \mathrm{ZFC}+B$ entonces a partir de N se pueden construir modelos M_Γ para todo $\Gamma \subset \mathrm{ZFC} + A$ finito. Así, pues, bajo el supuesto de que existe un modelo de ZFC+B, en ZFC podemos demostrar que cualquier subteoría finita de ZFC+A tiene un modelo, y podemos aplicar el teorema de compacidad para concluir que existe un modelo de todo ZFC+A.

En ambos casos, la conclusión es que

$$\underset{\mathrm{ZFC}}{\vdash} \mathrm{Consis}\,(\mathrm{ZFC} + B) \rightarrow \mathrm{Consis}\,(\mathrm{ZFC} + A),$$

y podríamos construir explícitamente una demostración de esta implicación partiendo de la prueba de la existencia del modelo interno o de los submodelos finitos (combinándolas con la prueba del teorema de compacidad).

Lo dicho hasta aquí vale para las dos formas usuales de probar la consistencia de una teoría ZFC+A a partir de otra ZFC+B, pero cualquier otra forma "inusual" de hacerlo, si es constructiva, se podría formalizar en ZFC y nos llevaría a la misma implicación final.

A partir de esta implicación, concluimos inmediatamente que

$$\underset{\mathrm{ZFC}+A}{\vdash} \operatorname{Consis}(\mathrm{ZFC} + A),$$

luego por el teorema de incompletitud ZFC+A es contradictorio, y como la prueba de este teorema es constructiva, podríamos encontrar la prueba explícita de una contradicción en (una subteoría finita de) ZFC+A.

Finalmente, si hemos partido de la construcción de un modelo interno en ZFC+B, podríamos relativizar al modelo la prueba de dicha contradicción, lo que nos daría una contradicción en ZFC+B. Si hemos partido de la posibilidad de construir en ZFC+B modelos de subteorías finitas arbitrarias de ZFC+A, considerando el de la que permite probar la contradicción llegaríamos igualmente a probar una contradicción en ZFC+B. Y si hemos partido de cualquier otra forma constructiva de probar la consistencia de ZFC+A a partir de la de ZFC+B, al tener una prueba de una contradicción en ZFC+A, el argumento nos tendría que llevar a la prueba de una contradicción en ZFC+B.

En cualquier caso concluimos que ambas teorías serían contradictorias.

Así pues, cuando más alto está un axioma de cardinales grandes en la escala de consistencia de los cardinales grandes, más lejos estamos de poder demostrar su consistencia.

La escala de los cardinales grandes El esquema de la página xxii muestra los axiomas de cardinales grandes que vamos a considerar en este libro hasta los cardinales medibles, y en la página siguiente están los posteriores a éstos.

Cada axioma implica en ZFC la consistencia de los que tiene por debajo. Una flecha $A \longrightarrow B$ significa que la existencia de A implica la existencia de B (por ejemplo, la existencia de $\kappa(\omega_1)$ implica la existencia de $x^\sharp$. Una flecha $A \xrightarrow{L} B$ indica una implicación lógica usual: "todo A es B". Por ejemplo todo cardinal de Mahlo es inaccesible. Una flecha $A \xrightarrow{\infty} B$ indica que la existencia de A implica la existencia de infinitos B menores. Por ejemplo, si existe $\kappa(\omega)$ hay infinitos cardinales inefables menores (pero no es cierto que $\kappa(\omega)$ sea inefable). Por último, una doble raya $=$ conecta dos conceptos equivalentes.

Por razones de espacio faltan en la segunda tabla los axiomas (en vertical)

$$\mathrm{I0} \xrightarrow[L]{} \mathrm{I1} \xrightarrow[L]{\infty} \mathrm{I2} \xrightarrow[L]{\infty} \mathrm{I3}.$$

En la primera tabla podríamos haber incluido también (en horizontal) las implicaciones

$$\text{medible} \underset{L}{\longrightarrow} \mathbb{R}\text{-medible} \underset{L}{\longrightarrow} \text{débilmente medible.}$$

Observamos, por ejemplo, que los cardinales débilmente compactos, que aparecen en la escala por encima de los cardinales de Mahlo, en realidad son hiper-Mahlo, hiper^2-Mahlo, etc. (véase el teorema 2.2 y el ejercicio posterior, que el lector puede generalizar *ad nauseam*).

También es destacable que, aunque los cardinales débilmente medibles no tienen en sí mismos muchas propiedades de cardinales grandes (sólo tienen por debajo la jerarquía débil de Mahlo), en cuanto a consistencia se encuentran en una posición muy alta, es decir, implican la consistencia de un buen trecho de la escala de los cardinales grandes.

Cardinales grandes en pruebas de consistencia Como ya hemos indicado, todos los cardinales que vamos a estudiar en este libro, junto con todos los objetos matemáticos derivados de ellos, tienen la propiedad común de que no puede demostrarse que existan. Por lo tanto, es razonable preguntarse qué interés tiene estudiar algo que tal vez no exista.

En realidad, "que tal vez no exista" es capcioso. No es posible demostrar que existen cardinales inaccesibles, de Mahlo, etc., ni siquiera es posible demostrar que sea consistente que exista un cardinal de Mahlo suponiendo que es consistente que exista un cardinal inaccesible (o infinitos de ellos), pero si es consistente que exista un cardinal de Mahlo, entonces no tiene sentido plantearse si existen o no existen, sino más bien la situación es que hay modelos de ZFC en los que existen y modelos en los que no existen o, en términos puramente sintácticos, que podemos tomar como axioma adicional tanto su existencia como su no existencia, por lo que estudiar las consecuencias de su existencia es desarrollar una teoría axiomática como otra cualquiera.

Pero aparte de que el estudio de los cardinales grandes es una teoría matemática de interés en sí misma, sucede que los axiomas de existencia de cardinales grandes son un ingrediente imprescindible de muchas pruebas de consistencia. Ya hemos visto algún ejemplo: en [PC 5.53] construimos un modelo de ZFC en el que no existen árboles de Kurepa, con lo cual demostramos que la existencia de tales árboles no es demostrable en ZFC, pero el modelo se obtiene mediante una extensión genérica que parte de un modelo en el que existe un cardinal inaccesible. Por lo tanto, lo que hemos probado realmente es que si ZFC + "existe un cardinal inaccesible" es consistente, entonces también lo es ZFC + "no existen árboles de Kurepa".

La hipótesis sobre el cardinal inaccesible no puede eliminarse, pues, según el teorema [PC 3.41], en ZFC + "no existen árboles de Kurepa" puede demostrarse la consistencia de ZFC + "existe un cardinal inaccesible".

En general, si una determinada sentencia K permite construir en ZFC un modelo de un axioma A de cardinales grandes (en cualquiera de los dos sentidos usuales, un modelo interno, o bien un modelo de cualquier subteoría finita de ZFC+A), razonando como antes concluimos que

$$\underset{\text{ZFC}}{\vdash} \text{Consis}(\text{ZFC} + K) \rightarrow \text{Consis}(\text{ZFC} + A),$$

y entonces, por el mismo razonamiento que hemos empleado al hablar de la comparación de cardinales grandes, no es posible construir en ZFC un modelo de ZFC + K sin suponer al menos un axioma tan fuerte como A en cuanto a consistencia (salvo que ambas teorías sean contradictorias).

En resumen, la mejor respuesta que podemos dar a la conjetura de que no es posible demostrar la existencia de árboles de Kurepa es la que hemos dado, es decir, que no es posible a menos que la existencia de un cardinal inaccesible sea contradictoria. En otras palabras, lo máximo que podemos hacer es reducir la consistencia de que no existan árboles de Kurepa a la consistencia de que existan cardinales inaccesibles.

Similarmente, veremos que la no existencia de $\aleph_2$-árboles de Aronszajn es equiconsistente con la existencia de un cardinal débilmente compacto, mientras que, aunque no lo probaremos aquí, la existencia de una extensión de la medida de Lebesgue a todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ es equiconsistente con la existencia de un cardinal débilmente medible, o también con la existencia de un cardinal medible.

La idea es que los axiomas de cardinales grandes son axiomas cuya consistencia es "plausible", en el sentido de que el hecho de que ésta no pueda probarse se debe únicamente a que implican la existencia de modelos de ZFC o de otras teorías más fuertes (como la existencia de un cardinal (fuertemente) de Mahlo κ, que permite construir un modelo V_κ de ZFC más la existencia de una clase propia de cardinales inaccesibles), mientras que la consistencia de una sentencia como la no existencia de árboles de Kurepa no es plausible a priori, puesto que nada nos indica que alguien no pueda aparecer un día con una construcción en ZFC de un árbol de Kurepa igual que puede construirse, por ejemplo, un árbol de Aronszajn.

Así, el teorema [PC 5.53] nos reduce una consistencia "dudosa" a una consistencia "plausible". La plausibilidad de la consistencia de los axiomas de existencia de cardinales grandes se basa en que dan lugar a teorías que describen una estructura coherente de la clase universal que han sido estudiadas a fondo sin dar lugar al menor indicio que apunte a una posible contradicción. Nadie afirmaría con rotundidad que no es posible construir un árbol de Kurepa sin conocer la prueba de [PC 5.53], mientras que ningún experto en teoría de conjuntos recela de la consistencia de los axiomas de existencia de cardinales grandes.

Más precisamente, si alguien introduce una nueva definición de un cardinal grande, en la medida en que su consistencia pueda ser demostrada a partir de la consistencia de otros cardinales grandes conocidos (de modo que el nuevo cardinal ocupa una posición intermedia en la escala de consistencia) entonces nadie duda en la práctica de que dicha consistencia es cierta. Otra cosa sería un cardinal que tuviera que situarse en lo alto de la escala de consistencia, es decir, que implicara la consistencia de todos los demás cardinales grandes conocidos. Eso ya sería más polémico, porque es plausible que a base de pedir cada vez condiciones más y más fuertes se termine llegando a una condición contradictoria, aunque no sea evidente que lo sea.

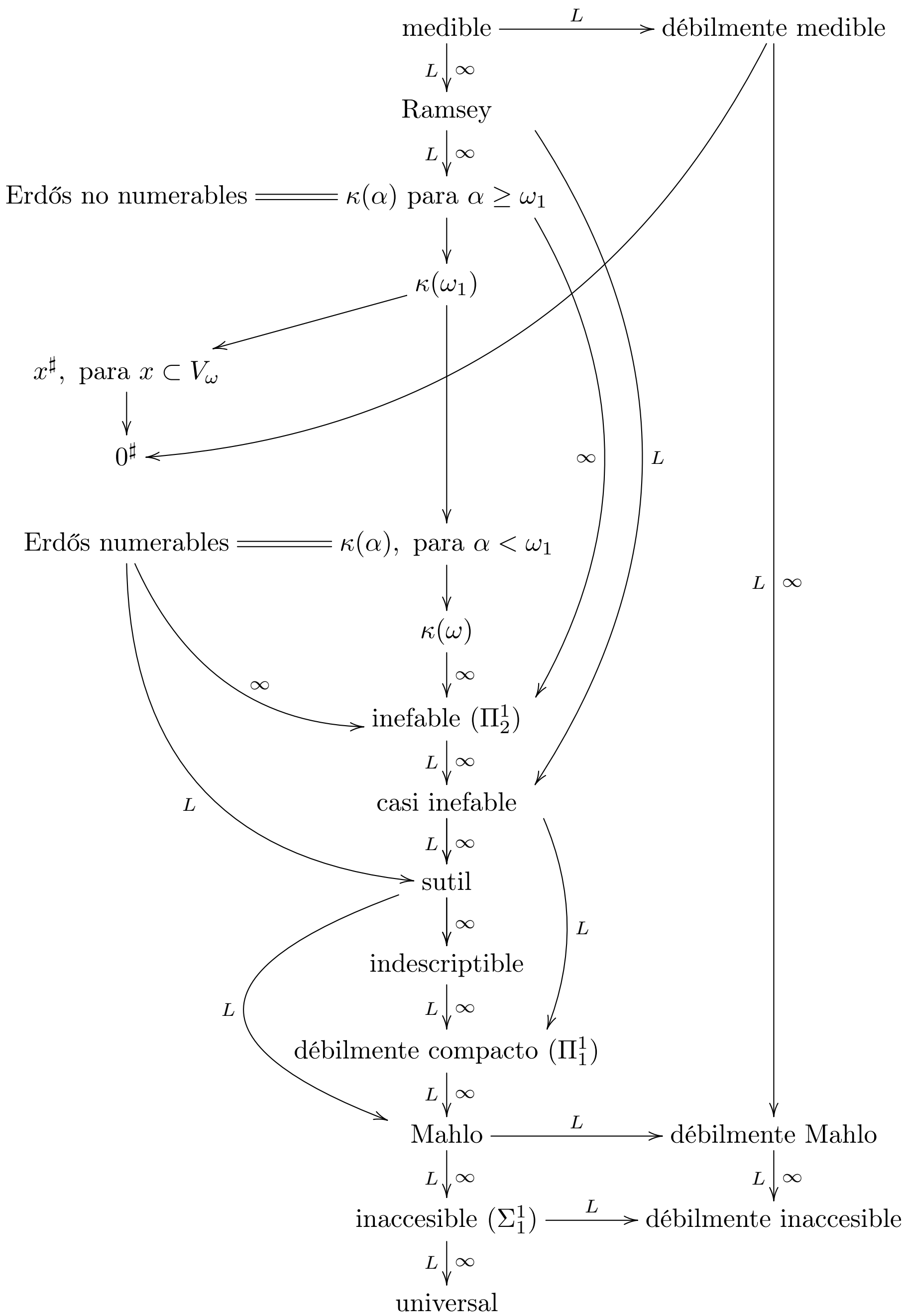
Esto ha sucedido con los axiomas I0, I1, I2 e I3, que son los axiomas más fuertes considerados hasta ahora. Durante un tiempo se receló de su consistencia, pero su "buen comportamiento" desde que fueron formulados hace que hoy en día estén prácticamente aceptados como "plausibles".

Entre las pruebas de consistencia más notables que presentaremos en este libro y que requieren como hipótesis la consistencia de un cardinal grande cabe destacar la negación de la hipótesis de los cardinales singulares. Más precisamente, demostraremos (teorema 11.23) que es consistente que se incumpla en $\aleph_\omega$, concretamente con la determinación siguiente de la función del continuo:

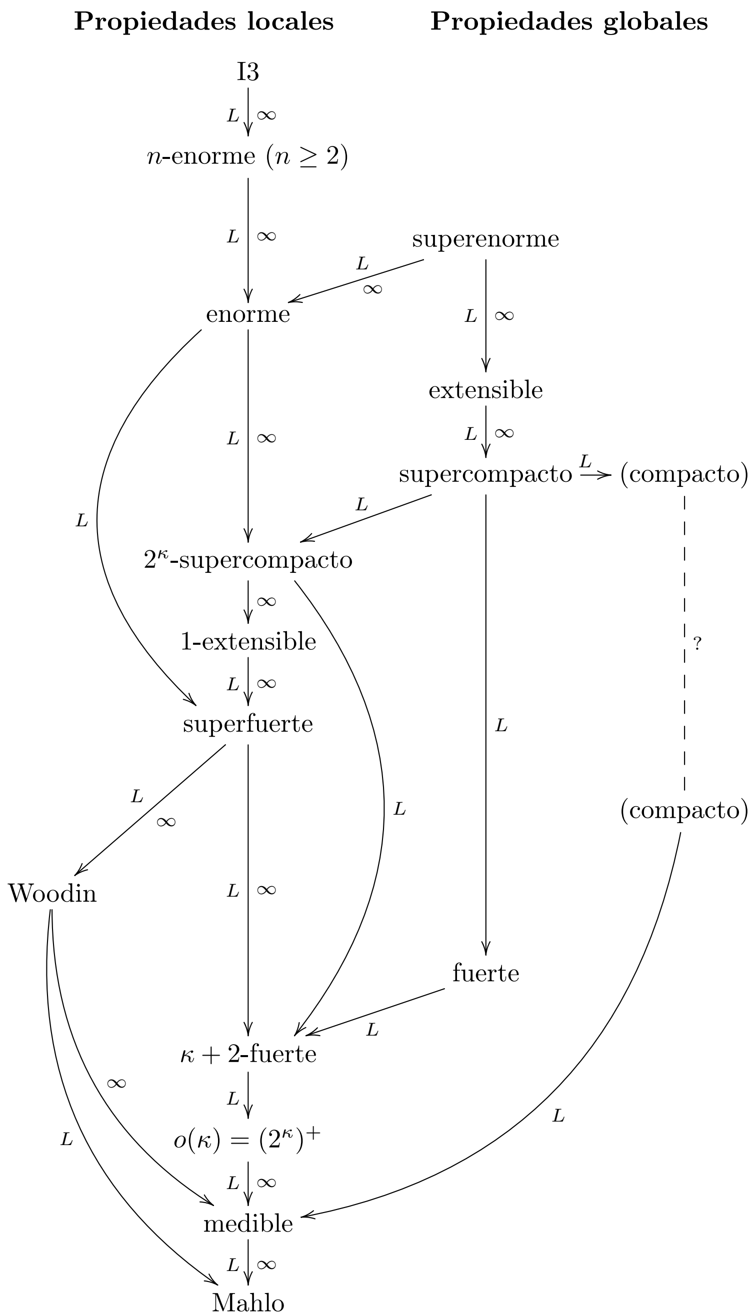
$$2^{\aleph_0} = \aleph_1, \quad 2^{\aleph_1} = \aleph_2, \quad 2^{\aleph_2} = \aleph_3, \quad \cdots \quad 2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+2}.$$

La consistencia de este resultado no puede probarse sin suponer un axioma ligeramente más fuerte que la consistencia de un cardinal medible.

Cardinales grandes hasta los cardinales medibles Cada axioma de existencia implica la consistencia de los axiomas situados por debajo (véase pág. xviii).



Cardinales grandes por encima de los cardinales medibles Cada axioma de existencia implica la consistencia de los axiomas situados por debajo.



Capítulo I

Ultrapotencias

Dedicamos el primer capítulo a desarrollar con detalle una de las herramientas principales en el estudio de los cardinales grandes. Se trata de una adaptación de la construcción de ultraproductos en teoría de modelos (véase [TC, sección 10.4]). La "adaptación" consiste en dos alteraciones sustanciales: en primer lugar, definiremos ultrapotencias de modelos transitivos M que no sean necesariamente conjuntos, es decir, que no son modelos en el sentido de la teoría de modelos, y en segundo lugar, en vez de partir de un ultrafiltro U en un conjunto I arbitrario (es decir, en el álgebra $\mathcal{P}I$), partiremos de un conjunto $I \in M$ y de un ultrafiltro en el álgebra $\mathcal{P}^M I = \mathcal{P}I \cap M$.

En principio, la construcción nos dará un modelo $\mathrm{Ult}_U^*(M)$ que no será un modelo natural, en el sentido de que la relación de pertenencia se interpreta como una relación distinta de la pertenencia "real". Sin embargo, consideraremos únicamente ultrapotencias bien fundadas, que pueden identificarse con su colapso transitivo $\mathrm{Ult}_U(M)$. El interés principal de esta construcción consiste en que nos proporciona una inmersión elemental $i : M \longrightarrow \mathrm{Ult}_U(M)$ con características que podremos "controlar bien" a partir de M y U.

Ya conocemos el concepto de modelo interno de ZFC (un modelo transitivo que sea una clase propia), pero no tenemos definido el concepto de inmersión elemental entre modelos internos, así que dedicamos la primera sección a introducirlo y estudiarlo.

1.1 Inmersiones elementales

Sabemos que si M es una clase propia, no podemos decir que sea un modelo en el sentido de la teoría de modelos porque no es posible definir en ZFC la relación de satisfacción $M \vDash \phi[x_1, \ldots, x_n]$, donde $\phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ es una fórmula de un cierto lenguaje formal. No obstante, podemos escribir $M \vDash \phi[x_1, \ldots, x_n]$ si entendemos que $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula metamatemática y que tal expresión equivale a la relativización $\phi^M(x_1, \ldots, x_n)$, o $\phi^{MR}(x_1, \ldots, x_n)$ si M no es un modelo natural, sino que la pertenencia en M se interpreta mediante la relación $R \subset M \times M$.

Por consiguiente, no es posible definir el concepto de inmersión elemental entre modelos que sean clases propias en el mismo sentido en que se define en teoría de modelos, es decir, por medio de la relación de satisfacción. En su lugar, el concepto de inmersión elemental entre clases propias debe entenderse también en el sentido metamatemático determinado por la definición siguiente:

Definición 1.1 Sean M y N dos clases transitivas. Diremos que una aplicación $j : M \longrightarrow N$ es una *inmersión elemental* si para toda fórmula (metamatemática) $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ se cumple

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in M(\phi^M(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi^N(j(x_1), \ldots, j(x_n))).$$

Aquí es crucial entender que "$j : M \longrightarrow N$ es una inmersión elemental" no se corresponde con ninguna fórmula de ZFC, al igual que sucede con "M es un modelo de ZFC". Los teoremas que contienen estas palabras han de entenderse como esquemas teoremáticos. Así, si "$j : M \longrightarrow N$ es una inmersión elemental" aparece en la hipótesis de un teorema habrá que entender que la tesis se cumple siempre que la definición anterior se cumpla para una cantidad finita suficientemente grande de fórmulas; por el contrario, si "$j : M \longrightarrow N$ es una inmersión elemental" aparece en la tesis de un teorema, habrá que entender que es posible demostrar la relación de la definición anterior para cualquier fórmula prefijada; un teorema de tipo "si $j : M \longrightarrow N$ es una inmersión elemental... entonces $j' : M' \longrightarrow N'$ es una inmersión elemental" tendrá que entenderse como que para toda colección finita E de fórmulas, existe una colección finita Δ de modo que si j cumple la definición de inmersión elemental para las fórmulas de Δ entonces j' la cumple para las fórmulas de E. Similarmente habrá que entender los enunciados donde se mezclen afirmaciones de tipo "$j : M \longrightarrow N$ es una inmersión elemental" con afirmaciones de tipo "M' es un modelo de ZFC".

Más aún, si el dominio M de una inmersión j es una clase propia, entonces j también lo será, luego las afirmaciones sobre inmersiones elementales entre clases propias sólo tendrán sentido en ZFC en la medida en que se refieran a aplicaciones definidas por fórmulas concretas del lenguaje $\mathcal{L}$ de la teoría de conjuntos.

Con estas precisiones, cuando en el resto de esta sección hablemos de una inmersión elemental $j : M \longrightarrow N$ entre modelos transitivos de ZFC$-$AP, lo dicho se podrá aplicar indistintamente a inmersiones en el sentido de la teoría de modelos (entre conjuntos) o bien en el sentido metamatemático que acabamos de explicar.[1]

[1] Aquí vamos a considerar únicamente inmersiones entre clases transitivas, tal y como hemos exigido en la definición, pero igualmente podemos definir el concepto de inmersión elemental si consideramos la clase N como modelo del lenguaje de ZFC con una relación arbitraria $R \subset N \times N$, sin más que cambiar ϕ^N por ϕ^{NR}. Por supuesto, también podríamos considerar que M no es un modelo natural, pero ese contexto no nos lo vamos a encontrar en ningún momento en este libro.

En primer lugar, es inmediato que j es inyectiva, por la propia definición de inmersión elemental aplicada a la fórmula $x = y$.

Más en general, si M (y por lo tanto N) es un modelo de ZFC (o ZFC−AP, etc.) entonces j conserva todas las operaciones conjuntistas que son absolutas para modelos transitivos de ZFC (o ZFC−AP, etc.). Por ejemplo:

$$z = x \cap y \leftrightarrow (z = x \cap y)^M \leftrightarrow (j(z) = j(x) \cap j(y))^N \leftrightarrow j(z) = j(x) \cap j(y),$$

luego $j(x \cap y) = j(x) \cap j(y)$. Del mismo modo $j(\{x, y\}) = \{j(x), j(y)\}$, etc. Igualmente j transforma conjuntos finitos en conjuntos finitos, ordinales en ordinales, etc.

En particular $j|_{\Omega^M} : \Omega^M \longrightarrow \Omega^N$ conserva el orden. Esto implica a su vez que $\bigwedge \alpha \in \Omega^M\ \alpha \leq j(\alpha)$, pues si existiera un $\alpha \in \Omega^M$ tal que $j(\alpha) < \alpha$, podríamos tomar el mínimo posible, pero entonces por transitividad tendríamos que $j(\alpha) \in \Omega^M$, pero $j(j(\alpha)) < j(\alpha) < \alpha$, contradicción.

Una inmersión elemental se dice *trivial* si fija a todos los elementos de su dominio. El teorema siguiente muestra que esto equivale a que fije a todos los ordinales:

Teorema 1.2 *Sea $j : M \longrightarrow N$ una inmersión elemental entre modelos transitivos de* ZFC−AP.

a) Si j fija a todos los ordinales de Ω^M, entonces j fija a todos los elementos de M.

b) En caso contrario, si $\kappa \in M$ es el menor ordinal no fijado, entonces κ es un cardinal regular no numerable en M.

DEMOSTRACIÓN: a) Veamos que j fija a todos los elementos de M por inducción sobre el rango, es decir, suponemos que $\bigwedge u \in x\ j(u) = u$ y vamos a probar que $j(x) = x$.

En efecto, sea $\mu = |x|^M$ y sea $f : \mu \longrightarrow x$ biyectiva tal que $f \in M$. Entonces $j(f) : \mu \longrightarrow j(x)$ biyectiva, pero si $\alpha < \mu$ y $u = f(\alpha)$, entonces también $f(\alpha) = u = j(u) = j(f)(\alpha)$, luego $j(f) = f$, luego $j(x) = x$.

b) Si κ no es un cardinal^M, sea $\mu = |\kappa|^M < \kappa$. Sea $f : \mu \longrightarrow \kappa$ biyectiva, $f \in M$. Entonces $j(f) : \mu \longrightarrow j(\kappa)$ biyectiva, pero si $\alpha < \mu$ y $f(\alpha) = \beta$, entonces también $j(f)(\alpha) = \beta$, luego llegamos a que $j(f) = f$ y $\kappa = j(\kappa)$, contradicción.

Llegamos a la misma contradicción si suponemos que $\nu < \kappa$ y que f es cofinal, por lo que, de hecho, κ es regular^M. Obviamente $j(\omega) = \omega$, luego $\kappa > \omega$. ■

Definición 1.3 Si $j : M \longrightarrow N$ es una inmersión elemental no trivial (es decir, distinta de la identidad) entre modelos transitivos de ZFC−AP, llamaremos *punto crítico* de j al menor ordinal $\kappa \in \Omega^M$ tal que $j(\kappa) \neq \kappa$, lo cual es equivalente a $\kappa < j(\kappa)$.

Nota Conviene observar que una inmersión elemental $j : M \longrightarrow N$ entre modelos transitivos de ZFC$-$AP (o ZFC) puede ser trivial sin que necesariamente $M = N$.

Por ejemplo, si κ es un cardinal regular no numerable, $L_\kappa \vDash$ ZFC$-$AP y existen infinitos $\lambda < \kappa$ tales que $L_\lambda \prec V_\kappa$, de modo que la inclusión $j : L_\lambda \longrightarrow L_\kappa$ es una inmersión elemental trivial. Si κ es inaccesible los modelos cumplen ZFC.

Por otra parte, también es fácil construir inmersiones elementales no triviales. Por ejemplo, si $N = N(\{\omega_1\}) \prec L_{\omega_2}$, M es el colapso transitivo de N y $j : M \longrightarrow L_{\omega_1}$ es la inversa de la función colapsante, entonces es claro que se trata de una inmersión elemental y existe un $\alpha \in M$ (que será numerable, porque M lo es) tal que $j(\alpha) = \omega_1$, luego no es trivial. ■

Acabamos de ver que el punto crítico κ de una inmersión elemental no trivial $j : M \longrightarrow N$ entre modelos transitivos de ZFC es un cardinal regular no numerable en M. Ahora veremos que si M y N "se parecen" suficientemente, entonces el punto crítico es un cardinal grande en M, y en los capítulos siguientes iremos viendo que es más grande cuando más se parezcan M y N. De momento observamos el caso más simple:

Teorema 1.4 *Si κ es el punto crítico de una inmersión elemental no trivial $j : M \longrightarrow N$ entre modelos transitivos de* ZFC *y $\bigwedge \mu < \kappa\ \mathcal{P}^M\mu = \mathcal{P}^N\mu$, entonces κ es inaccesible^M y $\bigwedge x \in V_\kappa^M\ j(x) = x$.*

Demostración: Supongamos que existe $\mu < \kappa$ y $f : \kappa \longrightarrow \mathcal{P}^M\mu$ inyectiva tal que $f \in M$. Entonces $j(f) : j(\kappa) \longrightarrow \mathcal{P}^N\mu$ inyectiva, luego podemos considerar el conjunto $A = j(f)(\kappa) \in \mathcal{P}^N\mu = \mathcal{P}^M\mu$. Entonces $A = j(A) \cap \mu = j(A)$, pues $\alpha \in A \leftrightarrow \alpha = j(\alpha) \in j(A) \cap \mu$

Por lo tanto $(\bigvee \alpha < j(\kappa) \mid j(A) = j(f)(\alpha))^N$, y como j es elemental también se cumple que $\bigvee \alpha < \kappa\ A = f(\alpha)$, pero entonces, si $A = f(\alpha)$, tenemos que $j(A) = A = j(f)(\alpha) = j(f)(\kappa)$, en contradicción con la inyectividad de $j(f)$.

Veamos la segunda parte por $\in$-inducción, es decir, tomamos $x \in V_\kappa^M$, suponemos que $\bigwedge u \in x\ j(u) = u$ y tenemos que probar que $j(x) = x$. Como κ es inaccesible^M, tenemos que $|x|^M < \kappa$, luego existe $\mu < \kappa$ y $f : \mu \longrightarrow x$ biyectiva. A partir de aquí vale igualmente el argumento del teorema 1.2. ■

Observemos que si $\mu \leq \kappa$ la condición $\mathcal{P}^M\mu \subset \mathcal{P}^N\mu$ se cumple siempre, pues si $x \in \mathcal{P}^M\mu$ entonces $x = j(x) \cap \mu \in N$. Una condición suficiente para que se cumpla la igualdad para todo $\mu \leq \kappa$ es que $\mathcal{P}^M\kappa = \mathcal{P}^N\kappa$, lo que a su vez sucede trivialmente si $N \subset M$, en particular si $M = V$.

Terminamos con una última propiedad de interés sobre las inmersiones elementales entre modelos de ZFC:

Teorema 1.5 *Si $j : M \longrightarrow N$ es una aplicación entre modelos transitivos de* ZF *tales que $\Omega^M = \Omega^N$ y cumple la definición de inmersión elemental para fórmulas Σ_1, entonces es una inmersión elemental.*

Demostración: Veamos inductivamente que j cumple la definición de inmersión elemental para fórmulas Σ_n. Como toda fórmula es equivalente en ZF a una fórmula Σ_n, para algún n, esto implica que j es elemental.

Supongamos, pues, que j es Σ_n-elemental y consideremos una fórmula de clase Σ_{n+1}, es decir, $\phi(x_1,\ldots,x_n) \equiv \bigvee x\, \psi(x,x_1,\ldots,x_n)$, donde ψ es de clase Π_n. (Notemos que si j es Σ_n-elemental, trivialmente es Π_n-elemental.)

Si $x_1,\ldots,x_n \in M$ y se cumple $M \vDash \phi[x_1,\ldots,x_n]$, entonces existe un $x \in M$ tal que $M \vDash \psi[x,x_1,\ldots,x_n]$, luego por hipótesis de inducción se cumple que $N \vDash \psi[j(x),j(x_1),\ldots,j(x_n)]$, luego $N \vDash \phi[j(x_1),\ldots,j(x_n)]$.

La parte no trivial es la implicación opuesta. Si $N \vDash \phi[j(x_1),\ldots,j(x_n)]$, existe un $z \in N$ tal que $N \vDash \psi[z,j(x_1),\ldots,j(x_n)]$. Como $j|_{\Omega^M}$ es creciente, cumple que $\bigwedge \alpha \in \Omega^M\ \alpha \leq j(\alpha)$, luego existe un $\alpha \in \Omega^M$ tal que $z \in V^N_{j(\alpha)}$.

Ahora usamos que la fórmula $y = V_\alpha$ es[2] Π_1, junto con la hipótesis de que j es al menos Σ_1-elemental, lo que nos da que $j(V^M_\alpha) = V^N_{j(\alpha)}$.

La fórmula $\chi(y,x_1,\ldots,x_n) \equiv \bigvee x \in y\, \psi(x,x_1,\ldots,x_n)$ es Π_n y, si llamamos $y = V^M_\alpha$, tenemos $N \vDash \chi[j(y),j(x_1),\ldots,j(x_n)]$, luego por hipótesis de inducción $M \vDash \chi[y,x_1,\ldots,x_n]$, lo cual implica $M \vDash \phi[x_1,\ldots,x_n]$. ■

1.2 Ultrapotencias de modelos transitivos

Veamos ahora cómo construir una ultrapotencia de un modelo transitivo M de ZFC$-$AP en las condiciones indicadas al principio del capítulo. Notemos que si $I \in M$, podemos hablar del conjunto $\mathcal{P}^M I = \mathcal{P}I \cap M$ incluso si M no satisface el axioma de partes. Para construir una ultrapotencia a partir de un ultrafiltro en $\mathcal{P}^M I$ (al cual pueden no pertenecer muchos subconjuntos de I) necesitamos trabajar exclusivamente con funciones en M, con lo que podremos asegurar que los subconjuntos de I que requiere la construcción estén en $\mathcal{P}^M I$.

Definición 1.6 Sea M un modelo transitivo de ZFC$-$AP, sea $I \in M$ y U un ultrafiltro en $\mathcal{P}^M I$. Sea M^I la clase de todas las funciones $f : I \longrightarrow M$. Definimos en $M^I \cap M$ la relación de equivalencia dada por

$$f =_U g \leftrightarrow \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in U.$$

Notemos que el conjunto está en M porque estamos exigiendo que $f,\ g \in M$.

Ante la posibilidad de que M sea una clase propia necesitamos considerar clases de equivalencia restringidas en el sentido siguiente:

Para cada $f \in M^I \cap M$ llamaremos $[f]^*$ al conjunto de todas las funciones $g \in M^I$ tales que $g =_U f$ que tengan el rango mínimo posible. Así, si α es el mínimo ordinal para el que existe una función de rango α relacionada con f, tenemos que $[f]^* \subset V_{\alpha+1}$, luego $[f]^*$ es un conjunto. No se cumple

[2] En efecto, $y = V_\alpha \leftrightarrow \bigwedge x(x \in y \leftrightarrow \bigvee \beta \in \alpha \operatorname{rang} x = \beta)$, y la fórmula tras $\bigwedge x$ es Δ_1 (véase [PC] sección 1.3).

necesariamente que $f \in [f]^*$, pero lo que sí es cierto es que, si f, $g \in M^I \cap M$, entonces $[f]^* = [g]^* \leftrightarrow f =_U g$.

Definimos $\mathrm{Ult}_U^*(M) = \{[f]^* \mid f \in M^I \cap M\}$. Sobre esta clase definimos la relación R dada por

$$[f]^* \, R \, [g]^* \leftrightarrow \{i \in I \mid f(i) \in g(i)\} \in U.$$

Se comprueba inmediatamente que R está bien definida, en el sentido de que si $f =_U f'$ y $g =_U g'$, entonces se cumple que $\{i \in I \mid f(i) \in g(i)\} \in U$ si y sólo si $\{i \in I \mid f'(i) \in g'(i)\} \in U$.

Para cada conjunto $a \in M$, sea $c_a : I \longrightarrow M$ la función constante[3] $c_a(i) = a$. Definimos $j_U^* : M \longrightarrow \mathrm{Ult}_U^*(M)$ mediante $j_U^*(a) = [c_a]^*$.

En lo sucesivo consideraremos a $\mathrm{Ult}_U^*(M)$ como modelo del lenguaje de la teoría de conjuntos en el que el relator $\in$ se interpreta como la relación R. La prueba del teorema fundamental de los ultraproductos [TC 10.31] se adapta para demostrar la versión siguiente:

Teorema 1.7 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC−AP, *sea $I \in M$ y U un ultrafiltro en $\mathcal{P}^M I$. Si $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos y $f_1, \ldots, f_n \in M^I \cap M$, entonces*

$$\phi^{\mathrm{Ult}_U^*(M)\,R}([f_1]^*, \ldots, [f_n]^*) \leftrightarrow \{i \in I \mid \phi^M(f_1(i), \ldots, f_n(i))\} \in U.$$

Así mismo, si $a_1, \ldots, a_n \in M$, se cumple

$$\phi^M(a_1, \ldots, a_n) \leftrightarrow \phi^{\mathrm{Ult}_U^*(M)\,R}(j_U^*(a_1), \ldots, j_U^*(a_n)).$$

En particular, si ϕ es una sentencia se cumple $\phi^M \leftrightarrow \phi^{\mathrm{Ult}_U^*(M)\,R}$, por lo que $(\mathrm{Ult}_U^*(M), R)$ *es un modelo de* ZFC−AP (o, en general, de los mismos axiomas que cumpla M).

Demostración: Aunque basta adaptar trivialmente la prueba del teorema [TC 10.31], como estamos considerando fórmulas metamatemáticas, tiene interés comprobar que el resultado es cierto también para fórmulas con descriptores. Para ello consideramos una sucesión $\theta_1, \ldots, \theta_r$ de expresiones cerrada para subexpresiones, es decir, tal que cada expresión esté construida a partir de expresiones anteriores. Probaremos por inducción sobre k que si θ_k es una fórmula entonces cumple el enunciado y si es un término y $f_1, \ldots, f_n \in M^I \cap M$, entonces

$$\theta_k^{\mathrm{Ult}_U^*(V)\,R}([f_1], \ldots, [f_n]) = [g],$$

donde $g : I \longrightarrow M$ viene dada por $g(i) = \theta_k^M(f_1(i), \ldots, f_n(i))$.

Por simplicidad abreviaremos $\theta^{\mathrm{Ult}_U^*(V)\,R}$ a θ^*.

[3]Aquí usamos nuevamente que M es un modelo de ZFC−AP, pues necesitamos que $c_a \in M$. En lo sucesivo no haremos más aclaraciones de este tipo, pero el lector debe comprobar que sólo usamos que M cumple ZFC−AP.

Si $\theta_k \equiv x_1$ tenemos que $g = f_1$, luego el resultado es trivial.

Si $\theta_k \equiv t_1 \in t_2$, tenemos que

$$t_1^*([f_1], \ldots, [f_n]) = [g_1], \quad t_2^*([f_1], \ldots, [f_n]) = [g_2],$$

donde g_1 y g_2 están determinados por la hipótesis de inducción. Así,

$$\theta_k^*([f_1], \ldots, [f_n]) \leftrightarrow [g_1]\, R\, [g_2] \leftrightarrow \{i \in I \mid g_1(i) \in g_2(i)\} \in U$$
$$\leftrightarrow \{i \in I \mid t_1^M(f_1(i), \ldots, f_n(i)) \in t_2^M(f_1(i), \ldots, f_n(i))\} \in U$$
$$\leftrightarrow \{i \in I \mid \theta_k^M(f_1(i), \ldots, f_n(i)))\} \in U.$$

El caso $\theta_k \equiv t_1 = t_2$ es similar, usando la definición de $=_U$.

Si $\theta_k \equiv \neg\alpha$, por hipótesis de inducción tenemos que

$$\alpha^*([f_1], \ldots, [f_n]) \leftrightarrow \{i \in I \mid \alpha^M(f_1(i), \ldots, f_n(i))\} \in U$$

y, como U es un ultrafiltro,

$$\neg\alpha^*([f_1], \ldots, [f_n]) \leftrightarrow I \setminus \{i \in I \mid \alpha^M(f_1(i), \ldots, f_n(i))\} \in U,$$

pero esto equivale a

$$\neg\alpha^*([f_1], \ldots, [f_n]) \leftrightarrow \{i \in I \mid \neg\alpha^M(f_1(i), \ldots, f_n(i))\} \in U,$$

que es lo que había que probar.

Si $\theta_k \equiv \alpha \rightarrow \beta$ probaremos la coimplicación de las negaciones:

$$\neg(\alpha \rightarrow \beta)^*([f_1], \ldots, [f_n]) \leftrightarrow \alpha^*([f_1], \ldots, [f_n]) \wedge \neg\beta^*([f_1], \ldots, [f_n]).$$

Usando la hipótesis de inducción y el caso anterior esto equivale a

$$\{i \in I \mid \alpha^M(f_1(i), \ldots, f_n(i))\} \in U \wedge \{i \in I \mid \neg\beta^M(f_1(i), \ldots, f_n(i))\} \in U$$
$$\leftrightarrow \{i \in I \mid (\alpha^M \wedge \neg\beta^M)(f_1(i), \ldots, f_n(i))\} \in U$$
$$\leftrightarrow \{i \in I \mid \neg(\alpha \rightarrow \beta)^M(f_1(i), \ldots, f_n(i))\} \in U.$$

Usando que U es un ultrafiltro, esto equivale a que

$$\{i \in I \mid \theta_k^M(f_1(i), \ldots, f_n(i))\} \notin U,$$

que es lo que teníamos que probar.

Si $\theta_k \equiv \bigwedge x\alpha$ probaremos también la coimplicación de las negaciones:

$$\neg\theta_k^*([f_1], \ldots, [f_n]) \leftrightarrow \bigvee f \in M^I \cap M \neg\alpha^*([f], [f_1], \ldots, [f_n]).$$

Usando la hipótesis de inducción y el caso $\neg\alpha$ ya probado, esto equivale a

$$\bigvee f \in M^I \cap M\ \{i \in I \mid \neg\alpha^M(f(i), f_1(i), \ldots, f_n(i))\} \in U. \tag{1.1}$$

Falta probar que esto equivale a

$$\{i \in I \mid \bigvee x \in M \neg\alpha^M(x, f_1(i), \ldots, f_n(i))\} \in U. \tag{1.2}$$

En efecto, si existe f según (1.1) es claro que el conjunto que está en U según (1.1) está contenido en el conjunto que ha de estar en U según (1.2), luego se cumple (1.2). Recíprocamente, si se cumple (1.2), usando el axioma de elección en M, obtenemos $f \in M^I \cap M$ de modo que para cada i en el conjunto indicado $f(i) \in M$ cumple $\alpha^M(f(i), f_1(i), \ldots, f_n(i))$, y si i no está en el conjunto dado por (1.2) entonces $f(i)$ es cualquier elemento de M. Es claro que f cumple (1.1).

Si $\theta_k \equiv x|\alpha$, sea $g(i) = \theta_k^M(f_1(i), \ldots, f_n(i))$. Por hipótesis de inducción

$$\overset{1}{\bigvee} x \in N\, \alpha^*(x, [f_1], \ldots, [f_n]) \leftrightarrow \{i \in I \mid \overset{1}{\bigvee} x \in M\ \alpha^M(x, f_1(i), \ldots, f_n(i))\} \in U.$$

Llamemos X al conjunto de la derecha. Si se da la unicidad, entonces $X \in U$ y hemos de probar que $[g]$ es el único elemento de M que cumple α^*. Ahora bien, por la unicidad basta ver que $\alpha^*([g], [f_1], \ldots, [f_n])$ y por hipótesis de inducción esto sucede si y sólo si

$$\{i \in I \mid \alpha^M(g(i), f_1(i), \ldots, f_n(i))\} \in U,$$

y X está contenido en este conjunto.

Si no se da la unicidad, entonces $I \setminus X \in U$ y para cada $i \in I \setminus X$ tenemos que $g(i) = \varnothing = c_\varnothing(i)$, luego $[g] = j_U^*(\varnothing) = d = \theta_k^*([f_1], \ldots, [f_n])$.

El resto del teorema es consecuencia inmediata de la primera parte. ■

Tenemos, pues, que la clase $\mathrm{Ult}_U^*(M)$ es un modelo de ZFC−AP (o de todo ZFC, si M lo es) y que Observemos que $j_U : M \longrightarrow \mathrm{Ult}_U^*(M)$ es una inmersión elemental, pero la ultrapotencia no es un modelo natural. Para que admita un colapso transitivo ha de cumplir dos condiciones (aparte de la extensionalidad de R, que la tenemos garantizada porque la ultrapotencia cumple el axioma de extensionalidad): una es que la relación R esté bien fundada en $\mathrm{Ult}_U^*(M)$, y la otra es que sea conjuntista, es decir, que la extensión de cada elemento de $\mathrm{Ult}_U^*(M)$ sea un conjunto. Esta segunda condición se cumple siempre:

Teorema 1.8 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC−AP, *sea $I \in M$ y U un ultrafiltro en $\mathcal{P}^M I$. Entonces, para cada $f \in M^I \cap M$, la clase*

$$\{x \in \mathrm{Ult}_U^*(M) \mid x\, R\, [f]^*\}$$

es un conjunto.

Demostración: Llamemos A a la clase del enunciado. Todo $x \in A$ es de la forma $x = [g]^*$, con $g \in M^I \cap M$. Como $[g]^*\, R\, [f]^*$, se cumple que

$$\{i \in I \mid g(i) \in f(i)\} \in U.$$

Sea $g' \in M^I$ dada por

$$g'(i) = \begin{cases} g(i) & \text{si } g(i) \in f(i), \\ 0 & \text{si } g(i) \notin f(i). \end{cases}$$

Claramente $g' \in M$ y $[g']^* = [g]^*$. Además, $\bigwedge i \in I \operatorname{rang} g'(i) \leq \operatorname{rang} f(i)$, de donde se sigue que $\operatorname{rang} g' \leq \operatorname{rang} f$. Si llamamos $\alpha = \operatorname{rang} f$, como la clase $[g]^*$ sólo contiene a las funciones de rango mínimo relacionadas con f, resulta que $[g']^* \subset V_{\alpha+1}$, luego la clase del enunciado cumple $A \subset V_{\alpha+2}$, lo que prueba que es un conjunto. ∎

Así pues, la única condición que hay que probar para colapsar una ultrapotencia $\mathrm{Ult}_U^*(M)$ es que esté bien fundada:

Definición 1.9 Sea M un modelo transitivo de ZFC−AP, sea $I \in M$ y U un ultrafiltro en $\mathcal{P}^M I$. Si la relación R en $\mathrm{Ult}_U^*(M)$ está bien fundada, definimos la *ultrapotencia* $\mathrm{Ult}_U(M)$ como el colapso transitivo de $(\mathrm{Ult}_U^*(M), R)$, que es un modelo transitivo de ZFC−AP (o de ZFC, o de todos los axiomas que verifique M).

Si $f \in M^I \cap M$, representaremos por $[f]$ a la imagen de la clase $[f]^*$ por el colapso transitivo, de modo que

$$\mathrm{Ult}_U(M) = \{[f] \mid f \in M^I \cap M\}$$

y se cumple la relación fundamental:

$$\phi^{\mathrm{Ult}_U(M)}([f_1], \ldots, [f_n]) \leftrightarrow \{i \in I \mid \phi^M(f_1(i), \ldots, f_n(i))\} \in U.$$

Así mismo, llamaremos $j_U : M \longrightarrow \mathrm{Ult}_U(M)$ a la composición de j_U^* con el colapso transitivo, de modo que $j_U(a) = [c_a]$, que es una inmersión elemental entre clases transitivas. Hay un caso obvio en el que se trata de la inmersión trivial:

Teorema 1.10 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC−AP, *sea $I \in M$, sea $i_0 \in I$ y sea $U = \{X \in \mathcal{P}^M I \mid i_0 \in I\}$ el ultrafiltro principal generado por i_0. Entonces $j_U^* : M \longrightarrow \mathrm{Ult}_U^*(M)$ es biyectiva, con lo que la ultrapotencia está bien fundada, $\mathrm{Ult}_U(M) = M$ y $j_U : M \longrightarrow \mathrm{Ult}_U(M)$ es la identidad.*

Demostración: Basta observar que, para toda función $f \in M^I \cap M$, se cumple que $[f]^* = j_U^*(f(i_0))$. En efecto, esto equivale a que

$$\{i \in I \mid f(i) = f(i_0)\} \in U,$$

lo cual es cierto. Esto implica que la ultrapotencia está bien fundada (pues una sucesión decreciente respecto de R se correspondería a través de j_U^* con una sucesión decreciente respecto de la pertenencia) y j_U es una biyección entre dos clases transitivas que conserva la relación de pertenencia, luego por la unicidad del colapso transitivo tiene que ser la identidad, y en particular $\mathrm{Ult}_U(M) = M$. ∎

Vamos a probar que es el único caso trivial, para lo cual necesitamos el concepto siguiente:

Definición 1.11 Sea M un modelo transitivo de ZFC$-$AP, sea $I \in M$ un conjunto infinito y F un filtro en $\mathcal{P}^M I$. Si κ es un cardinal^M, entonces diremos que F es *κ-completo sobre M* si para toda familia $\{X_\delta\}_{\delta<\alpha} \in M$ de elementos de F con $\alpha < \kappa$ se cumple que $\bigcap\limits_{\delta<\alpha} X_\delta \in F$.

Observemos que si $M = V$ entonces la κ-completitud sobre M es simplemente la κ-completitud en el sentido introducido en [TC 6.10].

En general, si U es un ultrafiltro principal en $\mathcal{P}^M I$, entonces es κ-completo para todo cardinal^M. Por el contrario, si U no es principal, entonces no puede ser $(|I|^+)^M$-completo sobre M, pues $\{I \setminus \{i\}\}_{i\in I} \in M$ incumple la definición. Por lo tanto, podemos considerar el mínimo cardinal^M μ tal que U no es μ-completo sobre M, que trivialmente no puede ser un cardinal límite (ni finito), luego es de la forma $\mu = \kappa^+$, para cierto cardinal^M infinito κ. Consecuentemente, podemos hablar del mayor cardinal^M κ tal que U es κ-completo sobre M.

Conviene dar la caracterización siguiente de la κ-completitud:

Teorema 1.12 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC$-$AP, *sea $I \in M$, sea U un ultrafiltro en $\mathcal{P}^M I$ y sea κ un cardinal^M infinito. Entonces U es κ-completo sobre M si y sólo si no existe ninguna partición $\{Z_\alpha\}_{\alpha<\beta} \in M$ de I en $\beta < \kappa$ conjuntos que no están en U.*

DEMOSTRACIÓN: Si existe una partición $\{Z_\alpha\}_{\alpha<\beta} \in M$, entonces la familia $\{I \setminus Z_\alpha\}_{\alpha<\beta} \in M$ está formada por elementos de U y su intersección es vacía, luego U no es κ-completo sobre M.

Recíprocamente, si U no es κ-completo sobre M existe $\{X_\alpha\}_{\alpha<\beta} \in M$ con $\beta < \kappa$ de modo que cada $X_\alpha \in U$ pero la intersección no está en U. Cambiando X_0 por $X_0 \setminus \bigcap\limits_{\alpha<\beta} X_\alpha$, se sigue cumpliendo que $X_0 \in U$ y ahora la intersección es vacía.

Sea $Y_\alpha = I \setminus X_\alpha$, de modo que $\{Y_\alpha\}_{\alpha<\beta} \in M$ es una familia de conjuntos que no están en U y su unión es I. Finalmente, si definimos

$$Z_\alpha = Y_\alpha \setminus \bigcup_{\delta<\alpha} Y_\delta,$$

se sigue cumpliendo que $\{Z_\alpha\}_{\alpha<\beta} \in M$ es una familia de conjuntos que no están en U, pero ahora es una partición de I. ■

Ahora ya podemos probar que los ultrafiltros no principales definen ultrapotencias no triviales (supuesto que estén bien fundadas):

Teorema 1.13 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC$-$AP, *sea $I \in M$ y sea U un ultrafiltro no principal en $\mathcal{P}^M I$ que defina una ultrapotencia bien fundada y sea κ el mayor cardinal^M tal que U es κ-completo sobre M. Entonces la inmersión elemental $j_U : M \longrightarrow \mathrm{Ult}_U(M)$ no es trivial y su punto crítico es κ.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos por inducción sobre $\alpha < \kappa$ que $j_U(\alpha) = \alpha$. Si es cierto para todo $\delta < \alpha$ y $[f] \in j_U(\alpha)$, con $f \in M^I \cap M$, entonces tenemos que $X = \{i \in I \mid f(i) \in \alpha\} \in U$. Sea $X_\delta = \{i \in I \mid f(i) = \delta\}$. Claramente $\{X_\delta\}_{\delta<\alpha} \in M$ y $\bigcup_{\delta<\alpha} X_\delta = X$. Si ningún $X_\delta \in U$, entonces la κ-completitud de U nos daría que $I \setminus X \in U$, luego tiene que existir un $\delta < \alpha$ tal que $X_\delta \in U$, lo que se traduce en que $[f] = j_U(\delta) = \delta \in \alpha$.

Esto prueba que $j_U(\alpha) \leq \alpha$ y la otra desigualdad se cumple siempre. Ahora falta probar que $\kappa < j_U(\kappa)$. Para ello usamos que U no es $(\kappa^+)^M$-completo sobre M, luego por 1.12 existe una partición $\{Z_\delta\}_{\delta<\kappa} \in M$ de I en conjuntos que no están en U. Definimos $d \in M^I \cap M$ como la única aplicación que cumple $d(i) = \delta \leftrightarrow i \in Z_\delta$. Así $[d] \in \mathrm{Ult}_U(M)$ y

$$\{i \in I \mid d(i) \in c_\kappa(i)\} = I \in U,$$

luego $[d] < j_U(\kappa)$, y si $\alpha < \kappa$, entonces

$$\{i \in I \mid \alpha \in d(i)\} = I \setminus \bigcup_{\delta\leq\alpha} Z_\delta = \bigcap_{\delta\leq\alpha} (I \setminus Z_\alpha) \in U.$$

Por lo tanto $\alpha = j_U(\alpha) = [c_\alpha] \in [d]$. En definitiva, $\kappa \leq [d] < j_U(\kappa)$. Esto prueba que κ es el punto crítico de j_U. ■

Una condición suficiente que garantiza que la ultrapotencia está bien fundada es la siguiente:

Teorema 1.14 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC−AP, *sea $I \in M$ y sea U un ultrafiltro no principal en $\mathcal{P}^M I$ tal que la intersección de cualquier familia numerable de elementos de U (no necesariamente en M) sea no vacía. Entonces la ultrapotencia* $\mathrm{Ult}^*_U(M)$ *está bien fundada.*

DEMOSTRACIÓN: En caso contrario existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\omega}$ de funciones $f_n \in M^\kappa \cap M$ tales que $\bigwedge n \in \omega\ [f_{n+1}]^*\, R\, [f_n]^*$, es decir, que para todo $n \in \omega$,

$$A_n = \{\delta \in \kappa \mid f_{n+1}(\delta) \in f_n(\delta)\} \in U.$$

Por hipótesis existe un $\delta \in \bigcap_{n\in\omega} A_n$, lo cual nos da una contradicción, pues tendríamos entonces que $\bigwedge n \in \omega\ f_{n+1}(\delta) \in f_n(\delta)$. ■

1.3 Ultrafiltros normales

El trabajo con ultrapotencias se simplifica considerablemente si imponemos al ultrafiltro cierta condición que vamos a estudiar ahora.

Observemos que si M es un modelo transitivo de ZFC−AP, κ es un cardinal^M y U es un ultrafiltro en $\mathcal{P}^M\kappa$ no principal y κ-completo sobre M, entonces κ es necesariamente el mayor cardinal tal que U es κ-completo. La parte final de la prueba del teorema 1.13 es especialmente simple, pues la partición $\{Z_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$

puede reducirse a $Z_\alpha = \{\alpha\}$, con lo que la aplicación $d : \kappa \longrightarrow \kappa$ se reduce a la identidad en κ. Dicha prueba muestra que $\kappa \leq [d] < j_U(\kappa)$.

La propiedad que vamos a estudiar equivale a que $\kappa = [d]$, lo cual es importante porque nos da una representación explícita de κ como elemento de la ultrapotencia que no es trivial en absoluto. Conviene enunciar una propiedad al respecto para filtros arbitrarios, no necesariamente ultrafiltros.

Recordemos que la intersección diagonal de una familia $\{X_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ de subconjuntos de un cardinal κ se define como

$$\mathop{\triangle}_{\alpha<\kappa} X_\alpha = \{\delta \in \kappa \mid \delta \in \bigcap_{\alpha<\delta} X_\alpha\}.$$

Teorema 1.15 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC$-$AP, *sea κ un cardinal^M infinito y sea D un filtro de $\mathcal{P}^M\kappa$ no principal y κ-completo sobre M. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) Si $\{X_\alpha\}_{\alpha<\kappa} \in M$ es una familia de conjuntos de D, entonces $\mathop{\triangle}\limits_{\alpha<\kappa} X_\alpha \in D$.

b) Si $f : \kappa \longrightarrow \kappa$ cumple que $f \in M$ y $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < \alpha\} \notin D'$, entonces existe un $\gamma < \kappa$ tal que $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = \gamma\} \notin D'$.

Demostración: a) $\Rightarrow$ b) Sea $Y = \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < \alpha\} \notin D'$ y supongamos que, para todo $\gamma < \kappa$, se cumple $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = \gamma\} \in D'$, con lo que a su vez $X_\gamma = \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \neq \gamma\} \in D$. Por hipótesis tenemos que la intersección diagonal cumple $X = \mathop{\triangle}\limits_{\gamma<\kappa} X_\gamma \in D$.

Si $\alpha \in X$, entonces $\alpha \in \bigcap\limits_{\gamma<\alpha} X_\gamma$, luego $f(\alpha) \geq \alpha$, luego $\alpha \notin Y$. Así pues $X \subset \kappa \setminus Y \in D$, luego $Y \in D'$, contradicción.

b) $\Rightarrow$ a) Supongamos que $X = \mathop{\triangle}\limits_{\alpha<\kappa} X_\alpha \notin D$. Entonces $\kappa \setminus X \notin D'$. Consideramos $f : \kappa \longrightarrow \kappa$ tal que si $\alpha \in \kappa \setminus X$ entonces $f(\alpha) < \alpha$ cumple que $\alpha \notin X_{f(\alpha)}$, mientras que si $\alpha \in X$ entonces $f(\alpha) = \alpha$. Así

$$\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < \alpha\} = \kappa \setminus X \notin D'.$$

Por a) existe un $\gamma < \kappa$ tal que $E = \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = \gamma\} \notin D'$, pero entonces $E \setminus \{\gamma\} \subset \kappa \setminus X_\gamma$, luego $X_\gamma \subset (\kappa \setminus E) \cup \{\gamma\}$, luego $\kappa \setminus E \in D$, luego $E \in D'$, contradicción. ■

Definición 1.16 Sea M un modelo transitivo de ZFC$-$AP y sea κ un cardinal^M infinito. Diremos que un filtro D en $\mathcal{P}^M\kappa$ es *normal* sobre M si es κ-completo, no principal y cumple cualquiera de las dos propiedades equivalentes del teorema anterior.

Notemos que, con el lenguaje derivado de la teoría de la medida explicado en la introducción, la segunda puede parafrasearse diciendo que toda función regresiva sobre un conjunto de medida positiva es constante en un conjunto de medida positiva.

En particular, diremos que un filtro D en un cardinal κ es *normal* si lo es sobre V, es decir, si es κ-completo no principal y es cerrado para intersecciones diagonales.

Nota Conviene observar que, a la hora de demostrar que un filtro D en $\mathcal{P}^M\kappa$ es normal, no hace falta probar que es κ-completo sobre M, sino que basta exigir que $\kappa \setminus \alpha \in D$ para todo $\alpha < \kappa$. Con esta condición, si se cumple el apartado b) del teorema anterior, el filtro es normal. En efecto, sólo hay que probar que es κ-completo sobre M, pero si $\{X_\alpha\}_{\alpha<\beta} \in M$, con $\beta < \kappa$ es una familia de elementos de D, entonces $\bigcap\limits_{\alpha<\beta} X_\alpha \in D$, ya que en caso contrario $X = \bigcup\limits_{\alpha<\beta} X'_\alpha \notin D'$, y podríamos tomar $f \in M$, tal que $f : \kappa \longrightarrow \kappa$ y que, para cada $\alpha \in X$, se cumpliera $\alpha \notin X_{f(\alpha)}$. Como $\kappa \setminus \beta \in D$, se cumple que $X \cap (\kappa \setminus \beta) \notin D'$, y está contenido en $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < \alpha\} \notin D'$. A partir de aquí llegamos a una contradicción razonando exactamente igual que en la implicación b) $\Rightarrow$ a) del teorema anterior. ■

A continuación demostramos la caracterización que habíamos anunciado:

Teorema 1.17 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC$-$AP, *sea κ un cardinal^M y sea D un ultrafiltro en $\mathcal{P}^M\kappa$ no principal, κ-completo y que determina una ultrapotencia bien fundada. Entonces D es normal sobre M si y sólo si $\kappa = [d]$, donde d es la identidad en κ.*

Demostración: Si D es normal y $[f] \in [d]$, con $f \in M^\kappa \cap M$, entonces $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < \alpha\} \in D$. Cambiando f por otra función que determina la misma clase en $\mathrm{Ult}_D(M)$, podemos suponer que $f : \kappa \longrightarrow \kappa$. Como D es normal, existe $\gamma < \kappa$ tal que $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = \gamma\} \in D$, pero esto significa que $[f] = j_D(\gamma) = \gamma < \kappa$. Por lo tanto $[d] \leq \kappa$ y la otra desigualdad se cumple siempre.

Si $[d] = \kappa$ y $f : \kappa \longrightarrow \kappa$ cumple $f \in M$ y $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < \alpha\} \in D$, entonces $[f] \in [d] = \kappa$, luego existe un $\gamma < \kappa$ tal que $[f] = \gamma = j_D(\gamma)$, luego $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = \gamma\} \in D$. ■

Veamos una última propiedad de los filtros normales:

Teorema 1.18 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC$-$AP, *sea κ un cardinal^M y sea D un ultrafiltro en $\mathcal{P}^M\kappa$ normal sobre M que determine una ultrapotencia bien fundada. Entonces D contiene a todos los subconjuntos c.n.a. de κ que pertenecen a M.*

Demostración: Consideramos la inmersión elemental $j_D : M \longrightarrow \mathrm{Ult}_D(M)$. Como $j_D(C)$ es c.n.a. en $j_D(\kappa)$ y $C = j_D(C) \cap \kappa$ no está acotado en κ, resulta que $\kappa \in j_D(C)$, y como $\kappa = [d]$, esto equivale a que $\{\alpha < \kappa \mid \alpha \in C\} \in D$, es decir, a que $C \in D$. ■

En particular, todo ultrafiltro normal en un cardinal regular no numerable[4] κ contiene a los c.n.a.s de κ, puesto que el ultrafiltro define una ultrapotencia bien fundada por el teorema 1.14 (para $M = V$). No obstante, podemos probar que esto vale para filtros normales cualesquiera:

Teorema 1.19 *Si κ es un cardinal regular no numerable y D es un filtro normal en κ, entonces D contiene a todos los conjuntos c.n.a. en κ.*

Demostración: El teorema de Fodor [TC 6.15] afirma que si un conjunto E cumple que toda aplicación $f : E \longrightarrow \kappa$ tal que $\bigwedge \alpha \in E\, f(\alpha) < \alpha$ es constante en un conjunto no acotado, entonces E es estacionario.

Si $E \notin D'$, ciertamente cumple esta propiedad (f ha de ser constante en un conjunto que no está en D', en particular no acotado), luego todo conjunto que no está en D' es estacionario. Por lo tanto, si $C \subset \kappa$ es c.n.a., entonces $\kappa \setminus C$ no es estacionario, luego $\kappa \setminus C \in D'$, luego $C \in D$. ■

Ahora vamos a probar que toda inmersión elemental no trivial da lugar a otra asociada a una ultrapotencia respecto de un ultrafiltro normal con el mismo punto crítico:

Teorema 1.20 *Si $j : M \longrightarrow N$ es una inmersión elemental no trivial entre dos modelos transitivos de* ZFC−AP, *κ es su punto crítico y*

$$D = \{X \in \mathcal{P}^M\kappa \mid \kappa \in j(X)\},$$

entonces D es un ultrafiltro en $\mathcal{P}^M\kappa$ normal sobre M, determina una ultrapotencia bien fundada y la inmersión elemental $j_D : M \longrightarrow \mathrm{Ult}_D(M)$ tiene también a κ como punto crítico. Además, la aplicación $k([f]) = j(f)(\kappa)$ es una inmersión elemental que hace conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "j_D"'] & N \\
& \mathrm{Ult}_D(M) \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}$$

Demostración: Es inmediato comprobar que D es un ultrafiltro no principal en $\mathcal{P}^M\kappa$. En efecto:

- $j(\varnothing) = \varnothing$, luego $\varnothing \notin D$, pero $\kappa \in j(\kappa)$, luego $\kappa \in D$.
- Si $X, Y \in D$, entonces $\kappa \in j(X) \cap j(Y) = j(X \cap Y)$, luego $X \cap Y \in D$.
- Si $X \in D$ y $X \subset Y \in \mathcal{P}^M\kappa$, entonces $\kappa \in j(X) \subset j(Y)$, luego $Y \in D$.
- Si $X \in \mathcal{P}^M\kappa$, o bien $\kappa \in j(X)$, o bien $\kappa \in j(\kappa) \setminus j(X) = j(\kappa \setminus X)$, luego $X \in D \vee \kappa \setminus X \in D$.
- Si $\alpha \in \kappa$, entonces $j(\{\alpha\}) = \{j(\alpha)\} = \{\alpha\}$, luego $\{\alpha\} \notin D$.

[4]Notemos que en los teoremas anteriores, la hipótesis de que κ es regular y no numerable en M está contenida en la hipótesis de que D define una ultrapotencia bien fundada, pues entonces κ es el punto crítico de la inmersión elemental asociada.

Por lo tanto, tenemos definida la ultrapotencia $\mathrm{Ult}^*_D(M)$. Vamos a probar que está bien fundada, para lo cual definimos

$$k^* : \mathrm{Ult}^*_D(M) \longrightarrow N$$

mediante $k^*([f]^*) = j(f)(\kappa)$. La definición es correcta, pues si $[f]^* = [g]^*$, entonces $\{\alpha \in \kappa \mid f(i) = g(i)\} \in D$, lo que por definición de D significa que

$$\kappa \in \{\alpha \in j(\kappa) \mid j(f)(i) = j(g)(i)\},$$

es decir, que $j(f)(\kappa) = j(g)(\kappa)$. Ahora es fácil ver que tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "j^*_D"'] & N \\ & \mathrm{Ult}^*_D(M) \arrow[u, "k^*"'] \end{tikzcd}$$

En efecto, si $a \in M$, se cumple

$$k^*(j^*_D(a)) = k^*[c_a] = j(c_a)(\kappa) = j(a).$$

Además k^* es inyectiva, pues

$$\begin{gathered} k^*([f]^*) = k^*([g]^*) \leftrightarrow j(f)(\kappa) = j(g)(\kappa) \leftrightarrow \\ \kappa \in \{\alpha \in j(\kappa) \mid j(f)(\alpha) = j(g)(\alpha)\} \leftrightarrow \\ \{\alpha \in \kappa \mid f(\alpha) = g(\alpha)\} \in D \rightarrow [f]^* = [g]^*. \end{gathered}$$

El mismo argumento prueba que $[f]^* \, R \, [g]^* \leftrightarrow k^*([f]^*) \in k^*([g]^*)$.

Ahora es inmediato que la ultrapotencia está bien fundada, pues k^* transformaría una sucesión decreciente respecto de R en otra decreciente respecto a la pertenencia.

Por lo tanto, tenemos definida la inmersión elemental $j_D : M \longrightarrow \mathrm{Ult}_D(M)$. Más aún, componiendo la inversa del colapso transitivo con k^* obtenemos una aplicación k, dada por $[f] \mapsto j(f)(\kappa)$, que de hecho es una inmersión elemental, pues

$$\begin{aligned} \phi^{\mathrm{Ult}_D(M)}([f_1], \ldots, [f_n]) &\leftrightarrow \{\alpha \in \kappa \mid \phi^M(f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha))\} \in D \\ &\leftrightarrow \kappa \in \{\alpha \in j(\kappa) \mid \phi^N(j(f_1)(\alpha), \ldots, j(f_n(\alpha)))\} \\ &\leftrightarrow \phi^N(j(f_1)(\kappa), \ldots, j(f_n)(\kappa)) \leftrightarrow \phi^N(k([f_1]), \ldots, k([f_n])). \end{aligned}$$

Además, si $\alpha < \kappa$ tiene que ser $j_D(\alpha) = \alpha$, pues si $\alpha < j_D(\alpha)$, entonces $\alpha \leq k(\alpha) < k(j_D(\alpha)) = j(\alpha)$, en contra de que κ es el punto crítico de j.

De aquí se sigue que D es k-completo sobre M: Si $\{X_\delta\}_{\delta<\alpha} \in M$ es una familia de conjuntos de D con $\alpha < \kappa$, entonces $j(\{X_\delta\}_{\delta<\alpha})$ es una sucesión de longitud $j(\alpha) = \alpha$. Concretamente, $j(\{X_\delta\}_{\delta<\alpha}) = \{j(X_\delta)\}_{\delta<\alpha}$. Además,

$$j(\bigcap_{\delta<\alpha} X_\delta) = \bigcap_{\delta<\alpha} j(X_\delta),$$

y como $\kappa \in j(X_\delta)$, para todo $\delta < \alpha$, concluimos que $\bigcap\limits_{\delta<\alpha} X_\delta \in D$.

Sólo falta probar que D es normal sobre M. Si $f \in M$ cumple $f : \kappa \longrightarrow \kappa$ y $\{\alpha \in \kappa \mid f(\alpha) < \alpha\} \in D$, entonces

$$\kappa \in j(\{\alpha \in \kappa \mid f(\alpha) < \alpha\}) = \{\alpha \in j(\kappa) \mid j(f)(\alpha) < \alpha\}.$$

Por lo tanto, $j(f)(\kappa) < \kappa$, que es lo mismo que $k([f]) < \kappa$. Si $\gamma = k([f])$, entonces $k([f]) = k(\gamma)$, luego $[f] = \gamma = j_D(\gamma)$, es decir, $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = \gamma\} \in D$. ■

Nota Si M es un modelo transitivo de ZFC$-$AP, κ es un cardinal^M y D es un ultrafiltro normal sobre M en $\mathcal{P}^M\kappa$ que define una ultrapotencia bien fundada, entonces el ultrafiltro definido en el teorema anterior a partir de la inmersión elemental $j_D : M \longrightarrow \mathrm{Ult}_D(M)$ es el mismo ultrafiltro de partida. En efecto, basta observar que, como $\kappa = [d]$, todo $X \in \mathcal{P}^M\kappa$ cumple

$$\kappa \in j_D(X) \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid \alpha \in X\} \in D \leftrightarrow X \in D.$$

Además la inmersión k es la identidad, pues $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = f(\alpha)\} \in D$, pero esto equivale a $[c_f]([d]) = [f]$, o también a $k([f]) = j(f)(\kappa) = [f]$. ■

1.4 Ultrafiltros iterables

En todo cuanto hemos dicho sobre ultrapotencias, nunca hemos exigido que el ultrafiltro U pertenezca al modelo de partida M. Cuando esto sucede, la ultrapotencia $\mathrm{Ult}_U(M)$ puede construirse en M, por lo que (supuesto que esté bien fundada) podemos concluir que $\mathrm{Ult}_U(M) \subset M$, de modo que la inmersión elemental $j_U : M \longrightarrow \mathrm{Ult}_U(M)$ tiene propiedades adicionales (por ejemplo, sabemos que su punto crítico tiene que ser inaccesible en M). La condición $U \in M$ se cumple trivialmente cuando $M = V$, pero es demasiado restrictiva en muchos contextos, así que ahora vamos a introducir una propiedad adicional sobre un ultrafiltro que no le exija estar en el modelo de partida, pero que baste para garantizar que muchos conjuntos relacionados con U estén en M.

Definición 1.21 Sea M un modelo transitivo de ZFC$-$AP, sea κ un cardinal^M. Diremos que un ultrafiltro D en $\mathcal{P}^M\kappa$ normal sobre M es 1-*iterable sobre* M si para todo $f \in {}^\kappa M \cap M$, se cumple que $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \in D\} \in M$.

Esta propiedad se cumple trivialmente si $D \in M$, en particular si $M = V$, por lo que en tal caso los ultrafiltros 1-iterables en $\mathcal{P}^M\kappa$ son simplemente los ultrafiltros normales sobre M.

Una observación que usaremos a menudo es que, si D es 1-iterable, se cumple más en general que si $J \in M$, $|J|^M \leq \kappa$ y $f \in {}^J M \cap M$, entonces

$$\{j \in J \mid f(j) \in D\} \in M.$$

Basta tomar $g : \kappa \longrightarrow J$ suprayectiva, $g \in M$ y aplicar la definición a $g \circ f$, con lo que
$$A = \{\alpha \in \kappa \mid f(g(\alpha)) \in D\} \in M.$$
Entonces
$$\{j \in J \mid f(j) \in D\} = g[A] \in M.$$

La primera aplicación de la iterabilidad es que si D es un ultrafiltro 1-iterable sobre M en $\mathcal{P}^M\kappa$, podemos definir

$$j_D^*(D) = \{[f]^* \in \mathrm{Ult}_D^*(M) \mid \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \in D\} \in D\}.$$

Es inmediato comprobar que la condición para estar en $j_D^*(D)$ no depende de la elección del representante f de cada clase: si $[f]^* = [g]^*$, entonces

$$\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \in D\} \cap \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = g(\alpha)\} \subset \{\alpha < \kappa \mid g(\alpha) \in D\}.$$

Si el primer conjunto está en D, la intersección también lo está, y el último conjunto está en M porque D es 1-iterable, luego, como D es un ultrafiltro sobre M, el conjunto de la derecha también está en D.

Observaciones Si $D \in M$, entonces $j_D^*(D)$ es literalmente la imagen de D por la inmersión elemental $j_D^* : M \longrightarrow \mathrm{Ult}_D^*(M)$, pero acabamos de ver que si D es 1-iterable $j_D^*(D)$ está definido incluso si $D \notin M$.

Si consideramos a M como modelo del lenguaje $\mathcal{L}_R$ que resulta de añadir al lenguaje de ZFC un relator monádico R que se interpreta como la pertenencia a D, entonces la pertenencia a $j_D^*(D)$ es la interpretación natural de R en $\mathrm{Ult}_D^*(M)$ según la definición general de ultrapotencia en la teoría de modelos, pero hay que tener presente que el teorema fundamental no se cumple en general para fórmulas de $\mathcal{L}_R$, pues, según se ve en la demostración de 1.7, para ello haría falta que el esquema de especificación fuera válido para fórmulas de $\mathcal{L}_R$, lo cual no tiene por qué ser cierto. ■

Diremos que el ultrafiltro D es 2-*iterable sobre* M si es 1-iterable y además la ultrapotencia $\mathrm{Ult}_D^*(M)$ está bien fundada.

En tal caso podemos definir $j_D(D) \subset \mathrm{Ult}_D(M)$ como la imagen de $j_D^*(D)$ por el colapso transitivo, de modo que

$$[f] \in j_D(D) \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \in D\} \in D.$$

Si $D \in M$ entonces $j_D(D)$ es literalmente su imagen por j_D. En general (aunque no se cumpla $D \in M$) tenemos que si $X \in M$ entonces

$$j_D(X) \in j_D(D) \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid X \in D\} \in D \leftrightarrow X \in D.$$

Esto significa que j_D es una inmersión cuando consideramos a M y a $\mathrm{Ult}_D(M)$ como modelos de $\mathcal{L}_R$, interpretando R como la pertenencia a D y a $j_D(D)$ respectivamente, pero como el teorema fundamental no es necesariamente cierto para fórmulas de $\mathcal{L}_R$, tampoco es cierto que j_D sea una inmersión elemental para fórmulas de $\mathcal{L}_R$.

Veamos algunas propiedades básicas de las ultrapotencias con ultrafiltros 2-iterables. De hecho, las dos primeras no requieren la iterabilidad:

Teorema 1.22 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC$-$AP, *sea κ un cardinal^M y D un ultrafiltro en $\mathcal{P}^M\kappa$ 2-iterable sobre M. Sea $N = \mathrm{Ult}_D(M)$. Entonces:*

a) $N = \bigcup\limits_{x\in M} j_D(x), \qquad \Omega^N = \bigcup\limits_{\alpha\in\Omega^M} j_D(\alpha).$

b) Si M es un conjunto, $|M| = |N|$.

c) $\bigwedge x \in V_\kappa^M\ j_D(x) = x, \quad V_\kappa^M = V_\kappa^N, \quad \mathcal{P}^M\kappa = \mathcal{P}^N\kappa, \quad (\kappa^+)^M = (\kappa^+)^N.$

d) $D \notin N$.

e) $j_D(D)$ es un ultrafiltro en $\mathcal{P}^N j_D(\kappa)$ 1-iterable sobre N.

Demostración: Si $y \in N$, entonces $y = [f]$, para cierta $f \in {}^\kappa M \cap M$. Basta tomar $x = f[\kappa] \in M$. Entonces

$$\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \in x\} = \kappa \in D,$$

pero esto equivale a que $y = [f] \in j_D(x)$. Si $\beta \in \Omega^N$, entonces $\beta = [f]$, donde podemos exigir que $f : \kappa \longrightarrow \Omega$, y basta tomar $\alpha = \bigcup f[\kappa] \in \Omega^M$.

b) $|N| \leq |{}^\kappa M \cap M| \leq |M|$, y la otra desigualdad se debe a que $j_D : M \longrightarrow N$ es inyectiva.

c) Veamos por inducción sobre $\alpha < \kappa$ que $\bigwedge x \in V_\alpha^M\ j_D(x) = x$ y que $V_\alpha^M = V_\alpha^N$.

Para $\alpha = 0$ es trivial. Si vale para α y $x \in V_{\alpha+1}^M$, entonces[5] $j_D(x) \in V_{j_D(\alpha)+1}^N$ y, por hipótesis de inducción $j_D(\alpha) = \alpha$, luego $j_D(x) \in V_{\alpha+1}^N$. Así pues, como $j_D(x) \subset V_\alpha^N = V_\alpha^M$, tenemos que

$$j_D(x) = \{y \in V_\alpha^M \mid y \in j_D(x)\} = \{y \in V_\alpha^M \mid j_D(y) \in j_D(x)\}$$
$$= \{y \in V_\alpha^M \mid y \in x\} = x.$$

Esto implica en particular que $V_{\alpha+1}^M \subset V_{\alpha+1}^N$. Veamos ahora la inclusión contraria. Sea $x \in V_{\alpha+1}^N$, de modo que $x = [f]$. Entonces

$$\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \in V_{\alpha+1}^M\} \in D,$$

donde hemos usado que $j_D(\alpha) = \alpha$, y modificando f podemos suponer que $\bigwedge \alpha < \kappa\ f(\alpha) \in V_{\alpha+1}^M$. Sea $u = \bigcup f[\kappa] \in M$. Notemos que $u \subset V_\alpha^M$.

Vamos a probar que $(|u| < \kappa)^M$. En caso contrario, existe $s : u \longrightarrow \kappa$ suprayectiva, $s \in M$. Sea $g : \kappa \longrightarrow u$, $g \in M$ tal que $s(g(\alpha)) = \alpha$, para todo

[5] Observemos que el rango de un conjunto está definido en ZFC$-$AP.

$\alpha < \kappa$. Como $g(\alpha) \in V_\alpha^M$, tenemos que $z = [g] \in V^N_{j_D(\alpha)} = V^N_\alpha = V^M_\alpha$, luego $j_D(z) = z = [g]$, pero esto significa que

$$\{\alpha < \kappa \mid g(\alpha) = z\} \in D,$$

lo cual es absurdo, pues g es inyectiva.

Observemos ahora que

$$x = \{y \in u \mid \{\alpha < \kappa \mid y \in f(\alpha)\} \in D\} \in M.$$

En efecto, la igualdad se cumple porque si $y \in x$, entonces $y \in V^N_\alpha = V^M_\alpha$, luego $j_D(y) = y$, luego $j_D(y) \in [f]$, luego $\{\alpha < \kappa \mid y \in f(\alpha)\} \in D$, y en particular $y \in u$. Recíprocamente, si y está en el miembro derecho, entonces $j_D(y) \in [f] = x \subset V^N_{j_D(\alpha)}$, luego $y \in V^M_\alpha$, luego $y = j_D(y) \in x$.

Por otra parte, la pertenencia a M se debe a que D es 1-iterable. En efecto, sea $h : u \longrightarrow M$ dada por $h(y) = \{\alpha < \kappa \mid y \in f(\alpha)\}$. Claramente $h \in M$ y $|u|^M \leq \kappa$, luego por la iterabilidad implica que $x \in M$. Además $x \subset u \subset V^M_\alpha$, luego $x \in V^M_{\alpha+1}$, como había que probar.

Falta probar las dos últimas igualdades de c). Si $x \in \mathcal{P}^M\kappa$, entonces tenemos que $x = j_D(\kappa) \cap \kappa \in N$, luego $x \in \mathcal{P}^N\kappa$. Recíprocamente, si $x \in \mathcal{P}^N\kappa$, sea $x = [f]$, de modo que

$$x = \{\beta < \kappa \mid \{\alpha < \kappa \mid \beta \in f(\alpha)\} \in D\} \in M,$$

donde la pertenencia a M se prueba igual que antes, por la 1-iterabilidad de D aplicada a $h(\beta) = \{\alpha < \kappa \mid \beta \in f(\alpha)\}$. Por lo tanto $x \in \mathcal{P}^M\kappa$.

Por último, $(\kappa^+)^M = (\kappa^+)^N$ se sigue de que (por lo que acabamos de probar) M y N contienen los mismos buenos órdenes de κ (un ordinal de M se puede biyectar con κ en M si y sólo si κ se puede ordenar con ordinal α en M, si y sólo si lo mismo sucede en N).

d) Si $D \in N$, entonces

$$\mathcal{P}^M\kappa = D \cup \{\kappa \setminus X \mid X \in D\} \in N,$$

luego también $\mathcal{P}^N\kappa \in N$. Entonces

$$(\bigvee \alpha < j(\kappa) \bigvee g(g : \mathcal{P}\alpha \longrightarrow j(\kappa) \text{ suprayectiva})^N.$$

En efecto, basta tomar $\alpha = \kappa$, con lo que, ciertamente, $\mathcal{P}^N\alpha \in N$ y, como $j(\kappa) = \{[f] \mid f \in {}^\kappa\kappa \cap M\} = \{[f] \mid f \in {}^\kappa\kappa \cap N\}$, en N podemos definir la aplicación ${}^\kappa\kappa \longrightarrow j(\kappa)$ suprayectiva dada por $f \mapsto [f]$ (ya que podemos definir la clase $[f]$ a partir de $D \in N$) y claramente entonces también tenemos una aplicación $g : \mathcal{P}^N\kappa \longrightarrow j(\kappa)$ suprayectiva, $g \in N$.

Por consiguiente

$$(\bigvee \alpha < \kappa \bigvee g(g : \mathcal{P}\alpha \longrightarrow \kappa \text{ suprayectiva})^M.$$

Equivalentemente, existe $\mu < \kappa$ tal que $(\kappa \leq 2^\mu)^M$. Sea $h : \kappa \longrightarrow {}^\mu 2$ inyectiva. Para cada $\alpha < \mu$, sea $X_\alpha = \{\beta < \kappa \mid h(\beta)(\alpha) = 0\}$. Claramente $\{X_\alpha\}_{\alpha<\mu} \in M$, luego, al ser D 1-iterable, $\{\alpha < \mu \mid X_\alpha \in D\} \in M$. Esto nos permite definir $g \in ({}^\mu 2)^M$ mediante

$$g(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X_\alpha \in D, \\ 1 & \text{si } X_\alpha \notin D, \end{cases}$$

de modo que $Y_\alpha = \{\beta < \kappa \mid h(\beta)(\alpha) = g(\alpha)\} \in D$, luego $Y = \bigcap\limits_{\alpha<\mu} Y_\alpha \in D$, pero entonces, si $\beta \in Y$, se cumple $\bigwedge \alpha < \mu \ h(\beta)(\alpha) = g(\alpha)$, luego $h(\beta) = g$ y, como h es inyectiva, llegamos a que $|Y| = 1$, contradicción.

e) Se cumple que

$$[f] \in j_D(D) \to \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \subset \kappa\} \in D \to [f] \subset j_D(\kappa).$$

Por lo tanto, $j_D(D) \subset \mathcal{P}^N j_D(\kappa)$.

$$j_D(\kappa) \in j_D(D) \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid \kappa \in D\} = \kappa \in D,$$

$$\varnothing = j_D(\varnothing) \in j_D(D) \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid \varnothing \in D\} = \varnothing \in D,$$

luego $j_D(\kappa) \in D_1$, $\varnothing \notin j_D(D)$.

Si $[f] \in W$, $[g] \in N$, $[f] \subset [g]$, entonces

$$\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \in D\} \cap \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \subset g(\alpha)\} \subset \{\alpha < \kappa \mid g(\alpha) \in D\}.$$

El último conjunto está en N porque D es 1-iterable, y está en D porque la parte izquierda está. Por lo tanto $[g] \in j_D(D)$.

Veamos ahora que si $\alpha \in j_D(\kappa)$, entonces $\alpha \notin D_1$. En efecto, $\alpha = [h]$, para una cierta $h \in M$ que podemos exigir que cumpla $h : \kappa \longrightarrow \kappa$. Entonces

$$\{\delta < \kappa \mid h(\delta) \in D\} = \varnothing \notin D,$$

luego $\alpha = [h] \notin j_D(D)$.

Según la nota tras la definición 1.16, para comprobar que $j_D(D)$ es normal sobre N no hace falta comprobar que es $j_D(\kappa)$-completo sobre N, sino únicamente que si $F : j_D(\kappa) \longrightarrow j_D(\kappa)$ cumple $F \in N$ y

$$A = \{\alpha < j_D(\kappa) \mid F(\alpha) = \alpha\} \in j_D(D),$$

entonces F es constante en un conjunto de $j_D(D)$

Pongamos que $F = [f]$, donde podemos exigir que $f : \kappa \longrightarrow {}^\kappa\kappa$. Sea $g : \kappa \longrightarrow M$ dada por $g(\alpha) = \{\beta < \kappa \mid f(\alpha)(\beta) \in \beta\}$. Como $f \in M$, también $g \in M$, y además se cumple que $A = [g]$, pues si $\alpha < j_D(\kappa)$, entonces $\alpha = [h]$, para cierta $h : \kappa \longrightarrow \kappa$ y

$$\alpha \in A \leftrightarrow [f]([h]) \in [h] \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha)(h(\alpha)) \in h(\alpha)\} \in D$$

$$\leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid h(\alpha) \in g(\alpha)\} \in D \leftrightarrow [h] \in [g] \leftrightarrow \alpha \in [g].$$

Así pues, como $[g] \in j_D(D)$, se cumple que $\{\alpha < \kappa \mid g(\alpha) \in D\} \in D$. Equivalentemente,

$$X = \{\alpha < \kappa \mid \{\beta < \kappa \mid f(\alpha)(\beta) \in \beta\} \in D\} \in D.$$

Para cada α, $\gamma < \kappa$, sea $X_{\alpha\gamma} = \{\beta < \kappa \mid f(\alpha)(\beta) = \gamma\}$. Tenemos que $\{X_{\alpha\gamma}\}_{\alpha,\gamma\in\kappa} \in M$, y como D es 1-iterable se cumple que

$$B = \{(\alpha,\gamma) \in \kappa \times \kappa \mid X_{\alpha\gamma} \in D\} \in M.$$

Si $\alpha \in X$, entonces $\{\beta < \kappa \mid f(\alpha)(\beta) \in \beta\} \in D$, y como D es normal existe un $\gamma < \kappa$ tal que $\{\beta < \kappa \mid f(\alpha)(\beta) = \gamma\} \in D$, luego $(\alpha,\gamma) \in B$. Aplicando a B el axioma de elección en M encontramos $u \in {}^\kappa\kappa \cap M$ tal que si $\alpha \in X$ entonces

$$\{\beta < \kappa \mid f(\alpha)(\beta) = u(\alpha)\} \in D.$$

Sea $\gamma = [u] < j_D(\kappa)$ y sea $\bar{g}(\alpha) = \{\beta < \kappa \mid f(\alpha)(\beta) = u(\alpha)\}$. Así $\bar{g} \in M$ y

$$X \subset \{\alpha < \kappa \mid \bar{g}(\alpha) \in D\},$$

luego el conjunto de la derecha está en D y consecuentemente $[\bar{g}] \in j_D(D)$. Ahora bien, $[\bar{g}] = \{\alpha < j_D(\kappa) \mid F(\alpha) = \gamma\}$, ya que si $\alpha < j_D(\kappa)$, tenemos que $\alpha = [h]$, donde $h : \kappa \longrightarrow \kappa$, y

$$\alpha \in [\bar{g}] \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid h(\alpha) \in \bar{g}(\alpha)\} \in D \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha)(h(\alpha)) = u(\alpha)\} \in D$$

$$\leftrightarrow [f]([h]) = [u] \leftrightarrow F(\alpha) = \gamma.$$

Finalmente veamos que $j_D(D)$ es 1-iterable. Para ello sea $F \in {}^{j_D(\kappa)}N \cap N$, digamos $F = [f]$. Podemos suponer que $f : \kappa \longrightarrow {}^\kappa M$, y entonces podemos definir $\bar{f} : \kappa \times \kappa \longrightarrow M$ mediante $\bar{f}(\alpha,\beta) = f(\alpha)(\beta)$. Como $f \in M$, también $\bar{f} \in M$, y como D es 1-iterable también

$$X = \{(\alpha,\beta) \in \kappa \times \kappa \mid \bar{f}(\alpha,\beta) \in D\} \in M.$$

Definimos ahora $g \in {}^\kappa M$ mediante $g(\alpha) = \{\beta \in \kappa \mid (\alpha,\beta) \in X\}$. Entonces $g \in M$. Observemos que si $\alpha \in j_D(\kappa)$, entonces $\alpha = [h]$, donde podemos suponer que $h : \kappa \longrightarrow \kappa$. Definimos $u : \kappa \longrightarrow M$ mediante $u(\alpha) = f(\alpha)(h(\alpha))$, y así es claro que $[u] = [f]([h]) = F(\alpha)$. Además:

$$\alpha \in [g] \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid h(\alpha) \in g(\alpha)\} \in D \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha)(h(\alpha)) \in D\} \in D$$

$$\leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid u(\alpha) \in D\} \in D \leftrightarrow [u] \in j_D(D) \leftrightarrow F(\alpha) \in D_1.$$

Por lo tanto

$$\{\alpha < j_D(\kappa) \mid F(\alpha) \in j_D(D)\} = [g] \in N.$$

■

Ahora podemos entender por qué hablamos de ultrafiltros iterables: si D es 2-iterable sobre M, entonces el ultrafiltro $D_1 = j_D(D)$ es 1-iterable sobre $\mathrm{Ult}_D(M)$, por lo que podemos considerar la ultrapotencia $\mathrm{Ult}^*_{D_1}(\mathrm{Ult}_D(M))$. Si está bien fundada, tenemos su colapso transitivo $\mathrm{Ult}_D^2(M) = \mathrm{Ult}_{D_1}(\mathrm{Ult}_D(M))$, en el que tenemos definido el ultrafiltro 1-iterable $D_2 = j_{D_1}(D_1)$, a partir del cual podemos construir la ultrapotencia $\mathrm{Ult}^*_{D_2}(\mathrm{Ult}_D^2(M))$, etc. Así pues, podemos construir una sucesión de ultrapotencias iteradas con inmersiones elementales

$$M \longrightarrow \mathrm{Ult}_D(M) \longrightarrow \mathrm{Ult}_D^2(M) \longrightarrow \mathrm{Ult}_D^3(M) \longrightarrow \cdots$$

que se puede prolongar mientras las ultrapotencias $\mathrm{Ult}^*_{D_n}(\mathrm{Ult}_D^n(M))$ vayan estando bien fundadas. En general, diremos que el ultrafiltro D es n-iterable si están definidas las ultrapotencias $\{\mathrm{Ult}_D^i(M)\}_{i<n}$, donde hay que entender que $\mathrm{Ult}_D^0(M) = M$ y que $\mathrm{Ult}_D^1(M) = \mathrm{Ult}_D(M)$.

No obstante, la definición en ZFC de la sucesión de ultrapotencias iteradas requiere ciertas consideraciones técnicas, al menos si el modelo de partida es una clase propia. Nos ocuparemos de ello en la sección 1.6, donde veremos además cómo definir ultrapotencias iteradas $\mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$ para ordinales α arbitrarios, no necesariamente finitos. Terminamos esta sección con algunos hechos adicionales sobre los ultrafiltros 2-iterables.

En primer lugar observamos que la igualdad $\mathcal{P}^M\kappa = \mathcal{P}^N\kappa$ que proporciona el teorema anterior implica que si κ admite un ultrafiltro 2-iterable, entonces es inaccesible^M por el teorema 1.4. Recíprocamente, si una inmersión elemental no trivial cumple esta propiedad, entonces determina un ultrafiltro 2-iterable sobre su punto crítico:

Teorema 1.23 *Si $j : M \longrightarrow N$ es una inmersión elemental no trivial entre dos modelos transitivos de* ZFC−AP, *κ es su punto crítico y $\mathcal{P}^M\kappa = \mathcal{P}^N\kappa$, entonces el ultrafiltro*

$$D = \{X \in \mathcal{P}^M\kappa \mid \kappa \in j(X)\}$$

considerado en el teorema 1.20 *es* 2*-iterable.*

Demostración: Ya sabemos que es un ultrafiltro normal sobre M. Si $f \in {}^\kappa M \cap M$, entonces

$$\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \in D\} = \{\alpha < \kappa \mid \kappa \in j(f)(\alpha)\} \in \mathcal{P}^N\kappa = \mathcal{P}^M\kappa. \qquad \blacksquare$$

El teorema anterior y el apartado c) del teorema 1.22 muestran que, dado un modelo transitivo M de ZFC−AP, la existencia de una inmersión elemental $j : M \longrightarrow N$ no trivial con punto crítico κ tal que $\mathcal{P}^M\kappa = \mathcal{P}^N\kappa$ es equivalente a la existencia de un ultrafiltro 2-iterable sobre M. Ahora bien, si M es una clase propia la primera afirmación no es expresable en ZFC, mientras que la segunda sí que lo es.

Veamos ahora que la 1-iterabilidad nos permite definir las potencias de un ultrafiltro. Más adelante veremos cuál es su interés.

Definición 1.24 Sea M un modelo transitivo de ZFC−AP, sea κ un cardinal^M y D un ultrafiltro en $\mathcal{P}^M\kappa$ 1-iterable sobre M. Para cada $n \in \omega$ definimos

$$D^n = \{X \in \mathcal{P}^M[\kappa]^n \mid \bigvee A \in D\ [A]^n \subset X\}.$$

Notemos que $D^0 = \{\varnothing\}$ es el único ultrafiltro de $\mathcal{P}^M[\kappa]^0 = \{\varnothing\}$, y que D^1 es el ultrafiltro en $\mathcal{P}^M[\kappa]^1$ que se corresponde con D a través de la biyección natural $\kappa \longrightarrow [\kappa]^1$ dada por $\alpha \mapsto \{\alpha\}$.

En lo sucesivo convenimos en identificar $[\kappa]^n$ con el conjunto de las sucesiones crecientes en κ de longitud n.

Teorema 1.25 *Si M es un modelo transitivo de* ZFC$-$AP, *κ es un cardinal^M y D es un ultrafiltro en $\mathcal{P}^M\kappa$ 1-iterable sobre M, entonces cada D^n es un ultrafiltro en $\mathcal{P}^M[\kappa]^M$ no principal κ-completo sobre M, y además todo $X \in \mathcal{P}^M[\kappa]^{n+1}$ cumple*

$$X \in D^{n+1} \leftrightarrow \{s \in [\kappa]^n \mid \{\delta < \kappa \mid \delta > \max s \wedge s \cup \{\delta\} \in X\} \in D\} \in D^n.$$

Demostración: Que D^n es un filtro no principal y κ-completo sobre M es inmediato a partir de la definición. Veamos por inducción sobre n que es un ultrafiltro y que cumple la condición recurrente del enunciado. Para $n = 0$ se cumple trivialmente. Supongámoslo cierto para n. Si $X \in \mathcal{P}^M[\kappa]^{n+1}$ y $s \in [\kappa]^n$, definimos

$$X_s = \{\delta < \kappa \mid \delta > \max s \wedge s \cup \{\delta\} \in X\}.$$

Claramente, si $X \in D^{n+1}$, existe $A \in D$ tal que $[A]^{n+1} \subset X$, luego, para todo $s \in [A]^n$, se cumple que $A \subset X_s$, luego $X_s \in D$ y a su vez

$$[A]^n \subset \{s \in [\kappa]^n \mid X_s \in D\}.$$

Ahora usamos que D es 1-iterable para concluir que el conjunto de la derecha está en M, lo que a su vez nos permite concluir que está en D^n.

Supongamos ahora que X está en el conjunto del enunciado, luego existe un $A \in D$ tal que

$$[A^n] \subset \{s \in [\kappa]^n \mid X_s \in D\}.$$

Definimos en M una sucesión $\{C_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ de elementos de D. Si $\alpha \notin A$, definimos $C_\alpha = \kappa$, mientras que si $\alpha \in A$,

$$C_\alpha = \bigcap_{s \in S_\alpha} X_s,$$

donde $S_\alpha = \{s \in [\kappa]^n \mid s(n-1) = \alpha\}$. Como $|S_\alpha|^M < \kappa$ y D es κ-completo sobre M, se cumple que $C_\alpha \in D$. A su vez, como D es normal sobre M, tenemos que $C = \underset{\alpha<\kappa}{\triangle} C_\alpha \in D$.

Vamos a probar que $B = A \cap C \in D$ cumple que $[B]^{n+1} \subset X$. En efecto, si $s' \in [B]^{n+1}$, entonces, llamando $s = s'|_n$, $\alpha = s(n-1)$ y $\delta = s(n)$, tenemos que $s \in [A]^n$ y $\delta \in C_\alpha$. Como $\alpha \in A$, se cumple que C_α se define por el caso no trivial, con lo que $\delta \in X_s$ y $s' = s \cup \{\delta\} \in X$.

Falta probar que D^{n+1} es un ultrafiltro. Si $X \in [\kappa]^{n+1}$, para cada $s \in [\kappa]^n$ se cumple que

$$\kappa = (\max s + 1) \cup X_s \cup ([\kappa]^{n+1} \setminus X)_s,$$

donde la unión es disjunta, por lo que $X_s \in D$ o bien $([\kappa]^{n+1} \setminus X)_s \in D$. Consecuentemente, también podemos descomponer en unión disjunta

$$[\kappa]^n = \{s \in [\kappa]^n \mid X_s \in D\} \cup \{s \in [\kappa]^n \mid ([\kappa]^{n+1} \setminus X)_s \in D\}.$$

Como D es 1-iterable, ambos conjuntos están en M, luego por hipótesis de inducción uno de ellos está en D^n, luego $X \in D^{n+1}$ o bien $[\kappa]^{n+1} \setminus X \in D^{n+1}$. ■

1.5 Límites inductivos de modelos

Como hemos explicado en la sección anterior, nuestro propósito es definir una sucesión de ultrapotencias iteradas $\{\mathrm{Ult}_D^\alpha(M)\}_{\alpha\in\gamma}$ de modo que $\mathrm{Ult}_D^{\alpha+1}(M)$ sea una ultrapotencia de $\mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$. En esta sección describimos la construcción que nos permitirá determinar los términos de la sucesión correspondientes a ordinales límite. Se trata de una construcción habitual en teoría de modelos, que aquí presentamos particularizada a modelos transitivos con la variación trivial consistente en admitir que puedan ser clases propias:

Definición 1.26 Un *sistema inductivo* de modelos transitivos es un sistema $(\{M_\delta\}_{\delta<\lambda}, \{j_{\delta,\epsilon}\}_{\delta\leq\epsilon<\lambda})$, donde λ es un ordinal límite y los M_δ son modelos[6] del lenguaje de ZFC y las aplicaciones $j_{\delta,\epsilon}$ son inmersiones elementales que, para $\delta \leq \epsilon \leq \zeta$, dan lugar a diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} M_\epsilon \arrow[r, "j_{\epsilon,\zeta}"] & M_\zeta \\ M_\delta \arrow[u, "j_{\delta,\epsilon}"] \arrow[ur, "j_{\delta,\zeta}"'] & \end{tikzcd}$$

(y donde $j_{\delta,\delta}$ es la identidad en M_δ).

Definimos $M = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} \{\delta\} \times M_\delta$ y consideramos en M la relación de equivalencia dada por

$$(\delta, x) \sim (\delta', x') \quad \text{si y sólo si} \quad j_{\delta,\epsilon}(x) = j_{\delta',\epsilon}(x'), \qquad \text{donde} \quad \epsilon = \text{máx}\{\delta, \delta'\}.$$

Llamemos M^* a la clase cociente, donde, como en el caso de las ultrapotencias, consideramos clases de equivalencia restringidas a pares de rango mínimo, para garantizar que sean conjuntos. Consideramos a M^* como modelo del lenguaje de ZFC interpretando la pertenencia mediante la relación R dada por $[\delta, x]\, R\, [\delta', x']$ si y sólo si $j_{\delta,\epsilon}(x) \in j_{\delta',\epsilon}(x')$, donde nuevamente $\epsilon = \text{máx}\{\delta, \delta'\}$. Es fácil ver que R está bien definida. Diremos que M^* es el *límite inductivo* del sistema dado.

[6]Si los modelos son clases propias, la sucesión $\{M_\delta\}_{\delta<\alpha}$ no puede entenderse literalmente como una función $\delta \mapsto M_\delta$, pues la imagen por una función no puede ser una clase propia. Podemos concebirla como una clase $M \subset \lambda \times V$, de modo que $M_\delta = \{x \mid (\delta, x) \in M\}$, y análogamente con la sucesión de inmersiones.

Podemos definir $j^*_\epsilon : M_\delta \longrightarrow M^*$ mediante $j^*_\epsilon(x) = [\epsilon, x]$. Es claro que las aplicaciones j^*_ϵ conmutan con las aplicaciones $j_{\delta,\epsilon}$ de forma natural. De la propia construcción de M^* se sigue que todo elemento de M^* es de la forma $j^*_\epsilon(x)$, para cierto $\epsilon < \lambda$ y cierto $x \in M_\epsilon$. Además, ϵ puede tomarse arbitrariamente grande.

Vamos a probar que cada j^*_ϵ es una inmersión elemental. Esto significa que, para cada fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$, se cumple que

$$\bigwedge x_1 \ldots x_n \in M_\delta(\phi^{M_\delta}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi^{M^*}(j^*_\delta(x_1), \ldots, j^*_\delta(x_n))).$$

Esto se demuestra por inducción sobre la longitud de ϕ, y el único caso no trivial se da cuando $\phi \equiv \bigvee x\psi$.

Si suponemos que $\bigvee x \in M_\delta\ \psi^{M_\delta}(x, x_1 \ldots, x_n)$, la hipótesis de inducción nos da que $\psi^{M^*}(j^*_\delta(x), j_\delta(x_1), \ldots, j^*_\delta(x_n))$, luego también $\phi^{M^*}(j^*_\delta(x_1), \ldots, j^*_\delta(x_n))$.

Recíprocamente, si $\bigvee x \in M^*\ \psi^{M^*}(x, x_1 \ldots, x_n)$, un tal x será de la forma $x = j^*_\epsilon(x_\epsilon)$, para cierto $x_\epsilon \in M_\epsilon$. Cambiando x_ϵ por un $j_{\epsilon\epsilon'}(x_\mu)$ podemos suponer que $\delta \leq \epsilon$. Así $j^*_\delta(x_i) = j^*_\epsilon(j_{\delta,\epsilon}(x_i))$. Por hipótesis de inducción se cumple $\psi^{M_\epsilon}(x_\epsilon, j_{\delta,\epsilon}(x_1), \ldots, j_{\delta,\epsilon}(x_n))$, luego $\phi^{M_\epsilon}(j_{\delta,\epsilon}(x_1), \ldots, j_{\delta,\epsilon}(x_n))$. Por último, como $j_{\delta,\epsilon}$ es una inmersión elemental, llegamos a $\phi^{M_\delta}(x_1, \ldots, x_n)$. ■

Observemos que la relación R es conjuntista, pues si $j^*_\epsilon(x) \in M^*$, podemos definir una aplicación suprayectiva

$$\bigcup_{\epsilon \leq \delta < \lambda} \{\delta\} \times j_{\epsilon\delta}(x) \longrightarrow \{x \in M^* \mid x\, R\, j^*_\epsilon(x)\}$$

mediante $(\delta, y) \mapsto j_\delta(y)$. También es obvio que R es extensional, pero no está necesariamente bien fundada. Cuando lo esté, identificaremos el límite inductivo M^* con su colapso transitivo M y llamaremos $j_\epsilon : M_\epsilon \longrightarrow M$ a las composiciones de las inmersiones elementales j^*_ϵ con el colapso transitivo.

Los límites inductivos están caracterizados salvo isomorfismo por la propiedad siguiente:

Teorema 1.27 *Sea $\{M_\delta\}_{\delta<\alpha}$ un sistema inductivo de modelos transitivos, sea M^* su límite inductivo y sea $\pi_\delta : M_\delta \longrightarrow N$ una familia de inmersiones elementales en un modelo N que haga conmutativos los diagramas siguientes:*

$$\begin{tikzcd} M_\epsilon \arrow[r, "\pi_\epsilon"] & N \\ M_\delta \arrow[u, "j_{\delta\epsilon}"] \arrow[ur, "\pi_\delta"'] & \end{tikzcd}$$

Entonces existe una única inmersión elemental $\pi : M^* \longrightarrow N$ que hace conmutativos los diagramas

$$\begin{tikzcd} M^* \arrow[r, "\pi"] & N \\ M_\delta \arrow[u, "j^*_\delta"] \arrow[ur, "\pi_\delta"'] & \end{tikzcd}$$

DEMOSTRACIÓN: Todo elemento de M^* es de la forma $j^*_\delta(x_\delta)$, para cierto $x_\delta \in M_\delta$. Definimos $\pi(j^*_\delta(x_\delta)) = \pi_\delta(x_\delta)$. La definición es correcta porque si $j^*_\delta(x_\delta) = j^*_\epsilon(x_\epsilon)$, por ejemplo con $\delta < \epsilon$, entonces $x_\epsilon = j_{\delta\epsilon}(x_\delta)$, por la conmutatividad de las inmersiones correspondientes y porque las inmersiones elementales son inyectivas. Por consiguiente, $\pi_\epsilon(x_\epsilon) = \pi_\epsilon(j_{\delta\epsilon}(x_\delta)) = \pi_\delta(x_\delta)$.

Falta probar que π es una inmersión elemental. Ahora bien, fijada una fórmula $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ y elementos $x_1,\ldots,x_n \in M^*$, existe un $\delta < \alpha$ tal que $x_i = j^*_\delta(x_{i\delta})$, para ciertos $x_{i\delta} \in M_\delta$, Por lo tanto

$$\phi^{M^*}(j^*_\delta(x_{1\delta}),\ldots,j^*_\delta(x_{n\delta})) \leftrightarrow \phi^{M_\delta}(x_{1\delta},\ldots,x_{n\delta}) \leftrightarrow \phi^N(\pi_\delta(x_{1\delta}),\ldots,\pi_\delta(x_{n\delta})),$$

es decir,

$$\phi^{M^*}(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \phi^N(\pi(x_1),\ldots,\pi(x_n)).$$

■

En particular, si N es un modelo transitivo, podemos concluir que el límite inductivo está bien fundado.

Para aplicar esto a la construcción de ultrapotencias probamos lo siguiente:

Teorema 1.28 *Sea $\{M_\delta\}_{\delta<\lambda}$ un sistema inductivo de modelos transitivos de* ZFC−AP *cuyo límite inductivo M_λ esté bien fundado. Sea κ_0 un cardinal^{M_0} y sea $\{\kappa_\delta\}_{\delta<\lambda}$ la sucesión dada por $\kappa_\delta = j_{0\delta}(\kappa_0)$. Sea $\{D_\delta\}_{\delta<\lambda}$ una sucesión tal que D_δ es un ultrafiltro* 1*-iterable en $\mathcal{P}^{M_\delta}\kappa_\delta$ y de modo que si $\delta < \epsilon < \lambda$ entonces $\bigwedge x \in M_\delta\,(x \in D_\delta \leftrightarrow j_{\delta\epsilon}(x) \in D_\epsilon)$. Entonces existe un único ultrafiltro* 1*-iterable D_λ en $\mathcal{P}^{M_\lambda}\kappa_\lambda$ tal que si $\delta < \lambda$ se cumple*

$$\bigwedge x \in M_\delta (x \in D_\delta \leftrightarrow j_\delta(x) \in D_\lambda).$$

DEMOSTRACIÓN: Todo $x \in \mathcal{P}^{M_\lambda}\kappa_\lambda$ es de la forma $j_\delta(x_\delta)$, para cierto conjunto $x_\delta \in \mathcal{P}^{M_\delta}(\kappa_\delta)$. Definimos $x \in D_\lambda$ si y sólo si $x_\delta \in D_\delta$. Como las aplicaciones $j_{\delta\epsilon}$ son inmersiones, esto no depende de la elección de δ. Es claro entonces que se cumple la propiedad sobre j_δ.

La comprobación de que D_λ es un ultrafiltro no principal, κ_λ-completo y normal sobre M_λ no ofrece ninguna dificultad. Por ejemplo, para probar la normalidad, sea $f \in M_\lambda$ tal que $f : \kappa_\lambda \longrightarrow \kappa_\lambda$ y $A = \{\alpha < \kappa_\lambda \mid f(\alpha) < \alpha\} \in D_\lambda$. Entonces existe un $\delta < \lambda$ tal que $f = j_\delta(f_\delta)$, de modo que $f_\delta : \kappa_\delta \longrightarrow \kappa_\delta$. Además, $A_\delta = \{\alpha < \kappa_\delta \mid f_\delta(\alpha) < \alpha\}$ cumple que $j(A_\delta) = A$, luego $A_\delta \in D_\delta$. Como D_δ es normal, existe un $\gamma < \kappa$ tal que $B = \{\alpha < \kappa_\delta \mid f_\delta(\alpha) = \gamma\} \in D_\delta$, entonces $j_\delta(B) \in D_\lambda$, pero $j_\delta(B) = \{\alpha < \kappa_\lambda \mid f(\alpha) = j_\delta(\gamma)\}$.

Veamos que D_λ es 1-iterable. Para ello sea $f \in M_\lambda$ tal que $f : \kappa_\lambda \longrightarrow M_\lambda$. Existe un $\delta < \lambda$ tal que $f = j_\delta(f_\delta)$, donde $f_\delta : \kappa_\delta \longrightarrow M_\delta$. Como D_δ es 1-iterable, $A_\delta = \{\alpha < \kappa_\delta \mid f_\delta(\alpha) \in D_\delta\} \in M_\delta$, luego $A = j_\delta(A_\delta) \in D_\lambda$, pero

$$A = \{\alpha < \kappa_\lambda \mid f(\alpha) \in D_\lambda\}.$$

La unicidad de D_λ es inmediata. ■

1.6 Ultrapotencias iteradas

Definición 1.29 Sea M un modelo transitivo de ZFC$-$AP, sea κ un cardinal^M y sea D un ultrafiltro 1-iterable en $\mathcal{P}^M\kappa$. Si M es un conjunto, definimos como sigue la sucesión transfinita $\{(\mathrm{Ult}_D^\alpha(M), \kappa_\alpha, D_\alpha)\}_{\alpha\in\Omega}$ de las *ultrapotencias iteradas,* así como aplicaciones $\{i_{\alpha\beta}\}_{\alpha\leq\beta}$ tales que $i_{\alpha\beta} : \mathrm{Ult}_D^\alpha(M) \longrightarrow \mathrm{Ult}_D^\beta(M)$:

a) $\mathrm{Ult}_D^0(M) = M$, $\kappa_0 = \kappa$, $D^0 = D$.

b) Si $(\mathrm{Ult}_D^\alpha(M), \kappa_\alpha, D_\alpha)$ cumplen las mismas hipótesis que (M, κ, D) y la ultrapotencia $\mathrm{Ult}_{D_\alpha}^*(\mathrm{Ult}_D^\alpha(M))$ está bien fundada, definimos

$$\mathrm{Ult}_D^{\alpha+1}(M) = \mathrm{Ult}_{D_\alpha}(\mathrm{Ult}_D^\alpha(M)),$$

$\kappa_{\alpha+1} = j_{D_\alpha}(\kappa_\alpha)$, $i_{\alpha,\alpha+1} : \mathrm{Ult}_D^\alpha(M) \longrightarrow \mathrm{Ult}_D^{\alpha+1}(M)$ la inmersión natural, $i_{\delta,\alpha+1} = i_{\delta\alpha}\circ i_{\alpha,\alpha+1}$ y $D_{\alpha+1} = (D_\alpha)_1$. En caso contrario $\mathrm{Ult}_D^{\alpha+1}(M) = \{0\}$, $\kappa_\lambda = 0$, las aplicaciones $i_{\delta,\alpha+1}$ son constantes y $D_{\alpha+1} = \varnothing$.

c) Si $\{(\mathrm{Ult}_D^\delta(M), \kappa_\delta, D_\delta)\}_{\delta<\lambda}$ con las inmersiones $i_{\delta\epsilon}$ cumplen las hipótesis del teorema anterior y el límite inductivo está bien fundado, definimos $(\mathrm{Ult}_D^\lambda(M), \kappa_\lambda, D_\lambda)$ como los dados por el teorema anterior y $i_{\delta\lambda}$ como las inmersiones elementales asociadas al límite inductivo. En caso contrario, $\mathrm{Ult}_D^\lambda(M) = \{0\}$, etc. (como en el apartado anterior).

Es claro que pueden darse dos situaciones: o bien no existe ningún $\alpha \in \Omega$ tal que $\mathrm{Ult}_D^\alpha(M) = \{0\}$, en cuyo caso $\{\mathrm{Ult}_D^\alpha(M)\}_{\alpha\in\Omega}$ es una sucesión de modelos transitivos de ZFC$-$AP, para $\alpha \leq \beta$, cada $i_{\alpha\beta} : \mathrm{Ult}_D^\alpha(M) \longrightarrow \mathrm{Ult}_D^\beta(M)$ es una inmersión elemental, κ_α es un cardinal en $\mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$ y D_α es un ultrafiltro 1-iterable en $\mathcal{P}^{\mathrm{Ult}_{D_\alpha}(M)}\kappa_\alpha$.

Alternativamente, existe un mínimo $\gamma > 0$ tal que $\mathrm{Ult}_D^\gamma(M) = \{0\}$, en cuyo caso consideraremos que la sucesión de ultrapotencias iteradas $\{\mathrm{Ult}_D^\alpha(M)\}_{\alpha<\gamma}$ sólo está definida hasta γ y se cumple igualmente lo anterior, pero sólo para ordinales $\alpha < \gamma$. Si $\gamma = \beta + 1$, entonces la ultrapotencia $\mathrm{Ult}_{D_\beta}(\mathrm{Ult}_D^\beta(M))$ no está bien fundada, mientras que si γ es un ordinal límite, el límite inductivo de las ultrapotencias anteriores no está bien fundado.

Diremos que un ultrafiltro D en $\mathcal{P}^M\kappa$ es *γ-iterable sobre M*, para un ordinal γ, si están definidas las ultrapotencias iteradas $\{\mathrm{Ult}_D^\alpha(M)\}_{\alpha<\gamma}$. Diremos que es *completamente iterable* o *Ω-iterable,* o simplemente *iterable,* si es γ-iterable para todo ordinal γ, es decir, si existe la sucesión completa $\{\mathrm{Ult}_D^\alpha(M)\}_{\alpha\in\Omega}$.

Notemos que los ultrafiltros 1-iterables y 2-iterables en este sentido coinciden con los que ya teníamos definidos.

Todo lo dicho tiene pleno sentido si el modelo de partida M es un conjunto, pero ZFC no permite formalizar esta definición recurrente en el caso en que M sea una clase propia (no puede definirse por recurrencia una sucesión de clases propias). Sin embargo, vamos a probar que, pese a todo, podemos definir en

ZFC una sucesión de ultrapotencias iteradas de una clase propia que satisfaga la definición anterior (aunque ésta no sirva como definición).

Para ello partimos de una clase transitiva M (sin excluir que pueda ser un conjunto) que satisfaga un conjunto finito de axiomas de ZFC suficientes para demostrar que si ξ es un cardinal regular no numerable entonces el conjunto $H(\xi)$ de los conjuntos de cardinal hereditariamente $< \xi$ cumple $H(\xi) \vDash \mathrm{ZFC}$ (y algunos hechos adicionales que utilizaremos en el argumento que sigue, pero un número finito en total).

Suponemos que κ es un cardinal^M y que D es un ultrafiltro en $\mathcal{P}^M\kappa$ 1-iterable sobre M y llamamos C a la clase de los cardinales regulares^M mayores que κ. Así, si $\xi \in C$ el conjunto $M_\xi = H^M(\xi)$ cumple $M_\xi \vDash \mathrm{ZFC}$ y $\mathcal{P}^{M_\xi}\kappa = \mathcal{P}^M\kappa$.

Además es claro que D es 1-iterable sobre M_ξ, luego tenemos definidas las sucesiones de ultrapotencias $\{\mathrm{Ult}_D^\alpha(M_\xi)\}_{\xi\in\gamma_\xi}$, donde $\gamma_\xi = \Omega$ si D es completamente iterable sobre M_ξ. Si esto sucede para todo ξ, definimos $\gamma = \Omega$, mientras que si algunos $\gamma_\xi \in \Omega$, definimos γ como el menor de todos ellos.

De este modo, la ultrapotencia $\mathrm{Ult}_D^\alpha(M_\xi)$ está definida[7] para todo $\alpha \in \gamma$ y todo $\xi \in C$. Esto nos permite definir, para cada $\alpha < \gamma$:

$$\mathrm{Ult}_D^\alpha(M) = \bigcup_{\xi\in C} \mathrm{Ult}_D^\alpha(M_\xi).$$

Esta definición es correcta en ZFC, en el sentido de que $Y = \mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$ es una fórmula del lenguaje de ZFC con tres variables libres (o más, si la clase M está definida en términos de algún parámetro, por ejemplo $M = L[A]$). Igualmente, para $\delta \leq \epsilon \in \gamma$ podemos definir $i_{\delta\epsilon} = \bigcup\limits_{\xi\in C} i^\xi_{\delta\epsilon}$. A su vez, si ξ_0 es el mínimo de C, definimos $\kappa_\alpha = \kappa_\alpha^{\xi_0}$ y $D_\alpha = D_\alpha^{\xi_0}$.

Con esto tenemos correctamente definidas en ZFC dos sucesiones de clases propias $\{\mathrm{Ult}_D^\alpha(M)\}_{\alpha\in\gamma}$, $\{i_{\delta\epsilon}\}_{\delta\leq\epsilon\in\gamma}$, una sucesión de ordinales $\{\kappa_\alpha\}_{\alpha\in\gamma}$ y otra de ultrafiltros $\{D_\alpha\}_{\alpha\in\gamma}$. Vamos a probar que estas sucesiones cumplen exactamente las mismas condiciones de la definición de ultrapotencias iteradas que hemos dado para conjuntos. Concretamente, vamos a probar por inducción sobre α que se cumple:

a) $i_{\delta\epsilon} : \mathrm{Ult}_D^\delta(M) \longrightarrow \mathrm{Ult}_D^\epsilon(M)$ son inmersiones elementales entre modelos transitivos de ZFC, y si $\delta \leq \epsilon \leq \zeta$ entonces $i_{\delta\epsilon} \circ i_{\epsilon\zeta} = i_{\delta\zeta}$. Además $i_{\delta\delta}$ es la identidad.

b) Si $\xi, \xi' \in C$, con $\xi < \xi'$, entonces $\mathrm{Ult}_D^\alpha(M_\xi) = H^{\mathrm{Ult}_D^\alpha(M_{\xi'})}(i^{\xi'}_{0,\alpha}(\xi))$.

c) Si $\xi \in C$, entonces $\mathrm{Ult}_D^\alpha(M_\xi) = H^{\mathrm{Ult}_D^\alpha(M)}(i_{0,\alpha}(\xi))$.

d) $\mathrm{Ult}_D^0(M) = M$, $\kappa_0 = \kappa$, $D_0 = D$.

[7]Técnicamente, esto significa que tenemos una fórmula $Y = \mathrm{Ult}_D^\alpha(M_\xi)$ con las cuatro variables indicadas (más los parámetros que requiera la definición de M) que satisface la definición de ultrapotencias iteradas, junto con otras fórmulas correspondientes a $x = \kappa_\alpha^\xi$, $y = D_\alpha^\xi$, $i = i^\xi_{\delta\epsilon}$, etc.

e) D_α es un ultrafiltro en $\mathcal{P}^{\mathrm{Ult}_D^\alpha(M)}\kappa_\alpha$ 1-iterable sobre $\mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$,

$$\mathrm{Ult}_D^{\alpha+1}(M) = \mathrm{Ult}_{D_\alpha}(\mathrm{Ult}_D^\alpha(M)),$$

$i_{\alpha,\alpha+1}$ es la inmersión natural, $\kappa_{\alpha+1} = i_{\alpha,\alpha+1}(\kappa)$ y $D_{\alpha+1} = (D_\alpha)_1$.

f) $\mathrm{Ult}_D^\lambda(M)$ es el (colapso transitivo del) límite inductivo de las ultrapotencias anteriores, y las inmersiones $i_{\alpha\lambda}$ son las asociadas a dicho límite inductivo.

Todo esto se cumple trivialmente para $\alpha = 0$. Vamos a probarlo para $\alpha = 1$, pues usaremos este caso para probar que si vale para α, también vale para $\alpha+1$.

Suponemos, pues que $1 \in \gamma$, es decir, que todas las ultrapotencias $\mathrm{Ult}_D^*(M_\xi)$, para $\xi \in C$, están bien fundadas. Entonces

$$\mathrm{Ult}_D(M_\xi) = \{[f]^\xi \mid f \in {}^\kappa M_\xi \cap M_\xi\}.$$

Por otra parte,

$$H^{\mathrm{Ult}_D(M_{\xi'})}(j_D^{\xi'}(\xi)) = j_D^{\xi'}(H^M(\xi)) = j_D^{\xi'}(M_\xi) = \{[f]^{\xi'} \mid f \in {}^\kappa M_\xi \cap M_{\xi'}\}$$

$$= \{[f]^{\xi'} \mid f \in {}^\kappa M_\xi \cap M_\xi\}.$$

Aquí hemos usado que si $f : \kappa \longrightarrow M_\xi$ y $f \in M_{\xi'}$, entonces $f \in M$, $f \subset M_\xi$ y $|f|^M = \kappa < \xi$, luego $f \in M_\xi$.

Ahora observamos que la aplicación

$$\mathrm{Ult}_D^*(H(\xi)) \longrightarrow \mathrm{Ult}_D^*(H(\xi'))$$

dada por $[f]^{*\xi} \mapsto [f]^{*\xi'}$ es claramente inyectiva, y si $[g]^{*\xi}\, R\, [f]^{*\xi}$, entonces podemos exigir que $\bigwedge \alpha < \kappa\; g(\alpha) \in f(\alpha)$, con lo que $g \subset M_\xi$, luego $g \in {}^\kappa M_\xi \cap M_\xi$.

Esto implica que la extensión de $[f]^{*\xi'}$ está formada por las imágenes de las clases de la extensión de $[f]^{*\xi}$, lo que a su vez implica que el colapso transitivo de $[f]^{*\xi}$ es el mismo que el de $[f]^{*\xi'}$, es decir, que $[f]^\xi = [f]^{\xi'}$, luego

$$\mathrm{Ult}_D(M_\xi) = H^{\mathrm{Ult}_D(M_{\xi'})}(j_D^{\xi'}(\xi)).$$

Ahora es inmediato que si $x \in M_\xi$, entonces $j_D^\xi(x) = [c_x]^\xi = [c_x]^{\xi'} = j_D^{\xi'}(x)$. En particular, $\kappa_1^{\xi'} = j_D^{\xi'}(\kappa) = j_D^\xi(\kappa) = \kappa_1^\xi$ y

$$D_1^\xi = \{[f]^\xi \mid \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \in D\} \in D\}$$

$$= \{[f]^{\xi'} \mid \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \in D\} \in D\} = D_1^{\xi'}.$$

El hecho de que cada $i_{01}^{\xi'} = j_D^{\xi'}$ extienda a cada $i_{01}^\xi = j_D^\xi$ implica que

$$i_{01} : \mathrm{Ult}_D^0(M) \longrightarrow \mathrm{Ult}_D^1(M).$$

Más aún, si $f \in {}^{\kappa}M \cap M$, existe un $\xi \in D$ tal que $f \in {}^{\kappa}M_\xi \cap M_\xi$, y el mismo razonamiento anterior prueba que la extensión de la clase $[f]^*$ de $\mathrm{Ult}^*_D(M)$ se corresponde con la de $[f]^{*\xi}$, de donde se sigue que $\mathrm{Ult}^*_D(M)$ está bien fundada (ya que ninguna $[f]^*$ puede ser el inicio de una sucesión decreciente de clases respecto de la relación de pertenencia R), así como que $[f]^\xi = [f]$. Por lo tanto

$$\mathrm{Ult}_D(M) = \mathrm{Ult}^1_D(M), \qquad j_D = i_{01}.$$

Esto implica que i_{01} es una inmersión elemental. Por último:

$$H^{\mathrm{Ult}_D(M)}(j_D(\xi)) = j_D(H^M(\xi)) = j_D(M_\xi) = \{[f] \mid f \in {}^{\kappa}M_\xi \cap M\}$$

$$= \{[f] \mid f \in {}^{\kappa}M_\xi \cap M_\xi\} = \{[f]^\xi \mid f \in {}^{\kappa}M_\xi \cap M_\xi\} = \mathrm{Ult}_D(M_\xi).$$

Supongamos ahora que las propiedades indicadas se cumplen hasta α y que $\alpha+1 \in \gamma$, es decir, que están definidas todas las ultrapotencias $\mathrm{Ult}^{\alpha+1}_D(M_\xi)$, para $\xi \in C$. Basta aplicar lo que hemos probado para $\alpha = 1$ a $M' = \mathrm{Ult}^\alpha_D(M)$, con κ_α y D_α. Observemos que si $\xi \in C$ entonces, como $i_{0\alpha} : M \longrightarrow M'$ es una inmersión elemental, $i_{0\alpha}(\xi) \in M'$ es un cardinal regular mayor que κ en M'. Así pues,

$$\mathrm{Ult}^{\alpha+1}_D(M_\xi) = \mathrm{Ult}_{D_\alpha}(\mathrm{Ult}^\alpha_D(M_\xi)) = \mathrm{Ult}_{D_\alpha}(H^{\mathrm{Ult}^\alpha_D(M)}(i_{0,\alpha}(\xi)))$$

$$= \mathrm{Ult}_{D_\alpha}(M'_{i_{0,\alpha}(\xi)}) = H^{\mathrm{Ult}_{D_\alpha}(M'_{i_{0,\alpha}(\xi')})}(j_{D_\alpha}(i_{0,\alpha}(\xi)))$$

$$= H^{\mathrm{Ult}_{D_\alpha}(\mathrm{Ult}^\alpha_D(M_{\xi'}))}(j_{D_\alpha}(i^{\xi'}_{0,\alpha}(\xi))) = H^{\mathrm{Ult}^{\alpha+1}_D(M_{\xi'})}(i^{\xi'}_{0,\alpha+1}(\xi)).$$

Igualmente concluimos que $i^{\xi'}_{\alpha,\alpha+1} = j^{\xi'}_{D_\alpha}$ extiende a $i^{\xi}_{\alpha,\alpha+1} = j^{\xi}_{D_\alpha}$, luego

$$i_{\alpha,\alpha+1} : \mathrm{Ult}^\alpha_D(M) \longrightarrow \mathrm{Ult}^{\alpha+1}_D(M).$$

Del caso $\alpha = 1$ concluimos también que $\mathrm{Ult}^*_{D_\alpha}(M')$ está bien fundada y que

$$\mathrm{Ult}_{D_\alpha}(\mathrm{Ult}^\alpha_D(M)) = \mathrm{Ult}^{\alpha+1}_D(M),$$

así como que $i_{\alpha,\alpha+1} = j_{D_\alpha}$ (por lo que es una inmersión elemental), y que

$$H^{\mathrm{Ult}_{D_\alpha}(M')}(j_{D_\alpha}(i_{0,\alpha}(\xi))) = \mathrm{Ult}_{D_\alpha}(H^{M'}(i_{0,\alpha}(\xi))),$$

que se traduce en que

$$H^{\mathrm{Ult}^{\alpha+1}_D(M)}(j_{0,\alpha+1}(\xi)) = \mathrm{Ult}_{D_\alpha}(\mathrm{Ult}^\alpha_D(M_\xi)) = \mathrm{Ult}^{\alpha+1}_D(M_\xi).$$

El resto es inmediato: las aplicaciones $i_{\delta,\alpha+1} = i_{\delta\alpha} \circ i_{\alpha,\alpha+1}$ son inmersiones elementales, $i^\xi_{\alpha,\alpha+1}(\kappa^\xi_\alpha) = i_{\alpha,\alpha+1}(\kappa_\alpha)$ no depende de ξ, ni tampoco $D^\xi_{\alpha+1}$, que son los correspondientes a la ultrapotencia $\mathrm{Ult}_{D_\alpha}(\mathrm{Ult}^\alpha_D(M))$.

Supongamos finalmente que se cumple todo para todo $\alpha < \lambda$, así como que los límites inductivos de las ultrapotencias $\{\mathrm{Ult}^\alpha_D(M_\xi)\}_{\alpha<\lambda}$ están bien fundados para todo $\xi \in C$. Entonces tenemos definidos sus colapsos transitivos $\mathrm{Ult}_D^\lambda(M_\xi)$ con las inmersiones elementales $i_{\alpha\lambda}^{\xi'}$.

Tenemos que $\mathrm{Ult}_D^\alpha(M_\xi) = H^{\mathrm{Ult}_D^\alpha(M_{\xi'})}(i_{0,\alpha}^{\xi'}(\xi))$ y cada $i_{\alpha\lambda}^{\xi'}$ se restringe a una inmersión elemental

$$\bar{\imath}_{\alpha\lambda}^{\xi'} : \mathrm{Ult}_D^\alpha(M_\xi) \longrightarrow H^{\mathrm{Ult}_D^\lambda(M_{\xi'})}(i_{0,\lambda}^{\xi'}(\xi)).$$

Como cada $i_{\alpha\alpha'}^{\xi'}$ extiende a $i_{\alpha\alpha'}^{\xi}$, se cumple que $i_{\alpha\alpha'}^{\xi} \circ \bar{\imath}_{\alpha'\lambda}^{\xi'} = \bar{\imath}_{\alpha\lambda}^{\xi'}$, luego el teorema 1.27 nos da una inmersión elemental

$$j : \mathrm{Ult}_D^\lambda(M_\xi) \longrightarrow H^{\mathrm{Ult}_D^\lambda(M_{\xi'})}(i_{0,\lambda}^{\xi'}(\xi))$$

tal que $\bar{\imath}_{\alpha\lambda}^{\xi} \circ j = \bar{\imath}_{\alpha\lambda}^{\xi'}$.

Ahora bien, j es suprayectiva, pues si $x \in H^{\mathrm{Ult}_D^\lambda(M_{\xi'})}(i_{0,\lambda}^{\xi'}(\xi))$, existe un $\alpha < \lambda$ tal que $x = i_{\alpha\lambda}^{\xi'}(y)$, donde $y \in H^{\mathrm{Ult}_D^\alpha(M_{\xi'})}(i_{0,\alpha}^{\xi'}(\xi))$, luego $x = i(\bar{\imath}_{\alpha\lambda}^{\xi}(y))$.

Por lo tanto j es un isomorfismo entre dos conjuntos transitivos. Por la unicidad del colapso transitivo concluimos que es la identidad, luego

$$\mathrm{Ult}_D^\lambda(M_\xi) = H^{\mathrm{Ult}_D^\lambda(M_{\xi'})}(i_{0,\lambda}^{\xi'}(\xi)),$$

como había que probar.

Además tenemos que $i_{\alpha\lambda}^{\xi} = \bar{\imath}_{\alpha\lambda}^{\xi'}$, que es la restricción de $i^{\xi'}$ a $\mathrm{Ult}_D^\alpha(M_\xi)$. Esto implica que κ_λ^ξ y D_λ^ξ no dependen de ξ, así como que

$$i_{\alpha\lambda} : \mathrm{Ult}_D^\alpha(M) \longrightarrow \mathrm{Ult}_D^\lambda(M).$$

Llamemos $\mathrm{Ult}_D^{\lambda*}(M)$ al límite inductivo de los modelos $\{\mathrm{Ult}_D^\alpha(M)\}_{\alpha<\lambda}$ y sean $j_\alpha^* : \mathrm{Ult}_D^\alpha(M) \longrightarrow \mathrm{Ult}_D^\lambda(M)$ las inmersiones elementales correspondientes. Así, todo $u \in \mathrm{Ult}_D^{\lambda*}(M)$ es de la forma $u = j_\alpha^*(x)$, para cierto $x \in \mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$, y si $u = j_{\alpha'}^*(x')$ con $x' \in \mathrm{Ult}_D^{\alpha'}(M)$, digamos con $\alpha \leq \alpha' < \lambda$ entonces $x' = i_{\alpha\alpha'}(x)$, por lo que $i_{\alpha'\lambda}(x') = i_{\alpha\lambda}(x)$.

Esto implica que podemos definir una aplicación $j : \mathrm{Ult}_D^{\lambda*}(M) \longrightarrow \mathrm{Ult}_D^\lambda(M)$ mediante $j(j_\alpha^*(x)) = i_{\alpha\lambda}(x)$. Se cumple que j es biyectiva, pues si $j(j_\alpha^*(x)) = j(j_{\alpha'}^*(x')))$, podemos suponer que $\alpha = \alpha'$, y entonces $i_{\alpha\lambda}(x) = i_{\alpha\lambda}(x')$, luego $x = x'$. Por otra parte, si $u \in \mathrm{Ult}_D^\lambda(M)$, existe un $\xi \in C$ tal que $u \in \mathrm{Ult}_D^\lambda(M_\xi)$, luego existe un $\alpha < \lambda$ y un $x \in \mathrm{Ult}_D^\alpha(M_\xi) \subset \mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$ tal que $u = i_{\alpha\lambda}(x)$, luego $u = j(j_\alpha^*(x))$. Por otra parte,

$$j_\alpha^*(x)\, R\, j_\alpha^*(x') \leftrightarrow x \in x' \leftrightarrow i_{\alpha\lambda}(x) \in i_{\alpha\lambda}(x') \leftrightarrow j(j_\alpha^*(x)) \in j(j_\alpha^*(x')).$$

De aquí se concluye que $\mathrm{Ult}_D^{\lambda*}(M)$ está bien fundado y que su colapso transitivo es $\mathrm{Ult}_D^\lambda(M)$. En conclusión, $\mathrm{Ult}_D^\lambda(M)$ es el límite inductivo (transitivo) del sistema $\{\mathrm{Ult}_D^\alpha(M)\}_{\alpha<\lambda}$, y las aplicaciones correspondientes son las $i_{\alpha\lambda}$, luego éstas son inmersiones elementales. Es claro también que κ_λ y D^λ son los determinados por el teorema 1.28.

Sólo falta probar que si $\xi \in C$ entonces $\mathrm{Ult}_D^\lambda(M_\xi) = H^{\mathrm{Ult}_D^\lambda(M)}(i_{0,\lambda}(\xi))$. Ahora bien, si $x \in \mathrm{Ult}_D^\lambda(M_\xi)$ existe un $\alpha < \lambda$ tal que $x = i_{\alpha\lambda}(u)$, para cierto

$$u \in \mathrm{Ult}_D^\alpha(M_\xi) = H^{\mathrm{Ult}_D^\alpha(M)}(i_{0,\alpha}(\xi))$$

luego, aplicando $i_{\alpha\lambda}$, concluimos que $x \in H^{\mathrm{Ult}_D^\lambda(M)}(i_{0,\lambda}(\xi))$.

Recíprocamente, si $x \in H^{\mathrm{Ult}_D^\lambda(M)}(j_{0,\lambda}(\xi))$, entonces existe un $\alpha < \lambda$ tal que $x = i_{\alpha\lambda}(u)$, con $u \in \mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$. Como $i_{\alpha\lambda}$ es una inmersión elemental, resulta que $u \in H^{\mathrm{Ult}_D^\alpha(M)}(i_{0,\alpha}(\xi)) = \mathrm{Ult}_D^\alpha(M_\xi)$, luego $x \in \mathrm{Ult}_D^\lambda(M_\xi)$.

Esto termina la prueba de que la definición 1.29 vale indistintamente para modelos M que sean conjuntos o clases propias (con el único requisito de que satisfagan cierto conjunto finito de axiomas de ZFC, o bien todos los axiomas de ZFC$-$AP). ■

En particular, la definición de ultrafiltro γ-iterable o completamente iterable sobre un modelo M vale igualmente aunque M sea una clase propia.

Una simple inducción demuestra que las inmersiones elementales $i_{\alpha\beta}$ cumplen también (para $\alpha \leq \beta \in \gamma$)

$$\bigwedge x \in \mathrm{Ult}_D^\alpha(M)\,(x \in D_\alpha \leftrightarrow i_{\alpha\beta}(x) \in D_\beta),$$

es decir, que son inmersiones $i_{\alpha\beta} : (\mathrm{Ult}_D^\alpha(M), D_\alpha) \longrightarrow (\mathrm{Ult}_D^\beta(M), D_\beta)$ entre modelos del lenguaje $\mathcal{L}_R$ en los que el relator monádico R se interpreta como la pertenencia a D_α o D_β, respectivamente (pero no inmersiones elementales).

Veamos algunas propiedades elementales de las ultrapotencias iteradas:

Teorema 1.30 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC$-$AP *(o de* ZFC *si es una clase propia), sea κ un cardinal^M y sea D un ultrafiltro γ-iterable en $\mathcal{P}^M\kappa$ (sin excluir $\gamma = \Omega$). Entonces:*

a) Si $\alpha < \beta \in \gamma$, κ_α es el punto crítico de $i_{\alpha\beta}$ y además $i_{\alpha\beta}(\kappa_\alpha) = \kappa_\beta$.

b) Si $\lambda \in \gamma$ es un ordinal límite, entonces $\kappa_\lambda = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} \kappa_\delta$.

c) si $X \in \mathcal{P}\kappa_\alpha \cap \mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$, se cumple

$$X \in D_\alpha \leftrightarrow i_{\alpha\beta}(X) \in D_\beta.$$

d) Si $x \in V_{\kappa_\alpha} \cap \mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$, entonces $i_{\alpha\beta}(x) = x$,

$$V_{\kappa_\alpha} \cap \mathrm{Ult}_D^\alpha(M) = V_{\kappa_\alpha} \cap \mathrm{Ult}_D^\beta(M), \qquad \mathcal{P}\kappa_\alpha \cap \mathrm{Ult}_D^\alpha(M) = \mathcal{P}\kappa_\alpha \cap \mathrm{Ult}_D^\beta(M).$$

e) Si M es un conjunto y $\alpha > 0$, entonces $|\mathrm{Ult}_D^\alpha(M)| = |M||\alpha|$.

Demostración: a) Por la construcción de las ultrapotencias iteradas tenemos que $\kappa_{\alpha+1} = i_{\alpha,\alpha+1}(\kappa_\alpha)$, así como que $i_{\alpha,\lambda}(\kappa_\alpha) = \kappa_\lambda$. A partir de estos dos hechos, una simple inducción sobre β implica que $i_{\alpha,\beta}(\kappa_\alpha) = \kappa_\beta$. En particular, la sucesión $\{\kappa_\alpha\}_{\alpha\in\gamma}$ es creciente.

Por 1.13 sabemos que κ_α es el punto crítico de $i_{\alpha,\alpha+1}$, luego

$$i_{\alpha\beta}(\kappa_\alpha) = i_{\alpha+1,\beta}(i_{\alpha,\alpha+1}(\kappa_\alpha)) \geq i_{\alpha,\alpha+1}(\kappa_\alpha) > \kappa_\alpha,$$

es decir, κ_α no es fijado por $i_{\alpha\beta}$. Se trata de probar que es el menor ordinal no fijado. Para ello probamos que si $\alpha \leq \beta \in \gamma$ y $\delta < \kappa_\alpha$ entonces $i_{\alpha\beta}(\delta) = \delta$, por inducción sobre β. Para $\beta = \alpha$ es trivial, si vale para β, entonces

$$i_{\alpha,\beta+1}(\delta) = i_{\beta,\beta+1}(i_{\alpha\beta}(\delta)) = i_{\beta,\beta+1}(\delta) = \delta,$$

pues $\delta < \kappa_\alpha \leq \kappa_\beta$, y sabemos que κ_β es el punto crítico de $i_{\beta,\beta+1}$.

Ahora suponemos que $\alpha \leq \lambda \in \gamma$ y que si $\beta < \lambda$ y $\delta < \kappa_\alpha$ se cumple $i_{\alpha\beta}(\delta) = \delta$, y tenemos que probar que $i_{\alpha\lambda}(\delta) = \delta$. Lo probamos a su vez por inducción sobre $\delta < \kappa_\alpha$. El caso $\delta = 0$ y $\delta = \epsilon + 1$ se siguen trivialmente de que $i_{\alpha\lambda}$ es una inmersión elemental. Supongamos que $\lambda' < \kappa_\alpha$ y que para todo $\delta < \lambda'$ se cumple $i_{\alpha\lambda}(\delta) = \delta$. Tenemos que probar que $i_{\alpha\lambda}(\lambda') = \lambda'$.

Por las propiedades de los límites inductivos, $\lambda' = i_{\beta\lambda}(\delta)$, para cierto $\beta < \lambda$, que podemos tomar mayor que α, y cierto $\delta \leq i_{\beta\lambda}(\delta) = \lambda' < \kappa_\alpha$. Por la primera hipótesis de inducción (para $\beta < \lambda$) tenemos que $i_{\alpha\beta}(\delta) = \delta$, luego

$$\lambda' = i_{\beta\lambda}(\delta) = i_{\beta\lambda}(i_{\alpha\beta}(\delta)) = i_{\alpha\lambda}(\delta).$$

Sabemos que $\delta \leq \lambda'$. Si fuera $\delta < \lambda'$, por la segunda hipótesis de inducción tendríamos que $\lambda' = \delta$, contradicción, luego tiene que ser $\delta = \lambda'$, y entonces hemos probado que $\lambda' = i_{\alpha\lambda}(\lambda')$.

b) Como $\{\kappa_\alpha\}_{\alpha\in\gamma}$ es creciente, tenemos que $\bigcup\limits_{\delta<\lambda} \kappa_\delta \leq \kappa_\lambda$. Por otra parte, si $\beta < \kappa_\lambda$, por definición de límite inductivo $\beta = i_{\delta\lambda}(\beta')$, para cierto $\delta < \lambda$ y $\beta' < \kappa_\delta$, pero a) nos da entonces que $\beta = \beta' < \kappa_\delta \leq \bigcup\limits_{\delta<\lambda} \kappa_\delta \leq \kappa_\lambda$.

c) Justo antes de 1.22 hemos observado que

$$X \in D_\alpha \leftrightarrow i_{\alpha,\alpha+1}(X) \in D_{\alpha+1}.$$

Esto mismo implica que si la equivalencia es cierta para β, también lo es para $\beta + 1$, y el teorema 1.28 prueba el caso límite.

d) Sabemos que $i_{\alpha,\alpha+1}$ fija a $V_{\kappa_\alpha} \cap \mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$ por 1.22, así como que

$$V_{\kappa_\alpha} \cap \mathrm{Ult}_D^\alpha(M) = V_{\kappa_\alpha} \cap \mathrm{Ult}_D^{\alpha+1}(M).$$

Veamos por inducción sobre β que esto vale para $i_{\alpha\beta}$. Si vale para β, vale para $\beta + 1$, pues

$$i_{\alpha,\beta+1}(x) = i_{\beta,\beta+1}(i_{\alpha\beta}(x)) = i_{\beta,\beta+1}(x) = x,$$

ya que $x \in V_{\kappa_\alpha} \cap \mathrm{Ult}_D^\alpha(M) = V_{\kappa_\alpha} \cap \mathrm{Ult}_D^\beta(M) \subset V_{\kappa_\beta} \cap \mathrm{Ult}_D^\beta(M)$. A su vez,

$$V_{\kappa_\alpha} \cap \mathrm{Ult}_D^\alpha(M) = V_{\kappa_\alpha} \cap \mathrm{Ult}_D^\beta(M) = V_{\kappa_\alpha} \cap V_{\kappa_\beta} \cap \mathrm{Ult}_D^\beta(M)$$

$$= V_{\kappa_\alpha} \cap V_{\kappa_\beta} \cap \mathrm{Ult}_D^{\beta+1}(M) = V_{\kappa_\alpha} \cap \mathrm{Ult}_D^{\beta+1}(M).$$

Supongamos ahora que esto se cumple para todo $\beta < \lambda$ y probemos que si $x \in V_{\kappa_\alpha} \cap \mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$ entonces $i_{\alpha\lambda}(x) = x$ por $\in$-inducción sobre x, es decir, suponemos que $i_{\alpha\lambda}(u) = u$ para todo $u \in x$.

Si $u \in x$, entonces $u = i_{\alpha\lambda}(u) \in i_{\alpha\lambda}(x)$, luego $x \subset i_{\alpha\lambda}(x)$. Recíprocamente, si $u \in i_{\alpha\lambda}(x)$, entonces $u \in \mathrm{Ult}_D^\lambda(M)$, luego $u = i_{\beta\lambda}(u')$, para cierto $\beta < \lambda$, que podemos tomar mayor que α, y cierto $u' \in \mathrm{Ult}_D^\beta(M)$. Entonces

$$u = i_{\beta\lambda}(u') \in i_{\alpha\lambda}(x) = i_{\beta\lambda}(i_{\alpha\beta}(x)) = i_{\beta\lambda}(x),$$

luego $u' \in x$, luego $u' = i_{\alpha\lambda}(u')$ y así

$$u = i_{\beta\lambda}(u') = i_{\beta\lambda}(i_{\alpha\beta}(u')) = i_{\alpha\lambda}(u') = u' \in x.$$

Por lo tanto $x = i_{\alpha\lambda}(x)$.

Esto implica que

$$V_{\kappa_\alpha} \cap \mathrm{Ult}_D^\alpha(M) \subset V_{\kappa_\alpha} \cap \mathrm{Ult}_D^\lambda(M).$$

Recíprocamente, si $x \in V_{\kappa_\alpha} \cap \mathrm{Ult}_D^\lambda(M)$, existe $\beta < \lambda$, que podemos suponer mayor que α, y $u \in \mathrm{Ult}_D^\beta(M)$ de modo que $x = i_{\beta\lambda}(u)$. Como $i_{\beta\lambda}(u) \in V_{i_{\beta\lambda}(\kappa_\alpha)}$, se cumple que $u \in V_{\kappa_\alpha} \cap \mathrm{Ult}_D^\beta(M) = V_{\kappa_\alpha} \cap \mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$, luego concluimos que $x = i_{\alpha\lambda}(u) = u \in V_{\kappa_\alpha} \cap \mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$.

Falta probar que

$$\mathcal{P}\kappa_\alpha \cap \mathrm{Ult}_D^\alpha(M) = \mathcal{P}\kappa_\alpha \cap \mathrm{Ult}_D^\beta(M).$$

Por 1.22 sabemos que esto es cierto para $\beta = \alpha+1$. Si es cierto para β, entonces

$$\mathcal{P}\kappa_\alpha \cap \mathrm{Ult}_D^\alpha(M) = \mathcal{P}\kappa_\alpha \cap \mathrm{Ult}_D^\beta(M) = \mathcal{P}\kappa_\alpha \cap \mathcal{P}\kappa_\beta \cap \mathrm{Ult}_D^\beta(M)$$

$$= \mathcal{P}\kappa_\alpha \cap \mathcal{P}\kappa_\beta \cap \mathrm{Ult}_D^{\beta+1}(M) = \mathcal{P}\kappa_\alpha \cap \mathrm{Ult}_D^{\beta+1}(M).$$

Supongamos que es cierto para todo $\beta < \lambda$. Si $x \in \mathcal{P}\kappa_\alpha \cap \mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$, entonces

$$x = j_{\alpha\lambda}(x) \cap \kappa_\alpha \in \mathcal{P}\kappa_\alpha \cap \mathrm{Ult}_D^\lambda(M).$$

Recíprocamente, si $x \in \mathcal{P}\kappa_\alpha \cap \mathrm{Ult}_D^\lambda(M)$, entonces $x = i_{\beta\lambda}(u)$, para cierto $\beta < \lambda$, que podemos tomar mayor que α, y cierto $u \in \mathrm{Ult}_D^\beta(M)$. Entonces se cumple que $i_{\beta\lambda}(u) \in \mathcal{P}i_{\beta\lambda}(\kappa_\alpha)$, luego $u \in \mathcal{P}\kappa_\alpha \cap \mathrm{Ult}_D^\beta(M) = \mathcal{P}\kappa_\alpha \cap \mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$.

e) La inmersión $i_{0\alpha}$ prueba que $|M| \leq |\mathrm{Ult}_D^\alpha(M)|$. Por otra parte tenemos que $\{\kappa_\delta \mid \delta < \alpha\} \subset \mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$, luego $|\alpha| \leq |\mathrm{Ult}_D^\alpha(M)|$.

Veamos la desigualdad contraria por inducción sobre α. Para $\alpha = 1$ se cumple por 1.22, que implica también que si se cumple para α se cumple para $\alpha + 1$. Supongamos que se cumple para todo $\alpha < \lambda$. Entonces tenemos una aplicación suprayectiva

$$\bigcup_{\alpha<\lambda} \mathrm{Ult}_D^\alpha(M) \longrightarrow \mathrm{Ult}_D^\lambda(M),$$

y $|\,\mathrm{Ult}_D^\alpha(M)| = |\alpha||M| \leq |\lambda||M|$, luego $|\,\mathrm{Ult}_D^\lambda(M)| \leq |\lambda||M|$. ■

Vamos a necesitar algunos resultados adicionales. En los teoremas siguientes suponemos las condiciones del teorema anterior.

Observemos en primer lugar que si $\alpha+1 \in \gamma$ y $X \in \mathcal{P}\kappa_\alpha \cap \mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$, entonces

$$X \in D_\alpha \leftrightarrow \{\delta < \kappa_\alpha \mid \delta \in X\} \in D_\alpha \leftrightarrow [d] \in i_{\alpha,\alpha+1}(X) \leftrightarrow \kappa_\alpha \in i_{\alpha,\alpha+1}(X).$$

Para los ordinales límite tenemos otra caracterización: D_λ es el ultrafiltro generado por la sucesión de los puntos críticos.

Teorema 1.31 *Si $\lambda \in \gamma$ es un ordinal límite y $X \in \mathcal{P}\kappa_\lambda \cap \mathrm{Ult}_D^\lambda(M)$, entonces*

$$X \in D_\lambda \leftrightarrow \bigvee \alpha < \lambda\ \{\kappa_\delta \mid \alpha \leq \delta < \lambda\} \subset X.$$

Demostración: Existe un $\delta < \lambda$ tal que $X = i_{\delta\lambda}(X')$, para cierto conjunto $X' \in \mathcal{P}\kappa_\delta \cap \mathrm{Ult}_D^\delta(M)$. Entonces

$$X \in D_\lambda \leftrightarrow X' \in D_\delta \leftrightarrow \kappa_\delta \in i_{\beta,\delta+1}(X') \leftrightarrow \kappa_\delta \in i_{\delta\lambda}(X') = X,$$

puesto que $i_{\delta+1,\lambda}(\kappa_\delta) = \kappa_\delta$. Ahora bien, si $X = i_{\delta\lambda}(X')$, también se puede expresar en la forma $X = i_{\delta'\lambda}(i_{\delta\delta'}(X'))$, para todo $\delta < \delta' < \lambda$, por lo que de hecho se cumple la condición del enunciado. ■

El teorema siguiente nos proporciona una representación útil de los elementos de una ultrapotencia iterada:

Teorema 1.32 *Si $\alpha \in \gamma$ y $x \in \mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$, existen $n \in \omega$, $f \in {}^{[\kappa]^n}M \cap M$ y $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \alpha$ tales que $x = i_{0\alpha}(f)(\kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_n})$.*

Demostración: Razonamos por inducción sobre α. El caso $\alpha = 0$ es trivialmente cierto (con $n = 0$ y $f(\varnothing) = x$). Supongamos que se cumple para α, que $\alpha + 1 \in \gamma$ y que $x \in \mathrm{Ult}_D^{\alpha+1}(M)$.

Entonces $x = [g]$, para $g \in {}^{\kappa_\alpha}\,\mathrm{Ult}_D^\alpha(M) \cap \mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$, pero entonces, como

$$\{\delta < \kappa_\alpha \mid c_g(\delta)(\delta) = g(\delta)\} = \{\delta < \kappa_\alpha \mid g(\delta) = g(\delta)\} \in D_\alpha,$$

tenemos que $i_{\alpha,\alpha+1}(g)([d]) = [g]$, es decir, $x = i_{\alpha,\alpha+1}(g)(\kappa_\alpha)$. Si $\alpha = 0$ esto es ya lo que hay que probar. En caso contrario, por hipótesis de inducción $g = i_{0\alpha}(h)(\kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_n})$, con $n \in \omega$, $h \in {}^{[\kappa]^n}M \cap M$ y $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \alpha$.

Podemos suponer que $h : [\kappa]^n \longrightarrow {}^\kappa M$, pues podemos definir otra función $h' : [\kappa]^n \longrightarrow {}^\kappa M$ que coincida con h en todo $s \in [\kappa]^n$ tal que $h(s) \in {}^\kappa M$, y entonces en $\mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$ se cumple que $i_{0\alpha}(h')$ coincide con $i_{0\alpha}(h)$ en todo s tal que $i_{0\alpha}(h)(s) \in {}^{\kappa_\alpha}\,\mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$, luego en particular $i_{0\alpha}(h')(\kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_n}) = g$.

Definimos $f \in {}^{[\kappa]^{n+1}}M \cap M$ mediante

$$f(\delta_1, \ldots, \delta_n, \delta_{n+1}) = h(\delta_1, \ldots, \delta_n)(\delta_{n+1}).$$

Así:

$$i_{0,\alpha+1}(f)(\kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_n}, \kappa_\alpha) = (i_{0,\alpha+1}(h)(\kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_n}))(\kappa_\alpha)$$

$$= (i_{\alpha,\alpha+1}(i_{0\alpha}(h))(i_{\alpha,\alpha+1}(\kappa_{\alpha_1}), \ldots, i_{\alpha,\alpha+1}(\kappa_{\alpha_n})))(\kappa_\alpha)$$

$$= i_{\alpha,\alpha+1}(i_{0,\alpha}(h)(\kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_n}))(\kappa_\alpha) = i_{\alpha,\alpha+1}(g)(\kappa_\alpha) = x.$$

Si el resultado es cierto para todo $\alpha < \lambda$ y $x \in \mathrm{Ult}_D^\lambda(M)$, entonces $x = i_{\alpha\lambda}(x')$, para cierto $\alpha < \lambda$ y $x' \in \mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$. Por hipótesis de inducción tenemos que $x' = i_{0\alpha}(f)(\kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_n})$, luego $x = i_{0\lambda}(f)(\kappa_{\alpha_1}, \ldots \kappa_{\alpha_n})$. ■

De aquí deducimos algunos hechos que necesitaremos más tarde:

Teorema 1.33 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC−AP *(o de* ZFC *si M es una clase propia), sea κ un cardinal^M y sea D un ultrafiltro γ-iterable en $\mathcal{P}^M\kappa$ (sin excluir $\gamma = \Omega$).*

a) Si $\alpha \in \gamma$ y $\delta \in \Omega^M$, entonces $i_{0\alpha}(\delta) < (|{}^\kappa\delta \cap M| \cdot |\alpha|)^+$.

b) Si ν es un cardinal tal que $|{}^\kappa\kappa \cap M| < \nu \in \gamma$, entonces $\kappa_\nu = i_{0\nu}(\kappa_0) = \nu$.

c) Si ν es un cardinal tal que en M se cumpla $\mathrm{cf}\,\nu > \kappa \wedge \bigwedge \mu < \nu\ \mu^\kappa < \nu$ *(en particular si es un límite fuerte de cofinalidad mayor que κ) y $\alpha \in \gamma \cap \nu$, entonces $i_{0\alpha}(\nu) = \nu$.*

Demostración: a) Si $\eta < i_{0\alpha}(\delta)$, por el teorema anterior podemos expresar $\eta = i_{0\alpha}(f)(\kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_n})$, para $n \in \omega$, $f \in {}^{[\kappa]^n}M \cap M$ y $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, ahora bien, podemos suponer que $f \in {}^{[\kappa]^n}\delta \cap M$, de donde podemos concluir que $|i_{0\alpha}(\delta)| \leq |{}^\kappa\delta \cap M| \cdot |\alpha|$.

b) Tenemos que $\nu \leq \kappa_\nu = \bigcup\limits_{\alpha<\nu} \kappa_\alpha = \sup\limits_{\alpha<\nu} i_{0\alpha}(\kappa) \leq \sup\limits_{\alpha<\nu}(|{}^\kappa\kappa \cap M| \cdot |\alpha|)^+ \leq \nu$.

c) Supongamos que $\delta < i_{0\alpha}(\nu)$. Basta probar que $\delta < \nu$. Por el teorema anterior $\delta = i_{0\alpha}(f)(\kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_n})$, con $n \in \omega$, $f \in {}^{[\kappa]^n}\nu \cap M$, $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \alpha$. Como $\mathrm{cf}^M \nu > \kappa$, existe un $\epsilon < \nu$ tal que $f \in {}^{[\kappa]^n}\epsilon$, por lo que

$$\delta < i_{0\alpha}(\epsilon) < (|{}^\kappa\epsilon \cap M| \cdot |\alpha|)^+ \leq \nu,$$

donde hemos usado la hipótesis sobre ν. ■

Necesitamos un último resultado técnico que involucra los ultrafiltros definidos en 1.24:

Teorema 1.34 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC−AP *(o de* ZFC *si M es una clase propia), sea κ un cardinal^M y sea D un ultrafiltro γ-iterable en $\mathcal{P}^M\kappa$ (sin excluir $\gamma = \Omega$). Sean $x_1, \ldots, x_m \in M$, $\alpha \in \gamma$ y $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \alpha$. Sea $\phi(u_1, \ldots, u_m, x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula del lenguaje*[8] *de la teoría de conjuntos. Entonces*

$$\mathrm{Ult}_D^\alpha(M) \vDash \phi[i_{0\alpha}(x_1), \ldots, i_{0\alpha}(x_m), \kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_n}] \leftrightarrow$$
$$(M, D) \vDash \{(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in [\kappa]^n \mid \phi(x_1, \ldots, x_m, \delta_1, \ldots, \delta_n)\} \in D^n.$$

Demostración: En la segunda parte de la coimplicación hay que entender a (M, D) como modelo del lenguaje $\mathcal{L}_R$ en el que el relator R se interpreta como la pertenencia a D. Observemos que la pertenencia a D^n es expresable en este lenguaje:

$$X \in D^n \leftrightarrow (M, D) \vDash \bigvee A(R(A) \wedge [A]^n \subset X).$$

Por simplificar la notación consideraremos únicamente un parámetro $i_{0\alpha}(x)$ en lugar de $i_{0\alpha}(x_1), \ldots, i_{0\alpha}(x_m)$, pues, como se verá, el número de parámetros no afecta en nada a la prueba.

Vamos a demostrar algo ligeramente más general, y es que el teorema es válido no sólo para fórmulas de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$, sino también para fórmulas de $\mathcal{L}_R$ (considerando a $\mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$ como modelo de $\mathcal{L}_R$ en el que el relator R se interpreta como la pertenencia a D_α) que cumplan tres condiciones adicionales:

a) Para todo $\alpha < \gamma$ y todo $x \in M$,

$$\{(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in [\kappa_\alpha]^n \mid (\mathrm{Ult}_D^\alpha(M), D_\alpha) \vDash \phi[i_{0\alpha}(x), \delta_1, \ldots, \delta_n]\} \in \mathrm{Ult}_D^\alpha(M).$$

b) Si $\alpha + 1 < \gamma$, $x \in M$ y $[f_1], \ldots, [f_n] \in \mathrm{Ult}_D^{\alpha+1}(M)$, entonces

$$(\mathrm{Ult}_D^{\alpha+1}(M), D_{\alpha+1}) \vDash \phi(i_{0,\alpha+1}(x), [f_1], \ldots, [f_n]) \leftrightarrow$$
$$\{\delta < \kappa_\alpha \mid (\mathrm{Ult}_D^\alpha(M), D_\alpha) \vDash \phi(i_{0,\alpha}(x), f_1(\delta), \ldots, f_n(\delta))\} \in D_\alpha.$$

c) Si $\alpha_n < \alpha < \beta < \gamma$ se cumple que

$$(\mathrm{Ult}_D^\alpha(M), D_\alpha) \vDash \phi[i_{0\alpha}(x), \kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_n}]$$
$$\leftrightarrow (\mathrm{Ult}_D^\beta(M), D_\beta) \vDash \phi[i_{0\beta}(x), \kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_n}].$$

Observemos que las tres propiedades se cumplen cuando ϕ es una fórmula de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$, pero también las cumplen algunas fórmulas de $\mathcal{L}_R$ que nos aparecerán en la demostración, por lo que tenemos que trabajar en este contexto general.

Razonamos por inducción sobre n. Para $n = 0$ es trivial. Supuesto cierto para n, la hipótesis c) nos da que

$$(\mathrm{Ult}_D^\alpha(M), D_\alpha) \vDash \phi[i_{0\alpha}(x), \kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_n}] \leftrightarrow$$
$$(\mathrm{Ult}_D^{\alpha_n+1}(M), D_{\alpha_n+1}) \vDash \phi[i_{0,\gamma_n+1}(x), \kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_n}],$$

[8]Si M es un conjunto, debemos entender que $m,n \in \omega$ y que $\phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$, mientras que si M es una clase propia hay que entender que m y n son números naturales metamatemáticos y que ϕ es una fórmula metamatemática.

Ahora usamos que $\mathrm{Ult}_D^{\alpha_n+1}(M) = \mathrm{Ult}_{D_{\alpha_n}}(\mathrm{Ult}_D^{\alpha_n}(M))$, con $\kappa_{\alpha_i} = [c_{\kappa_{\alpha_i}}]$ salvo para $i = n$, en cuyo caso $\kappa_{\alpha_n} = [d]$. Luego aplicamos b):

$$(\mathrm{Ult}_D^{\alpha}(M), D_\alpha) \vDash \phi[i_{0\alpha}(x), \kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_n}] \leftrightarrow$$

$$\{\delta < \kappa_{\alpha_n} \mid (\mathrm{Ult}_D^{\alpha_n}(M), D_{\alpha_n}) \vDash \phi[i_{0\alpha_n}(x), \kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_{n-1}}, \delta]\} \in D_{\alpha_n} \leftrightarrow$$
$$(\mathrm{Ult}_D^{\alpha_n}(M), D_{\alpha_n}) \vDash R(\{\delta \in [\kappa_{\alpha_n}] \mid \phi[i_{0\alpha_n}(x), \kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_{n-1}}, \delta]\}).$$

En la segunda implicación hemos usado (una consecuencia de) la hipótesis a) sobre la fórmula ϕ. Observemos que en la última fórmula podemos eliminar el parámetro κ_{α_n} porque en $(\mathrm{Ult}_D^{\alpha_n}(M), D_{\alpha_n})$ puede describirse como el máximo ordinal α que cumple $R\,\alpha$. Ahora vamos a aplicar la hipótesis de inducción, para lo cual tenemos que comprobar que la fórmula

$$\psi(x_0, \ldots, x_{n-1}) = R(\{\delta \in \kappa_\alpha \mid \phi[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, \delta]\})$$

cumple las condiciones a), b), c). En efecto, dado $\alpha < \kappa$ y $x \in M$, por a) para ϕ tenemos que

$$A = \{(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in [\kappa]^n \mid (\mathrm{Ult}_D^{\alpha}(M), D_\alpha) \vDash \phi[i_{0\alpha}(x), \delta_1, \ldots, \delta_n]\} \in \mathrm{Ult}_D^{\alpha}(M),$$

luego, para cada $s \in [\kappa_\alpha]^{n-1}$, se cumple que

$$A_s = \{\delta \in \kappa_\alpha \mid \delta > \text{máx}\, s \wedge s \cup \{\delta\} \in A\} \in \mathrm{Ult}_D^{\alpha}(M).$$

Más aún, $\{A_s\}_{s \in [\kappa_\alpha]^{n-1}} \in \mathrm{Ult}_D^{\alpha}(M)$. Como D es 1-iterable, esto implica que

$$\{(\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}) \in [\kappa_\alpha]^{n-1} \mid (\mathrm{Ult}_D^{\alpha}(M), D_\alpha) \vDash \psi[i_{0\alpha}(x), \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}]\}$$
$$= \{s \in [\kappa_\alpha]^{n-1} \mid A_s \in D\} \in \mathrm{Ult}_D^{\alpha}(M).$$

Veamos b). Seguimos llamando $A \in \mathrm{Ult}_D^{\alpha}(M)$ al mismo conjunto anterior. Entonces, fijados $f_1, \ldots, f_{n-1} \in {}^{\kappa_\alpha}\,\mathrm{Ult}_D^{\alpha}(M) \cap \mathrm{Ult}_D^{\alpha}(M)$, para cada $\epsilon < \kappa_\alpha$,

$$g(\epsilon) = \{\delta < \kappa_\alpha \mid (\mathrm{Ult}_D^{\alpha}(M), D_\alpha) \vDash \phi(i_{0,\alpha}(x), f_1(\epsilon), \ldots, f_{n-1}(\epsilon), \delta)\}$$
$$= \{\delta < \kappa_\alpha \mid (f_1(\epsilon), \ldots, f_{n-1}(\epsilon), \delta) \in A\} \in \mathrm{Ult}_D^{\alpha}(M)$$

y, más aún, $g \in {}^{\kappa_\alpha}\,\mathrm{Ult}_D^{\alpha}(M) \cap \mathrm{Ult}_D^{\alpha}(M)$.

Se cumple que

$$[g] = \{\delta < \kappa_{\alpha+1} \mid (\mathrm{Ult}_D^{\alpha+1}(M), D_{\alpha+1}) \vDash \phi(i_{0,\alpha+1}(x), [f_1], \ldots, [f_{n-1}], \delta\},$$

pues, para toda $f \in {}^{\kappa_\alpha}\,\mathrm{Ult}_D^{\alpha}(M) \cap \mathrm{Ult}_D^{\alpha}(M)$, tenemos que

$$[f] \in [g] \leftrightarrow \{\epsilon < \kappa_\alpha \mid f(\epsilon) \in g(\epsilon)\} \in D_\alpha \leftrightarrow$$

$$\{\epsilon < \kappa_\alpha \mid f(\epsilon) < \kappa_\alpha \wedge (\mathrm{Ult}_D^{\alpha}(M), D_\alpha) \vDash \phi(i_{0,\alpha}(x), f_1(\epsilon), \ldots, f(\epsilon))\} \in D_\alpha$$
$$\leftrightarrow [f] \in \kappa_{\alpha+1} \wedge (\mathrm{Ult}_D^{\alpha+1}(M), D_{\alpha+1}) \vDash \phi(i_{0,\alpha+1}(x), [f_1], \ldots, [f_{n-1}], [f]),$$

donde hemos usado que ϕ cumple b). Ahora,

$$(\mathrm{Ult}_D^{\alpha+1}(M), D_{\alpha+1}) \vDash \psi(i_{0,\alpha+1}(x), [f_1], \ldots, [f_{n-1}]) \leftrightarrow$$

$$(\mathrm{Ult}_D^{\alpha+1}(M), D_{\alpha+1}) \vDash R([g]) \leftrightarrow [g] \in D_{\alpha+1} \leftrightarrow \{\epsilon < \kappa_\alpha \mid g(\epsilon) \in D_\alpha\} \in D_\alpha \leftrightarrow$$

$$\{\epsilon < \kappa_\alpha \mid (\mathrm{Ult}_D^\alpha(M), D_\alpha) \vDash R(\{\delta < \kappa_\alpha \mid \phi(i_{0,\alpha}(x), f_1(\epsilon), \ldots, f_{n-1}(\epsilon), \delta)\}\})$$

$$\leftrightarrow \{\epsilon < \kappa_\alpha \mid (\mathrm{Ult}_D^\alpha(M), D_\alpha) \vDash \psi(\phi(i_{0,\alpha}(x), f_1(\epsilon), \ldots, f_{n-1}(\epsilon))\}\}).$$

Esto termina la prueba de b).

Para la propiedad c) basta observar que, por dicha propiedad para ϕ, se cumple que

$$i_{\alpha\beta}(\{\delta \in \kappa_\alpha \mid \phi[i_{0\alpha}(x), \kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_{n-1}}, \delta]\}) =$$

$$\{\delta \in \kappa_\beta \mid \phi[i_{0\beta}(x), \kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_{n-1}}, \delta]\},$$

por lo que el primer conjunto está en D_α si y sólo si el segundo está en D_β, y eso es lo que afirma ψ.

En definitiva, podemos aplicar la hipótesis de inducción para concluir que

$$(\mathrm{Ult}_D^\alpha(M), D_\alpha) \vDash \phi[i_{0\alpha}(x), \kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_n}] \leftrightarrow$$

$$(M, D) \vDash \{(\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}) \in [\kappa]^{n-1} \mid \{\delta \in \kappa \mid \phi[x, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}, \delta]\} \in D\} \in D^{n-1}$$

y esto equivale a

$$\{(\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}) \in [\kappa]^{n-1} \mid \{\delta \in \kappa \mid (M, D) \vDash \phi[x, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}, \delta]\} \in D\} \in D^{n-1}$$

$$\leftrightarrow \{(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in [\kappa]^n \mid (M, D) \vDash \phi[x, \delta_1, \ldots, \delta_n]\} \in D^n$$

$$\leftrightarrow (M, D) \vDash \{(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in [\kappa]^n \mid \phi[x, \delta_1, \ldots, \delta_n]\} \in D^n,$$

donde hay que usar la hipótesis a) (con $\alpha = 0$) para garantizar que los conjuntos involucrados están en M. ■

Nota Aunque vamos a necesitar el teorema anterior en toda su generalidad (e incluso un poco más), el caso particular en que $\alpha = n \in \omega$ tiene una interpretación especialmente simple. Consideremos la ultrapotencia $\mathrm{Ult}^*_{D^n}(M)$ construida a partir de D^n. Si f, $g \in {}^{[\kappa]^n}M \cap M$, se cumple que

$$i_{0n}(f)(\kappa_0, \ldots, \kappa_{n-1}) = i_{0n}(g)(\kappa_0, \ldots, \kappa_{n-1}) \leftrightarrow$$

$$\mathrm{Ult}_D^n(M) \vDash i_{0n}(f)(\kappa_0, \ldots, \kappa_{n-1}) = i_{0n}(g)(\kappa_0, \ldots, \kappa_{n-1}) \leftrightarrow$$

$$\{(\delta_0, \ldots, \delta_{n-1}) \in D^n \mid M \vDash f(\delta_0, \ldots, \delta_{n-1}) = g(\delta_0, \ldots, \delta_{n-1})\} \leftrightarrow [f]^*_{D^n} = [g]^*_{D^n}.$$

Por lo tanto, podemos definir $\pi^*_n : \mathrm{Ult}^*_{D^n}(M) \longrightarrow \mathrm{Ult}^n_D(M)$ mediante

$$\pi^*_n([f]^*) = i_{0n}(f)(\kappa_0, \ldots, \kappa_{n-1})$$

y se trata de una aplicación inyectiva. Pero el teorema 1.32 implica que es biyectiva. Cambiando la igualdad por la pertenencia se concluye igualmente que

$$\bigwedge xy \in \mathrm{Ult}^*_{D^n}(M)\ (x\,R\,y \leftrightarrow \pi^*_n(x) \in \pi^*_n(y)),$$

luego π^*_n es un isomorfismo de modelos. Así, la ultrapotencia $\mathrm{Ult}^*_{D^n}(M)$ está bien fundada, y su colapso transitivo es $\mathrm{Ult}^n_D(M)$.

En resumen, si D es un ultrafiltro $n+1$-iterable sobre un modelo M, hemos probado la igualdad $\mathrm{Ult}_{D^n}(M) = \mathrm{Ult}^n_D(M)$, que nos reduce n ultrapotencias consecutivas a una única ultrapotencia respecto del ultrafiltro D^n. ■

1.7 Ultrafiltros completamente iterables

En esta sección vamos a probar que la condición suficiente dada en 1.14 para que un ultrafiltro defina una ultrapotencia bien fundada implica en realidad que el ultrafiltro es completamente iterable (supuesto que sea 1-iterable). Necesitamos introducir un concepto auxiliar:

Definición 1.35 Sea M un modelo transitivo de ZFC$-$AP que sea un conjunto, sea κ un cardinal^M y D un ultrafiltro en $\mathcal{P}^M\kappa$ 1-iterable sobre M. Diremos que D es *numerablemente iterable* en M si cuando[9] $j : N \longrightarrow M$ es una inmersión elemental con N numerable, μ es un cardinal^N, W es un ultrafiltro en $\mathcal{P}^N\mu$ 1-iterable y además $j(\mu) = \kappa$ y $\bigwedge x \in N(x \in W \leftrightarrow j(x) \in D)$, entonces están definidas las ultrapotencias $\{\mathrm{Ult}^\alpha_W(N)\}_{\alpha<\omega_1}$.

Teorema 1.36 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC$-$AP, *que sea un conjunto, sea κ un cardinal^M y D un ultrafiltro en $\mathcal{P}^M\kappa$ 1-iterable sobre M. Si la intersección de toda familia numerable de elementos de D es no vacía, entonces D es numerablemente iterable.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $j : N \longrightarrow M$, μ y W según la definición anterior. Vamos a probar, por inducción sobre $\alpha < \omega_1$, que existe $\mathrm{Ult}^\alpha_W(N)$ y que existen inmersiones elementales $j_\alpha : \mathrm{Ult}^\alpha_W(N) \longrightarrow M$ tales que $j_\alpha(\mu_\alpha) = \kappa$ y

$$\bigwedge x \in \mathrm{Ult}^\alpha_W(N)\ (x \in W_\alpha \leftrightarrow j_\alpha(x) \in D)$$

y de modo que $j_\delta = i_{\delta\alpha} \circ j_\alpha$ para todo $\delta < \alpha$. Para $\alpha = 0$ basta tomar $j_0 = j$.

Supongamos que se cumple para α. Observemos que, por 1.30, todas las ultrapotencias de N son numerables. Si $X \in W_\alpha$, entonces $j_\alpha(X) \in D$ y, como la ultrapotencia es numerable, por hipótesis existe

$$\eta \in \bigcap\{j_\alpha(X) \mid X \in W_\alpha\}.$$

Observemos que si $X \in \mathcal{P}\mu_\alpha \cap \mathrm{Ult}^\alpha_D(M)$, entonces $X \in W_\alpha \leftrightarrow \eta \in j_\alpha(X)$, pues si $X \notin W_\alpha$ entonces $\mu_\alpha \setminus X \in W_\alpha$, luego $\eta \in j_\alpha(\mu_\alpha \setminus X) = \kappa \setminus j_\alpha(X)$.

[9] Si M fuera una clase propia, no podríamos decir en ZFC "para toda inmersión elemental".

Definimos $j^*_{\alpha+1} : \mathrm{Ult}^*_{W_\alpha}(\mathrm{Ult}^\alpha_W(N)) \longrightarrow M$ mediante $j^*_{\alpha+1}([f]^*) = j_\alpha(f)(\eta)$.

Esto es correcto, pues si $[f]^* = [g]^*$, entonces

$$X = \{\delta < \mu_\alpha \mid f(\delta) = g(\delta)\} \in W_\alpha,$$

luego $\eta \in j_\alpha(X) = \{\delta < \kappa \mid j_\alpha(f)(\delta) = j_\alpha(g)(\delta)\}$, luego $j_\alpha(f)(\eta) = j_\alpha(g)(\eta)$.

Veamos que $j^*_{\alpha+1}$ es una inmersión elemental. En efecto, si $[f_1]^*, \ldots, [f_n]^*$ son elementos de la ultrapotencia $N^* = \mathrm{Ult}^*_{W_\alpha}(\mathrm{Ult}^\alpha_W(N))$ y $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula cualquiera, tenemos que

$$\begin{aligned}\phi^{N^*}([f_1]^*, \ldots, [f_n]^*) &\leftrightarrow \{\delta < \mu_\alpha \mid \phi^{\mathrm{Ult}^\alpha_D(N)}(f_1(\delta), \ldots, f_n(\delta))\} \in W_\alpha\\ &\leftrightarrow \eta \in \{\delta < \kappa \mid \phi^M(j_\alpha(f_1)(\delta), \ldots, j_\alpha(f_n)(\delta))\}\\ &\leftrightarrow \phi^M(j^*_{\alpha+1}([f_1]^*), \ldots j^*_{\alpha+1}([f_n]^*)).\end{aligned}$$

El hecho de que N^* pueda sumergirse en un modelo transitivo implica que está bien fundado, luego existe $\mathrm{Ult}^{\alpha+1}_W(N)$ y, al componer con el colapso transitivo, la inmersión $j^*_{\alpha+1}$ da lugar a una inmersión elemental

$$j_{\alpha+1} : \mathrm{Ult}^{\alpha+1}_W(N) \longrightarrow M.$$

Además cumple todos los requisitos adicionales:

$$j_{\alpha+1}(\mu_{\alpha+1}) = j_{\alpha+1}([c_{\mu_\alpha}]) = j_\alpha(c_{\mu_\alpha})(\eta) = c_\kappa(\eta) = \kappa$$

y si $[f] \in \mathrm{Ult}^{\alpha+1}_W(N)$, entonces

$$\begin{aligned}[f] \in W_{\alpha+1} &\leftrightarrow \{\delta < \mu_\alpha \mid f(\delta) \in W_\alpha\} \in W_\alpha \leftrightarrow \eta \in \{\delta < \kappa \mid j_\alpha(f)(\delta) \in D\}\\ &\leftrightarrow j_\alpha(f)(\eta) \in D \leftrightarrow j_{\alpha+1}([f]) \in D.\end{aligned}$$

Por último, para probar que $j_{\alpha+1}$ conmuta con las $i_{\delta,\alpha+1}$, basta ver que lo hace con $i_{\alpha,\alpha+1}$:

$$j_{\alpha+1}(i_{\alpha,\alpha+1}(x)) = j_{\alpha+1}([c_x]) = j_\alpha(c_x)(\eta) = c_{j_\alpha(x)}(\eta) = j_\alpha(x).$$

Ahora supongamos que existen las ultrapotencias y las inmersiones para todo $\delta < \lambda < \omega_1$. El teorema 1.27 nos da entonces una inmersión elemental

$$j^*_\lambda : \mathrm{Ult}^{\lambda^*}_W(N) \longrightarrow M,$$

que implica que el límite inductivo está bien fundado, luego existe $\mathrm{Ult}^\lambda_W(N)$ y, componiendo con el colapso transitivo, obtenemos una inmersión elemental $j_\lambda : \mathrm{Ult}^\lambda_W(N) \longrightarrow M$ que conmuta con las inmersiones $i_{\delta\lambda}$.

Además, $j_\lambda(\mu_\lambda) = j_\lambda(i_{0\lambda}(\mu)) = j_0(\mu) = \kappa$ y si $x \in \mathrm{Ult}^\lambda_W(X)$, digamos $x = i_{\delta\lambda}(x')$, para cierto $\delta < \lambda$ y $x' \in \mathrm{Ult}^\delta_W(N)$, entonces

$$x \in W_\lambda \leftrightarrow x' \in W_\delta \leftrightarrow j_\delta(x') \in D \leftrightarrow j_\lambda(x) = j_\lambda(i_{\delta\lambda}(x')) = j_\delta(x') \in D.$$

■

Por otra parte:

Teorema 1.37 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC−AP, *que sea un conjunto, sea κ un cardinal^M y D un ultrafiltro numerablemente iterable en $\mathcal{P}^M\kappa$. Entonces D es completamente iterable.*

Demostración: Supongamos que no es así, y sea $\gamma \in \Omega$ el menor ordinal para el que no existe la ultrapotencia iterada de orden γ. Entonces está definida la ultrapotencia $\mathrm{Ult}_D^{\gamma*}(M)$, pero no está bien fundada. Si $\gamma = \gamma_0 + 1$, llamemos $j_\gamma^* : M \longrightarrow \mathrm{Ult}_D^{\gamma*}(M)$ a la composición $j_\gamma^* = i_{0\gamma_0} \circ j^*_{D_{\gamma_0}}$, que es una inmersión elemental.

Si, por el contrario, γ es un ordinal límite, sea $j_\gamma^* : M \longrightarrow \mathrm{Ult}_D^{\gamma*}(M)$ la inmersión elemental asociada al límite inductivo que define a la ultrapotencia.

Sea $\{x_k\}_{k\in\omega}$ una sucesión en $\mathrm{Ult}_D^{\gamma*}(M)$ tal que $\bigwedge k \in \omega\ x_{k+1}\, R\, x_k$.

Es fácil ver que la prueba del teorema 1.32 vale igualmente aunque la última ultrapotencia no esté bien fundada, de modo que podemos expresar

$$\mathrm{Ult}_D^{\gamma*}(M) \vDash (x_k = j_\gamma^*(f_k)(\kappa_{\gamma_1^k}, \ldots, \kappa_{\gamma_{n_k}^k})),$$

con $f_k \in {}^{[\kappa]^{n_k}}M \cap M$ y $\gamma_1^k < \cdots < \gamma_{n_k}^k < \gamma$, donde además hay que entender que, en el caso en que $\gamma = \gamma_0 + 1$, cada κ_α con $\alpha < \gamma_0$ se identifica con $i^*_{\gamma_0\gamma}(\kappa_\alpha)$ como elemento de $\mathrm{Ult}_D^{\gamma*}(M)$, mientras que κ_{γ_0} se identifica con $[d]^*$. En el caso en que γ sea un ordinal límite cada κ_α se identifica con $i^*_{\alpha+1,\gamma}(\kappa_\alpha)$.

Consideremos el núcleo de Skolem N^* de $\{\kappa\}\cup\{f_k \mid k \in \omega\}$ en M, visto como modelo de $\mathcal{L}_R$ en el que el relator R se interpreta como la pertenencia a D. Así, en N^* el relator R se interpreta como la pertenencia a $W^* = \{x \in N^* \mid x \in D\}$. Sea N el colapso transitivo de N^*, sea $j : N \longrightarrow M$ la inversa de la función colapsante, que es una inmersión elemental para la relación de pertenencia. Sea $\mu = j^{-1}(\kappa)$ y sea $W = j^{-1}[W^*] = j^{-1}[D]$. Es fácil ver que W es un ultrafiltro iterable y normal en $\mathcal{P}^N\mu$ y que $\bigwedge x \in N(x \in W \leftrightarrow j(x) \in D)$.

Además, N es numerable, luego por hipótesis existen al menos las ultrapotencias iteradas $\{\mathrm{Ult}_W^\alpha(N)\}_{\alpha<\omega_1}$.

Sea $\bar{f}_k = j^{-1}(f_k)$, de modo que $f_k \in {}^{[\mu]^{n_k}}N \cap N$. Sea $\zeta < \omega_1$ el ordinal del conjunto

$$Z = \{\gamma_m^k \mid k \in \omega \wedge 1 \leq m \leq n_k\}$$

y sea $h : Z \longrightarrow \zeta$ la semejanza. Sea $\bar{\gamma}_m^k = h(\gamma_m^k)$ y sea

$$\bar{x}_k = i_{0\zeta}(\bar{f}_k)(\mu_{\bar{\gamma}_1^k}, \ldots, \mu_{\bar{\gamma}_n^k}) \in \mathrm{Ult}_W^\zeta(N).$$

Para terminar la prueba basta demostrar que $\bigwedge k \in \omega\ \bar{x}_{k+1} \in \bar{x}_k$.

Para ello observamos que el teorema 1.34 vale igualmente para $\mathrm{Ult}_D^{\gamma*}(M)$ en lugar de $\mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$. Esto es inmediato si γ es un ordinal límite, pues entonces basta tomar $\alpha_n < \alpha < \gamma$ y usar que

$$\mathrm{Ult}_D^{\gamma*}(M) \vDash \phi[j_\gamma^*(x), j_\gamma^*(y), \kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_n}] \leftrightarrow$$

$$\mathrm{Ult}_D^\alpha(M) \vDash \phi[i_{0\alpha}(x), i_{0\alpha}(y), \kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_n}],$$

con lo que podemos aplicar 1.34 a α.

Si $\gamma = \gamma_0 + 1$ y $\alpha_n < \gamma_0$ podemos hacer lo mismo. El único caso no trivial se da cuando $\alpha_n = \gamma_0$, en cuyo caso, por el mismo razonamiento empleado en la prueba de 1.34,

$$\mathrm{Ult}_D^{\gamma *}(M) \models \phi[j_\gamma^*(x), j_\gamma^*(y), \kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_n}] \leftrightarrow$$
$$\{\delta < \kappa_{\alpha_n} \mid (\mathrm{Ult}_D^{\alpha_n}(M), D_{\alpha_n}) \models \phi[i_{0\alpha_n}(x), i_{0\alpha_n}(y), \kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_{n-1}}, \delta]\} \in D_{\alpha_n} \leftrightarrow$$
$$(\mathrm{Ult}_D^{\alpha_n}(M), D_{\alpha_n}) \models R(\{\delta \in [\kappa_{\alpha_n}] \mid \phi[i_{0\alpha_n}(x), i_{0\alpha_n}(y), \kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_{n-1}}, \delta]\}).$$

Ahora basta aplicar 1.34 a α_n y la fórmula

$$\psi(x_0, \ldots, x_{n-1}) = R(\{\delta \in \kappa_\alpha \mid \phi[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, \delta]\})$$

tras justificar, con los mismos argumentos empleados allí, que satisface las condiciones a), b), c) exigidas. (No se trata de repetir el argumento inductivo, sino de usar que ya hemos probado que 1.34 es aplicable (en una ultrapotencia bien fundada, como la correspondiente a α_n) a toda fórmula que cumpla dichas condiciones.

Aplicamos esto, concretamente, a la fórmula

$$\phi(j_\gamma^*(f_k), j_\gamma^*(f_{k+1}), \cdots) = j_\gamma^*(f_{k+1})(\kappa_{\gamma_1^{k+1}}, \ldots, \kappa_{\gamma_{n_{k+1}}^{k+1}}) \in j_\gamma^*(f_k)(\kappa_{\gamma_1^k}, \ldots, \kappa_{\gamma_{n_k}^k}),$$

donde los puntos suspensivos representan los cardinales $\kappa_{\gamma_i^k}$ y $\kappa_{\gamma_i^{k+1}}$ en orden creciente y sin repeticiones.

Como $x_{k+1} \, R \, x_k$, tenemos que

$$\mathrm{Ult}_D^{\gamma *}(M) \models \phi(j_\gamma^*(f_k), j_\gamma^*(f_{k+1}), \cdots)$$

y por lo tanto

$$(M, D) \models \{(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in [\kappa]^n \mid \phi(f_k, f_{k+1}, \delta_1, \ldots, \delta_n)\} \in D^n.$$

Pero esto implica que

$$(N, W) \models \{(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in [\mu]^n \mid \phi(\bar{f}_k, \bar{f}_{k+1}, \delta_1, \ldots, \delta_n)\} \in W^n,$$

donde hemos usado que j transforma el conjunto de la izquierda de la fórmula inferior en el correspondiente de la fórmula superior y que hace corresponder los elementos de W con los de D (luego los de W^n con los de D^n). Ahora aplicamos el teorema 1.34 a N con $\alpha = \zeta$, lo que nos da que

$$\mathrm{Ult}_W^\zeta(N) \models \phi(i_{0,\zeta}(f_k), i_{0,\zeta}(f_{k+1}), \ldots),$$

donde ahora los puntos suspensivos representan a los cardinales $\mu_{\bar{\gamma}_i^k}$ y $\mu_{\bar{\gamma}_i^{k+1}}$ correspondientes a los $\kappa_{\gamma_i^k}$ y $\kappa_{\gamma_i^{k+1}}$ originales. Como están ordenados igual, esto es lo mismo que

$$\mathrm{Ult}_W^\zeta(N) \models j_{0\zeta}(\bar{f}_{k+1})(\mu_{\bar{\gamma}_1^{k+1}}, \ldots, \mu_{\bar{\gamma}_{n_{k+1}}^{k+1}}) \in j_{0\zeta}(\bar{f}_k)(\mu_{\bar{\gamma}_1^k}, \ldots, \mu_{\bar{\gamma}_{n_k}^k}),$$

es decir, $\bar{x}_{k+1} \in \bar{x}_k$, y tenemos una sucesión decreciente para la pertenencia. ■

Así pues:

Teorema 1.38 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC−AP, *sea κ un cardinal^M y D un ultrafiltro en $\mathcal{P}^M\kappa$ 1-iterable sobre M. Si la intersección de toda familia numerable de elementos de D es no vacía, entonces D es completamente iterable.*

Demostración: En el caso en que M sea una clase propia, basta probar que existen todas las ultrapotencias $\mathrm{Ult}_D^\alpha(H^M(\xi))$, para todo cardinal^M $\xi \in M$ regular^M $> \kappa$, pero $\mathcal{P}^M\kappa = \mathcal{P}^{H^M(\xi)}\kappa$, por lo que D cumple la misma hipótesis respecto de $H^M(\kappa)$. Así pues, podemos suponer que M es un conjunto, y entonces basta aplicar los dos teoremas anteriores. ■

Con todo lo que hemos demostrado ya es fácil probar las equivalencias siguientes:

Teorema 1.39 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC−AP, *sea κ un cardinal^M y D un ultrafiltro en $\mathcal{P}^M\kappa$ 1-iterable sobre M. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) D es completamente iterable.

b) D es ω_1-iterable.

c) Existe una ultrapotencia iterada $\mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$ tal que la intersección de cualquier familia numerable de conjuntos de D_α es no vacía.

Demostración: a) $\Rightarrow$ b) es trivial.

b) $\Rightarrow$ c) Observemos que tiene que existir $\mathrm{Ult}_D^{\omega_1}(M)$, pues el límite inductivo $\mathrm{Ult}_D^{\omega_1 *}(M)$ está necesariamente bien fundado debido a que $\mathrm{cf}\,\omega_1 > \aleph_0$ (una sucesión decreciente respecto a la relación R en $\mathrm{Ult}_D^{\omega_1 *}(M)$ da lugar a una sucesión decreciente respecto de la pertenencia en una ultrapotencia $\mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$, para cierto $\alpha < \omega_1$).

Basta probar que D_{ω_1} cumple lo requerido. En efecto, sea $\{X_n\}_{n\in\omega}$ una familia de elementos de D_{ω_1}. Por 1.31 para cada $n \in \omega$ existe $\alpha_n < \omega_1$ tal que $\{\kappa_\alpha \mid \alpha_n \leq \alpha < \omega_1\} \subset X_n$. Si $\beta = \sup\limits_n \alpha_n < \omega_1$, tenemos que $\kappa_\beta \in \bigcap\limits_{n\in\omega} X_n$.

c) $\Rightarrow$ a) Por el teorema anterior existen todas las ultrapotencias iteradas $\mathrm{Ult}_{D_\alpha}^\beta(\mathrm{Ult}_D^\alpha(M))$, pero una inducción trivial a partir de la definición muestra que éstas son las ultrapotencias $\mathrm{Ult}_D^{\alpha+\beta}(M)$, luego existen todas las ultrapotencias iteradas de M. ■

Nota Si M es un conjunto podemos añadir al teorema anterior la equivalencia con que D sea numerablemente iterable, pues 1.37 nos da que esto implica a) y, por otra parte, de c) se sigue, en virtud de 1.36, que D_α es numerablemente iterable, y la inmersión elemental $i_{0\alpha} : M \longrightarrow \mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$ implica inmediatamente que D también lo es (si $j : N \longrightarrow M$ y W están en las condiciones de la definición respecto de M, entonces $j \circ i_{0\alpha} : M \longrightarrow \mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$ y W lo están respecto de la ultrapotencia). ■

1.8 Ultrafiltros iterables sobre L[A]

Los resultados de la sección anterior pueden mejorarse sustancialmente para el caso de ultrafiltros sobre modelos $L[A]$. Por [PC 3.19] no perdemos generalidad si suponemos que $A \subset \Omega$. Llamaremos $\sigma = \bigcup A$.

Nos vamos a apoyar en un resultado técnico que requiere algunas definiciones previas. Sea $\kappa > \sigma$ un cardinal en $L[A]$ y consideremos la clase

$$K_\kappa = \{\mu \in \Omega \mid \mu \text{ es un cardinal límite con } \operatorname{cf} \mu > \kappa\}.$$

Claramente es una clase propia, pues para todo ordinal $\delta \in \Omega$ se cumple que $\delta \leq \aleph_{\delta+\kappa^+} \in K$, luego K no está acotada en Ω.

Observemos ahora que si $\operatorname{cf} \lambda > \kappa$ y $\{\mu_\delta\}_{\delta<\lambda}$ es una sucesión creciente en K_κ, entonces $\mu = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} \mu_\delta \in K_\kappa$ (pues tenemos una sucesión cofinal creciente de λ en μ, y esto implica que $\kappa < \operatorname{cf} \lambda \leq \operatorname{cf} \mu$).

Sea $K'_\kappa = \{\mu \in K_\kappa \mid |K_\kappa \cap \mu| = \mu\}$ y veamos que también es una clase propia. Para ello tomamos $\mu_0 \in K'_\kappa$ y definimos recurrentemente una sucesión creciente $\{\mu_\delta\}_{\delta<\kappa^+}$ de modo que cada μ_δ sea un elemento de K_κ mayor que los anteriores y tal que $K_\kappa \cap \mu_\delta| > \mu_\epsilon$ para todo $\epsilon < \delta$, lo cual es posible porque K_κ no está acotada. Entonces $\mu = \bigcup\limits_{\delta<\kappa^+} \mu_\delta \in K_\kappa$ cumple que

$$\mu \geq |K_\kappa \cap \mu| \geq |K_\kappa \cap \mu_{\delta+1}| > \mu_\delta,$$

luego $|K_\kappa \cap \mu| = \mu$ y por consiguiente $\mu \in K'_\kappa$ y $\mu > \mu_0$, luego K'_κ no está acotada.

Sea C_κ el conjunto formado por los κ^+ primeros elementos de K'_κ y consideremos su supremo $\xi_\kappa = \bigcup C_\kappa$. Entonces $\xi_\kappa \in K'_\kappa$. En efecto, sabemos que $\xi_\kappa \in K_\kappa$ y si $\mu \in C_\kappa$ entonces

$$\xi_\kappa \geq |K_\kappa \cap \xi_\kappa| \geq |K_\kappa \cap \mu| = \mu,$$

luego $|K_\kappa \cap \xi_\kappa| = \xi_\kappa$.

Notemos que los elementos de K_κ (en particular los de C_κ y ξ_κ) cumplen la hipótesis del teorema 1.33 c) para $M = L[A]$, pues por [PC 3.29] (teniendo en cuenta que $\kappa > \sigma$) todos son límites fuertes en $L[A]$.

Teorema 1.40 *Sea A un conjunto de ordinales, sea $\sigma = \bigcup A$ y sea $\kappa > \sigma$ un cardinal en $L[A]$. Entonces, para cada $X \in \mathcal{P}^{L[A]}\kappa$ existen $s \in \kappa^{<\omega}$, $t \in [C_\kappa]^{<\omega}$ y una fórmula ϕ del lenguaje de la teoría de conjuntos de modo que*

$$\bigwedge \alpha \in \kappa\, (\alpha \in X \leftrightarrow L_{\xi_\kappa}[A] \vDash \phi[\alpha, s, t, A]).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $N = N(\kappa \cup C_\kappa) \prec L_{\xi_\kappa}[A]$, donde el núcleo de Skolem lo calculamos respecto de funciones de Skolem definidas mediante el buen orden constructible, de modo que, según [PC 3.27], N está formado por los elementos de $L_\xi[A]$ definibles a partir de $\kappa \cup C_\kappa$. Sea M el colapso transitivo de N.

Observemos que, como $L_{\xi_\kappa}[A] \vDash V = L[A]$, se cumple que $A \in N$ y, como $A \subset \kappa$, su colapso transitivo es él mismo, de modo que $A \in M$, por lo que $M = L_\lambda[A]$, para cierto ordinal $\lambda \geq \kappa^+$, ya que $|M| = \kappa^+$.

Sea $j : L_\lambda[A] \longrightarrow L_{\xi_\kappa}[A]$ la inversa de la función colapsante, que es una inmersión elemental. El teorema [PC 3.28] nos da que $\mathcal{P}^{L_\lambda[A]}\kappa = \mathcal{P}^{L[A]}\kappa$. Por lo tanto, si $X \in \mathcal{P}^{L[A]}\kappa$, entonces $j(X) \in N$, luego es definible en $L_{\xi_\kappa}[A]$, luego existe una fórmula ψ tal que, para dos ciertas sucesiones de parámetros s y t,

$$\alpha \in j(X) \leftrightarrow L_{\xi_\kappa}[A] \vDash \psi[\alpha, s, t, A],$$

pero j fija a todos los ordinales menores que κ, luego $\alpha \in X \leftrightarrow \alpha \in j(X)$. ■

Nota Con una mínima alteración en la prueba, el teorema se demuestra igualmente para $X \subset \kappa \times \kappa$, con la conclusión

$$\bigwedge \delta\epsilon \in \kappa\, ((\delta, \epsilon) \in X \leftrightarrow L_\xi[A] \vDash \phi[\delta, \epsilon, s, t, A]).$$

■

Veamos una consecuencia sencilla:

Teorema 1.41 *Sea A un conjunto de ordinales, sea $\sigma = \bigcup A$ y sea $\kappa > \sigma$ un cardinal en $L[A]$. Entonces en $\mathcal{P}^{L[A]}\kappa$ hay a lo sumo un ultrafiltro 2-iterable sobre $L[A]$.*

Demostración: Supongamos que existen dos ultrafiltros D_1 y D_2 en $\mathcal{P}^{L[A]}\kappa$ 2-iterables sobre $L[A]$. Dado $X \in \mathcal{P}^{L[A]}\kappa$, fijamos ξ, ϕ, s, t según el teorema anterior, es decir, de modo que

$$\bigwedge \alpha \in \kappa (\alpha \in X \leftrightarrow L_{\xi_\kappa}[A] \vDash \phi[\alpha, s, t, A]).$$

Ahora usamos que la inmersión elemental $j_{D_1} : L[A] \longrightarrow \mathrm{Ult}_{D_1}(L[A])$ fija a A, a los elementos de κ y, por 1.33 también a ξ_κ y a los elementos de C_κ (luego también a s y a t). Por lo tanto

$$\bigwedge \alpha \in j_{D_1}(\kappa)(\alpha \in j_{D_1}(X) \leftrightarrow L_{\xi_\kappa}[A] \vDash \phi[\alpha, s, t, A]),$$

y en particular $\kappa \in j_{D_1}(X) \leftrightarrow L_{\xi_\kappa}[A] \vDash \phi[\alpha, s, t, A]$, pero lo mismo vale para D_2, luego

$$X \in D_1 \leftrightarrow \kappa \in j_{D_1}(X) \leftrightarrow \kappa \in j_{D_2}(X) \leftrightarrow X \in D_2.$$

■

Ahora ya podemos probar que basta con que exista la primera ultrapotencia para que existan todas:

Teorema 1.42 (Kunen) *Sea A un conjunto de ordinales, $\sigma = \bigcup A$ y $\kappa > \sigma$ un cardinal en $L[A]$. Entonces todo ultrafiltro 2-iterable en $\mathcal{P}^{L[A]}\kappa$ es iterable.*

Demostración: Sea D un ultrafiltro 2-iterable en $\mathcal{P}^{L[A]}\kappa$ y supongamos que no es iterable, sino que la sucesión de ultrapotencias iteradas $\{\mathrm{Ult}_D^\delta(L[A])\}_{\delta<\gamma}$ sólo está definida hasta un ordinal $\gamma \in \Omega$, por hipótesis $\gamma \geq 2$.

Observemos que $\mathrm{Ult}_D^\delta(L[A])$ es un modelo interno que contiene a $A = j_{0\delta}(A)$ (porque $A \in V_\kappa^{L[A]}$) y cumple $V = L[A]$, luego es $\mathrm{Ult}_D^\delta(L[A]) = L[A]$.

Supongamos que $\gamma = \alpha + 1$. Por 1.32 sabemos que todo elemento de $\mathrm{Ult}_D^\alpha(L[A]) = L[A]$ es de la forma $i_{0\alpha}(f)(\kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_n})$, con $f \in {}^{[\kappa]^n}L[A] \cap L[A]$ y $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \alpha$.

Por otra parte, como $\alpha \geq 1$, contamos con que $L[A] = \mathrm{Ult}_D^1(L[A])$, luego a su vez podemos representar $f = [g]_D$, donde podemos suponer que, para cada $\delta < \kappa$, se cumple que $g(\delta) : [\delta]^n \longrightarrow L[A]$. Definimos entonces una función $\bar{g} : [\kappa]^n \longrightarrow {}^\kappa L[A]$ mediante

$$\bar{g}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)(\delta) = \begin{cases} g(\delta)(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) & \text{si } \alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \delta, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como $g \in L[A]$, también $\bar{g} \in L[A]$, y podemos definir $e : L[A] \longrightarrow \mathrm{Ult}_{D_\alpha}^*(L[A])$ mediante

$$e(i_{0\alpha}([g]_D)(\kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_n})) = [i_{0\alpha}(\bar{g})(\kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_n})]^*.$$

En efecto, si $i_{0\alpha}([g]_D)(\kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_n})$, $i_{0\alpha}([g']_D)(\kappa_{\alpha'_1}, \ldots, \kappa_{\alpha'_{n'}})$ son elementos de $L[x]$, sea $\delta_1 < \cdots < \delta_m < \alpha$ la ordenación de $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{n'}\}$, de modo que $\alpha_k = \delta_{i_k}$, $\alpha'_k = \delta_{i'_{k'}}$. Aplicamos dos[10] veces 1.34:

$$i_{0\alpha}([g]_D)(\kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_n}) = i_{0\alpha}([g']_D)(\kappa_{\alpha'_1}, \ldots, \kappa_{\alpha'_{n'}}) \leftrightarrow$$

$$\{(\delta_1, \ldots, \delta_m) \in [\kappa]^m \mid [g]_D(\delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_n}) = [g']_D(\delta_{i'_1}, \ldots, \delta_{i'_{n'}})\} \in D^m \leftrightarrow$$

$$\{(\delta_1, \ldots, \delta_m) \in [\kappa]^m \mid \{\delta < \kappa \mid g(\delta)(\delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_n}) = g'(\delta)(\delta_{i'_1}, \ldots, \delta_{i'_{n'}})\} \in D\} \in D^m \leftrightarrow$$

$$\{(\delta_1, \ldots, \delta_m) \in [\kappa]^m \mid \{\delta < \kappa \mid \bar{g}(\delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_n})(\delta) = \bar{g}'(\delta_{i'_1}, \ldots, \delta_{i'_{n'}})(\delta)\} \in D\} \in D^m \leftrightarrow$$

$$\{\delta < \kappa_\alpha \mid i_{0\alpha}(\bar{g})(\kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_n})(\delta) = i_{0\alpha}(\bar{g}')(\kappa_{\alpha'_1}, \ldots, \kappa_{\alpha'_{n'}})(\delta)\} \in D_\alpha \leftrightarrow$$

$$[i_{0\alpha}(\bar{g})(\kappa_{\alpha_1}, \ldots, \kappa_{\alpha_n})]^* = [i_{0\alpha}(\bar{g}')(\kappa_{\alpha'_1}, \ldots, \kappa_{\alpha'_n})]^*.$$

Esto prueba que e está bien definida y es inyectiva. Sabemos también que es suprayectiva, y el mismo razonamiento con $\in$ en lugar de $=$ prueba que es un isomorfismo de modelos, por lo que $\mathrm{Ult}_{D_\alpha}^*(L[A])$ está bien fundada y tenemos una contradicción.

[10]Notemos que la segunda aplicación de 1.34 se hace sobre una fórmula de $\mathcal{L}_R$, a saber,

$$\{\delta < x \mid y(\delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_n})(\delta) = x(\delta_{i'_1}, \ldots, \delta_{i'_{n'}})(\delta)\} \in D,$$

donde $X \in D \leftrightarrow X^n \in D^n \leftrightarrow R(X^n)$, pero esta fórmula cumple las condiciones a), b), c) que se exigen en 1.34 (la comprobación es casi idéntica a la que se hace en la demostración para la fórmula ψ).

Veamos finalmente que también llegamos a una contradicción si suponemos que γ es un ordinal límite. Como vamos a realizar una definición recurrente de inmersiones elementales, reducimos antes el problema a inmersiones sobre conjuntos.

Sea C la clase de los cardinales límite μ de cofinalidad $> \kappa$ tales que $L_\mu[A]$ cumpla los suficientes axiomas de ZFC como para que esté definida su sucesión de ultrapotencias iteradas $\{\mathrm{Ult}_D^\delta(L_\mu[A])\}_{\delta<\gamma}$ (el argumento del teorema de reflexión prueba C es una clase propia). El mismo argumento empleado para definir las ultrapotencias sobre clases propias muestra que[11]

$$\bigcup_{\mu\in C} \mathrm{Ult}_D^\delta(L_\mu[A]) = \mathrm{Ult}_D^\delta(L[A]) = L[A],$$

así como que los cardinales κ_δ y los ultrafiltros D_δ son los mismos para ambas sucesiones de ultrapotencias.

Observemos que si $\mathrm{Ult}_D^\gamma(L[A])$ no está definida, entonces existe un $\mu\in C$ tal que $\mathrm{Ult}_D^\gamma(L_\mu[A])$ tampoco lo está. En efecto, lo que tenemos es que el límite inductivo de las ultrapotencias $\{\mathrm{Ult}_D^\delta(L[A])\}_{\delta<\gamma}$ no está bien fundado, por lo que existe una sucesión $\{i^*_{\delta_n,\gamma}(x_n)\}_{n\in\omega}$ decreciente para la pertenencia en el límite inductivo. Basta tomar $\mu\in C$ tal que $\bigwedge n\in\omega\ x_n\in \mathrm{Ult}_D^{\delta_n}(L_\mu[A])$, pues entonces la misma sucesión, considerada en el límite inductivo de $\{\mathrm{Ult}_D^\delta(L_\mu[A])\}_{\delta<\gamma}$ muestra que éste no está bien fundado.

Fijamos, pues, $\mu\in C$ tal que no exista $\mathrm{Ult}_D^\gamma(L_\mu[A])$. Podemos exigir que $\mu>\xi_\kappa$, donde este cardinal es el definido al principio de la sección.

Como $i_{0\delta}(A)=A$ y $L_\mu[A]$ cumple $V=L[A]$, lo mismo vale para $\mathrm{Ult}_D^\delta(L_\mu[A])$, luego tiene que ser $\mathrm{Ult}_D^\delta(L_\mu[A]) = L_\lambda[A]$, para un cierto ordinal $\lambda\geq\mu$. Una simple inducción (usando 1.22) muestra que todo ordinal $\epsilon\in\mathrm{Ult}_D^\delta(L_\mu[A])$ tiene que cumplir $\epsilon<i_{0\delta}(\zeta)$, para cierto $\zeta\in L_\mu[A]$, pero la inmersión $i_{0\delta}$ es la restricción de la correspondiente a $\mathrm{Ult}_D^\delta(L[A])$, luego $\epsilon<i_{0\delta}(\zeta)<i_{0\delta}(\mu)=\mu$. Esto prueba que $\mathrm{Ult}_D^\delta(L_\mu[A])=L_\mu[A]$.

Así pues, todas las inmersiones $i_{\delta\epsilon}$ son aplicaciones $i_{\delta\epsilon}: L_\mu[A]\longrightarrow L_\mu[A]$. En particular tenemos que $\kappa_\epsilon = i_{0\epsilon}(\kappa)\in L_\mu[x]$, para todo $\epsilon<\gamma$. Definimos

$$H=\{u\in L_\mu[x] \mid \bigwedge\delta<\gamma\ i_{0\delta}(u)=u\},$$

de modo que $\kappa\subset H\subset L_\mu[x]$.

Notemos que, más en general, si $u\in H$, se cumple que $i_{\delta\epsilon}(u)=u$, para todo $\delta\leq\epsilon<\gamma$. En efecto:

$$i_{\delta\epsilon}(u)=i_{\delta\epsilon}(i_{0\delta}(u))=i_{0\epsilon}(u)=u.$$

[11]La única variante entre el uso de modelos $H(\xi)$ y modelos $L_\xi[A]$ aparece cuando se razona que si $f\in {}^\kappa L_\xi[A]$ y $f\in L[A]$, entonces $f\in L_\xi[A]$, porque, como $\mathrm{cf}\,\xi>\kappa$, es $f\subset L_\lambda[A]$, para cierto $\lambda<\xi$, luego $f\in L_{\lambda^+}[A]\subset L_\xi[A]$.

Observemos también que $H \prec L_\mu[x]$. En efecto, si $u_1, \ldots, u_n \in H$ cumplen

$$\bigvee u \in L_\mu[x] \; L_\mu[x] \vDash \phi(u)[u_1, \ldots, u_n],$$

podemos considerar el mínimo $u \in L_\mu[x]$ respecto al buen orden constructible que cumple $L_\mu[x] \vDash \phi[u, u_1, \ldots, u_n]$, de modo que

$$L_\mu[x] \vDash \phi[u, u_1, \ldots, u_n] \wedge \bigwedge v(\phi(v)[u_1, \ldots, u_n] \to u \trianglelefteq v).$$

Al aplicar $i_{0\delta}$ obtenemos que $i_{0\delta}(u)$ cumple lo mismo, luego $i_{0\delta}(u) = u$, luego $u \in H$, con lo que

$$\bigvee u \in H \; L_\mu[x] \vDash \phi(u)[u_1, \ldots, u_n].$$

Por consiguiente, la inversa $k_0 : L_\mu[A] \longrightarrow L_\mu[A]$ del colapso transitivo de H es una inmersión elemental. Como $\kappa \subset H$, tenemos que k_0 fija a todos los ordinales menores que κ, mientras que $k_0(\kappa)$ es el menor ordinal en H mayor o igual que κ.

Veamos que $\bigwedge \delta < \gamma \; k_0(\kappa) > \kappa_\delta$.

En efecto, si fuera $\kappa_0 \leq k_0(\kappa) \leq \kappa_\delta$, como la sucesión de puntos críticos es normal, existiría un $\delta < \gamma$ tal que $\kappa_\delta \leq k_0(\kappa) < \kappa_{\delta+1}$, pero entonces resulta que $k_0(\kappa) < \kappa_{\delta+1} \leq i_{\delta,\delta+1}(k_0(\kappa))$, luego $k_0(\kappa)$ no queda fijo por $i_{\delta,\delta+1}$, y por lo tanto no está en H, contradicción.

Por otra parte, el teorema 1.33 c) nos da que $K_\kappa \cap L_\mu[A] \subset H$, luego todo $\xi \in C_\kappa$ cumple $\xi \in H$ y $\xi \geq |H \cap \xi| \geq |K_\kappa \cap \xi| = \xi$, es decir, $|H \cap \xi| = \xi$, lo cual se traduce en que su colapso transitivo tiene que ser el propio ξ, es decir, que $k_0(\xi) = \xi$ para todo $\xi \in C_\kappa$. Igualmente $k_0(\xi_\kappa) = \xi_\kappa$.

Ahora vamos a construir recurrentemente una sucesión de inmersiones elementales $k_\delta : \mathrm{Ult}_D^\delta(L_\mu[A]) \longrightarrow L_\mu[A]$, para $\delta < \gamma$, que conmutan con las aplicaciones $i_{\delta\epsilon}$ y de modo que el punto crítico de k_δ sea κ_δ. Con esto quedará demostrado el teorema, pues según 1.27 estas aplicaciones inducen una inmersión elemental $k_\gamma^* : \mathrm{Ult}_D^{\gamma*}(L_\mu[A]) \longrightarrow L_\mu[A]$ que prueba que el límite inductivo está bien fundado, es decir, que D es $\gamma+1$-iterable, y tenemos una contradicción.

Partimos de la inmersión k_0 que ya tenemos definida. Supuesta definida k_δ, en $\mathcal{P}^{L[A]}\kappa_\delta$ tenemos definidos dos ultrafiltros 2-iterables, el ultrafiltro D_δ y el dado por el teorema 1.20 (teniendo en cuenta 1.23 y que todas las inmersiones van de $L_\mu[A]$ en $L_\mu[A]$). Por el teorema anterior ambos son el mismo, luego la ultrapotencia considerada en 1.20 es precisamente $\mathrm{Ult}_D^{\delta+1}(L_\mu[A])$, y tenemos una inmersión elemental que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & L_\mu[A] \\ \mathrm{Ult}_D^\delta(L_\mu[A]) \arrow[ur, "k_\delta"] \arrow[r, "i_{\delta,\delta+1}"'] & \mathrm{Ult}_D^{\delta+1}(L_\mu[A]) \arrow[u, "k_{\delta+1}"'] \end{tikzcd}$$

y que viene dada por $k_{\delta+1}([f]) = k_\delta(f)(\kappa_\delta)$. Es claro que $k_{\delta+1}$ conmuta con todas las inmersiones asociadas a la sucesión de ultrapotencias iteradas. Además

$$k_{\delta+1}(\kappa_{\delta+1}) = k_{\delta+1}(i_{\delta,\delta+1}(\kappa_\delta)) = k_\delta(\kappa_\delta) = k_0(\kappa) > \kappa_{\delta+1}.$$

Por lo tanto, sólo falta probar que $k_{\delta+1}$ fija a todos los ordinales menores que $\kappa_{\delta+1}$. Cualquiera de ellos es de la forma $\alpha = [f] < \kappa_{\delta+1}$, donde $f \in L_\mu[A]$ puede tomarse de modo que $f : \kappa_\delta \longrightarrow \kappa_\delta$. Entonces $i_{\delta,\delta+1}(f)(\kappa_\delta) = [f]$, pues esto equivale a $[c_f]([d]) = [f]$, que a su vez equivale a $\{\epsilon < \kappa_\delta \mid f(\epsilon) = f(\epsilon)\} \in D_\delta$.

Por lo tanto, lo que tenemos que demostrar es que $k_{\delta+1}([f]) = [f]$, que a su vez equivale a que $k_\delta(f)(\kappa_\delta) = i_{\delta,\delta+1}(f)(\kappa_\delta)$.

Aplicamos el teorema 1.40 a $X = f \subset \kappa_\delta \times \kappa_\delta$ (véase la observación posterior). Existen s y t de modo que

$$\bigwedge \alpha\beta \in \kappa_\delta (f(\alpha) = \beta \leftrightarrow L_{\xi_\kappa}[A] \vDash \phi(\alpha, \beta, s, t, A)).$$

Ahora observamos que no sólo $i_{\delta,\delta+1}$ fija a todos los parámetros por 1.33, sino que también lo hace k_δ, pues, por ejemplo,

$$k_\delta(\xi_\kappa) = k_\delta(i_{0\delta}(\xi_\kappa)) = k_0(\xi_\kappa) = \xi_\kappa.$$

Por consiguiente, al aplicar ambas inmersiones elementales obtenemos:

$$\bigwedge \alpha\beta \in \kappa_{\delta+1} (i_{\delta,\delta+1}(f)(\alpha) = \beta \leftrightarrow L_{\xi_\kappa}[A] \vDash \phi(\alpha, \beta, s, t, A)),$$

$$\bigwedge \alpha\beta \in \kappa_{\delta+1} (e_\kappa(f)(\alpha) = \beta \leftrightarrow L_{\xi_\kappa}[A] \vDash \phi(\alpha, \beta, s, t, A)).$$

Y en particular:

$$\bigwedge \beta \in \kappa_{\delta+1} (i_{\delta,\delta+1}(f)(\kappa_\delta) = \beta \leftrightarrow L_{\xi_\kappa}[A] \vDash \phi(\kappa_\delta, \beta, s, t, A)),$$

$$\bigwedge \beta \in \kappa_{\delta+1} (e_\kappa(f)(\kappa_\delta) = \beta \leftrightarrow L_{\xi_\kappa}[A] \vDash \phi(\kappa_\delta, \beta, s, t, A)),$$

luego $k_\delta(f)(\kappa_\delta) = i_{\delta,\delta+1}(f)(\kappa_\delta)$, como había que probar.

Supuestas definidas $\{k_\delta\}_{\delta<\lambda}$, con $\lambda < \gamma$, tomamos como k_λ la inmersión elemental dada por el teorema 1.27, que claramente conmuta con todas las inmersiones de las ultrapotencias, cumple $k_\lambda(\kappa_\lambda) = k_\lambda(i_{0\lambda}(\kappa))) = k_0(\kappa) > \kappa_\lambda$ y si $\alpha < \kappa_\lambda$ entonces existe un $\delta < \lambda$ tal que $\alpha < \kappa_\delta$, con lo que

$$k_\lambda(\alpha) = k_\lambda(i_{\delta\lambda}(\alpha)) = k_\delta(\alpha) = \alpha,$$

luego el punto crítico de k_λ es κ_λ. ■

Observemos que si M es una clase propia que sea un modelo transitivo de ZFC, κ es un cardinal en M y existe un ultrafiltro en $\mathcal{P}^M\kappa$ 2-iterable sobre M, entonces existe una inmersión elemental $j : M \longrightarrow N$ de punto crítico κ, que claramente se restringe a una inmersión elemental $j : L \longrightarrow L$, también de punto crítico κ, la cual determina un ultrafiltro D en $\mathcal{P}^L\kappa$ 2-iterable sobre L, luego iterable.

Notemos además que 1.22 d) implica que $D \notin L$, es decir, que un ultrafiltro 2-iterable sobre L no puede ser constructible, luego no puede probarse su existencia en ZFC, ya que no puede probarse la existencia de conjuntos no constructibles.

Capítulo II

Cardinales consistentes con V = L

Estudiamos aquí el primer tramo de la escala de los cardinales grandes por encima de los cardinales inaccesibles y de Mahlo y sus iteraciones. Más concretamente, vamos a estudiar (algunos de) los cardinales grandes que comparten la propiedad de ser consistentes con el axioma de constructibilidad, como sucede con los cardinales inaccesibles. (Si κ es un cardinal inaccesible, entonces es inaccesible^L, luego si es consistente que existan cardinales inaccesibles, también lo es que existan cardinales inaccesibles y además $V = L$.)

Como tendremos ocasión de comprobar, al trascender los cardinales inaccesibles y de Mahlo estamos dando un salto cualitativo y no meramente cuantitativo, pues los cardinales que vamos a estudiar no sólo son hipótesis necesarias en algunas pruebas de consistencia, sino que su existencia afecta en muchos aspectos al universo conjuntista. Por ejemplo en [TC 11.10] vimos que la existencia de cardinales débilmente compactos afecta a la existencia de árboles de Aronszajn. Esta influencia de los cardinales grandes sobre las características del universo conjuntista se volverá más pronunciada a medida que pasemos a considerar cardinales mayores.

2.1 Cardinales débilmente compactos

En [TC 11.8] introdujimos los cardinales *débilmente compactos* como los cardinales no numerables que cumplen la relación $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2$. Su nombre proviene de que, según el teorema [TC 11.15] están caracterizados porque los lenguajes formales de tipo (κ, κ) o meramente $(\kappa, \aleph_0)$ satisfacen el teorema de compacidad débil. En el capítulo VIII estudiaremos los cardinales (fuertemente) compactos, que aquellos para los que los lenguajes formales de tipo (κ, κ) o $(\kappa, \aleph_0)$ satisfacen el teorema de compacidad fuerte.

En [TC 11.13] probamos que los cardinales débilmente compactos son grandes, pues, de hecho, son ω-Mahlo. Vamos a probar que, de hecho, son κ-Mahlo.

Para ello demostraremos antes una propiedad esencial de los cardinales débilmente compactos.

En el teorema siguiente consideramos pares (M,A) considerados como modelos naturales del lenguaje $\mathcal{L}_R$ en los que el relator R se interpreta como la pertenencia a A.

Teorema 2.1 *Sea κ un cardinal débilmente compacto. Para todo $A \subset V_\kappa$ existe un modelo transitivo M de* ZFC *y un conjunto $A' \subset M$ de modo que $\kappa \in M$ y $(V_\kappa, A) \prec (M, A')$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{L}'$ el lenguaje $\mathcal{L}_R$ más un conjunto de constantes $\{c_x\}_{x\in V_\kappa}$ y sea $\mathcal{L}''$ el lenguaje $\mathcal{L}'$ más una constante c. Como κ es inaccesible el lenguaje $\mathcal{L}''$ tiene cardinal κ. Consideramos a (V_κ, A) como modelo de $\mathcal{L}'$ interpretando cada constante c_x por x.

Sea Σ el conjunto de todas las sentencias (finitas) de $\mathcal{L}'$ verdaderas en (V_κ, A) más las siguientes sentencias de $\mathcal{L}''$:

a) $\bigwedge u\, u \notin c_\varnothing$,

b) $\bigwedge u(u \in c_x \leftrightarrow \bigvee\limits_{y\in x} (u = c_y))$, para cada $x \in V_\kappa$ no vacío,

c) $\neg \bigvee\limits_{n\in\omega} x_n \bigwedge\limits_{m\in\omega} (x_{n+1} \in x_n)$,

d) c es un ordinal,

e) $c_\alpha \in c$, para cada $\alpha < \kappa$.

Claramente $|\Sigma| = \kappa$ y todas las sentencias de Σ que no contienen la constante c son verdaderas en (V_κ, A). Además todo $S \subset \Sigma$ con $|S| < \kappa$ tiene como modelo a (V_κ, A) sin más que interpretar la constante c como un ordinal suficientemente grande. Por [TC 11.15] tenemos que Σ tiene un modelo M.

Como M cumple la sentencia c), la relación $M(\in)$ está bien fundada en M, además M cumple el axioma de extensionalidad porque está en Σ, luego $M(\in)$ es extensional. Pasando al colapso transitivo, podemos suponer que M es un modelo transitivo.

Como M cumple las sentencias a) y b) ha de ser $M(c_x) = x$ para todo $x \in V_\kappa$, luego $V_\kappa \subset M$. Definimos $A' = \{x \in M \mid M(R)(x)\}$.

Se cumple que $(V_\kappa, A) \prec (M, A')$, pues si $(V_\kappa, A) \vDash \phi[x_1, \ldots, x_n]$ entonces $(V_\kappa, A) \vDash \phi(c_{x_1}, \ldots, c_{x_n})$, luego la sentencia $\phi(c_{x_1}, \ldots, c_{x_n})$ está en Σ, luego $(M, A') \vDash \phi(c_{x_1}, \ldots, c_{x_n})$ y también $(M, A') \vDash \phi[x_1, \ldots, x_n]$.

En particular, esto implica que M es un modelo transitivo de ZFC (pues, al ser κ inaccesible, V_κ lo es).

Por otra parte, M cumple las sentencias d) y e), lo que implica que contiene un ordinal mayor o igual que κ. Por transitividad $\kappa \in M$. ■

Como consecuencia:

Teorema 2.2 *Todo cardinal débilmente compacto es hiper-Mahlo.*

Demostración: Sabemos que κ es inaccesible, luego es 0-Mahlo. Supongamos que κ es α-Mahlo, para $\alpha < \kappa$, y veamos que es $\alpha + 1$-Mahlo. Para ello hemos de probar que todo conjunto c.n.a. C en κ contiene un cardinal α-Mahlo. Sea (M, C') según el teorema anterior, es decir, M es un modelo transitivo de ZFC, $(V_\kappa, C) \prec (M, C')$ y $\kappa \in M$. Claramente

$$(V_\kappa, C) \vDash \bigwedge\alpha \bigvee\beta(\alpha < \beta \wedge R\beta)$$

$$\wedge \bigwedge\alpha(\bigwedge\beta(\beta < \alpha \rightarrow \bigvee\delta(\beta < \delta \wedge \delta < \alpha \wedge R\delta)) \rightarrow R\alpha),$$

luego lo mismo es válido para (M, C'), lo que significa que C' es c.n.a. en el ordinal Ω^M. Por otro lado, el hecho de que (V_κ, C) sea un submodelo elemental de (M, C') implica que $\bigwedge\alpha < \kappa(\alpha \in C \leftrightarrow \alpha \in C')$, es decir, $C = C' \cap \kappa$, no acotado en κ, luego $\kappa \in C'$.

Una inducción rutinaria prueba que si κ es un cardinal α-Mahlo, entonces κ es α-Mahlo^M para todo modelo transitivo de ZFC (que contenga a α y a κ).[1] En particular esto vale para el modelo M que estamos considerando aquí. Así pues,

$$(M, C') \vDash \bigvee\mu(\mu \text{ es } [\alpha]\text{-Mahlo} \wedge R\mu).$$

Teniendo en cuenta que (V_κ, C) es un submodelo elemental (y que $\alpha \in V_\kappa$), de aquí se sigue que lo mismo vale para (V_κ, C), con lo que

$$\bigvee\mu \in C(\mu \text{ es } \alpha\text{-Mahlo})^{V_\kappa},$$

pero esto es absoluto para V_κ.Así queda probado que el conjunto de cardinales α-Mahlo bajo κ es estacionario, luego κ es $\alpha + 1$-Mahlo. El caso límite (para ordinales $\lambda \leq \kappa$) es trivial. ■

Ejercicio: Probar que si κ es débilmente compacto, entonces el conjunto

$$\{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es hiper-Mahlo}\}$$

es estacionario en κ.

Ahora probaremos que la existencia de cardinales débilmente compactos es consistente con el axioma de constructibilidad y, en particular, con la HCG. Para ello necesitamos un resultado técnico:

Teorema 2.3 *Si κ es un cardinal débilmente compacto y un conjunto $A \subset \kappa$ cumple $\bigwedge\alpha < \kappa\ A \cap \alpha \in L$, entonces $A \in L$.*

[1] Notemos que “ser un cardinal” es Π_1, “ser cerrado no acotado en κ” es Δ_0, “ser estacionario en κ” es Π_1, luego todas estas propiedades se conservan al pasar a un modelo M. Además “κ es $\alpha + 1$-Mahlo” equivale a

$$\bigwedge X \subset \kappa(\bigwedge\beta \in \kappa(\beta \in X \leftrightarrow \beta \in \kappa \wedge \beta \text{ es } \alpha\text{-Mahlo}) \rightarrow X \text{ es estacionario en } \kappa).$$

Dado $X \in M$ que cumpla la hipótesis^M, por hipótesis de inducción X contiene al conjunto (estacionario) de los cardinales α-Mahlo menores que κ, luego es estacionario, luego es estacionario^M.

Demostración: Sea (M, A') según el teorema 2.1. Claramente

$$(V_\kappa, A) \vDash \bigwedge \alpha \bigvee x(x \in L \wedge \bigwedge u(u \in x \leftrightarrow u \in \alpha \wedge Ru)),$$

luego lo mismo vale para (M, A'), y entonces podemos particularizar a $\alpha = \kappa$, lo que nos da que $A = A' \cap \kappa \in L$. ■

Teorema 2.4 *Todo cardinal débilmente compacto es débilmente compacto^L.*

Demostración: Sea κ un cardinal débilmente compacto. Entonces κ es inaccesible^L, luego por [TC 11.10] basta probar que no existen κ-árboles de Aronszajn^L. Sea $(A, \leq_A)$ un κ-árbol^L. Podemos suponer que $A = \kappa$, así como que $\bigwedge \alpha\beta \in \kappa\, (\alpha <_A \beta \rightarrow \alpha < \beta)$. En efecto (razonando en L), basta definir una sucesión de biyecciones $f_\alpha : \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathrm{Niv}_\beta(A) \longrightarrow \gamma_\alpha$, con $\gamma_\alpha < \kappa$, cada una de las cuales extienda a las anteriores. La regularidad de κ asegura que esto es posible y al final tenemos una biyección entre A y κ que nos permite pasar a un árbol en las condiciones requeridas.

Es claro que A es un κ-árbol, por lo que tiene un camino C. Si $\alpha < \kappa$, sea $\gamma = \min C \setminus \alpha$. Entonces $\alpha \leq \gamma$ y $C \cap \alpha = \{\beta \in \kappa \mid \beta <_A \gamma\} \in L$, luego $C \in L$ por el teorema anterior. Claramente C es un camino^L en A, luego A no es un κ-árbol de Aronszajn^L. ■

Veamos ahora varias caracterizaciones de los cardinales débilmente compactos en términos de inmersiones elementales:

Teorema 2.5 *Si κ es un cardinal inaccesible, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) κ es débilmente compacto.

b) Si M es un modelo transitivo de ZFC−AP *tal que $\kappa \in M$ y $|M| = \kappa$, existe una inmersión elemental $j : M \longrightarrow N$, con N transitivo, cuyo punto crítico es κ.*

c) Si $A \subset \kappa$, existe una inmersión elemental $j : M \longrightarrow N$ entre modelos transitivos de ZFC−AP *cuyo punto crítico es κ, $|M| = |N| = \kappa$, $A \in M$ y $M^{<\kappa} \subset M$, $N^{<\kappa} \subset N$.*

d) Si $A \subset \kappa$, existe una inmersión elemental $j : M \longrightarrow N$ entre modelos transitivos de ZFC−AP *cuyo punto crítico es κ, $|M| = \kappa$ y $A \in M$.*

Demostración: a) ⇒ b) Sea $\{X_\delta\}_{\delta<\kappa}$ una enumeración de $\mathcal{P}\kappa \cap M$. Para cada $t : \gamma \longrightarrow 2$ con $\gamma < \kappa$ sea

$$Y_\delta = \begin{cases} X_\delta & \text{si } t(\delta) = 1, \\ \kappa \setminus X_\delta & \text{si } t(\delta) = 0, \end{cases}$$

y sea $X_t = \bigcap\limits_{\delta<\gamma} Y_\delta$.

Sea $A = \{t \in M \mid \bigvee \gamma < \kappa(t \in {}^{\gamma}2 \wedge |X_t| = \kappa)\}$. Claramente A es un árbol con la inclusión. Como para cada $\gamma < \kappa$ se cumple que $|{}^{\gamma}2| < \kappa$, es fácil ver que A es un κ-árbol (notemos que $\{X_t\}_{t \in {}^{\gamma}2}$ es una partición de κ en menos de κ conjuntos, luego algún $t \in A$ tiene altura γ). Como κ es débilmente compacto, A tiene un camino, el cual determina una función $F : \kappa \longrightarrow 2$.

Sea ahora, para cada $\delta < \kappa$,

$$Y_\delta = \begin{cases} X_\delta & \text{si } F(\delta) = 1, \\ \kappa \setminus X_\delta & \text{si } F(\delta) = 0. \end{cases}$$

Así tenemos que para cada $\gamma < \kappa$ la intersección $X_{F|_\gamma} = \bigcap\limits_{\delta < \gamma} Y_\delta$ tiene cardinal κ (pues $F|_\gamma \in A$).

Llamamos U al filtro en $\mathcal{P}^M\kappa$ generado por estas intersecciones (es decir, el filtro formado por los elementos de $\mathcal{P}^M\kappa$ que contienen a alguna de ellas). Es inmediato comprobar que se trata de un ultrafiltro en $\mathcal{P}^M\kappa$ no principal y κ-completo sobre M. Observemos, por ejemplo, que

$$\bigwedge X \in M(X \subset \kappa \rightarrow X \in U \vee \kappa \setminus X \in U)$$

porque X es un X_δ, luego o bien X o bien $\kappa \setminus X$ es Y_δ.

Si $\mu < \kappa$ y $\{A_\alpha\}_{\alpha<\mu} \in M$ es una familia de elementos de U, para cada $\alpha < \mu$ existe un γ_α tal que $X_{F|_{\gamma_\alpha}} \subset A_\alpha$, y $\gamma = \sup\limits_{\alpha<\mu} \gamma_\alpha < \kappa$, porque κ es regular, de modo que $X_{F|_\gamma} \subset \bigcap\limits_{\alpha<\mu} A_\alpha$. Como la intersección está en M, de hecho está en U, lo que prueba la κ-completitud.

Más aún, si partimos de una familia arbitraria que no esté necesariamente en M, concluimos igualmente que la intersección no es vacía, por lo que U cumple la condición suficiente del teorema 1.14. Consecuentemente, están definidas la ultrapotencia $N = \mathrm{Ult}_U(M)$ y la inmersión elemental $j_U : M \longrightarrow N$, cuyo punto crítico es κ por el teorema 1.13.

Aunque esto termina la prueba de la implicación, veamos además que si el modelo dado M cumple $M^{<\kappa} \subset M$, entonces el modelo N que acabamos de construir cumple $N^{<\kappa} \subset N$. En efecto, sea $\alpha < \kappa$ y $f \in N^\alpha$. Entonces existe una sucesión $\{f_\delta\}_{\delta<\alpha}$ de funciones $f_\delta \in M^\kappa \cap M$ tales que $\bigwedge \delta < \alpha\ f(\delta) = [f_\delta]$. Observemos que, por hipótesis $\{f_\delta\}_{\delta<\alpha} \in M$, luego también está en M la función $g : \kappa \longrightarrow M^\alpha$ dada por $g(\beta)(\delta) = f_\delta(\beta)$. Así,

$$\{\beta < \kappa \mid (g(\beta) : c_\alpha(\beta) \longrightarrow V)^M\} = \kappa \in U,$$

luego $([g] : \alpha \longrightarrow V)^N$, e igualmente, para cada $\delta < \alpha$,

$$\{\beta < \kappa \mid g(\beta)(c_\delta(\beta)) = f_\delta(\beta)\} = \kappa \in U,$$

luego $[g](\delta) = [f_\delta] = f(\delta)$. Así pues, $f = [g] \in N$.

Demostramos al mismo tiempo las implicaciones a) $\Rightarrow$ c) y b) $\Rightarrow$ d). En ambos casos partimos de un conjunto $A \subset \kappa$ y consideramos el conjunto $H(\kappa^+)$

de los conjuntos de cardinal hereditariamente menor que κ, que es un modelo de ZFC−AP. Definimos

$$M_0 = N(\{A,\kappa\}), \qquad M_{\alpha+1} = N(M_\alpha \cup M_\alpha^{<\kappa}), \qquad M_\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} M_\delta,$$

donde los núcleos de Skolem se toman en $H(\kappa^+)$. Teniendo en cuenta que κ es inaccesible, una simple inducción prueba que $|M_\alpha| < \kappa$ para todo $\alpha < \kappa$, y que $M = M_\kappa$ tiene cardinal κ. Además $M \prec H(\kappa^+)$, luego es un modelo de ZFC−AP y κ, $A \in M$. Además es transitivo,[2] y cumple $M^{<\kappa} \subset M$, porque para cada $f : \beta \longrightarrow M$, con $\beta < \kappa$, tiene que haber un $\alpha < \kappa$ tal que $f : \beta \longrightarrow M_\alpha$, por lo que $f \in M_{\alpha+1} \subset M$.

Aplicando b) al modelo M obtenemos d). Para probar c) consideramos la inmersión $j : M \longrightarrow N$ construida a partir de a) en la prueba de a) $\Rightarrow$ b). Como $M^{<\kappa} \subset M$, sabemos que se cumple también $N^{<\kappa} \subset N$. Además $|N| \leq |M^\kappa \cap M| \leq |M| = \kappa$.

d) $\Rightarrow$ a) Veamos en primer lugar que la hipótesis $A \subset \kappa$ se puede cambiar por $A \subset V_\kappa$. Como κ es inaccesible, existe una biyección $f : \kappa \longrightarrow V_\kappa$. Sea $R \subset \kappa \times \kappa$ la relación que, a través de f, se corresponde con la pertenencia en V_κ. Entonces V_κ es el colapso transitivo de (κ, R). Sea $A' = f^{-1}[A] \subset \kappa$.

Consideremos la semejanza $g : \kappa \times \kappa \longrightarrow \kappa$, donde en el producto consideramos el buen orden canónico y sea $R' = g[R] \subset \kappa$. Por último, sea $A'' = g[R' \times \{0\} \cup A' \times \{1\}] \subset \kappa$.

Por hipótesis existe una inmersión elemental $j : M \longrightarrow N$ con punto crítico κ tal que $|M| = \kappa$ y $A'' \in M$, pero, como g es definible en M, también R', $A' \in M$, y a su vez $R \in M$, luego $f \in M$, luego $A \in M$.

Más aún, si A, $B \subset V_\kappa$, podemos exigir igualmente que A, $B \in M$, pues basta aplicar la hipótesis a $A \times \{0\} \cup B \times \{1\}$.

Pasemos ya a probar que κ es débilmente compacto. Por la observación tras el teorema [TC 11.15] basta probar que todo κ-subárbol A de ${}^{<\kappa}2$ tiene un camino. Por las observaciones precedentes existe una inmersión elemental $j : M \longrightarrow N$ en las condiciones del enunciado tal que A, $V_\kappa \in M$. En particular $V_\kappa \subset M$.

Como A es un subárbol de ${}^\kappa 2$ de altura κ en M, se cumple que $j(A)$ es un subárbol de ${}^{j(\kappa)}2$ de altura $j(\kappa) > \kappa$ en N, por lo que podemos tomar $f \in j(A)$ del altura κ en $j(A)$. Ahora bien, si $\gamma < \kappa$, entonces $f|_\gamma \in V_\kappa \subset M$, luego $j(f|_\gamma) = f|_\gamma$ (porque κ es el menor ordinal no fijado y los elementos de f son pares de ordinales menores que κ), y como $j(f|_\gamma) \in j(A)$, también $f|_\gamma \in A$, lo que significa que $\{f|_\gamma\}_{\gamma<\kappa}$ es un camino en A. ■

[2]Esto es un hecho general: todo $M \prec H(\kappa^+)$ tal que $|M| = \kappa$ y $\kappa \subset M$ es transitivo, para cualquier cardinal infinito κ. En efecto, se cumple que $\kappa \in M$ porque κ es el máximo cardinal de $H(\kappa^+)$, luego M tiene que tener un máximo cardinal, que debe coincidir con el de $H(\kappa^+)$, es decir, con κ. A su vez, si $x \in M$, entonces existe $f : \kappa \longrightarrow x$ suprayectiva y, como $f \in H(\kappa^+)$, podemos exigir que $f \in M$, y si $\alpha < \kappa$, entonces $f(\alpha)$ tiene que ser el mismo en M o en $H(\kappa^+)$, luego $x = f[\kappa] \subset M$.

Nota Si κ es débilmente compacto, entonces se cumple el apartado c) del teorema anterior con un modelo transitivo M de cualquier conjunto finito prefijado de axiomas de ZFC. En efecto, por el teorema de reflexión existe un $\lambda > \kappa$ tal que V_λ es un modelo de los axiomas seleccionados. Entonces fijamos unas funciones de Skolem en V_λ y definimos

$$M_0 = N(\{A\} \cup (\kappa + 1)), \qquad M_{\alpha+1} = N(M_\alpha \cup M_\alpha^{<\kappa}), \qquad M_\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} M_\delta,$$

como en la prueba de c). Entonces $M^* = M_\kappa$ es un modelo de los axiomas prefijados de ZFC que cumple también $(M^*)^{<\kappa} \subset M$, pero no es necesariamente transitivo. Consideramos su colapso transitivo $\pi : M^* \longrightarrow M$. Claramente π fija a los ordinales menores que κ, luego $\kappa = \pi(\kappa) \in M$, $A = \pi(A) \in M$ y además $|M| = |M^*| = \kappa$ y $M^{<\kappa} \subset M$, pues si $f : \alpha \longrightarrow M$, con $\alpha < \kappa$, entonces $f^* = f \circ \pi^{-1} \in M^*$ y $f = \pi(f^*) \in M$, pues si $\delta < \alpha$ y $f^*(\delta) = x$, entonces $\pi(f^*)(\delta) = \pi(x) = \pi(\pi^{-1}(f(\delta))) = f(\delta)$. A partir de aquí vale sin cambios la prueba de c). ■

La consistencia de que exista un cardinal débilmente compacto se deduce de una condición más débil que la dada por el teorema anterior:

Teorema 2.6 *Si κ es un cardinal inaccesible^L y para cada $\kappa < \alpha < \kappa^+$ existe una inmersión elemental $j : L_\alpha \longrightarrow L_\beta$ con punto crítico κ, entonces κ es débilmente compacto^L.*

Demostración: Por la observación tras el teorema [TC 11.15] basta probar que, en L, todo κ-subárbol A de ${}^{<\kappa}2$ tiene un camino. Como κ es inaccesible^L, se cumple que $A \subset ({}^{<\kappa}2)^L \subset L_\kappa$ (por [PC 3.28]), e igualmente existe un $\lambda < \kappa^+$ tal que $A \in L_\lambda$. Podemos exigir que $L_\lambda \vDash \mathrm{ZFC}{-}\mathrm{AP}$.

Sea $j : L_\lambda \longrightarrow L_{\lambda'}$ una inmersión elemental con punto crítico κ. Ahora podemos razonar exactamente igual que en la implicación d) $\Rightarrow$ a) del teorema anterior. La única variante en el argumento es que si $f \in j(A)$ es un elemento de altura κ y $\gamma < \kappa$, entonces $f|_\gamma \in L$ y $f|_\gamma \subset L_{\gamma+\omega}$, luego $f \in L_\kappa \subset L_\lambda$. Además, $\{f|_\gamma\}_{\gamma<\kappa} \in L$ porque $f \in L$, luego concluimos que A tiene un camino en L. ■

Veamos un recíproco parcial:

Teorema 2.7 *Sea κ un cardinal regular inaccesible^L y tal que no existan κ-árboles de Aronszajn. Entonces, si $\kappa < \alpha < \kappa^+$, existe una inmersión elemental $j : L_\alpha \longrightarrow L_\beta$ (para cierto β) cuyo punto crítico es κ.*

Demostración: En primer lugar observamos que es suficiente probar el teorema para un conjunto no acotado de α's, más concretamente para los ordinales límite λ tales que $L_\lambda \vDash \mathrm{ZFC}{-}\mathrm{AP}$ (véase [PC 3.21, 3.22]). En efecto, si $\alpha < \lambda$ y existe una inmersión elemental $j : L_\lambda \longrightarrow L_{\lambda'}$, entonces $j|_{L_\alpha} : L_\alpha \longrightarrow L_{j(\alpha)}$ también cumple el enunciado. Esto se debe a que la sucesión $\{L_\delta\}_{\delta<\lambda}$ es definible en L_λ, porque es definible en ZF$-$AP, es decir, existe una fórmula $y = L_\delta \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_0)$ de modo que un $y \in L_\lambda$ cumple $y = L_\delta$ si y sólo si

$L_\lambda \vDash [y] = L_{[\delta]}$. Por lo tanto, si $x \in L_\alpha$, se cumple que $L_\lambda \vDash [x] \in L_{[\alpha]}$, luego, al ser j elemental, $L_{\lambda'} \vDash [j(x)] \in L_{[j(\alpha)]}$, luego $j(x) \in L_{j(\alpha)}$. Esto prueba que en efecto $j[L_\alpha] \subset L_{j(\alpha)}$.

Ahora, si $\phi(x_1,\ldots,x_n) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_0)$ y $a_1,\ldots,a_n \in L_\alpha$, tenemos

$$L_\alpha \vDash \phi[a_1,\ldots,a_n] \to L_\lambda \vDash (L_{[\alpha]} \vDash [\phi][[a_1],\ldots,[a_n]])$$

$$\to L_{\lambda'} \vDash (L_{[j(\alpha)]} \vDash [j(\phi)][[j(a_1)],\ldots,[j(a_n)]]) \to L_{j(\alpha)} \vDash \phi[j(a_1),\ldots,j(a_n)],$$

donde hemos usado que $j(\phi) = \phi$ porque (podemos suponer que) $\phi \in V_\omega$, y una simple inducción demuestra que j tiene que fijar a todos los conjuntos hereditariamente finitos.

Así pues, tomamos $\kappa < \lambda < \kappa^+$ de modo que $L_\lambda \vDash \mathrm{ZFC}-\mathrm{AP}$. Ahora podemos adaptar el razonamiento de la implicación d) $\Rightarrow$ a) teorema anterior. Tomemos una enumeración $\{X_\delta\}_{\delta<\kappa}$ de $\mathcal{P}\kappa \cap L_\lambda$. Para cada $t : \gamma \longrightarrow 2$ con $\gamma < \kappa$ definimos igualmente

$$Y_\delta = \begin{cases} X_\delta & \text{si } t(\delta) = 1, \\ \kappa \setminus X_\delta & \text{si } t(\delta) = 0, \end{cases}$$

y $X_t = \bigcap\limits_{\delta<\gamma} Y_\delta$. Ahora tomamos

$$A = \{t \in L \mid \bigvee \gamma < \kappa (t \in ({}^\gamma 2)^L \land |X_t|^L = \kappa)\}.$$

De este modo podemos usar que κ es inaccesible^L para concluir igualmente que A es un κ-árbol. Por hipótesis tiene un camino, que determina igualmente una función $F : \kappa \longrightarrow 2$.

A partir de aquí podemos construir igualmente el ultrafiltro U que determina la inmersión elemental $j : L_\lambda \longrightarrow N$ con punto crítico κ, donde $N = \mathrm{Ult}_U(L_\lambda)$ es un modelo transitivo de ZFC$-$AP$+V = L$, luego tiene que ser un $L_{\lambda'}$, para cierto ordinal λ'. ■

Como un cardinal débilmente compacto cumple trivialmente las hipótesis del teorema anterior, junto con el teorema 2.6 nos da una prueba alternativa de que todo cardinal débilmente compacto es débilmente compacto^L. Por otra parte, si no existen $\aleph_2$-árboles de Aronszajn, el teorema [PC 3.39] nos da que $\aleph_2$ es un cardinal inaccesible^L, luego 2.6 y el teorema anterior implican trivialmente:

Teorema 2.8 *Si no existen $\aleph_2$-árboles de Aronszajn, entonces $\aleph_2$ es débilmente compacto^L.*

Nota El teorema [TC 9.21] implica en particular que si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ existen $\aleph_2$-árboles de Aronszajn. Por otra parte, si partimos de un modelo transitivo numerable de ZFC$+V = L$ en el que no existan cardinales débilmente compactos y pasamos a una extensión genérica para obtener $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, en ella existirán $\aleph_2$-árboles de Aronszajn por el teorema anterior, luego $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ es consistente con que existan $\aleph_2$-árboles de Aronszajn. Al final de este capítulo probaremos que también es consistente con que no existan, pero ahora sabemos que esto no puede probarse a partir de la mera hipótesis de que ZFC es consistente, sino que necesitamos suponer (al menos) la consistencia de que exista un cardinal débilmente compacto. Veremos que esta hipótesis es suficiente. ■

2.2 Cardinales indescriptibles

Hemos caracterizado los cardinales débilmente compactos en términos de particiones, árboles y modelos. Aquí vamos a dar otra caracterización en términos de lógicas de órdenes superiores que ayuda a identificarlos.

Definición 2.9 Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje formal que resulta de añadir al lenguaje $\mathcal{L}_0$ de la teoría de conjuntos un número finito de relatores monádicos $R_0, \ldots, R_k$. Un caso particular es el lenguaje $\mathcal{L}_R$ que consta de un único relator adicional R. Un modelo natural de $\mathcal{L}$ está formado por un conjunto M junto con n subconjuntos $A_0, \ldots, A_k$ (de forma que $M(R_i)$ es la pertenencia a A_i). El relator $\in$ se interpreta como la pertenencia usual en M.

Llamaremos $\mathcal{L}^n$ al lenguaje que resulta de añadir n conjuntos (numerables, disjuntos) de variables $\mathrm{Var}_1(\mathcal{L}^n), \ldots, \mathrm{Var}_n(\mathcal{L}^n)$. Convenimos en que $\mathrm{Var}_0(\mathcal{L}^n)$ es el conjunto de las variables originales de $\mathcal{L}$. En particular $\mathcal{L}^0 = \mathcal{L}$. Diremos que $\mathcal{L}^n$ es el *lenguaje de orden* $n+1$ asociado a $\mathcal{L}$. Los elementos de $\mathrm{Var}_i(\mathcal{L}^n)$ se llaman *variables de orden* $i+1$ de $\mathcal{L}^n$.

Los términos y fórmulas de $\mathcal{L}^n$ se definen como en el caso de los lenguajes de primer orden, sólo que ahora pueden aparecer en ellos variables de distintos órdenes. La diferencia aparece en la interpretación. En general, si M es un conjunto, llamaremos $\mathcal{P}^0 M = M$, $\mathcal{P}^1 M = \mathcal{P}M$, $\mathcal{P}^2 M = \mathcal{P}\mathcal{P}M$, etc. Si $(M, A_1, \ldots, A_k)$ es un modelo de $\mathcal{L}$, definimos

$$\overline{M} = \bigcup_{i \leq m} \mathcal{P}^i M.$$

Consideramos a $(\overline{M}, A_1, \ldots, A_k)$ como modelo de $\mathcal{L}$, de modo que el relator $\in$ se sigue interpretando como la pertenencia en $\overline{M}$ y los relatores R_i se siguen interpretando como la pertenencia a A_i. Una *valoración* de $\mathcal{L}$ en $\overline{M}$ es una aplicación v que a cada $x \in \mathrm{Var}_i(\mathcal{L}^m)$ le asigna un conjunto $v(x) \in \mathcal{P}^i M$. Si ϕ es una fórmula de $\mathcal{L}^m$, la definición de $\overline{M} \vDash \phi[v]$ es la misma que para los lenguajes de primer orden, salvo que las valoraciones son las que acabamos de definir.

Informalmente, la diferencia es que ahora las variables de primer orden recorren elementos de M, mientras que las variables de segundo orden recorren subconjuntos de M, las de tercer orden subconjuntos de subconjuntos de M, y así sucesivamente. En la práctica escribiremos M en lugar de $\overline{M}$.

Una fórmula Π^n_m es una fórmula de $\mathcal{L}^n$ que conste de una sucesión de m variables de orden $n+1$ cuantificadas en la forma $\bigwedge x_1 \bigvee x_2 \bigwedge x_3 \cdots$ seguidas de una fórmula cuyas variables cuantificadas sean a lo sumo de orden n. Una fórmula Σ_m^n se define igualmente, salvo que el primer cuantificador ha de ser existencial.

Observemos que las fórmulas Π_0^1 (o Σ_0^1) son las que no tienen variables de segundo orden y tienen variables cualesquiera de primer orden, es decir, son las fórmulas usuales de la lógica de primer orden.

Vamos a considerar únicamente modelos de la forma $(V_\alpha, A_1, \ldots, A_k)$. En la práctica, cuando digamos que una sentencia ϕ es Π_m^n o Σ_m^n, querremos decir que es equivalente a una sentencia ϕ' de este tipo, en el sentido de que cualquier modelo V_α cumple ϕ si y sólo si cumple ϕ'.

Un cardinal infinito κ es Π_m^n-*indescriptible* si cuando ϕ es una sentencia Π_m^n de $\mathcal{L}_R$ y $A \subset V_\kappa$ cumple $(V_\kappa, A) \vDash \phi$, existe un $\alpha < \kappa$ tal que $(V_\alpha, A \cap V_\alpha) \vDash \phi$. Similarmente se definen los cardinales Σ_m^n-indescriptibles. Diremos que κ es *indescriptible* si es Π_m^n-indescriptible para todo n y m (luego también es Σ_m^n-indescriptible).

Observemos que en todos los casos de interés se cumple algo más fuerte:

Teorema 2.10 *Si κ es un cardinal Π_m^n-indescriptible o Σ_m^n-indescriptible, con $n \geq 1$, entonces para toda sentencia ϕ de $\mathcal{L}_R$ del tipo correspondiente y todo $A \subset V_\kappa$ tal que $(V_\kappa, A) \vDash \phi$, el conjunto $E = \{\alpha < \kappa \mid (V_\alpha, A \cap V_\alpha) \vDash \phi\}$ es estacionario en κ.*

Demostración: Sea C un c.n.a. en κ y sea $A' = (A \times \{0\}) \cup (C \times \{1\})$ y sea ϕ' la sentencia que resulta de cambiar cada término Rx por $R(x, 0)$, de modo que $(V_\kappa, A) \vDash \phi$ es equivalente a $(V_\kappa, A') \vDash \phi'$. Pero, más aún, tenemos que

$$(V_\kappa, A') \vDash (\phi' \wedge \textstyle\bigwedge\gamma \bigvee\beta(\gamma \in \Omega \to \beta \in \Omega \wedge \gamma \in \beta \wedge R(\beta, 1))),$$

pues la segunda parte sólo expresa que C es no acotado en κ. Como la segunda parte es de primer orden, la fórmula completa sigue siendo del mismo tipo que ϕ, luego existe un $\alpha < \kappa$ tal que

$$(V_\alpha, A' \cap V_\alpha) \vDash (\phi' \wedge \textstyle\bigwedge\gamma \bigvee\beta(\gamma \in \Omega \to \beta \in \Omega \wedge \gamma \in \beta \wedge R(\beta, 1))).$$

La primera parte equivale a que $(V_\alpha, A \cap V_\alpha) \vDash \phi$, es decir, a que $\alpha \in E$, mientras que la segunda afirma que $C \cap \alpha$ no es acotado en α (y que α es un ordinal límite), por lo que, como C es cerrado, resulta que $\alpha \in C$, luego $C \cap E \neq \varnothing$ y E es estacionario. ■

Veamos algunos otros hechos elementales:

- Si $m \leq m'$ y $n \leq n'$, entonces toda fórmula Π_m^n es también una fórmula $\Pi_{m'}^{n'}$. Más aún, si $n < n'$ toda fórmula Π_m^n es, de hecho, $\Pi_0^{n'}$. Por lo tanto, todo cardinal $\Pi_{m'}^{n'}$-indescriptible es Π_m^n-indescriptible, y todo cardinal Π_0^{n+1}-indescriptible es Π_m^n-indescriptible, para todo m. Lo mismo vale si cambiamos Π por Σ.

- Si κ es Π_m^n-indescriptible ($n \geq 1$) entonces cumple también la definición para lenguajes con k relatores monádicos $R_1, \ldots, R_k$, pues si

$$(V_\kappa, A_1, \ldots, A_k) \vDash \phi,$$

consideramos $A = A_1 \times \{0\} \cup \cdots \cup A_k \times \{k-1\}$ y la sentencia

$$\phi' = \bigvee x_1 \cdots x_k (x_1 = \varnothing \wedge x_2 = x_1 \cup \{x_1\} \wedge \cdots \wedge x_k = x_{k-1} \cup \{x_{k-1}\} \wedge \phi''),$$

donde ϕ'' es la fórmula que resulta de reemplazar cada $R_i x$ por $R(x, x_i)$. Es claro que $(V_\kappa, A) \vDash (\phi' \wedge \bigwedge \alpha \bigvee \beta\ \alpha < \beta)$ y la fórmula es Π_m^n porque los cuantificadores de orden $n+1$ de ϕ' se pueden extraer. Si $(V_\alpha, A \cap V_\alpha)$ cumple esto mismo con $\alpha < \kappa$, entonces α es un ordinal límite y

$$A \cap V_\alpha = (A_1 \cap V_\alpha) \times \{0\} \cup \cdots \cup (A_k \cap V_\alpha) \times \{k-1\},$$

con lo que $(V_\alpha, A_1 \cap V_\alpha, \ldots, A_k \cap V_\alpha) \vDash \phi$.

- Los cardinales Π_n^1-indescriptibles coinciden con los Σ_{n+1}^1-indescriptibles.

En efecto, toda fórmula Π_n^1 es trivialmente Σ_{n+1}^1, por lo que una implicación es obvia. Por otra parte, toda fórmula Σ_{n+1}^1 es de la forma $\bigvee X_2\, \phi$, donde X_2 es una variable de orden 2 y ϕ es Π_n^1. Si κ es Π_n^1-indescriptible y $(V_\kappa, A) \vDash \bigvee x\, \phi$, existe un $B \subset V_\kappa$ tal que $(V_\kappa, A) \vDash \phi[B]$, pero esto equivale a que $(V_\kappa, A, B) \vDash \phi'$, donde ϕ' se obtiene de ϕ reemplazando la variable de segundo orden X_2 por un nuevo relator R' que interpretamos mediante B. Teniendo en cuenta la propiedad precedente, concluimos que existe un $\alpha < \kappa$ tal que $(V_\alpha, A \cap V_\alpha, B \cap V_\alpha) \vDash \phi'$, lo que a su vez equivale a que $(V_\alpha, A \cap V_\alpha) \vDash \bigvee x\, \phi$.

En particular, los cardinales Σ_1^1-indescriptibles coinciden con los Π_0^1-indescriptibles, y las fórmulas Π_0^1 (o Σ_0^1) son simplemente las que no tienen variables de segundo orden, es decir, las fórmulas usuales de primer orden, y toda fórmula de primer orden es de tipo Π_m^0 o Σ_m^0 para algún m (pues siempre puede ponerse en forma normal).

Teorema 2.11 *Un cardinal κ es inaccesible si y sólo si es Σ_1^1-indescriptible o, equivalentemente, Π_0^1-indescriptible, o también Π_m^0-indescriptible o Σ_m^0-indescriptible para todo $m < \omega$.*

DEMOSTRACIÓN: Si κ es singular, sea $\mu = \operatorname{cf} \kappa$ y sea $f : \mu \longrightarrow \kappa$ cofinal. Sea $A = f \times \{\mu\} \subset V_\kappa$. Entonces

$$(V_\kappa, A) \vDash \bigvee \mu > 0 \bigwedge \delta < \mu \bigvee \beta\ R(\delta, \beta, \mu),$$

donde la sentencia es claramente de tipo Π_m^0 para algún m (simplemente, es de primer orden). Sin embargo, no existe un $\alpha < \kappa$ tal que

$$(V_\alpha, A \cap V_\alpha) \vDash \bigvee x \neq \varnothing \bigwedge y \in x \bigvee z\ R(y, z, x).$$

En efecto, tendría que ser $\mu < \alpha$ para que existiera x en V_α, y entonces el x cuya existencia afirma la sentencia tendría que ser μ. Pero entonces cualquier $\delta < \mu$ tal que $f(\delta) > \alpha$ incumple la sentencia. Esto prueba que todo cardinal Π^1_0-indescriptible es regular.

Si $\mu < \kappa$ pero $2^\mu \geq \kappa$, sea $f : \mathcal{P}\mu \longrightarrow \kappa$ suprayectiva. Tomamos ahora $A = f \times \{\mathcal{P}\mu\} \subset V_\kappa$. La misma sentencia de antes describe a κ. Por consiguiente κ es un límite fuerte.

No puede ser $\kappa = \omega$, pues la sentencia $\bigwedge x \bigvee y\ x \in y$ describe a ω. Así pues, los cardinales Π^1_0-indescriptibles son inaccesibles.

Supongamos ahora que κ es inaccesible y que $A \subset V_\kappa$ cumple

$$(V_\kappa, A) \vDash \phi,$$

donde ϕ es una sentencia Π^1_0, es decir, una sentencia de primer orden. Sea $M_0 \prec (V_\kappa, A)$ un submodelo elemental numerable. Sea $\alpha_0 < \kappa$ tal que $M_0 \subset V_{\alpha_0}$. Sea $M_1 \prec (V_\kappa, A)$ tal que $V_{\alpha_0} \subset M_1$ y $|M_1| = |V_{\alpha_0}| < \kappa$, sea $\alpha_1 < \kappa$ tal que $M_1 \subset V_{\alpha_1}$, etc. Sea $\alpha = \bigcup\limits_n \alpha_n < \kappa$.

Es fácil ver entonces (usando [TC 10.22]) que $(V_\alpha, A \cap V_\alpha) \prec (V_\kappa, A)$. En particular $(V_\alpha, A \cap V_\alpha) \vDash \phi$, luego κ es Π^1_0-indescriptible. ■

En otras palabras, acabamos de probar que los únicos cardinales κ tales que V_κ satisface el teorema de reflexión (para fórmulas de primer orden) son los inaccesibles. El siguiente nivel de indescriptibilidad, después de Σ^1_1 (que equivale a Π^1_0 o Σ^1_0) es Π^1_1, y el resultado principal de esta sección es que los cardinales Π^1_1-indescriptibles son precisamente los débilmente compactos. Pero antes vamos a demostrar que, a partir de este nivel, los cardinales indescriptibles cumplen una propiedad aún más fuerte que la dada por el teorema 2.10:

Teorema 2.12 *Si κ es un cardinal Π^n_m-indescriptible (con n, $m \geq 1$) y ϕ es una sentencia Π^n_m tal que $(V_\kappa, A) \vDash \phi$, existe un conjunto estacionario $E \subset \kappa$ formado por cardinales inaccesibles tal que para todo cardinal $\mu \in E$ se cumple $(V_\mu, A \cap V_\mu) \vDash \phi$. En particular κ es un cardinal de Mahlo.*

Demostración: Basta probar que si C es c.n.a. en κ entonces existe un cardinal inaccesible $\mu \in C$ tal que $(V_\mu, A \cap V_\mu) \vDash \phi$. Como κ es inaccesible, no perdemos generalidad si suponemos que C está formado por cardinales límite fuerte (pues el conjunto de cardinales límite fuerte menores que κ es c.n.a. en κ). Así pues, basta encontrar un μ regular. Tenemos que

$$(V_\kappa, A, C) \vDash \phi \wedge \bigwedge \alpha \bigvee \beta (\alpha < \beta \wedge S\beta) \wedge$$

$$\bigwedge F_2((\bigvee \alpha\ F_2 : \alpha \longrightarrow \Omega) \to (\bigvee \beta\ F_2 : \alpha \longrightarrow \beta)),$$

donde S se interpreta con C y la variable F_2 es de segundo orden. Es claro que la sentencia es Π^n_m, pues todo lo que hemos añadido es Π^1_1. Sea $\mu < \kappa$ un ordinal tal que $(V_\mu, A \cap V_\mu, C \cap V_\mu)$ satisfaga esta sentencia. Entonces $C \cap \mu$ no está acotado en μ, luego $\mu \in C$. La última parte de la sentencia implica que μ es regular, luego cumple todo lo pedido. ■

Finalmente demostramos:

Teorema 2.13 *Un cardinal es Π^1_1-indescriptible si y sólo si es débilmente compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Si κ es Π^1_1-indescriptible, entonces es inaccesible por el teorema 2.11. Según las observaciones tras el teorema [11.15] basta probar que ${}^{<\kappa}2$ no tiene κ-subárboles de Aronszajn. Sea $A \subset {}^{<\kappa}2$ un κ-subárbol. Es claro que, para todo $\alpha < \kappa$, el modelo $(V_\alpha, A \cap V_\alpha)$ satisface la sentencia Σ^1_1

$$\bigvee C\ C \text{ es un camino en } R.$$

Por consiguiente, también la satisface (V_κ, A), lo cual se traduce en que A tiene un camino.

Supongamos ahora que κ es débilmente compacto y sea $A \subset V_\kappa$ tal que

$$(V_\kappa, A) \vDash \bigwedge X_2\, \phi(X_2),$$

donde la variable X_2 es de segundo orden y ϕ tiene sólo cuantificadores de primer orden. Por el teorema 2.1 existe un modelo transitivo M de ZFC y un conjunto $A' \subset M$ de modo que $\kappa \in M$ y $(V_\kappa, A) \prec (M, A')$. Teniendo en cuenta que $V^M_\kappa = V_\kappa$, es fácil ver que

$$(M, A') \vDash (\bigwedge X \subset V_\kappa\ (V_\kappa, A' \cap \kappa) \vDash \phi[X]),$$

donde lo que hay tras el primer $\vDash$ ha de verse como una fórmula (de primer orden) de $\mathcal{L}_R$. En particular

$$(M, A') \vDash \bigvee \alpha \bigwedge X \subset V_\alpha\ (V_\alpha, A' \cap \alpha) \vDash \phi[X].$$

Como (V_κ, A) es un submodelo elemental, concluimos que

$$(V_\kappa, A) \vDash \bigvee \alpha \bigwedge X \subset V_\alpha\ (V_\alpha, A \cap \alpha) \vDash \phi[X],$$

de donde se sigue que existe un $\alpha < \kappa$ tal que $(V_\alpha, A \cap \alpha) \vDash \bigwedge X_2\, \phi(X_2)$. ■

Equivalentemente, los cardinales débilmente compactos son Σ^1_2-indescriptibles, y este resultado no se puede mejorar, porque el mínimo cardinal débilmente compacto es Π^1_2-descriptible, ya que la compacidad débil de κ puede caracterizarse como

$$V_\kappa \vDash \bigwedge F_2 \bigvee H_2 (F_2 : [\Omega]^2 \longrightarrow 2 \to H_2 \subset \Omega \text{ no acotado y homogéneo para } F_2),$$

donde las variables F_2 y H_2 son de segundo orden, por lo que la sentencia es claramente Π^1_2.

Veamos otro teorema en la línea de 1.4:

Teorema 2.14 *Si $j : M \longrightarrow M$ es una inmersión elemental no trivial de un modelo transitivo de* ZFC *en sí mismo y κ es el menor ordinal no fijado, entonces κ es indescriptible^M.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $A \subset V_\kappa^M$ y supongamos que $M \vDash (V_\kappa, A) \vDash \phi$, para cierta sentencia ϕ de cualquier tipo. Teniendo en cuenta (teorema 1.4) que j fija a los elementos de $V_\kappa^M = V_\kappa^N$, es claro que $A = j(A) \cap V_\kappa^M$. Por lo tanto:

$$M \vDash \bigvee \alpha < j(\kappa)\ (V_\alpha, j(A) \cap V_\alpha) \vDash \phi,$$

de donde $M \vDash \bigvee \alpha < \kappa\ (V_\alpha, A \cap V_\alpha) \vDash \phi$. ■

Nota El teorema anterior vale también para $j : M \longrightarrow N$ con $N \subset M$, pero la tesis es entonces que κ es indescriptible^N. La prueba se complica ligeramente:

Partimos de que $N \vDash (V_\kappa, A) \vDash \phi$ y llegamos igualmente a que

$$M \vDash \bigvee \alpha < \kappa\ (V_\alpha, A \cap V_\alpha) \vDash \phi.$$

Ahora hay que tener en cuenta que, si ϕ es concretamente de tipo Π_n^m, la definición de $(V_\alpha, A \cap V_\alpha) \vDash \phi$ en M depende del conjunto

$$\overline{V}_\alpha^M = (\bigcup_{i \leq m} \mathcal{P}^i V_\alpha)^M \in V_\kappa^M,$$

pues κ es inaccesible^M por 1.4. Por consiguiente, $\vDash$ es absoluta para $V_\kappa^M - M$ y así

$$V_\kappa^M \vDash \bigvee \alpha < \kappa\ (V_\alpha, A \cap V_\alpha) \vDash \phi.$$

Ahora usamos que $V_\kappa^M = V_\kappa^N$, y que $\overline{V}_\alpha^N = j(\overline{V}_\alpha^M) = \overline{V}_\alpha^M$, porque j fija a todos los elementos de V_κ^M. Esto hace que $\vDash$ también sea absoluta para $V_\kappa^N - N$, luego

$$N \vDash \bigvee \alpha < \kappa\ (V_\alpha, A \cap V_\alpha) \vDash \phi.$$

como había que probar. ■

2.3 Cardinales inefables y sutiles

Vamos a ascender un poco en la escala de los cardinales grandes introduciendo una restricción en la definición de los cardinales débilmente compactos:

Definición 2.15 Un cardinal regular no numerable κ es *inefable* si toda partición $F : [\kappa]^2 \longrightarrow 2$ tiene un conjunto $H \subset \kappa$ homogéneo y estacionario en κ.

Es decir, en lugar de exigir meramente que H tenga cardinal κ, exigimos que sea estacionario. Obviamente, todo cardinal inefable es débilmente compacto. Veamos que estos cardinales tienen una caracterización en términos de una propiedad similar a $\Diamond_\kappa$ pero "con los papeles intercambiados":

Teorema 2.16 *Un cardinal κ es inefable si y sólo si para toda sucesión de conjuntos $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ tales que $A_\alpha \subset \alpha$ existe un $A \subset \kappa$ tal que el conjunto $\{\alpha < \kappa \mid A_\alpha = A \cap \alpha\}$ es estacionario en κ.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que κ es inefable y sea $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ una sucesión en las condiciones del enunciado. Consideramos en $\mathcal{P}\kappa$ el orden lexicográfico dado por

$$A \prec B \leftrightarrow \text{mín}(A \triangle B) \in B.$$

Se comprueba sin dificultad que se trata de una relación de orden total (si identificamos $\mathcal{P}\kappa$ con ${}^\kappa 2$, se trata del orden lexicográfico usual, es decir, es menor la función que vale 0 en el primer ordinal en que difiere de la otra). Sea $F : [\kappa]^2 \longrightarrow 2$ la partición dada por $F(\{\alpha, \beta\}) = 1 \leftrightarrow \alpha < \beta \wedge A_\alpha \preceq A_\beta$. Sea $H \subset \kappa$ un conjunto homogéneo estacionario.

Vamos a suponer que si $\alpha, \beta \in H$, $\alpha \leq \beta$, entonces $A_\alpha \preceq A_\beta$, pues el caso opuesto es similar.

Veamos por inducción sobre $\gamma < \kappa$ que existe un $\eta(\gamma)$ tal que $\gamma \in A_\alpha$ para todo $\alpha \geq \eta(\gamma)$ en H o bien $\gamma \notin A_\alpha$ para todo $\alpha \geq \eta(\gamma)$ en H.

Si esto es cierto para todo $\delta < \gamma$, entonces para todo $\alpha \geq \eta^* = \sup\limits_{\delta<\gamma} \eta(\delta)$ en H se cumple que $A_\alpha \cap \gamma$ no depende de α. Ahora, si $\gamma \in A_\alpha$ para todo $\alpha \geq \eta^*$ en H, basta tomar $\eta(\gamma) = \eta^*$, y si $\gamma \notin A_\eta$, para cierto $\eta' \geq \eta^*$ en H, basta tomar $\eta(\gamma) = \eta'$, pues si $\alpha > \eta'$ está en H, entonces $A_{\eta'} \preceq A_\alpha$ y tiene que ser $\gamma \notin A_\alpha$, porque de lo contrario γ sería el menor ordinal en que diferirían, y la diferencia debería ser justo la contraria.

Sea $C = \{\alpha < \kappa \mid \bigwedge \gamma < \alpha\ \eta(\gamma) < \alpha\}$, que es c.n.a. en κ, y sea $E = C \cap H$, que es estacionario en κ. Así, si $\alpha < \beta$ están en E, tenemos que $A_\alpha = A_\beta \cap \alpha$, pues si $\gamma < \alpha$, entonces $\gamma \in A_\alpha \leftrightarrow \gamma \in A_\beta$.

Basta tomar $A = \bigcup\limits_{\beta \in E} A_\beta$. Así, si $\alpha \in E$, tenemos $A \cap \alpha = \bigcup\limits_{\beta \in E} (A_\beta \cap \alpha) = A_\alpha$.

Supongamos ahora que κ cumple la condición del teorema y sea $F : [\kappa]^2 \longrightarrow 2$ una partición. Definimos $A_\alpha = \{\beta < \alpha \mid F(\{\beta, \alpha\}) = 1\}$. Sea $A \subset \kappa$ tal que

$$E = \{\alpha < \kappa \mid A_\alpha = A \cap \alpha\}$$

sea estacionario en κ. Claramente, $E \cap A$ es estacionario, o bien lo es $E \setminus A$. Llamemos H a uno de los dos que lo sea. Si $\beta < \alpha$ están en H, entonces $\alpha \in E$, luego $A_\alpha = A \cap \alpha$. Si β está en A, entonces $\beta \in A_\alpha$ y $F(\{\beta, \alpha\}) = 1$, Si β no está en A, entonces $\beta \notin A_\alpha$, luego $F(\{\beta, \alpha\}) = 0$. Por lo tanto, H es homogéneo para F. ■

Esta caracterización nos permite considerar una forma débil de inefabilidad:

Definición 2.17 Un cardinal no numerable κ es *casi inefable* si para toda sucesión de conjuntos $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ tales que $A_\alpha \subset \alpha$ existe un $A \subset \kappa$ tal que el conjunto $\{\alpha < \kappa \mid A_\alpha = A \cap \alpha\}$ tiene cardinal κ.

Obviamente todo cardinal inefable es casi inefable, y una mínima modificación de la segunda parte de la prueba del teorema anterior nos da que todo cardinal casi inefable es débilmente compacto (ahora E no es estacionario, sino que tiene cardinal κ, por lo que podemos elegir $H = E \cap A$ o bien $H = E \setminus A$ de modo que $|H| = \kappa$).

La distancia entre los cardinales inefables y los casi inefables se deduce del teorema siguiente:

Teorema 2.18 *Todo cardinal inefable es Π_2^1-indescriptible.*

DEMOSTRACIÓN: Sea κ un cardinal inefable y supongamos que

$$\bigwedge X \subset V_\kappa \bigvee Y \subset V_\kappa\ (V_\kappa, Z) \vDash \phi[X, Y],$$

donde la fórmula ϕ sólo tiene cuantificadores de primer orden. Consideremos el conjunto $C = \{\mu < \kappa \mid |V_\mu| = \mu\}$, que es c.n.a. en κ, pues κ es inaccesible. Basta probar que existe un $\mu \in C$ tal que

$$\bigwedge X \subset V_\mu \bigvee Y \subset V_\mu\ (V_\mu, Z \cap V_\mu) \vDash \phi(X, Y).$$

En caso contrario, para cada $\mu \in C$ existe un $X_\mu \subset V_\mu$ tal que

$$\bigwedge Y \subset V_\mu\ (V_\mu, Z \cap V_\mu) \vDash \neg\phi[X_\mu, Y].$$

Podemos tomar $F : V_\kappa \longrightarrow \kappa$ biyectiva tal que para todo $\mu \in C$ se cumpla $F[V_\mu] = \mu$. Así, si llamamos $A_\mu = F[X_\mu]$ para $\mu \in C$ y $A_\mu = \varnothing$ para $\mu \in \kappa \setminus C$, se cumple $A_\mu \subset \mu$, luego existe un $A \subset \kappa$ tal que, si llamamos $X = F^{-1}[A]$, entonces

$$E = \{\mu \in C \mid X_\mu = X \cap V_\mu\}$$

es estacionario en κ. Por hipótesis existe $Y \subset \kappa$ tal que $(V_\kappa, Z) \vDash \phi[X, Y]$.

Consideremos el lenguaje formal $\mathcal{L}^*$ (de primer orden) que resulta de añadir a $\mathcal{L}_R$ dos relatores monádicos más, y sea ϕ' la sentencia que resulta de sustituir en ϕ cada fórmula $x \in X$ o $y \in Y$ por el relator correspondiente. Es claro entonces que

$$(V_\kappa, Z, X, Y) \vDash \phi',$$

donde estamos considerando a V_κ como modelo de $\mathcal{L}^*$ interpretando los dos nuevos relatores como la pertenencia a X e Y, respectivamente.

Ahora consideramos el conjunto C' formado por los $\mu \in C$ tales que

$$(V_\mu, Z \cap V_\mu, X \cap V_\mu, Y \cap V_\mu) \prec (V_\kappa, Z, X, Y).$$

Una ligera variante del teorema de reflexión (para incorporar los tres relatores) prueba que C' es c.n.a. en κ, luego existe $\mu \in C' \cap E$, pero entonces

$$(V_\mu, Z \cap V_\mu, X_\mu, Y_\mu) \vDash \phi',$$

lo que a su vez equivale a que $(V_\mu, Z \cap V_\mu) \vDash \phi[X_\mu, Y_\mu]$, contradicción. ■

Como consecuencia:

Teorema 2.19 *Si κ es inefable, entonces $\{\mu < \kappa \mid \mu$ es casi inefable$\}$ es estacionario en κ.*

Demostración: Un cardinal $\kappa > \aleph_0$ es casi inefable si y sólo si

$$\bigwedge F \subset V_\kappa \bigvee A \subset V_\kappa \bigvee G \subset V_\kappa \ V_\kappa \vDash (F : \Omega \longrightarrow V \wedge \bigwedge \alpha \in \Omega \ F(\alpha) \subset \alpha \rightarrow$$

$$A \subset \Omega \wedge G : \Omega \longrightarrow \Omega \text{ inyectiva} \wedge \bigwedge \alpha \in \Omega \ F(G(\alpha)) = A \cap G(\alpha)).$$

Es fácil ver que los dos cuantificadores $\bigvee A \bigvee G$ se pueden contraer en uno solo, luego tenemos que

$$\kappa \text{ es casi inefable} \leftrightarrow \kappa > \aleph_0 \wedge V_\kappa \vDash \phi,$$

para cierta sentencia de tipo Π^1_2. Por lo tanto, si κ es inefable, al ser Π^1_2-indescriptible, existe un conjunto estacionario $E \subset \kappa$ de ordinales tales que $V_\mu \vDash \phi$, cuya intersección con el c.n.a. formado por los cardinales no numerables es un conjunto estacionario en κ de cardinales casi inefables. ■

De la prueba del teorema anterior se desprende que el mínimo cardinal casi inefable es Π^1_2-descriptible (pero Σ^1_2-indescriptible, porque es débilmente compacto).

En particular tenemos que por debajo de un cardinal inefable hay un conjunto estacionario de cardinales débilmente compactos. Como la compacidad débil, ambas propiedades son compatibles con el axioma de constructibilidad:

Teorema 2.20 *Si κ es un cardinal (casi) inefable, entonces es (casi) inefable^L.*

Demostración: Sabemos que κ es débilmente compacto^L, luego en particular es un cardinal regular^L. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa} \in L$ tal que $A_\alpha \subset \alpha$. Entonces existe un $A \subset \kappa$ tal que $E = \{\alpha < \kappa \mid A_\alpha = A \cap \alpha\}$ sea estacionario (o tenga cardinal κ).

Entonces, si $\beta \in \kappa$ y $\beta < \alpha \in E$, tenemos que

$$A \cap \alpha = A \cap \beta \cap \alpha = A_\beta \cap \alpha \in L,$$

luego por 2.3 se cumple que $A \in L$, de donde a su vez $E \in L$. Si E es estacionario, entonces es estacionario^L, y si tiene cardinal κ, lo mismo sucede en L, porque esto equivale a ser no acotado en κ. Por lo tanto, κ cumple en L la definición de cardinal (casi) inefable. ■

Ahora podemos mejorar considerablemente 1.4:

Teorema 2.21 *Si κ es el punto crítico de una inmersión elemental no trivial $j : M \longrightarrow N$ entre modelos transitivos de* ZFC *y $\mathcal{P}^N\kappa = \mathcal{P}^M\kappa$, entonces κ es inefable^M.*

Demostración: Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa} \in M$ tal que $A_\alpha \subset \alpha$. Entonces tenemos que $j(A_\alpha) \subset j(\alpha) = \alpha$, luego $A_\alpha = j(A_\alpha) \cap \kappa = j(A_\alpha)$.

A su vez, esto implica que $j(\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}) = \{A_\alpha\}_{\alpha<j(\kappa)}$, en el sentido de que se trata de una sucesión de longitud mayor, pero cuyos primeros términos son los de la sucesión original, pues como $(\alpha, A_\alpha) \in \{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$, al tomar imágenes por j queda que $(\alpha, A_\alpha) \in j(\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa})$.

Llamemos $A = A_\kappa \subset \kappa$ y $E = \{\alpha < \kappa \mid A \cap \alpha = A_\alpha\}$. Se cumple entonces que $A,\, E \in \mathcal{P}^N\kappa = \mathcal{P}^M\kappa$.

Como $j(E) = \{\alpha < j(\kappa) \mid j(A) \cap \alpha = A_\alpha\}$, resulta que $\kappa \in j(E)$, pues ciertamente $j(A) \cap \kappa = A = A_\kappa$.

Ahora observamos que E es estacionario^M, pues si $C \in M$ es c.n.a. en κ, se cumple que $j(C)$ es c.n.a. en $j(\kappa)$ y, como $j(C) \cap \kappa = C$, vemos que $j(C) \cap \kappa$ no está acotado en κ, luego $\kappa \in j(C)$, luego $j(C \cap E) = j(C) \cap j(E) \neq \varnothing$, luego $C \cap E \neq \varnothing$. ■

Nota En el caso en que $j : M \longrightarrow M$ es una inmersión elemental no trivial entre modelos transitivos de ZFC, tenemos que su punto crítico κ es a la vez inefable e indescriptible en M (teorema 2.14). Notemos que un cardinal inefable e indescriptible deja por debajo un conjunto estacionario de cardinales inefables. En efecto, es fácil encontrar una sentencia ϕ (del orden adecuado) tal que un cardinal κ es inefable si y sólo si $V_\kappa \vDash \phi$. Si además es indescriptible, existe un conjunto estacionario de ordinales $\mu < \kappa$ que cumplen $V_\mu \vDash \phi$, por lo que son todos inefables. (Notemos que el argumento es general y se aplica a cualquier clase de cardinales κ definibles mediante una sentencia en V_κ.) ■

Más delicada, como su nombre indica, es la propiedad siguiente:

Definición 2.22 Un cardinal no numerable κ es *sutil* si para toda sucesión $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ de conjuntos tales que $A_\alpha \subset \alpha$ y para todo c.n.a. $C \subset \kappa$ existen $\alpha < \beta$ en C tales que $A_\alpha = A_\beta \cap \alpha$.

En primer lugar:

Teorema 2.23 *Todo cardinal casi inefable es sutil.*

Demostración: Sea κ un cardinal débilmente inefable y sean $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ y $C \subset \kappa$ según la definición anterior. Definimos como sigue otra sucesión $\{A^*_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$. Si $\alpha < \min C$, tomamos $A^*_\alpha = \varnothing$, y en caso contrario $A^*_\alpha = A_\eta$, donde $\eta = \sup(C \cap (\alpha + 1))$. De este modo $\eta \in C$ y si $\alpha \in C$ entonces $\eta = \alpha$.

Como κ es casi inefable, existe $A^* \subset \kappa$ tal que

$$E = \{\alpha < \kappa \mid A^*_\alpha = A^* \cap \alpha\}$$

tiene cardinal κ. Como ni E ni C están acotados en κ, podemos tomar ordinales $\min C < \delta < \gamma < \eta$ de modo que $\delta,\ \eta \in E$ y $\gamma \in C$. Así, si llamamos $\alpha = \sup(C \cap (\delta + 1))$ y $\beta = \sup(C \cap (\eta + 1))$, tenemos que $\alpha \leq \delta < \gamma \leq \beta \leq \eta$, con $\alpha < \beta$ en C, luego $A^*_\delta = A_\alpha$ y $A^*_\eta = A_\beta$. Además,

$$A_\beta \cap \alpha = A^*_\eta \cap \alpha = A^* \cap \eta \cap \alpha = A^* \cap \delta \cap \alpha = A^*_\delta \cap \alpha = A_\alpha \cap \alpha. \quad ■$$

Ahora podemos aplicar de nuevo el argumento del teorema 2.19:

Teorema 2.24 *Si κ es casi inefable, entonces $\{\mu < \kappa \mid \mu$ es sutil $\}$ es estacionario en κ.*

Demostración: Basta observar que los cardinales sutiles tienen una descripción Π_1^1:

$$\kappa \text{ es sutil} \leftrightarrow \bigwedge F \subset V_\kappa \bigwedge C \subset V_\kappa \; V_\kappa \vDash (F : F : \Omega \longrightarrow V \wedge \bigwedge \alpha \in \Omega \; F(\alpha) \subset \alpha$$

$$\wedge \; C \text{ es c.n.a. en } \Omega \rightarrow \bigvee \alpha\beta \in C(\alpha < \beta \wedge F(\alpha) = G(\beta) \cap \alpha)).$$

Nuevamente, los dos cuantificadores de segundo orden pueden contraerse en uno solo y ahora basta argumentar como en 2.19. ■

Ahora bien, el argumento anterior muestra que el mínimo cardinal sutil es Π_1^1-descriptible, luego un cardinal sutil no es necesariamente débilmente compacto. No obstante, los cardinales sutiles son cardinales grandes:

Teorema 2.25 *Todo cardinal sutil es inaccesible.*

Demostración: Sea κ un cardinal sutil. Por definición no es numerable. Veamos que es un límite fuerte. Supongamos, por el contrario, que existe $\mu < \kappa$ tal que $2^\mu \geq \kappa$. Entonces existe $f : \kappa \setminus \mu \longrightarrow \mathcal{P}\mu$ inyectiva. Definamos $A_\alpha = f(\alpha)$ para $\alpha \in \kappa \setminus \mu$ y $A_\alpha = \varnothing$ si $\alpha < \mu$. Así $A_\alpha \subset \alpha$. Sea $C = \kappa \setminus \mu$, que es c.n.a. Entonces tienen que existir $\alpha < \beta$ en C tales que $A_\alpha = A_\beta \cap \beta = A_\beta$, contradicción.

Supongamos ahora que $\mu = \operatorname{cf} \kappa < \kappa$ y sea $f : \mu \longrightarrow \kappa$ cofinal creciente. Podemos suponer que $f(0) > \mu$. Sea $C = f[\mu] \subset \kappa \setminus \mu$, que es c.n.a. en μ.

Para $\mu \leq \alpha < \kappa$ definimos $A_\alpha = \{\delta < \mu \mid f(\delta) < \alpha\}$ y $A_\alpha = \varnothing$ para $\alpha < \mu$. De este modo $A_\alpha \subset \alpha$, luego deben existir $f(\alpha) < f(\beta)$ en C tales que

$$A_{f(\alpha)} = A_{f(\beta)} \cap f(\alpha) = A_{f(\beta)},$$

pero esto es imposible, porque $\alpha \in A_{f(\beta)} \setminus A_{f(\alpha)}$. ■

Podría parecer que con los cardinales sutiles hemos descendido drásticamente en la escala de los cardinales grandes, por debajo de los cardinales débilmente compactos, pero no es así. En cuanto a consistencia, los cardinales sutiles siguen estando por encima de los débilmente compactos, e incluso por encima de los indescriptibles:

Teorema 2.26 *Si κ es sutil, entonces $\{\mu < \kappa \mid \mu$ es indescriptible $\}$ es estacionario en κ.*

Demostración: Sea $C \subset \kappa$ un c.n.a. y sea $C' = \{\mu < \kappa \mid |V_\mu| = \mu\}$, que también es c.n.a. en κ, porque κ es inaccesible. Basta probar que existe un $\mu \in C \cap C'$ indescriptible. No perdemos generalidad si suponemos que $C \subset C'$.

En caso contrario, para cada $\mu \in C$ existe $X_\mu \subset V_\mu$ y una sentencia ϕ_μ (de cualquier tipo Π_m^n) de modo que $(V_\mu, X_\mu) \vDash \phi$ pero, para todo $\nu < \mu$ se cumple $(V_\nu, X_\mu \cap V_\nu) \vDash \neg\phi_\mu$.

Llamamos $A_\mu = \{(0, \phi_\mu)\} \cup (\{1\} \times X_\mu) \subset V_\mu$ (pues podemos considerar que todas las fórmulas son elementos de V_ω).

Como en 2.18, podemos tomar $F : V_\kappa \longrightarrow \kappa$ biyectiva tal que para todo $\mu \in C$ se cumpla $F[V_\mu] = \mu$. Así, como $F[A_\mu] \subset \mu$, la sutileza de κ nos da que existen $\nu < \mu$ en C tales que $A_\nu = A_\mu \cap V_\nu$, pero esto implica que $\phi_\nu = \phi_\mu$ y que $X_\nu = X_\mu \cap V_\nu$. Por consiguiente, como tenemos que $(V_\nu, X_\nu) \vDash \phi_\nu$, también se cumple que $(X_\nu, X_\mu \cap V_\nu) \vDash \phi_\mu$, contradicción. ■

En particular, si κ es sutil tiene un conjunto estacionario de cardinales débilmente compactos por debajo de sí mismo, y como éstos son de Mahlo, 2-Mahlo, etc., lo mismo vale para los cardinales sutiles.

Observemos que, trivialmente, si κ es sutil entonces es sutil en L (y en cualquier otro modelo transitivo de ZFC que lo contenga).

A la vista del parecido entre el enunciado del teorema 2.16 y la fórmula $\Diamond_\kappa$, resulta natural preguntarse si un cardinal inefable cumple $\Diamond_\kappa$. De hecho, esto es cierto para los cardinales sutiles:

Teorema 2.27 *Si κ es un cardinal sutil entonces se cumple $\Diamond_\kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Vamos a definir recurrentemente una sucesión de pares $\{(A_\alpha, C_\alpha)\}_{\alpha<\kappa}$ de modo que $A_\alpha, C_\alpha \subset \alpha$. Si $\alpha = 0$ o α es un ordinal sucesor, definimos $A_\alpha = C_\alpha = \varnothing$. Consideremos ahora un ordinal límite $\lambda < \kappa$ y supongamos definidos (A_δ, C_δ) para todo $\delta < \lambda$.

Si existe un $A \subset \lambda$ y un c.n.a. $C \subset \lambda$ formado por ordinales límite de modo que $\bigwedge \delta \in C\ A \cap \delta \neq A_\delta$, tomamos como (A_λ, C_λ) cualquier par que cumpla esta propiedad, y en caso contrario $A_\lambda = C_\lambda = \varnothing$.

Vamos a probar que $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ es una sucesión $\Diamond_\kappa$. Supongamos por el contrario que existe un $A \subset \kappa$ y un c.n.a. $C \subset \kappa$ tal que $\bigwedge \alpha \in C\ A \cap \alpha \neq A_\alpha$. Podemos suponer que C está formado por ordinales límite. Sea $C' \subset C$ el c.n.a. formado por los puntos de acumulación de C, es decir, los elementos de C que no tienen inmediato anterior en C.

De este modo, si $\lambda \in C'$, tenemos que $C \cap \lambda$ es c.n.a. en λ y

$$\bigwedge \delta \in C \cap \lambda\ (A \cap \lambda) \cap \delta = A \cap \delta \neq A_\delta.$$

Así pues, el par $(A \cap \lambda, C \cap \lambda)$ implica que en la definición de (A_λ, C_λ) se da el caso no trivial, por lo que también se cumple que C_λ es c.n.a. en λ y $\bigwedge \delta \in C_\lambda\ A_\lambda \cap \delta \neq A_\delta$.

Tendremos una contradicción si probamos que existen $\delta < \lambda$ en C' tales que $A_\lambda \cap \delta = A_\delta$ y $C_\lambda \cap \delta = C_\delta$, pues la segunda condición implica que $\delta \in C_\lambda$.

En principio, el hecho de que κ es sutil nos da que existen $\delta < \lambda$ en C' que cumplen cualquiera de las dos condiciones, pero no las dos a la vez. Ahora bien, podemos tomar $F : \kappa \times \kappa \longrightarrow \kappa$ biyectiva con la propiedad de que si $\lambda \in C'$ entonces $f[\lambda \times \lambda] \subset \lambda$, y entonces basta aplicar que κ es sutil a la familia $\{f[A_\alpha \times C_\alpha]\}_{\alpha<\kappa}$. ■

Capítulo III

Los indiscernibles de Silver

Estudiamos ahora la propiedad más baja en la escala de los cardinales grandes que contradice al axioma de constructibilidad. No es en sí misma la existencia de un cardinal grande (de hecho, no implica que exista ningún cardinal grande), pero, en cuanto a consistencia, implica que en L existe una clase propia de cardinales grandes mayores que todos los que hemos estudiado en el capítulo precedente. Esta propiedad puede enunciarse de formas muy diversas, una de las cuales es la existencia de una inmersión elemental no trivial $j : L \longrightarrow L$. Como comentamos al final del capítulo I, esto equivale a la existencia de un ultrafiltro iterable, o simplemente 2-iterable sobre L, e implica que $V \neq L$.

3.1 Indiscernibles en un modelo

El concepto central de todo este capítulo va a ser el de "conjunto de indiscernibles en un modelo", que introducimos a continuación:

Definición 3.1 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje formal, sea M un modelo de $\mathcal{L}$ y sea $(I, \leq)$ un conjunto infinito totalmente ordenado tal que $I \subset M$. Diremos que I es un conjunto de *indiscernibles* para M si para toda fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{L}$ y todas las sucesiones finitas $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$, $\beta_1 < \cdots < \beta_n$ de elementos de I se cumple

$$M \vDash \phi[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \leftrightarrow M \vDash \phi[\beta_1, \ldots, \beta_n].$$

En otras palabras, I es un conjunto de indiscernibles para M si sus elementos no se distinguen por ninguna propiedad expresable en M salvo el orden (de modo que sí que puede haber fórmulas tales que $M \vDash (\phi[\alpha, \beta] \wedge \neg\phi[\beta, \alpha])$).

Básicamente nos van a interesar modelos transitivos de ZFC, o ZFC$-$AP con conjuntos de ordinales indiscernibles, pero hasta que hayamos establecido los resultados básicos tendremos que trabajar a un nivel mayor de generalidad.

En realidad tenemos probado un resultado que implica la existencia de modelos con indiscernibles, pero hasta el momento no hemos destacado ese hecho. Se trata del teorema 1.34:

Teorema 3.2 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC−AP *(o de* ZFC *si M es una clase propia), sea κ un cardinal^M, sea α un ordinal infinito y sea D un ultrafiltro $\alpha+1$-iterable en $\mathcal{P}^M\kappa$. Entonces el conjunto de puntos críticos $I = \{\kappa_\delta \mid \delta < \alpha\}$ es un conjunto de indiscernibles para* $\mathrm{Ult}_D^\alpha(M)$.

DEMOSTRACIÓN: Es una consecuencia inmediata del teorema 1.34, pues nos da que, para toda fórmula $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ y toda sucesión $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \alpha$ se cumple que

$$\mathrm{Ult}_D^\alpha(M) \vDash \phi[\kappa_{\alpha_1},\ldots,\kappa_{\alpha_n}] \leftrightarrow$$

$$(M,D) \vDash \{(\delta_1,\ldots,\delta_n) \in [\kappa]^n \mid \phi(\delta_1,\ldots,\delta_n)\} \in D^n,$$

y la segunda condición no depende de la elección de $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$. ■

De hecho, si empleamos 1.34 en toda su potencia, lo que obtenemos es que I es un conjunto de indiscernibles para la ultrapotencia considerada como modelo del lenguaje de la teoría de conjuntos extendido con una constante c_x para cada $x \in M$, que se interpreta como $i_{0\alpha}(x)$.

Enunciamos ahora el caso particular de este teorema que realmente nos va a hacer falta:

Teorema 3.3 *Si $x \subset V_\omega$, M es un modelo transitivo de* ZFC−AP, *κ es un cardinal infinito en M y D es un ultrafiltro en $\mathcal{P}^M\kappa$ iterable sobre M, entonces existe un ordinal límite λ tal que $L_\lambda[x]$ contiene un conjunto no numerable $I \subset \lambda$ de indiscernibles.*

DEMOSTRACIÓN: Aplicamos el teorema anterior a $N = \mathrm{Ult}_D^{\omega_1+1}(M)$, donde tenemos el conjunto de indiscernibles $\{\kappa_\delta \mid \delta \leq \omega_1\}$. Se cumple entonces que $I = \{\kappa_\delta \mid \delta < \omega_1\}$ es un conjunto de indiscernibles para $L_{\kappa_{\omega_1}}[x] \subset N$. En efecto, dada cualquier fórmula $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ y ordinales $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \omega_1$, $\beta_1 < \cdots < \beta_n < \omega_1$, tenemos que

$$L_{\kappa_{\omega_1}}[x] \vDash \phi[\kappa_{\alpha_1},\ldots,\kappa_{\alpha_n}] \leftrightarrow$$

$$N \vDash L_{\kappa_{\omega_1}}[i_{0,\omega_1+1}(x)] \vDash i_{0,\omega_1+1}(\phi)[\kappa_{\alpha_1},\ldots,\kappa_{\alpha_n}] \leftrightarrow$$

$$N \vDash L_{\kappa_{\omega_1}}[i_{0,\omega_1+1}(x)] \vDash i_{0,\omega_1+1}(\phi)[\kappa_{\beta_1},\ldots,\kappa_{\beta_n}] \leftrightarrow$$

$$L_{\kappa_{\omega_1}}[x] \vDash \phi[\kappa_{\beta_1},\ldots,\kappa_{\beta_n}],$$

donde hemos usado que i_{0,ω_1+1} fija a x y a ϕ (porque fija a los elementos de V_κ) y la observación precedente al teorema. ■

Aunque no es trivial en absoluto, se cumple el recíproco del teorema anterior: si existe un modelo $L_\lambda[x]$ con un conjunto no numerable de indiscernibles, entonces existe un ultrafiltro iterable sobre $L[x]$, y ésta es sólo una de las muchas potentes consecuencias que podemos extraer de tal hipótesis. Sin embargo, para estar en condiciones de hacerlo necesitamos desarrollar antes una sofisticada teoría cuya parte más técnica concentramos en la sección siguiente.

3.2 Conjuntos de Ehrenfeucht-Mostowski

Aunque necesitaremos trabajar con modelos más generales, el propósito de esta sección es desarrollar una teoría sobre los modelos de la forma $L_\lambda[x]$, donde λ es un ordinal límite y $x \subset V_\omega$. Más concretamente, queremos analizar el impacto que tiene la existencia en uno de estos modelos de un conjunto de indiscernibles suficientemente grande (bastará con que sea no numerable).

La característica principal de estos modelos que vamos a aprovechar es que (según [PC 3.12]) todo modelo transitivo de $\mathcal{L}_R$ elementalmente equivalente a un $L_\lambda[x]$ es un $L_{\lambda'}[x]$, para cierto ordinal λ'. Al exigir que $x \subset V_\omega$ tenemos una propiedad más fuerte que vamos a justificar a continuación.

Observemos en primer lugar que si $x \subset V_\omega = L_\omega[x]$, resulta que $x \in L_{\omega+1}[x]$, pues

$$x = \{u \in L_{\omega+1}[x] \mid L_\omega[x] \vDash R[u]\} \in \mathcal{D}_A(L_\omega[x]) = L_{\omega+1}[x].$$

Por consiguiente, si $\lambda > \omega$, tenemos que $x \in L_\lambda[x]$.

En general, si partimos de un modelo $L_\lambda[x]$ de modo que $x \in L_\lambda[x]$ (pero sin suponer, en principio, que $x \subset V_\omega$), el teorema [PC 3.11] nos dice que $L[x]$ es definible en $L_\lambda[x]$, de manera que[1]

$$L_\lambda[x] \vDash V = L[[x]].$$

Si no queremos dejar variables libres, lo máximo que podemos decir es que

$$L_\lambda[x] \vDash \bigvee z\,(\bigwedge u(u \in z \leftrightarrow Ru) \wedge V = L[z]).$$

Así, si (M, x') es un modelo transitivo de $\mathcal{L}_R$ elementalmente equivalente a $L_\lambda[x]$ (donde podemos suponer que $x' \subset M$), también cumplirá esta sentencia, es decir, se cumple que $x' \in M$ y $(V = L[x'])^M$, de donde el teorema [PC 3.11] nos permite concluir que $M = L_{\lambda'}[x']$, para cierto λ'.

Vemos pues que, en principio, al pasar de $L_\lambda[x]$ a un modelo transitivo elementalmente equivalente, cambiamos de λ y cambiamos de x. Sin embargo, el teorema siguiente nos dice que si $x \subset V_\omega$ entonces no cambiamos de x, sino que x está determinado por las sentencias de $\mathcal{L}_R$ verdaderas en $L_\lambda[x]$:

Teorema 3.4 *Sea $\lambda > \omega$ un ordinal límite, sea $x \subset V_\omega$, sea M un conjunto transitivo y $a \subset M$ un conjunto arbitrario. Supongamos que $(M, a) \equiv L_\lambda[x]$. Entonces $a = x$ y $M = L_{\lambda'}[x]$, donde $\lambda' = \Omega^M$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\phi(f, Y, \alpha)$ la fórmula del teorema [PC 3.7], de modo que, para $\lambda > \omega$ y $\alpha < \lambda$,

$$Y = L_\alpha[x] \leftrightarrow L_\lambda[x] \vDash \bigvee f\,\phi(f)[Y, \alpha].$$

[1]Notemos los dobles corchetes: $L_\lambda[x]$ satisface la fórmula $V = L[z]$ cuando la variable z se interpreta como x, lo cual solemos representar poniendo $[x]$ en el lugar de z.

(Hemos eliminado la variable A porque consideramos la fórmula como fórmula de $\mathcal{L}_R$, con lo que la pertenencia a A se expresa mediante el relator R). Como

$$L_\lambda[x] \vDash \bigvee fY\alpha(\alpha = \omega \wedge \phi(f, Y, \alpha) \wedge \bigwedge y(Ry \to y \in Y)),$$

el modelo (M, a) cumple lo mismo, lo que se traduce en que[2] $V_\omega = L_\omega[a] \subset M$ y $a \subset V_\omega$.

La clave de la prueba es que para cada $u \in V_\omega$ existe $\alpha_u(z) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_0)$ con z como única variable libre tal que si N es un conjunto transitivo y $v \in N$, entonces $N \vDash \alpha_u[v] \leftrightarrow v = u$. En efecto, si $u = \varnothing$ sirve $\alpha_\varnothing(z) = \bigwedge u\ y \notin z$. En caso contrario, si el resultado es cierto para los elementos de $u = \{a_1, \ldots, a_n\}$, entonces sirve

$$\alpha_u(z) = \bigvee y_1 \cdots y_n(\alpha_{a_1}(y_1) \wedge \cdots \wedge \alpha_{a_n}(y_n) \wedge y_1 \in z \wedge \cdots \wedge y_n \in z$$

$$\wedge \bigwedge w(w \in z \to w = y_1 \vee \cdots \vee w = y_n)).$$

Así, si $u \in x$ entonces $L_\lambda[x] \vDash \bigvee y(\alpha_u(y) \wedge Ry)$, luego (M, a) cumple lo mismo, lo que implica que $u \in a$. La inclusión contraria se prueba igualmente, con lo que $a = x$.

Por el teorema [PC 3.7] tenemos que

$$L_\lambda[x] \vDash \bigwedge\alpha\bigvee fY\, \phi(f, Y, \alpha) \wedge \bigwedge u\bigvee fY\alpha(\phi(f, Y, \alpha) \wedge u \in Y).$$

El hecho de que (M, x) cumpla esto mismo se traduce en que para todo ordinal $\alpha < \lambda'$ se cumple $L_\alpha[x] \in M$ y para todo $u \in M$ existe un $\alpha < \lambda'$ tal que $u \in L_\alpha[x]$, pero esto quiere decir que $M = L_{\lambda'}[x]$. ■

Por último, también será relevante que los modelos $L_\lambda[x]$ tienen funciones de Skolem definibles (véase [PC 3.27]).

El desarrollo de esta sección es bastante técnico, pero la idea es que, aplicando el teorema de compacidad a un modelo $L_\lambda[x]$ con un conjunto de indiscernibles, podemos obtener otros modelos similares cuyos conjuntos de indiscernibles tengan cualquier ordinal prefijado, y a su vez podremos combinar todos estos modelos para obtener una clase de indiscernibles en $L[x]$. De aquí se deducirán muchas consecuencias.

Puesto que parte del trabajo que hemos de realizar tendrá que hacerse en modelos arbitrarios, no necesariamente naturales, conviene que trabajemos desde el principio en este contexto, aunque, según hemos explicado, el punto de partida natural serían los modelos $L_\lambda[x]$. Más precisamente, trabajaremos con modelos de $\mathcal{L}_R$ elementalmente equivalentes a un modelo $L_\lambda[x]$.

Definición 3.5 Sea $x \subset L_\omega$ y $\lambda > \omega$ un ordinal límite. Sea M un modelo de $\mathcal{L}_R$ elementalmente equivalente a $L_\lambda[x]$. Llamaremos

$$\Omega^M \vDash \{a \in M \mid M \vDash [a] \text{ es un ordinal}\}.$$

[2]En principio obtenemos que $\bigvee Yf \in M\ \phi(f, Y, \omega, a)$, lo que a su vez implica que $Y = L_\omega[a]$.

Es fácil ver que Ω^M está totalmente ordenado (aunque no necesariamente bien ordenado) por la relación $M(\in)$. Escribiremos simplemente $a < b$ en lugar de $M(\in)(a, b)$ para los elementos a, $b \in \Omega^M$.

Cuando hablemos de un conjunto I de indiscernibles para M nos referiremos a un conjunto $I \subset \Omega^M$ con respecto a la relación de orden en Ω^M que acabamos de especificar.

Si I es un conjunto de indiscernibles para M, llamaremos $\Sigma(M, I)$ al conjunto de todas las fórmulas $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_R)$ tales que $M \vDash \phi[a_1, \ldots, a_n]$ para ciertos (o, equivalentemente, para cualesquiera) $a_1 < \cdots < a_n \in I$. Se entiende que, en particular, $\Sigma(M, I)$ contiene todas las sentencias de $\mathcal{L}_R$ verdaderas en M.

Un conjunto $\Sigma \subset \mathrm{Form}(\mathcal{L}_R)$ es un *conjunto de Ehrenfeucht-Mostowski* para $x \subset V_\omega$ (más brevemente, de E.M.) si existe un modelo M de $\mathcal{L}_R$ elementalmente equivalente a $L_\lambda[x]$, para cierto ordinal límite $\lambda > \omega$, con un conjunto de indiscernibles I tal que $\Sigma = \Sigma(M, I)$.

El próximo teorema es esencialmente un caso particular de un teorema de la teoría de modelos conocido como teorema de Ehrenfeucht-Mostowski.

Teorema 3.6 *Sea $x \subset V_\omega$, sea Σ un conjunto de E.M. para x y $\alpha \geq \omega$. Entonces existen un modelo M de $\mathcal{L}_R$ y un conjunto I de indiscernibles para M tales que*

a) $\Sigma = \Sigma(M, I)$,

b) $\mathrm{ord}(I, \leq) = \alpha$,

c) $M = N(I)$.

Además (M, I) es único salvo isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN: Notemos ante todo que la propiedad a) implica que M es elementalmente equivalente a un modelo $L_\lambda[x]$, pues Σ contiene todas las sentencias verdaderas en uno de estos modelos. En particular, M tiene funciones de Skolem definibles y el núcleo de Skolem que aparece en c) ha de entenderse calculado respecto a estas funciones.

Veamos primero la unicidad. Supongamos que (M, I) y (N, J) cumplen las propiedades a) y c), aunque no necesariamente b), y que existe una aplicación $\pi : I \longrightarrow J$ estrictamente creciente.

Todo $a \in M$ es de la forma $a = M(t)[a_1, \ldots, a_n]$, donde t es un término de Skolem y $a_1 < \cdots < a_n \in I$. Definimos

$$\bar{\pi}(a) = N(t)[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)].$$

Esto no depende de la elección de t ni de la de los indiscernibles, pues si se cumple $a = M(t_1)[a_1, \ldots, a_n] = M(t_2)[b_1, \ldots, b_m]$, donde t_1 y t_2 son términos de Skolem y $a_1 < \cdots < a_n$, $b_1 < \cdots < b_m \in I$, consideramos las fórmulas de $\mathcal{L}_R$

ψ_{t_1} y ψ_{t_2} que definen a los términos de Skolem, es decir, tales que las igualdades anteriores equivalen a

$$M \vDash \psi_{t_1}[a, a_1, \ldots, a_n] \quad \text{y} \quad M \vDash \psi_{t_2}[a, b_1, \ldots, b_m].$$

Llamamos $c_1 < \cdots < c_r$ a los mismos $a_1 < \cdots < a_n$, $b_1 < \cdots < b_m$ ordenados y $\phi(z_1, \ldots, z_r)$ a la fórmula

$$\bigvee x\, (\psi_{t_1}(x, x_1, \ldots, x_n) \wedge \psi_{t_2}(x, y_1, \ldots, y_m))$$

con la ordenación correspondiente de las variables para que $M \vDash \phi[c_1, \ldots, c_r]$ sea equivalente a

$$M \vDash t_1[a_1, \ldots, a_n] = t_2[b_1, \ldots, b_m].$$

Puesto que, $M \vDash \phi[c_1, \ldots, c_r]$, tenemos que $\phi \in \Sigma(M, I) = \Sigma = \Sigma(N, J)$. Como π es creciente, $\pi(c_1) < \cdots < \pi(c_r)$, luego $N \vDash \phi[\pi(c_1), \ldots, \pi(c_r)]$, pero, por la uniformidad de la definición de los términos de Skolem, esto equivale a

$$N(t_1)[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)] = N(t_2)(\pi(b_1), \ldots, \pi(b_m)).$$

Así tenemos $\bar{\pi} : M \longrightarrow N$ que claramente extiende a π, pues $t(x) = x$ es un término de Skolem y así, si $a \in I$, se cumple que

$$\bar{\pi}(a) = \bar{\pi}(M(x)[a]) = N(x)[\pi(a)] = \pi(a).$$

Se cumple que $\bar{\pi}$ es una inmersión elemental, pues si $u_1, \ldots, u_n \in M$ y $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_R)$, entonces existen $a_1 < \cdots < a_m \in I$ de manera que $u_i = M(t_i)[a_1, \ldots, a_m]$, para ciertos términos de Skolem t_i. Por lo tanto,

$$M \vDash \phi[u_1, \ldots, u_n] \to M \vDash \phi(t_1, \ldots, t_n)[a_1, \ldots, a_m].$$

La fórmula $\phi(t_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, t_n(x_1, \ldots, x_m))$ es uniformemente equivalente a una fórmula $\psi(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_R)$ (donde uniformemente equivalente quiere decir que, tanto M como N, cumplen una si y sólo si cumplen la otra, con una misma interpretación de las variables).

Tenemos, pues que $M \vDash \psi[a_1, \ldots, a_m]$, luego $\psi \in \Sigma(M, I) = \Sigma = \Sigma(N, J)$, luego

$$N \vDash \psi[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_m)] \to N \vDash \phi(t_1, \ldots, t_n)[\pi(a_1), \ldots, \pi(a_m)]$$

$$\to N \vDash \phi[\bar{\pi}(u_1), \ldots, \bar{\pi}(u_n)].$$

Si suponemos que (M, I) y (N, J) cumplen b), entonces existe una semejanza $\pi : I \longrightarrow J$ y se comprueba inmediatamente que $\bar{\pi}$ es biyectiva, luego es un isomorfismo entre M y N que se restringe a una semejanza entre I y J. Esto es la unicidad que afirma el enunciado.

Veamos ahora la existencia. Como Σ es un conjunto de E.M., existe un modelo (M_0, I_0) tal que $\Sigma = \Sigma(M_0, I_0)$. Sea $\mathcal{L}'$ el lenguaje formal que resulta de añadir a $\mathcal{L}_R$ una familia de constantes $\{c_\beta\}_{\beta<\alpha}$. Sea Γ el conjunto formado por las siguientes sentencias de $\mathcal{L}'$:

"c_β es un ordinal"	para todo $\beta < \alpha$,
"$c_\beta < c_\gamma$"	para $\beta < \gamma < \alpha$,
$\phi(c_{\beta_1}, \ldots, c_{\beta_n})$	para $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in \Sigma$ y $\beta_1 < \cdots < \beta_n < \alpha$.

Veamos que Γ es finitamente consistente. Tomamos $\Delta \subset \Gamma$ finito y sean $\beta_1 < \cdots < \beta_n < \alpha$ tales que $c_{\beta_1}, \ldots, c_{\beta_n}$ sean las únicas constantes que aparecen en las fórmulas de Δ y sea $\sigma(c_{\beta_1}, \ldots, c_{\beta_n})$ la conjunción de todas las sentencias de Δ. Como I_0 es infinito existen $a_1 < \cdots < a_n \in I_0$. Podemos convertir a M_0 en un modelo de $\mathcal{L}'$ haciendo $M_0(c_{\beta_i}) = a_i$ e interpretando las demás constantes arbitrariamente. Es claro que así $M_0 \vDash \Delta$.

Por el teorema de compacidad [TC 10.34], sabemos que Γ tiene un modelo M. Para cada $\beta < \alpha$ sea $i_\beta = M(c_\beta)$ y sea $I = \{i_\beta \mid \beta < \alpha\}$. Claramente $I \subset \Omega^M$ y $\operatorname{ord}(I, \leq) = \alpha$.

Veamos que para toda fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ y todos los $\beta_1 < \cdots < \beta_n < \alpha$ se cumple

$$M \vDash \phi[i_{\beta_1}, \ldots, i_{\beta_n}] \leftrightarrow \phi \in \Sigma.$$

Si $\phi \in \Sigma$, entonces $M \vDash \phi(c_{\beta_1}, \ldots, c_{\beta_n})$, o sea, $M \vDash \phi[i_{\beta_1}, \ldots, i_{\beta_n}]$.

Si $\phi \notin \Sigma$, entonces $\neg M \vDash \phi[a_1, \ldots, a_n]$, para ciertos $a_1 < \cdots < a_n \in I_0$, luego se cumple $M_0 \vDash \neg\phi[a_1, \ldots, a_n]$, luego $\neg\phi \in \Sigma$, luego $M \vDash \neg\phi(c_{\beta_1}, \ldots, c_{\beta_n})$, luego $M \vDash \neg\phi[i_{\beta_1}, \ldots, i_{\beta_n}]$, por lo que no $M \vDash \phi[i_{\beta_1}, \ldots, i_{\beta_n}]$.

Consecuentemente I es un conjunto de indiscernibles para M y $\Sigma = \Sigma(M, I)$. Sea $M^* = N(I)$. Es claro que M^* sigue cumpliendo a) y b) y por el teorema [TC 10.29] también cumple c) (notemos que las restricciones a M^* de las funciones de Skolem que hemos definido en M son las que hemos definido en M^*). ■

Definición 3.7 Sea $x \subset V_\omega$, Σ un conjunto de E.M. para x y $\alpha \geq \omega$. Llamaremos *modelo* (Σ, α, x) a cualquier par (M, I) que cumpla las condiciones del teorema anterior (el cual nos dice que dos cualesquiera de ellos son isomorfos).

En la prueba de la unicidad en el teorema anterior hemos demostrado de hecho el teorema siguiente:

Teorema 3.8 *Sea $x \subset V_\omega$ y Σ un conjunto de E.M. para x. Sean $\omega \leq \alpha \leq \beta$ y sean (M, I) y (N, J) un modelo (Σ, α, x) y un modelo (Σ, β, x) respectivamente. Entonces toda aplicación estrictamente creciente $\pi : I \longrightarrow J$ se extiende a una inmersión elemental $\bar{\pi} : M \longrightarrow N$. Si π es biyectiva entonces $\bar{\pi}$ es un isomorfismo.*

Nuestra intención es colapsar los modelos (Σ, α, x), para lo cual necesitamos que estén bien fundados:

Teorema 3.9 *Sea $x \subset V_\omega$ y Σ un conjunto de E.M. para x. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) Para todo $\alpha \geq \omega$ el modelo (Σ, α, x) está bien fundado.

b) Para cierto $\alpha \geq \omega_1$ el modelo (Σ, α, x) está bien fundado.

c) Para todo α tal que $\omega \leq \alpha < \omega_1$ el modelo (Σ, α, x) está bien fundado.

DEMOSTRACIÓN: a) $\rightarrow$ b) es obvio.

b) $\rightarrow$ c). Sea $\alpha \geq \omega_1$ tal que el modelo (Σ, α, x) esté bien fundado y sea $\omega \leq \beta < \omega_1$. Por el teorema anterior existe una inmersión elemental del modelo (Σ, β, x) en el modelo (Σ, α, x), luego el primero está bien fundado.

c) $\rightarrow$ a) Por el mismo argumento que en la implicación anterior basta ver que para todo ordinal límite λ el modelo (Σ, λ, x) está bien fundado. En caso contrario sea (M, I) un modelo (Σ, λ, x) que no esté bien fundado. Esto significa que existe una sucesión $\{a_n\}_{n\in\omega}$ de elementos de M tal que

$$\bigwedge n \in \omega \; M(\in)(a_{n+1}, a_n).$$

Cada a_n es de la forma $a_n = M(t)[x_1, \ldots, x_n]$, para ciertos elementos $x_1, \ldots, x_n \in I$, luego existe un $I_0 \subset I$ numerable tal que $\bigwedge n \in \omega \; a_n \in N(I_0)$. Sea $\beta = \operatorname{ord}(I_0, \leq) < \omega_1$. Es inmediato que $(N(I_0), I_0)$ cumple las condiciones del teorema 3.6, luego es un modelo (Σ, β, x) y no está bien fundado, contradicción. ■

Definición 3.10 Sea $x \subset V_\omega$ y Σ un conjunto de E.M. para x. Diremos que Σ está *bien fundado* si los modelos (Σ, α, x) lo están.

Ahora podríamos colapsar los modelos (Σ, α, x), pero antes añadiremos restricciones que nos garanticen que el conjunto de indiscernibles del colapso transitivo es cerrado no acotado. Empezamos estudiando la no acotación.

Sea λ un ordinal límite. Diremos que el modelo (Σ, λ, x) es *no acotado* si su conjunto de indiscernibles no está acotado en Ω^M.

Teorema 3.11 *Sea $x \subset V_\omega$ y Σ un conjunto de E.M. para x. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) Para todo $\lambda \geq \omega$ el modelo (Σ, λ, x) no está acotado.

b) Para cierto $\lambda \geq \omega$ el modelo (Σ, λ, x) no está acotado.

c) Para todo término de Skolem $t(v_1, \ldots, v_n)$, el conjunto Σ contiene a la fórmula $\phi_t(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1})$ de $\mathcal{L}_R$ que en cualquier modelo equivale a

$$t(v_1, \ldots, v_n) \text{ es un ordinal} \rightarrow t(v_1, \ldots, v_n) < v_{n+1}.$$

DEMOSTRACIÓN: a) $\rightarrow$ b) es obvio.

b) $\rightarrow$ c). Sea (M, I) un modelo (Σ, λ, x) no acotado y sea $t(v_1, \ldots, v_n)$ un término de Skolem. Sean $a_1 < \cdots < a_n \in I$ y sea $x = M(t)[a_1, \ldots, a_n]$. Si $x \notin \Omega^M$, se cumple trivialmente $M \vDash \phi_t[a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}]$ para cualquier $a_{n+1} \in I$ tal que $a_n < a_{n+1}$. Si, por el contrario, $x \in \Omega^M$, entonces existe $a_{n+1} \in I$ tal que $a_{n+1} > a_n$ y $a_{n+1} > x$ (por la no acotación), e igualmente se cumple $M \vDash \phi_t[a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}]$. En cualquier caso $\phi_t \in \Sigma(M, I) = \Sigma$.

c) $\rightarrow$ a). Sea (M, I) un modelo (Σ, λ, x) y sea $x \in \Omega^M$. Existe un término de Skolem t junto con unos indiscernibles $a_1 < \cdots < a_n \in I$ de modo que $x = M(t)[a_1, \ldots, a_n]$. Sea $a_{n+1} > a_n$ (aquí usamos que λ es un límite). Por hipótesis $M \vDash \phi_t[a_1, \ldots, a_{n+1}]$, luego $a_{n+1} > x$, lo que prueba que I no está acotado en Ω^M. ■

Definición 3.12 Sea $x \subset V_\omega$ y Σ un conjunto de E.M. para x. Diremos que Σ es *no acotado* si cumple cualquiera de las condiciones del teorema anterior.

Sea (M, I) un modelo (Σ, λ, x). Llamaremos $i : \lambda \longrightarrow I$ a la semejanza, de manera que $I = \{i_\delta \mid \delta < \lambda\}$.

Si $\lambda > \omega$, diremos que el modelo (M, I) es *notable* si es no acotado y para todo $y \in \Omega^M$ tal que $y < i_\omega$ se cumple que $y \in N(\{i_n \mid n < \omega\})$.

Pronto veremos que esta condición técnica implica que el conjunto de indiscernibles es cerrado en Ω^M. De momento probamos un teorema análogo a los anteriores:

Teorema 3.13 *Sea $x \subset V_\omega$ y Σ un conjunto de E.M. para x. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) Para todo $\lambda > \omega$ el modelo (Σ, λ, x) es notable.

b) Para cierto $\lambda > \omega$ el modelo (Σ, λ, x) es notable.

c) Para cada término de Skolem $t(v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n)$, el conjunto Σ contiene la fórmula $\psi_t(v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n, x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{L}_R$ que equivale en todo modelo a

$$t(v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n) \text{ es un ordinal} \wedge t(v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n) < w_1$$
$$\rightarrow t(v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n) = t(v_1, \ldots, v_m, x_1, \ldots, x_n).$$

Además, en tal caso, si (M, I) es un modelo (Σ, λ, x), $\lambda' < \lambda$ y $x \in \Omega^M$ cumple $x < i_{\lambda'}$, entonces $x \in N(\{i_\delta \mid \delta < \lambda'\})$.

DEMOSTRACIÓN: a) $\rightarrow$ b) es obvio.

b) $\rightarrow$ c). Sea $\lambda > \omega$ tal que el modelo (Σ, λ, x) sea notable —llamémoslo (M, I)— y consideremos un término de Skolem $t(v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n)$. Sean

$$v_1 < \cdots < v_m < w_1 < \cdots < w_n < x_1 < \cdots < x_n$$

tales que $v_1, \ldots, v_n$ sean los primeros elementos de I (es decir, $i_0, \ldots, i_{m-1}$) y $w_1 = i_\omega$. Si $a = M(t)[v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n]$ es un ordinal en M y es menor que $w_1 = i_\omega$, por hipótesis $a \in N(\{i_n \mid n < \omega\})$, luego existe un término de Skolem s y un $k < \omega$ de manera que $a = M(s)[i_0, \ldots, i_k]$. Podemos suponer $m \leq k$.

Tenemos que $M \vDash t[v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n] = s[i_0, \ldots, i_k]$ y, por indiscernibilidad, $M \vDash t[v_1, \ldots, v_m, x_1, \ldots, x_n] = s[i_0, \ldots, i_k]$, luego

$$M \vDash t[v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n] = t[v_1, \ldots, v_m, x_1, \ldots, x_n].$$

Esto prueba que $M \vDash \psi_t$, luego $\psi_t \in \Sigma$.

c) $\rightarrow$ a). Sea (M, I) un modelo (Σ, λ, x) con $\lambda > \omega$. Sea $\omega \leq \lambda' < \lambda$ (así, para $\lambda' = \omega$ probamos el apartado a) y en general probamos la última afirmación del enunciado). Sea $x \in \Omega^M$ tal que $x < i_{\lambda'}$. Sea t un término de Skolem y $v_1 < \cdots < v_m < w_1 < \cdots < w_n \in I$ tales que $w_1 = i_{\lambda'}$ y $x = M(t)[v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n]$.

Tomamos indiscernibles $x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_n$ tales que

$$v_1 < \cdots < v_m < x_1 < \cdots < x_n < w_1 < \cdots < w_n < z_1 < \cdots < z_n.$$

Como $x < w_1$ y $M \vDash \psi_t[v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n, z_1, \ldots, z_n]$, tenemos que

$$M \vDash t[v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n] = t[v_1, \ldots, v_m, z_1, \ldots, z_n].$$

Por indiscernibilidad, esto implica

$$M \vDash t[v_1, \ldots, v_m, x_1, \ldots, x_n] = t[v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n],$$

y esto significa que $x = M(t)[v_1, \ldots, v_m, x_1, \ldots, x_n] \in N(\{i_\delta \mid \delta < \lambda'\})$. ■

Definición 3.14 Sea $x \subset V_\omega$ y Σ un conjunto de E.M. para x. Diremos que Σ es *notable* si cumple cualquiera de las condiciones del teorema anterior.

Los teoremas siguientes explican el interés de esta propiedad:

Teorema 3.15 *Sea $x \subset V_\omega$ y Σ un conjunto de E.M. notable para x. Consideremos ordinales $\omega < \lambda' < \lambda$. Sea (M, I) un modelo (Σ, λ, x), tomemos $J = \{i_\delta \mid \delta < \lambda'\}$ y sea $N = N(J)$. Entonces (N, J) es un modelo (Σ, λ', x) y Ω^n es una sección inicial de Ω^M, es decir, todo elemento de Ω^M por debajo de uno de Ω^n está en Ω^n.*

DEMOSTRACIÓN: Es claro que N cumple las propiedades del teorema 3.6, luego es un modelo (Σ, λ', x). Si $x \in \Omega^n$ existe un $\delta < \lambda'$ tal que $x < i_\delta < i_{\lambda'}$ (pues (N, J) no está acotado). Por consiguiente, si $y \in \Omega^M$ cumple $y < x$, entonces $y < i_{\lambda'}$, luego, por el teorema 3.13, $y \in N(\{i_\delta \mid \delta < \lambda'\}) = N$. Así pues, $y \in \Omega^n$. ■

Teorema 3.16 *Sea $x \subset V_\omega$ y Σ un conjunto de E.M. notable para x. Sea (M, I) un modelo (Σ, λ, x). Entonces I es cerrado en Ω^M, es decir, si $\lambda' < \lambda$, entonces $i_{\lambda'}$ es el supremo en Ω^M del conjunto $\{i_\delta \mid \delta < \lambda'\}$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $x \in \Omega^M$ cumple $x < i_{\lambda'}$, entonces por el teorema anterior $x \in N(\{i_\delta \mid \delta < \lambda'\})$, que es un modelo (Σ, λ', x). Como Σ no está acotado, el modelo N tampoco lo está, luego existe un $\delta < \lambda'$ tal que $x < i_\delta$. Esto significa que x no es una cota superior del conjunto $\{i_\delta \mid \delta < \lambda'\}$, luego la menor cota superior es exactamente $i_{\lambda'}$. ■

Veamos finalmente qué obtenemos al colapsar los modelos:

Teorema 3.17 *Sea $x \subset V_\omega$ y Σ un conjunto de E.M. notable y bien fundado para x. Entonces, para todo ordinal límite λ existe un λ' tal que $L_{\lambda'}[x]$ es un modelo (Σ, λ, x) (con un cierto conjunto de indiscernibles). Si κ es un cardinal no numerable entonces $L_\kappa[x]$ es un modelo (Σ, κ, x) con un único posible conjunto de indiscernibles I_κ^x. Además I_κ^x es cerrado y no acotado en κ.*

DEMOSTRACIÓN: Sea (M, I) un modelo (Σ, λ, x). Entonces M cumple el axioma de extensionalidad, pues es elementalmente equivalente a un modelo $L_{\lambda_0}[x]$, y está bien fundado por hipótesis. Por consiguiente podemos considerar su colapso transitivo M'. Sea $\pi : M \longrightarrow M'$ la función colapsante.

Definimos $a = \{u \in M' \mid M(R)(\pi^{-1}(u))\}$, con lo que $\pi : M \longrightarrow (M', a)$ es un isomorfismo de modelos de $\mathcal{L}_R$. Definimos $I' = \pi[I]$, con lo que $((M', a), I')$ es un modelo (Σ, λ, x).

En particular (M', a) es elementalmente equivalente a un cierto $L_{\lambda_0}[x]$, luego por el teorema [PC 3.12] tenemos que $(M', a) = L_{\lambda'}[x]$, para cierto λ'. Así pues, $L_{\lambda'}[x]$ es un modelo (Σ, λ, x).

Supongamos ahora que κ es un cardinal no numerable. Sea $(L_\lambda[x], I)$ un modelo (Σ, κ, x). Puesto que $|I| = \kappa$, ha de ser $\kappa \leq \lambda$. Supongamos que $\kappa < \lambda$. Como I no está acotado en $\Omega^{L_\lambda[x]} = \lambda$, existe un $\lambda' < \kappa$ tal que $\kappa < i_{\lambda'}$, y por ser notable $\kappa \subset N = N(\{i_\delta \mid \delta < \lambda'\})$, pero por otro lado $|N| = |\{i_\delta \mid \delta < \lambda'\}| = |\lambda'| < \kappa$, contradicción. Así pues, $\kappa = \lambda$ y $L_\kappa[x]$ es un modelo (Σ, κ, x).

Supongamos ahora que $(L_\kappa[x], I)$ y $(L_\kappa[x], I')$ son ambos modelos (Σ, κ, x). Sea $\pi : I \longrightarrow I'$ una semejanza. Por el teorema 3.8 sabemos que π se extiende a un isomorfismo $\bar{\pi} : L_\kappa[x] \longrightarrow L_\kappa[x]$, pero el único isomorfismo de un conjunto transitivo en sí mismo es la identidad (por la unicidad de colapso transitivo), luego $I' = \pi[I] = I$.

Llamemos I_κ^x al único posible conjunto de indiscernibles en $L_\kappa[x]$. Sabemos que no está acotado y el teorema 3.16 implica que es cerrado (por ejemplo, porque la aplicación que numera los indiscernibles es normal). ■

El teorema siguiente completa las propiedades básicas de los conjuntos de indiscernibles I_κ^x:

Teorema 3.18 *Sea $x \subset V_\omega$ y Σ un conjunto de E.M. notable y bien fundado para x. Si $\kappa < \mu$ son dos cardinales no numerables, entonces $I_\mu^x \cap \kappa = I_\kappa^x$ y $L_\kappa[x] = N(I_\kappa^x) \prec L_\mu[x]$.*

DEMOSTRACIÓN: En el modelo $L_\mu[x]$, definimos $J = \{i_\delta \mid \delta < \kappa\}$ y sea $N = N(J)$. Por el teorema 3.15 tenemos que N es un modelo (Σ, κ, x) y los ordinales de N son una sección inicial de μ, es decir, $\Omega^n = \lambda \leq \mu$. Como $L_\kappa[x]$ también es un modelo (Σ, κ, x), ha se ser isomorfo a N. En particular $\Omega^{L_\kappa[x]} = \kappa$ ha de ser semejante a λ, pero esto es tanto como decir que $\lambda = \kappa$.

Más aún, el isomorfismo entre $L_\kappa[x]$ y N ha de transformar I_κ^x en J, pero por otra parte ha de ser la identidad en κ, luego $J = I_\kappa^x$.

Si $i_\delta \in I_\mu^x \cap \kappa$, entonces $\delta \leq i_\delta < \kappa$, luego $i_\delta \in J = I_\kappa^x$. Por lo tanto $I_\mu^x \cap \kappa = I_\kappa^x$.

Para probar que $N = L_\kappa[x]$ basta ver que N es transitivo, pues dos modelos transitivos isomorfos han de ser iguales. Tomemos $u \in N$ y sea $\alpha = |u| < \mu$. Sea $f : \alpha \longrightarrow u$ biyectiva. Por [PC 3.28] concluimos que $f \in L_\mu[x]$. Por consiguiente $L_\mu[x] \vDash \bigvee f\alpha\ f : \alpha \longrightarrow [u]$ biyectiva, luego N cumple lo mismo, luego existen f, $\alpha \in N$ tales que $N \vDash [f] : [\alpha] \longrightarrow [u]$ biyectiva, luego $L_\mu[x]$ cumple lo mismo, y al ser transitivo concluimos que $f : \alpha \longrightarrow u$ biyectiva. Ahora, si $\beta < \alpha$, se cumple $L_\mu[x] \vDash [\beta] < [\alpha]$, luego lo mismo sucede en N, luego existe un $v \in N$ tal que $N \vDash [v] = [f]([\beta])$, luego lo mismo sucede en $L_\mu[x]$, luego $f(\beta) = v \in N$. Con esto hemos probado que $u \subset N$, luego N es transitivo. ■

Tenemos pendiente dar condiciones suficientes para que existan conjuntos de E.M. notables y bien fundados, pero antes probaremos el teorema siguiente que precisa el problema:

Teorema 3.19 *Sea $x \subset V_\omega$. Si existe un conjunto de E.M. notable y bien fundado para x, entonces éste es único.*

Demostración: Sea Σ un conjunto de E.M. notable y bien fundado para x. Si $n \in \omega$, $n \neq 0$, por el teorema anterior $I^x_{\omega_\omega} \cap \omega_n = I^x_{\omega_n}$ es c.n.a. en ω_n y, como $I^x_{\omega_\omega}$ es c.n.a. en ω_ω, concluimos que $\omega_n \in I^x_{\omega_\omega}$.

Como $(L_{\omega_\omega}[x], I^x_{\omega_\omega})$ es un modelo $(\Sigma, \omega_\omega, x)$, si $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_R)$, se cumple que

$$\phi \in \Sigma \leftrightarrow L_{\omega_\omega}[x] \vDash \phi[\omega_1, \ldots, \omega_n],$$

y el miembro derecho no depende de Σ, luego Σ es único. ■

Definición 3.20 Sea $x \subset L_\omega$. Llamaremos $x^\sharp$ (*x sostenido*) al único conjunto de E.M. notable y bien fundado para x, si es que existe tal conjunto.

En lugar de "existe un conjunto de E.M. notable y bien fundado para x", diremos simplemente "existe $x^\sharp$".

Es costumbre escribir $0^\sharp$ en lugar de $\varnothing^\sharp$.

Aunque la definición de los sostenidos puede parecer aparatosa, en realidad la existencia de $x^\sharp$ equivale a una condición relativamente simple:

Teorema 3.21 *Sea $x \subset V_\omega$. La existencia de $x^\sharp$ equivale a que exista un ordinal límite λ tal que $L_\lambda[x]$ tenga un conjunto de indiscernibles no numerable.*

Demostración: Ciertamente, si existe $x^\sharp$ entonces $I^x_{\omega_1}$ es un conjunto no numerable de indiscernibles en $L_{\omega_1}[x]$.

Supongamos que $L_\lambda[x]$ tiene un conjunto no numerable J de indiscernibles. Pasando a una sección inicial podemos suponer que el ordinal de J es ω_1. También podemos suponer que λ es el mínimo ordinal tal que $L_\lambda[x]$ tiene un conjunto de indiscernibles de ordinal ω_1. Sea $N = N(J) \prec L_\lambda[x]$ y sea M el colapso transitivo de N. Transportando a M la relación $N(R)$, obtenemos un conjunto $a \subset M$ tal que (M, a) es un modelo de $\mathcal{L}_R$ isomorfo a N. Por el teorema 3.4 resulta que $a = x$ y $M = L_{\lambda'}[x]$. Como los ordinales de N son todos menores que λ y la función colapsante envía ordinales a ordinales, es claro que $\lambda' \leq \lambda$. Por otra parte, si I es la imagen de J por el colapso transitivo, tenemos que I es un conjunto de indiscernibles en $L'_\lambda[x]$ de ordinal ω_1 y $L_{\lambda'}[x] = N(I)$. Por la minimalidad de λ ha de ser $\lambda = \lambda'$. Así pues, $L_\lambda[x] = N(I)$.

Veamos ahora que I no está acotado en λ. En otro caso existe $\lambda' < \lambda$ tal que $I \subset \lambda'$. Sea t un término de Skolem y sean $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n \in I$ tales que $\lambda' = L_\lambda[x](t)[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$. Sea $I' = \{i \in I \mid i > \alpha_n\}$. Vamos a probar que I' es un conjunto de indiscernibles para $L_{\lambda'}[x]$ (claramente de ordinal ω_1).

Consideremos una fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_m) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$. Teniendo en cuenta que $y = L_\alpha[x]$ es definible en $L_\lambda[x]$, es fácil definir por inducción sobre la longitud de ϕ una fórmula $\psi(\alpha, x_1, \ldots, x_m)$ tal que, para $\alpha < \lambda$,

$$L_\alpha[x] \vDash \phi[x_1, \ldots, x_m] \leftrightarrow L_\lambda[x] \vDash \psi[\alpha, x_1, \ldots, x_m].$$

El único caso no trivial es $\phi = \bigwedge u \phi'(u, x_1, \ldots, x_m)$, en cuyo caso tomamos

$$\psi = \bigvee y(y = L_\alpha[x] \wedge \bigwedge y \in Y\ \psi'(\alpha, u, x_1, \ldots, x_m)).$$

Ahora, para todos los $i_1 < \cdots < i_m \in I'$ se cumple

$$L_{\lambda'}[x] \vDash \phi[i_1, \ldots, i_m] \leftrightarrow L_\lambda[x] \vDash \psi[\lambda', i_1, \ldots, i_m]$$

$$\leftrightarrow L_\lambda[x] \vDash \chi[\alpha_1, \ldots, \alpha_n, i_1, \ldots, i_m],$$

donde χ es la fórmula que resulta de sustituir en ψ la variable interpretada por λ' por el término t y pasar a una fórmula equivalente en $\mathcal{L}_R$. Por indiscernibilidad esto no depende de $i_1, \ldots, i_m$ (siempre y cuando sean mayores que α_n), luego ciertamente I' es un conjunto de indiscernibles para $L_{\lambda'}[x]$ y contradice la minimalidad de λ.

De entre todos los conjuntos de indiscernibles para $L_\lambda[x]$ de ordinal ω_1, no acotados y tales que $L_\lambda[x] = N(I)$, elijamos uno que tenga el menor i_ω posible. El conjunto $\Sigma = \Sigma(L_\lambda[x], I)$ es ciertamente un conjunto de E.M. bien fundado y no acotado. Vamos a probar que $(L_\lambda[x], I)$ es notable, con lo que Σ será $x^\sharp$.

En caso contrario, por el teorema 3.13, existe un término de Skolem

$$t(v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n)$$

tal que para todos los indiscernibles

$$v_1 < \cdots < v_m < w_1 < \cdots < w_n < x_1 < \cdots < x_n$$

se cumple

$$L_\lambda[x] \vDash t[v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n] \in \Omega \wedge t[v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n] < [w_1]$$

$$\wedge\, t[v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n] \neq t[v_1, \ldots, v_m, x_1, \ldots, x_n]. \qquad (*)$$

De hecho, la desigualdad será siempre $<$ o siempre $>$.

Tomemos $v_1 < \cdots < v_m < i_\omega$. Sea u_0 la sucesión de los n primeros indiscernibles mayores que v_m. Para cada $\alpha < \omega_1$ sea u_α la sucesión de los n primeros indiscernibles mayores que todos los indiscernibles que aparecen en las sucesiones u_β con $\beta < \alpha$ (que son una cantidad numerable). Sea

$$t_\alpha = L_\lambda[x](t)[v_1, \ldots, v_m, u_\alpha(0), \ldots, u_\alpha(n-1)].$$

Si la desigualdad $(*)$ es $>$, entonces para todos los $\alpha < \beta < \omega_1$ se cumple que

$$v_1 < \cdots < v_m < u_\alpha(0) < \cdots < u_\alpha(n-1) < u_\beta(0) < \cdots < u_\beta(n-1),$$

luego $t_\alpha > t_\beta$. Tenemos, pues, una sucesión decreciente de ordinales, lo cual es absurdo. Por consiguiente la desigualdad ha de ser $<$, y la sucesión $\{t_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ es creciente.

Es inmediato comprobar que $J = \{t_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ es un conjunto de indiscernibles para $L_\lambda[x]$ de ordinal ω_1. Por construcción i_ω es el primer elemento de u_ω, luego

$$t_\omega = L_\lambda[x](t)[v_1, \ldots, v_m, u_\omega(0), \ldots, u_\omega(n-1)] < i_\omega.$$

Sea $N = N(J)$. Estamos justo como al principio de la prueba. Repitiendo todo el argumento llegamos a que el colapso transitivo de N ha de ser el propio $L_\lambda[x]$, que tiene como conjunto de indiscernibles a la imagen I' de J por la función colapsante π, de modo que I' no está acotado en λ y $L_\lambda[x] = N(I')$. Además, el ω-ésimo elemento de I' será $\pi(t_\omega) \leq t_\omega < i_\omega$, lo que contradice la elección de I. ■

Teniendo en cuenta el teorema 3.3, ahora es inmediato el teorema siguiente:

Teorema 3.22 *Si $x \subset V_\omega$ y existe un ultrafiltro iterable sobre un modelo de* ZFC$-$AP *que contenga a x, entonces existe $x^\sharp$.*

Dedicamos la sección siguiente a las consecuencias de la existencia de los sostenidos.

3.3 Consecuencias de la existencia de $x^\sharp$

Vamos a ver que los resultados de la sección precedente sirven de fundamento a una elegante teoría sobre las clases $L[x]$. Observemos en primer lugar que, según el teorema 3.19, si $x \subset V_\omega$ cumple que existe $x^\sharp$, entonces

$$x^\sharp = \{\phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_R) \mid L_{\omega_\omega}[x] \vDash \phi[v]\},$$

donde $v : \mathrm{Var}(\mathcal{L}_R) \longrightarrow \omega_\omega$ es la valoración dada por $v(x_i) = \omega_{i+1}$, pero hay que recalcar que esto no sirve como definición de $x^\sharp$, pues el miembro derecho siempre existe, pero no es necesariamente un conjunto de E.M. notable y bien fundado (lo es si existe uno, y entonces es el único).

Definición 3.23 Sea $x \subset V_\omega$ tal que exista $x^\sharp$. Llamaremos *indiscernibles de Silver* para x a los elementos de la clase

$$I_x = \bigcup_\kappa I_\kappa^x \subset \Omega,$$

donde κ recorre los cardinales no numerables.

El teorema siguiente recoge las propiedades básicas de estos indiscernibles:

Teorema 3.24 *Sea $x \subset V_\omega$ tal que exista $x^\sharp$. Entonces I_x es la única clase que cumple las propiedades siguientes:*

a) $I_x \subset \Omega$ contiene a todos los cardinales no numerables.

b) Si κ es un cardinal no numerable, entonces $I_x \cap \kappa$ es c.n.a. en κ y tiene ordinal κ.

c) Si κ es un cardinal no numerable, entonces $I_x \cap \kappa$ es un conjunto de indiscernibles para $L_\kappa[x]$

d) Todo $a \in L_\kappa[x]$ es definible en $L_\kappa[x]$ a partir de $I_x \cap \kappa$, es decir, existe una fórmula $\phi(x, x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_R)$ y unos $a_1, \ldots, a_n \in I_x \cap \kappa$ de modo que a es el único elemento de $L_\kappa[x]$ que cumple $L_\kappa[x] \vDash \phi[a, a_1, \ldots, a_n]$.

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 3.18 tenemos que $I_x \cap \kappa = I_\kappa^x$, que es c.n.a. en κ, tiene ordinal κ y es un conjunto de indiscernibles para $L_\kappa[x]$. Además, si $\kappa < \mu$ son cardinales no numerables, tenemos que $I_\mu^x \cap \kappa = I_\kappa^x$ es c.n.a. en κ, y como I_μ^x es c.n.a. en μ concluimos que $\kappa \in I_\mu^x$, luego I_x contiene a todos los cardinales no numerables.

Si $a \in L_\kappa[x]$, como $L_\kappa[x] = N(I_\kappa^x)$, existe un término de Skolem t tal que $a = L_\kappa[x](t)[a_1, \ldots, a_n]$, para ciertos $a_1, \ldots, a_n \in I_\kappa^x$. Como las funciones de Skolem son definibles, la fórmula $y = t(x_1, \ldots, x_n)$ es equivalente a una fórmula $\phi(x, x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_R)$ que cumple el enunciado.

Veamos ahora la unicidad. Supongamos que I_x' es otra clase que cumple el teorema. Sea $\Sigma_\kappa = \Sigma(L_\kappa[x], I_x' \cap \kappa)$. Claramente Σ_κ es un conjunto de E.M. bien fundado y no acotado, pues la propiedad c) implica que $L_\kappa[x]$ es el núcleo de Skolem de $I_x' \cap \kappa$. Veamos que Σ_κ es notable. Sea $a < i_\omega'$ (el ω-ésimo elemento de $I_x' \cap \kappa$). Como $I_x' \cap \kappa$ es c.n.a. en κ, existe un $n \in \omega$ tal que $a < i_n'$. Sea t un término de Skolem tal que $a = L_\kappa[x](t)[a_1, \ldots, a_m]$, para ciertos $a_1 < \cdots < a_m \in I_x' \cap \kappa$. Tomemos nuevos indiscernibles tales que

$$a_1 < \cdots < a_r \leq a < b_{r+1} < \cdots < b_m < i_\omega'.$$

Así

$$a = L_\kappa[x](t)[a_1, \ldots, a_r, b_{r+1}, \ldots b_m] \in N(\{i_n' \mid n < \omega\}).$$

Con esto podemos concluir que $\Sigma_\kappa = x^\sharp$, luego $(L_\kappa[x], I_x' \cap \kappa)$ es un modelo $(x^\sharp, \kappa, x)$. Por la unicidad de 3.17 concluimos que $I_x \cap \kappa = I_x' \cap \kappa$, para todo cardinal no numerable κ, luego $I_\kappa = I_\kappa'$. ■

Observemos que, por el teorema 3.18, si existe $x^\sharp$ y $\kappa < \mu$ son cardinales infinitos, entonces $L_\kappa[x] \prec L_\mu[x]$. Esto nos permite dotar a la clase $L[x]$ de estructura de modelo de $\mathcal{L}_R$:

Definición 3.25 Sea $x \subset V_\omega$ tal que exista $x^\sharp$. Si $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_R)$ y $a_1, \ldots, a_n \in L[x]$, definimos

$$L[x] \vDash \phi[a_1, \ldots, a_n] \leftrightarrow \bigvee \kappa(\kappa \text{ es un cardinal no numerable}$$
$$\wedge\, a_1, \ldots, a_n \in L_\kappa[x] \wedge L_\kappa[x] \vDash \phi[a_1, \ldots, a_n]).$$

Por la observación precedente a la definición, la relación $L_\kappa[x] \vDash \phi[a_1, \ldots, a_n]$ no depende de κ: si es cierta para un cardinal no numerable (suficientemente grande como para que $L_\kappa[x]$ contenga a los parámetros) es cierta para todo κ. De aquí se sigue que esta relación $\vDash$ cumple todas las propiedades usuales. Por ejemplo, veamos que

$$L[x] \vDash \bigwedge z\phi(z)[a_1, \ldots, a_n] \leftrightarrow \bigwedge a \in L[x]\ L[x] \vDash \phi(a)[a_1, \ldots, a_n].$$

Si $L[x] \vDash \bigwedge z\phi(z)[a_1, \ldots, a_n]$ y $a \in L[x]$, existe un cardinal no numerable κ tal que $a, a_1, \ldots, a_n \in L_\kappa[x]$. Por definición $L_\kappa[x] \vDash \bigwedge z\phi(z)[a_1, \ldots, a_n]$, luego $L_\kappa[x] \vDash \phi[a, a_1, \ldots, a_n]$, luego $L[x] \vDash \phi[a, a_1, \ldots, a_n]$.

Recíprocamente, si $\bigwedge a \in L[x]\ L[x] \vDash \phi[a, a_1, \ldots, a_n]$, sea κ un cardinal regular tal que $a_1, \ldots, a_n \in L_\kappa[x]$. En particular $\bigwedge a \in L_\kappa[x]\ L_\kappa[x] \vDash \phi[a, a_1, \ldots, a_n]$, luego $L_\kappa[x] \vDash \bigwedge z\phi(z)[a_1, \ldots, a_n]$, luego $L[x] \vDash \bigwedge z\phi(z)[a_1, \ldots, a_n]$.

Similarmente,

$$L[x] \vDash (\phi \wedge \psi)[a_1, \ldots, a_n] \leftrightarrow L[x] \vDash \phi[a_1, \ldots, a_n] \wedge L[x] \vDash \psi[a_1, \ldots, a_n],$$

etc.

Una simple inducción muestra que si $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula metamatemática sin descriptores (y $\ulcorner\phi\urcorner$ es su versión formalizada), entonces

$$\bigwedge a_1 \cdots a_n \in L[x]\ (L[x] \vDash \ulcorner\phi\urcorner[a_1, \ldots, a_n] \leftrightarrow \phi^{L[x]}(a_1, \ldots, a_n)).$$

A partir de aquí, todos los conceptos de la teoría de modelos son aplicables a $L[x]$, a pesar de que es una clase propia. En particular:

Teorema 3.26 *Si $X \subset V_\omega$ y existe $x^\sharp$, entonces $L[x] \vDash \mathrm{ZFC} + V = L[[x]]$ y si $\kappa \in I_x$, entonces $L_\kappa[x] \prec L[x]$.*

Demostración: De la propia definición de $L[x] \vDash \phi$ se sigue $L_\kappa[x] \prec L[x]$ cuando κ es un cardinal no numerable. En general, tomamos dos cardinales no numerables $\kappa < \mu < \nu$, de modo que $L_\mu[x] \prec L_\nu[x]$. Pero esto equivale a[3] $L[x] \vDash (L_\mu[x] \prec L_\nu[x])$ y por indiscernibilidad $L[x] \vDash (L_\kappa[x] \prec L_\nu[x])$, luego $L_\kappa[x] \prec L_\nu[x] \prec L[x]$.

[3]Notemos que la variable x se puede ligar haciendo

$$L[x] \vDash \bigvee x(\bigwedge u(u \in x \leftrightarrow Ru) \wedge L_\mu[x] \prec L_\nu[x]),$$

y así las únicas variables libres son los indiscernibles μ y ν.

Por otra parte sabemos que si κ es un cardinal regular no numerable entonces $L_\kappa[x] \vDash \text{ZFC}-\text{AP}+V = L[[x]]$, luego $L[x] \vDash \text{ZFC}-\text{AP}+V = L[[x]]$. Finalmente, como se cumple $\text{AP}^{L[x]}$, concluimos que $L[x] \vDash \text{ZFC}+V = L[[x]]$. ■

El teorema 3.24 admite este enunciado alternativo:

Teorema 3.27 *Sea $x \subset V_\omega$ tal que exista $x^\sharp$. Entonces existe una única función normal $i : \Omega \longrightarrow \Omega$ tal que si $I_x = \{i_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$, entonces*

a) Si κ es un cardinal no numerable, se cumple $i_\kappa = \kappa$.

b) I_x es una clase de indiscernibles para $L[x]$.

c) Todo $a \in L[x]$ es definible en $L[x]$ a partir de I_x.

Demostración: Sea I_x la clase de los indiscernibles de Silver para x. Sea $i : \Omega \longrightarrow I_x$ la semejanza. Como $I_\kappa^x \cap \kappa$ tiene ordinal κ, la restricción de i^{-1} a este conjunto tiene imagen κ, luego $i_\kappa = \kappa$. Además, el hecho de que $I_\kappa^x \cap \kappa$ sea c.n.a. en κ equivale a que $i|_\kappa : \kappa \longrightarrow \kappa$ es normal y, como esto vale para todo κ, concluimos que i es normal.

Si $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in \text{Form}(\mathcal{L}_R)$ y $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$, $\beta_1 < \cdots < \beta_n \in I_x$, tomamos un cardinal no numerable κ mayor que α_n y β_n, de modo que

$$L[x] \vDash \phi[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \leftrightarrow L_\kappa[x] \vDash \phi[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$$

$$\leftrightarrow L_\kappa[x] \vDash \phi[\beta_1, \ldots, \beta_n] \leftrightarrow L[x] \vDash \phi[\beta_1, \ldots, \beta_n].$$

Por consiguiente I_x es una clase de indiscernibles para $L[x]$.

Dado $a \in L[x]$, sea κ un cardinal no numerable tal que $a \in L_\kappa[x]$. Por el teorema 3.24 existe una fórmula $\phi(u, u_1, \ldots, u_n) \in \text{Form}(\mathcal{L}_R)$ e indiscernibles $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n \in I_x \cap \kappa$ de modo que a es el único elemento de $L_\kappa[x]$ que cumple $L_\kappa[x] \vDash \phi[a, \alpha_1, \ldots, \alpha_n]$. Entonces $L[x] \vDash \phi[a, \alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ y a es el único elemento de $L[x]$ que cumple esto, pues $L[x] \vDash \overset{1}{\bigvee} u\, \phi(u)[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$.

Veamos la unicidad. Basta probar que si i' cumple las condiciones del enunciado, entonces I'_x es la clase de los indiscernibles de Silver, pues entonces i' será necesariamente la única semejanza i entre ésta y Ω. Es fácil ver que I'_x cumple las propiedades a) y b) del teorema 3.24, pero no es evidente que haya de cumplir la propiedad c).

Para cada $a \in L[x]$, sea $F(a)$ el mínimo cardinal no numerable κ tal que $L_\kappa[x]$ contenga indiscernibles $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ de modo que a sea el único elemento de $L[x]$ que cumpla $L[x] \vDash \phi[a, \alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ (para una cierta fórmula ϕ).

Para cada cardinal no numerable κ definimos

$$G(\kappa) = \kappa^+ \cup \bigcup_{a \in L_\kappa[x]} F(a),$$

que es de nuevo un cardinal no numerable. Sea κ_0 un cardinal arbitrario y

$$\bigwedge n \in \omega\, \kappa_{n+1} = G(\kappa_n), \qquad \mu = \bigcup_{n\in\omega} \kappa_n.$$

De este modo $\mu > \kappa_0$ es un cardinal no numerable con la propiedad de que todo elemento de $L_\mu[x]$ es definible en $L[x]$ (luego en $L_\mu[x]$) a partir de $I'_x \cap \mu$. Es claro que $I'_x \cap \mu$ es un conjunto de indiscernibles para $L_\mu[x]$ y además es c.n.a. en μ. Igual que en 3.24 podemos concluir que $\Sigma(L_\mu[x], I'_x \cap \mu) = x^\sharp$, luego $I'_x \cap \mu = I_x \cap \mu$, para cardinales μ arbitrariamente grandes, luego $I'_x = I_x$. ■

Es fácil probar que si existe $x^\sharp$, entonces todo indiscernible de Silver para x es un cardinal inaccesible$^{L[x]}$. En efecto, como existen cardinales regulares$^{L[x]}$ no numerables (y son indiscernibles) todos los indiscernibles son cardinales regulares$^{L[x]}$ y como existen cardinales límite fuerte$^{L[x]}$ no numerables (y son indiscernibles) todos los indiscernibles son cardinales límite fuerte$^{L[x]}$, es decir, todos son inaccesibles$^{L[x]}$.

En realidad los indiscernibles de Silver resultan ser cardinales indescriptibles$^{L[x]}$ e inefables$^{L[x]}$. Esto se sigue de la versión para $L[x]$ del teorema 3.8:

Teorema 3.28 *Sea $x \subset V_\omega$ tal que exista $x^\sharp$. Entonces toda aplicación estrictamente creciente $\pi : I_x \longrightarrow I_x$ se extiende a una única inmersión elemental $\bar{\pi} : L[x] \longrightarrow L[x]$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $\kappa < \mu$ cardinales no numerables de manera que $\pi|_{I_x\cap\kappa} : I_x \cap \kappa \longrightarrow I_x \cap \mu$. Por el teorema 3.8 esta aplicación se extiende a una única inmersión elemental $\bar{\pi}|_{L_\kappa[x]} : L_\kappa[x] \longrightarrow L_\mu[x]$. Más concretamente, $\bar{\pi}$ actúa como sigue: si $a \in L_\kappa[x]$, entonces $a = L_\kappa[x](t)[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, para ciertos $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n \in I_x \cap \kappa$ y un cierto término de Skolem t. Entonces,

$$\bar{\pi}(a) = L_\mu[x](t)[\pi(\alpha_1), \ldots, \pi(\alpha_n)].$$

Ahora bien, esto puede reformularse así:

$$\bar{\pi}(L[x](t)[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]) = L[x](t)[\pi(\alpha_1), \ldots, \pi(\alpha_n)], \qquad (*)$$

pero esto no depende de κ o μ, luego tenemos definida $\bar{\pi} : L[x] \longrightarrow L[x]$ que extiende a π y se restringe a inmersiones elementales entre los modelos $L_\kappa[x]$. Es fácil ver entonces que $\bar{\pi}$ es una inmersión elemental. La unicidad es clara, pues una inmersión elemental ha de cumplir $(*)$. ■

Como consecuencia:

Teorema 3.29 *Si $x \subset V_\omega$ y existe $x^\sharp$, los indiscernibles de Silver para x son cardinales indescriptibles$^{L[x]}$ e inefables$^{L[x]}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\pi : I_x \longrightarrow I_x$ creciente tal que ω_1 sea el menor ordinal no fijado. Sea $\bar{\pi} : L[x] \longrightarrow L[x]$ la inmersión elemental que extiende a π.

Se cumple que ω_1 es el menor ordinal no fijado por $\bar{\pi}$, pues si $\alpha < \omega_1$, entonces α es definible en $L_{\omega_1}[x]$ a partir de $I_x \cap \omega_1$, es decir, existe una fórmula $\phi(u, u_1, \ldots, u_n)$ y un conjunto de indiscernibles $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \omega_1$ de modo que α es el único elemento de $L_{\omega_1}[x]$ (luego de $L[x]$) que cumple $L[x] \vDash \phi[\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n]$. Como $L[x] \vDash \phi[\bar{\pi}(\alpha), \alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, ha de ser $\bar{\pi}(\alpha) = \alpha$.

Ahora 2.14 y 2.21 nos dan que ω_1 es indescriptible$^{L[x]}$ e inefable$^{L[x]}$, pero entonces todos los indiscernibles cumplen lo mismo. ■

Ahora estamos en condiciones de mostrar distintas sentencias equivalentes a la existencia de $x^\sharp$:

Teorema 3.30 *Para $x \subset V_\omega$, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) Existe $x^\sharp$.

b) Existe un ordinal límite λ tal que $L_\lambda[x]$ tiene un conjunto de indiscernibles no numerable.

c) Existe una inmersión elemental no trivial $j : L[x] \longrightarrow L[x]$.

d) Existe un cardinal$^{L[x]}$ κ y un ultrafiltro en $\mathcal{P}^{L[x]}\kappa$ iterable (o 2-iterable) sobre $L[x]$

e) Existe una inmersión elemental no trivial $j : L_\alpha[x] \longrightarrow L_\beta[x]$ cuyo punto crítico cumple $\kappa < |\alpha|$.

f) Si κ es un cardinal regular no numerable, para todo $X \in \mathcal{P}^{L[x]}\kappa$ existe un c.n.a. C en κ tal que $C \subset X \vee C \subset \kappa \setminus X$.

Demostración: b) $\Rightarrow$ a) es 3.21, a) $\Rightarrow$ c) se sigue de 3.28, c) $\Rightarrow$ d) se sigue de 1.23 y 1.42, d) $\Rightarrow$ b) es 3.3. Esto prueba la equivalencia de las cuatro primeras afirmaciones.

d) $\Rightarrow$ e) es trivial, pues suponiendo d) está definida la sucesión normal $\{\kappa_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$, que, al ser no acotada, nos permite tomar un κ_α tal que $|\kappa_\alpha| > \kappa$. Es claro entonces que $i_{\alpha,\alpha+1}|_{L_{\kappa_\alpha}[x]} : L_{\kappa_\alpha}[x] \longrightarrow L_{\kappa_{\alpha+1}}[x]$ es una inmersión elemental.

Veamos e) $\Rightarrow$ c) Notemos que si $X \in \mathcal{P}^{L[x]}\kappa$, entonces

$$X \in \mathcal{P}^{L[x]}L_\kappa[x] \subset L_{\kappa^+}[x] \subset L_\alpha[x],$$

por lo que $\mathcal{P}^{L[x]}\kappa = \mathcal{P}^{L_\alpha[x]}\kappa$. Exactamente igual que en 1.20 (a pesar de que $L_\alpha[x]$ no tiene por qué ser un modelo de ZFC$-$AP) se prueba que

$$D = \{X \in \mathcal{P}^{L[x]}\kappa \mid \kappa \in j(X)\}.$$

es un ultrafiltro en $\mathcal{P}^{L[x]}\kappa$. Por lo tanto podemos considerar la ultrapotencia $\mathrm{Ult}^*_D(L[x])$. Basta probar que está bien fundada, pues entonces se cumple que $\mathrm{Ult}_D(L[x]) = L[x]$ y j_D es una inmersión elemental no trivial.

Supongamos que existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\omega}$ tal que $\bigwedge n \in \omega\ [f_{n+1}]^*\, R\, [f_n]^*$. Esto significa que

$$\{\delta < \kappa \mid f_{n+1}(\delta) \in f_n(\delta)\} \in D$$

para todo $n \in \omega$.

Sea λ un ordinal límite tal que $\bigwedge n \in \omega \; f_n \in L_\lambda[x]$. Sea

$$M = N(\kappa + 1 \cup \{f_n \mid n \in \omega\}) \prec L_\lambda[x].$$

El colapso transitivo de M ha de ser de la forma $L_\eta[x]$. Sea $\pi : M \longrightarrow L_\eta[x]$ la función colapsante. Observemos que $|\eta| = |L_\eta[x]| = |M| = \kappa < |\alpha|$, luego $\eta < \alpha$.

Sea $g_n = \pi(f_n)$. Claramente $\bigwedge \delta \leq \kappa \; \pi(\delta) = \delta$. Como f_n es una función de dominio κ, lo mismo se cumple en $L_\lambda[x]$ y en M, luego $g_n : \kappa \longrightarrow V$. (Aquí usamos que $\pi(\kappa) = \kappa$.)

Si $\alpha < \kappa$, se cumple que $f_{n+1}(\delta) \in f_n(\delta)$ si y sólo si esto se cumple en $L_\lambda[x]$, si y sólo si se cumple en M, si y sólo si $g_{n+1}(\delta) \in g_n(\delta)$ se cumple en $L_\eta[x]$ si y sólo si esto se cumple (en V). Por consiguiente

$$X_n = \{\delta < \kappa \mid g_{n+1}(\delta) \in g_n(\delta)\} \in D$$

para todo $n \in \omega$. La diferencia es que ahora sabemos que $g_n \in L_\eta[x] \subset L_\alpha[x]$, luego está definido $j(g_n)$. El hecho de que $X_n \in D$ se traduce en que

$$\kappa \in j(X_n) = \{\delta < j(\kappa) \mid j(g_{n+1})(\delta) \in j(g_n)(\delta)\},$$

de modo que $\bigwedge n \in \omega \; j(g_{n+1})(\kappa) \in j(g_n)(\kappa)$, lo cual es absurdo.

a) $\Rightarrow$ f) Si $X \in \mathcal{P}^{L[x]}\kappa$, sea $\mu > \kappa$ un cardinal regular. Por 3.24 tenemos que X es definible en $L_\mu[x]$ a partir del conjunto I_μ de indiscernibles. Por lo tanto, existe un término de Skolem t tal que

$$L_\mu[x] \vDash [X] = t[x_1, \ldots x_m, y_1, \ldots, y_n],$$

donde $x_1 < \cdots < x_m < \kappa \leq y_1 < \cdots < y_n$. Sea $C = I_\kappa \setminus (x_m + 1)$, que es c.n.a. en κ. Si $u \in C$, entonces, por la indiscernibilidad,

$$L_\mu[x] \vDash [u] \in t[x_1, \ldots x_m, y_1, \ldots, y_n],$$

es decir, $u \in X$, se cumple o no independientemente de la elección de u, por lo que $C \subset X$ o bien $C \subset \kappa \setminus X$.

f) $\Rightarrow$ c) Sea U el conjunto de todos los $X \in \mathcal{P}^{L[x]}\kappa$ que contienen un c.n.a. en κ. La hipótesis es que U es un ultrafiltro en $\mathcal{P}^{L[x]}\kappa$. Claramente es κ-completo y no principal, y la intersección de cualquier familia numerable de elementos de U es no vacía, por lo que 1.14 implica que la ultrapotencia $\mathrm{Ult}_U^*(L[x])$ está bien fundada, y claramente $\mathrm{Ult}_U(L[x]) = L[x]$, por lo que $j_U : L[x] \longrightarrow L[x]$ es una inmersión elemental no trivial. ■

Observaciones Aunque no ha hecho falta probarlo, es fácil ver que el ultrafiltro U construido al final de la prueba es normal sobre $L[x]$, con lo que en realidad es un ejemplo explícito de ultrafiltro iterable sobre $L[x]$.

En la propiedad e), la condición $\kappa < |\alpha|$ es esencial, pues según 2.7, si κ es un cardinal débilmente compacto y $\kappa < \alpha < \kappa^+$ existe una inmersión elemental no trivial $j : L_\alpha \longrightarrow L_\beta$ para cierto β. Es fácil ver que la prueba vale igualmente para $L_\alpha[x]$, con $x \subset V_\omega$. Como los cardinales débilmente compactos son consistentes con el axioma de constructibilidad y los sostenidos no, concluimos que la existencia de una inmersión elemental no trivial $j : L_\alpha[x] \longrightarrow L_\beta[x]$ no implica la existencia de $x^\sharp$.

Conviene insistir en que afirmaciones como e) no son expresables en ZFC, pero su inclusión en el teorema tiene sentido, pues a partir de una inmersión elemental concreta definida mediante una fórmula metamatemática es posible demostrar la existencia de $x^\sharp$ y, recíprocamente, a partir de la existencia de $x^\sharp$ es posible dar una fórmula explícita que define una inmersión elemental. ■

Ya hemos demostrado muchos resultados que muestran que la existencia de $x^\sharp$ implica $V \neq L[x]$. Por ejemplo, el hecho de que $\aleph_1$ es un indiscernible de Silver y en particular inaccesible$^{L[x]}$ implica que $\aleph_1 \neq \aleph_1^{L[x]}$. Vamos a ver que, de hecho, la brecha que $x^\sharp$ abre entre $L[x]$ y V es muy grande. Por ejemplo, el teorema siguiente implica que todo conjunto infinito contiene subconjuntos no constructibles respecto de x:

Teorema 3.31 *Si existe $x^\sharp$ y μ es un cardinal infinito, entonces $|\mathcal{P}^{L[x]}\mu| = \mu$.*

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que μ^+ es un cardinal no numerable, luego un indiscernible de Silver, luego es inaccesible$^{L[x]}$, luego $|2^\mu|^{L[x]} < \mu^+$, luego en $L[x]$ existe una biyección entre $\mathcal{P}^{L[x]}\mu$ y $|2^\mu|^{L[x]}$, que a su vez es biyectable con μ. ■

Pero esto todavía es poco:

Si M es un modelo de un lenguaje formal $\mathcal{L}$, se dice que $a \in M$ es *definible* en M si existe $\phi(x) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ tal que a es el único elemento de M que cumple $M \vDash \phi[a]$.

Por ejemplo, si M es un modelo transitivo de ZFC, entonces 0, 1, $\aleph_0$, $\aleph_1^M$, $\mathbb{R}^M$, el mínimo cardinal inaccesible^M (si existe) son ejemplos de conjuntos definibles en M. La fórmula que define a $\mathbb{R}^M$ es (cualquier equivalente sin descriptores de) $x = \mathbb{R}$.

Teorema 3.32 *Si $x \subset V_\omega$ y existe $x^\sharp$, entonces todo conjunto definible en $L[x]$ es numerable.*

DEMOSTRACIÓN: Es consecuencia de que $L_{\omega_1}[x] \prec L[x]$. Si $a \in L[x]$ es definible por la fórmula $\phi(u)$, entonces $L[x] \vDash \bigvee u\, \phi(u)$, luego $L_{\omega_1}[x] \vDash \bigvee u\, \phi(u)$, luego existe un $b \in L_{\omega_1}[x]$ tal que $L_{\omega_1}[x] \vDash \phi[b]$, luego $L[x] \vDash \phi[b]$, luego ha de ser $a = b \in L_{\omega_1}[x]$ y, por consiguiente, a es numerable. ■

Así, por ejemplo, si existe $0^\sharp$, se cumple que $\mathcal{P}^L\omega$ es numerable, luego sólo hay una cantidad numerable de subconjuntos constructibles de ω, así mismo, $\aleph_{27}^L$ es un ordinal numerable y, en general, alguien que "viva" en L se equivocará al identificar cualquier objeto que deba ser no numerable, pues el objeto que él reconozca como $\aleph_{27}$ o como $\mathbb{R}$ o como el menor cardinal débilmente compacto (que lo hay) será en realidad un elemento de L_{ω_1}. Todos los conjuntos que quedan fuera de L_{ω_1} serán conjuntos que ve, pero que no puede definir. Por ejemplo, verá al auténtico $\aleph_1$, pero no lo reconocerá como tal (ya hemos dicho que su $\aleph_1$ será en realidad un ordinal numerable), verá que $\aleph_1$ es un cierto cardinal débilmente compacto, pero no será ni "el menor cardinal débilmente compacto", ni "el $\aleph_1$-ésimo cardinal débilmente compacto" ni, en general, "el único conjunto tal que …"

Vamos a "rescatar" del contexto técnico de la sección precedente el significado de que $x^\sharp$ sea un conjunto notable:

Teorema 3.33 *Sea $x \subset V_\omega$ tal que exista $x^\sharp$ y sea $\alpha \in \Omega$ definido como el único ordinal que cumple*

$$L[x] \vDash \phi[\epsilon_1, \ldots, \epsilon_i, \alpha, \epsilon_{i+1}, \ldots, \epsilon_n],$$

donde $\epsilon_1 < \cdots < \epsilon_i < \alpha < \epsilon_{i+1} < \cdots < \epsilon_n$ son elementos de I_x. Entonces la sucesión $\epsilon_{i+1}, \ldots, \epsilon_n$ puede reemplazarse por cualquier otra sucesión creciente por encima de α.

Demostración: La fórmula ϕ tiene asociado un término de Skolem (definible) t_ϕ, de modo que $\alpha = L[x](t_\phi)[\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n]$. Por 3.13, tenemos que

$$L[x] \vDash t[\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n] \in \Omega \wedge t[\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n] < [\epsilon_{i+1}]$$
$$\rightarrow t[\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n] = t[\epsilon_1, \ldots, \epsilon_i, \epsilon'_{i+1}, \ldots, \epsilon'_n],$$

para toda sucesión $\epsilon_n < \epsilon'_{i+1} < \cdots < \epsilon'_n$, e igualmente,

$$L[x] \vDash t[\epsilon_1, \ldots, \epsilon_i, \epsilon'_{i+1}, \ldots, \epsilon'_n] \in \Omega \wedge t[\epsilon_1, \ldots, \epsilon_i, \epsilon'_{i+1}, \ldots, \epsilon'_n] < [\epsilon'_{i+1}]$$
$$\rightarrow t[\epsilon_1, \ldots, \epsilon_i, \epsilon'_{i+1}, \ldots, \epsilon'_n] = t[\epsilon_1, \ldots, \epsilon_i, \epsilon''_{i+1}, \ldots, \epsilon''_n],$$

para toda sucesión $\epsilon_i < \epsilon''_{i+1} < \cdots < \epsilon''_n < \epsilon'_{i+1}$.

Combinando ambos hechos y tomando ϵ'_1 suficientemente grande, concluimos que

$$L[x] \vDash t[\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n] \in \Omega \wedge t[\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n] < [\epsilon_{i+1}]$$
$$\rightarrow t[\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n] = t[\epsilon_1, \ldots, \epsilon_i, \epsilon''_{i+1}, \ldots, \epsilon''_n],$$

para cualquier sucesión $\epsilon_i < \epsilon''_{i+1} < \cdots < \epsilon''_n$. ■

Podemos generalizar esto a conjuntos que no sean ordinales. Si $a \in L[x]$ es arbitrario, podemos considerar el ordinal α tal que existe una semejanza $f : (L[x]_a^{\trianglelefteq_x}, \trianglelefteq_x) \longrightarrow \alpha$. Dicha semejanza existe y es única en $L[x]$, luego a puede definirse a partir de α en $L[x]$ (no necesitamos decir "a partir de α y x" porque x está interpretado por el relator R incluido en el lenguaje $\mathcal{L}_R$, luego "no cuenta" como parámetro). Por consiguiente, a es definible en $L[x]$ a partir de los mismos indiscernibles que α, luego podemos elegir arbitrariamente los indiscernibles mayores que α que aparezcan en la definición.

Esto tiene especial interés cuando, por ejemplo, $a \in L_{\aleph_1^{L[x]}}[x]$ (en particular, cuando $a \subset V_\omega$), pues entonces el ordinal α correspondiente es numerable, mientras que todos los indiscernibles de I_x son cardinales no numerables, por lo que, si a requiere n indiscernibles para ser definido, entonces puede ser definido por n indiscernibles cualesquiera. Veamos algunas aplicaciones de este hecho:

Teorema 3.34 *Sean x, $y \subset V_\omega$ tales que $x \in L[y]$ (o, equivalentemente, tales que $L[x] \subset L[y]$). Si existe $y^\sharp$, entonces también existe $x^\sharp$ y además $I_y \subset I_x$.*

Demostración: Sea κ un cardinal no numerable tal que $x \in L_\kappa[y]$. Entonces x es el único elemento de $L_\kappa[y]$ tal que

$$L_\kappa[y] \vDash \phi[x, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n],$$

para ciertos $\epsilon_1 < \cdots < \epsilon_n$ en $I_y \cap \kappa$ y cierta fórmula ϕ. Vamos a probar que $J = (I_y \cap \kappa) \setminus (\epsilon_n + 1)$ es un conjunto de indiscernibles para $L_\kappa[x]$, obviamente no numerable, con lo que 3.21 nos dará que existe $x^\sharp$.

Ahora bien, dada cualquier fórmula $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ y $\delta_1 < \cdots < \delta_n \in J$, tenemos que

$$L_\kappa[x] \vDash \psi[\delta_1, \ldots, \delta_n] \leftrightarrow L_\kappa[y] \vDash \bigvee x(\phi[x, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n] \wedge L[x] \vDash \psi[\delta_1, \ldots, \delta_n])$$

y por indiscernibilidad podemos sustituir $\delta_1, \ldots, \delta_n$ por cualquier otra sucesión creciente en J.

Supongamos ahora que existe un $\lambda \in I_y \setminus I_x$. Entonces existen indiscernibles $\delta_1 < \cdots < \delta_i < \lambda < \epsilon_1 < \cdots < \epsilon_j$ y una fórmula ϕ_0 tal que λ es el único elemento de $L[x]$ que cumple

$$L[x] \vDash \phi_0[\delta_1, \ldots, \delta_i, \lambda, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_j].$$

Por el teorema anterior, podemos sustituir $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_j$ por cualquier sucesión de indiscernibles en I_x mayores que λ. Más concretamente, podemos tomarlos en $I_x \cap I_y$ que es c.n.a. en κ. Similarmente, cada δ_k puede definirse en $L[y]$ como el único que cumple

$$L[y] \vDash \phi_k[\delta_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_n],$$

con $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ en I_y. Podemos suponer (tomando la unión) que son los mismos para todo k y que entre ellos se encuentran $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_j$. Por el teorema anterior los que son mayores que δ_k pueden tomarse arbitrariamente grandes en I_y, luego podemos exigir que ningún α_r sea precisamente λ.

Por último, por la observación posterior a 3.33 sabemos que x puede definirse en $L[y]$ a partir de cualquier indiscernibles arbitrariamente grandes, en particular distintos de λ, que podemos considerar incluidos también entre $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Consecuentemente, λ es el único elemento de $L[y]$ que cumple

$$L[y] \vDash \bigvee x x_1 \cdots x_i(\psi(x)[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \wedge$$
$$\phi_1(x_1)[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \wedge \cdots \wedge \phi_i(x_i)[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]) \wedge$$
$$L[x] \vDash \bar{\phi}_0(x_1, \ldots, x_i)[\lambda, \alpha_1, \ldots, \alpha_n],$$

donde $\bar{\phi}_0$ es la modificación adecuada de ϕ_0 para que las variables que realmente aparecen en ella sean las correspondientes a los α_k que coinciden con los ϵ_r. En resumen, λ es el único elemento de $L[y]$ que cumple

$$L[y] \vDash \chi[\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \lambda, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n],$$

para cierta fórmula χ, con $\alpha_1 < \cdots < \alpha_k < \lambda < \alpha_{k+1} < \ldots < \alpha_n$ en I_y, pero esto es claramente imposible. Por ejemplo, por la indiscernibilidad podemos sustituir $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$ por otros mayores, de forma que exista un $\lambda' \in I_y$ tal que $\alpha_1 < \cdots \alpha_k < \lambda < \lambda' < \alpha_{k+1} < \cdots < \alpha_n$, pero entonces, como también $\lambda \in I_y$, podemos cambiar λ por λ' y resulta que λ' también cumple la definición que supuestamente caracterizaba a λ, contradicción. ■

Así pues, si existe cualquier $x^\sharp$, también existe $0^\sharp$, y todos los indiscernibles de Silver para cualquier x están en I_0.

Es importante destacar que la existencia de $0^\sharp$ implica la existencia de un modelo (la clase L) en el que existe una clase propia de cardinales indescriptibles, en particular débilmente compactos, de Mahlo e inaccesibles. Sin embargo, podemos afirmar al mismo tiempo que la existencia de $0^\sharp$ (o de cualquier otro sostenido) no implica la existencia siquiera de cardinales inaccesibles:

Teorema 3.35 *Si es consistente que exista $0^\sharp$ (o cualquier otro sostenido) también es consistente que exista $0^\sharp$ y que no existan cardinales inaccesibles.*

Demostración: Supongamos que la existencia de $0^\sharp$ implicara la existencia de un cardinal inaccesible. Supongamos entonces que existe $0^\sharp$ y sea κ el menor cardinal inaccesible. Entonces V_κ es un modelo de ZFC en el que no existen cardinales inaccesibles, pero por el teorema 3.21 sigue cumpliéndose que existe $0^\sharp$, ya que $L_{\aleph_1}^{V_\kappa} = L_{\aleph_1}$ y si $I \subset L_{\aleph_1}$ es un conjunto no numerable de indiscernibles, claramente $I \in V_\kappa$ y es un conjunto no numerable de indiscernibles para $L_{\aleph_1}$ en V_κ. Entonces debería existir un cardinal inaccesible en V_κ, con lo que habríamos probado una contradicción en ZFC + existe $0^\sharp$". ■

Una variación mínima del argumento anterior prueba que si es consistente que existan todos los sostenidos, también es consistente suponer además que no existen cardinales inaccesibles.

Ahora demostramos el recíproco de 3.28:

Teorema 3.36 *Si $x \subset V_\omega$ y existe $x^\sharp$, entonces toda inmersión elemental $j : L[x] \longrightarrow L[x]$ se restringe a una aplicación $j|_{I_x} : I_x \longrightarrow I_x$ (la cual obviamente determina a j por la definibilidad de los conjuntos de $L[x]$).*

Demostración: Si j es la identidad la conclusión es trivial. En caso contrario, sea κ su punto crítico y veamos que $\kappa \in I_x$. Para probar este hecho podemos sustituir j por la inmersión elemental asociada a la ultrapotencia dada por el teorema 1.23 (pues tiene el mismo punto crítico), de modo que podemos afirmar que existe una clase propia de cardinales fijados por j (por 1.33).

Supongamos que $\kappa \notin I_x$. Entonces existen indiscernibles

$$x_1 < \cdots < x_m < \kappa < y_1 < \cdots < y_n$$

tales que κ es el único ordinal que cumple $L[x] \vDash [\kappa] = t[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n]$, para cierto término de Skolem t. Por 3.33, podemos suponer que $y_1, \ldots, y_n$ son fijados por j, la cual también fija a $x_1, \ldots, x_n$, por ser menores que su punto crítico, pero entonces, aplicando j a la definición de κ, llegamos a que $j(\kappa) = \kappa$, contradicción.

A partir de aquí volvemos a la inmersión j inicial, y tenemos que probar que si $\alpha \in I_x$ entonces $j(\alpha) \in I_x$, pero en virtud de lo que hemos demostrado basta probar que $j(\alpha)$ es el punto crítico de cierta inmersión elemental de $L[x]$. Para ello tomamos $N = N(j(\alpha) \cup j[I_x \setminus (\alpha+1)]) \prec L[x]$ (esto es formalizable en ZFC en virtud de 3.25. Entonces su colapso transitivo es necesariamente $L[x]$ y la inversa de la función colapsante es una inmersión elemental $j' : L[x] \longrightarrow L[x]$. Como $j(\alpha) \subset N$, es inmediato que j' fija a todos los ordinales menores que $j(\alpha)$. Sólo tenemos que probar que no fija a $j(\alpha)$ o, equivalentemente, que $j(\alpha) \notin N$.

En caso contrario existe un término de Skolem tal que

$$L[x] \vDash [j(\alpha)] = t[\delta_1, \ldots, \delta_m, j(\gamma_1), \ldots, j(\gamma_n)],$$

donde $\delta_1 < \cdots < \delta_n < j(\alpha)$ y $\alpha < \gamma_1 < \cdots < \gamma_n$, todos en I_x. En particular

$$L[x] \vDash \bigvee x_1 \cdots x_m < j(\alpha)\ [j(\alpha)] = t[x_1, \ldots, x_m, j(\gamma_1), \ldots, j(\gamma_n)],$$

luego, al ser j elemental,

$$L[x] \vDash \bigvee x_1 \cdots x_m < \alpha\ [\alpha] = t[x_1, \ldots, x_m, \gamma_1, \ldots, \gamma_n].$$

Sean, pues, $\eta_1 < \cdots < \eta_m < \alpha$ (no necesariamente indiscernibles) tales que

$$L[x] \vDash [\alpha] = t[\eta_1, \ldots, \eta_m, \gamma_1, \ldots, \gamma_n].$$

Ahora, cada η_i es definible en $L[x]$ a partir de indiscernibles, pero, en virtud de 3.33, los indiscernibles mayores que η_i que aparezcan en la definición de η_1 pueden escogerse mayores que α. Al sustituir dichas definiciones en la definición precedente de α obtenemos que

$$L[x] \vDash [\alpha] = t'[\beta_1, \ldots, \beta_k,],$$

donde $\beta_1 < \cdots < \beta_k$ están en $I_x \setminus \{\alpha\}$, pero de aquí se llega fácilmente a una contradicción, pues los $\beta_i > \alpha$ se pueden sustituir por otros mayores de modo que

$$\beta_1 < \cdots < \beta_r < \alpha < \alpha' < \beta_{r+1} < \cdots < \beta_k,$$

donde $\alpha' \in I_x$, y entonces por indiscernibilidad podemos concluir que $\alpha = \alpha'$. ■

3.4 Los sostenidos y la jerarquía de Lévy

Nos ocupamos ahora de la estructura lógica de las fórmulas que afirman la existencia de sostenidos. Ésta viene dada por el teorema siguiente:

Teorema 3.37 *La fórmula "Σ es un conjunto de E.M. notable y bien fundado para x" es Π_1, luego "Existe $x^\sharp$" es Σ_2.*

DEMOSTRACIÓN: En la definición de conjunto de E.M. hemos exigido que $\Sigma = \Sigma(M, I)$, donde M es un modelo de $\mathcal{L}_R$ elementalmente equivalente a un modelo $L_\lambda[x]$. Observemos que esta hipótesis nos ha hecho falta por tres motivos:

- Para garantizar que los modelos que satisfacen Σ tienen funciones de Skolem definibles,
- para definir Ω^M y probar que esta totalmente ordenado por la pertenencia en todo modelo que satisfaga Σ,
- para garantizar que todo modelo transitivo que satisfaga Σ es de la forma $L_\lambda[x]$, para cierto λ.

Ahora bien, para garantizar estos hechos no hace falta exigir que los modelos satisfagan todas las sentencias verdaderas en un $L_\lambda[x]$, sino únicamente un conjunto de ellas Σ_0^x definible explícitamente en términos de x.

Por ejemplo, para garantizar la existencia de funciones definibles en un modelo M basta con que satisfaga las sentencias

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n (\bigvee x_0\, \phi(x_0, \ldots, x_n) \to \overset{1}{\bigvee} x_0 (\phi(x_0, \ldots, x_n)$$
$$\wedge \bigwedge y (\phi(y, x_1, \ldots, x_n) \to \chi(x_0, y)))),$$

para toda $\phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_R)$ (donde $\chi(u, v)$ es la fórmula de $\mathcal{L}_R$ que define el buen orden $\trianglelefteq_x$), junto con las fórmulas que expresan que es una relación de orden. (En realidad, también se usa que $M \vDash \bigvee y \bigwedge x\; x \notin y$.)

El teorema 3.4 requiere en su prueba que M satisfaga varias sentencias, entre ellas

$$\bigvee f Y \alpha (\alpha = \omega \wedge \phi(f, Y, \alpha) \wedge \bigwedge y (Ry \to y \in Y)),$$

las sentencias $\bigvee y (\alpha_u(y) \wedge Ry)$, para cada $u \in V_\omega$, y otras más.

Cuando decimos que Σ_0^x puede definirse explícitamente queremos decir, más concretamente, que

$$y = \Sigma_0^x \leftrightarrow \phi_0(y, x, V_\omega),$$

donde ϕ_0 es una fórmula Δ_0 del lenguaje $\mathcal{L}$ de la teoría de conjuntos. El parámetro V_ω aparece para acotar todas las variables que hagan referencia a fórmulas, sucesiones finitas de fórmulas, números naturales, etc.). Una construcción detallada de ϕ_0 requiere definir sistemáticamente los conceptos lógicos: podemos suponer que los signos de $\mathcal{L}_R$ son los números naturales (p.ej. $R = 0$, $\in = 1$,

$==$ 2, $x_0 = 3$, $x_1 = 4$, ... Así, las sucesiones de signos son los elementos de $\omega^{<\omega} \subset V_\omega$, para definir una fórmula hace falta referirse a una sucesión de cadenas de signos (elementos de $(\omega^{<\omega})^{<\omega} \subset V_\omega$) que enumere las subfórmulas necesarias para construir la fórmula paso a paso, etc. Lo importante es que todas las definiciones necesarias para llegar a Σ_0^x involucran únicamente objetos de V_ω, por lo que pueden formalizarse acotando todas las variables por V_ω.

Si modificamos la definición de conjunto de E.M. sustituyendo "M es elementalmente equivalente a un modelo $L_\lambda[x]$" por "$M \vDash \Sigma_0^x$", todos los teoremas que hemos probado siguen siendo válidos. Como al final terminamos teniendo la unicidad de los conjuntos de E.M. notables y bien fundados para x, y uno de estos conjuntos respecto a la definición original lo es también respecto a la que acabamos de dar, concluimos que ambas definiciones son equivalentes.

Por otra parte, debemos recordar que todo modelo $L_\lambda[x]$ satisface las sentencias de Σ_0^x.

La fórmula "Σ es un conjunto de E.M. notable y bien fundado para x" equivale a

a) Σ es un conjunto de E.M. para x,

b) Σ es notable,

c) Para todo ordinal límite λ, el modelo (Σ, α, x) está bien fundado.

donde a) lo entendemos en el sentido débil que acabamos de explicar.

Sea $\mathcal{L}'$ el lenguaje formal que consta de los signos de $\mathcal{L}_R$ más un conjunto de constantes $\{c_n\}_{n\in\omega}$. Para cada fórmula ϕ de $\mathcal{L}_R$ sea ϕ' la sentencia de $\mathcal{L}'$ que resulta de sustituir la variable x_i por la constante c_i. Para cada conjunto Σ de fórmulas de $\mathcal{L}_R$ sea Σ' el conjunto formado por las siguientes sentencias de $\mathcal{L}'$:

Todas las sentencias de Σ_0^x	
ϕ'	para cada $\phi \in \Sigma$,
$c_i \in \Omega$	para cada $i \in \omega$,
$c_i < c_j$	para $i < j < \omega$,
$\phi(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) \leftrightarrow \phi(c_{j_1}, \ldots, c_{j_n})$	para cada $\phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_R)$,
	$i_1 < \cdots < i_n$, $j_1 < \cdots < j_n$.

Sea a$'$) la fórmula

$$\Sigma' \text{ es consistente} \land \bigwedge \phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_R)(\phi \in \Sigma \lor \neg\phi \in \Sigma),$$

donde la consistencia hay que entenderla en el sentido sintáctico de que no puede probarse una contradicción a partir de las sentencias de Σ'. Así mismo hay que entender que a$'$) es una fórmula con las variables libres Σ y x, es decir, la construcción de Σ' a partir de Σ forma parte de a$'$).

Veamos que a) $\land$ b) $\land$ c) es equivalente a a$'$) $\land$ b) $\land$ c).

En efecto, si se cumple a) $\land$ b) $\land$ c) entonces existe $x^\sharp$ y $L_{\omega_1}[x]$ es un modelo de Σ', interpretando las constantes $\{c_n\}_{n\in\omega}$ con indiscernibles. Por lo tanto Σ' es consistente. Por otra parte, si $\phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_R)$, se cumplirá $\phi \in \Sigma$ o $\neg\phi \in \Sigma$ según si $L_{\omega_1}[x]$ cumple o no ϕ al interpretar sus variables por indiscernibles.

Recíprocamente, si suponemos a$'$) $\wedge$ b) $\wedge$ c) entonces, por el teorema de completitud, Σ' tiene un modelo M con funciones de Skolem definibles en el cual $I = \{M(c_i) \mid i \in \omega\}$ es un conjunto numerable de indiscernibles. Además se cumple que $\Sigma = \Sigma(M, I)$, pues ciertamente todas las fórmulas de Σ (con las variables interpretadas en I) son verdaderas en M y, recíprocamente, si $M \vDash \phi[a_1, \ldots, a_n]$, con $a_1 < \cdots < a_n \in I$, ha de ser $\phi \in \Sigma$ o, de lo contrario $\neg\phi \in \Sigma$ y se cumpliría $M \vDash \neg\phi[a_1, \ldots, a_n]$. Por consiguiente Σ es un conjunto de E.M., es decir, se cumple a).

Una comprobación rutinaria muestra que a$'$) es equivalente a una fórmula $\phi_1(\Sigma, x, V_\omega)$, donde ϕ_1 es Δ_0. (La consistencia de Σ' significa que no existe ninguna sucesión finita de fórmulas de $\mathcal{L}'$ que demuestre $x \neq x$, y esto puede formularse acotando todas las variables en V_ω, tal y como hemos señalado antes.)

Los teoremas 3.11 y 3.13 caracterizan la propiedad b) en términos puramente sintácticos, luego b) también es equivalente a una formula $\phi_2(\Sigma, x, V_\omega)$ con ϕ_2 de tipo Δ_0.

Finalmente, la propiedad c) tiene esta estructura:

$$\bigwedge MEaI\lambda((M, E, a) \vDash \Sigma_0^x \wedge I \subset M \text{ es un conjunto de indiscernibles de}$$
$$\text{ordinal } \lambda \wedge M = N(I) \wedge \Sigma = \Sigma(M, I)) \rightarrow E \text{ está bien fundada en } M).$$

Queremos probar que esto es Π_1. Sabemos que “estar bien fundada” es Δ_1, luego basta probar que

$$(M, E, a) \vDash \Sigma_0^x \wedge I \subset M \text{ es un conjunto de indiscernibles de}$$
$$\text{ordinal } \lambda \wedge M = N(I) \wedge \Sigma = \Sigma(M, I))$$

es Σ_1.

Para definir la relación $(M, E, a) \vDash \phi[s]$, para $s \in M^{<\omega}$ (bajo el convenio de que los signos de $\mathcal{L}_R$ son números naturales) necesitamos construir una función $f : V_\omega \times M^{<\omega} \longrightarrow 2$ (sólo hemos de especificarla, no demostrar su existencia) de modo que $f(\phi, s) = 1$ si y sólo si el dominio de s incluye a todas las variables libres en ϕ y se cumple $M \vDash \phi[s]$. Todas las variables involucradas pueden acotarse por V_ω y $M^{<\omega}$. Para exigir que I tenga ordinal λ necesitamos una semejanza $g : (\lambda, \in) \longrightarrow (I, E)$. El punto más delicado es formalizar que $M = N(I)$, pero, una vez contamos con que $M \vDash \Sigma_0^x$, esto equivale a que todo elemento de M sea definible a partir de I, lo cual se formaliza sin dificultad. En resumen, podemos escribir nuestra fórmula como

$$\bigvee fgY(Y = M^{<\omega} \wedge f : V_\omega \times Y \longrightarrow 2 \wedge g : (\lambda, \in) \longrightarrow (I, E) \text{ semejanza} \wedge \cdots).$$

En definitiva, tenemos que la fórmula “Σ es un conjunto de E.M. notable y bien fundado para x” puede expresarse mediante una fórmula $\bigwedge X\psi(\Sigma, x, V_\omega)$, con ψ de tipo Δ_0. Ahora bien, $V_\omega = L_\omega$ y sabemos que $y = L_\alpha$ es de tipo Δ_1. Una simple manipulación nos da

$$\bigwedge Xyz(z = \omega \wedge y = L_z \rightarrow \psi(\Sigma, x, y)),$$

y esto es una fórmula $\phi(\Sigma, x)$ de tipo Π_1. ■

Nota Un análisis ligeramente más fino de la prueba del teorema anterior muestra que la fórmula "Σ es un conjunto de E.M. notable y bien fundado para x" es equivalente a una de la forma $\bigwedge y\ \psi(y, \Sigma, x)$, donde las variables Σ y x sólo aparecen en subfórmulas de tipo $u \in \Sigma$ y $u \in x$, pero nunca en la forma $\Sigma \in u$ o $x \in u$. La razón es que Σ es un conjunto de fórmulas, y sólo se hace referencia a él para expresar que todo $u \in \Sigma$ es una fórmula o para determinar si una fórmula está o no en Σ, e igualmente x sólo se usa para interpretar el relator R de $\mathcal{L}_R$, lo cuál sólo requiere decidir si ciertos $u \in V_\omega$ están o no en x. ■

Como consecuencia de este teorema y del teorema de Lévy-Shoenfield (teorema [PC 3.56]) obtenemos que los sostenidos son absolutos para modelos transitivos que sean clases propias:

Teorema 3.38 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC *tal que $\Omega \subset M$ y sea $x \in M$ tal que $x \subset V_\omega$. Entonces*

$$(\textit{existe } x^\sharp)^M \leftrightarrow \textit{existe } x^\sharp \land x^\sharp \in M.$$

Además, en tal caso $(x^\sharp)^M = x^\sharp$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\psi(y, \Sigma, x)$ una fórmula Δ_0 tal que $\bigwedge y\, \psi(y, \Sigma, x)$ equivalga a que Σ es un conjunto de E.M. notable y bien fundado para x.

Si existe $x^\sharp$ y $x^\sharp \in M$, entonces $\bigwedge y\, \phi(y, x^\sharp, x)$, luego también se cumple $\bigwedge y \in M\, \psi(y, x^\sharp, x)$, lo que significa que ($x^\sharp$ es un conjunto de E.M. notable y bien fundado para $x)^M$, es decir, (existe $x^\sharp)^M$ y $(x^\sharp)^M = x^\sharp$.

Supongamos ahora que (existe $x^\sharp)^M$. Sea $\Sigma = (x^\sharp)^M \subset V_\omega$. Hemos de probar que $\bigwedge y\, \psi(y, \Sigma, x)$.

Llamemos $a = \Sigma \times \{0\} \cup x \times \{1\} \subset V_\omega$. Claramente $a \in M$, luego $L[a] \subset M$. Por la nota posterior a 3.37 tenemos que las variables Σ y x sólo aparecen en ψ en subfórmulas de tipo $u \in \Sigma$ o $u \in x$. Sea $\psi'(y, a)$ la fórmula Δ_0 que resulta de reemplazar cada subfórmula $u \in \Sigma$ por $(u, 0) \in a$, y cada subfórmula $u \in x$ por $(u, 1) \in a$. Es claro entonces que $\neg \bigwedge y\, \psi(y, \Sigma, x)$ es equivalente a $\bigvee y \neg \psi'(y, a)$. En tal caso, por el teorema de Lévy-Shoenfield [PC 3.46], también $\bigvee y \in L[a] \neg \psi'(y, a)$, luego $\bigvee y \in M \neg \psi'(y, a)$, que es equivalente a $\neg \bigwedge y \in M\ \psi(y, \Sigma, x)$, es decir, a que $(\Sigma \neq x^\sharp)^M$, contradicción. ■

De aquí podemos extraer varias consecuencias interesantes:

- Si existe $x^\sharp$, entonces $L[x^\sharp]$ es un modelo de ZFC en el que también existe $x^\sharp$ y además cumple la HCG (por [PC 3.30]). Por lo tanto, si la existencia de un sostenido es consistente, también es consistente suponer además la HCG.

- A su vez, el teorema 3.35 nos da ahora que la existencia de $0^\sharp$ no implica siquiera la existencia de cardinales débilmente inaccesibles, pues al añadir la HCG se convierten en fuertemente inaccesibles.

- En $L[x^\sharp]$ existe $x^\sharp$, pero no existe $(x^\sharp)^\sharp$ (porque hemos visto que si existe $(x^\sharp)^\sharp$ entonces $V \neq L[x^\sharp]$). Por lo tanto, la existencia de un sostenido no implica la existencia de todos los demás.

Capítulo IV

Cardinales de Erdős y de Ramsey

Tal y como hemos indicado en el capítulo anterior, la existencia de $0^\sharp$ marca la frontera entre los cardinales grandes consistentes con $V = L$ y los que no lo son. Ahora vamos a estudiar una familia de cardinales que cruza esa frontera, de modo que los peldaños inferiores de la familia son consistentes con $V = L$ y los superiores implican que existe $x^\sharp$ para todo $x \subset V_\omega$.

El teorema [TC 11.3] nos da que la relación $\mu \longrightarrow (\kappa)^\omega$ es imposible para cardinales infinitos. Sin embargo, podemos definir una propiedad ligeramente más débil que da lugar a una nueva familia de cardinales grandes:

Definición 4.1 Sea μ un cardinal infinito, $\omega \leq \alpha \leq \mu$ un ordinal y $2 \leq m < \mu$ un cardinal. Llamaremos

$$\mu \longrightarrow (\alpha)_m^{<\omega}$$

a la fórmula:

> *Para toda partición $F : [\mu]^{<\omega} \longrightarrow m$ existe un conjunto $H \subset \mu$ con ordinal α tal que F es constante en cada conjunto $[H]^n$, para $n \in \omega$.*

Aquí $[\mu]^{<\omega}$ es el conjunto de todos los subconjuntos finitos de μ, que podemos identificar con el subconjunto de $\mu^{<\omega}$ formado por las sucesiones finitas crecientes.

Si un conjunto H cumple la fórmula anterior diremos que es *homogéneo* para F.

Notemos que no exigimos que F sea constante en $[H]^{<\omega}$, sino que permitimos que el valor que F toma sobre cada $[H]^n$ dependa de n. En caso contrario la propiedad sería falsa salvo en casos triviales. Como de costumbre, omitiremos el subíndice m cuando sea $m = 2$.

He aquí algunas observaciones sencillas:

- Una simplificación de la demostración del teorema [TC 11.2] prueba que la relación $\mu \longrightarrow (\alpha)^{<\omega}_m$ se conserva al aumentar μ o al reducir α y m.
- Si α es un cardinal infinito, es indistinto exigir que el conjunto homogéneo tenga ordinal α o cardinal α, pues todo conjunto de ordinales de cardinal α contiene un subconjunto de ordinal α.
- También es claro que $\mu \longrightarrow (\alpha)^{<\omega}_m$ implica $\mu \longrightarrow (\alpha)^n_m$ para todo $n < \omega$, pues toda partición de $[\mu]^n$ se puede extender a una de $[\mu]^{<\omega}$.

Para cada ordinal infinito α, en el supuesto de que exista un cardinal μ que cumpla $\mu \longrightarrow (\alpha)^{<\omega}$, llamaremos $\kappa(\alpha)$ al mínimo cardinal que cumple $\kappa(\alpha) \longrightarrow (\alpha)^{<\omega}$.

Claramente, si $\alpha \leq \beta$ y existe $\kappa(\beta)$, entonces existe $\kappa(\alpha) \leq \kappa(\beta)$. Enseguida veremos que si λ es un ordinal límite, entonces $\kappa(\lambda)$ es inaccesible, luego la existencia de $\kappa(\omega)$ no es demostrable en ZFC (ni, por tanto, la de los demás cardinales $\kappa(\alpha)$. Esto significa que no existe ningún teorema análogo al de Erdős-Rado que garantice que la relación $\mu \longrightarrow (\alpha)^{<\omega}_m$ se cumple para cardinales μ suficientemente grandes.

Los cardinales de la forma $\kappa(\lambda)$, donde λ es un ordinal límite, se llaman *cardinales de Erdős.*

Un cardinal κ es *de Ramsey* si cumple $\kappa \longrightarrow (\kappa)^{<\omega}$. Claramente, esto equivale a que $\kappa = \kappa(\kappa)$, luego todo cardinal de Ramsey es un cardinal de Erdős.

En particular, un cardinal de Ramsey cumple $\kappa \longrightarrow (\kappa)^2$, luego sólo falta una comprobación para concluir que los cardinales de Ramsey son débilmente compactos, y es que no son numerables:

Teorema 4.2 $\aleph_0 \not\longrightarrow (\aleph_0)^{<\omega}$*, por lo que* $\aleph_0$ *no es un cardinal de Ramsey y todo cardinal de Ramsey es débilmente compacto.*

Demostración: Sea $F : [\omega]^{<\omega} \longrightarrow 2$ dada por $F(x) = 1 \leftrightarrow |x| \in x$. Si $H \subset \omega$ es infinito, podemos tomar $n \in H$ y dos conjuntos $x, y \in [H]^n$ de manera que $|x| = |y| = n$, $n \in x$ y $n \notin y$. Así $F(x) = 1$ y $F(y) = 0$, luego F no es constante en $[H]^n$ y H no es homogéneo para F. ■

Así pues, la propiedad de Ramsey, al contrario de la de ser débilmente compacto, no es una generalización de una propiedad de $\aleph_0$. Por otra parte, los únicos cardinales $\kappa(\alpha)$ que son débilmente compactos son los de Ramsey:

Teorema 4.3 *Si* α *es un ordinal infinito y* $\kappa(\alpha)$ *es débilmente compacto, entonces* $\alpha = \kappa(\alpha)$ *es un cardinal de Ramsey.*

Demostración: En general es claro que $\alpha \leq \kappa(\alpha)$, pues $\kappa(\alpha)$ contiene subconjuntos de ordinal α, luego si α no es un cardinal de Ramsey $\alpha < \kappa(\alpha)$, pero esto hace que $\kappa = \kappa(\alpha)$ no sea Π^1_1-indescriptible, pues

$$(V_\kappa, \{\alpha\}) \vDash \bigvee\alpha\, R\alpha \wedge \bigwedge F_2 \bigvee h(F : [\Omega]^{<\omega} \longrightarrow 2 \to h \subset \Omega \wedge R(\operatorname{ord} h)$$
$$\wedge\ h \text{ es homogéneo para } F),$$

donde la variable F_2 es de segundo orden, con lo que la sentencia es Π^1_1, pero no es posible reflejar este hecho a un modelo $(V_\beta, V_\beta \cap \{\alpha\})$, con $\beta < \kappa$, ya que entonces β cumpliría $\beta \to (\alpha)^{<\omega}$. ■

Veamos las propiedades básicas de los cardinales $\kappa(\alpha)$:

Teorema 4.4 *Sea α un ordinal infinito tal que exista $\kappa(\alpha)$.*

a) Si $\alpha < \beta$ y existe $\kappa(\beta)$, entonces $\kappa(\alpha) < \kappa(\beta)$.

b) $\kappa(\alpha)$ es un cardinal regular.

c) Si α es un ordinal límite, entonces $\kappa(\alpha) \longrightarrow (\lambda)^{<\omega}_{2^{\aleph_0}}$.

Demostración: a) Para cada ordinal $\gamma < \kappa(\alpha)$, existe $f_\gamma : [\gamma]^{<\omega} \longrightarrow 2$ que no admite conjuntos homogéneos de ordinal α. Definimos $g : [\kappa(\alpha)]^{<\omega} \longrightarrow 2$ mediante

$$g(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = \begin{cases} f_{\gamma_n}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}) & \text{si } n > 1, \\ 0 & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

Si fuera $\kappa(\beta) \leq \kappa(\alpha)$, entones g tendría un conjunto homogéneo H de ordinal β y podríamos tomar $\gamma \in H$ tal que $H \cap \gamma$ tuviera ordinal α, pero $H \cap \gamma$ es homogéneo para f_γ, pues $f_\gamma(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = g(\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \gamma)$, que sólo depende de n, con lo que tenemos una contradicción.

b) Si $\operatorname{cf} \kappa(\alpha) = \delta < \kappa(\alpha)$, sea $c : \delta \longrightarrow \kappa(\alpha)$ cofinal creciente y consideremos la aplicación $h : \kappa(\alpha) \longrightarrow \delta$ que a cada $\epsilon < \kappa(\alpha)$ le asigna el menor $\gamma < \delta$ tal que $c(\gamma) > \epsilon$. Así h es creciente y todo $\gamma < \delta$ cumple $|h^{-1}[\gamma]| < \kappa(\alpha)$.

Consideremos particiones $f : [\delta]^{<\omega} \longrightarrow 2$ y $f_\gamma : [h^{-1}[\gamma]]^{<\omega} \longrightarrow 2$ que no admitan conjuntos homogéneos de ordinal α. Definimos $g : [\kappa(\alpha)]^{<\omega} \longrightarrow 2$ mediante

$$g(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2 \wedge h(\epsilon_1) = h(\epsilon_2), \\ 1 & \text{si } n = 2 \wedge h(\epsilon_1) < h(\epsilon_2), \\ f_\gamma(\epsilon_3, \ldots, \epsilon_n) & \text{si } n > 2 \wedge h(\epsilon_1) = \cdots = h(\epsilon_n) = \gamma, \\ f(h(\epsilon_3), \ldots, h(\epsilon_n)) & \text{si } n > 2 \wedge h(\epsilon_1) < \cdots < h(\epsilon_n), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $H' \subset \kappa(\alpha)$ homogéneo de ordinal α y sean ρ_1, ρ_2 sus dos primeros elementos. Como α es infinito, es claro que $H = H' \setminus \{\rho_1, \rho_2\}$ sigue teniendo ordinal α.

Si $g[[H']^2] = \{0\}$, entonces $h[H'] = \{\gamma\}$, para un cierto $\gamma < \delta$, y completando n-tuplas con ρ_1 y ρ_2 vemos que H es homogéneo para f_γ, con lo que tenemos una contradicción.

Así pues, $g[[H']^2] = \{1\}$, lo que implica que $h|_{H'}$ es estrictamente creciente, luego $h[H']$ tiene ordinal α, de donde concluimos que H es homogéneo para f, y de nuevo tenemos una contradicción.

c) Sea $f : [\kappa(\alpha)]^{<\omega} \longrightarrow {}^{\omega}2$. Para cada $n < \omega$, llamemos $f_n = f|_{[\kappa(\alpha)]^n}$ y, para cada $k < \omega$, sea $f_{n,k} : [\kappa(\alpha)]^n \longrightarrow 2$ dada por

$$f_{n,k}(\beta_1, \ldots, \beta_n) = f_n(\beta_1, \ldots, \beta_n)(k).$$

Sea $\pi : \omega \longrightarrow \omega \times \omega$ biyectiva tal que si $\pi(m) = (n, k)$ entonces $m \geq n$ y sea $g_m : [\kappa(\alpha)]^m \longrightarrow 2$ dada por

$$g_m(\beta_1, \ldots, \beta_m) = f_{n,k}(\beta_1, \ldots, \beta_n), \qquad \text{donde } \pi(m) = (n, k).$$

Las g_m forman una partición $g : [\kappa(\alpha)]^{<\omega} \longrightarrow 2$, luego existe $H \subset \kappa(\alpha)$ homogéneo para g y de ordinal α. Basta probar que H es homogéneo para f. En caso contrario,

$$f(\beta_1, \ldots, \beta_n) \neq f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n),$$

con todos los argumentos en H. Entonces, existe n $k \in \omega$ tal que

$$f_{n,k}(\beta_1, \ldots, \beta_n) \neq f_{n,k}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n),$$

pero si $\pi(m) = (n, k)$ entonces, extendiendo ambas sucesiones en H (y aquí usamos que α es un ordinal límite), tenemos que

$$g_m(\beta_1, \ldots, \beta_m) \neq g_m(\gamma_1, \ldots, \gamma_m),$$

contradicción. ■

Vamos a mejorar el último apartado del teorema anterior demostrando que en realidad $\kappa(\alpha) \longrightarrow (\alpha)^{<\omega}_m$ para todo cardinal $2 \leq m < \kappa(\alpha)$. Conviene observar que para los cardinales de Ramsey hay un argumento bastante más simple que el requerido para el caso general:

Teorema 4.5 *Si κ es un cardinal de Ramsey entonces $\kappa \longrightarrow (\kappa)^{<\omega}_m$ para todo cardinal $2 \leq m < \kappa$.*

Demostración: Sea $F : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow m$ y sea $G : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow 2$ definida como sigue: Si $\alpha_1 < \cdots < \alpha_k < \alpha_{k+1} < \cdots < \alpha_{2k} < \kappa$ y

$$F(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}) = F(\{\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{2k}\})$$

entonces $G(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{2k}\}) = 1$, y en cualquier otro caso G toma el valor 0. Sea H homogéneo para G con $|H| = \kappa$. Notemos que si $x \in [H]^{2k}$ se ha de cumplir $G(x) = 1$. En efecto, como $|H| = \kappa > m$, podemos dividir H en κ sucesiones crecientes de longitud k y tomar dos de ellas en las que F coincide, es decir, existen ordinales $\alpha_1 < \cdots < \alpha_k < \alpha_{k+1} < \cdots < \alpha_{2k}$ en H tales que $F(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}) = F(\{\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{2k}\})$, luego $G(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{2k}\}) = 1$ y, por homogeneidad, lo mismo vale para todo $[H]^{2k}$.

Veamos que H es homogéneo para F. Si $\alpha_1 < \cdots < \alpha_k, \beta_1 < \cdots < \beta_k$ están en H, tomamos $\gamma_1 < \cdots < \gamma_k$ en H tales que α_k, $\beta_k < \gamma_1$ (podemos suponer que H no tiene máximo).

Entonces $G(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_k\}) = G(\{\beta_1, \ldots, \beta_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_k\}) = 1$, lo que significa que $F(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}) = F(\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}) = F(\{\beta_1, \ldots, \beta_k\})$. ■

Muchos resultados sobre cardinales de Erdős (como la generalización del teorema anterior) pueden probarse con técnicas similares, definiendo particiones oportunas, pero los argumentos se vuelven cada vez más sofisticados. Sin embargo, es posible llegar a las mismas conclusiones con argumentos más conceptuales relacionados con la teoría de modelos y con la existencia de indiscernibles. El resultado fundamental sobre particiones e indiscernibles resulta ser muy simple, pero también muy fructífero:

Teorema 4.6 *Sean κ y μ cardinales infinitos y λ un ordinal límite de manera que $\kappa \longrightarrow (\lambda)^{<\omega}_{2^\mu}$. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje formal tal que $|\mathcal{L}| \leq \mu$ y M un modelo de $\mathcal{L}$ con $\kappa \subset M$. Entonces M tiene un conjunto de indiscernibles de ordinal λ.*

DEMOSTRACIÓN: Se cumple que $|\mathrm{Form}(\mathcal{L})| \leq \mu$ y $|\mathcal{P}\mathrm{Form}(\mathcal{L})| \leq 2^\mu$. Sea $F : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{P}\mathrm{Form}(\mathcal{L})$ la aplicación que asigna a cada $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \kappa$ el conjunto

$$F(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) = \{\phi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}) \mid M \vDash \phi[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]\}.$$

Es claro que un conjunto homogéneo para F es un conjunto de indiscernibles para M. ■

Con esto ya podemos probar:

Teorema 4.7 *Si λ es un ordinal límite tal que existe $\kappa(\lambda)$ y $2 \leq m < \kappa(\lambda)$, entonces $\kappa(\lambda) \longrightarrow (\lambda)^{<\omega}_m$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $F : [\kappa(\lambda)]^{<\omega} \longrightarrow m$ y tomemos $G : [m]^{<\omega} \longrightarrow 2$ tal que m no tenga subconjuntos homogéneos de ordinal λ. Para cada $n \in \omega$ sea $F_n = F|_{[\kappa(\lambda)]^n}$ y $G_n = G|_{[m]^n}$. Consideremos el lenguaje formal $\mathcal{L}$ que resulta de añadir al lenguaje de ZFC dos familias numerables de funtores $\{f_n\}_{n\in\omega}$ y $\{g_n\}_{n\in\omega}$, donde el subíndice coincide con el número de argumentos, y sea M el modelo de $\mathcal{L}$ de universo $V_{\kappa(\lambda)}$ en el que cada f_n se interpreta como F_n sobre las sucesiones crecientes de ordinales y como 0 par el resto de argumentos, e igualmente con g_n.

Por el teorema anterior, M tiene un conjunto de indiscernibles $H \subset \kappa(\lambda)$ de ordinal λ. Basta probar que H es homogéneo para F. A su vez, basta probar que

$$F_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = F_n(\beta_1, \ldots \beta_n)$$

para toda sucesión $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \beta_1 < \cdots < \beta_n$ de indiscernibles, pues si $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ y $\alpha'_1 < \cdots < \alpha'_n$ son dos sucesiones arbitrarias de indiscernibles, siempre podemos tomar una tercera $\beta_1 < \cdots < \beta_n$ mayor que ambas y aplicar el caso indicado.

Notemos que la igualdad que queremos probar se cumplirá para todas las sucesiones crecientes de indiscernibles si y sólo si se cumple para una de ellas (por indiscernibilidad), luego por reducción al absurdo podemos suponer que no se cumple para ninguna.

Claramente, podemos dividir λ en una sucesión $\{s_\delta\}_{\delta<\lambda}$ de sucesiones crecientes de longitud n, de modo que si $\delta < \epsilon < \lambda$ el último término de s_δ es menor que el primero de s_ϵ. Entonces, $F_n(s_0) \neq F_n(s_1)$, pero si fuera $F_n(s_0) > F_n(s_1)$, por indiscernibilidad $\{F_n(s_\delta)\}_{\delta<\lambda}$ sería una sucesión decreciente de ordinales, lo cual es absurdo. Por lo tanto tiene que ser $F_n(s_0) < F_n(s_1)$ y la sucesión $\{F_n(s_\delta)\}_{\delta<\lambda}$ es estrictamente creciente, con lo que $H = \{F_n(s_\delta) \mid \delta < \lambda\}$ es un subconjunto de m de ordinal λ. Basta probar que H es homogéneo para G, con lo que tendremos una contradicción.

Consideramos la relación

$$g(f(s_{\delta_1}), \ldots, f(d_{\delta_k})) = g(f(s_{\epsilon_1}), \ldots, f(d_{\epsilon_k})).$$

Como puede expresarse en términos de la satisfacción en M de una fórmula de $\mathcal{L}$, por la indiscernibilidad tiene que ser cierta para todas las sucesiones $\delta_1 < \cdots < \delta_k < \epsilon_1 < \cdots < \epsilon_k$ o falsa para todas ellas, pero si fuera falsa para todas, tomando tres de ellas, tendríamos tres valores diferentes, cuando g sólo puede tomar los valores 0, 1. Por lo tanto, se da siempre la igualdad, y eso implica que H es homogéneo (por el mismo argumento de antes, es decir, para comparar dos sucesiones, se toma una tercera mayor que ambas). ■

Como consecuencia:

Teorema 4.8 *Si λ es un ordinal límite y existe $\kappa(\lambda)$, entonces $\kappa(\lambda)$ es un cardinal inaccesible.*

Demostración: Sólo hay que probar que $\kappa(\lambda)$ es un límite fuerte. Si existe $\mu < \kappa(\lambda)$ tal que $\kappa(\lambda) \leq 2^\mu$, entonces, por el teorema anterior tendríamos que $2^\mu \to (\alpha)^{<\omega}_\mu$, y en particular $2^\mu \to (3)^2_\mu$, en contradicción con [TC 11.7]. ■

Esto implica, tal y como ya habíamos señalado, que en ZFC no es posible demostrar que existan cardinales de Erdős. Por otra parte, si existe un cardinal de Ramsey κ, como es inaccesible, V_κ es un modelo transitivo de ZFC, y es claro que, para todo $\omega \leq \alpha < \kappa$, el cardinal $\kappa(\alpha)$ sigue siendo $\kappa(\alpha)$ en V_κ, por lo que V_κ es un modelo transitivo de ZFC en el que existe $\kappa(\alpha)$ para todo ordinal infinito α. En otras palabras, si es consistente que exista un cardinal de Ramsey, es consistente que existan todos los cardinales de Erdős.

Esto nos permite reformular el teorema 4.6:

Teorema 4.9 *Sea λ un ordinal límite, $\mathcal{L}$ un lenguaje formal tal que $|\mathcal{L}| < \kappa(\lambda)$ y M un modelo de $\mathcal{L}$ con $\kappa(\lambda) \subset M$. Entonces M tiene un conjunto de indiscernibles de ordinal λ.*

Y de aquí el teorema 3.21 implica inmediatamente:

Teorema 4.10 *Si existe $\kappa(\omega_1)$, entonces existe $x^\sharp$ para todo $x \subset V_\omega$.*

Así pues, la existencia de $\kappa(\omega_1)$ es incompatible con el axioma de constructibilidad. Por el contrario, probamos a continuación que $V = L$ es consistente con la existencia de todos los cardinales de Erdős correspondientes a ordinales numerables.

Definición 4.11 Sea κ un cardinal infinito, sea $2 \leq m < \kappa$, sea $F : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow m$ y α un ordinal numerable. Sea $g : \omega \longrightarrow \alpha$ biyectiva. Diremos que $h \in {}^n\kappa$ es compatible con g si $\bigwedge ij \in n(g(i) \in g(j) \leftrightarrow h(i) \in h(j))$. Llamamos

$$\mathbb{P}(F, g) = \{h \in \kappa^{<\omega} \mid h \text{ es compatible con } f \wedge \Re h \text{ es homogéneo para } F\}.$$

Consideramos a $\mathbb{P}$ como conjunto parcialmente ordenado por la inversa de la inclusión.

Teorema 4.12 *En las condiciones anteriores, F admite un conjunto homogéneo de ordinal α si y sólo si $\mathbb{P}(F, g)$ está bien fundado.*

DEMOSTRACIÓN: Si H es homogéneo para F y tiene ordinal α, llamemos $s : \alpha \longrightarrow H$ a la semejanza correspondiente y sea $h = g \circ s : \omega \longrightarrow \kappa$. Así, es claro que $\bigwedge ij \in \omega(g(i) \in g(j) \leftrightarrow h(i) \in h(j))$, luego $\bigwedge n \in \omega\ h|_n \in \mathbb{P}$, lo que nos da una cadena decreciente en $\mathbb{P}$ que prueba que no está bien fundado.

Recíprocamente, si $\{h_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión decreciente en $\mathbb{P}$, podemos formar $h = \bigcup\limits_{n\in\omega} h_n : \omega \longrightarrow \kappa$ y es claro que $H = h[\omega]$ es homogéneo para F. Además se cumple que $\bigwedge ij \in \omega(g(i) \in g(j) \leftrightarrow h(i) \in h(j))$, luego la composición $g^{-1} \circ h : \alpha \longrightarrow H$ es una semejanza, y H tiene ordinal α. ■

Teorema 4.13 (Silver) *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea $\kappa \in M$ un cardinal, sea $2 \leq m < \kappa$ y $\omega \leq \alpha < \omega_1^M$. Si $\kappa \longrightarrow (\alpha)_m^{<\omega}$, entonces $(\kappa \longrightarrow (\alpha)_m^{<\omega})^M$*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos una partición $F : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow m$ tal que $F \in M$ y fijemos $g : \omega \longrightarrow \alpha$ biyectiva, $g \in M$. Es fácil ver entonces que $\mathbb{P}(F, g)$ es absoluto para M y, en particular, $\mathbb{P}(F, g) \in M$. Por hipótesis F tiene un conjunto homogéneo de ordinal α, luego por el teorema anterior $\mathbb{P}$ está bien fundado, pero esto es una propiedad Δ_1 (véase [PC 1.1]), luego es absoluta para M, luego $\mathbb{P}$ está bien fundado^M, luego existe en M un conjunto homogéneo para F de ordinal α. ■

Así pues, si existe $\kappa(\alpha)$ y α es numerable en L, entonces también existe $\kappa(\alpha)^L$. En particular, si existe $\kappa(\omega_1)$, entonces $(\bigwedge \alpha < \omega_1 \text{ existe } \kappa(\alpha))^L$, pero, según hemos visto, no existe $\kappa(\omega_1)^L$.

De este modo, $\kappa(\omega_1)$ es el menor de los cardinales grandes que hemos definido hasta ahora que implica la existencia de conjuntos no constructibles.

Todavía podemos decir más, y es que la existencia de $x^\sharp$ implica consistencia de que existan los cardinales de Erdős correspondientes a ordinales numerables:

Teorema 4.14 *Si existe $x^\sharp$, κ es un indiscernible de Silver para $L[x]$ y α es un ordinal numerable$^{L[x]}$, entonces $(\kappa \longrightarrow (\alpha)^{<\omega})^{L[x]}$, luego se cumple*

$$(\bigwedge \alpha < \omega_1 \ \textit{existe}\ \kappa(\alpha))^{L[x]}$$

Demostración: Por la indiscernibilidad, basta probarlo cuando κ es un cardinal no numerable. Tomemos $F \in L[x]$ tal que $F : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow 2$. Entonces F puede definirse en $L[x]$ como el único conjunto que cumple

$$L[x] \vDash \phi[F, i_{\delta_0}, \ldots, i_{\delta_n}, i_{\delta_{n+1}}, \ldots, i_{\delta_m}],$$

para cierta sucesión creciente $\delta_0 < \cdots < \delta_n < \kappa \leq \delta_{n+1} < \cdots < \delta_m$. Consideremos $H = \{i_{\delta_n+1+\beta} \mid \beta < \alpha\}$, que es un conjunto de ordinal α y, como κ es un cardinal no numerable, se cumple que $\delta_n + 1 + \beta < \kappa$, luego $i_{\delta_n+1+\beta} < i_\kappa = \kappa$. Por lo tanto $H \subset \kappa$.

Además H es homogéneo para F, pues si $F(i_{\delta_n+1+\beta_1}, \ldots, i_{\delta_n+1+\beta_k}) = 1$, entonces

$$L[x] \vDash \bigvee f(\phi(f)[i_{\delta_0}, \ldots, i_{\delta_n}, i_{\delta_{n+1}}, \ldots, i_{\delta_m}] \wedge f([i_{\delta_n+1+\beta_1}, \ldots, i_{\delta_n+1+\beta_k}]) = 1),$$

y por indiscernibilidad lo mismo vale si cambiamos $\beta_1 < \cdots < \beta_k < \alpha$ por cualquier otra sucesión creciente $\beta'_1 < \cdots < \beta'_k < \alpha$, de donde concluimos que $F(i_{\delta_n+1+\beta'_1}, \ldots, i_{\delta_n+1+\beta'_k}) = 1$, y lo mismo vale si la imagen fuera 0 en lugar de 1, es decir, que F es constante en $[H]^k$.

El mismo argumento empleado en la prueba del teorema 4.13 nos da que la existencia de un conjunto homogéneo para F implica la existencia de uno en $L[x]$, luego se cumple $(\kappa \longrightarrow (\alpha)^{<\omega})^{L[x]}$ y esto implica la existencia de $\kappa(\alpha)^{L[x]}$.

■

Nota En el caso en que $\omega_1^{L[x]} < \omega_1$, podríamos preguntarnos si la existencia de $\kappa(\omega_1^{L[x]})$ implica la existencia de $x^\sharp$, pero la respuesta es negativa. De hecho, si existe $x^\sharp$, podemos construir un modelo M en el que $\omega_1^{L[x]} < \omega_1$, existen todos los cardinales de Erdős $\kappa(\lambda)$ para $\lambda < \omega_1$, pero en el que no existe $x^\sharp$. En efecto, si existe $x^\sharp$, sabemos que $\omega_2^{L[x]}$ es numerable, luego $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega_0, \omega_1, \aleph_0)^{L[x]}$ tiene sólo una cantidad numerable de conjuntos densos en $L[x]$, por lo que existe un filtro G $\mathbb{P}$-genérico sobre $L[x]$ y podemos considerar $L[x] \subset M = L[x][G] \subset V$. Sabemos que en M se cumple $\omega_1 = \omega_2^{L[x]}$, por lo que no existe $x^\sharp$ (si existiera, $\omega_2^{L[x]}$ debería ser numerable en M). Sin embargo, si $\omega_1^{L[x]} \leq \lambda < \omega_1^M \leq \omega_1$, tenemos que existe $\kappa = \kappa(\lambda)$ y por 4.13 también existe en M. ■

Hasta ahora sólo hemos probado que los cardinales de Erdős son inaccesibles, y sólo a partir de $\kappa(\omega_1)$ tenemos que implican la consistencia de que existan cardinales inefables e indescriptibles (porque los indiscernibles de Silver tienen estas propiedades en L), pero no tenemos ningún resultado que afirme que los cardinales de Erdős cumplan alguna propiedad más fuerte que la inaccesibilidad ni de que impliquen la existencia (no la mera consistencia) de otros cardinales grandes. Para obtener resultados en esta línea empezamos probando que podemos extender el teorema 4.7 hasta particiones de tamaño $\kappa(\lambda)$ a costa de introducir una ligera restricción:

Definición 4.15 Si κ es un cardinal infinito y $C \subset \kappa$, diremos que una partición $F : [C]^{<\omega} \longrightarrow \kappa$ es *regresiva* si $\bigwedge x \in [C]^{<\omega}\ F(x) < \min x$.

Teorema 4.16 *Sea λ un ordinal límite tal que exista $\kappa(\lambda)$, sea $C \subset \kappa(\lambda)$ c.n.a. y $F : [C]^{<\omega} \longrightarrow \kappa(\lambda)$ una partición regresiva. Entonces existe $H \subset C$ homogéneo para F de ordinal λ.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $C \subset \kappa(\lambda)$ un c.n.a. (y no perdemos generalidad si suponemos que contiene únicamente ordinales infinitos) y consideremos una partición $F : [C]^{<\omega} \longrightarrow \kappa(\alpha)$. Para cada $\omega \leq \beta < \kappa(\alpha)$, sea $G_\beta : [\beta]^{<\omega} \longrightarrow 2$ una partición que no admita subconjuntos homogéneos de ordinal λ. Para cada $n < \omega$ sea $f_n = F|_{[C]^{n+1}}$ y sea $g_n : [\kappa(\lambda)]^{n+1} \longrightarrow \kappa(\lambda)$ dada por

$$g_n(\beta_0, \ldots, \beta_n) = G_{\beta_n}(\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}).$$

Vamos a considerar a $M = \kappa(\alpha)$ como modelo de un lenguaje formal $\mathcal{L}$ cuyos signos particulares sean un relator $\leq$ (que se interpreta como la relación de orden usual en $\kappa(\alpha)$), un relator R (que se interpreta como la pertenencia a C) y funtores $\bar{f}_n$ y $\bar{g}_n$ (que se interpretan como las funciones f_n y g_n, respectivamente, extendidas de cualquier forma fuera de sus dominios). Notemos que $|\mathcal{L}| = \aleph_0$.

Por 4.6 sabemos que M admite un conjunto I de indiscernibles de ordinal λ. Más aún, de la prueba se sigue que podemos exigir $I \subset C$ (podemos trabajar con la restricción a $[C]^{<\omega}$ de la partición considerada en la prueba). Llamamos β_0 al menor elemento de C que es el mínimo elemento de un conjunto de indiscernibles $I \subset C$ de M de ordinal λ. Sea $\{\beta_\delta\}_{\delta<\lambda}$ una enumeración de dicho conjunto I.

Observemos que β_δ no tiene un inmediato anterior en C, pues en caso contrario, por la indiscernibilidad, todo β_δ tendría un inmediato anterior β'_δ en C, pero entonces $\{\beta'_\delta\}_{\delta<\lambda}$ sería también un conjunto de indiscernibles, ya que se cumpliría $M \vDash \phi(\beta'_{\delta_1}, \ldots, \beta'_{\delta_n})$ si y sólo si $M \vDash \phi'(\beta_{\delta_1}, \ldots, \beta_{\delta_n})$, donde ϕ' es la fórmula que afirma que los anteriores de los β_{δ_i} cumplen ϕ, y por indiscernibilidad podríamos cambiar $(\beta_{\delta_1}, \ldots, \beta_{\delta_n})$ por cualquier otra sucesión creciente de elementos de I, y a su vez podríamos volver a la sucesión de sus inmediatos anteriores con la fórmula ϕ. Esto contradiría la minimalidad de β_0.

Vamos a probar que I es homogéneo para F. En caso contrario existe un $m \in \omega$ tal que

$$f_m(\beta_0, \ldots, \beta_m) \neq f_m(\beta_{m+1}, \ldots, \beta_{2m+1}).$$

Para cada $\delta < \lambda$ sea $\gamma_\delta = f_m(\beta_{(m+1)\delta}, \ldots, \beta_{(m+1)\delta+m})$. Así $\gamma_0 \neq \gamma_1$ y, por la indiscernibilidad, la sucesión $\{\gamma_\delta\}_{\delta<\lambda}$ tiene que ser estrictamente creciente (ya que estrictamente decreciente es imposible). Sea $\epsilon_\delta = \mathrm{mín}(C \setminus (\gamma_\delta + 1))$.

Se cumple que $\gamma_0 = f_m(\beta_0, \ldots, \beta_m) < \beta_0$, luego hay infinitos ordinales en C entre γ_0 y β_0, luego $\epsilon_0 < \beta_0$.

Si $\epsilon_0 < \epsilon_1$, la indiscernibilidad de los β_i implica nuevamente que $\{\epsilon_\delta\}_{\delta<\lambda}$ es un conjunto de indiscernibles para M de ordinal λ contenido en C con $\epsilon_0 < \beta_0$, lo que contradice la minimalidad de β_0.

Si $\epsilon_1 < \epsilon_0$ la indiscernibilidad de los β_i nos da que $\{\epsilon_\delta\}_{\delta<\lambda}$ es una sucesión decreciente de ordinales.

Por último, si $\epsilon_0 = \epsilon_1$, entonces la sucesión $\{\epsilon_\delta\}_{\delta<\lambda}$ es constante, luego tenemos que $\bigwedge\delta < \lambda\ \gamma_\delta < \epsilon_0$ y el conjunto $\{\gamma_\delta \mid \delta < \lambda\}$ es homogéneo para G_{ϵ_0}, pues

$$G_{\epsilon_0}(\gamma_{\delta_0},\ldots,\gamma_{\delta_n}) = g_{n+1}(\gamma_{\delta_0},\ldots,\gamma_{\delta_n},\epsilon_0) = g_{n+1}(\gamma_{\delta_0},\ldots,\gamma_{\delta_n},\epsilon_{\delta_{n+1}}),$$

y estos números (que son todos 0 o 1) pueden ser descritos en M a partir de los indiscernibles que definen a $(\gamma_{\delta_0},\ldots,\gamma_{\delta_{n+1}})$. Como no pueden ser distintos dos a dos, tienen que ser todos iguales. Esto contradice la elección de G_{ϵ_0}. ■

De aquí podemos extraer varias consecuencias:

Teorema 4.17 *Todo cardinal de Ramsey es casi inefable, y todo cardinal de Erdős es sutil.*

Demostración: Probaremos los dos resultados al mismo tiempo. Partimos de un cardinal de Erdős $\kappa = \kappa(\lambda)$ (que será de Ramsey si $\lambda = \kappa$). Fijemos un c.n.a. $C_0 \subset \kappa$ y sea $C = C \cap C'$, donde C' es el c.n.a. formado por los cardinales infinitos menores que κ. Fijemos $g : \kappa \times \kappa \longrightarrow \kappa$ biyectiva tal que $g[\alpha \times \alpha] = \alpha$ para todo $\alpha \in C$ y $g(0,0) = 0$.

Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ tal que $A_\alpha \subset \alpha$ y definamos $f : [C]^2 \longrightarrow \kappa$ como sigue: si $\alpha < \beta$ están en C y $A_\alpha = A_\beta \cap \alpha$, definimos $f(\{\alpha,\beta\}) = 0$. Si, por el contrario, $A_\alpha \neq A_\beta \cap \alpha$, tomamos el mínimo $\delta \in \alpha \cap (A_\alpha \triangle A_\beta)$. Si $\delta \in A_\alpha$ definimos $f(\{\alpha,\beta\}) = g(\delta,1)$, mientras que si $\delta \in A_\beta$ entonces $f(\{\alpha,\beta\}) = g(\delta,2)$. Claramente f puede extenderse a una partición regresiva en $[C]^{<\omega}$, por lo que el teorema anterior nos da un conjunto $H \subset C$ homogéneo para f de ordinal λ.

El valor constante que toma f en $[H]^2$ no puede ser $g(\delta,i)$, porque entonces, tomando $\alpha < \beta < \gamma$ en H, tendría que cumplirse que $\delta \in (A_\alpha \setminus A_\beta) \cup (A_\beta \setminus A_\gamma)$ (si $i = 1$) o bien $\delta \in (A_\beta \setminus A_\alpha) \cup (A_\gamma \setminus A_\beta)$ (si $i = 2$) y ambos casos son imposibles.

Por lo tanto, f toma el valor 0 en $[H]^2$, lo cual significa que si $\alpha < \beta$ están en H, entonces $A_\alpha = A_\beta \cap \alpha$. Como $H \subset C$, esto prueba que κ es sutil.

Si además $\kappa = \lambda$, entonces H tiene cardinal κ, luego no está acotado en κ. Sea $A = \bigcup_{\beta\in H} A_\beta$. Así, si $\alpha \in H$, se cumple que $A \cap \alpha = \bigcup_{\beta\in H} A_\beta \cap \alpha = A_\alpha$, pues si $\beta < \alpha$ se cumple $A_\beta = A_\alpha \cap \beta \subset A_\alpha$ y si $\beta \geq \alpha$ se cumple $A_\beta \cap \alpha = A_\alpha$ (y este caso se da porque H no está acotado). Por lo tanto κ es casi inefable. ■

Nota Observemos que los cardinales de Ramsey son Σ^1_2-indescriptibles por ser débilmente compactos, pero un cardinal κ es de Ramsey si y sólo si

$$V_\kappa \vDash \bigwedge F_2 \bigvee H_2 (F_2 : [\Omega]^{<\omega} \longrightarrow 2 \to H_2 \subset \Omega \text{ no acotado y homogéneo para } F_2)$$

y la sentencia es Π^1_2. Por una parte, esto implica que el mínimo cardinal de Ramsey es Π^1_2-descriptible y, por otra parte, si κ es un cardinal de Ramsey inefable, es Π^1_2-indescriptible (teorema 2.18), luego existe un conjunto cerrado no acotado de cardinales inefables menores. En particular, si existen cardinales de Ramsey, no todos son inefables. ■

Otra consecuencia de 4.16 es el refinamiento siguiente del teorema 4.6 sobre existencia de indiscernibles:

Teorema 4.18 *Consideremos un ordinal límite λ y un cardinal μ tales que $\aleph_0 \leq \mu < \kappa(\lambda)$. Sea M un modelo de un lenguaje formal $\mathcal{L}$ tal que $|\mathcal{L}| \leq \mu$ y $\kappa(\lambda) \subset M$, sea $C \subset \kappa(\lambda)$ c.n.a. Entonces existe $I \subset C$ de ordinal λ que es un conjunto de indiscernibles para M en el siguiente sentido fuerte:*

Si $\phi(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ es una fórmula de $\mathcal{L}$, $\alpha_1 < \cdots < \alpha_m \in \kappa(\lambda)$ y $\beta_1 < \cdots < \beta_n$, $\gamma_1 < \cdots < \gamma_n$ son elementos de I tales que $\alpha_m < \beta_1, \gamma_1$, entonces

$$M \vDash \phi[\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n] \leftrightarrow M \vDash \phi[\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \gamma_1, \ldots, \gamma_n].$$

Demostración: Sea $\kappa = \kappa(\lambda)$. Como es inaccesible, el conjunto de los cardinales $\mu < \nu < \kappa$ es c.n.a. en κ, luego no perdemos generalidad si suponemos que C consta únicamente de cardinales en dichas condiciones. Para cada $\beta \leq \kappa$, sea $\mathcal{L}_\beta$ el lenguaje formal que resulta de añadir a $\mathcal{L}$ un conjunto de constantes $\{c_\alpha\}_{\alpha<\beta}$. Consideramos a M como modelo de $\mathcal{L}_\beta$ interpretando cada constante c_α como α.

Sea $\{\phi_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ una enumeración de las fórmulas de $\mathcal{L}_\kappa$ tal que todas las fórmulas de $\mathcal{L}_\nu$ con $\nu \in C$ tengan índice $< \nu$ (es fácil construirla recurrentemente).

Definimos una partición $F : [C]^{<\omega} \longrightarrow \kappa$ con el criterio siguiente: hacemos $F(\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}, \beta_n, \ldots \beta_{2n-1}) = 0$ si y sólo si $(\beta_0, \ldots, \beta_{n-1})$ y $(\beta_n, \ldots, \beta_{2n-1})$ satisfacen (en M) las mismas fórmulas de $\mathcal{L}_{\beta_0}$, y en caso contrario la imagen es el mínimo ordinal α tal que $\phi_\alpha(x_0, \ldots, x_{n-1})$ es una fórmula de $\mathcal{L}_{\beta_0}$ que toma un valor de verdad distinto en M según con cuál de las dos n-tuplas se interpreta. Notemos que $\alpha < \beta_0$, luego F es regresiva (sobre los conjuntos $[C]^{2n+1}$ definimos F como idénticamente nula).

Por el teorema anterior existe $I \subset C$ homogéneo para F de ordinal λ, y basta observar que es un conjunto de indiscernibles en las condiciones del enunciado. No puede suceder que $F[[I]^{2n}] = \{\gamma\}$, con $\gamma > 0$, porque eso significaría que dos n-tuplas cualesquiera de I deberían valores de verdad distintos a ϕ_γ, lo cual es imposible que suceda para tres n-tuplas cualesquiera.

Por lo tanto tiene que ser $F[[I]^{2n}] = \{0\}$, y eso significa que, en las condiciones del enunciado, tomando $\delta_0 < \cdots < \delta_{n-1}$ en I de modo que $\beta_n, \gamma_n < \delta_0$,

$$M \vDash \phi[\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n] \leftrightarrow M \vDash \phi[c_{\alpha_1}, \ldots, c_{\alpha_m}, \beta_1, \ldots, \beta_n]$$

$$\leftrightarrow M \vDash \phi[c_{\alpha_1}, \ldots, c_{\alpha_m}, \delta_1, \ldots, \delta_n] \leftrightarrow M \vDash \phi[c_{\alpha_1}, \ldots, c_{\alpha_m}, \gamma_1, \ldots, \gamma_n]$$

$$\leftrightarrow M \vDash \phi[\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \gamma_1, \ldots, \gamma_n],$$

donde hemos usado que

$$F(\beta_1, \ldots, \beta_n, \delta_1, \ldots, \delta_n) = 0 = F(\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \delta_1, \ldots, \delta_n)$$

y que $\phi(c_{\alpha_1}, \ldots, c_{\alpha_m}, x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula de $\mathcal{L}_{\beta_1}$ y de $\mathcal{L}_{\gamma_1}$. ■

De aquí podemos extraer varias consecuencias mediante una misma técnica que conviene aislar en un resultado general:

Teorema 4.19 *Sea λ un ordinal límite y $m < \kappa(\lambda)$ un cardinal infinito, sea $C \subset \kappa(\lambda)$ un c.n.a., sea $\mathcal{L}$ un lenguaje formal tal que $|\mathcal{L}| \leq m$ y sea M un modelo de $\mathcal{L}$ con $\kappa(\lambda) \subset M$. Sean P, $X \subset M$ tales que $|P| < |\lambda|$ y $|X| \leq m$. Entonces*

a) Existe un submodelo elemental $N \prec M$ tal que

$$|N| = m|\lambda|, \quad X \subset N \quad y \quad |P \cap N| \leq m.$$

b) N tiene un conjunto $I \subset C$ de indiscernibles fuertes (en el sentido del teorema anterior) de ordinal λ tal que toda aplicación estrictamente creciente $\pi : I \longrightarrow I$ se extiende a una inmersión elemental $\bar{\pi} : N \longrightarrow N$.

Demostración: Extendiendo X, podemos suponer que $|X| = m$. Añadamos a $\mathcal{L}$ un relator monádico cuya interpretación en M sea la pertenencia a P, así como un conjunto de constantes que nombren a cada elemento de X. De este modo $|\mathcal{L}| = m$. Sea ahora $\overline{\mathcal{L}}$ la extensión de $\mathcal{L}$ que resulta de añadirle funtores de Skolem según la definición [TC 10.27]. Se sigue cumpliendo $|\overline{\mathcal{L}}| = m$. Podemos considerar a M como modelo de $\overline{\mathcal{L}}$ sin más que interpretar los funtores de Skolem con unas funciones de Skolem prefijadas. Por el teorema anterior sabemos que M tiene un conjunto $I \subset C$ de indiscernibles fuertes de ordinal λ.

Consideremos el núcleo de Skolem $N = N(I) \prec M$. Teniendo en cuenta la descripción dada en [TC 10.28], es claro que $|N| = m|\lambda|$, así como que $X \subset N$, pues N tiene que contener las interpretaciones de las constantes. El conjunto I es también un conjunto de indiscernibles fuertes para N, pues si tenemos $\alpha_1 < \cdots < \alpha_m \in \kappa(\lambda) \cap N$ y $\beta_1 < \cdots < \beta_n$, $\gamma_1 < \cdots < \gamma_n \in I$ con $\alpha_m < \beta_1, \gamma_1$, entonces

$$N \vDash \phi[\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n] \leftrightarrow M \vDash \phi[\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n]$$

$$\leftrightarrow M \vDash \phi[\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \gamma_1, \ldots, \gamma_n] \leftrightarrow N \vDash \phi[\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \gamma_1, \ldots, \gamma_n].$$

Más aún, si $t(x_1, \ldots, x_n)$ es un término de Skolem, tomamos $\gamma_1 < \cdots < \gamma_n$ tales que α_n, $\beta_n < \gamma_1$ y observamos que, por la indiscernibilidad,

$$M \vDash t[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = t[\gamma_1, \ldots, \gamma_n] \leftrightarrow M \vDash t[\beta_1, \ldots, \beta_n] = t[\gamma_1, \ldots, \gamma_n].$$

Esto hace que el conjunto

$$\{M(t)[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \mid \alpha_1 < \cdots < \alpha_n \in I\}$$

tenga cardinal 1 o $|\lambda|$.

Si $|\lambda| \leq m$ entonces $|N| = m$ y trivialmente $|P \cap N| \leq m$. Si por el contrario $|\lambda| > m$, para cada $x \in P \cap N$ existe un término de Skolem t y unos $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n \in I$ tales que $x = M(t)[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$. En este caso el conjunto anterior ha de tener cardinal 1 pues, en caso contrario, aplicando la indiscernibilidad al relator de pertenencia a P, concluiríamos que P tiene $|\lambda|$ elementos distintos. Así pues, en $P \cap N$ hay a lo sumo un elemento para cada término de Skolem de $\overline{\mathcal{L}}$, luego $|P \cap N| \leq m$.

Sea ahora $\pi : I \longrightarrow I$ una aplicación estrictamente creciente. Todo $a \in N$ es de la forma $a = M(t)[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, donde $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n \in I$ y t es un término de Skolem. Definimos

$$\bar{\pi}(a) = M(t)[\pi(\alpha_1), \ldots, \pi(\alpha_n)].$$

Esto no depende de la elección de t ni de la de los indiscernibles, pues si se cumple $M(t_1)[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = M(t_2)[\beta_1, \ldots, \beta_m]$, donde t_1 y t_2 son términos de Skolem y $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$, $\beta_1 < \cdots < \beta_m \in I$, llamamos $\gamma_1 < \cdots < \gamma_r$ a los mismos $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$, $\beta_1 < \cdots < \beta_m$ ordenados y $\phi(z_1, \ldots, z_r)$ a la fórmula $t_1(x_1, \ldots, x_n) = t_2(y_1, \ldots, y_m)$ con la ordenación correspondiente de las variables para que $M \vDash \phi[\gamma_1, \ldots, \gamma_r]$ sea equivalente a

$$M \vDash t_1[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = t_2[\beta_1, \ldots, \beta_m].$$

Puesto que, ciertamente, $M \vDash \phi[\gamma_1, \ldots, \gamma_r]$ y π es creciente, también se cumple $M \vDash \phi[\pi(\gamma_1), \ldots, \pi(\gamma_r)]$, pero esto equivale a

$$M(t_1)[\pi(\alpha_1), \ldots, \pi(\alpha_n)] = M(t_2)(\pi(\beta_1), \ldots, \pi(\beta_m)).$$

Así tenemos $\bar{\pi} : N \longrightarrow N$ que claramente extiende a π, pues $t(x) = x$ es un término de Skolem y así, si $\alpha \in I$, se cumple que

$$\bar{\pi}(\alpha) = \bar{\pi}(M(x)[\alpha]) = M(x)[\pi(\alpha)] = \pi(\alpha).$$

Se cumple que $\bar{\pi}$ es una inmersión elemental, pues si $a_1, \ldots, a_n \in N$ y $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Form}(\overline{\mathcal{L}})$, entonces existen $\alpha_1 < \cdots < \alpha_m \in I$ de manera que $a_i = M(t_i)[\alpha_1, \ldots, \alpha_m]$, para ciertos términos de Skolem t_i. Por lo tanto,

$$N \vDash \phi[a_1, \ldots, a_n] \rightarrow M \vDash \phi[a_1, \ldots, a_n] \rightarrow M \vDash \phi(t_1, \ldots, t_n)[\alpha_1, \ldots, \alpha_m]$$

$$\rightarrow M \vDash \phi(t_1, \ldots, t_n)[\pi(\alpha_1), \ldots, \pi(\alpha_m)] \rightarrow M \vDash \phi[\bar{\pi}(a_1), \ldots, \bar{\pi}(a_n)]$$

$$\rightarrow N \vDash \phi[\bar{\pi}(a_1), \ldots, \bar{\pi}(a_n)].$$ ■

Como primera aplicación, suponiendo que existe $\kappa = \kappa(\lambda)$, tomamos un c.n.a. $C \subset \kappa$ y aplicamos el teorema anterior a $M = V_\kappa$, que es un modelo de ZFC, porque κ es inaccesible. Obtenemos así un submodelo elemental $\bar{N} \prec V_\kappa$ con un conjunto $\bar{I} \subset C$ de indiscernibles fuertes de ordinal λ. Como la relación de pertenencia está bien fundada en $\bar{N}$ (y es extensional), podemos considerar su colapso transitivo N, que es un modelo transitivo de ZFC isomorfo a $\bar{N}$. Además, el colapso transitivo I de $\bar{I}$ es un conjunto de indiscernibles fuertes de N. La inversa de la función colapsante es una inmersión elemental $i : N \longrightarrow V_\kappa$ tal que $i[I] = \bar{I} \subset C$.

Si $j : I \longrightarrow I$ es la aplicación que a cada indiscernible lo lleva al siguiente indiscernible, es claro que j se extiende a una inmersión elemental $j : N \longrightarrow N$

que no fija a ningún indiscernible. Si llamamos $\beta = \min I$, se cumple que β es el menor ordinal no fijado. En efecto, si $\alpha < \beta$, entonces

$$N \vDash \alpha = t(\beta_1, \ldots, \beta_n),$$

para ciertos indiscernibles $\alpha < \beta_1 < \cdots < \beta_n$ y cierto término de Skolem t. El hecho de que sean indiscernibles fuertes se traduce en que

$$N \vDash \alpha = t(\beta_1, \ldots, \beta_n) \to N \vDash \alpha = t(j(\beta_1), \ldots, j(\beta_n)),$$

pero, por otra parte, aplicando j a la primera afirmación, obtenemos que

$$N \vDash j(\alpha) = t(j(\beta_1), \ldots, j(\beta_n)).$$

Por lo tanto $j(\alpha) = \alpha$. Ahora tenemos en cuenta los teoremas 2.14 y 2.21, que nos da que β es indescriptible^N e inefable^N, luego $i(\beta)$ es inefable$^{V_\kappa}$ e indescriptible$^{V_\kappa}$, y esto es claramente absoluto para V_κ, luego concluimos que C contiene un cardinal inefable e indescriptible. Con esto hemos probado el teorema siguiente:

Teorema 4.20 *Si κ es un cardinal de Erdős, el conjunto de los cardinales inefables e indescriptibles menores que κ es es estacionario en κ.*

En particular, como todo cardinal inefable es inaccesible, tenemos que los cardinales de Erdős son cardinales (fuertemente) de Mahlo, pero como los cardinales indescriptibles son (fuertemente) de Mahlo, resulta que los cardinales de Erdős son fuertemente 2-Mahlo. Una simple inducción prueba que todo cardinal de Erdős κ es fuertemente κ-Mahlo (es decir, es hiper-Mahlo), pero como todo cardinal indescriptible es hiper-Mahlo, resulta que los cardinales de Erdős son 2-hiper-Mahlo, etc. Sin embargo, ya hemos visto que no son débilmente compactos a menos que sean cardinales de Ramsey.

Capítulo V

Cardinales medibles

Los cardinales medibles los introdujimos en [TC 7.70] y en [TC 7.75] probamos que son cardinales inaccesibles. Sin embargo, sólo ahora estamos en condiciones de apreciar su auténtica magnitud.

Recordemos que un cardinal no numerable κ es *medible* si tiene una medida fuerte bivaluada sobre κ, lo cual equivale a que exista un ultrafiltro libre κ-completo en κ. A tales ultrafiltros los llamaremos también *medidas* en κ.

Un concepto relacionado es el de *medida de Ulam,* en un conjunto I, que es un ultrafiltro $\aleph_1$-completo no principal en I. Un cardinal μ es *medible Ulam* si tiene una medida de Ulam.

Según [TC 7.77], aunque un cardinal medible Ulam no es necesariamente medible, la existencia de cardinales medibles equivale a la existencia de cardinales medibles Ulam. De hecho, el menor cardinal medible Ulam coincide con el menor cardinal medible.

En principio, no sería descabellado dudar de la consistencia de que existan los cardinales que hemos estudiado hasta ahora (débilmente compactos, de Ramsey, etc.), puesto que están definidos a partir de propiedades un tanto técnicas: la no existencia de ciertos árboles de Aronszajn (no sería descartable que se pudiera probar que existen) el teorema de compacidad débil (no sería descartable que fuera falso), la existencia de ciertos conjuntos homogéneos para ciertas particiones, etc. En cambio, los cardinales medibles (o medibles Ulam) tienen una definición especialmente simple, por lo que cuestionar su inclusión en la lista de cardinales grandes plausiblemente consistentes sería poco menos que escepticismo y, como veremos que todo cardinal medible es de Ramsey, esto a su vez legitima a todos los cardinales que hemos estudiado hasta ahora.

5.1 Ultrapotencias de la clase universal

Las principales propiedades de los cardinales medibles se obtienen particularizando la teoría de las ultrapotencias iteradas al caso más simple (pero a la vez más potente) en que el modelo de partida es la clase universal V. Por ejemplo, por este camino obtenemos una prueba muy simple de que los cardinales medibles son grandes:

Teorema 5.1 *Un cardinal κ es medible si y sólo si es el punto crítico de una inmersión elemental no trivial $j : V \longrightarrow M$, para cierta clase transitiva M. En tal caso existe una medida normal en κ.*

Demostración: Si κ es un cardinal medible y U es una medida en κ, el teorema 1.14 nos da que la ultrapotencia $\mathrm{Ult}^*_U(V)$ está bien fundada, y 1.13 implica que es el punto crítico de la inmersión elemental $j_U : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_U(V)$.

Recíprocamente, si existe κ es el punto crítico de una inmersión elemental no trivial $j : V \longrightarrow M$, el teorema 1.20 implica que

$$D = \{X \in \mathcal{P}\kappa \mid \kappa \in j(X)\}$$

es una medida normal en κ. ■

Por lo tanto, el teorema 2.21 nos da que los cardinales medibles son inefables,[1] aunque enseguida veremos que, de hecho, son cardinales de Ramsey.

En cambio, los cardinales medibles Ulam no son necesariamente cardinales grandes, pues todo cardinal mayor que un cardinal medible Ulam es medible Ulam. El teorema siguiente es un caso particular de [TC 7.71] que también puede probarse directamente sin dificultad:

Teorema 5.2 *Sea $f : X \longrightarrow X'$ y F un filtro κ-completo en X. Entonces el conjunto $f[F] = \{A \subset X' \mid f^{-1}[A] \in F\}$ es un filtro κ-completo en X'. Si F es un ultrafiltro, $f[F]$ también lo es. Si F es una medida de Ulam en X y f es inyectiva, entonces $f[F]$ es una medida de Ulam en X'.*

Por consiguiente, si existe un cardinal medible Ulam κ, todo cardinal $\mu \geq \kappa$ es también medible Ulam (pues basta aplicar el teorema anterior a la inclusión $\kappa \longrightarrow \mu$), de modo que, como ya señalábamos antes de [TC 7.77] el menor cardinal medible Ulam separa a los cardinales no medibles Ulam (todos los estrictamente anteriores a él) y los medibles Ulam (todos los posteriores a él). El teorema siguiente refina a [TC 7.77]:

Teorema 5.3 *Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) Existe un cardinal medible.

b) Existe un cardinal medible Ulam.

c) Existe una inmersión elemental no trivial $j : V \longrightarrow M$, para cierta clase transitiva M.

[1] Recordemos que la condición $\mathcal{P}^M\kappa = \mathcal{P}^N\kappa$ se cumple si $N \subset M$, y esto sucede trivialmente si $M = V$.

DEMOSTRACIÓN: Todo cardinal medible es medible Ulam. Si κ es un cardinal medible Ulam y U es una medida de Ulam en κ, entonces el teorema 1.14 implica inmediatamente que la ultrapotencia $\mathrm{Ult}^*_U(V)$ está bien fundada, con lo que tenemos una inmersión elemental $j_U : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_U(V)$ no trivial. Por último, si existe una inmersión elemental no trivial $j : V \longrightarrow M$, el teorema 1.20 nos da una medida sobre su punto crítico. ■

Más precisamente: si U es una medida de Ulam en un cardinal κ, entonces por 1.13 el punto crítico de la inmersión elemental $j_U : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_U(V)$ es el mayor cardinal μ (necesariamente $\leq \kappa$) tal que U es μ-completo, y 1.20 nos da que es medible. En particular, si κ es el menor cardinal medible Ulam, entonces es un cardinal medible (pues tiene que ser $\mu = \kappa$). A su vez esto significa que "ser medible Ulam" es lo mismo que "ser mayor o igual que el menor cardinal medible". Por lo tanto, el concepto que realmente tiene interés es el de cardinal medible. No obstante, a efectos de valorar la plausibilidad de la consistencia de que existan cardinales medibles, es interesante observar que ésta sólo requiere que exista una medida de Ulam sobre un conjunto.

El teorema siguiente recoge las propiedades más importantes de las ultrapotencias asociadas a las medidas de un cardinal medible:

Teorema 5.4 *Sea κ un cardinal medible y U una medida en κ. Llamemos $M = \mathrm{Ult}_U(V)$ y sea $j : V \longrightarrow M$ la inmersión natural. Entonces*

a) $\bigwedge x \in V_\kappa\, j(x) = x$.

b) $\kappa < j(\kappa)$.

c) $M^\kappa \subset M$.

d) $\bigwedge x \subset M(|x| \leq \kappa \rightarrow x \in M)$.

e) $\bigwedge x \in M(|x| \leq \kappa \rightarrow \mathcal{P}^M x = \mathcal{P} x)$.

f) $\bigwedge \alpha < \kappa(\alpha \text{ es un cardinal}^M \leftrightarrow \alpha \text{ es un cardinal})$.

g) $\bigwedge \mu < \kappa\ (2^\mu)^M = 2^\mu$.

h) $2^\kappa \leq (2^\kappa)^M < j(\kappa) < (2^\kappa)^+$.

i) $U \notin M$. *En particular* $M \neq V$.

j) Sea λ un ordinal límite.

Si $\mathrm{cf}\,\lambda = \kappa$ *entonces* $j(\lambda) > \bigcup\limits_{\delta<\lambda} j(\delta)$.

Si $\mathrm{cf}\,\lambda \neq \kappa$ *entonces* $j(\lambda) = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} j(\delta)$.

k) Si $\mu > \kappa$ es un cardinal límite fuerte con $\mathrm{cf}\,\mu \neq \kappa$, *entonces* $j(\mu) = \mu$.

DEMOSTRACIÓN: a) y b) se cumplen por el teorema 1.13.

c) Sea $f : \kappa \longrightarrow M$. Para cada $\alpha < \kappa$, sea $f(\alpha) = [g_\alpha]$, con $g_\alpha \in V^\kappa$. Sea $\kappa = [h]$, con $h \in V^\kappa$. Como κ es un ordinal, $\{\alpha \in \kappa \mid h(\alpha) \text{ es un ordinal}\} \in U$, luego, modificando h fuera de este conjunto, podemos exigir que $h \in \Omega^\kappa$.

Para cada $\alpha < \kappa$, sea $G(\alpha) : h(\alpha) \longrightarrow V$ la aplicación dada por

$$G(\alpha)(\beta) = \begin{cases} g_\beta(\alpha) & \text{si } \beta < \kappa, \\ 0 & \text{si } \beta \geq \kappa. \end{cases}$$

De este modo,

$$\{\alpha \in \kappa \mid G(\alpha) \text{ es una función} \land \mathcal{D}G(\alpha) = h(\alpha)\} = \kappa \in U,$$

luego $[G] : [h] \longrightarrow V$, es decir, $[G] : \kappa \longrightarrow V$. Sea $\beta < \kappa$. Por el apartado a) tenemos que $\beta = j(\beta) = [c_\beta] \in [h]$, luego $\{\alpha \in \kappa \mid \beta < h(\alpha)\} \in U$ y, por consiguiente, $\{\alpha \in \kappa \mid G(\alpha)(c_\beta(\alpha)) = g_\beta(\alpha)\} \in U$ (pues este conjunto contiene al anterior), y de aquí se sigue que $[G](j(\beta)) = [g_\beta]$, es decir, $[G](\beta) = f(\beta)$. Esto prueba que $f = [G] \in M$.

d) es consecuencia inmediata de c).

e) y f) son consecuencias inmediatas de d)

g) Si $\mu < \kappa$, tenemos que $(2^\mu)^M$ es biyectable^M con $\mathcal{P}^M\mu = \mathcal{P}\mu$. Como κ es fuertemente inaccesible deducimos que $(2^\mu)^M < \kappa$, luego por f) resulta que $(2^\mu)^M$ es un cardinal, luego es el cardinal de $\mathcal{P}\mu$. Así pues, $(2^\mu)^M = 2^\mu$.

h) Como en el apartado anterior, tenemos que $(2^\kappa)^M$ es biyectable^M con $\mathcal{P}\kappa$, luego $2^\kappa \leq (2^\kappa)^M$.

Por otra parte, como κ es fuertemente inaccesible, tenemos que $j(\kappa)$ es fuertemente inaccesible^M y $\kappa < j(\kappa)$, luego $(2^\kappa)^M < j(\kappa)$.

Notemos ahora que si $f \in {}^\kappa\kappa$, entonces $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \in \kappa\} = \kappa \in U$, luego $[f] \in [c_\kappa] = j(\kappa)$. Sea, pues, $G : {}^\kappa\kappa \longrightarrow j(\kappa)$ dada por $G(f) = [f]$. Resulta que G es suprayectiva, pues si $[f] \in j(\kappa)$ entonces $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \in \kappa\} \in U$, luego, modificando f fuera de este conjunto, podemos exigir que $f \in {}^\kappa\kappa$, y entonces $G(f) = [f]$.

Concluimos que $|j(\kappa)| \leq 2^\kappa$, luego $j(\kappa) < (2^\kappa)^+$.

i) Supongamos que $U \in M$. Por c) tenemos que $({}^\kappa\kappa)^M = {}^\kappa\kappa$. Definimos en este conjunto la relación

$$f =_U g \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = g(\alpha)\} \in U,$$

obviamente absoluta para M, por lo que el cociente $\mathrm{Ult}_U^*(\kappa)$ también es absoluto para M. Similarmente, definimos la relación

$$[f]^* \, R \, [g]^* \leftrightarrow \{\alpha \in \kappa \mid f(\alpha) \in g(\alpha)\},$$

también absoluta.

Sea $\pi : \mathrm{Ult}_U^*(\kappa) \longrightarrow M$ la aplicación dada por $\pi([f]^*) = [f]$, donde la primera clase es en $\mathrm{Ult}_U^*(\kappa)$ y la segunda en $\mathrm{Ult}_U(V)$. Es claro que π está bien definida, es inyectiva y transforma R en la relación de pertenencia. De aquí se sigue que R está bien fundada en $\mathrm{Ult}_U^*(\kappa)$ y que π es su colapso transitivo. Esto implica que R está bien fundada^M (pues es una propiedad Δ_1) y una simple inducción prueba que el colapso transitivo^M de R coincide con π, luego en particular $\pi \in M$. La función $f \mapsto [f]^*$ está ciertamente en M, y la composición de ésta con π es precisamente la función G del apartado anterior. Así pues, $G \in M$, lo cual prueba que $(|j(\kappa)| \leq 2^\kappa)^M$, pero $\kappa < j(\kappa)$ y$j(\kappa)$ es fuertemente inaccesible^M, contradicción.

j) Sea $\operatorname{cf} \lambda = \kappa$ y tomemos una función $f : \kappa \longrightarrow \lambda$ cofinal creciente. Claramente $\{\beta < \kappa \mid f(\beta) < \lambda\} = \kappa \in U$, luego $[f] < j(\lambda)$. Por otra parte, para cada $\alpha < \lambda$, se cumple que $\{\beta < \kappa \mid f(\alpha) \in f(\beta)\} = \kappa \setminus (\alpha + 1) \in U$, luego $j(f(\alpha)) \in [f]$. Por consiguiente

$$\bigcup_{\alpha<\lambda} j(\alpha) \leq [f] < j(\lambda).$$

Supongamos que $\operatorname{cf} \lambda > \kappa$. Si $[f] \in j(\lambda)$, podemos suponer que $f : \kappa \longrightarrow \lambda$, y entonces existe un $\alpha < \lambda$ tal que $f : \kappa \longrightarrow \alpha$, luego $[f] < j(\alpha)$, luego

$$j(\lambda) \leq \bigcup_{\alpha<\lambda} j(\alpha).$$

La otra desigualdad es obvia.

Finalmente, supongamos que $\operatorname{cf} \lambda = \mu < \kappa$. Sea $h : \mu \longrightarrow \lambda$ cofinal creciente. Si $[f] \in j(\lambda)$ podemos suponer que $f : \kappa \longrightarrow \lambda$. Si para todo $\beta < \mu$ se cumpliera que $\{\alpha < \kappa \mid h(\beta) \leq f(\alpha)\} \in U$, entonces

$$\varnothing = \{\alpha < \kappa \mid \bigwedge \beta < \mu\, h(\beta) \leq f(\alpha)\} = \bigcap_{\beta<\mu} \{\alpha < \kappa \mid h(\beta) \leq h(\alpha)\} \in U,$$

lo cual es absurdo, luego existe un $\beta < \mu$ tal que $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < h(\beta)\} \in U$, lo cual equivale a que $[f] \in j(h(\beta))$, luego también

$$j(\lambda) \leq \bigcup_{\alpha<\lambda} j(\alpha).$$

k) Para todo $\alpha < \mu$ y todo $\beta < j(\alpha)$ se cumple que $\beta = [f]$, con $f : \kappa \longrightarrow \alpha$, luego $|j(\alpha)| \leq |{}^\kappa\alpha| < \mu$. Por el apartado anterior,

$$j(\mu) = \bigcup_{\alpha<\mu} j(\alpha) \leq \mu \leq j(\mu).$$

■

El teorema siguiente muestra que los cardinales medibles están por encima de los de Ramsey en la escala de consistencia relativa:

Teorema 5.5 *Sea κ un cardinal medible y sea D una medida normal sobre κ. Sea $m < \kappa$ un cardinal.*

a) Si $F : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow m$ existe un $H \in D$ homogéneo para F. En particular κ es un cardinal de Ramsey inefable.

b) $\{\mu < \kappa \mid \mu$ es un cardinal de Ramsey inefable$\} \in D$.

Demostración: a) Basta probar que existe $H_n \in D$ homogéneo para $F|_{[\kappa]^n}$, pues entonces sirve $H = \bigcap_{n\in\omega} H_n$. En otras palabras, podemos suponer que $F : [\kappa]^n \longrightarrow m$.

Razonamos por inducción sobre n. Para $n = 1$ es trivial. Supongamos que vale para n y sea $F : [\kappa]^{n+1} \longrightarrow m$. Para cada $\alpha < \kappa$ sea $F_\alpha : [\kappa]^n \longrightarrow m$ dada por

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} F(x \cup \{\alpha\}) + 1 & \text{si } \alpha \notin x, \\ 0 & \text{si } \alpha \in x. \end{cases}$$

Por hipótesis de inducción existe $X_\alpha \in D$ homogéneo para F_α. Es obvio que el valor que F_α toma en $[X_\alpha]^n$ no puede ser 0, pues siempre podemos tomar un subconjunto de n elementos en X_α que no contenga a α. Por tanto $\alpha \notin X_\alpha$ y existe un $i_\alpha < m$ tal que $\bigwedge x \in [X_\alpha]^n\ F(x \cup \{\alpha\}) = i_\alpha$. Sea $X = \underset{\alpha<\kappa}{\triangle} X_\alpha \in D$.

Como $X = \bigcup_{i<m} \{\alpha \in X \mid i_\alpha = i\} \in D$, ha de existir un $i < m$ tal que

$$H = \{\alpha \in X \mid i_\alpha = i\} \in D.$$

Así, si $\gamma < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ están en $H \subset X$, se cumple $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \in [X_\gamma]^n$, por lo que $F(\{\gamma, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) = i_\gamma = i$. Esto demuestra que H es homogéneo para F.

b) Sea $M = \mathrm{Ult}_D(V)$ y sea $j : V \longrightarrow M$ la inmersión natural. Se cumple que κ es un cardinal de Ramsey inefable^M, pues si $(F : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow 2)^M$, esto es lo mismo que $F : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow 2$, luego existe un conjunto $H \in D$ (en particular estacionario en κ) homogéneo para F. Pero por 5.4 se cumple que $H \in M$ y así $(H$ es homogéneo para $F)^M$. Además H es estacionario^M, pues todo c.n.a.^{M} en κ es c.n.a., luego corta a H.

Si d es la identidad en κ, tenemos que $[d]$ es un cardinal de Ramsey inefable^M, luego $\{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es un cardinal de Ramsey inefable}\} \in D$. ■

Nota Consideremos el teorema 4.19 aplicado al caso en que $\lambda = \kappa = \kappa(\lambda)$ es un cardinal medible y sea D una medida normal en κ. El conjunto I de indiscernibles indicado en el apartado b) se obtiene de una aplicación del teorema 4.18, que a su vez se obtiene a partir del teorema 4.16, en el cual se obtiene a su vez como aplicación del teorema 4.6, que a su vez lo obtiene como conjunto homogéneo de una cierta partición de $[C]^{<\omega}$. Notemos que, como C es c.n.a. en κ, se cumple que $C \in D$. Si extendemos arbitrariamente la partición hasta $[\kappa]^{<\omega}$ y tomamos un conjunto homogéneo $H \in D$ según el teorema anterior, entonces $I = H \cap C \in D$ sigue siendo homogéneo y así obtenemos que el teorema 4.19 se cumple con $I \in D$, luego también $N \cap \kappa \in D$. ■

La existencia de cardinales medibles impone ciertas restricciones a la función del continuo. Algunas son obvias, como que han de ser límites fuertes, pero otras no lo son en absoluto. Sucede que los cardinales medibles satisfacen restricciones similares a las conocidas para cardinales singulares. Por ejemplo, comparemos el teorema siguiente con el teorema de Silver [TC 6.18]:

Teorema 5.6 *Sea κ un cardinal medible y D una medida normal en κ. Si $\{\mu < \kappa \mid 2^\mu = \mu^+\} \in D$, entonces $2^\kappa = \kappa^+$.*

DEMOSTRACIÓN: Si d es la identidad en κ, tenemos que

$$\{\mu < \kappa \mid 2^{d(\mu)} = d(\mu)^+\} \in D,$$

luego $(2^{[d]} = [d]^+)^{\mathrm{Ult}}$, es decir, $(2^\kappa = \kappa^+)^{\mathrm{Ult}}$, pero por el teorema 5.4 tenemos que $2^\kappa \leq (2^\kappa)^{\mathrm{Ult}} = (\kappa^+)^{\mathrm{Ult}} \leq \kappa^+$. ■

Más en general:

Teorema 5.7 *Sea κ un cardinal medible y D una medida normal en κ. Sea $\beta < \kappa$ y supongamos que $\{\aleph_\alpha < \kappa \mid 2^{\aleph_\alpha} \leq \aleph_{\alpha+\beta}\} \in D$. Entonces $2^{\aleph_\kappa} \leq \aleph_{\kappa+\beta}$. (Notemos que, por ser inaccesible, $\kappa = \aleph_\kappa$.)*

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : \kappa \longrightarrow \Omega$ una función que cumpla $f(\aleph_\alpha) = \aleph_{\alpha+\beta}$, sea d la identidad en κ. Entonces $\{\mu < \kappa \mid 2^{d(\mu)} \leq f(\mu)\} \in D$, luego tenemos que $(2^\kappa \leq [f])^{\mathrm{Ult}}$, luego $2^\kappa \leq (2^\kappa)^{\mathrm{Ult}} \leq [f]$.

Por otra parte, $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = \aleph_{d(\alpha)+c_\beta(\alpha)}\} \in D$, pues contiene, por ejemplo, a todos los cardinales inaccesibles $\mu = \aleph_\mu$ menores que κ. Por consiguiente $[f] = \aleph_{\kappa+\beta}^{\mathrm{Ult}} \leq \aleph_{\kappa+\beta}$. ■

Notemos que no tenemos ningún resultado sobre las determinaciones de la función del continuo que son consistentes con la existencia de un cardinal medible. Como los cardinales medibles no son consistentes con el axioma de constructibilidad, ni siquiera sabemos si la HCG es consistente con la existencia de un cardinal medible (o incluso de Ramsey). Nos ocupamos de esto en la sección siguiente.

Para terminar estudiamos la descriptibilidad de los cardinales medibles. Es fácil ver que el mínimo cardinal medible es Σ_1^2-descriptible, pues la medibilidad de κ equivale a que

$$V_\kappa \vDash \bigvee U_3 \; U_3 \text{ es una medida en } \Omega,$$

donde la variable U_3 es de tercer orden y la fórmula que le sigue puede desarrollarse como fórmula de segundo orden. Por otro lado, los cardinales medibles son Π_1^2-indescriptibles porque son inefables (teorema 2.18). El teorema siguiente proporciona una prueba directa de un resultado ligeramente más fuerte:

Teorema 5.8 *Los cardinales medibles son Π_1^2-indescriptibles. Más aún, si D es una medida normal en un cardinal κ, $A \subset \kappa$ y ϕ es una sentencia Π_1^2, entonces*

$$\{\alpha < \kappa \mid (V_\alpha, V_\alpha \cap A) \vDash \phi\} \in D.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $j_D : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_D(V) = M$ la inmersión canónica en la ultrapotencia y supongamos que $(V_\kappa, A) \vDash \bigwedge X_3 \, \psi(X)$, donde X_3 es una variable de tercer orden y ψ es una fórmula de segundo orden.

El teorema 5.4 d) implica que $\mathcal{P}V_\kappa \subset M$ (notemos que $|V_\kappa| = \kappa$ porque es inaccesible), luego si $B \in \mathcal{P}\mathcal{P}V_\kappa$, tenemos que

$$(V_\kappa, A) \vDash \psi[B] \to ((V_\kappa, A) \vDash \psi[B])^M,$$

pues los cuantificadores de primer y segundo orden se interpretan igual en V y en M. Como esto vale para todo $B \in \mathcal{P}\mathcal{P}V_\kappa$, en particular vale para todo $(B \in \mathcal{P}\mathcal{P}V_\kappa)^M$, luego $((V_\kappa, A) \vDash \phi)^M$, o también $((V_\kappa, V_\kappa \cap j(A)) \vDash \phi)^M$. Ahora usamos que $\kappa = [d]$ (teorema 1.17), con lo que

$$\{\alpha < \kappa \mid (V_\alpha, V_\alpha \cap A) \vDash \phi\} \in D.$$

■

5.2 El modelo L[U]

Sabemos que si existe un cardinal medible (o simplemente, si existe $\kappa(\omega_1)$, entonces no puede ser $V = L[x]$ para ningún $x \subset V_\omega$, pero eso no impide que pueda ser $V = L[A]$, para algún conjunto A. De hecho, es fácil ver que sí que es posible. Omitimos la prueba del teorema siguiente porque es trivial (la primera parte es [PC 3.6 k)]):

Teorema 5.9 *Sea κ un cardinal medible y U una medida en κ. Sea $\overline{U} = U \cap L[U]$. Entonces $\overline{U} \in L[U] = L[\overline{U}]$ y $\overline{U}$ es una medida$^{L[U]}$ en κ. Si U es normal, entonces $\overline{U}$ es normal$^{L[U]}$.*

En particular tenemos que si es consistente la existencia de un cardinal medible, también lo es la existencia de un cardinal medible con una medida (normal, si queremos) U tal que $V = L[U]$.

Ahora vamos a probar que $L[U]$ cumple la hipótesis del continuo generalizada, con lo que concluiremos que si es consistente la existencia de un cardinal medible, también lo es si suponemos además la HCG. Probaremos algunos resultados previos, el primero de los cuales es un sencillo resultado general sobre constructibilidad relativa:

Teorema 5.10 *Sea M un modelo transitivo de* ZF−AP *(o de* KPI*) y sea A un conjunto tal que $A \cap M \in M$. Entonces $\bigwedge \alpha \in \Omega^M\ L_\alpha[A] = L_\alpha[A \cap M]$. En particular, si $\Omega \subset M$ se cumple $L[A] = L[A \cap M]$.*

Demostración: Por inducción sobre α. Para $\alpha = 0$ es claro. Si vale para α, entonces $L_\alpha[A] = L_\alpha[A \cap M] = L_\alpha[A \cap M]^M \in M$, luego $L_\alpha[A] \subset M$ y así $A \cap L_\alpha[A] = A \cap M \cap L_\alpha[A \cap M]$, de donde

$$L_{\alpha+1}[A] = \mathcal{D}_A(L_\alpha[A]) = \mathcal{D}_{A \cap L_\alpha[A]}(L_\alpha[A]) = \mathcal{D}_{(A \cap M \cap L_\alpha[A \cap M])}(L_\alpha[A \cap M])$$

$$= \mathcal{D}_{A \cap M}(L_\alpha[A \cap M]) = L_{\alpha+1}[A \cap M].$$

El caso límite es trivial. ■

Teorema 5.11 *Sean $\kappa \leq \mu$ cardinales infinitos, con μ no numerable, y sea $U \subset \mathcal{P}\kappa$ tal que $U \in L_\mu[U]$. Sea $M \prec L_\mu[U]$ tal que $\kappa \cup \{U\} \subset M$. Entonces el colapso transitivo de M es $L_\lambda[U]$, para cierto $\lambda \leq \mu$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\pi : M \longrightarrow N$ la función colapsante. Obviamente π fija a todos los ordinales menores que κ, luego también a todos los subconjuntos de κ (que están en M), luego $\pi(U) = \pi[U \cap M] = U \cap N \in N$.

La hipótesis $U \in L_\mu[U]$ implica que $U \in H(\mu)$, luego [PC 3.25] nos da que $L_\mu[U]$ es un modelo de KPI, luego tiene sentido afirmar que $L_\mu[U] \vDash V = L[U]$, donde la parte derecha de $\vDash$ puede verse como una sentencia del lenguaje $\mathcal{L}_R$ (sustituyendo la variable libre U por el relator R, que se interpreta en $L_\mu[U]$ como la pertenencia a U).

Como $U \in M$, podemos considerar a M como submodelo elemental de $L_\mu[U]$ respecto del lenguaje $\mathcal{L}_R$, de modo que en M el relator R se interpreta como la pertenencia a $U \cap M$, la cual, a través de π, se corresponde con la pertenencia a $U \cap N$. Por lo tanto, $N \vDash V = L[U]$ se traduce en que $N = L_\lambda[U \cap N]$, para cierto ordinal límite $\lambda = \Omega^N$. El teorema anterior nos da que $L_\lambda[U \cap N] = L_\lambda[U]$.

Se cumple que $\lambda \leq \mu$ porque $\bigwedge \alpha \in M\ \pi(\alpha) \leq \alpha$, luego N tiene a lo sumo los mismos ordinales que M. ■

Descomponemos la prueba de la HCG$^{L[U]}$ en dos partes, la primera de las cuales es un simple argumento de condensación que no requiere la medibilidad.

Teorema 5.12 *Si κ es un cardinal infinito y $V = L[U]$ para cierto $U \subset \mathcal{P}\kappa$, entonces $\bigwedge \mu \geq \kappa\ 2^\mu = \mu^+$.*

DEMOSTRACIÓN: Como μ cumple la misma hipótesis que κ, basta probarlo para κ. Fijemos un $x \subset \kappa$ y sea $\mu \geq \kappa$ un cardinal no numerable para el que U, $x \in L_\mu[U]$. Sea $M = N(\kappa \cup \{U, x\}) \prec L_\mu[U]$. Claramente $|M| = \kappa$. Por el teorema anterior, el colapso transitivo de M es $L_\lambda[U]$, para cierto $\lambda \leq \mu$. Además la función colapsante fija a los ordinales menores que κ, luego $x \in L_\lambda[U]$.

Por otra parte, $|\lambda| = |L_\lambda[U]| = |M| = \kappa$, luego $\lambda < \kappa^+$. Con esto hemos probado que $\mathcal{P}\kappa \subset L_{\kappa^+}[U]$, luego $2^\kappa \leq |L_{\kappa^+}[U]| = \kappa^+$. ■

Para probar la HCG bajo κ hemos de usar un argumento de condensación más delicado, basado en el teorema 4.19. Aunque suponemos una medida normal, luego veremos que el teorema es válido para medidas cualesquiera (porque, según veremos, el modelo $L[U]$ no depende de la medida U).

Teorema 5.13 (Silver) *Sea κ un cardinal medible y D una medida normal en κ. Entonces $L[D]$ cumple la* HCG.

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que $V = L[D]$. En vista del teorema anterior, sólo hemos de probar que si $\aleph_0 \leq \mu < \kappa$ entonces $2^\mu = \mu^+$.

Supongamos que $2^\mu > \mu^+$, para cierto cardinal $\mu < \kappa$. El conjunto $\mathcal{P}\mu$ esta bien ordenado por $\trianglelefteq_D$. Sea $f : \gamma \longrightarrow \mathcal{P}\mu$ la semejanza. Obviamente $\mu^+ < \gamma$. Sea $x = f(\mu^+)$. Sea α el mínimo ordinal tal que $x \in L_\alpha[D]$.

Si $\beta < \mu^+$, entonces $f(\beta) \trianglelefteq_D f(\mu^+)$, luego $f(\beta) \in L_\alpha[D]$ (recordemos que los conjuntos $L_\alpha[D]$ son segmentos iniciales para el buen orden constructible). Por lo tanto $|\mathcal{P}\mu \cap L_\alpha[D]| \geq \mu^+$.

Sea ν un cardinal regular tal que κ, $\alpha < \nu$ y $D \in L_\nu[D]$. Aplicamos el teorema 4.19 (y la nota posterior al teorema 5.5) a $\lambda = \kappa = \kappa(\kappa)$, $m = \mu$, $M = L_\nu[D]$, $P = \mathcal{P}\mu \cap M$ y $X = \mu \cup \{D, x, \alpha\}$ (y el lenguaje $\mathcal{L}_0$ de la teoría de conjuntos). Ciertamente $|P| \leq 2^\mu < \kappa$ y $|X| = \mu$. Así pues, existe un submodelo elemental $N \prec M$ tal que $|N| = \kappa$, $\mu \cup \{D, x, \alpha\} \subset N$, $|P \cap N| \leq \mu$ y $\kappa \cap N \in D$.

Sea $\pi : N \longrightarrow N'$ el colapso transitivo de N. Claramente $N' = L_\lambda[\pi[D]]$, para cierto ordinal límite λ. Veamos que $\pi[D] = D \cap N'$.

Como $\bigwedge \delta \in N\, \pi(\delta) \leq \delta$, podemos definir $g : \kappa \longrightarrow \kappa$ mediante

$$g(\delta) = \begin{cases} \pi(\delta) & \text{si } \delta \in \kappa \cap N, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De este modo, $\bigwedge \delta < \kappa\; g(\delta) \leq \delta$. Si $\{\delta < \kappa \mid g(\delta) < \delta\} \in D$, por el teorema 1.17 existiría un cierto ordinal $\gamma < \kappa$ tal que $\{\delta < \kappa \mid g(\delta) = \gamma\} \in D$ y, como también $\kappa \cap N \in D$, la intersección, es decir, el conjunto $\{\delta \in \kappa \cap N \mid \pi(\delta) = \gamma\}$ está en D, pero esto es imposible, porque π es inyectiva.

Así pues, $\{\delta < \kappa \mid g(\delta) = \delta\} \in D$ y, cortando de nuevo con $\kappa \cap N$, concluimos que $Z = \{\delta \in \kappa \cap N \mid \pi(\delta) = \delta\} \in D$.

Si $y \in D \cap N$, entonces $\pi(y) \supset \pi(y \cap Z) = y \cap Z \in D$, luego $\pi(y) \in D \cap N'$.

Si $y \in D \cap N'$ entonces $y = \pi(w)$, con $w \in N$, pero $y \cap Z \subset w$ y además $y \cap Z \in D$, luego $w \in D \cap N$ y, por lo tanto, $y \in \pi(D)$. De aquí se sigue que, en efecto, $\pi(D) = \pi[D \cap N] = D \cap N'$.

De este modo, llegamos a que $N' = L_\lambda[D \cap N'] = L_\lambda[D]$ por el teorema 5.10. Como $\mu \subset N$ es obvio que $\bigwedge \delta < \mu\; \pi(\delta) = \delta$. De aquí que $\mathcal{P}\mu \cap N = \mathcal{P}\mu \cap N'$ y, en particular, $x \in N' = L_\lambda[D]$. Por minimalidad de α ha de ser $\alpha \leq \lambda$, luego $|\mathcal{P}\mu \cap N| = |\mathcal{P}\mu \cap N'| \geq |\mathcal{P}\mu \cap L_\alpha[D]| \geq \mu^+$.

Sin embargo, también tenemos que $|\mathcal{P}\mu \cap N| = |\mathcal{P}\mu \cap M \cap N| = |P \cap N| \leq \mu$, contradicción. ■

Con esto tenemos una determinación de la función del continuo consistente con un cardinal medible, que puede tomarse como base para obtener otras mediante extensiones genéricas.

Teorema 5.14 *Sea D una medida normal en un cardinal κ. Entonces κ es el único cardinal medible$^{L[D]}$.*

Demostración: Podemos suponer que $V = L[D]$. Supongamos que existe otro cardinal medible μ. Sea $j : V \longrightarrow M$ la inmersión correspondiente a su ultrapotencia asociada y veamos que $M = V$, en contradicción con 5.4.

Como $\bigwedge x\; x \in L[D]$, ha de ser $(\bigwedge x\; x \in L[j(D)])^M$, luego $M = L[j(D)]$.

Si $\kappa < \mu$ entonces $j(D) = D$ y llegamos a que $M = L[D] = V$. Supongamos, pues, que $\mu < \kappa$. Sea $Z = \{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ es fuertemente inaccesible} \wedge \mu < \alpha\} \in D$. Por el teorema 5.4 k) tenemos que $j(\kappa) = \kappa$ y $\bigwedge \alpha \in Z\; j(\alpha) = \alpha$.

Veamos que $j(D) = D \cap M$, para lo cual basta ver que $j(D) \subset D \cap M$, ya que $j(D)$ es un ultrafiltro^M y $D \cap M$ es un filtro^M. Sea $x \in j(D)$, $x = [f]$. Podemos suponer que $f : \mu \longrightarrow D$. Sea $Y = \bigcap_{\delta<\mu} f(\delta) \in D$.

Como $\{\delta < \mu \mid \bigwedge x \in Y\ x \in f(\delta)\} = \mu \in U$, el teorema fundamental de las ultrapotencias nos da que $\bigwedge x \in j(Y)\ x \in [f]$, o sea, $j(Y) \subset [f] = x$.

Ahora, $Y \cap Z \in D$ y j fija a todos sus elementos, luego

$$Y \cap Z = j[Y \cap Z] \subset j(Y) \subset x,$$

con lo que $x \in D$. Consecuentemente, $M = L[j(D)] = L[D \cap M] = L[D] = V$. ■

A partir de aquí vamos a aplicar la teoría de las ultrapotencias iteradas. Observemos que toda medida normal D en un cardinal κ es un ultrafiltro 1-iterable sobre V y que, por 1.38 es completamente iterable, por lo que tenemos definida la sucesión de ultrapotencias iteradas $\{\mathrm{Ult}_D^\alpha(V)\}_{\alpha\in\Omega}$.

Un poco más en general, si $\bar{D} = D \cap L[D]$, entonces $\bar{D}$ es un ultrafiltro en $\mathcal{P}^{L[D]}\kappa$, y como $\bar{D} \in L[D]$, es 1-iterable sobre $L[D]$, pero también cumple trivialmente la condición de 1.38, por lo que es iterable sobre $L[D]$. En la práctica representaremos por $\{\mathrm{Ult}_D^\alpha(L[D])\}_{\alpha\in\Omega}$ a la sucesión de ultrapotencias iteradas respecto de $\bar{D}$.

Vamos a probar un resultado de Kunen para el cual necesitamos algunos resultados previos.

Teorema 5.15 *Sea $D \subset \mathcal{P}\kappa$ tal que $D \in L[D]$. Sea A un conjunto de ordinales tal que $\kappa^+ \leq |A|$. Sea μ un cardinal tal que $D \in L_\mu[D]$ y $A \subset L_\mu[D]$. Sea $M = N(\kappa \cup A \cup \{D\}) \prec L_\mu[D]$. Entonces $\mathcal{P}^{L[D]}\kappa \subset M$ y, por tanto, todo conjunto $x \subset \kappa$, $x \in L[D]$ es definible en $L_\mu[D]$ a partir de $\kappa \cup A$, es decir, existe un término de Skolem t tal que para ciertos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n < \kappa$ y $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in A$,*

$$L_\mu[D] \vDash [x] = t[\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \gamma_1, \ldots \gamma_m].$$

Demostración: Por el teorema 5.11, el colapso transitivo de M es de la forma $L_\lambda[D]$, para cierto ordinal λ. Como $A \subset M$, ha de ser $(\kappa^+)^{L[D]} \leq \kappa^+ \leq \lambda$. En la prueba del teorema 5.12 hemos visto que

$$\mathcal{P}^{L[D]}\kappa \subset (L_{\kappa^+}[D])^{L[D]} \subset L_{\kappa^+}[D] \subset L_\lambda[D] = \pi[M]$$

y, como π fija a los ordinales menores que κ, también $\mathcal{P}^{L[D]}\kappa \subset M$. ■

Ahora probamos que si partimos de un modelo $L[D]$ y construimos una ultrapotencia de orden μ suficientemente grande, el modelo al que llegamos, así como la medida $D_\mu = i_{0\mu}(D)$, son independientes de D.

Teorema 5.16 *Sea κ un ordinal y $D \subset \mathcal{P}\kappa$ tal que $D \in L[D]$, sea κ un cardinal$^{L[D]}$ y D una medida normal$^{L[D]}$ en κ. Sea $\mu > \kappa^+$ un cardinal regular y sea F el filtro de los conjuntos cerrados no acotados en μ. Entonces* *a)* $D^\mu = F \cap \mathrm{Ult}_D^\mu(L[D])$.

b) $\mathrm{Ult}_D^\mu(L[D]) = L[F]$.

c) $D_\mu = F \cap L[F]$.

DEMOSTRACIÓN: a) Tenemos que $\mu > \kappa^+ \geq (\kappa^+)^{L[D]} = (2^\kappa)^{L[D]}$. Sea $M = \mathrm{Ult}_D^\mu(L[D])$. Por el teorema 1.33 b) se cumple $i_{0\mu}(\kappa) = \kappa_\mu = \mu$, por lo que D_μ es un ultrafiltro^M en μ.

Si $x \in D_\mu$, por 1.31 sabemos que $\bigvee \alpha < \mu\ \{\kappa_\delta \mid \alpha \leq \delta < \mu\} \subset x$, y este conjunto es c.n.a. en μ porque la sucesión $\{\kappa_\delta\}_{\delta<\mu}$ es normal. Por lo tanto $x \in F$. Vemos así que $D_\mu \subset F \cap M$ y, como D_μ es un ultrafiltro^M, ha de ser $D_\mu = F \cap M$.

b) Tenemos que $(V = L[D])^{L[D]}$ y, como $i_{0\mu}$ es una inmersión elemental, $(V = L[D_\mu])^M$, es decir, $M = L[D_\mu]$. Consecuentemente,

$$\mathrm{Ult}_D^\mu(L[D]) = L[D_\mu] = L[F \cap M] = L[F].$$

c) es trivial. ■

Teorema 5.17 *Sean D_1, $D_2 \subset \mathcal{P}\kappa$, de manera que $D_j \in L[D_j]$ y D_j es una medida normal$^{L[D_j]}$ en κ (para $j = 1, 2$). Entonces $D_1 = D_2$.*

DEMOSTRACIÓN: Por simetría basta probar que $D_1 \subset D_2$. Sea μ un cardinal regular mayor que κ^+ y F el filtro generado por los conjuntos c.n.a. de μ. Sean $M_j = \mathrm{Ult}_{D_j}^\mu(L[D_j])$ y sean $i_{0\mu}^j : L[D_j] \longrightarrow M_j$ las inmersiones elementales naturales. Por el teorema anterior

$$M_1 = L[F] = M_2 \quad \text{y} \quad i_{0\mu}^1(D_1) = i_{0\mu}^2(D_2) = F \cap L[F] = \overline{F}.$$

Sea A un conjunto de ordinales tal que $|A| = \kappa^+$ y de modo que todo $\alpha \in A$ cumpla $\mu \leq \alpha$, $i_{0\mu}^1(\alpha) = i_{0\mu}^2(\alpha) = \alpha$. Existe por el teorema 1.33 c). Sea ν un cardinal tal que $A \subset \nu$, $D \in L_\nu[D_j]$ y $i_{0\mu}^j(\nu) = \nu$, para $j = 1, 2$ (de nuevo por 1.33).

Si $x \in D_1$, entonces $x \subset \kappa$ y por el teorema 5.15 existe un término de Skolem t tal que para ciertos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n < \kappa$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in A$ se cumple

$$L_\nu[D_1] \vDash [x] = t[\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_m] \tag{5.1}$$

Sea $y \in L_\nu[D_2]$ tal que

$$L_\nu[D_2] \vDash [y] = t[\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_m] \tag{5.2}$$

Veamos que $x = y$, para lo cual probamos primero que $z_1 = i_{0\mu}^1(x)$ coincide con $z_2 = i_{0\mu}^2(y)$. Tenemos que $i_{0\mu}^1$ fija a ν y a todos los parámetros de t en (5.1), y que $i_{0\mu}^1(D_1) = \overline{F}$. Por lo tanto, al aplicar $i_{0\mu}^1$ a (5.1), obtenemos

$$L_\nu[\overline{F}] \vDash [z_1] = t[\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_m],$$

y al aplicar $i^2_{0\mu}$ a (5.2) obtenemos

$$L_\nu[\overline{F}] \vDash [z_2] = t[\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_m],$$

luego $z_1 = z_2$ y

$$x = \kappa \cap i^1_{0\mu}(x) = \kappa \cap z_1 = \kappa \cap z_2 = \kappa \cap i^2_{0\mu}(y) = y.$$

Ahora, $i^2_{0\mu}(y) = z_2 = z_1 = i^1_{0\mu}(x) \in i^1_{0\mu}(D_1) = i^2_{0\mu}(D^2)$, luego $x = y \in D_2$. Así pues, $D_1 \subset D_2$. ■

El teorema siguiente es la parte técnica del teorema de Kunen, que probamos inmediatamente después:

Teorema 5.18 *Sean κ y D tales que $D \in L[D]$ y D es una medida normal$^{L[D]}$ en κ. Sea $\kappa < \alpha < i_{01}(\kappa)$. Entonces no existe ningún $U \subset \mathcal{P}\alpha$ de modo que U es una medida normal$^{L[U]}$ en α.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que existe tal U. Sea

$$j : L[U] \longrightarrow \mathrm{Ult}_U(L[U]) = L[j(U)]$$

la inmersión natural. Sea μ un cardinal regular mayor que α^{+++}. Sea F el filtro generado por los c.n.a. en μ. Sea $\overline{F} = F \cap L[F]$.

Se cumple que $j(\mu) = \mu$, pues si $\beta < \mu$ y $\gamma \in j(\beta)$, entonces γ es de la forma $[f]$, para cierta $f : \alpha \longrightarrow \beta$ tal que $f \in L[U]$. Por lo tanto

$$|j(\beta)|^{L[U]} \leq |{}^\alpha\beta|^{L[U]} < \mu,$$

pues $L[U]$ cumple la HCG. Por el teorema 5.4 j), $j(\mu) = \bigcup\limits_{\beta<\mu} j(\beta) \leq \mu$.

Por el teorema 5.16, $\overline{F} = (U^\mu)^{L[U]}$. Por otra parte, $j(U)$ es una medida normal$^{L[j(U)]}$ en $j(\alpha)$, y por 5.4,

$$j(\alpha) < ((2^\alpha)^+)^{L[U]} \leq (\alpha^{++})^{L[U]} \leq \alpha^{++},$$

luego $j(\alpha)^+ \leq \alpha^{+++} < \mu$. Podemos aplicar también el teorema 5.16, que nos da que $\overline{F} = (j(U)^\mu)^{L[j(U)]}$.

Aplicando j a $\overline{F} = (U^\mu)^{L[U]}$ obtenemos que $j(\overline{F}) = (j(U)^\mu)^{L[J(U)]}$, luego concluimos que $j(\overline{F}) = \overline{F}$.

Sea $\alpha = [f]_D$ (respecto a $\mathrm{Ult}_D(L[D])$. Como $\alpha < i_{01}(\kappa)$, podemos suponer que $f : \kappa \longrightarrow \kappa$. Como D es normal$^{L[D]}$, tenemos que $\kappa = [d]$, donde d es la identidad en κ. Así, $\bigwedge \delta < \kappa\, c_f(\delta)(d(\delta)) = f(\delta)$, de donde $i_{01}(f)([d]) = [f]$, es decir, $i_{01}(f)(\kappa) = \alpha$.

Sabemos que $\kappa_1 = i_{01}(\kappa)$ es el punto crítico de $i_{1\mu}$, y como α, $\kappa < i_{01}(\kappa)$, se cumple que $i_{1\mu}(\alpha) = \alpha$ e $i_{1\mu}(\kappa) = \kappa$. Aplicando $i_{1\mu}$ a la igualdad $i_{01}(f)(\kappa) = \alpha$ obtenemos que $i_{0\mu}(f)(\kappa) = \alpha$.

Sea A un conjunto de ordinales tal que $|A| = \kappa^+$ y

$$\bigwedge \delta \in A(i_{0\mu}(\delta) = \delta = j(\delta)).$$

Existe por los teoremas 1.33 y 5.4. Igualmente sea ν un cardinal tal que $A \subset \nu$, $i_{0\mu}(\nu) = \nu = j(\nu)$, f, $D \in L_\nu[D]$.

Sea $g_\kappa : \kappa \times \kappa \longrightarrow \kappa$ la semejanza respecto al orden canónico en $\kappa \times \kappa$. Por el teorema 5.15, el conjunto $g_\kappa[f]$ es definible en $L_\nu[D]$ a partir de $A \cup \kappa$, luego f también lo es (pues la fórmula $g_\kappa(u, v) = w$ es equivalente a una fórmula relativizada a $L_\nu[D]$). Por lo tanto $i_{0\mu}(f)$ es definible en $\mathrm{Ult}_D^\mu(L[D]) = L[\overline{F}]$ a partir de $A \cup \kappa$ y $\alpha = i_{0\mu}(f)(\kappa)$ es definible a partir de $A \cup (\kappa + 1)$, o sea,

$$L_\nu[\overline{F}] \vDash [\alpha] = t[\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_m, \kappa],$$

donde t es un término de Skolem, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n < \kappa$ y $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in A$. Aplicando j obtenemos que

$$L_\nu[\overline{F}] \vDash [j(\alpha)] = t[\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_m, \kappa],$$

luego $j(\alpha) = \alpha$, cuando según 5.4 habría de ser $\alpha < j(\alpha)$. ■

Finalmente podemos probar:

Teorema 5.19 (Kunen)

a) Sea D una medida normal en un cardinal κ. Si $V = L[D]$ entonces κ es el único cardinal medible y D es la única medida normal en κ.

b) Si κ es un ordinal, $D \subset \mathcal{P}\kappa$ y D es una medida normal$^{L[D]}$ en κ, entonces D es el único subconjunto de κ que cumple esto.

c) Si $\kappa_1 < \kappa_2$ son ordinales y para $i = 1, 2$ se cumple que $D_i \in L[D_i]$ y D_i es una medida normal$^{L[D_1]}$ en κ_i, entonces existe un ordinal α tal que $L[D_2] = \mathrm{Ult}_{D_1}^\alpha(L[D_1])$ y $D_2 = i_{0\alpha}(D_1)$. En particular los modelos $L[D_1]$ y $L[D_2]$ son elementalmente equivalentes.

Demostración: a) Sabemos que κ es el único cardinal medible por el teorema 5.14. Si D' es otra medida normal en κ, entonces $D \cap L[D]$ y $D' \cap L[D']$ son medidas normales en κ (en $L[D]$ y $L[D']$ respectivamente), luego el teorema 5.17 nos dice que $D \cap L[D] = D' \cap L[D']$, pero, como $V = L[D]$, concluimos que $D \subset D'$, y como son ultrafiltros ha de ser $D = D'$.

b) es el teorema 5.17.

c) Sea α el único ordinal tal que $i_{0\alpha}(\kappa_1) \leq \kappa_2 < i_{0\,\alpha+1}(\kappa_1)$. Existe porque la sucesión $\{i_{0\alpha}(\kappa)\}$ es normal (teorema 1.30).

Aplicamos el teorema anterior tomando $\kappa = i_{0\alpha}(\kappa_1)$, $D = i_{0\alpha}(D_1)$ y como α (del teorema anterior) a κ_2. En efecto, por el teorema de factorización se cumple que $(\kappa \leq \kappa_2 < i_{01}(\kappa))^{L[D]}$ y D es una medida normal$^{L[D_1]}$ en κ.

Como también se cumple que D_2 es una medida normal$^{L[D_2]}$ en κ_2, ha de ser $\kappa_2 = i_{0\alpha}(\kappa_1)$ o, de lo contrario, $U = D_2$ contradiría el teorema anterior.

Consecuentemente, $i_{0\alpha}(D_1)$ es una medida normal$^{L[i_{0\alpha}(D_1)]}$ en κ_2, luego por b) ha de ser $i_{0\alpha}(D_1) = D_2$.

Ahora, como $L[D_1]$ cumple $V = L[D_1]$, aplicando $i_{0\alpha}$ obtenemos que la ultrapotencia $\mathrm{Ult}_D^\alpha(L[D_1])$ cumple $V = L[D_2]$, luego $\mathrm{Ult}_D^\alpha(L[D_1]) = L[D_2]$). ■

Casi estamos a punto de probar la unicidad de todos los modelos $L[U]$. Nos falta un último paso previo:

Teorema 5.20 *Sea κ un cardinal medible y U una medida en κ. Sea D una medida normal$^{L[U]}$ en κ. Entonces $L[U] = L[D]$.*

DEMOSTRACIÓN: Claramente $L[D] \subset L[U]$. Sea $\overline{D} = D \cap L[D]$. Tenemos que $\overline{D} \in L[\overline{D}] = L[D]$. Vamos a probar que $U \cap L[\overline{D}] \in L[\overline{D}]$, con lo que el teorema 5.10 nos dará que $L[U] = L[U \cap L[\overline{D}]] \subset L[\overline{D}] = L[D]$.

Sea $j : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_U(V)$ la inmersión natural. Sea $\alpha = j(\kappa)$, sea d la identidad en κ y $\delta = [d]_U$. Se comprueba inmediatamente que si $x \subset \kappa$ entonces

$$x \in U \leftrightarrow \delta \in j(x).$$

Como $\overline{D}$ es una medida normal$^{L[\overline{D}]}$ en κ, también se cumple que $j(\overline{D})$ es una medida normal$^{L[j(\overline{D})]}$ en α, luego por el teorema anterior existe un ordinal β tal que $\alpha = i_{0\beta}(\kappa)$, $j(\overline{D}) = i_{0\beta}(\overline{D})$ y $L[j(\overline{D})] = \mathrm{Ult}_{\overline{D}}^\beta(L[\overline{D}])$.

Vamos a probar que si $x \subset \kappa$ y $x \in L[\overline{D}]$, entonces $j(x) = i_{0\beta}(x)$. De este modo podremos concluir que

$$U \cap L[\overline{D}] = \{x \in L[\overline{D}] \mid x \subset \kappa \wedge \delta \in j(x)\}$$

$$= \{x \in L[\overline{D}] \mid x \subset \kappa \wedge \delta \in i_{0\beta}(x)\} \in L[\overline{D}],$$

con lo que el teorema quedará probado.

Sea A un conjunto de ordinales tal que $|A| = \kappa^+$ y

$$\bigwedge \gamma \in A(\beta \leq \gamma \wedge i_{0\beta}(\gamma) = \gamma = j(\gamma)).$$

Sea μ un cardinal tal que $A \subset \mu$, $\overline{D} \in L_\mu[\overline{D}]$ e $i_{0\beta}(\mu) = \mu = j(\mu)$.

Ahora, si $x \subset \kappa$ y $x \in L[\overline{D}]$, por el teorema 5.15 existe un término de Skolem t tal que

$$L_\mu[\overline{D}] \vDash [x] = t[\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_m],$$

para ciertos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n < \kappa$ y $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in A$. Aplicando $i_{0\beta}$ y j obtenemos que $i_{0\beta}(x) = j(x)$. ■

He aquí el teorema de unicidad del modelo canónico:

Teorema 5.21 *Sea κ un cardinal medible y U_1, U_2 dos medidas en κ. Entonces $L[U_1] = L[U_2]$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea D_i una medida normal$^{L[U_i]}$ en κ. Por el teorema anterior $L[U_i] = L[D_i]$ y por el teorema de Kunen (apartado b) $D_1 = D_2$, luego $L[U_1] = L[U_2]$. ■

Combinando este teorema con los anteriores vemos que si κ es un cardinal medible y U es una medida en κ, entonces $L[U]$ es un modelo de ZFC+HCG independiente de U, en el que κ es el único cardinal medible, en el que existe una única medida normal y además si κ' es otro cardinal medible con otra medida U', entonces los modelos $L[U]$ y $L[U']$ son elementalmente equivalentes.

El hecho de que dispongamos de un modelo "tan concreto" con un cardinal medible puede verse como una evidencia (no concluyente, por supuesto) de la consistencia de los cardinales medibles, pues nos proporciona una teoría muy simple en la que el cardinal medible no es "una cosa extraña" cuya existencia postulamos, sino que tenemos una descripción muy detallada de él, de sus medidas y de "su entorno" (por ejemplo, de la función del continuo). La descripción de las medidas a la que nos referimos es la que proporciona el teorema siguiente:

Teorema 5.22 *Sea κ un cardinal medible, D una medida normal en κ y supongamos que $V = L[D]$. Sea $i_{0\omega} : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_D^{\omega}(V)$ la inmersión natural. Para cada medida U en κ existe un ordinal $\delta < \kappa_\omega$ tal que*

$$U = \{x \subset \kappa \mid \delta \in i_{0\omega}(x)\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $j : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_U(V)$ la inmersión natural. Sea $\delta = [d]_U$, donde d es la identidad en κ. Por el teorema anterior $V = L[U]$. Con la notación empleada en la prueba del teorema 5.20, ahora tenemos que $\overline{D} = D$ y existe un ordinal β tal que $\delta < j(\kappa) = i_{0\beta}(\kappa)$, $j(D) = i_{0\beta}(D)$, $U = \{x \subset \kappa \mid \delta \in i_{0\beta}(x)\}$.

Observemos que, como $V = L[D] = L[U]$, se cumple $\mathrm{Ult}_D^{\beta}(V) = L[i_{0\beta}(D)]$ y $\mathrm{Ult}_U(V) = L[j(D)]$, luego $\mathrm{Ult}_D^{\beta}(V) = \mathrm{Ult}_U(V)$.

Veamos que $\beta < \omega$. Si fuera $\beta \geq \omega$, como κ es un cardinal medible, κ_ω es medible$^{\mathrm{Ult}_D^{\omega}(V)}$, luego κ_ω es regular$^{\mathrm{Ult}_D^{\omega}(V)}$ y $\mathrm{Ult}_D^{\omega}(V) \subset \mathrm{Ult}_D^{\beta}(V)$, luego κ_ω es regular$^{\mathrm{Ult}_D^{\beta}(D)}$. Sin embargo, κ_ω tiene cofinalidad numerable$^{\mathrm{Ult}_U(V)}$, ya que la sucesión $\{\kappa_n\}_{n<\omega}$ está en $\mathrm{Ult}_U(V)$ por 5.4 c) y no está acotada en κ_ω por 1.30 c), contradicción.

Así pues, $\beta < \omega$, de donde $\delta < i_{0\beta}(\kappa) = \kappa_\beta < \kappa_\omega$. El punto crítico de $i_{\beta\omega}$ es κ_β, luego $i_{\beta\omega}(\delta) = \delta$. Por consiguiente, para todo $x \subset \kappa$ se cumple

$$x \in U \leftrightarrow \delta \in i_{0\beta}(x) \leftrightarrow \delta \in i_{0\omega}(x).$$ ■

Ejercicio: En las condiciones del teorema anterior, demostrar que todos los conjuntos $U_\delta = \{x \subset \kappa \mid \delta \in i_{0\omega}(\kappa)\}$, con $\kappa \leq \delta < \kappa_\omega$ son medidas en κ.

Teorema 5.23 *Sea κ un cardinal medible, D una medida normal en κ y supongamos que $V = L[D]$. Entonces hay exactamente κ^+ medidas en κ.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior el número de medidas es a lo sumo $|\kappa_\omega| = |i_{0\omega}(\kappa)|$ y a su vez éste es a lo sumo igual al número de aplicaciones de ${}^\omega\kappa$ en κ, que por la HCG es a lo sumo κ^+. De hecho hay exactamente κ^+ por la HCG y el siguiente teorema general. ■

Teorema 5.24 *Si κ es un cardinal medible, entonces existen al menos 2^κ medidas en κ.*

DEMOSTRACIÓN: Por [TC 9.32] existe una familia $A \subset \mathcal{P}\kappa$ tal que $|A| = 2^\kappa$, $\bigwedge x \in A\ |x| = \kappa$ y $\bigwedge xy \in A(x \neq y \rightarrow |x \cap y| < \kappa)$. Además $\bigwedge x \in A\ |\kappa \setminus x| = \kappa$, pues en caso contrario, si $y \in A$ es distinto de x, tendríamos que $|x \cap y| < \kappa$ y $|(\kappa \setminus x) \cap y| < \kappa$, luego $|y| < \kappa$, contradicción.

Sea U una medida en κ. Fijemos una partición

$$\kappa = P \cup Q, \quad P \cap Q = \varnothing, \quad |P| = |Q| = \kappa.$$

Entonces $P \in U$ o $Q \in U$. Pongamos que $P \in U$. Para cada $x \in A$ sea $f_x : \kappa \longrightarrow \kappa$ biyectiva tal que $f_x[P] = x$. Sea $U_x = f_x[U]$ (en el sentido de 5.2). Precisamente por 5.2 tenemos que U_x es una medida en κ y además $x \in U_x$.

Si $x, y \in A$ son distintos, entonces se cumple $U_x \neq U_y$, pues en caso contrario $x \cap y \in U_x$, lo cual es imposible porque $|x \cap y| < \kappa$. Por lo tanto $\{U_x\}_{x \in A}$ es una familia de 2^κ medidas en κ. ■

Terminamos la sección con una aplicación interesante:

Teorema 5.25 *Si κ es un cardinal medible y cumple $2^\kappa > \kappa^+$, entonces existe un conjunto transitivo M tal que $M \vDash \mathrm{ZFC} + \bigvee \kappa\ \kappa$ es un cardinal medible.*

DEMOSTRACIÓN: Sea D una medida normal en κ y sea $\overline{D} = D \cap L[D]$. Sean

$$j : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_D(V) \quad \text{y} \quad i_{0\omega} : L[\overline{D}] \longrightarrow \mathrm{Ult}^\omega_{\overline{D}}(L[\overline{D}])$$

las inmersiones naturales. Por comodidad llamaremos $N = \mathrm{Ult}_D(V)$. Consideramos la sucesión $\{\kappa_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ definida en $L[\overline{D}]$ a partir de la medida $\overline{D}$.

Notemos que en $L[\overline{D}]$, se cumple $|\kappa_\omega| \leq \kappa^+$ (hay a lo sumo κ^+ aplicaciones de ${}^\omega\kappa$ en κ), luego también (en V) $|i_{0\omega}(\kappa)| \leq \kappa^+$. Por consiguiente $\kappa_\omega \leq \kappa^{++}$.

Por otro lado, según 5.4 h) se cumple $j(\kappa) > 2^\kappa \geq \kappa^{++}$, de modo que $\kappa_\omega < j(\kappa)$.

Sea $F = \big\{x \subset \kappa_\omega \bigm| \bigvee m \in \omega\ \{\kappa_n \mid m \leq n < \omega\} \subset x\big\}$. Por el teorema 1.31 relativizado a $L[\overline{D}]$ tenemos que

$$\bigwedge x(x \in \overline{D}_\omega \leftrightarrow x \in L[\overline{D}_\omega] \cap F),$$

pues $\mathrm{Ult}^\omega_{\overline{D}}(L[\overline{D}]) = L[\overline{D}_\omega]$. En otras palabras, $L[\overline{D}_\omega] \cap F = \overline{D}_\omega \in L[\overline{D}_\omega]$.

Por otro lado, $\overline{F} = F \cap N \in N$, ya que $\{\kappa_n\}_{n\in\omega} \in N$. Por consiguiente:

$$L[\overline{D}_\omega] = L[L[\overline{D}_\omega] \cap F] = L[F] = L[F \cap N] = L[\overline{F}] \subset N.$$

Además, $\overline{D}_\omega = L[\overline{D}_\omega] \cap F = L[\overline{F}] \cap F \cap N = \overline{F}$. Así, ($\overline{F}$ es una medida normal en $\kappa_\omega)^{L[\overline{F}]}$, luego también (($\overline{F}$ es una medida normal en $\kappa_\omega)^{L[\overline{F}]})^N$. En particular,

$$(\bigvee \alpha < j(\kappa) \bigvee U \subset \mathcal{P}\alpha(U \text{ es una medida normal en } \alpha)^{L[U]})^N.$$

Ahora usamos que j es elemental, con lo que

$$\bigvee \alpha < \kappa \bigvee U \subset \mathcal{P}\alpha(U \text{ es una medida normal en } \alpha)^{L[U]}.$$

Claramente κ es inaccesible$^{L[U]}$, luego $M = V_\kappa \cap L[U]$ es un modelo transitivo de ZFC y además $M \vDash [\alpha]$ es un cardinal medible. ■

Esto significa que la consistencia de que exista un cardinal medible κ tal que $2^\kappa > \kappa^+$ no puede probarse ni siquiera suponiendo la consistencia de que exista un cardinal medible. Así pues, aunque tenemos ya la existencia de un cardinal medible es consistente con la HCG, este teorema nos advierte que la consistencia de otras variantes no puede probarse tan fácilmente como podría pensarse. De hecho, un teorema de Kunen prueba que bajo la hipótesis del teorema anterior puede construirse un modelo con cualquier cantidad prefijada de cardinales medibles.

5.3 El orden de Mitchell

Definición 5.26 Si κ es un cardinal medible, el *orden de Mitchell,* definido sobre el conjunto de las medidas normales en κ, es el dado por

$$D < D' \leftrightarrow D \in \mathrm{Ult}_{D'}(V).$$

Teorema 5.27 *Si κ es un cardinal medible y D, D' son medidas normales en κ, entonces $D < D'$ si y sólo si existe una familia $\{D_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ de conjuntos $D_\alpha \subset \mathcal{P}\alpha$ tal que, para todo $x \subset \kappa$,*

$$x \in D \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid x \cap \alpha \in D_\alpha\} \in D'$$

Demostración: Observemos en primer lugar que si $x \subset \kappa$, se cumple $x = [h_x]_{D'}$, donde $h_x(\alpha) = x \cap \alpha$. En efecto, basta observar que

$$\{\alpha < \kappa \mid h_x(\alpha) \subset \alpha\} = \kappa \in D',$$

luego tenemos que $[h_x] \subset [d] = \kappa$, y si $\delta \in \kappa$, entonces

$$\delta \in [h_x] \leftrightarrow j_{D'}(\delta) \in [h_x] \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid \delta \in x \cap \alpha\} \in D' \leftrightarrow \delta \in x.$$

La última equivalencia se debe a que si $\delta \in x$ entonces el conjunto precedente contiene a $\kappa \setminus \delta$, y en caso contrario es vacío.

Si existe una familia en las condiciones indicadas, sea $g(\alpha) = D_\alpha$. Entonces

$$x \in D \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid h_x(\alpha) \in g(\alpha)\} \in D' \leftrightarrow x = [h_x] \in [g]_{D'},$$

luego $D = [g]_{D'} \in \mathrm{Ult}_{D'}(V)$. Recíprocamente, si $D = [g]_{D'}$, para cierta $g \in V^\kappa$, como $D \subset \mathcal{P}\kappa$ y $\kappa = [d]$, tenemos que

$$\{\alpha < \kappa \mid g(\alpha) \subset \mathcal{P}\alpha\} \in D'.$$

Definimos $D_\alpha = g(\alpha)$ si $g(\alpha) \subset \mathcal{P}\alpha$ y $D_\alpha = \{\varnothing\}$ en caso contrario. Así D está definido también por la clase de la función $g'(\alpha) = D_\alpha$, luego

$$x \in D \leftrightarrow [h_x] \in [g'] \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid x \cap \alpha \in D_\alpha\} \in D'.$$

■

Esto nos permite demostrar:

Teorema 5.28 *Si κ es un cardinal medible, entonces el orden de Mitchell una relación de orden estricto en el conjunto de las medidas normales en κ.*

DEMOSTRACIÓN: Se cumple $\neg D < D$ por 5.4 i). Veamos que es una relación transitiva. Si $D < D' < D''$, sean $\{D_\delta\}_{\delta<\kappa}$ y $\{D'_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ tales que

$$x \in D \leftrightarrow \{\delta < \kappa \mid x \cap \delta \in D_\delta\} \in D',$$

$$y \in D \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid y \cap \alpha \in D_\alpha\} \in D''.$$

Uniendo ambas equivalencias

$$x \in D \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid \{\delta < \alpha \mid x \cap \delta \in D_\delta\} \in D_\alpha\} \in D''.$$

Definimos $D''_\alpha = \{u \in \mathcal{P}\alpha \mid \{\delta < \alpha \mid u \cap \delta \in D_\delta\} \in D_\alpha\}$. Así, es claro que

$$x \cap \alpha \in D''_\alpha \leftrightarrow \{\delta < \alpha \mid x \cap \delta \in D_\delta\} \in D_\alpha,$$

luego

$$x \in D \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid x \cap \alpha \in D''_\alpha\} \in D'',$$

por lo que $D < D''$. ■

Teorema 5.29 *Si κ es un cardinal medible, el orden de Mitchell está bien fundado.*

DEMOSTRACIÓN: Sea κ el menor cardinal medible cuyo orden de Mitchell no esté bien fundado. Sea $\{D_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión decreciente de medidas normales en κ. Sea $M = \mathrm{Ult}_{D_0}(V)$ y sea $j : V \longrightarrow M$ la inmersión natural en la ultrapotencia.

Por definición del orden de Mitchell tenemos que $D_n \in M$ para todo $n \geq 1$, y $\{D_n\}_{n\geq 1} \in M$ porque $M^\kappa \subset M$. En particular esto prueba que κ es medible^M. Como $D_{n+1} < D_n$, existe $\{D_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ tal que

$$x \in D_{n+1} \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid x \cap \alpha \in D_\alpha\} \in D_n.$$

Como $D_\alpha \subset \mathcal{P}\alpha$ y $|\mathcal{P}\alpha| < \kappa$, se cumple que $D_\alpha \in M$, y $\{D_\alpha\}_{\alpha<\kappa} \in M$ porque $M^\kappa \subset M$. Esto prueba que $(D_{n+1} < D_n)^M$, luego el orden de Mitchell en κ no está bien fundado^M, pero esto contradice que $j(\kappa)$ tiene que ser el menor cardinal medible^M en el que el orden de Mitchell no está bien fundado^M. ■

Definición 5.30 Si D es una medida normal en un cardinal κ, definimos $o(D)$ como el rango de D respecto del orden de Mitchell. Definimos

$$o(\kappa) = \bigcup\{o(D) + 1 \mid D \text{ es una medida normal en } \kappa\}.$$

Si un ordinal α no es un cardinal medible, entonces el conjunto de las medidas normales en α es vacío, por lo que podemos definir coherentemente $o(\alpha) = 0$, y así κ es medible si y sólo si $o(\kappa) \geq 1$.

Por otro lado, $o(\kappa) \geq 2$ si y sólo si existen dos medidas normales $D < D'$, lo cual equivale a que $\kappa = [d]$ sea medible en $\mathrm{Ult}_{D'}(V)$ y a su vez a que

$$\{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es medible}\} \in D'.$$

Por lo tanto, si μ es el único cardinal medible (o si deja por debajo una cantidad finita de ellos), se cumple que $o(\mu) = 1$. Para generalizar estas observaciones conviene enunciar un resultado general:

Podemos ver a $o|_\kappa$ como una función $\kappa \longrightarrow V$ y, si D es una medida normal en κ, podemos considerar la clase $[o|_\kappa]_D \in \mathrm{Ult}_D(V)$.

Teorema 5.31 *Si κ es un cardinal medible y D es una medida normal en κ, entonces $o(D) = [o|_\kappa]_D$.*

Demostración: Por definición $o(D) = \bigcup\{o(D') + 1 \mid D' < D\}$. Ahora bien, en la prueba del teorema anterior hemos visto que todo $D' < D$ está en $\mathrm{Ult}_D(V)$, y que el orden de Mitchell es absoluto para M, luego $o(D) = o^M(D)$. Por otra parte,

$$\{\alpha < \kappa \mid o|_\kappa(\alpha) = o(d(\alpha))\} = \kappa \in D,$$

luego $[o|_\kappa]_D = o^M([d]) = o^M(\kappa) = o(\kappa)$. ■

Así, por ejemplo, si $o(D) > 2$ se cumple que $\{\alpha < \kappa \mid o(\alpha) > 2\} \in D$, luego κ tiene por debajo un conjunto estacionario de cardinales medibles que tienen por debajo un conjunto estacionario de cardinales medibles, etc.

En general, la consistencia de que exista un cardinal medible con orden $o(\kappa) = 1$ es más débil que la de que exista un cardinal medible con $o(\kappa) = 2$ y así sucesivamente.

Una medida normal en un cardinal κ es un subconjunto de $\mathcal{P}\kappa$, luego en principio podría haber hasta 2^{2^κ} de ellas, pero el teorema anterior nos da una cota más fina para $o(\kappa)$:

Teorema 5.32 *Si κ es un cardinal medible, entonces $o(\kappa) \leq (2^\kappa)^+$.*

Demostración: Sea D una medida normal en κ. Entonces $o(D) = [o|_\kappa]_D$, y todo $\alpha < [o|_\kappa]_D$ es de la forma $\alpha = [f]$, donde podemos tomar $f : \kappa \longrightarrow \kappa$, luego $|o(D)| \leq 2^\kappa$, luego $o(D) < (2^\kappa)^+$, luego $o(\kappa) \leq (2^\kappa)^+$. ■

En particular, si se cumple la HCG tenemos que $o(\kappa) \leq \kappa^{++}$.

Capítulo VI

Cardinales débilmente medibles

En [TC 7.70] introdujimos los cardinales $\mathbb{R}$-medibles, y vimos que están estrechamente relacionados con la posibilidad de extender la medida de Lebesgue a $\mathcal{P}\mathbb{R}$. Concretamente, el teorema [TC 7.76] afirma que esto es posible si y sólo si existe un cardinal $\mathbb{R}$-medible $\leq 2^{\aleph_0}$. También probamos [TC 7.74] que los cardinales medibles son los cardinales $\mathbb{R}$-medibles $> 2^{\aleph_0}$. En este capítulo introduciremos otra clase de cardinales grandes, los cardinales débilmente medibles, y demostraremos que la consistencia de que existan cardinales medibles es equivalente a la de que existan cardinales $\mathbb{R}$-medibles y también a la de que existan cardinales débilmente medibles.

De hecho vamos a introducir propiedades aún más débiles desde un punto de vista lógico, pero igualmente equivalentes en cuanto a consistencia. Con ello estaremos reduciendo al mínimo lo que realmente estamos suponiendo al aceptar la consistencia de los cardinales medibles. Más concretamente, hasta ahora sabemos que la existencia de un cardinal medible es equivalente a la existencia de un cardinal medible-Ulam, es decir, un cardinal con un ultrafiltro $\aleph_1$-completo no principal. Aquí vamos a sustituir la propiedad de ser un ultrafiltro por otra mucho más débil, aunque es más conveniente expresarla en términos de ideales en lugar de filtros.

6.1 Ideales saturados

Definición 6.1 Diremos que un ideal I en un conjunto X es *μ-saturado*, o que cumple la *condición de cadena*[1] μ, si el álgebra cociente $\mathcal{P}X/I$ cumple la c.c.μ. Equivalentemente, esto significa que toda familia $A \subset \mathcal{P}X \setminus I$ tal que si $x, y \in A$ cumplen $x \neq y$ entonces $x \cap y \in I$ tiene cardinal menor que μ.

[1]En [TC 7.38] se prueba que si I es μ-completo la definición equivale a que toda anticadena en $\mathcal{P}X \setminus I$ tiene cardinal menor que μ.

Por ejemplo, si I es un ideal primo (el ideal dual de un ultrafiltro) en un conjunto X, entonces $\mathcal{P}X/I$ es el álgebra trivial, luego I cumple la c.c. 2 y, en particular, la c.c.n. y la c.c. κ para todo cardinal infinito κ.

Un *ideal de conjuntos nulos* I en un conjunto X es un ideal en X que cumpla las tres propiedades siguientes:

a) $\bigwedge\alpha \in X\ \{\alpha\} \in I$,

b) I es $\aleph_1$-completo,

c) I es $\aleph_1$-saturado.

Observemos que en virtud de [TC 7.38] la condición c) equivale a que no existan familias disjuntas no numerables en $\mathcal{P}X \setminus I$.

En particular, si $\mu : \mathcal{P}X \longrightarrow [0, 1]$ es una medida unitaria respecto a la cual los puntos tengan medida nula, entonces el ideal I_μ formado por los conjuntos de medida nula es un ideal de conjuntos nulos en el sentido de la definición anterior (la saturación la proporciona el teorema [TC 7.58 7]).

Por ello, incluso en el caso general de un ideal de conjuntos nulos I en $\mathcal{P}X$ que no provenga de una medida, es cómodo hablar de *conjuntos nulos* en X (los de I), *conjuntos de medida* 1 (los del filtro dual de I, es decir, los de complementario nulo) y *conjuntos de medida positiva* (los que no son nulos), si bien —naturalmente— la medida de un conjunto no está definida.

Un ideal de conjuntos nulos en un conjunto X es una *medida débil* en X si es κ-completo, donde $\kappa = |X|$. Un cardinal κ es *débilmente medible* si existe una medida débil en un conjunto de cardinal κ (o, equivalentemente, en el propio κ).

En el lenguaje de la teoría de la medida, un cardinal es débilmente medible si existe un ideal en κ respecto al cual los puntos tienen medida nula, la unión de menos de κ conjuntos de medida nula tenga medida nula, y toda familia de conjuntos de medida positiva disjuntos dos a dos es a lo sumo numerable.

Observemos que, en particular, todo subconjunto de κ de cardinal menor que κ tiene medida nula (porque es unión de menos de κ puntos de medida nula).

Si κ es un cardinal medible y U es una medida en κ, entonces el ideal dual $I = U'$ es obviamente una medida débil en κ (hemos sustituido la propiedad de ser 2-completo por la más débil de ser $\aleph_1$-completo). Por lo tanto, todo cardinal medible es débilmente medible.

Por otra parte, aunque hemos exigido una propiedad más fuerte que en la definición de ideal de conjuntos nulos, sucede lo siguiente:

Teorema 6.2 *Si κ es el menor cardinal para el que existe un ideal de conjuntos nulos, entonces κ es débilmente medible.*

Demostración: Supongamos que I es un ideal de conjuntos nulos en κ, pero que no sea κ-completo, es decir, que existe una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ de $\mu < \kappa$ subconjuntos de κ de medida nula cuya unión no tiene medida nula. Podemos suponer que μ es el menor cardinal para el que existe tal familia, de modo que la unión de menos de μ subconjuntos nulos de κ tiene medida nula.

Cambiando A_α por $A_\alpha \setminus \bigcup\limits_{\delta<\alpha} A_\delta$ obtenemos otra familia $\{B_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ de conjuntos igualmente nulos cuya unión es la misma, luego es no nula, pero éstos son disjuntos dos a dos. Sea

$$I' = \{B \in \mathcal{P}\mu \mid \bigcup_{\alpha\in B} A_\alpha \in I\}.$$

Es inmediato comprobar que I' es un ideal μ-completo y σ-saturado en $\mathcal{P}\mu$ respecto al que los puntos tienen medida nula, lo cual contradice la minimalidad de κ. ■

Así pues, para que exista un cardinal débilmente medible basta con que exista un cardinal que admita un ideal de conjuntos nulos, y esto sucede en particular si la medida de Lebesgue puede extenderse a $\mathcal{P}\mathbb{R}$ (más concretamente, en tal caso hay un cardinal débilmente medible $\leq 2^{\aleph_0}$).

Veremos que tiene interés observar qué resultados requieren realmente que el ideal considerado sea $\aleph_1$-saturado y cuáles se siguen cumpliendo bajo condiciones más débiles de saturación. En lo sucesivo adoptaremos el convenio siguiente:

> *Cuando digamos que un cardinal κ tiene un ideal μ-saturado I, nos referiremos a un ideal κ-completo y μ-saturado que cumpla además que $\bigwedge \alpha \in \kappa\ \{\alpha\} \in I$. Sobrentenderemos también que κ es no numerable.*

Observemos que toda medida débil es un ideal μ-saturado en este sentido, para todo $\mu \geq \aleph_1$ (κ no puede ser numerable porque la medida es $\aleph_1$-completa), por lo que, en principio, estamos ante versiones aún más débiles que la medibilidad débil.

En virtud de [TC 7.38], para $\mu \leq \kappa$ la μ-saturación equivale a que toda familia de conjuntos disjuntos de medida positiva tenga cardinal menor que μ.

Por ejemplo, los cardinales débilmente medibles son débilmente inaccesibles, pero en realidad basta exigir κ-saturación:

Teorema 6.3 *Si un cardinal κ tiene un ideal κ-saturado, entonces κ es débilmente inaccesible.*

Demostración: Tenemos que κ es no numerable por hipótesis. Si fuera singular, podríamos descomponerlo en unión de menos de κ conjuntos de cardinal menor que κ, dichos conjuntos serían nulos por la κ-completitud (serían unión de menos de κ puntos nulos) y κ sería nulo de nuevo por la κ-completitud. Así pues, κ es regular.

Veamos ahora que es un cardinal límite. Supongamos que por el contrario $\kappa = \mu^+$. Entonces, para cada $\alpha < \kappa$ sea $f_\alpha : \mu \longrightarrow \alpha$ suprayectiva y, para $\beta < \kappa$, $\gamma < \mu$, sea

$$A_{\beta\gamma} = \{\alpha < \kappa \mid f_\alpha(\gamma) = \beta\}.$$

Si $\beta < \kappa$, para cada $\alpha \geq \beta$ existe un $\gamma < \mu$ tal que $f_\alpha(\gamma) = \beta$, luego $\alpha \in A_{\beta\gamma}$, con lo que

$$\kappa \setminus \bigcup_{\gamma<\mu} A_{\beta\gamma} \subset \beta.$$

Así, $\Big|\kappa \setminus \bigcup\limits_{\gamma<\mu} A_{\beta\gamma}\Big| \leq \mu$, luego $\kappa \setminus \bigcup\limits_{\gamma<\mu} A_{\beta\gamma} \in I$, luego $\bigcup\limits_{\gamma<\mu} A_{\beta\gamma} \notin I$.

Concluimos que para cada $\beta < \kappa$ existe un $\gamma_\beta < \mu$ tal que $A_{\beta\gamma_\beta} \notin I$. Como κ es regular, existe un conjunto $W \subset \kappa$ de cardinal κ y un $\gamma < \mu$ de modo que $\bigwedge \beta \in W\ \gamma_\beta = \gamma$. De este modo, $\{A_{\beta\gamma} \mid \beta \in W\}$ es una familia de κ subconjuntos de κ disjuntos dos a dos y con medida positiva, en contradicción con la κ-completitud de κ. ■

Conviene observar que los ideales κ-saturados (el incluso los κ^+-saturados) determinan cocientes completos:

Teorema 6.4 *Si κ es un cardinal e I es un ideal κ^+-saturado en κ, entonces el álgebra $\mathcal{P}\kappa/I$ es completa.*

Demostración: Como $\mathbb{B} = \mathcal{P}\kappa/I$ cumple la c.c. κ^+, por [TC 7.34] basta probar que es κ^+-completa. Para ello tomamos un subconjunto $A \subset \mathbb{B}$ tal que $|A| \leq \kappa$ y tenemos que probar que tiene supremo.

Supongamos primero que $|A| < \kappa$, de modo que $A = \{[X_\alpha] \mid \alpha < \gamma\}$, con $\gamma < \kappa$. Entonces, teniendo en cuenta que I es κ-completo, es inmediato que $[\bigcup\limits_{\alpha<\gamma} X_\alpha]$ es el supremo de A.

Pasamos ahora al caso en que $|A| = \kappa$, con lo que $A = \{a_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$. Definimos $b_\alpha = a_\alpha \wedge (\bigvee\limits_{\delta<\alpha} a_\delta)'$, donde el supremo existe por la parte ya probada.

Tomando representantes de las clases se comprueba inmediatamente que $\bigvee\limits_{\delta<\alpha} a_\delta = \bigvee\limits_{\delta<\alpha} b_\delta$, de donde se sigue a su vez que si existe el supremo de la familia $B = \{b_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$, dicho supremo es también $\bigvee A$. Pero además los elementos de B son incompatibles dos a dos.

Sea W una anticadena maximal en $\mathbb{B}$ que contenga a B. Entonces $|W| \leq \kappa$, por lo que $W = \{[Y_\delta] \mid \delta < \kappa\}$, donde los conjuntos $Y_\delta \subset \kappa$ pueden tomarse disjuntos dos a dos, ya que podemos sustituir Y_δ por

$$Y_\delta \setminus \bigcup_{\epsilon<\delta} Y_\epsilon = Y_\delta \setminus \bigcup_{\epsilon<\delta} (Y_\delta \cap Y_\epsilon),$$

y la segunda parte está en I por la κ-completitud.

Sea $D = \bigcup\{Y_\delta \mid \bigvee \alpha < \kappa\ [Y_\delta] = b_\alpha\}$. Veamos que $[D] = \bigvee B$. Obviamente $[D]$ es una cota superior de B. Supongamos que $\bigwedge \alpha < \kappa\ b_\alpha \leq [E]$ y sea $d = [D] \wedge [E]'$. Así $\bigwedge \alpha < \kappa\ d \wedge b_\alpha = \mathbb{O}$ y, si $[Y_\delta]$ no coincide con ningún b_α, entonces $Y_\delta \cap D = \varnothing$, luego también $d \wedge [Y_\delta] = \mathbb{O}$. En definitiva, d es incompatible con todos los elementos de W y la maximalidad de W implica que $d = \mathbb{O}$. Por lo tato, $[D] \leq [E]$, como había que probar. ■

Vamos a estudiar ahora la distancia que hay entre los cardinales medibles y los débilmente medibles. Supongamos en general un cardinal κ con un ideal μ-saturado I, con $\mu \leq \kappa$ (con lo que κ es débilmente inaccesible por el teorema anterior).

Diremos que un conjunto $A \subset \kappa$ de medida positiva es un *átomo* si no puede partirse en unión de dos conjuntos disjuntos de medida positiva. Esto equivale a que el conjunto

$$P = \{X \subset \kappa \mid X \cap A \in I\}$$

es un ideal primo κ-completo que contiene a los puntos, luego su filtro dual es una medida en κ. Concluimos, pues, que en este caso κ es un cardinal medible.

Así pues, si κ no es medible es que no tiene átomos o, lo que es lo mismo, que todo subconjunto de κ de medida positiva puede partirse en dos subconjuntos disjuntos de medida positiva. Esto nos permite construir un árbol A cuyos nodos son subconjuntos de κ de medida positiva y el orden es el dado por la inversa de la inclusión. Concretamente, definimos $\mathrm{Niv}_0 A = \{\kappa\}$, supuesto definido $\mathrm{Niv}_\alpha A$, partimos cada uno de sus elementos en dos conjuntos disjuntos de medida positiva. Los conjuntos obtenidos forman $\mathrm{Niv}_{\alpha+1} A$, de modo que cada elemento de $\mathrm{Niv}_\alpha A$ tiene exactamente dos extensiones en el nivel siguiente. Supuestos definidos $\mathrm{Niv}_\delta A$ para todo $\delta < \lambda$, definimos $\mathrm{Niv}_\lambda A$ como el conjunto de todas las intersecciones $X = \bigcap\limits_{\delta<\lambda} X_\delta$, donde $X_\delta \in \mathrm{Niv}_\delta A$ y X tiene medida positiva.

Si $\{X_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ es una rama en A, entonces $\{X_\alpha \setminus X_{\alpha+1}\}_{\alpha+1<\beta}$ es una familia de conjuntos de medida positiva disjuntos dos a dos, luego su cardinal es $< \mu$. Así pues, todas las ramas de A tienen altura $< \mu$ y la altura de A es a lo sumo μ.

Igualmente, cada nivel de A es una familia de conjuntos disjuntos de medida positiva, luego los niveles de A tienen cardinal $< \mu$.

Para cada rama $C \subset A$, la intersección $Z_C = \bigcap Z$ tiene que ser un conjunto nulo, pues en caso contrario $Z_C \in A$ permitiría prolongar la rama C. Los conjuntos $\{Z_C\}_C$, donde C recorre las ramas de A, forman una partición de A en conjuntos nulos. Por lo tanto, por la κ-completitud de I, el número de ramas debe ser al menos κ.

Ahora distinguimos dos casos: si $\mu < \kappa$ es regular, como cada rama tiene un elemento de cada nivel y cada nivel tiene cardinal $\nu_\alpha < \mu$, el número de ramas es a lo sumo[2]

$$\sum_{\lambda<\mu} \prod_{\alpha<\lambda} \nu_\alpha^{|\lambda|} \leq \sum_{\lambda<\mu} \prod_{\alpha<\lambda} \nu_\alpha^{\nu_\alpha|\lambda|} = \sum_{\lambda<\mu} \prod_{\alpha<\lambda} 2^{\nu_\alpha|\lambda|}$$
$$\leq \sum_{\lambda<\mu} \prod_{\alpha<\lambda} 2^{<\mu} = \mu(2^{<\mu})^{<\mu} = 2^{<\mu}.$$

Conectando las dos estimaciones sobre el número de ramas concluimos:

[2]El cálculo se simplifica si suponemos $\mu = \nu^+$, en particular si $\mu = \aleph_1$, pues entonces el número de ramas de altura λ es a lo sumo $\nu^{|\lambda|} \leq \nu^\nu = 2^\nu = 2^{<\mu}$.

Teorema 6.5 *Si un cardinal κ tiene un ideal μ-saturado, con $\mu < \kappa$ regular, entonces o bien κ es medible, o bien $\kappa \leq 2^{<\mu}$. En particular, si κ es débilmente medible, entonces o bien κ es medible o bien $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$.*

Así pues, para cardinales $> 2^{\aleph_0}$ las propiedades “ser débilmente medible” y “ser medible” son equivalentes.

Si $\mu = \kappa$ el razonamiento anterior no conduce a nada, pues nos da la alternativa trivial $\kappa \leq \kappa$. No obstante, podemos refinarlo como sigue:

Teorema 6.6 *Un cardinal κ es medible si y sólo si es débilmente compacto y tiene un ideal κ-saturado.*

DEMOSTRACIÓN: Continuamos con la hipótesis de que κ tiene un ideal κ-saturado (es decir, $\mu = \kappa$ en el razonamiento anterior), pero no es medible. Entonces el árbol A tiene que tener altura κ, pues si tuviera altura $\lambda < \kappa$, por la regularidad de κ podríamos tomar un cardinal μ tal que todos los niveles de A tuvieran cardinal $\leq \mu$, con lo que el número de ramas de A sería a lo sumo $\mu^{|\lambda|} < \kappa$, y como en el teorema anterior podríamos partir κ en menos de κ conjuntos nulos Z_α, con lo que tendríamos una contradicción.

Pero ya hemos razonado que A no puede tener caminos (todas sus ramas tienen altura $< \kappa$), luego κ no puede ser débilmente compacto. La implicación contraria es obvia. ■

Según el teorema 6.5, tenemos en principio dos clases de cardinales débilmente medibles, los fuertemente medibles y los que podríamos llamar “débilmente medibles en sentido propio”, que son menores o iguales que $2^{\aleph_0}$. Ahora bien, por lo que sabemos hasta ahora podría suceder que los segundos no existieran, es decir, que en realidad todo cardinal débilmente medible fuera medible. El teorema siguiente implica que no es necesariamente así:

Teorema 6.7 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC*. En M, sea κ un cardinal medible, sea $\mathbb{P}$ un c.p.o. que cumpla la c.c.n.^{M} y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces κ es débilmente medible$^{M[G]}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $U \in M$ una medida en κ (en M) y sea $I \in M$ el ideal primo dual de U. Sea

$$J = \{X \in M[G] \mid \bigvee Y \in I\ X \subset Y\} \in M[G].$$

Claramente J es un ideal$^{M[G]}$ en κ (es el ideal generado por I). Además es claro que $\bigwedge \alpha \in \kappa\ \{\alpha\} \in J$. Veamos que J es κ-completo$^{M[G]}$.

Sea $\{X_\delta\}_{\delta<\gamma} = \sigma_G \in M[G]$ una familia de $\gamma < \kappa$ elementos de J. Sea $p_0 \in G$ tal que

$$p_0 \Vdash \sigma : \check{\gamma} \longrightarrow \mathcal{P}\check{\kappa} \land \bigwedge \delta < \check{\gamma} \bigvee Y \in \check{I}\ \sigma(\delta) \subset Y.$$

Para cada $\delta < \gamma$ y cada $p \leq p_0$ existe un $q \leq p$ y un $Y \in I$ de modo que $q \Vdash \sigma(\check{\delta}) \subset \check{Y}$. Sea (en M) W_δ una anticadena maximal de condiciones $q \leq p_0$

para las cuales existe un $Y_{\delta q} \in I$ tal que $q \Vdash \sigma(\delta) \subset \check{Y}_{\delta q}$. Por hipótesis W_δ es numerable^M, luego

$$Y = \bigcup_{\delta<\gamma} \bigcup_{q\in W_\delta} Y_{\delta q} \in I.$$

Tenemos que toda extensión de p_0 ha de ser compatible con algún elemento de W_δ (o de lo contrario la anticadena se podría extender), luego el teorema [PC 4.6] nos da que $G \cap W_\delta \neq \varnothing$. Si $q \in G \cap W_\delta$, entonces $X_\delta \subset Y_{\delta q} \subset Y$, luego $\bigcup\limits_{\delta<\gamma} X_\delta \subset Y$, lo que prueba que la unión está en J.

Falta probar que J cumple la condición de cadena numerable$^{M[G]}$. Supongamos que $\{X_\delta\}_{\delta<\omega_1} = \sigma_G$ es una familia de subconjuntos disjuntos de κ de medida positiva (módulo J). Por simplicidad, aquí ω_1 representa al ordinal numerable $\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$. Sea $p \in \mathbb{P}$ tal que

$$p \Vdash \sigma : \omega_1 \longrightarrow \mathcal{P}\check{\kappa} \wedge \bigwedge \delta\epsilon < \omega_1(\delta < \epsilon \to \sigma(\delta) \cap \sigma(\epsilon) = \varnothing)$$
$$\wedge \bigwedge \delta < \omega_1 \bigwedge Y \in \check{I}\ \sigma(\delta) \not\subset Y.$$

Para cada $\delta < \omega_1$, sea

$$Y_\delta = \{\alpha < \kappa \mid \bigvee q \in \mathbb{P}(q \leq p \wedge q \Vdash \check{\alpha} \in \sigma(\check{\delta}))\} \in M.$$

Claramente $p \Vdash \sigma(\check{\delta}) \subset \check{Y}_\delta$, luego $Y_\delta \notin I$. Como I es κ-completo^M, tenemos que $Y = \bigcap\limits_{\delta<\omega_1} Y_\delta \notin I$, luego en particular $Y \neq \varnothing$.

Sea $\alpha \in Y$. Para cada $\delta < \omega_1$, sea $q_\delta \in \mathbb{P}$, $q_\delta \leq p$ tal que $q_\delta \Vdash \check{\alpha} \in \sigma(\check{\delta})$. Como $\mathbb{P}$ cumple la condición de cadena numerable^M, ha de haber dos condiciones compatibles q_δ y q_ϵ. Si $q \leq q_\delta \wedge q \leq q_\epsilon$, entonces $q \Vdash \check{\alpha} \in \sigma(\check{\delta}) \cap \sigma(\check{\epsilon})$, contradicción. ■

Observemos que la consistencia del axioma de Martin se demuestra mediante una extensión genérica con un c.p.o. que cumple la condición de cadena numerable. Combinando esto con el teorema anterior obtenemos:

Teorema 6.8 *Si es consistente la existencia de un cardinal medible, también es consistente* ZFC+AM $+ 2^{\aleph_0}$ *es débilmente medible (o* ZFC+AM $+ \bigvee\kappa < 2^{\aleph_0}$ *débilmente medible).*

Por otra parte, en relación con 6.6, a los cardinales débilmente medibles les falta poco para ser débilmente compactos:

Teorema 6.9 *Si κ es débilmente medible*[3] *no existen κ-árboles de Aronszajn.*

DEMOSTRACIÓN: Fijemos un ideal κ-saturado I en κ. Sea $(A, \leq_A)$ un κ-árbol, y vamos a ver que no es de Aronszajn, es decir, que tiene un camino. No perdemos generalidad si suponemos que $A = \kappa$. Sea

$$A' = \{\alpha < \kappa \mid \{\beta < \kappa \mid \alpha \leq_A \beta\} \notin I\}.$$

[3]Observemos que el teorema vale igualmente, con la misma prueba, si κ tiene un ideal μ-saturado, con $\mu < \kappa$.

Claramente A' es un subárbol de A y para todo $\gamma < \kappa$ se cumple que

$$\kappa = \bigcup_{\delta<\gamma} \mathrm{Niv}_\delta(A) \cup \bigcup_{\alpha\in\mathrm{Niv}_\gamma(A)} \{\beta < \kappa \mid \alpha \leq_A \beta\},$$

la primera unión es nula y la segunda tiene menos de κ elementos, luego alguno de los conjuntos que aparecen en ella tiene que tener medida positiva. Esto significa que A' es un κ-árbol, y es claro que todos sus niveles son numerables. Por el teorema [TC 9.7] concluimos que A' tiene un camino, luego A también.

■

Como hemos visto que es consistente que existan cardinales débilmente medibles $\leq 2^{\aleph_0}$, el teorema anterior prueba que la hipótesis de que κ sea (fuertemente) inaccesible en [TC 11.10] no puede eliminarse.

Vamos a considerar ahora ideales normales (donde hay que entender que un ideal I en un cardinal κ es *normal* si lo es su filtro dual en el sentido de 1.16, para $M = V$):

Teorema 6.10 *Sea I un ideal κ-saturado en un cardinal κ. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) I es normal.

b) Si $f : \kappa \longrightarrow \kappa$ cumple que el conjunto $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < \alpha\}$ tiene medida positiva, entonces existe un $\gamma < \kappa$ tal que $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = \gamma\}$ tiene medida positiva.

c) Si $f : \kappa \longrightarrow \kappa$ cumple que el conjunto $S = \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < \alpha\}$ tiene medida positiva, entonces existe un $\gamma < \alpha$ tal que $\{\alpha \in S \mid f(\alpha) \geq \gamma\}$ es nulo.

DEMOSTRACIÓN: a) $\rightarrow$ b) es un caso particular de 1.15, pero expresado en términos de ideales en lugar de filtros.

b) $\rightarrow$ c) Sabemos que para cada $X \subset S$ de medida positiva existe un $Y \subset X$ de medida positiva donde f es constante. Sea W una familia maximal de subconjuntos de S de medida positiva disjuntos dos a dos en los que f es constante. Sea $T = \bigcup W$. Como I es κ saturado, $|W| < \kappa$ y, como κ es regular (es débilmente inaccesible), existe un $\gamma < \kappa$ tal que $F[T] \subset \gamma$. Entonces

$$\{\alpha \in S \mid f(\alpha) \geq \gamma\} \subset S \setminus T,$$

y este conjunto es nulo, pues si tuviera medida positiva podríamos extender W.

c) $\rightarrow$ a) Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ una familia de subconjuntos de κ de medida 1 y supongamos que su intersección diagonal X no tiene medida 1. Entonces $\kappa \setminus X$ tiene medida positiva.

Para cada $\alpha \in \kappa \setminus X$ tenemos que $\alpha \notin \bigcap\limits_{\delta<\alpha} X_\delta$, luego existe un $f(\alpha) < \alpha$ tal que $\alpha \notin X_{f(\alpha)}$. Si $\alpha \in X$ definimos $f(\alpha) = \alpha$. Así tenemos una aplicación

$f : \kappa \longrightarrow \kappa$ tal que $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < \alpha\} = \kappa \setminus X$ tiene medida positiva. Por hipótesis existe un $\gamma < \kappa$ tal que $Y = \{\alpha < \kappa \setminus X \mid f(\alpha) \geq \gamma\}$ es nulo. Pero entonces

$$\kappa \setminus (X \cup Y) \subset \bigcup_{\delta<\gamma} (\kappa \setminus X_\delta),$$

luego $\kappa \setminus (X \cup Y)$ es nulo y, como Y también lo es, lo mismo vale para $\kappa \setminus X$, contradicción. ■

Por otra parte:

Teorema 6.11 *Si un cardinal κ admite un ideal μ-saturado con $\mu \leq \kappa$, entonces admite uno normal.*

DEMOSTRACIÓN: Fijemos un ideal κ-saturado I en κ. Diremos que una función $g : X \longrightarrow \kappa$, definida sobre un conjunto $X \subset \kappa$ de medida positiva es *fuertemente no acotada* si no existe ningún $\gamma < \kappa$ ni un $Y \subset X$ de medida positiva tal que $\bigwedge \alpha \in Y\ g(\alpha) < \gamma$, es decir, si g no está acotada en ningún conjunto de medida positiva. Sea $\mathcal{F}$ la familia de todas las funciones fuertemente no acotadas en κ. Como todo conjunto de medida positiva no está acotado en κ, la identidad en κ pertenece a $\mathcal{F}$ que es, pues, no vacío.

Si g, $h \in \mathcal{F}$, diremos que $g < h$ (resp. $g \leq h$) si $\mathcal{D}(g) \subset \mathcal{D}(h)$ y para todo α en el dominio de g se cumple $g(\alpha) < h(\alpha)$ (resp. $g(\alpha) \leq h(\alpha)$).

Notemos que $g \leq h$ no significa $g < h \lor g = h$.

Diremos que $g \in \mathcal{F}$ es *minimal* si no existe $h \in \mathcal{F}$ tal que $h < g$. Vamos a probar que $\mathcal{F}$ tiene un elemento minimal. En caso contrario, para cada $g \in \mathcal{F}$ existe $h \in \mathcal{F}$ tal que $h < g$. Tomemos $g \in \mathcal{F}$ arbitraria. Sea W una familia maximal de funciones $h < g$ con dominios disjuntos dos a dos. Como I cumple la condición de cadena κ, tenemos que $|W| < \kappa$, de donde se sigue que la unión f de las funciones de W cumple $f \in \mathcal{F}$. (Dado un subconjunto X de su dominio de medida positiva, la intersección de X con el dominio de alguna de las funciones $h \in W$ ha de tener medida positiva (o si no sería unión de menos de κ conjuntos nulos), luego h no está acotada en (una parte de) X y f no está acotada en X). Además es claro que $f < g$ y $X = \mathcal{D}g \setminus \mathcal{D}f$ ha de ser nulo, pues en caso contrario $g|_X \in \mathcal{F}$ y, por la hipótesis de reducción al absurdo, existiría $h \in \mathcal{F}$ tal que $h < g|_X$, con lo que $W \cup \{h\}$ contradiría la maximalidad de W.

Como g era arbitraria, podemos construir una sucesión de funciones de $\mathcal{F}$ tal que $g_0 > g_1 > g_2 > \cdots$ y de modo que $\mathcal{D}g_n \setminus \mathcal{D}g_{n+1} \in I$ para todo n. Entonces la intersección $\bigcap\limits_{n<\omega} \mathcal{D}g_n$ tiene medida positiva (en caso contrario todas las g_n tendrían dominio nulo) y esto es absurdo porque un α en esta intersección cumple $g_0(\alpha) > g_1(\alpha) > g_2(\alpha) > \cdots$

Este argumento prueba en realidad que para toda $g \in \mathcal{F}$ existe $h \in \mathcal{F}$ minimal tal que $h \leq g$. Por consiguiente, si W es una familia maximal de funciones minimales de $\mathcal{F}$ con dominios disjuntos dos a dos y $f : X \longrightarrow \kappa$ es la unión de todas ellas, entonces $f \in \mathcal{F}$ y X tiene medida 1.

De hecho, si sustituimos una función de W por la extensión resultante de asignarle el valor 0 en (el conjunto nulo) $\kappa \setminus X$, la familia W sigue cumpliendo lo mismo, pero ahora $f : \kappa \longrightarrow \kappa$.

Veamos que si $g : Y \longrightarrow \kappa$ es una función definida en un conjunto $Y \subset \kappa$ de medida positiva tal que $\bigwedge \alpha \in Y\ g(\alpha) < f(\alpha)$, entonces g es constante en un conjunto de medida positiva.

En efecto, ha de existir $h \in W$ tal que la intersección de Y con el dominio de h tenga medida positiva (porque $|W| < \kappa$). Si Z es esta intersección, no puede ser que $g|_Z \in \mathcal{F}$, pues entonces sería $g|_Z < h$, en contra de la minimalidad de h, luego $g|_Z$ está acotada por un cierto $\gamma < \kappa$ en un subconjunto de Z de medida positiva. Equivalentemente, $g^{-1}[\gamma]$ tiene medida positiva, pero por la κ-completitud de I, alguno de los conjuntos $\{g^{-1}[\{\alpha\}]\}_{\alpha<\gamma}$ ha de tener medida positiva.

Sea $J = f[I]$ en el sentido del teorema 5.2 (que vale igualmente para ideales). Tenemos que J es un ideal κ-completo en κ. Para cada $\gamma < \kappa$ tenemos que f está acotada en $Y = f^{-1}[\{\gamma\}]$, luego Y ha de ser nulo (si tuviera medida positiva, $X \cap Y$ también la tendría y f estaría acotada en él). Por consiguiente $\{\gamma\} \in J$.

Una familia de subconjuntos de κ de medida positiva módulo J daría lugar a una familia análoga módulo I sin más que aplicar f^{-1}, luego J cumple la misma condición de saturación que I.

Finalmente, para probar que J es normal tomamos $g : \kappa \longrightarrow \kappa$ tal que el conjunto $Z = \{\alpha < \kappa \mid g(\alpha) < \alpha\} \notin J$. Entonces $Y = f^{-1}[Z] \notin I$, y para todo $\alpha \in Y$ se cumple que $g(f(\alpha)) < f(\alpha)$. Por la construcción de f concluimos que $f \circ g$ es constante en un conjunto de medida positiva módulo I, luego g es constante en un conjunto de medida positiva módulo J. ■

Como primera aplicación probamos lo siguiente (véase también 6.25):

Teorema 6.12 *Si un cardinal κ admite un ideal κ-saturado, entonces es débilmente de Mahlo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea I un ideal normal κ-saturado en κ. Como κ es débilmente inaccesible, es claro que el conjunto C de los cardinales límite menores que κ es c.n.a., luego tiene medida 1 por 1.19. Basta probar que el conjunto X de los ordinales límite $\lambda < \kappa$ tales que $\operatorname{cf} \lambda < \lambda$ es nulo, pues entonces $C \setminus X$ tendrá medida 1, pero éste es el conjunto de los cardinales débilmente inaccesibles menores que κ, que, en particular, resulta ser estacionario.

Supongamos, por el contrario, que X tiene medida positiva. Entonces existe un conjunto $Y \subset X$ de medida positiva y un $\lambda_0 < \kappa$ tales que $\bigwedge \lambda \in Y\ \operatorname{cf} \lambda = \lambda_0$.

Para cada $\lambda \in Y$, sea $\{\alpha_{\lambda\delta}\}_{\delta<\lambda_0}$ una sucesión cofinal creciente en λ. Para cada $\delta < \lambda_0$, podemos aplicar el teorema 6.10 a la aplicación $\lambda \mapsto \alpha_{\lambda\delta} < \lambda$, lo que nos da un $\gamma_\delta < \kappa$ tal que $\alpha_{\lambda\delta} < \gamma_\delta$ para casi todo $\lambda \in Y$. Sea $\gamma = \bigcup\limits_{\delta<\lambda_0} \gamma_\delta < \kappa$. Entonces, por la κ-completitud de I tenemos que $\alpha_{\lambda\delta} < \gamma$ para casi todo $\lambda \in Y$

y todo $\delta < \lambda_0$. Pero entonces $\lambda \leq \gamma$ para casi todo $\lambda \in Y$, lo cual es absurdo, pues es tanto como decir que $Y \setminus E \subset \gamma$, para cierto conjunto nulo E, pero $Y \setminus E$ tiene medida positiva, luego no está acotado. ■

Ya hemos visto que los cardinales débilmente medibles se parecen a los medibles en cuanto a que son débilmente inaccesibles (casi inaccesibles) y no existen κ-árboles de Aronszajn (son casi débilmente compactos). Ahora vamos a ver que son casi cardinales de Ramsey:

Teorema 6.13 *Sea I un ideal normal μ-saturado en un cardinal κ, donde $\mu < \kappa$ es regular, sea $\gamma < \kappa$ y sea $f : [\kappa]^{<\omega} \longrightarrow \gamma$ una partición. Entonces existe $H \subset \kappa$ de medida 1 tal que la imagen de $[H]^{<\omega}$ por f tiene cardinal $< \mu$.*

Demostración: Basta probar que para cada n existe un conjunto $H_n \subset \kappa$ de medida 1 tal que la imagen de $[H_n]^n$ por f tiene cardinal $< \mu$. Entonces la intersección de todos los H_n cumplirá el teorema. Equivalentemente, podemos suponer una partición $f : [\kappa]^n \longrightarrow \gamma$ y encontrar $H \subset \kappa$ de medida 1 tal que f tome una cantidad $< \mu$ de valores en $[H]^n$. Razonamos por inducción sobre n.

Para $n = 1$ tenemos $f : \kappa \longrightarrow \gamma$. Sea W una familia maximal de subconjuntos de κ de medida positiva disjuntos dos a dos donde f sea constante, sea H su unión. Como $|W| < \mu$, también $|f[H]| < \mu$, y H tiene medida 1 por la maximalidad de W (si $\kappa \setminus H$ tuviera medida positiva, se podría descomponer en γ conjuntos donde f es constante, luego alguno tendría medida positiva por la κ-completitud de I).

Supongamos que el teorema vale para n y sea $f : [\kappa]^{n+1} \longrightarrow \gamma$. Para cada $\alpha < \kappa$ sea $f_\alpha : [\kappa \setminus \{\alpha\}]^n \longrightarrow \gamma$ dada por $f_\alpha(x) = f(\{\alpha\} \cup x)$. Por hipótesis de inducción existe un conjunto $X_\alpha \subset \kappa \setminus \{\alpha\}$ de medida 1 tal que la imagen de $[X_\alpha]^n$ por f_α tiene cardinal $< \mu$. Sea $A_\alpha \subset \gamma$ esta imagen y sea $X = \underset{\alpha<\kappa}{\triangle} X_\alpha$, que tiene medida 1 porque la medida es normal.

Si $\alpha < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ están en X, entonces $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \in [X_\alpha]^n$, luego

$$f(\{\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) = f_\alpha(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) \in A_\alpha.$$

Sea $A_\alpha = \{a_{\alpha\delta} \mid \delta < \nu\}$, con $\nu < \mu$. Aplicamos el caso $n = 1$ a la función $g_\delta : X \longrightarrow \gamma$ dada por $g_\delta(\alpha) = a_{\alpha\delta}$. Existe un conjunto $H_\delta \subset X$ de medida 1 tal que $|g_m[H_\delta]| < \mu$. Sea $H = \bigcap\limits_{\delta<\mu} H_m \subset X$, que tiene medida 1 y

$$\bigcup_{\alpha \in H} A_\alpha = \bigcup_{\delta<\nu} g_\delta[H]$$

tiene cardinal $< \mu$. La imagen por f de $[H]^{n+1}$ está en esta unión, luego tiene cardinal $< \mu$. ■

Esta propiedad es suficiente para demostrar el apartado a) del teorema 4.19:

Teorema 6.14 *Sea I un ideal normal μ-saturado en un cardinal κ, donde $\mu < \kappa$ es regular, sea $m < \mu$ un cardinal infinito, sea $\mathcal{L}$ un lenguaje formal tal que $|\mathcal{L}| \leq m$ y M un modelo de $\mathcal{L}$ con $\kappa \subset M$. Sean P, $X \subset M$ tales que $|P| < \kappa$ y $|X| \leq m$. Entonces existe un submodelo elemental $N \prec M$ tal que*

$$|N| = \kappa, \quad X \subset N, \quad |P \cap N| < \mu \quad \text{y} \quad N \cap \kappa \text{ tiene medida } 1.$$

DEMOSTRACIÓN: Añadamos a $\mathcal{L}$ un relator monádico cuya interpretación en M sea la pertenencia a P, así como un conjunto de constantes que nombren a cada elemento de X. Se cumple que $|\mathcal{L}| \leq m$. Sea ahora $\overline{\mathcal{L}}$ la extensión de $\mathcal{L}$ que resulta de añadirle funtores de Skolem según la definición [TC 11.27]. Se sigue cumpliendo $|\overline{\mathcal{L}}| \leq m$. Podemos considerar a M como modelo de $\overline{\mathcal{L}}$ sin más que interpretar los funtores de Skolem con unas funciones de Skolem prefijadas.

Para cada término de Skolem $t(x_1, \ldots, x_n)$ de $\overline{\mathcal{L}}$, sea $f_t : [\kappa]^n \longrightarrow P \cup \{0\}$ la función dada por

$$f_t(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{cases} M(t)[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] & \text{si } M(t)[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \in P, \\ 0 & \text{si } M(t)[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \notin P. \end{cases}$$

Por el teorema anterior existe $H_t \subset \kappa$ de medida 1 tal que $|f_t[[H_t]^n]| < \mu$. Como hay a lo sumo $m < \kappa$ términos de Skolem, $H = \bigcap\limits_t H_t \subset \kappa$ tiene también medida 1.

Sea $N = N(H) \prec M$. Es claro que $|N| = \kappa$, así como que $X \subset N$ y, como $H \subset N \cap \kappa$, tenemos también que $N \cap \kappa$ tiene medida 1. Falta ver que $|P \cap N| \leq m$. Ahora bien, si $x \in P \cap M$ entonces $x = M(t)[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ para cierto término de Skolem t y ciertos $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n \in H$, luego $x \in f_t[[H]^n]$, que tiene cardinal $< \mu$. Vemos así que $P \cap N$ está contenido en una unión de $m < \mu$ conjuntos de cardinal $< \mu$, luego su cardinal es $< \mu$. ■

Nota El enunciado del teorema anterior no es en realidad una generalización de 4.19, sino que ésta se obtiene si suponemos que $\mu \leq m < \kappa$ y concluimos (con la misma prueba) que $|P \cap N| \leq m$. De hecho, podemos incluso suponer que $\mu = \mu_0^+$ y que $\mu_0 \leq m < \kappa$. Entonces 4.19 se obtiene tomando $\mu_0 = \aleph_0$. ■

Supongamos ahora que I es un ideal normal μ-saturado en un cardinal κ, con $\mu < \kappa$ regular y sea $J = I \cap L[I]$. Entonces $L[I] = L[J]$, y es inmediato comprobar que en $L[I]$ se cumple que J es un ideal normal μ-saturado en κ, y μ sigue siendo un cardinal regular.[4]

Ahora tenemos todos los elementos necesarios para demostrar la generalización siguiente del teorema de Silver 5.13:

Teorema 6.15 *Si I es un ideal normal μ-saturado en un cardinal κ, donde $\mu < \kappa$ es regular, entonces en $L[I]$ se cumple $2^{<\mu} = \mu$.*

DEMOSTRACIÓN: Por la observación precedente al teorema, podemos suponer que $V = L[I]$. Llamemos D al filtro dual de I, es decir, el formado por los conjuntos de medida 1. Es claro que también $V = L[D]$. Supongamos que existe $m < \mu$ tal que $2^m > \mu$.

[4] Sin embargo, notemos que aunque partiéramos de que κ es débilmente medible y, por lo tanto, $\mu = \aleph_1$, no podríamos asegurar que $\mu = \aleph_1^{L[I]}$, por lo que no podríamos concluir que κ es débilmente medible $L[I]$ e igualmente tendríamos que trabajar en el contexto general en el que estamos trabajando (con μ arbitrario).

El conjunto $\mathcal{P}m$ esta bien ordenado por $\trianglelefteq_D$. Sea $f : \gamma \longrightarrow \mathcal{P}m$ la semejanza. Obviamente $\mu < \gamma$. Sea $x = f(\mu)$. Sea α el mínimo ordinal tal que $x \in L_\alpha[D]$.

Si $\beta < \mu$, entonces $f(\beta) \triangleleft_D f(\mu)$, luego $f(\beta) \in L_\alpha[D]$ (recordemos que los conjuntos $L_\alpha[D]$ son segmentos iniciales para el buen orden constructible). Así pues, $f[\mu] \subset L_\alpha[D]$.

Sea ν un cardinal regular tal que κ, $\alpha < \nu$, $I \in L_\nu[D]$. Aplicamos 6.14 con $M = L_\nu[D]$, $P = f[\mu] \subset M$ y $X = m \cup \{D, x, \alpha\}$ (y el lenguaje $\mathcal{L}_0$ de la teoría de conjuntos). Ciertamente $|P| = \mu < \kappa$ y $|X| = m$. Así pues, existe un submodelo elemental $N \prec M$ tal que $|N| = \kappa$, $\kappa \cap N$ tiene medida 1, $m \cup \{D, x, \alpha\} \subset N$ y $|P \cap N| < \mu$.

Sea $\pi : N \longrightarrow N'$ el colapso transitivo de N. Claramente $N' = L_\lambda[\pi[D]]$, para cierto ordinal límite λ. Veamos que $\pi[D] = I \cap N'$.

Como $\bigwedge \delta \in N\, \pi(\delta) \leq \delta$, podemos definir $g : \kappa \longrightarrow \kappa$ mediante

$$g(\delta) = \begin{cases} \pi(\delta) & \text{si } \delta \in \kappa \cap N, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De este modo, $\bigwedge \delta < \kappa\; g(\delta) \leq \delta$. Si el conjunto $\{\delta < \kappa \mid g(\delta) < \delta\}$ tuviera medida positiva, por el teorema 6.10 existiría un cierto ordinal $\gamma < \kappa$ tal que $\{\delta < \kappa \mid g(\delta) = \gamma\}$ también tendría medida positiva y, como $\kappa \cap N$ tiene medida 1, la intersección, es decir, el conjunto $\{\delta \in \kappa \cap N \mid \pi(\delta) = \gamma\}$ tiene medida positiva, pero esto es imposible, porque π es inyectiva.

Así pues, $\{\delta < \kappa \mid g(\delta) = \delta\} \in D$ y, cortando de nuevo con $\kappa \cap N$, concluimos que $Z = \{\delta \in \kappa \cap N \mid \pi(\delta) = \delta\} \in D$.

Si $y \in D \cap N$, entonces $\pi(y) \supset \pi(y \cap Z) = y \cap Z$, luego $\pi(y) \in D \cap N'$. Si $y \in D \cap N'$ entonces $y = \pi(w)$, con $w \in N$, pero $y \cap Z \subset w$ y además $y \cap Z \in D$, luego $w \in D \cap N$ y, por lo tanto, $y \in \pi(D)$. De aquí se sigue que, en efecto, $\pi(D) = \pi[D \cap N] = D \cap N'$.

De este modo, llegamos a que $N' = L_\lambda[D \cap N'] = L_\lambda[D]$ por el teorema 5.10. Como $m \subset N$, es obvio que $\bigwedge \delta < m\; \pi(\delta) = \delta$. De aquí que $\mathcal{P}m \cap N = \mathcal{P}m \cap N'$ y, en particular, $x \in N' = L_\lambda[D]$. Por minimalidad de α ha de ser $\alpha \leq \lambda$, luego $P = f[\mu] \subset L_\alpha[D] \subset N'$, lo cual nos lleva a una contradicción, pues $P = P \cap N' = P \cap N$ debería cumplir $|P \cap N| < \mu$. ■

Nota No lo vamos a necesitar, pero una ligera adaptación de la prueba anterior muestra que en $L[I]$ se cumple también $2^m = m^+$ para $\mu \leq m$ (sólo hay que probarlo para $\mu \leq m < \kappa$, pues para $m \geq \kappa$ basta aplicar el teorema 5.12). ■

De aquí deducimos un resultado fundamental, según el cual la consistencia de que exista un cardinal débilmente medible es equivalente a la consistencia de que exista un cardinal medible:

Teorema 6.16 (Solovay) *Si I es un ideal normal μ-saturado en un cardinal κ, donde $\mu < \kappa$ es regular (en particular, si I es una medida débil en un cardinal débilmente medible), entonces el filtro dual de $J = I \cap L[I]$ es una medida (fuerte) en κ en $L[I]$.*

Demostración: Según ya hemos observado antes del teorema anterior, J es en $L[I]$ un ideal normal μ-saturado en κ, y μ sigue siendo un cardinal regular en $L[I] = L[J]$. Por lo tanto, podemos suponer que $V = L[I]$. Por el teorema anterior se cumple que $2^{<\mu} = \mu < \kappa$, luego el teorema 6.5 nos da que κ es un cardinal medible.

En principio, según la prueba de 6.5, esto nos dice que I tiene un átomo A, es decir, un conjunto de medida positiva que no puede partirse en dos conjuntos disjuntos de medida positiva. Más aún, observemos que todo conjunto $X \subset \kappa$ de medida positiva debe contener un átomo, ya que en caso contrario el ideal $I_X = \{Y \subset X \mid Y \in I\}$ sería un ideal μ-completo sin átomos, y a través de una biyección entre X y κ, podríamos construir otro en κ, lo cual es imposible por (la prueba de) 6.5.

Si A es un átomo,

$$U_A = \{X \subset \kappa \mid X \cap A \notin I\}$$

es una medida normal en κ. Por lo tanto, según el teorema 5.9, tenemos que $D = U_A \cap L[U_A] \in L[U_A]$ es una medida normal en $L[U_A] = L[D]$ (y no depende de A por 5.19 y 5.21).

Llamemos U al filtro dual de I, de modo que $L[U] = L[I] = V$. Vamos a probar que $U \cap L[D] = D$.

Si $X \subset \kappa$ cumple $X \in U \cap L[D]$, entonces, $\kappa \setminus X \in I$, luego, fijado un átomo A, se cumple que $A \setminus X \in I$, luego $X \in U_A \cap L[D] \subset U_A \cap L[U_A] = D$.

Recíprocamente, si $X \in D \subset L[D]$, pero $X \notin U$, entonces $\kappa \setminus X$ tiene medida positiva, luego contiene un átomo A, luego $\kappa \setminus X \in U_A$, luego concluimos que $X \notin U_A \cap L[U_A] = D$, contradicción.

Así pues, $U \cap L[D] = D$, de donde $V = L[U] = L[D]$ por 5.10, luego finalmente llegamos a que $D = U \cap V = U$. En definitiva, la medida normal en κ es el propio U, el ideal dual de I. ■

En particular, si I es una medida débil normal en κ, entonces κ es medible en $L[I]$, luego existe $0^\sharp$ en $L[I]$, luego existe $0^\sharp$.

Por otra parte, el teorema anterior implica que si queremos probar que es consistente que exista un cardinal débilmente medible tendremos que suponer al menos que es consistente la existencia de un cardinal medible.

Terminaremos esta sección con otra consecuencia de los resultados que hemos probado. Necesitamos un último resultado técnico.

Recordemos que dos funciones f y g en un cardinal regular μ son *casi disjuntas* si existe $\gamma < \mu$ tal que $\bigwedge \alpha(\gamma \leq \alpha < \mu \rightarrow f(\alpha) \neq g(\alpha))$. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones en μ es *casi disjunta* si sus elementos son funciones casi disjuntas dos a dos.

Teorema 6.17 *Sea κ un cardinal débilmente medible y $\mu < \kappa$ un cardinal regular. Entonces toda familia $\mathcal{F} \subset {}^\mu\kappa$ de funciones casi disjuntas cumple que $|\mathcal{F}| \leq \kappa$.*

Demostración: Si $|\mathcal{F}| > \kappa$, como cada $f : \mu \longrightarrow \kappa$ está acotada por un $\beta < \kappa$, existe $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ tal que $|\mathcal{G}| = \kappa$ y $\mathcal{G} \subset {}^{\mu}\beta$, para cierto $\beta < \kappa$.

Sea $F : [\mathcal{G}]^2 \longrightarrow \mu$ la partición dada por $F(\{f, g\}) =$ un $\gamma < \mu$ tal que $\bigwedge\alpha(\gamma \leq \alpha < \mu \rightarrow f(\alpha) \neq g(\alpha))$.

Por el teorema 6.13 existe $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ de cardinal κ tal que $A = F[[\mathcal{H}]^2] \subset \mu$ es numerable. Sea $A \subset \alpha < \mu$. Entonces $f(\alpha) \neq g(\alpha)$, para todo par de funciones distintas f, $g \in \mathcal{H}$. Esto nos da una aplicación inyectiva $\mathcal{H} \longrightarrow \beta$, lo cual es imposible pues $|\mathcal{H}| = \kappa$ y $\beta < \kappa$. ■

Teorema 6.18 (Prikry) *Si $2^{\aleph_0}$ es débilmente medible, entonces todo cardinal infinito $\mu < 2^{\aleph_0}$ cumple que $2^\mu = 2^{\aleph_0}$.*

Demostración: Razonamos por inducción sobre μ. Supongamos que para todo cardinal infinito $\nu < \mu$ se cumple $2^\nu = 2^{\aleph_0}$. Si μ es singular, entonces

$$2^\mu = (2^{<\mu})^{\operatorname{cf}\mu} = (2^{\aleph_0})^{\operatorname{cf}\mu} = 2^{\operatorname{cf}\mu} = 2^{\aleph_0}.$$

Supongamos que μ es regular. Para cada $X \subset \mu$, sea $f_X = \{X \cap \alpha\}_{\alpha<\mu}$. Es claro que $\mathcal{F} = \{f_X\}_{X\in\mathcal{P}\mu}$ es una familia casi disjunta de 2^μ funciones definidas en μ.

Para cada $\alpha < \mu$, el conjunto $A_\alpha = \{f_X(\alpha) \mid X \subset \mu\}$ tiene cardinal menor o igual que $|\mathcal{P}\alpha| = 2^{|\alpha|} \leq 2^{\aleph_0}$ (por hipótesis de inducción), luego el cardinal de $A = \bigcup\limits_{\alpha<\mu} A_\alpha$ es a lo sumo $\mu \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

A través de una inyección de A en $2^{\aleph_0}$ la familia $\mathcal{F}$ da lugar a una familia casi disjunta de 2^μ funciones $\mu \longrightarrow 2^{\aleph_0}$, luego por el teorema anterior $2^\mu \leq 2^{\aleph_0}$. ■

6.2 Ultrapotencias genéricas

Presentamos aquí una técnica que nos permitirá obtener más propiedades de los cardinales que admiten ideales saturados. La idea básica es que un ideal determina un ultrafiltro en una extensión genérica:

Teorema 6.19 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC *y, en M, sea κ un cardinal e I un ideal en κ que contenga a los conjuntos finitos. Llamemos $\mathbb{P} = (\mathcal{P}\kappa \setminus I)^M$ con el orden parcial dado por la inclusión y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces:*

a) G es un ultrafiltro en $\mathcal{P}^M\kappa$ que extiende al filtro dual de I.

b) Si I es κ-completo^M, entonces G es κ-completo sobre M.

c) Si I es normal^M, entonces G es normal sobre M.

Demostración: a) Si $X \in \mathbb{P}$, el conjunto

$$D = \{Y \in \mathbb{P} \mid Y \subset X \lor Y \subset X'\} \in M$$

es denso en $\mathbb{P}$, donde $X' = \kappa \setminus X$.

En efecto, para todo $Y \in \mathbb{P}$, debe cumplirse que $X \cap Y \in \mathbb{P}$ o bien $X \cap Y' \in \mathbb{P}$, pues lo contrario nos lleva a que $X = (X \cap Y) \cup (X \cap Y') \in I$. Por lo tanto, $D \cap G \neq \varnothing$ y esto implica que $X \in G$ o bien $X' \in G$, luego G es un ultrafiltro.

Si $X \in \mathbb{P}$ cumple $X' \in I$, entonces no puede ser $X' \in G$, (pues $X' \notin \mathbb{P}$) luego tiene que ser $X \in G$. Por lo tanto, G extiende al filtro dual de I.

b) Si X es la intersección, el conjunto

$$D = \{Y \in \mathbb{P} \mid Y \subset X \lor \bigvee \alpha < \beta \; Y \subset X'_\alpha\} \in M$$

es denso en $\mathbb{P}$, pues si $Y \in \mathbb{P}$, entonces

$$Y = (Y \cap X) \cup \bigcup_{\alpha<\beta} (Y \cap X'_\alpha) \notin I.$$

La κ-completitud^M de I implica que alguno de los conjuntos de la unión tiene que estar en $\mathbb{P}$, luego está en D. Por lo tanto, existe un $Y \in D \cap G$, pero no puede ocurrir que $Y \subset X'_\alpha$, ya que entonces $X'_\alpha \in G$, luego tiene que ser $Y \subset X$, luego $X \in G$.

c) Consideremos $f \in M$ tal que $f : \kappa \longrightarrow \kappa$ y

$$X = \{\alpha \in \kappa \mid f(\alpha) < \alpha\} \in G,$$

y veamos que el conjunto $D = \{Y \in \mathbb{P} \mid Y \subset X \land f \text{ es constante en } Y\}$ es denso bajo X. En efecto, si $Y \in \mathbb{P}$ cumple $Y \subset X$, sea $g : \kappa \longrightarrow \kappa$ tal que $g|_Y = f|_Y$ pero $g(\alpha) = \alpha$ para todo $\alpha \in Y'$. Entonces, por 6.10, tenemos que g es constante en un conjunto de medida positiva, que tiene que estar contenido en Y. Por lo tanto, $D \cap G \neq \varnothing$ y tenemos la conclusión. ■

Observemos que, en las condiciones del teorema anterior, en $M[G]$ está definida,[5] según 1.6, la ultrapotencia $\mathrm{Ult}^*_G(M)$, por lo que podemos definir:

Definición 6.20 Sea κ un cardinal no numerable e I un ideal κ-completo en κ que contenga a los puntos y sea $\mathbb{P} = \mathcal{P}\kappa \setminus I$. Diremos que I está *bien fundado* si se cumple que $\mathbb{1} \Vdash \mathrm{Ult}^*_\Gamma(\check{V})$ está bien fundada.

Así, si M es un modelo transitivo numerable M de ZFC y κ es un cardinal no numerable en M para el que existe un ideal bien fundado I y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M (donde $\mathbb{P} = \mathcal{P}^M\kappa \setminus I$), podemos considerar el colapso transitivo $\mathrm{Ult}_G(M)$ de la ultrapotencia genérica, al igual que la inmersión elemental canónica $j_G : M \longrightarrow \mathrm{Ult}_G(M)$.

[5] Al menos, extendiendo el lenguaje de la teoría de conjuntos con un relator que represente la pertenencia a M, pero esto no importa a efectos de la definición siguiente porque está definida la relación $p \Vdash x \in \check{V}$. (Véanse las observaciones tras [PC 4.52].)

Como G es κ-completo sobre M, el teorema 1.13 nos da que κ es el punto crítico de j_G. Si además I es normal^M, sabemos que G es normal sobre M y el teorema 1.17 nos da que $\kappa = [d]$, donde $d : \kappa \longrightarrow \kappa$ es la identidad.

Vamos a dar una caracterización de los ideales bien fundados, para lo cual necesitamos algunos conceptos previos.

Dado un ideal κ-completo I en κ que contenga a los puntos y $S \subset \kappa$ de medida positiva, una *partición de S módulo I* es un conjunto maximal W de subconjuntos de S de medida positiva tales que la intersección de dos cualesquiera de ellos (distintos entre sí) esté en I. Diremos que una partición W_1 módulo I *refina* a otra W_2 (y lo representaremos $W_1 \leq W_2$) si todo elemento de W_1 está contenido en un elemento de W_2.

Un *funcional* F en S es un conjunto de funciones de manera que el conjunto $W_F = \{\mathcal{D}f \mid f \in F\}$ es una partición de S módulo I y además, si $f,\ g \in F$, $f \neq g$, entonces $\mathcal{D}f \neq \mathcal{D}g$.

Si F y F' son dos funcionales en S, diremos que $F' < F$ si se cumple:

a) Toda $f \in F \cup F'$ toma imágenes en Ω.

b) $W_{F'} \leq W_F$.

c) Si $f' \in F'$, $f \in F$ cumplen $\mathcal{D}f' \subset \mathcal{D}f$, entonces $\bigwedge \alpha \in \mathcal{D}f'\ f'(\alpha) < f(\alpha)$.

Veamos cuál es el interés de estas definiciones. En primer lugar observemos que, en las condiciones del teorema 6.19, si $W \in M$ es una partición de S módulo I, el conjunto

$$D = \{X \in \mathbb{P} \mid \bigvee Y \in W\ X \subset Y\}$$

es denso bajo S, pues si $X \in \mathbb{P}$ la maximalidad de W implica que existe un $Y \in W$ tal que $X \cap Y \in \mathbb{P}$, luego $X \cap Y \in D$, $X \cap Y \leq X$.

En consecuencia, si $S \in G$ existe un $X \in W \cap G$, y es único, pues W es una anticadena en $\mathbb{P}$.

Ahora consideremos un funcional $F \in M$ en S y definamos

$$\phi_F = \{(\text{p.o.}(\check{\alpha}, \check{x}), X) \mid \bigvee f \in F(\mathcal{D}f = X \land \alpha \in X \land x = f(\alpha))\} \in M^{\mathbb{P}}.$$

Es inmediato comprobar que

$$S \Vdash \bigvee f \in \check{F}\ (\mathcal{D}f \in \Gamma \land \phi_F = f).$$

Más concretamente, si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $S \in G$, entonces G contiene a un único elemento de W_F, que será de la forma $\mathcal{D}f$, para cierto $f \in F$, y esta función cumple lo pedido.

Notemos ahora que cualquier función $f : X \longrightarrow M$ con $X \in G$ determina una única clase $[\bar{f}]^* \in \mathrm{Ult}^*_G(M)$, donde $\bar{f}$ es cualquier extensión de f a κ, porque si tomamos dos extensiones cualesquiera, las clases correspondientes serán iguales.

Podemos representar esta clase simplemente por $[f]^*$. Así, vemos que cada funcional $F \in M$ determina un elemento $[f]^* \in \mathrm{Ult}^*_G(M)$.

Recíprocamente, vamos a ver que todo elemento de $\mathrm{Ult}^*_G(M)$ es de esta forma. Más concretamente, supongamos que $\phi \in M^{\mathbb{P}}$ y $S \in \mathbb{P}$ cumplen

$$S \Vdash \phi \in \check{M} \land \phi : \check{\kappa} \longrightarrow \check{M}.$$

Entonces, en M podemos tomar una familia maximal F de funciones definidas en subconjuntos de S de medida positiva tales que si $f \in F$ y $X = \mathcal{D}f$ entonces

$$X \Vdash \phi|_{\check{X}} = \check{f},$$

y si f, $g \in F$ son distintas entre sí, entonces $\mathcal{D}f \cap \mathcal{D}g \in I$.

Para que podamos afirmar que F es un funcional en S falta probar que el conjunto $W_F = \{\mathcal{D}f \mid f \in F\}$ es una partición de S módulo I, y para ello sólo falta probar que es maximal.

Ahora bien, si existe un conjunto $Y \subset S$, $Y \notin W_F$ tal que $Y \cap X \in I$ para todo $X \in W_F$, podemos tomar un filtro genérico tal que $Y \in G$, y entonces $\phi_G \in M$ es una función $\phi_G : \kappa \longrightarrow M$, luego $g = \phi_G|_Y \in M$ y existe un $X \in G$ tal que $X \subset Y$ y $X \Vdash \phi|_{\check{Y}} = \check{f}$, luego, si $f = g|_X$, también $X \Vdash \phi|_{\check{X}} = \check{f}$, luego $F \cup \{f\}$ contradiría la maximalidad de F.

Por lo tanto F es un funcional en S y se cumple $S \Vdash [\phi]^* = [\phi_F]^*$.

En efecto, si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $S \in G$, existe un $X \in W_F \cap G$, y si $X = \mathcal{D}f$, con $f \in F$, entonces $\phi_G|_X = f = (\phi_F)_G$, luego $[\phi_G]^* = [(\phi_F)_G]^*$.

Supongamos ahora que $\mathrm{Ult}^*_G(M)$ no está bien fundada. Esto significa que existe en $M[G]$ una sucesión de elementos de la ultrapotencia decreciente respecto de la relación de pertenencia R. Considerando el $\mathrm{rango}^{\mathrm{Ult}^*_G(M)}$ de cada elemento de la sucesión, no perdemos generalidad si suponemos que se trata de una sucesión decreciente de ordinales. Si $[f] \in \mathrm{Ult}^*_G(M)$ cumple $\mathrm{Ult}^*_G(M) \vDash [f] \in \Omega$, entonces

$$\{\alpha \in \kappa \mid f(\alpha) \in \Omega\} \in G,$$

y modificando f fuera de este conjunto obtenemos otra función que define la misma clase y que cumple $f : \kappa \longrightarrow \Omega$. En definitiva, si la ultrapotencia no está bien fundada existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\omega} \in M[G]$ tal que

$$\bigwedge n \in \omega (f_n \in M \land f_n : \kappa \longrightarrow \Omega \land [f_{n+1}]^* \, R \, [f_n]^*).$$

Pongamos que $\{f_n\}_{n\in\omega} = \phi_G$, con $\phi \in M^{\mathbb{P}}$, y sea $S \in G$ tal que

$$S \Vdash \phi : \omega \longrightarrow \check{M} \land \bigwedge n \in \omega \; (\phi_n \in \check{M} \land \phi_n : \check{\kappa} \longrightarrow \Omega \land [\phi_{n+1}]^* \, R \, [\phi_n]^*).$$

Veamos que a partir de S y ϕ podemos definir en M una sucesión $\{F_n\}_{n\in\omega}$ de funcionales en S tales que $\bigwedge n \in \omega \; F_{n+1} < F_n$ y $\bigwedge n \in \omega \; S \Vdash [\phi_{F_n}]^* = [\phi_{\check{n}}]^*$.

En efecto, tomamos como F_0 el funcional en S construido a partir de ϕ_0, de modo que $S \Vdash [\phi_{F_0}]^* = [\phi_0]^*$. El hecho de que $S \Vdash \phi_0 : \check{\kappa} \longrightarrow \Omega$ implica claramente que las funciones de F pueden tomarse con valores en Ω.

Supongamos definida F_n, de modo que $S \Vdash [\phi_{F_n}]^* = [\phi_{\check{n}}]^*$, con lo que también $S \Vdash [\phi_{\check{n}+1}]^* \, R \, [\phi_{F_n}]^*$.

Para definir el funcional F_{n+1} tomamos (en M) una familia maximal de funciones $f : X \longrightarrow \Omega$ que cumplan las condiciones siguientes:

a) $X \in \mathbb{P}$, $X \subset S$.

b) Existe un $g \in F_n$ tal que $X \subset \mathcal{D}g$ y $\bigwedge \alpha \in X \; f(\alpha) < g(\alpha)$.

c) $X \Vdash \phi_{\check{n}}|_{\check{X}} = \check{f}$.

d) Si f, $f' \in F$, $f \neq f'$, entonces $\mathcal{D}f \cap \mathcal{D}f' \in I$.

Si probamos que $W_{F_{n+1}}$ es una partición de S módulo I, será inmediato que F_{n+1} es un funcional en S, así como que $F_{n+1} < F_n$ y $S \Vdash [\phi_{F_{n+1}}]^* = [\phi_{\check{n}+1}]^*$.

Ahora bien, si existe $Y \subset S$ tal que $W_{F_{n+1}} \cup \{Y\}$ contradice la maximalidad de $W_{F_{n+1}}$, como W_{F_n} sí que es maximal, existe una función $f' \in F_n$ tal que $Y \cap \mathcal{D}f' \in \mathbb{P}$, luego podemos tomar un filtro genérico tal que $Y \cap \mathcal{D}f' \in G$. Entonces $(\phi_n)_G|_{\mathcal{D}f'} = f'$ y $[(\phi_{n+1})_G]^* \, R \, [(\phi_n)_G]^*$, luego

$$A = \{\alpha \in \kappa \mid (\phi_{n+1})_G(\alpha) \in (\phi_n)_G(\alpha)\} \in G.$$

Por consiguiente, $Y \cap \mathcal{D}f' \cap A \in G$.

Por otra parte, $(\phi_{n+1})_G \in M$, luego $g = (\phi_{n+1})_G|_Y \in M$ y podemos tomar $X \in G$ tal que $X \subset Y \cap \mathcal{D}f' \cap A$ y

$$X \Vdash \phi_{n+1}|_{\check{Y}} = \check{g} \land \bigwedge \alpha \in \check{Y} \cap \mathcal{D}\check{f}' \cap \check{A} \;\; \check{g}(\alpha) < \check{f}'(\alpha).$$

En particular, si llamamos $f = g|_X$ se cumple que

$$X \Vdash \phi_{n+1}|_{\check{X}} = \check{f} \land \bigwedge \alpha \in \check{X} \;\; \check{f}(\alpha) < \check{f}'(\alpha).$$

Esto implica que $F_{n+1} \cup \{f\}$ contradice la maximalidad de F_{n+1}.

Con esto tenemos probada una parte del teorema siguiente:

Teorema 6.21 *Sea κ un cardinal no numerable e I un ideal κ-completo en κ que contenga a los puntos y sea $\mathbb{P} = \mathcal{P}\kappa \setminus I$. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) I está bien fundado.

b) No existen sucesiones $\{F_n\}_{n \in \omega}$ de funcionales en ningún $S \in \mathbb{P}$ de manera que $\bigwedge n \in \omega \; F_{n+1} < F_n$.

c) *Si $S \in \mathbb{P}$ y $\{W_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de particiones de S módulo I tales que $\bigwedge n \in \omega\ W_{n+1} \leq W_n$, existe $\{X_n\}_{n\in\omega}$ de modo que*

$$\bigwedge n \in \omega (X_n \in W_n \wedge X_{n+1} \subset X_n)$$

y $\bigcap\limits_{n\in\omega} X_n \neq \varnothing$.

Demostración: Ya hemos probado que b) $\Rightarrow$ a), y de la discusión precedente se sigue también que a) $\Rightarrow$ b), pues (relativizando la prueba a un modelo transitivo numerable M) si $\{F_n\}_{n\in\omega} \in M$ es una sucesión decreciente de funcionales en S, entonces

$$\phi = \{(\text{p.o.}(\check{n}, \phi_{F_n}), \mathbb{1}) \mid n \in \omega\} \in M^{\mathbb{P}}$$

cumple

$$S \Vdash \phi = \{\phi_n\}_{n\in\omega} \wedge \bigwedge n \in \omega (\bigvee X \in \Gamma\ \phi_n : X \longrightarrow \Omega \wedge [\phi_{n+1}]^* \, R \, [\phi_n]^*),$$

luego si $S \in G$, la ultrapotencia $\text{Ult}^*_G(M)$ no está bien fundada.

También es fácil ver que c) $\Rightarrow$ b), pues si $\{F_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión decreciente de funcionales en S, por c) existe $f_n \in W_{F_n}$ de modo que $\mathcal{D}f_{n+1} \subset \mathcal{D}f_n$ y existe $\alpha \in \bigcap\limits_{n\in\omega} \mathcal{D}f_n$, pero entonces $\{f_n(\alpha)\}_{n\in\omega}$ sería una sucesión decreciente de ordinales.

Falta probar que b) $\Rightarrow$ c). Para ello tomamos una sucesión decreciente $\{W_n\}_{n\in\omega}$ de particiones de un $S \in I$ que no cumpla c), y vamos a construir una sucesión decreciente $\{F_n\}_{n\in\omega}$ de funcionales en S.

No perdemos generalidad si suponemos que si $X \in W_{n+1}$, $Y \in W_n$ cumplen $X \subset Y$, de hecho $X \subsetneq Y$, pues en caso contrario podemos modificar X quitándole un punto de Y (que tendremos que quitarle igualmente a todos los subconjuntos de X que aparezcan en los W_m posteriores, pero en total a cada conjunto de un W_n le quitaremos a lo sumo n puntos, luego seguiremos teniendo una sucesión decreciente de particiones que seguirá sin cumplir c).

Sea $A = \bigcup\limits_{n\in\omega} W_n$, con el orden parcial dado por la inclusión. Para cada $\alpha \in S$, sea $A_\alpha = \{X \in A \mid \alpha \in X\}$. El hecho de que las particiones dadas no cumplan c) se traduce en que A_α no contiene sucesiones decrecientes, luego la inclusión está bien fundada en A_α. Sea $\rho_\alpha : A_\alpha \longrightarrow \Omega$ la función rango. Así, si $X \in W_{n+1}$, $Y \in W_n$ y $X \subset Y$, tenemos que $X \neq Y$ (según hemos supuesto) y por lo tanto $\rho_\alpha(X) < \rho_\alpha(Y)$. Ahora basta definir, para cada $X \in W_n$ la función $f_X : X \longrightarrow \Omega$ dada por $f_X(\alpha) = \rho_\alpha(X)$. Es claro que $F_n = \{f_X \mid X \in W_n\}$ es un funcional en S y que la sucesión $\{F_n\}_{n\in\omega}$ es decreciente. ■

Por ejemplo, con ayuda de este teorema podemos probar:

Teorema 6.22 *Si κ es un cardinal no numerable, todo ideal κ^+-saturado en κ está bien fundado.*

DEMOSTRACIÓN: Sea I un ideal κ^+-saturado en κ (recordemos el convenio de suponer tácitamente que es κ-completo y que contiene a los puntos), sea $S \subset \kappa$ un conjunto de medida finita y sea $\{W_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión decreciente de particiones de S módulo I. Vamos a probar que cumple el apartado c) del teorema 6.21. Por hipótesis tenemos que $\bigwedge n \in \omega\ |W_n| \leq \kappa$.

Sea $W_0 = \{X_\alpha \mid \alpha < \theta_0\}$, donde $\theta_0 \leq \kappa$. Entonces, por la κ-completitud de I, tenemos que $X_\alpha \cap \bigcup\limits_{\beta<\alpha} X_\beta \in I$, luego $X'_\alpha = X_\alpha \setminus \bigcup\limits_{\beta<\alpha} X_\beta \in \kappa \setminus I$ y $X_\alpha \setminus X'_\alpha \in I$.

Además $S_0 = \bigcup\limits_{\alpha<\theta_0} X'_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha<\theta_0} X_\alpha \subset S$ y se cumple que $S \setminus S_0 \in I$ por la maximalidad de W_0. Llamamos $W'_0 = \{X'_\alpha \mid \alpha < \theta_0\}$, que es una partición de S_0 en conjuntos de medida positiva.

Supongamos construidas $W'_0, \ldots, W'_n$, donde cada W'_i es una partición de $S_i \subset S$ en conjuntos de medida positiva, de modo que $S \setminus S_i \in I$, $S_{i+1} \subset S_i$, cada $Y \in W'_i$ está contenido en un (único) $X \in W_i$ tal que $X \setminus Y \in I$ (y para cada $X \in W_i$ existe un $Y \in W'_i$ que cumple esto mismo) y cada $Y \in W'_{i+1}$ está contenido en un (único) $X \in W'_i$.

Pongamos entonces que $W_{n+1} = \{X_\alpha \mid \alpha < \theta_{n+1}\}$, con $\theta_{n+1} \leq \kappa$. Para cada $\alpha < \theta_{n+1}$, tenemos que X_α está contenido en un único $Y_\alpha \in W_n$, el cual contiene un único $Y'_\alpha \in W'_n$. Así, $X_\alpha \setminus Y'_\alpha \subset X_\alpha \setminus Y_\alpha \in I$. Definimos

$$X'_\alpha = (X_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} X_\alpha) \cap Y'_\alpha.$$

Es claro entonces que $X_\alpha \setminus X'_\alpha \in I$ y $X_\alpha \subset Y'_\alpha \in W'_n$. Por lo tanto el conjunto $W'_{n+1} = \{X'_\alpha \mid \alpha < \theta_{n+1}\}$ es una partición de $S_{n+1} = \bigcup\limits_{\alpha<\theta_{n+1}} X'_\alpha$ que cumple las mismas condiciones para $n + 1$.

En definitiva, tenemos construida una sucesión $\{W'_n\}_{n\in\omega}$, donde cada W'_n es un partición de $S_n \subset S$ y $S \setminus S_n \in I$, por lo que $\bigcup\limits_{n\in\omega} (S \setminus S_n) \in I$ y $\bigcap\limits_{n\in\omega} S_n \notin I$.

En particular, existe $z \in \bigcap\limits_{n\in\omega} S_n$ y, para cada n, existe un único $Y_n \in W'_n$ tal que $z \in Y_n$ y a su vez existe un $X_n \in W_n$ tal que $Y_n \subset X_n$. Como Y_{n+1} tiene que estar contenido en Y_n o ser disjunto de él (y lo segundo no sucede), tiene que ser $Y_{n+1} \subset Y_n$, luego $Y_{n+1} \subset X_{n+1} \cap X_n$ y, como X_{n+1} tiene que estar contenido en X_n o bien tener intersección nula con él, necesariamente $X_{n+1} \subset X_n$. Finalmente, $z \in \bigcap\limits_{n\in\omega} X_n \neq \varnothing$. ■

Para aplicar las ultrapotencias genéricas a los cardinales con ideales κ-saturados necesitamos un resultado general sobre extensiones genéricas:

Teorema 6.23 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC *y en M sea $\kappa \in M$ un cardinal regular no numerable, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. con la c.c. κ. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y sea $C \in M[G]$ un c.n.a. en κ. Entonces existe $C' \in M$ c.n.a. en κ tal que $C' \subset C$. En particular, todo conjunto estacionario^M en κ es estacionario$^{M[G]}$ en κ.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $C = \sigma_G$, de modo que $\mathbb{1} \Vdash \sigma$ es c.n.a. en $\check{\kappa}$. Sea $C' = \{\alpha \in \kappa \mid \mathbb{1} \Vdash \check{\alpha} \in \sigma\} \in M$. Se cumple que C' es cerrado en κ, pues si $\lambda < \kappa$ es un ordinal límite y $C' \cap \lambda$ no está acotado en λ, entonces, para cualquier filtro genérico G se cumple que $\sigma_G \cap \lambda$ no está acotado en λ, luego $\lambda \in \sigma_G$, luego $\lambda \in C'$.

Veamos que C' no está acotado en κ. Para ello fijamos $\alpha_0 < \kappa$. Sea

$$D = \{q \in \mathbb{P} \mid \bigvee \beta(\alpha_0 < \beta < \kappa \wedge q \Vdash \check{\beta} \in \sigma)\} \in M.$$

Es claro que D es denso en $\mathbb{P}$. Sea W una anticadena maximal en D. Por hipótesis $|W|^M < \kappa$, luego existe un $\alpha_0 < \alpha_1 < \kappa$ tal que todo $q \in W$ cumple

$$q \Vdash \bigvee \beta(\alpha_0 < \beta \leq \alpha_1 \wedge \beta \in \sigma).$$

Ahora bien, como todo $p \in \mathbb{P}$ tiene una extensión en D, que a su vez debe ser compatible con un elemento de W, el conjunto de las condiciones $q \in \mathbb{P}$ que cumplen la relación precedente es denso en $\mathbb{P}$, luego

$$\mathbb{1} \Vdash \bigvee \beta(\alpha_0 < \beta \leq \alpha_1 \wedge \beta \in \sigma).$$

Repitiendo el argumento obtenemos una sucesión $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \kappa$ de modo que

$$\mathbb{1} \Vdash \bigvee \beta(\alpha_i < \beta \leq \alpha_{i+1} \wedge \beta \in \sigma).$$

Definimos $\alpha = \sup\limits_{n \in \omega} \alpha_n < \kappa$. Entonces $\alpha \cap C'$ no está acotado en α, luego $\alpha \in C'$. ■

Con esto ya podemos probar:

Teorema 6.24 *Sea I un ideal κ-saturado normal en un cardinal κ y sea $E \subset \kappa$ estacionario. Entonces $\{\lambda < \kappa \mid \operatorname{cf} \lambda > \aleph_0 \wedge E \cap \lambda$ es estacionario en $\lambda\}$ tiene medida 1.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que el complementario X del conjunto del enunciado tiene medida positiva. Concretamente,

$$X = \{\alpha < \kappa \mid \operatorname{cf} \alpha > \aleph_0 \rightarrow E \cap \alpha \text{ no es estacionario en } \alpha\}.$$

Relativicemos toda la prueba a un modelo transitivo numerable M de ZFC, tomemos $\mathbb{P} = \mathcal{P}\kappa \setminus I$ y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $X \in G$. Consideramos la ultrapotencia genérica $N = \mathrm{Ult}_G(M)$. Por el teorema fundamental, que $X \in G$ equivale a que

$$(\operatorname{cf}[d] > \aleph_0 \rightarrow j_G(E) \cap [d] \text{ no es estacionario en } [d])^N,$$

donde d es la identidad en κ y, como I es normal, sabemos que $\kappa = [d]$. Por lo tanto, $j_G(E) \cap \kappa$ no es estacionario en κ. Ahora bien, como κ es el punto crítico de j_G, es claro que $j_G(E) \cap \kappa = E$, luego E no es estacionario^N en κ.

Sin embargo, por otra parte, como $\mathbb{P}$ cumple la c.c. κ, el teorema 6.23 nos da que E es estacionario$^{M[G]}$, y como $N \subset M[G]$ es claro que E también es estacionario^N, contradicción. ■

Si, en lugar de suponer que E es estacionario, suponemos que tiene medida 1 (lo cual implica que es estacionario por 1.19), podemos concluir que también tiene medida 1 el conjunto

$$E \cap \{\lambda < \kappa \mid \operatorname{cf} \lambda > \aleph_0 \wedge E \cap \lambda \text{ es estacionario en } \lambda\}.$$

En particular:

Teorema 6.25 *Si κ admite un ideal κ-saturado, entonces κ es débilmente hiper-Mahlo.*

Demostración: Relativizamos la prueba a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Consideremos un ideal normal κ-saturado I en κ y sea

$$E = \{\lambda < \kappa \mid \operatorname{cf} \lambda = \lambda\}.$$

Vamos a probar que E tiene medida 1. En caso contrario, $\kappa \setminus E$ tiene medida positiva. Sea $\mathbb{P} = \mathcal{P}^M\kappa \backslash I$ y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $\kappa \backslash E \in G$. Sea $N = \mathrm{Ult}_G(M)$. Trivialmente entonces $(\operatorname{cf}[d] < [d])^N$, es decir, $(\operatorname{cf} \kappa < \kappa)^N$, pero esto implica que $(\operatorname{cf} \kappa < \kappa)^{M[G]}$, lo cual es falso, ya que $\mathbb{P}$ cumple la c.c. κ, luego conserva la cofinalidad de κ.

La observación anterior al teorema implica entonces que

$$E' = \{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es débilmente inaccesible}\}$$

tiene medida 1, luego al aplicar de nuevo la misma observación obtenemos que

$$E_0 = \{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es débilmente de Mahlo}\}$$

tiene medida 1, y por inducción demostramos que todos los conjuntos

$$E_\alpha = \{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es débilmente } \alpha\text{-Mahlo}\}$$

tiene medida 1 (debemos parar en κ porque en el caso límite usamos que la intersección de menos de κ conjuntos de medida 1 tiene medida 1). ■

A su vez, usando que la intersección diagonal de conjuntos de medida (normal) 1 tiene medida 1, concluimos que

$$\{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es débilmente hiper-Mahlo}\}$$

tiene medida 1, etc.

El hecho de que los ideales κ^+-saturados sobre un cardinal κ también estén bien fundados nos permite obtener consecuencias sobre los cardinales con este tipo de ideales. Por ejemplo, tenemos esta variante de 5.6:

Teorema 6.26 *Sea κ un cardinal regular no numerable que admita un ideal κ^+-saturado. Si $\bigwedge\mu(\aleph_0 \leq \mu < \kappa \rightarrow 2^\mu = \mu^+)$, entonces $2^\kappa = \kappa^+$.*

DEMOSTRACIÓN: Relativizamos la prueba a un modelo transitivo numerable M de ZFC. En M, sea I un ideal κ^+-saturado en κ y sea $\mathbb{P}$ el c.p.o. asociado. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y sea $N = \mathrm{Ult}_G(M)$. Sea $j_G : M \longrightarrow N$ la inmersión elemental canónica. Sabemos que κ es el punto crítico de j_G.

Observemos que si $X \in \mathcal{P}^M\kappa$, entonces $X = j_G(X) \cap \kappa$, luego $X \in N$. Así pues, $\mathcal{P}^M\kappa \subset \mathcal{P}^N\kappa$. Como $\bigwedge\mu(\aleph_0 \leq \mu < \kappa \rightarrow 2^\mu = \mu^+)^M$, también $\bigwedge\mu(\aleph_0 \leq \mu < j_G(\kappa) \rightarrow 2^\mu = \mu^+)^N$ y, en particular, $(2^\kappa = \kappa^+)^N$.

Claramente, $(\kappa^+)^N \leq (\kappa^+)^{M[G]}$. Por otra parte, $\mathbb{P}$ cumple la c.c. κ^+ en M, luego $(\kappa^+)^M$ es un cardinal en $M[G]$ y $(\kappa^+)^M = (\kappa^+)^{M[G]}$ (notemos que κ no es necesariamente un cardinal en $M[G]$). Por otro lado, $(\kappa^+)^N \leq (\kappa^+)^{M[G]}$. En total, en $M[G]$ tenemos una aplicación inyectiva $(2^\kappa)^M \longrightarrow (\kappa^+)^M$ y, como ambos son cardinales en $M[G]$, resulta que $(2^\kappa)^M \leq (\kappa^+)^M$, y en definitiva $(2^\kappa = \kappa^+)^M$. ■

Ahora podemos generalizar el teorema 6.16:

Teorema 6.27 *Si existe un cardinal que admite un ideal bien fundado, entonces existe un modelo transitivo de* ZFC *en el cual existe un cardinal medible.*

DEMOSTRACIÓN: Sea I un ideal bien fundado en un cardinal κ, sea $\mathbb{P} = \mathcal{P}\kappa \setminus I$ y sea $\sigma = (|\mathbb{P}|^+)^M$, de modo que $\mathbb{P}$ cumple trivialmente la c.c. σ. Sea C la clase de los cardinales límite fuerte de cofinalidad mayor que σ. Sea $\{\mu_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión estrictamente creciente de elementos de C tales que[6] $|C \cap \mu_n| = \mu_n$, sea $\mu = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mu_n$ y $A = \{\mu_n \mid n \in \omega\}$.

En primer lugar vamos a demostrar que existe un ultrafiltro en $\mathcal{P}^{L[A]}\kappa$ que es iterable sobre $L[A]$. Para probar esto usaremos ultrapotencias genéricas, así que demostraremos la relativización de este hecho a un modelo transitivo numerable M de ZFC.

Observemos que si $\nu \in C$ entonces $\mathbb{1} \Vdash j_\Gamma(\check{\nu}) = \check{\nu}$.

En efecto, si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, tomemos $\delta \in j_G(\nu)$. Entonces $\delta = [f]$, para cierta $f \in M$ que podemos suponer $f : \kappa \longrightarrow \nu$. Pero como $\operatorname{cf}\nu > \kappa$, de hecho existe un $\alpha < \nu$ tal que $f : \kappa \longrightarrow \alpha$.

Sea ahora $\gamma < \delta$, de modo que $\gamma = [g]$, con $g \in M$, $g : \kappa \longrightarrow \alpha$. Por lo tanto, en $M[G]$ tenemos una aplicación suprayectiva $({}^\kappa\alpha)^M \longrightarrow \delta$.

Como $\xi = (|\alpha|^\kappa)^M < \mu$, en M tenemos una aplicación suprayectiva $\xi \longrightarrow {}^\kappa\alpha$, y en $M[G]$ tenemos una aplicación suprayectiva $\xi \longrightarrow \delta$. Por consiguiente $|\delta|^{M[G]} \leq \xi < \mu$, pero μ es un cardinal$^{M[G]}$ porque $\mathbb{P}$ conserva los cardinales mayores que σ, luego $\delta < \mu$, luego $j_G(\mu) \leq \mu$, y la otra desigualdad se cumple siempre.

Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Que I esté bien fundado significa que está definida la ultrapotencia $\mathrm{Ult}_G(M)$. Si $d : \kappa \longrightarrow \kappa$ es la identidad, tenemos

[6] Véanse las observaciones previas al teorema 1.40.

que $[d]$ es un ordinal, luego existe una condición $S \in G$ y un ordinal $\gamma \in \Omega^M$ tales que $S \Vdash [\check{d}] = \check{\gamma}$. Veamos que

$$U = \{X \in \mathcal{P}\kappa \cap L[A]^M \mid S \cap X \in \mathbb{P}\} \in M$$

es un ultrafiltro en $\mathcal{P}\kappa \cap L[A]^M$. Para ello basta probar que todo $X \in \mathcal{P}\kappa \cap L[A]^M$ cumple que $S \cap X \in I$ o bien $S \setminus X \in I$.

Razonando en M, sea $\mu^* > \mu$ tal que $\mu^* \in C$ y $|C \cap \mu^*| = \mu^*$. Definimos $N = N(\kappa \cup (C \cap \mu^*) \cup \{A\}) \prec L_{\mu^*}[A]$ y sea $\pi : N \longrightarrow M_0$ el colapso transitivo. Como $\mu_n \geq |\mu_n \cap N| \geq |\mu_n \cap C| = \mu_n$, vemos que $\pi(\mu_n) \leq \mu_n$ tiene cardinal μ_n, luego $\pi(\mu_n) = \mu_n$. Esto implica a su vez que $\pi(A) = A$, luego $M_0 = L_\lambda[A]$, para cierto λ, pero como se cumple $|M_0| = |N| \geq |C \cap \mu^*| = \mu^*$, tiene que ser $M_0 = L_{\mu^*}[A]$.

Si $X \in \mathcal{P}\kappa \cap L[A]$, entonces $X \in L_{\mu^*}[A]$, luego existe un $Y \in N$ tal que $X = \pi(Y) = Y \cap \kappa$, ya que π fija a los elementos de κ. Además

$$Y = \{\alpha \in L_{\mu^*}[A] \mid L_{\mu^*}[A] \vDash \phi[\alpha, s, A]\},$$

para cierta sucesión finita s en $\kappa \cup (C \cap \mu^*)$, luego

$$X = \{\alpha \in \kappa \mid L_{\mu^*}[A] \vDash \phi[\alpha, s, A]\}.$$

Supongamos que $S \cap X \notin I$, de modo que $S \cap X \in \mathbb{P}$. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $S \cap X \in G$. Entonces en $M[G]$ se cumple que $[d] = \gamma$, luego

$$\{\delta < \kappa \mid \delta \in X\} = X \in G,$$

y esto equivale a que $\gamma = [d] \in j_G(X)$.

Pero sabemos que j_G fija a s, a μ^* y también a A, pues en M existe una aplicación $f : \omega \longrightarrow A$ biyectiva, luego $j_G(f) : \omega \longrightarrow j_G(A)$ biyectiva, y como j_G fija a cada elemento de A, tiene que ser $j_G(f) = f$, luego $j_G(A) = A$.

Por consiguiente, $j_G(X) = \{\alpha \in j_G(\kappa) \mid L_{\mu^*}[A] \vDash \phi[\alpha, s, A]\}$, luego concluimos que $L_{\mu^*}[A] \vDash \phi[\gamma, s, A]$, pero esto no depende de G. Si ahora tomamos un filtro G arbitrario, sin exigir que $S \cap X \in \mathbb{P}$, sigue siendo cierto que

$$j_G(X) = \{\alpha \in j_G(\kappa) \mid L_{\mu^*}[A] \vDash \phi[\alpha, s, A]\},$$

luego se cumple $\gamma \in j_G(X)$, y esto prueba que $\mathbb{1} \Vdash \check{\gamma} \in j_\Gamma(\check{X})$. Pero entonces $S \Vdash [\check{d}] \in j_\Gamma(\check{X})$, que es lo mismo que $S \Vdash \check{X} \in \Gamma$, y esto sólo puede ocurrir si $S \setminus X \in I$.

Veamos que U es κ-completo sobre $L[A]^M$. Si $\{X_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ con $\beta < \kappa$ es una familia en $L[A]$ de elementos de U, entonces $S \cap X_\alpha \notin I$, luego, según hemos visto, $S \setminus X_\alpha \in I$, y como I es κ-completo también

$$S \setminus \bigcap_{\alpha<\beta} X_\alpha = \bigcup_{\alpha<\beta} (S \setminus X_\alpha) \in I,$$

luego $\bigcap\limits_{\alpha<\beta} X_\alpha \notin I$.

Notemos que el argumento que acabamos de emplear no requiere que la familia de partida esté en $L[A]^M$ (sólo hace falta al final para acabar concluyendo que la intersección está en U), por lo que en particular prueba que la intersección de cualquier familia numerable (en M) de elementos de U es no vacía, es decir, que podemos aplicar el teorema 1.14 para concluir que (en M) la ultrapotencia $\mathrm{Ult}_U(L[A])$ está bien fundada. Por 1.13 sabemos además que la inmersión elemental (siempre en M) $j_U : L[A] \longrightarrow \mathrm{Ult}_U(L[A])$ tiene punto crítico κ.

Consideramos ahora $E = \{X \in \mathcal{P}^{L[A]}\kappa \mid \kappa \in j_U(X)\} \in M$, que por 1.20 es un ultrafiltro en $\mathcal{P}^{L[A]}\kappa$ normal sobre $L[A]$. Vamos a probar que sigue cumpliendo la hipótesis del teorema 1.14. Para ello sea $\kappa = [f] \in \mathrm{Ult}_U(L[A])$, donde $f : \kappa \longrightarrow \Omega$, $f \in L[A]$. Así,

$$X \in E \leftrightarrow [f] \in j_U(X) \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \in X\} \in U \leftrightarrow f^{-1}[X] \in U.$$

Si $\{X_n\}_{n\in\omega}$ es cualquier familia (en M) de elementos de U, tenemos que existe $\alpha \in \bigcap\limits_{n\in\omega} f^{-1}[X_n]$, luego $f(\alpha) \in \bigcap\limits_{n\in\omega} X_n \neq \varnothing$.

Vamos a probar que E es 1-iterable sobre $L[A]$, y entonces por 1.38 será completamente iterable.

Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha<\kappa} \in L[A]$ una familia de subconjuntos de κ y sea $F : \kappa \longrightarrow L[A]$ dada por $F(\alpha) = f^{-1}[X_\alpha]$, de modo que $F \in L[A]$.

Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $S \in G$. Entonces, en $M[G]$

$$\begin{aligned}\{\alpha < \kappa \mid X_\alpha \in E\} &= \{\alpha < \kappa \mid F(\alpha) \in U\} = \{\alpha < \kappa \mid \gamma \in j_G(F(\alpha))\} \\ &= \{\alpha < \kappa \mid \gamma \in j_G(F)(\alpha)\} \in L[A],\end{aligned}$$

pues $j_F(F) \in L[j_G(A)] = L[A]$.

Con esto hemos probado que, bajo las hipótesis del teorema, existe un ultrafiltro E en $\mathcal{P}^{L[A]}\kappa$ iterable sobre $L[A]$. A partir de aquí ya no necesitamos trabajar en un modelo M. Tenemos definida la sucesión de ultrapotencias iteradas $\{\mathrm{Ult}_E^\alpha(L[A])\}_{\alpha<\Omega}$.

Por 1.33 c) sabemos que si $\alpha < \mu_n$, entonces $i_{0\alpha}(\mu_n) = \mu_n$.

Esto implica a su vez que si $\alpha < \mu$ entonces $i_{0\alpha}(A)$ se diferencia de A en un conjunto finito de elementos. En efecto, tenemos que $A \in L[A]$ y A es numerable en $L[A]$ (pues el ordinal de un conjunto de ordinales es absoluto) luego existe $f : \omega \longrightarrow A$ biyectiva, $f \in L[A]$ y $i_{0\alpha}(f) : \omega \longrightarrow i_{0\alpha}(A)$ se diferencia de f en un número finito de términos.

Por consiguiente, si $\alpha < \mu$ se cumple $L[A] = L[i_{0\alpha}(A)]$. Además, $\mu = \sup A = \sup i_{0\alpha}(A)$, luego también $i_{0\alpha}(\mu) = \mu$.

El teorema 1.33 b) nos da además que $i_{0\mu_n}(\kappa) = \mu_n$.

Definimos

$$F = \{X \in \mathcal{P}^{L[A]}\mu \mid \bigvee n_0 \bigwedge n \geq n_0\, \mu_n \in X\} \in L[A].$$

Veamos que $D = F \cap L[F]$ es una medida normal en μ en el modelo $L[D] = L[F] \subset L[A]$. Claramente es un filtro en μ.

Observemos que si $\alpha < \mu$ entonces $i_{0\alpha}(F) = F$ y, por lo tanto, $i_{0\alpha}(D) = D$.

Si existe un $X \in L[D]$ tal que $X \subset \mu$ pero ni X ni $\mu \setminus X$ están en D, podemos tomar el mínimo respecto al buen orden canónico en $L[D]$. Pero como $i_{0\alpha}$ conserva todos los parámetros, tenemos que $i_{0\alpha}(X) = X$, para todo $\alpha < \mu$. En particular $i_{0\mu_n}(X) = X$. Por lo tanto, si $\mu_n \in X$, entonces $i_{0\mu_n}(\kappa) \in i_{0\mu_n}(X)$, luego $\kappa \in X$, y viceversa, luego o bien todos los μ_n están en X o no lo está ninguno, luego $X \in D$ o bien $\mu \setminus X \in D$, contradicción.

Es claro que si $\alpha < \mu$ entonces $\mu \setminus \alpha \in D$, por la propia definición de D, luego, por la nota tras la definición 1.16, para probar que D es una medida normal no hace falta demostrar la μ-completitud. Si $\{X_\delta\}_{\delta<\mu} \in L[D]$ es una familia de elementos de D tal que $X = \underset{\delta<\mu}{\triangle} X_\delta \notin D$, podemos tomar la menor respecto del buen orden de $L[D]$, y entonces, para todo $\alpha < \mu$, se cumple que $i_{0\alpha}(\{X_\delta\}_{\delta<\mu}) = \{X_\delta\}_{\delta<\mu}$, luego en particular $i_{0\alpha}(X) = X$. Como antes, esto implica que $\mu_n \in X \leftrightarrow \kappa \in X$, luego si probamos que $\kappa \in X$ tendremos que $X \in D$, y tendremos una contradicción.

Ahora bien, $\kappa \in X$ equivale a que $\bigwedge \delta < \kappa \ \kappa \in X_\delta$, pero, como cada $i_{0\alpha}$ fija a los ordinales menores que κ, es claro que $i_{0\alpha}(X_\delta) = X_\delta$, luego también tenemos que $\mu_n \in X_\delta \leftrightarrow \kappa \in X_\delta$, y como $X_\delta \in D$ tiene que ser $\kappa \in X_\delta$.

Con esto queda probado que μ es medible en $L[D]$. ■

Nota La prueba del teorema anterior se puede mejorar hasta llegar a un modelo de ZFC en el cual el propio κ es un cardinal medible. Para ello basta encontrar un modelo M con una inmersión elemental $i : M \longrightarrow L[D]$ tal que $i(\kappa) = \mu$. Para ello llamamos $C_1 = C \setminus (\mu \cup \{\mu\})$, de modo si $\alpha \leq \mu$ y $\nu \in C_1$, entonces $i_{0\alpha}(\nu) = \nu$. El modelo buscado es el colapso transitivo de $N = N(\kappa \cup \{\mu\} \cup C_1) \prec L[D]$, donde el núcleo de Skolem N se define como la clase de los conjuntos definibles a partir de los parámetros indicados en un modelo $L_\xi[A]$ para un ξ suficientemente grande. Se comprueba entonces que N es realmente un submodelo elemental de $L[D]$ y que todos sus elementos son fijados por todas las inmersiones $i_{0\alpha}$, con $\alpha < \mu$, y esto implica a su vez que en N no hay ordinales entre κ y μ, por lo que κ es el colapso transitivo de μ o, equivalentemente, si $i : M \longrightarrow L[D]$ es la inversa de la función colapsante, se cumple que $i(\kappa) = \mu$. Más aún, entonces $M = L[D']$, donde D' es una medida normal en κ. ■

De este modo, ahora sabemos que la existencia de un cardinal κ con cualquiera de las propiedades siguientes es equiconsistente con la existencia de un cardinal κ con otra cualquiera de ellas:

a) κ tiene una medida fuerte.

b) κ tiene una medida débil (un ideal $\aleph_1$-saturado).

c) $\kappa > \aleph_0$ tiene un ideal κ^+-saturado.

d) κ tiene un ideal bien fundado.

6.3 Saturación de ideales específicos

Estudiamos ahora si algunos ideales con definiciones sencillas pueden presentar propiedades de saturación. Dado un cardinal regular κ, el ideal κ-completo más sencillo que podemos considerar es

$$I_\kappa = \{X \subset \kappa \mid |X| < \kappa\}.$$

Podemos plantearnos si puede ser κ^+-saturado, pero la respuesta es negativa:

Teorema 6.28 *Si κ es un cardinal regular no numerable, el ideal*

$$I_\kappa = \{X \subset \kappa \mid |X| < \kappa\}$$

no está bien fundado, y en particular no es κ^+-saturado.

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $\mathbb{P} = \mathcal{P}\kappa \setminus I_\kappa$, es decir, el conjunto de los $A \subset \kappa$ tales que $|X| = \kappa$. Para cada condición X, llamemos $f_X : X \longrightarrow \kappa$ a la única semejanza. Observemos que para todo $X \in \mathbb{P}$ existe $Y \in \mathbb{P}$ tal que $Y \subset X$ y $\bigwedge \alpha \in Y\ f_Y(\alpha) < f_X(\alpha)$. En efecto, basta tomar

$$Y = \{\alpha \in X \mid f_X(\alpha) \text{ es un ordinal sucesor}\}.$$

Así $\bigwedge \alpha \in Y\ f_X(\alpha) = f_Y(\alpha) + 1$. Por lo tanto, si $X \in \mathbb{P}$ existe una partición W_X de X módulo I tal que $\bigwedge Y \in W_X\ \bigwedge \alpha \in Y\ f_Y(\alpha) < f_X(\alpha)$.

Ahora definimos $W_0 = \{\kappa\}$, $W_{n+1} = \bigcup\{W_X \mid X \in W_n\}$, con lo que tenemos una sucesión decreciente de particiones de κ módulo I_κ. A su vez, definimos los funcionales en κ dados por $F_n = \{f_X \mid X \in W_n\}$, de manera que claramente $F_0 > F_1 > F_2 > \cdots$, luego I_κ no está bien fundado. ■

Observemos que si $2^\kappa = \kappa^+$, todo ideal en κ es κ^{++}-saturado (pues todo $A \subset \mathcal{P}\kappa$ cumple $|A| < \kappa^{++}$), por lo que la κ^{++}-saturación de un ideal no puede implicar la existencia o la consistencia de ningún cardinal grande. El teorema siguiente muestra que I_κ puede ser κ^{++}-saturado aunque 2^κ sea grande:

Teorema 6.29 *Si M es un modelo transitivo numerable de* ZFC + HCG*, κ es un cardinal en M de cofinalidad no numerable, $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\kappa, 2, \aleph_0)$ y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces en $M[G]$ el ideal de los subconjuntos numerables de ω_1 es $\aleph_3$-saturado (y $2^{\aleph_0} = \kappa$).*

DEMOSTRACIÓN: Como $\mathbb{P}$ conserva cardinales, usaremos la notación ω_1 para referirnos a $\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$, e igualmente con otros cardinales. Supongamos que $\{A_\alpha\}_{\alpha<\omega_3} \in M[G]$ es una familia de subconjuntos no numerables de ω_1 cuyas intersecciones sean numerables dos a dos. Entonces, para cada $\alpha < \beta < \omega_3$ existe un ordinal $f(\alpha, \beta) < \omega_1$ tal que $A_\alpha \cap A_\beta \subset f(\alpha, \beta)$. Como $\mathbb{P}$ cumple la c.c.n., por el teorema [PC 5.5] existe $F : \omega_3 \times \omega_3 \longrightarrow \mathcal{P}\omega_1$ en M tal que $F(\alpha, \beta)$ es numerable y $f(\alpha, \beta) \in F(\alpha, \beta)$. Si llamamos $\gamma_{\alpha,\beta} = \bigcup F(\alpha, \beta) < \omega_1$ tenemos que la sucesión $\{\gamma_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta} \in M$ y $A_\alpha \cap A_\beta \subset \gamma_{\alpha,\beta}$.

Podemos considerar que $\gamma : [\omega_3]^2 \longrightarrow \omega_1$ y el teorema de Erdős-Rado (en M) afirma que $\aleph_3 \to (\aleph_2)^2$, por lo que existe $H \in M$ tal que $H \subset \omega_3$, $|H| = \aleph_2$ y $\gamma_{\alpha,\beta}$ toma un mismo valor γ sobre todos los pares de ordinales de H.

Pero entonces, en $M[G]$, la familia $\{A_\alpha \setminus \gamma\}_{\alpha\in H}$ es una familia de $\aleph_2$ subconjuntos disjuntos de ω_1, lo cual es absurdo. ■

Descartados los ideales determinados por la cardinalidad, el ejemplo más simple de ideal κ-completo en un cardinal regular κ es el ideal I_{NE} formado por los subconjuntos de κ no estacionarios. El teorema [TC 6.17] implica que no es κ-saturado, pero en principio queda la posibilidad de que sea κ^+-saturado. Sin embargo, también tenemos un resultado negativo:

Teorema 6.30 (Gitik-Shelah) *Si $\kappa \geq \aleph_2$ es un cardinal regular, entonces el ideal I_{NE} de los subconjuntos no estacionarios de κ no es κ^+-saturado.*

Dedicamos el resto de esta sección a demostrar este teorema, pero antes destacamos que deja abierta la posibilidad de que el ideal I_{NE} de ω_1 sí que sea $\aleph_2$-saturado, y el hecho es que, suponiendo la consistencia de un cardinal grande, también es consistente que lo sea (teorema [PC 13.21]).

En primer lugar vamos a necesitar algunos resultados de combinatoria. Partimos de un hecho muy conocido:

Teorema 6.31 *Si κ es un cardinal regular, existe una familia $\{X_\alpha\}_{\alpha<\kappa^+}$ de subconjuntos de κ de cardinal κ tales que $|X_\alpha \cap X_\beta| < \kappa$ siempre que $\alpha \neq \beta$.*

Demostración: Por el lema de Zorn podemos tomar una familia maximal en las condiciones indicadas. Basta ver que no puede tener cardinal $\leq \kappa$. En efecto, dada $\{X_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$, con $\gamma \leq \kappa$ en las condiciones del enunciado, definimos

$$Y_\alpha = X_\alpha \setminus \bigcup_{\delta<\alpha} X_\delta = X_\alpha \setminus \bigcup_{\delta<\alpha} (X_\delta \cap X_\alpha),$$

que son conjuntos de cardinal κ, pues la unión tiene cardinal $< \kappa$, porque κ es regular. Además los Y_α son disjuntos dos a dos. Tomamos $\beta_\alpha \in Y_\alpha$, de modo que $X = \{\beta_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ cumple $|X| = \kappa$. Además $X \cap X_\alpha \subset \{\beta_\delta \mid \delta \leq \alpha\}$, luego $|X \cap X_\alpha| < \kappa$ y esto prueba que la familia dada no es maximal. ■

Definición 6.32 Las familias en las condiciones del teorema anterior se llaman *familias casi disjuntas* de subconjuntos de κ.

Dado un cardinal μ, una familia $\{X_\alpha\}_{\alpha<\mu^+}$ de subconjuntos no acotados de un ordinal límite $\lambda < \mu^+$ es *fuertemente casi disjunta* si para todo $\gamma < \mu^+$ existen ordinales $\{\beta_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ tales que los conjuntos $\{X_\alpha \setminus \beta_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ son disjuntos dos a dos.

Teorema 6.33 *Si μ es un cardinal regular, existe una familia $\{X_\alpha\}_{\alpha<\mu^+}$ fuertemente casi disjunta de subconjuntos de μ.*

DEMOSTRACIÓN: Basta tomar cualquier familia casi disjunta $\{X_\alpha\}_{\alpha<\mu^+}$ de subconjuntos de μ. En efecto, si $\gamma < \mu^+$, pasando a otro ordinal mayor, no perdemos generalidad si suponemos $\gamma \geq \kappa$, y entonces podemos reordenar $\{X_\alpha\}_{\alpha<\gamma} = \{X_{\alpha_\delta}\}_{\delta<\kappa}$. Si $\delta < \kappa$, los conjuntos $\{X_{\alpha_\delta} \cap X_{\alpha_\epsilon}\}_{\epsilon<\delta}$ están acotados en κ, y como κ es regular podemos tomar una cota común β_{α_δ}, de modo que $X_{\alpha_\delta} \setminus \beta_{\alpha_\delta}$ es disjunto de todos los X_{α_ϵ}, con $\epsilon < \delta$. ■

En cambio:

Teorema 6.34 *Si $\lambda < \mu^+$ y $\operatorname{cf}\lambda \neq \operatorname{cf}\mu$, entonces no existe ninguna familia fuertemente casi disjunta de subconjuntos de μ.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos $\{X_\alpha\}_{\alpha<\mu^+}$ es una familia fuertemente casi disjunta de subconjuntos de μ. Podemos sustituir cada X_α por un subconjunto de ordinal $\operatorname{cf}\lambda$ sin que deje de cumplirse lo indicado. Así pues, podemos suponer que todos los X_α tienen ordinal $\operatorname{cf}\lambda$. Sea $f : \mu \longrightarrow \lambda$ suprayectiva. Como $\operatorname{cf}\lambda \neq \operatorname{cf}\mu$, para cada $\alpha < \mu^+$ existe un $\delta_\alpha < \mu$ tal que $X_\alpha \cap f[\delta_\alpha]$ es cofinal en λ. En efecto, podemos tomar $A \subset \mu$ con una antiimagen para cada elemento de X_α, de modo que $|A| = \operatorname{cf}\lambda$. Si $\operatorname{cf}\lambda < \operatorname{cf}\mu$, entonces A está acotado en μ por un cierto δ_α que cumple lo requerido. Si $\operatorname{cf}\mu < \operatorname{cf}\lambda$, tomamos $g : \operatorname{cf}\mu \longrightarrow \mu$ cofinal creciente y observamos que no puede ocurrir que

$$\bigwedge \epsilon < \operatorname{cf}\mu \bigvee \beta < \lambda \bigwedge \gamma \in A \cap g(\epsilon)\ f(\gamma) < \beta,$$

pues entonces podríamos tomar el mínimo β_ϵ posible, y elegir $\delta \in A$ tal que $\sup\limits_{\epsilon<\operatorname{cf}\mu} \beta_\epsilon < f(\delta) < \lambda$, pero entonces $\delta \in g(\epsilon)$ para cierto $\epsilon < \operatorname{cf}\mu$ y tenemos una contradicción. Así pues, existe un $\epsilon < \operatorname{cf}\mu$ tal que $\delta = g(\epsilon)$ cumple que

$$\bigwedge \beta < \lambda \bigvee \gamma \in A \cap \delta\ f(\gamma) \geq \beta.$$

Así pues, $f[A \cap \delta] \subset X_\alpha \cap f[\delta]$ es cofinal en λ.

Podemos tomar $W \subset \mu^+$ tal que $|W| = \mu$ tal que todos los δ_α con $\alpha \in W$ sean un mismo $\delta < \mu$. Sea $\gamma = \sup W < \mu^+$. Por hipótesis existen ordinales $\{\beta_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ tales que los conjuntos $\{X_\alpha \setminus \beta_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ son disjuntos dos a dos. Entonces los conjuntos $\{f^{-1}[X_\alpha \setminus \beta_\alpha]\}_{\alpha\in W}$ son μ subconjuntos de $\delta < \mu$ disjuntos dos a dos, contradicción. ■

Teorema 6.35 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Supongamos que κ es un cardinal regular^M tal que en $M[G]$ se cumple que $\operatorname{cf}\kappa \neq \operatorname{cf}|\kappa|$. Entonces κ^+ se colapsa en $M[G]$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $(\kappa^+)^M$ es un cardinal en $M[G]$. Sea $\mu = |\kappa|^{M[G]}$, de modo que $(\kappa^+)^M = (\mu^+)^{M[G]}$. En M existe una familia $\{X_\alpha\}_{\alpha<\kappa^+}$ fuertemente casi disjunta de subconjuntos de κ, que, vista en $M[G]$ es una familia $\{X_\alpha\}_{\alpha<\mu^+}$ fuertemente casi disjunta de subconjuntos de $\kappa < \mu^+$, y esto contradice al teorema anterior. ■

Teorema 6.36 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC*, en M, sea κ un cardinal y sea I un ideal normal y κ^+-saturado en κ. Sea $\mathbb{P} = \mathcal{P}\kappa \setminus I$, sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y sea $N = \mathrm{Ult}_G(M)$. Entonces $\mathcal{P}^N\kappa = \mathcal{P}^{M[G]}\kappa$ y $\mathbb{P}$ conserva cardinales y cofinalidades $< \kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 6.4 sabemos que el álgebra $\mathbb{B} = \mathcal{P}/I$ es completa, y es inmediato que la aplicación $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{B}$ dada por $i(X) = [X]$ es una inmersión densa (suprayectiva, de hecho), de modo que que $\mathbb{B}$ es la compleción de $\mathbb{P}$.

Dado $A \in \mathcal{P}^{M[G]}\kappa$, sea $A = \sigma_G$ y, para cada $\alpha < \kappa$, sea $S_\alpha \in \mathbb{P}$ tal que $\|\check{\alpha} \in \sigma\| = [S_\alpha]$. Así,

$$\alpha \in A \leftrightarrow \|\check{\alpha} \in \sigma\| \in G \leftrightarrow S_\alpha \in G \leftrightarrow \kappa \in j(S_\alpha),$$

donde hemos usado que, como I es normal, $\kappa = [d]$, donde d es la identidad en κ. Por lo tanto $A = \{\alpha \in \kappa \mid \kappa \in j(S_\alpha)\} \in \mathrm{Ult}_G(M)$, ya que $S = \{S_\alpha\}_{\alpha<\kappa} \in M$, luego $j(S) \in \mathrm{Ult}_G(M)$ y, para $\alpha < \kappa$, se cumple que $j(S)_\alpha = j(S_\alpha)$, pues $j(\alpha) = \alpha$. Esto prueba que $\mathcal{P}^N\kappa = \mathcal{P}^{M[G]}\kappa$.

Si $\mu < \kappa$ es un cardinal regular^M, entonces, aplicando j, tenemos que μ es un cardinal regular^N, y entonces tiene que ser un cardinal regular$^{M[G]}$, pues si existiera $\nu < \mu$ y $g : \nu \longrightarrow \mu$ cofinal, entonces $g \subset \mu \times \mu$ puede codificarse mediante un subconjunto de κ, que estaría en N y μ sería singular en N, contradicción. Esto implica que $\mathbb{P}$ conserva cardinales y cofinalidades $< \kappa$. ■

Teorema 6.37 *Sea μ un cardinal, $\kappa = \mu^+$ y $\nu < \kappa$, $\nu \neq \mathrm{cf}\,\mu$ un cardinal regular. Si I es un ideal normal κ^+-saturado en κ, entonces*

$$E^\kappa_\nu = \{\lambda < \kappa \mid \mathrm{cf}\,\lambda = \nu\} \in I.$$

DEMOSTRACIÓN: Relativizamos la prueba a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Sea $\mathbb{P} = \mathcal{P}\kappa \setminus I$ y supongamos que $E^\kappa_\nu \in \mathbb{P}$. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $E^\kappa_\nu \in G$ y sea $N = \mathrm{Ult}_G(M)$. Por el teorema anterior todos los cardinales $\leq \mu$ son cardinales en $M[G]$ y como $\mathbb{P}$ cumple la c.c. κ^+, también se conserva κ^+. Por otra parte, como $\{\lambda < \kappa \mid \mathrm{cf}\,\lambda = \nu\} \in G$, se cumple que $\mathrm{cf}^N \kappa = \mathrm{cf}[d] = j_G(\nu) = \nu$, pero entonces $\mathrm{cf}^{M[G]}\,\kappa = \nu$, pues si $f \in M[G]$ fuera una aplicación $f : \xi \longrightarrow \kappa$ cofinal con $\xi < \nu$, podríamos codificarla mediante un subconjunto de κ, luego estaría en N (de nuevo por el teorema anterior), y tendríamos una contradicción.

Así pues, en $M[G]$ se cumple que $\mathrm{cf}\,\kappa = \nu$, lo cual implica que κ se colapsa, porque si se conservara sería $\kappa = \mu^+$ y sería regular. Así pues, $|\kappa| = \mu$, luego tenemos que $\mathrm{cf}\,\kappa = \nu \neq \mathrm{cf}\,|\kappa|$. Según el teorema 6.35 tendría que colapsarse κ^+, cuando no es así, contradicción. ■

Ahora ya podemos demostrar el teorema 6.30 para cardinales sucesores: si $\kappa = \mu^+ \geq \aleph_2$ es un cardinal regular, entonces el ideal I_{NE} en κ no es κ^+-saturado. En efecto, podemos tomar $\nu < \kappa$ regular, $\nu \neq \mathrm{cf}\,\mu$. Si I_{NE} fuera κ^+-saturado el teorema anterior nos da que $E^\kappa_\nu \in I_{\mathrm{NE}}$, en contradicción con el teorema [TC 6.13], que afirma precisamente que dicho conjunto es estacionario.

Para el caso de cardinales límite necesitamos otras técnicas que, de hecho, cubren el caso de todo cardinal regular $\kappa \geq \aleph_3$.

Teorema 6.38 *Si κ y $\mu > \aleph_0$ son cardinales regulares, $\mu^+ < \kappa$ y*

$$E^\kappa_\mu = \{\lambda < \kappa \mid \operatorname{cf} \lambda = \mu\},$$

entonces no existe ninguna sucesión $\{c_\lambda\}_{\lambda \in E^\kappa_\mu}$ tal que $c_\lambda \subset \lambda$ sea c.n.a. y que cumpla las dos propiedades siguientes:

- *Si $\lambda \in E^\kappa_\mu$ es un límite de ordinales de cofinalidad mayor que μ, entonces todos los elementos de c_λ con un inmediato anterior en c_λ tienen también cofinalidad mayor que μ.*
- *Para cada $C \subset \kappa$ c.n.a., existe un c.n.a. C' tal que*

$$C' \cap E^\kappa_\mu \subset P(C) = \{\lambda \in E^\kappa_\mu \mid \bigvee \beta < \lambda\ c_\lambda \setminus \beta \subset C\}.$$

Demostración: Supongamos que existe tal sucesión y sea C_0 el conjunto de los $\lambda \in \kappa$ que son límite de ordinales de cofinalidad mayor que μ. Claramente C_0 es c.n.a. en κ. Definimos recurrentemente una sucesión $\{C_n\}_{n\in\omega}$ de c.n.a.s en κ. Supuesto definido C_n, sea C'_n el conjunto de los $\lambda \in C_n$ tales que $C_n \cap \lambda$ no está acotado en λ, que también es c.n.a. Por hipótesis existe un c.n.a. C''_n tal que $C''_n \cap E^\kappa_\mu \subset P(C'_n)$. Definimos $C_{n+1} = C'_n \cap C''_n$. Finalmente, definimos $C = \bigcap\limits_{n\in\omega} C_n$, que también es c.n.a.

Como E^κ_μ es estacionario (por [TC 6.13]), tenemos que $C \cap E^\kappa_\mu \neq \varnothing$, y podemos definir $\delta = \min(C \cap E^\kappa_\mu)$.

Para cada $n \in \omega$, como $\delta \in C_{n+1} \cap E^\kappa_\mu \subset P(C'_n)$, existe un $\beta_n < \delta$ tal que $c_\delta \setminus \beta_n \subset C'_n \subset C_{n+1}$. Como $\operatorname{cf} \delta = \mu > \aleph_0$, se cumple que $\beta = \sup \beta_n < \delta$ y $c_\delta \setminus \beta \subset C$.

Como $\delta \in C_0$, tenemos que δ es límite de ordinales de cofinalidad mayor que μ, luego si tomamos $\lambda \in c_\delta \setminus \beta$ que sea el siguiente de otro elemento de c_δ, tenemos por hipótesis que $\operatorname{cf} \lambda > \mu$.

Por otra parte $\lambda \in C'_n$ para todo $n \in \omega$, luego $C_n \cap \lambda$ no está acotado en λ, y es, de hecho, un c.n.a. en λ. Como $\operatorname{cf} \lambda > \aleph_0$, la intersección $C \cap \lambda$ también es c.n.a. en λ. Pero $\operatorname{cf} \lambda > \mu$, luego [TC 6.13] nos da un $\gamma \in C \cap \lambda$ de cofinalidad μ. Así $\gamma < \lambda < \delta$ y $\gamma \in C \cap E^\kappa_\mu$, en contradicción con la minimalidad de δ. ■

Ahora probamos que sí que existen sucesiones que cumplan unas hipótesis ligeramente más débiles que las del teorema anterior:

Definición 6.39 Sean $\kappa \geq \aleph_3$ y μ cardinales regulares, $\mu^+ < \kappa$ y sea $E \subset E^\kappa_\mu$ un conjunto estacionario en κ. Una sucesión $\Diamond'_{\text{c.n.a.}}(E)$ es una sucesión $\{c_\lambda\}_{\lambda\in E}$ que cumpla las condiciones siguientes:

a) $E_\lambda \subset \lambda$ es cofinal y $|c_\lambda| = \mu$.

b) Si $\lambda \in E$ es límite de ordinales de cofinalidad mayor que μ (y mayor que $\aleph_1$ si $\mu = \aleph_0$) entonces todos los elementos de c_λ con un inmediato anterior en c_λ tienen también cofinalidad mayor que μ (y mayor que $\aleph_1$ si $\mu = \aleph_0$).

c) Para cada $C \subset \kappa$ c.n.a., el conjunto

$$P(C) = \{\lambda \in E \mid \bigvee \beta < \lambda \; c_\lambda \setminus \beta \subset C\}$$

es estacionario en κ.

Llamaremos $\diamondsuit'_{\text{c.n.a.}}(E)$ a la fórmula que afirma la existencia de una sucesión en estas condiciones.

Observemos que si existe una sucesión $\diamondsuit'_{\text{c.n.a.}}(E)$ existe una en la que cada c_λ es c.n.a. en λ, pues c_λ se puede cambiar por su clausura respecto de la topología de orden, su cardinal sigue siendo μ (a lo sumo se añade un nuevo punto por cada ordinal límite en el ordinal de c_λ) y los ordinales con un inmediato anterior siguen siendo los mismos, luego no deja de cumplirse b). También es claro que c) se sigue cumpliendo. Así pues, $\diamondsuit'_{\text{c.n.a.}}(E^\kappa_\mu)$ afirma que existe justo lo que el teorema anterior afirma que no existe salvo que cambiamos el "contiene una intersección $C \cap E^\kappa_\mu$" por "es estacionario".

Teorema 6.40 *Sean $\kappa \geq \aleph_3$ y μ cardinales regulares, $\mu^+ < \kappa$ y sea $E \subset E^\kappa_\mu$ un conjunto estacionario en κ formado por ordinales límite. Entonces se cumple $\diamondsuit'_{\text{c.n.a.}}(E)$.*

Demostración: Vamos a suponer $\mu^+ \geq \aleph_2$. Si no es así, la prueba vale igual cambiando μ^+ por μ^{++}, pero de todos modos el caso $\mu \geq \aleph_1$ nos basta para completar la prueba de 6.30. Vamos a probar, más aún, que existe una sucesión $\diamondsuit'_{\text{c.n.a.}}(E)$ tal que $(*)$ para todo $C \subset \kappa$ c.n.a., el conjunto $\{\lambda \in E \mid c_\lambda \subset C\}$ es estacionario.

Sea $C^* \subset \kappa$ el c.n.a. formado por todos los ordinales que son límites de ordinales de cofinalidad $> \mu$, sea $C \subset \kappa$ un c.n.a. cuyos elementos con inmediato anterior en C tengan cofinalidad mayor que μ y sea $\lambda \in E^\kappa_\mu \cap C^*$.

Vamos a definir un árbol $T_\lambda(C)$ formado por sucesiones decrecientes en λ. Así, $\mathrm{Niv}_0(T_\lambda(C)) = \{\varnothing\}$. Tomamos como $\mathrm{Niv}_1(T_\lambda(C))$ (las sucesiones de longitud 1 con valores en) un c.n.a. $N \subset \lambda$ de ordinal μ cuyos puntos sucesores sean ordinales de cofinalidad mayor que μ. Si $(\eta) \in \mathrm{Niv}_1(T_\lambda(C))$, definimos como sigue sus extensiones a $\mathrm{Niv}_2(T_\lambda(C))$:

a) Si η no tiene inmediato anterior en N, entonces (η) no tiene extensiones.

   En caso contrario llamamos η^* a su antecesor y $\eta' = \sup(C \cap (\eta + 1))$. Notemos que $\mathrm{cf}\,\eta > \mu$.

b) Si $\eta' \leq \eta^*$ entonces (η) tampoco tiene elementos por encima.

c) Si $\eta^* < \eta' \leq \eta$, distinguimos a su vez varios casos:

   1. Si $\mathrm{cf}\,\eta' > \mu$, entonces el único elemento sobre (η) es (η, η') y éste a su vez no tiene sucesores.

2. Si $\operatorname{cf} \eta' \leq \mu$, entonces $\eta' < \eta$ y no tiene inmediato anterior en C, luego podemos tomar un c.n.a. en $\eta' \setminus \eta^*$ de ordinal $\operatorname{cf} \eta'$ cuyos elementos sin inmediato anterior tengan cofinalidad mayor que μ. Las extensiones de (η) se definen en este caso como las de la forma (η, δ), con δ en dicho c.n.a.

Esto define $\operatorname{Niv}_2(T_\lambda(C))$, y los elementos de $\operatorname{Niv}_3(T_\lambda(C))$ por encima de los determinados por el caso c) 2. se determinan con el mismo criterio. Notemos que los elementos de $T_\lambda(C)$ son sucesiones estrictamente decrecientes salvo quizá en su último término, si éste corresponde al caso c) 1. Por lo tanto, se trata de un árbol bien fundado, claramente de cardinal $\leq \mu$.

Ahora definimos una sucesión $\{C_\delta\}_{\delta<\mu^+}$ de c.n.a.s en κ. Como C_0 tomamos cualquier c.n.a. cuyos puntos con inmediato anterior estén tengan cofinalidad mayor que μ. Para cada $\lambda \in E \cap C^*$, sea $T_\lambda^0 = T_\lambda(C_0)$ y E_λ^0 el conjunto de todos los puntos de cualquiera de los niveles de T_λ^0 que están además en C_0 y tienen cofinalidad mayor que μ.

Sea $C^{**} = \{\lambda < \kappa \mid C_0 \cap \lambda \text{ no está acotado en } \lambda\}$ el c.n.a. formado por los límites de C_0. Vamos a probar que si $\lambda \in E \cap C^* \cap C^{**}$ entonces E_λ^0 no está acotado en λ.

Como $\lambda \in C^{**}$, tenemos que $C_0 \cap N$ es c.n.a. en λ (aquí usamos que λ tiene cofinalidad $\mu > \aleph_0$). Si la intersección contiene un conjunto no acotado de ordinales con inmediato anterior en C_0 o en N, entonces todos ellos tienen cofinalidad mayor que μ y están en E_λ^0. Supongamos, pues, que a partir de un cierto ordinal $\delta_0 < \lambda$, todos los elementos de la intersección son límites en C_0 y en N.

Dado cualquier $\delta_0 < \delta < \lambda$, tomamos $\eta' \in C_0$ con inmediato anterior en C_0 tal que $\delta < \eta'$. Llamamos η al mínimo elemento de N mayor que η'. No puede ser un límite en N, luego tiene un inmediato anterior $\eta^* < \eta' < \eta$ (no pueden darse las igualdades porque $\eta' \notin N$). Entonces η está en el caso c) de la definición de T_λ^0 y, o bien $\eta \in E_\lambda^0$ (si se da el caso 1.), o bien existe un $\delta < \eta'' < \eta'$ con $\eta'' \in \operatorname{Niv}_2(T_\lambda^0)$ y con $\operatorname{cf} \eta'' > \mu$, luego $\eta'' \in E_\lambda^0$.

Si $\lambda \in E \setminus (C^* \cap C^{**})$ definimos (o redefinimos) E_λ^0 como un subconjunto de λ no acotado y de ordinal μ cuyos elementos tengan todos cofinalidad mayor que μ si es que $\lambda \in C^*$.

En particular tenemos un c.n.a. $C_0' = C^* \cap C^{**}$ tal que si $\lambda \in E \cap C_0'$ se cumple que E_λ^0 no está acotado en λ y consta de los ordinales de C_0 que aparecen en algún nivel de T_λ^0 y tienen cofinalidad mayor que μ.

Por hipótesis $\{E_\lambda^0\}_{\lambda\in E}$ no es una sucesión $\diamondsuit'_{\text{c.n.a.}}(E)$. Como el árbol T_λ^0 tiene cardinal $\leq \mu$, es claro que la sucesión cumple al propiedad a) de la definición, y por construcción también cumple la propiedad b). Por lo tanto, tiene que fallar la c) (en su versión fuerte $(*)$). Esto significa que existe un c.n.a. C_1 tal que $\{\lambda \in E \mid E_\lambda^0 \subset C_1\}$ no es estacionario. Pasando a un subconjunto, podemos exigir que $C_1 \subset C_0$ y que los puntos con inmediato anterior en C_1 tengan cofinalidad mayor que μ.

Esto hace que C_1 esté en las mismas condiciones que C_0, luego la misma construcción precedente nos da los árboles $\{T^1_\lambda\}_{\lambda\in E\cap C^*}$ y la sucesión $\{E^1_\lambda\}_{\lambda\in E}$.

Procediendo de este modo podemos construir una sucesión $\{C_\alpha\}_{\alpha<\mu^+}$ de c.n.a.s en κ. En los límites tomamos como C_λ un c.n.a. contenido en $\bigcap\limits_{\delta<\lambda} C_\delta$ cuyos sucesores tengan cofinalidad mayor que μ.

Por último, tomamos $C=\bigcap\limits_{\alpha<\mu^+} C_\alpha$, que es c.n.a., pues $\mu^+<\kappa$. En el proceso de construcción hemos visto que existe un c.n.a. $C'_\alpha\subset\kappa$ tal que si $\lambda\in E\cap C'_\alpha$ entonces E^α_λ no está acotado en λ y consta de los ordinales de C_α que aparecen en algún nivel de T^α_λ y tienen cofinalidad mayor que μ y no está acotado en λ. Sean $C'=\bigcap\limits_{\alpha<\mu^+} C'_\alpha$ y $E'=E\cap C'$. Podemos exigir además que todos los elementos de E' sean mayores que μ^+.

Vamos a probar que si $\lambda\in E'$ la sucesión de árboles $\{T^\alpha_\lambda\}_{\alpha<\mu^+}$ se estabiliza, es decir, que son todos el mismo a partir de un cierto α_λ. Supongamos lo contrario. Notemos que $\mathrm{Niv}_1(T^\alpha_\lambda)$ depende únicamente de λ, y podemos suponer (por construcción) que es el mismo conjunto N para todos los árboles. Para cada $\eta\in N$, llamamos $(T^\alpha_\lambda)_\eta$ al árbol formado por las extensiones de (η). Si todas las sucesiones $\{(T^\alpha_\lambda)_\eta\}_{\alpha<\mu^+}$ se estabilizan a partir de un $\alpha_{\lambda,\eta}<\mu^+$, como $|N|\leq\mu$, resultaría que la sucesión $\{T^\alpha_\lambda\}_{\alpha<\mu^+}$ se estabilizaría a partir de $\sup_\eta \alpha_{\lambda,\eta}<\mu^+$.

Así pues, podemos tomar $\eta_0\in N$ tal que la sucesión $\{(T^\alpha_\lambda)_{\eta_0}\}_{\alpha<\mu^+}$ no se estabiliza. Si η_0 no tuviera anterior en N, todos los términos de la sucesión serían el árbol de altura 1 con (η_0) como único elemento del nivel 1, luego η_0 tiene que tener un inmediato anterior η_0^* en N. Sea ahora $\eta'_{0\alpha}=\sup(C_\alpha\cap(\eta_0+1))$. Como la sucesión C_α es decreciente, la sucesión $\{\eta'_{0\alpha}\}_{\alpha<\mu^+}$ es una sucesión decreciente de ordinales, luego es finalmente constante.

Si $\eta'_{0\alpha}\leq\eta^*$ para algún α, lo mismo valdría para todos los siguientes, y de nuevo la sucesión $\{(T^\alpha_\lambda)_{\eta_0}\}_{\alpha<\mu^+}$ sería trivialmente constante, por construcción. Así pues, $\eta_0^*<\eta'_{0\alpha}\leq\eta_0$ para todo α, y existe un $\alpha_1<\mu^+$ tal que si $\alpha\geq\alpha_1$ entonces $\eta_{0\alpha}=\eta_1$, para cierto ordinal $\eta_0^*<\eta_1\leq\eta_0$.

Ahora observamos que, para todo $\alpha\geq\alpha_1$, el conjunto N_1 de los ordinales que prolongan a (η_1) en todos los árboles T^α_λ es el mismo.[7] Nuevamente podemos elegir un $\eta_2\in N_1$ tal que la sucesión de árboles no se estabilice por encima de (η_0,η_1), y procediendo del mismo modo obtenemos una sucesión estrictamente decreciente de ordinales.

Así pues, existe un $\alpha_\lambda<\mu^+$ a partir del cual se estabiliza la sucesión de árboles. La aplicación $\lambda\mapsto\alpha_\lambda$ es regresiva sobre E', luego existe un conjunto estacionario $E^*\subset E'\subset\kappa$ sobre el que todos los α_λ coinciden con un mismo $\alpha^*<\mu^+$.

[7]En la definición de $T_\lambda(C)$ podemos especificar que cada vez que elegimos un conjunto N en las condiciones requeridas (un c.n.a. en $\eta'\setminus\eta^*$ de ordinal $\operatorname{cf}\eta'$ cuyos elementos sin inmediato anterior tengan cofinalidad mayor que μ) lo hacemos mediante una misma función de elección definida en un V_λ suficientemente grande, de modo que, aunque partamos de dos conjuntos C distintos, si los ordinales η^* y η' son los mismos para ambos, entonces el conjunto N elegido sea también el mismo.

Así, si $\lambda \in E^*$ y $\alpha^* \leq \alpha < \mu^+$, tenemos que $E_\lambda^\alpha = N_\lambda \cap C_\alpha$, donde N_λ es el conjunto de los ordinales de cofinalidad mayor que μ que aparecen en los distintos niveles del árbol T_λ^α (que no depende de α), luego la sucesión $\{E_\lambda^\alpha\}_{\alpha^*\leq\alpha<\mu^+}$ es decreciente y está formada por subconjuntos no acotados en λ de cardinal μ (porque los árboles T_λ^α tienen cardinal $\leq \mu$ y $\operatorname{cf}\lambda = \mu$).

Es claro entonces que la sucesión tiene que estabilizarse o, de lo contrario, $|E_\lambda^{\alpha^*}| \geq \mu^+$. Nuevamente, existe un $\alpha'_\lambda < \mu^+$ tal que E_λ^α es constante para todo $\alpha'_\lambda < \alpha < \mu^+$, y como $\lambda \mapsto \alpha'_\lambda$ es también regresiva, restringiendo E^* y aumentando α^* podemos suponer que $E_\lambda^{\alpha^*+1} = E_\lambda^{\alpha^*}$ para todo $\lambda \in E^*$. En particular, $E_\lambda^{\alpha^*} \subset C_{\alpha^*+1}$, y por lo tanto $E^* \subset \{\lambda \in E \mid E_\lambda^{\alpha^*} \subset C_{\alpha^*+1}\}$, cuando C_{α^*+1} se ha escogido precisamente con la condición de que el conjunto de la derecha no sea estacionario, contradicción. ■

Demostración (de 6.30): Sea κ un cardinal regular, que por la versión de 6.30 que ya hemos probado (para cardinales sucesores) podemos suponer $\kappa \geq \aleph_3$, y sea $\mu \geq \aleph_1$ un cardinal regular tal que $\mu^+ < \kappa$. Supongamos que el ideal I_{NE} en κ es κ^+-saturado y vamos a probar lo siguiente:

> $(*)$ *Para todo $E \subset E_\mu^\kappa$ estacionario, existe $S \subset E$ estacionario y una sucesión $\diamondsuit'_{\text{c.n.a.}}(S)$, digamos $\{c_\lambda\}_{\lambda\in S}$ tal que, para todo conjunto C c.n.a. en κ, el conjunto estacionario*
>
> $$P(C) = \{\lambda \in S \mid \bigvee \alpha < \lambda \ c_\lambda \setminus \alpha \subset C\}$$
>
> *cumple además que $S \setminus P(C)$ no es estacionario.*

En efecto, por el teorema anterior existe una sucesión $\{c_\lambda\}_{\lambda\in E}$ que cumple $\diamondsuit'_{\text{c.n.a.}}(E)$. En particular, para cada C c.n.a. en κ tenemos que $P(C) \subset E$ es estacionario. Vamos a probar que existe $S \subset E$ estacionario tal que para todo c.n.a. C el conjunto $S \setminus P(C)$ no es estacionario. Admitiendo esto, la restricción $\{c_\lambda\}_{\lambda\in S}$ cumplirá claramente lo requerido.

En caso contrario, para cada $S \subset E$ estacionario existe un c.n.a. C tal que $S \setminus P(C) \subset S$ es estacionario. Como $\mathcal{P}\kappa/I_{\mathrm{NE}}$ cumple la c.c. κ^+, una anticadena maximal de clases de la forma $[S \setminus P(C)]$ en las condiciones indicadas tiene que tener cardinal $\leq \kappa$. Sea, pues $\{(S_\delta, C_\delta)\}_{\delta<\mu}$ una sucesión de pares formada por conjuntos estacionarios $S_\delta \subset S$ y c.n.a.s $C_\delta \subset \kappa$ tales que $S \setminus P(C_\delta)$ sea estacionario y $W = \{[S \setminus P(C_\delta)] \mid \delta < \nu\}$ sea una anticadena maximal en el cociente (podemos tomar la sucesión de cardinal μ si admitimos que pueda haber pares repetidos).

Sea $C = \mathop{\triangle}\limits_{\delta<\kappa} C_\delta$. Así, para cada $\delta < \kappa$, C_δ contiene todos los elementos de C mayores que δ, luego $P(C_\delta)$ contiene todos los elementos de $P(C)$ mayores que δ, luego $[S \setminus P(C_\delta)] \wedge [P(C)] \leq [\delta] = \mathbb{O}$. Como $S = P(C)$ es estacionario, existe un c.n.a. C' tal que $S \setminus P(C')$ es estacionario y $[S \setminus P(C')]$ es incompatible con todas las clases de W, en contradicción con la maximalidad de la anticadena.

Sea ahora $\{S_\delta\}_{\delta<\kappa}$ tal que $\{[S_\delta] \mid \delta < \kappa\}$ sea una anticadena maximal en el conjunto de clases en $\mathcal{P}\kappa/I_{\mathrm{NE}}$ por debajo de $[E_\mu^\kappa]$ con la propiedad de que para cada $\delta < \kappa$ existe una sucesión $\{c_\lambda^\delta\}_{\lambda\in S_\delta}$ que cumple $(*)$.

Como el ideal I_{NE} es κ-completo, quitando a cada S_δ un conjunto no estacionario, podemos suponer que los S_δ son subconjuntos de E^κ_μ disjuntos dos a dos. Notemos que si $\{c^\delta_\lambda\}_{\lambda\in S_\delta}$ cumple $\diamondsuit'_{\mathrm{c.n.a.}}(S_\delta)$ y S^* no es estacionario, entonces $\{c^\delta_\lambda\}_{\lambda\in S_\delta\setminus S^*}$ cumple $\diamondsuit'_{\mathrm{c.n.a.}}(S_\delta\setminus S^*)$ y

$$(S_\delta\setminus S^*)\setminus\{\lambda\in(S_\delta\setminus S^*)\mid \bigvee\alpha<\lambda\ c^\delta_\lambda\subset C\}\subset$$

$$S_\delta\setminus\{\lambda\in S_\delta\mid \bigvee\alpha<\lambda\ c^\delta_\lambda\subset C\},$$

luego si el segundo conjunto no es estacionario, tampoco lo es el primero.

Siendo disjuntos los conjuntos S_δ, no es necesario el superíndice, y podemos escribir $\{c_\lambda\}_{\lambda\in S_\delta}$. Según hemos observado tras la definición 6.39, podemos suponer que cada c_λ es c.n.a. en λ. (Notemos que c_λ cumple $c_\lambda\subset C$ si y sólo si lo cumple su clausura en λ.)

Observamos ahora que $E=E^\kappa_\lambda\setminus\bigcup\limits_{\delta<\kappa}S_\delta$ no es estacionario, porque si lo fuera, por $(*)$ contendría un $S\subset E$ que podría añadirse a la anticadena inicial en contradicción con su maximalidad.

Por lo tanto podemos cambiar S_0 por $S_0\cup E$ y definir c_λ para $\lambda\in E$ como cualquier c.n.a. en λ con la condición de que si λ es límite de ordinales de cofinalidad mayor que μ, todos los elementos de c_λ con inmediato anterior en c_λ tienen también cofinalidad mayor que μ. Así se sigue cumpliendo todo lo requerido pero, además $E^\kappa_\mu=\bigcup\limits_{\delta<\mu}S_\delta$.

Ahora tenemos definida una sucesión $\{c_\lambda\}_{\lambda\in E^\kappa_\mu}$. Basta probar que para cada C c.n.a. en κ existe otro c.n.a. C' tal que

$$C'\cap E^\kappa_\mu\subset\{\lambda\in E^\kappa_\mu\mid \bigvee\beta<\lambda\ c_\lambda\setminus\beta\subset C\},$$

pues entonces $\{c_\lambda\}_{\lambda\in E^\kappa_\mu}$ cumplirá justo lo que el teorema 6.38 afirma que no puede cumplir.

En caso contrario el conjunto $E^*=E^\kappa_\mu\setminus\{\lambda\in E^\kappa_\mu\mid\bigvee\beta<\lambda\ c_\lambda\setminus\beta\subset C\}$ es estacionario, luego contiene un subconjunto estacionario S' que cumple $(*)$, y además $S'\cap S_\delta\subset S_\delta\setminus P(C)$ no es estacionario, luego $[S']\wedge[S_\delta]=\mathbb{O}$ para todo δ, luego $[S']$ puede añadirse a la familia de partida en contradicción con su maximalidad. ■

Nota En general, si I es un ideal en κ y $A\subset\kappa\setminus I$, se llama

$$I|_A=\{X\in\mathcal{P}\kappa\mid X\cap A\in I\},$$

que es también un ideal en κ. Es claro que si I es κ-completo y no principal también lo es $I|_A$. Es fácil ver que el argumento que hemos empleado para demostrar el teorema 6.30 prueba en realidad que si $\kappa\geq\aleph_3$ y $\aleph_1\leq\mu<\kappa$ son cardinales regulares, entonces el ideal $I_{\mathrm{NE}}|_{E^\kappa_\mu}$ no es κ^+-saturado. El argumento que hemos dado no vale para el caso $\mu=\aleph_0$, pero se puede refinar para incluirlo. ■

6.4 Cardinales $\mathbb{R}$-medibles

En [TC 7.70] definimos un cardinal $\mathbb{R}$-*medible* como un cardinal no numerable κ tal que existe una medida unitaria κ-aditiva $\mu : \mathcal{P}\kappa \longrightarrow [0,1]$ respecto a la que los puntos tienen medida nula (lo que llamamos una medida fuerte en κ) y en [TC 7.76] probamos que la medida de Lebesgue se puede extender a una medida en $\mathcal{P}\mathbb{R}$ si y sólo si existe un cardinal $\mathbb{R}$-medible $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$. Además, en [TC 7.74] probamos que los cardinales $\mathbb{R}$-medibles $> 2^{\aleph_0}$ no son sino los cardinales medibles.

Ahora podemos observar que si μ es una medida fuerte en un cardinal $\mathbb{R}$-medible κ, entonces el ideal I_μ de los conjuntos nulos respecto de μ es κ-completo, $\aleph_1$-saturado y no principal, luego es una medida débil en κ, y el teorema 6.16 prueba que la consistencia de que exista un cardinal débilmente medible implica la de que exista un cardinal medible. Recíprocamente, ahora vamos a probar que si es consistente que exista un cardinal medible, también lo es que exista un cardinal $\mathbb{R}$-medible $\leq 2^{\aleph_0}$. Nos basamos en el teorema siguiente:

Teorema 6.41 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC. *En M, sea κ un cardinal medible y U una medida en κ tal que $(V = L[U])^M$. Sea $(\mathbb{B}, m)$ un álgebra medida completa. Si G es un ultrafiltro $\mathbb{B}$-genérico sobre M, entonces κ es un cardinal $\mathbb{R}$-medible en $M[G]$.*

Demostración: Todo lo que sigue ha de entenderse relativizado a M. Para cada $a \in \mathbb{B}$, $a \neq \mathbb{O}$, cada $\tau \in M^{\mathbb{B}}$ tal que $a \Vdash \tau \subset \check{\kappa}$ y cada $\alpha < \kappa$, sea

$$f_a(\tau, \alpha) = \frac{m(a \wedge \|\check{\alpha} \in \tau\|)}{m(a)} \in [0,1].$$

Como $2^{\aleph_0} < \kappa$, existe un único número real $0 \leq r \leq 1$ tal que $f_a(\tau, \alpha) = r$ para casi todo α (módulo U). Definimos

$$\mu_a(\tau) = r \mid \{\alpha \in \kappa \mid f_a(\tau, \alpha) = r\} \in U.$$

1) *Si $a \Vdash \sigma \subset \tau \subset \check{\kappa}$, entonces $\mu_a(\sigma) \leq \mu_a(\tau)$.*

En efecto, $a \wedge \|\check{\alpha} \in \sigma\| \leq a \wedge \|\check{\alpha} \in \tau\|$, luego $f_a(\sigma, \alpha) \leq f_a(\tau, \alpha)$. Claramente,

$$\{\alpha \in \kappa \mid \mu_a(\sigma) = f_a(\sigma, \alpha) \wedge \mu_a(\tau) = f_a(\tau, \alpha)\} \in U,$$

luego existe un $\alpha < \kappa$ tal que

$$\mu_a(\sigma) = f_a(\sigma, \alpha) \leq f_a(\tau, \alpha) = \mu_a(\tau).$$

2) *En particular, si $a \Vdash \sigma = \tau \subset \check{\kappa}$, entonces $\mu_a(\sigma) = \mu_a(\tau)$.*

3) *Si $x \subset \kappa$ (suponiendo $x \in M$) entonces*

$$\mu_a(\check{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in U, \\ 0 & \text{si } x \notin U. \end{cases}$$

En efecto, $\|\check{\alpha} \in \check{x}\| = \begin{cases} \mathbb{1} & \text{si } \alpha \in x, \\ \mathbb{0} & \text{si } \alpha \notin x, \end{cases}$ luego $f_a(\check{x}, \alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \in x, \\ 0 & \text{si } \alpha \notin x. \end{cases}$

4) *Sea $\gamma < \kappa$ y $\{\sigma_\delta\}_{\delta<\gamma}$ ($\in M$) tal que $a \Vdash \sigma_\delta \subset \check{\kappa}$ y, para todo $\delta < \epsilon < \gamma$, $a \Vdash \sigma_\delta \cap \sigma_\epsilon = \varnothing$. Sea $\tau = \{(p.o.(\check{\delta}, \sigma_\delta), \mathbb{1}) \mid \delta \in \gamma\}$ y sea $\sigma \in M^{\mathbb{B}}$ tal que $a \Vdash \sigma = \bigcup\limits_{\delta<\check{\gamma}} \tau(\delta)$. Entonces $\mu_a(\sigma) = \sum\limits_{\delta<\gamma} \mu_a(\sigma_\delta)$.*

En efecto, si $\delta < \epsilon < \gamma$ tenemos que

$$a \wedge \|\check{\alpha} \in \sigma_\delta\| \wedge a \wedge \|\check{\alpha} \in \sigma_\epsilon\| = a \wedge \|\check{\alpha} \in \sigma_\delta \cap \sigma_\epsilon\| \leq \|\check{\alpha} \in \varnothing\| = \mathbb{0}.$$

Por lo tanto $\{a \wedge \|\check{\alpha} \in \sigma_\delta\|\}_{\delta<\gamma}$ es una anticadena en $\mathbb{B}$ (quizá con términos nulos). Por otra parte

$$a \wedge \|\check{\alpha} \in \sigma\| = a \wedge \|\bigvee \delta < \check{\gamma} \;\; \check{\alpha} \in \tau(\delta)\|$$
$$= a \wedge \bigvee_{\delta<\gamma} \|\check{\alpha} \in \tau(\check{\delta})\| = \bigvee_{\delta<\gamma} a \wedge \|\check{\alpha} \in \sigma_\delta\|.$$

Así pues,

$$f_a(\sigma, \alpha) = \sum_{\delta<\gamma} \frac{m(a \wedge \|\check{\alpha} \in \sigma_\delta\|)}{m(a)} = \sum_{\delta<\gamma} f_a(\sigma_\delta, \alpha).$$

Sea $X_\delta = \{\alpha < \kappa \mid f_a(\sigma_\delta, \alpha) = \mu_a(\sigma_\delta)\} \in U$. Sea $X = \bigcap\limits_{\delta<\gamma} X_\delta \in U$. Si $\alpha \in X$, entonces $f_a(\sigma, \alpha) = \sum\limits_{\delta<\gamma} \mu_a(\sigma_\delta)$, luego $\mu_a(\sigma) = \sum\limits_{\delta<\gamma} \mu_a(\sigma_\delta)$.

5) *Sea $r \in [0, 1]$ ($r \in M$). Si $D = \{c \in \mathbb{B} \mid \mathbb{0} < c \leq a \wedge \mu_c(\sigma) < r\}$ es denso bajo a, entonces $\mu_a(\sigma) < r$. Lo mismo vale para las desigualdades $> r$, $\leq r$ y $\geq r$.*

En efecto, sea $\{a_n\}_{n\in\omega}$ una anticadena maximal en D (podría ser finita, pero el razonamiento que sigue vale igual). Claramente $a = \bigvee\limits_{n\in\omega} a_n$.

Como $\mu_{a_n}(\sigma) < r$, para casi todo $\alpha < \kappa$ se cumple

$$m(a_n \wedge \|\check{\alpha} \in \sigma\|) < r\, m(a_n).$$

Por la completitud de U, esto se cumple para todo $n < \omega$ para casi todo α. Así pues, para casi todo $\alpha < \kappa$,

$$m(a \wedge \|\check{\alpha} \in \sigma\|) = m\Big(\bigvee_{n\in\omega} (a_n \wedge \|\check{\alpha} \in \sigma\|)\Big)$$
$$= \sum_{n\in\omega} m(a_n \wedge \|\check{\alpha} \in \sigma\|) < \sum_{n\in\omega} r\, m(a_n) = r\, m(a).$$

Por consiguiente, $f(\sigma, \alpha) < r$ para casi todo α, luego $\mu_a(\sigma) < r$.

- Si $b \in \mathbb{B}$, $b \neq \mathbb{0}$, $b \Vdash \sigma \subset \check{\kappa}$, definimos

$$\mu_b^*(\sigma) = \inf_{a\leq b} \mu_a(\sigma).$$

6) *Las propiedades siguientes son obvias:*

a) *Si* $b \Vdash \sigma \subset \tau \subset \check{\kappa}$ *entonces* $\mu_b^*(\sigma) \leq \mu_b^*(\tau)$,

b) *Si* $b_1 \leq b_2$, *entonces* $\mu_{b_2}^*(\sigma) \leq \mu_{b_1}^*(\sigma)$,

c) *Si* $x \subset \kappa$ *entonces* $\mu_b^*(\check{x}) = \begin{cases} 1 & si\ x \in U, \\ 0 & si\ x \notin U. \end{cases}$

d) *Sea* $\gamma < \kappa$ *y* $\{\sigma_\delta\}_{\delta<\gamma}$ $(\in M)$ *tal que* $b \Vdash \sigma_\delta \subset \check{\kappa}$ *y, para todo* $\delta < \epsilon < \gamma$, $b \Vdash \sigma_\delta \cap \sigma_\epsilon = \varnothing$. *Sea* $\tau = \{(p.o.(\check{\delta}, \sigma_\delta), \mathbb{1}) \mid \delta \in \gamma\}$ *y sea* $\sigma \in M^{\mathbb{B}}$ *tal que* $b \Vdash \sigma = \bigcup_{\delta<\check{\gamma}} \tau(\delta)$. *Entonces* $\mu_b^*(\sigma) \geq \sum_{\delta<\gamma} \mu_b^*(\sigma_\delta)$.

• Trabajamos ahora en $M[G]$. Notemos que, como $(V = L[U])^M$, se cumple que $M = L[U]^{M[G]}$, luego $\mu_a(\sigma)$ y $\mu_b^*(\sigma)$ son definibles en $M[G]$ (relativizando las definiciones a $L[U]$).

Sea $\mu : \mathcal{P}\kappa \longrightarrow [0, 1]$ dada por

$$\mu(A) = \sup_{b\in G} \mu_b^*(\sigma),$$

donde $A = \sigma_G$. (El supremo se toma en realidad sobre los $b \in G$ tales que $b \Vdash \sigma \subset \check{\kappa}$.)

7) *La definición de* μ *no depende de la elección de* σ.

En efecto, supongamos que $A = \sigma_G = \tau_G$. Entonces, si $b \in G$ cumple $b \Vdash \sigma \subset \check{\kappa}$, existe $b' \in G$ tal que $b' \leq b$ y $b' \Vdash \tau \subset \check{\kappa} \wedge \sigma = \tau$. Entonces

$$\mu_b^*(\sigma) \leq \mu_{b'}^*(\sigma) = \mu_{b'}^*(\tau) \leq \mu^{(\tau)}(A),$$

luego $\mu^{(\sigma)}(A) \leq \mu^{(\tau)}(A)$, e igualmente se prueba la desigualdad contraria.

En realidad acabamos de probar algo más general:

8) *Si* $A_1 \subset A_2 \subset \kappa$, *entonces* $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$.

Otro hecho obvio es el siguiente:

9) *Si* $A \in M$, $A \subset \kappa$, *entonces* $\mu(A) = \begin{cases} 1 & si\ A \in U, \\ 0 & si\ A \notin U. \end{cases}$

• Claramente

$$\|\bigvee \mu(\mu : \mathcal{P}\check{\kappa} \longrightarrow [0, 1] \wedge \bigwedge A \in \mathcal{P}\check{\kappa} \bigvee x(x \text{ es un } \check{\mathbb{B}}\text{-nombre} \wedge x \in L[\check{U}]$$

$$\wedge\ A = x_\Gamma \wedge \mu(A) = \sup_{b\in\Gamma} (\mu_b^*(x))^{L[\check{U}]}))\| = \mathbb{1},$$

donde Γ es el nombre canónico de G. Por consiguiente existe $\bar{\mu} \in M^{\mathbb{B}}$ tal que

$$\|\bar{\mu} : \mathcal{P}\check{\kappa} \longrightarrow [0, 1] \wedge \bigwedge A \in \mathcal{P}\check{\kappa} \bigvee x(x \text{ es un } \check{\mathbb{B}}\text{-nombre} \wedge x \in L[\check{U}]$$

$$\wedge\ A = x_\Gamma \wedge \bar{\mu}(A) = \sup_{b\in\Gamma} (\mu_b^*(x))^{L[\check{U}]})\| = \mathbb{1}.$$

En particular $\mu = \bar{\mu}_G$.

10) *Sea $r \in [0,1] \cap M$ y sea $b \in \mathbb{B}$ tal que $b \Vdash \sigma \subset \check{\kappa}$. Entonces*

$$\mu^*_b(\sigma) \geq r \leftrightarrow b \Vdash \bar{\mu}(\sigma) \geq \check{r}.$$

En efecto, si $\mu^*_b(\sigma) \geq r$ y H es un ultrafiltro $\mathbb{B}$-genérico sobre M con $b \in H$, entonces $\bar{\mu}_H(\sigma_H) \geq \mu^*_b(\sigma) \geq r$, luego $b \Vdash \bar{\mu}(\sigma) \geq \check{r}$.

Supongamos ahora que $b \Vdash \bar{\mu}(\sigma) \geq \check{r}$. Hemos de probar que $\mu^*_b(\sigma) \geq r$, para lo cual basta probar que para todo $s < r$ se cumple $\mu^*_b(\sigma) \geq s$. Por la definición de μ^*_b, para ello basta a su vez con demostrar que para todo $c \leq b$ (no nulo) se cumple $\mu_c(\sigma) \geq s$. Por 5) basta probar que el conjunto

$$D = \{d \in \mathbb{B} \mid \mathbb{O} < d \leq c \wedge \mu_d(\sigma) \geq s\}$$

es denso bajo c. En efecto, dado $d \leq c$, tomamos un ultrafiltro $\mathbb{B}$-genérico H tal que $d \in H$. Como $d \Vdash \bar{\mu}(\sigma) \geq \check{r}$, tenemos que

$$\sup_{e \in H} \mu^*_e(\sigma) = \bar{\mu}_H(\sigma_H) \geq r,$$

luego existe un $e \in H$ tal que $e \leq d$ y $\mu_e(\sigma) \geq \mu^*_e(\sigma) \geq s$. Así pues, $e \in D$ y $e \leq d$.

11) *Sean A_1, $A_2 \subset \kappa$ (en $M[G]$), $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Entonces $\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.*

En efecto, sean $A_1 = \sigma_{1G}$, $A_2 = \sigma_{2G}$, $A = \sigma_G$. Sea $c \in G$ tal que

$$c \Vdash \sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \wedge \sigma_1 \cap \sigma_2 = \varnothing \wedge \sigma_1 \subset \check{\kappa} \wedge \sigma_2 \subset \check{\kappa}.$$

Tomemos r_1, $r_2 \in [0,1] \cap M$ tales que $\mu(A_1) \geq r_1$, $\mu(A_2) \geq r_2$. Sea $b \in G$, $b \leq c$ tal que $b \Vdash (\bar{\mu}(\sigma_1) \geq \check{r}_1 \wedge \bar{\mu}(\sigma_2) \geq \check{r}_2)$.

De 10) se sigue que $\mu^*_b(\sigma_1) \geq r_1$, $\mu^*_b(\sigma_2) \geq r_2$ y, por (un caso particular de) 6d), también

$$\mu^*_b(\sigma) \geq \mu^*_b(\sigma_1) + \mu^*_b(\sigma_2) \geq r_1 + r_2.$$

Por consiguiente, $\mu(A) \geq \mu^*_b(\sigma) \geq r_1 + r_2$. Como $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^M \subset M$, al tomar supremos en r_1 y r_2 concluimos que $\mu(A) \geq \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

Supongamos que $\mu(A) > \mu(A_1) + \mu(A_2)$. Existen r_1, $r_2 \in [0,1] \cap M$ tales que $\mu(A_1) < r_1$, $\mu(A_2) < r_2$ y $\mu(A) \geq r_1 + r_2$. Sea $b \in G$, $b \leq c$ tal que

$$b \Vdash (\bar{\mu}(\sigma_1) < \check{r}_1 \wedge \bar{\mu}(\sigma_2) < \check{r}_2 \wedge \bar{\mu}(\sigma) \geq \check{r}_1 + \check{r}_2).$$

Vamos a ver que $\mu_b(\sigma_1) < r_1$. Por 5) basta ver que el conjunto

$$D = \{d \in \mathbb{B} \mid \mathbb{O} < d \leq b \wedge \mu_d(\sigma_1) < r_1\}$$

es denso bajo b. En efecto, si $e \leq b$, existe un $d' \leq e$ tal que $d' \Vdash \bar{\mu}(\sigma_1) < \check{r}_1$, luego por 10) $\mu^*_{d'}(\sigma_1) < r_1$ y por definición de $\mu^*_{d'}$ existe un $d \leq d'$ tal que $\mu_d(\sigma_1) < r_1$. Así, $d \in D$ y $d \leq e$.

Igualmente $\mu_b(\sigma_2) < r_2$, luego por (un caso particular de) 4),

$$\mu_b^*(\sigma) \leq \mu_b(\sigma) = \mu_b(\sigma_1) + \mu_b(\sigma_2) < r_1 + r_2,$$

pero 10) nos da también que $\mu_b^*(\sigma) \geq r_1 + r_2$, contradicción.

12) *Sean $\{A_\delta\}_{\delta<\gamma}$ (en $M[G]$) con $\gamma < \kappa$ subconjuntos de κ disjuntos dos a dos. Sea $A = \bigcup\limits_{\delta<\gamma} A_\delta$. Entonces $\mu(A) = \sum\limits_{\delta<\gamma} \mu(A_\delta)$.*

Por 11) se cumple que $\mu(A) \geq \sum\limits_{\delta<\gamma} \mu(A_\delta)$.

Sea $A_\delta = \sigma_{\delta G}$. Podemos suponer que $\{\sigma_\delta\}_{\delta<\gamma} \in M$. En efecto, tenemos que $\{A_\delta\}_{\delta<\gamma} = \tau_G$. Para cada $\delta < \gamma$, es claro que $\|\bigvee x\ \tau(\check{\delta}) = x\| = \mathbb{1}$, luego existe un $\sigma_\delta \in M^{\mathbb{B}}$ tal que $\|\tau(\check{\delta}) = \sigma_\delta\| = \mathbb{1}$, y la elección puede hacerse en M. Definimos σ según 4), con lo que $A = \sigma_G$. Podemos cambiar τ por el definido en 4). Sea $c \in G$ tal que

$$c \Vdash \bigwedge \delta\epsilon < \check{\gamma}(\delta \neq \epsilon \rightarrow \tau(\delta) \cap \tau(\epsilon) = \varnothing).$$

En particular, si $\delta < \epsilon < \gamma$, se cumple que $c \Vdash \sigma_\delta \cap \sigma_\epsilon = \varnothing$.

Supongamos que $\mu(A) > \sum\limits_{\delta<\gamma} \mu(A_\delta)$. Entonces existe $r \in [0,1] \cap M$ y $b \in G$, $b \leq c$ de modo que

$$b \Vdash \sum_{\delta<\gamma} \bar{\mu}(\tau(\delta)) < \check{r} \leq \bar{\mu}(\sigma).$$

Sea $E \subset \gamma$ finito. Como $\|\bigvee x\ x = \bigcup\limits_{\delta \in \check{E}} \tau(\delta)\| = \mathbb{1}$, existe $\sigma_E \in M^{\mathbb{B}}$ tal que $\|\sigma_E = \bigcup\limits_{\delta\in\check{E}} \tau(\delta)\| = \mathbb{1}$. Claramente entonces $b \Vdash \bar{\mu}(\sigma_E) < \check{r}$ y, como el en apartado anterior, de aquí se sigue que $\mu_b(\sigma_E) < r$. Por 4) $\mu_b(\sigma_E) = \sum\limits_{\delta\in E} \mu_b(\sigma_\delta) < r$. Como esto vale para todo E finito, también por 4) concluimos que

$$\mu_b^*(\sigma) \leq \mu_b(\sigma) = \sum_{\delta<\gamma} \mu_b(\sigma_b) \leq r.$$

Pero por otra parte 10) implica que $\mu_b^*(\sigma) \geq r$, contradicción.

Con esto tenemos probado que (en $M[G]$) μ es una medida unitaria κ-aditiva en κ. Además por 9) es no trivial, luego κ es $\mathbb{R}$-medible$^{M[G]}$. ■

Ahora es fácil convertir a $2^{\aleph_0}$ en un cardinal $\mathbb{R}$-medible:

Teorema 6.42 (Solovay) *Si es consistente la existencia de un cardinal medible, también es consistente que $2^{\aleph_0}$ sea $\mathbb{R}$-medible.*

Demostración: Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC en el que exista un cardinal medible κ con una medida fuerte U tal que $(V = L[U])^{M[G]}$. Consideremos el álgebra de Cantor $\mathbb{B} = \mathbb{B}_\kappa$ que añade κ reales aleatorios. Sea G un ultrafiltro $\mathbb{B}$-genérico sobre M. Entonces $(2^{\aleph_0} = \kappa)^{M[G]}$ y por el teorema anterior κ es $\mathbb{R}$-medible$^{M[G]}$. ■

En particular tenemos que si es consistente que exista un cardinal medible, también lo es que exista una medida $2^{\aleph_0}$-aditiva en $\mathbb{R}$ que extienda a la medida de Lebesgue. Este teorema, junto con las observaciones del principio de esta sección, prueba que la consistencia de que exista un cardinal medible es equivalente a la de que exista un cardinal $\mathbb{R}$-medible $\leq 2^{\aleph_0}$ y a la de que exista un cardinal débilmente medible $\leq 2^{\aleph_0}$.

Esto significa que no es posible demostrar que, si ZFC es consistente, también lo es ZFC + "la medida de Lebesgue puede extenderse a todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$", sino que la consistencia de que dicha extensión sea posible requiere —y, según acabamos de decir, es de hecho equivalente a— la consistencia de que exista un cardinal medible, la cual a su vez no puede ser demostrada ni siquiera suponiendo la consistencia de que exista un cardinal inaccesible, o infinitos de ellos.

Por otra parte, combinando 6.8 con [TC 8.49] concluimos:

Teorema 6.43 *Si es consistente que exista un cardinal (débilmente) medible, entonces es consistente que* $2^{\aleph_0}$ *sea débilmente medible y no* $\mathbb{R}$*-medible.*

Capítulo VII

Cardinales fuertes y superfuertes

Hemos visto (teorema 5.3) que un cardinal κ es medible si y sólo si existe una inmersión elemental no trivial $j : V \longrightarrow M$ con punto crítico κ. Además sabemos que en tal caso $V_\kappa \subset M$ (teorema 1.4 y la observación posterior). El concepto de cardinal fuerte surge de reforzar ligeramente esta propiedad. Una definición natural sería la siguiente:

Un cardinal κ es *α-fuerte* si existe una inmersión elemental $j : V \longrightarrow M$ con punto crítico κ tal que $\alpha < j(\kappa)$ y $V_\alpha \subset M$.

De este modo, cuanto mayor es α más "se parece" la clase M a V. Los cardinales medibles coinciden con los κ-fuertes, y de hecho también coinciden con los $\kappa + 1$-fuertes, porque el teorema 5.4 c) implica que la inmersión natural asociada a una ultrapotencia cumple $V_{\kappa+1} \subset M$ (porque todo $x \in V_{\kappa+1}$ cumple $x \subset V_\kappa \subset M$, luego $|x| \leq |V_\kappa| = \kappa$, luego $x \in M^\kappa \subset M$).

Sin embargo, la "definición" que hemos dado de cardinal α-fuerte no es aceptable, porque "inmersión elemental entre clases propias" no es definible en ZFC. La caracterización de los cardinales medibles mediante inmersiones elementales tiene sentido porque tenemos una definición de "cardinal medible" que sólo involucra la existencia de un conjunto (una medida U) a partir del cual puede construirse una inmersión elemental, en el sentido de que tenemos una fórmula concreta $\phi(U, x, y)$ que define una inmersión elemental siempre que U es una medida en un cardinal.

Igualmente, vamos a ver que es posible dar una definición conjuntista de cardinal α-fuerte que a su vez puede caracterizarse en términos de inmersiones elementales en el mismo sentido que en el caso de los cardinales medibles.

Más precisamente, sabemos que cada medida U en un cardinal κ determina una inmersión elemental no trivial $j_U : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_U(V)$ con κ como punto crítico. Recíprocamente, una inmersión elemental arbitraria $j : V \longrightarrow M$ con κ como punto crítico determina una medida (normal) D en κ, a saber,

$$D = \{X \subset \kappa \mid \kappa \in j(X)\},$$

pero su inmersión elemental asociada j_D no es necesariamente j. Lo máximo que podemos decir (teorema 1.20) es que existe una inmersión elemental k que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j_D"'] & M \\ \mathrm{Ult}_D(V) \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

Es por esto que no podemos definir un cardinal α-fuerte como un cardinal κ para el que existe una medida D cuya inmersión asociada $j_D : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_D(V)$ cumpla $V_\alpha \subset \mathrm{Ult}_D(V)$, pues podría existir una inmersión en estas condiciones que no fuera de la forma j_D para ninguna medida D en κ. En la primera sección vamos a definir ultrapotencias más generales que las asociadas a medidas, de modo que si si podemos construir de algún modo una inmersión elemental según la “definición” de cardinal fuerte, podremos exigir que sea la inmersión asociada a una ultrapotencia de este tipo.

7.1 Extensores

Recordemos ([TC 3.28]) que en $\Omega \times \Omega$ podemos definir un buen orden canónico respecto al cual $\Omega \times \Omega$ resulta ser semejante a Ω. Esto nos permite identificar cada par ordenado de ordinales (α, β) con el ordinal que le corresponde a través de la única semejanza $\Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$. La fórmula $\gamma = (\alpha, \beta)$ es absoluta (es fácil ver que es Δ_1) para modelos transitivos de ZF, sin necesidad incluso del axioma de partes ni del axioma de infinitud. Más aún, (véase la prueba de [TC 5.21]) si κ es un cardinal infinito, entonces $\kappa \times \kappa$ se corresponde con κ a través de la semejanza o, dicho de otro modo, κ es cerrado para el orden canónico, o también, $(\alpha, \beta) < \kappa \leftrightarrow \alpha < \kappa \land \beta < \kappa$.

Más en general, para cada número natural n, podemos identificar Ω^n con Ω identificando

$$(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) = ((\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-2}), \alpha_{n-1}).$$

En particular, si κ es un cardinal infinito o, más en general, un ordinal cerrado para el orden canónico, podemos ver a κ como el conjunto de los ordinales $< \kappa$, o como el conjunto de los pares de ordinales $< \kappa$, o como el conjunto de las ternas de ordinales $< \kappa$, etc.

Si A es un conjunto de sucesiones de ordinales de longitud n y $\sigma : n \longrightarrow n$ es una permutación de n, definimos σA como el conjunto formado por las sucesiones $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$ tales que $(\alpha_{\sigma^{-1}(0)}, \ldots, \alpha_{\sigma^{-1}(n-1)}) \in A$. Así

$$(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in A \leftrightarrow (\alpha_{\sigma(0)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n-1)}) \in \sigma A.$$

Si A es un conjunto de ordinales, definimos la *proyección acotada* de A como

$$\mathrm{pa}_n(A) = \{(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \mid \bigvee \alpha_n \in \alpha_0 \ (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) \in A\}.$$

Una *fibra* a través de una sucesión de conjuntos de ordinales $\{A_i\}_{i\in\omega}$ es una sucesión de ordinales $\{\alpha_i\}_{i\in\omega}$ tal que $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{i-1}) \in A_i$ para todo $i \in \omega$.

Definición 7.1 Sean $\kappa < \lambda$ ordinales cerrados para el orden canónico. Un *extensor* (corto) de *punto crítico* κ y *soporte* λ (o, más brevemente, un extensor (κ, λ)) es una función $E : \mathcal{P}\kappa \longrightarrow \mathcal{P}\lambda$ que cumple las propiedades siguientes:

a) $E(\alpha) = \alpha$ para todo $\alpha < \kappa$ y $E(\kappa) = \lambda$.

b) $E(A \times B) = E(A) \times E(B)$,
$E(A \cap B) = E(A) \cap E(B)$,
$E(A \setminus B) = E(A) \setminus E(B)$.

c) Si $\alpha \in A \subset \kappa$, entonces $E(\alpha) \in E(A)$.

d) $E(\{(\alpha, \beta) \in A \times A \mid \alpha = \beta\}) = \{(\alpha, \beta) \in E(A) \times E(A) \mid \alpha = \beta\}$, e igualmente cambiando $\alpha = \beta$ por $\alpha \in \beta$.

e) Si $A \subset \kappa^n$ y σ es una permutación de n, entonces $E(\sigma A) = \sigma E(A)$.

f) Si $A \subset \kappa^{n+1}$, entonces $E(p_n(A)) = p_n(E(A))$.

g) Para toda sucesión $\{A_i\}_{i\in\omega}$ de subconjuntos de κ, si existe una fibra a través de $\{E(A_i)\}_{i\in\omega}$, también existe una fibra a través de $\{A_i\}_{i\in\omega}$.

Diremos que E es un *preextensor* si cumple la definición anterior salvo a lo sumo la propiedad g). Cuando se cumple esta propiedad se dice que E es *numerablemente completo,* de modo que un extensor es un preextensor numerablemente completo.

Notemos que en las propiedades b) y d) Estamos considerando a $A \times A$ como un conjunto de ordinales a través de la identificación entre Ω^2 y Ω. Igualmente, en las propiedades e) y f) en realidad A es un subconjunto cualquiera de κ, al que podemos ver como conjunto de n-tuplas o de $n+1$-tuplas.

Veamos algunas consecuencias elementales de la definición de preextensor:

- Si $A \subset B \subset \kappa$, entonces $E(A) = E(A \cap B) = E(A) \cap E(B) \subset E(B)$.
- $E(A) \cap \kappa = A$.

  En efecto, la inclusión $A \subset E(A) \cap \kappa$ se sigue de a) y c). Para probar el recíproco observamos que si $\beta \in \kappa \setminus A$, entonces

  $$\beta = E(\beta) \in E(\kappa \setminus A) = \lambda \setminus E(A),$$

  luego $\beta \notin E(A) \cap \kappa$.
- Si A está acotado en κ tenemos que $E(A) = A$, pues existe un $\alpha \in \kappa$ tal que $A \subset \alpha$, luego $E(A) \subset E(\alpha) = \alpha$ y basta aplicar la propiedad anterior.

Ahora probamos que toda inmersión elemental no trivial $j : V \longrightarrow M$, donde M es una clase transitiva, determina un extensor. Para ello tomamos un ordinal $\kappa < \lambda \leq j(\kappa)$ cerrado para el orden canónico y definimos la λ-*restricción* de j como la aplicación $E : \mathcal{P}\kappa \longrightarrow \mathcal{P}\lambda$ dada por $E(A) = j(A) \cap \lambda$.

Notemos que siempre podemos tomar $\lambda = j(\kappa)$, ya que el hecho de que κ sea cerrado para el orden canónico implica que $j(\kappa)$ también lo es.

La propiedad a) se cumple trivialmente, las propiedades b), c), d), e) y f) se siguen inmediatamente del hecho de que j es una inmersión elemental y de que todos los conceptos implicados son absolutos para modelos transitivos. Por ejemplo, vamos a probar e). Para ello llamamos $B = \sigma A$, de modo que

$$\bigwedge \alpha_1 \ldots \alpha_n ((\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in A \leftrightarrow (\alpha_{\sigma 1}, \ldots, \alpha_{\sigma_n}) \in B).$$

Aplicando j obtenemos que

$$\bigwedge \alpha_1 \ldots \alpha_n ((\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in j(A) \leftrightarrow (\alpha_{\sigma 1}, \ldots, \alpha_{\sigma_n}) \in j(B)).$$

(En realidad esta fórmula debería estar relativizada a M, pero es absoluta para modelos transitivos.) Tomando la intersección con λ en ambos miembros obtenemos

$$\bigwedge \alpha_1 \ldots \alpha_n ((\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E(A) \leftrightarrow (\alpha_{\sigma 1}, \ldots, \alpha_{\sigma_n}) \in E(B)),$$

lo que se traduce en que $E(B) = \sigma E(A)$, como había que probar.

Veamos ahora la propiedad g). Observamos que $\{E(A_i)\}_{i \in \omega} \in M$, puesto que $\lambda \in M$ y $\{j(A_i)\}_{i \in \omega} = j(\{A_i\}_{i \in \omega}) \in M$. Por lo tanto, podemos definir en M un árbol A cuyo nivel i-ésimo sea A_i de modo que, para $i < j$, un ordinal $\alpha \in A_i$ es menor que un ordinal $\beta \in A_j$ si, viendo a α como i-tupla y a β como j-tupla, la segunda extiende a la primera.

Así, la existencia de una fibra equivale a que el árbol A no esté bien fundado. Como la propiedad de estar bien fundado es absoluta para modelos transitivos, el hecho de que exista una fibra implica que existe una fibra en M y, como j es una inmersión elemental, esto implica que la fórmula

$$\bigvee x (x : \omega \longrightarrow \Omega \wedge \forall i \in \omega \; x|_i \in j(A_i)),$$

que se cumple en M, también se cumple en V con A_i en lugar de $j(A_i)$, lo que significa que $\{A_i\}_{i \in \omega}$ tiene una fibra. ■

Ahora probaremos que un extensor $E : \mathcal{P}\kappa \longrightarrow \mathcal{P}\lambda$ nos permite definir una ultrapotencia de V con una inmersión elemental no trivial asociada, aunque nos conviene trabajar en un contexto más general.

Definición 7.2 Sean $\kappa < \lambda$ ordinales cerrados para el buen orden canónico en $\Omega \times \Omega$ y sea Q un modelo transitivo de ZFC tal que $\kappa \in Q$. Un *preextensor sobre* Q con punto crítico κ y soporte λ es una aplicación $E : \mathcal{P}\kappa \cap Q \longrightarrow \mathcal{P}\lambda$ que cumple la definición de preextensor salvo por que su dominio es $(\mathcal{P}\kappa)^Q = \mathcal{P}\kappa \cap Q$ en lugar de $\mathcal{P}\kappa$.

Notemos que esta definición generaliza a la anterior, pues un preextensor es un preextensor sobre la clase universal V.

Por ejemplo, si $E \in Q$ es un preextensor$^Q(\kappa, \lambda)$, se cumple también que E es un preextensor sobre Q en el sentido de la definición precedente (pero la definición de preextensor sobre Q no exige que $E \in Q$). Supongamos a partir de aquí que Q es un modelo transitivo de ZFC, que $\kappa \in Q$ y que $E : (\mathcal{P}\kappa)^Q \longrightarrow \mathcal{P}\lambda$ es un preextensor sobre Q con soporte $\lambda > \kappa$. Definimos

$$\mathcal{F} = \{f \in Q \mid f : \kappa \longrightarrow Q\}.$$

Así $\mathcal{F}$ es una clase propia en Q, en el sentido de que $f \in \mathcal{F}$ es equivalente a una fórmula relativizada a Q, a saber, $(f : \kappa \longrightarrow V)^Q$. Definimos también:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}} &= \{(f, a) \mid f \in \mathcal{F} \land a \in \lambda\}, \\ Z^{=}_{f,g} &= \{(\alpha, \beta) \in \kappa \mid f(\alpha) = g(\beta)\}, \\ Z^{\in}_{f,g} &= \{(\alpha, \beta) \in \kappa \mid f(\alpha) \in g(\beta)\}. \end{aligned}$$

Si f, $g \in \mathcal{F}$, es claro que $Z^{=}_{f,g}$, $Z^{\in}_{f,g} \in \mathcal{P}\kappa \cap Q$ y $\overline{\mathcal{F}}$ es una clase propia en Q.

Consideramos en $\overline{\mathcal{F}}$ la relación de equivalencia dada por $(f, a) \sim (g, b)$ si y sólo si $(a, b) \in E(Z^{=}_{f,g})$. Veamos que realmente es una relación de equivalencia.

Para probar la reflexividad, tomamos $(f, a) \in \overline{\mathcal{F}}$ y observamos que

$$\{(\alpha, \beta) \in \kappa \times \kappa \mid \alpha = \beta\} \subset Z^{=}_{f,f},$$

luego, aplicando E,

$$\{(\alpha, \beta) \in \lambda \times \lambda \mid \alpha = \beta\} \subset E(Z^{=}_{f,f}),$$

de donde se sigue que $(a, a) \in E(Z^{=}_{f,f})$, luego $(f, a) \sim (f, a)$.

Si $(f, a) \sim (g, b)$, tomamos la permutación $\sigma : 2 \longrightarrow 2$ distinta de la identidad y observamos que $\sigma Z^{=}_{f,g} = Z^{=}_{g,f}$, por lo que

$$(b, a) = \sigma(a, b) \in \sigma E(Z^{=}_{f,g}) = E(\sigma Z^{=}_{f,g}) = Z^{=}_{g,f},$$

luego $(g, b) \sim (f, a)$.

Por último, si $(f, a) \sim (g, b)$ y $(g, b) \sim (h, c)$, observamos que

$$(Z^{=}_{f,g} \times \kappa) \cap (\kappa \times Z^{=}_{g,h}) \subset \sigma(\kappa \times Z^{=}_{f,h}),$$

donde $\sigma : 3 \longrightarrow 3$ intercambia el 0 y el 1. Por lo tanto,

$$(E(Z^{=}_{f,g}) \times E(\kappa)) \cap (E(\kappa) \times E(Z^{=}_{g,h})) \subset \sigma(E(\kappa) \times E(Z^{=}_{f,h}))$$

y, consecuentemente, $(a, b, c) \in \sigma(E(\kappa) \times E(Z^{=}_{f,h})$, luego $(a, c) \in E(Z^{=}_{f,h})$, lo que prueba que $(f, a) \sim (h, c)$.

Definimos $\mathrm{Ult}_E^*(Q)$ como la clase cociente de $\overline{\mathcal{F}}$ respecto a la relación $\sim$. Aquí hay que entender que cada clase de equivalencia $[f,a]^* \in \mathrm{Ult}_E^*(Q)$ es, por definición, el conjunto de los pares $(g,b) \in \overline{\mathcal{F}}$ de rango mínimo^Q relacionados con (f,a). De este modo se cumple que

$$[f,a]^* = [g,b]^* \leftrightarrow (a,b) \in E(Z_{f,g}^{=}).$$

Definimos en $\mathrm{Ult}_E(Q)$ la relación R dada por

$$[f,a]^* \, R \, [g,b]^* \leftrightarrow (a,b) \in E(Z_{f,g}^{\in}).$$

La prueba de que R está bien definida es análoga a las pruebas precedentes, usando que

$$(Z_{f',f}^{=} \times Z_{g,g'}^{=}) \cap (\kappa \times Z_{f,g}^{\in} \times \kappa) \subset \sigma(Z_{f',g'}^{\in} \times \kappa \times \kappa),$$

donde $\sigma(a,b,c,d) = (a,d,b,c)$.

Definición 7.3 Sea Q un modelo transitivo de ZFC y sea E un preextensor con punto crítico $\kappa \in Q$ y soporte λ. Definimos la *ultrapotencia* $\mathrm{Ult}_E^*(Q)$ como el modelo que acabamos de construir con la relación R como interpretación del relator de pertenencia.

El teorema siguiente implica en particular que las ultrapotencias que acabamos de construir son modelos de ZFC:

Teorema 7.4 (Teorema fundamental de las ultrapotencias) *En la situación anterior, si $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ es una fórmula con a lo sumo las variables libres indicadas, la ultrapotencia $M = \mathrm{Ult}_E^*(Q)$ cumple $\phi([f_1,a_1]^*,\ldots,\phi[f_n,a_n]^*)$ si y sólo si $(a_1,\ldots,a_n) \in E(Z_\phi)$, donde*

$$Z_\phi = \{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \kappa \mid \phi^Q(f_1(\alpha_1),\ldots,f_n(\alpha_n))\}.$$

Demostración: Razonamos por inducción sobre la longitud de ϕ. No perdemos generalidad si suponemos que ϕ no tiene descriptores.

Supongamos que $\phi \equiv x_i = x_j$ (y podemos suponer que $x_i \neq x_j$ o el resultado es trivial). Sea σ una permutación que lleve los índices i, j a las primeras posiciones. Entonces

$$Z_\phi = \sigma\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \kappa^n \mid f_i(\alpha_1) = f_j(\alpha_2)\} = \sigma(Z_{f_i,f_j}^{=} \times \kappa^{n-2}),$$

luego

$$E(Z_\phi) = \sigma(E(Z_{f_i,f_j}^{=}) \times \lambda^{n-2}),$$

por lo que

$$(a_1,\ldots,a_n) \in E(Z_\phi) \leftrightarrow (a_i,a_j) \in E(Z_{f_i,f_j}^{=}) \leftrightarrow [f_i,a_i]^* = [f_j,a_j]^*$$

$$\leftrightarrow \phi^M([f_1,a_1]^*,\ldots,[f_n,a_n]^*).$$

Si $\phi \equiv x_i \in x_j$ el razonamiento es análogo. Si la relación es válida para ϕ, también lo es para $\neg\phi$, puesto que $Z_{\neg\phi} = \kappa \setminus Z_\phi$, luego

$$\begin{aligned} &\neg\phi^M([f_1, a_1]^*, \ldots, [f_n, a_n]^*) \\ &\leftrightarrow (a_1, \ldots, a_n) \in \lambda \setminus E(Z_\phi) \\ &\quad = E(\kappa \setminus Z_\phi) = E(Z_{\neg\phi}). \end{aligned}$$

Similarmente, si la relación es cierta para ϕ y ψ, también se cumple para $\phi \wedge \psi$, pues $Z_{\phi\wedge\psi} = Z_\phi \cap Z_\psi$ y E conserva intersecciones. Sólo queda probar que si la relación es cierta para ϕ, también lo es para $\psi \equiv \bigvee x\phi$.

Supongamos $\psi^M([f_1, a_1]^*, \ldots, [f_n, a_n]^*)$. Entonces existe un $x = [f_0, a_0]^*$ tal que $\phi^M([f_1, a_1]^*, \ldots, [f_n, a_n]^*, [f_0, a_0]^*)$, luego, por hipótesis de inducción, tenemos que $(a_1, \ldots, a_n, a_0) \in E(Z_\phi)$. Ahora bien, es claro que $Z_\phi \subset Z_\psi \times \kappa$, luego aplicando E concluimos que $(a_1, \ldots, a_n) \in E(Z_\psi)$.

Recíprocamente, supongamos que $(a_1, \ldots, a_n) \in E(Z_\psi)$.

Por definición de Z_ψ:

$$(\bigwedge \alpha_1 \ldots \alpha_n((\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in Z_\psi \rightarrow \bigvee x\ \psi(f_1(\alpha_1), \ldots, f_n(\alpha_n), x)))^Q,$$

luego, por el axioma de elección^Q, existe $f_0 \in Q$ tal que

$$\begin{aligned} &f_0 : \kappa \longrightarrow V \wedge \bigwedge \alpha_1 \ldots \alpha_n((\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in Z_\psi \\ &\rightarrow \psi^Q(f_1(\alpha_1), \ldots, f_n(\alpha_n), f_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)). \end{aligned}$$

Así,

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in Z_\psi \leftrightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) \in Z_\phi$$

o, equivalentemente: $\alpha \in Z_\psi \leftrightarrow (\alpha, \alpha) \in Z_\phi$. Esto implica que

$$(Z_\psi \times Z_\psi) \cap \{(\alpha, \beta) \in \kappa \mid \alpha = \beta\} \subset Z_\phi,$$

luego

$$(E(Z_\psi) \times E(Z_\psi)) \cap \{(\alpha, \beta) \in \lambda \mid \alpha = \beta\} \subset E(Z_\phi).$$

Por consiguiente, llamando $a_0 = (a_1, \ldots, a_n) \in E(Z_\psi)$, tenemos que

$$(a_1, \ldots a_n, a_0) = (a_0, a_0) \in E(Z_\phi),$$

luego, por hipótesis de inducción, $\phi^M([f_1, a_1]^*, \ldots, [f_n, a_n]^*, [f_0, a_0]^*)$ y también $\psi^M([f_1, a_1]^*, \ldots, [f_n, a_n]^*)$. ■

Definición 7.5 En las condiciones anteriores, para cada conjunto $x \in Q$, llamemos $c_x : \kappa \longrightarrow Q$ a la aplicación constante dada por $c_x(\alpha) = x$. Definimos la *inmersión canónica* $j_E^* : Q \longrightarrow \mathrm{Ult}_E^*(Q)$ mediante $j_E^*(x) = [c_x, 0]^*$.

El teorema fundamental implica que j_E^* es una inmersión elemental, pues

$$\phi^M(j_E^*(x_1),\ldots,j_E^*(x_n)) \leftrightarrow 0\in E(\{\alpha\in\kappa\mid \phi^Q(x_1,\ldots,x_n)\}) \leftrightarrow \phi^Q(x_1,\ldots,x_n).$$

Para que un modelo de ZFC en el que la pertenencia se interprete como una relación arbitraria R sea isomorfo a un modelo transitivo es necesario y suficiente que la relación R sea conjuntista, extensional y bien fundada. La extensionalidad la tenemos por el axioma de extensionalidad, y en el caso de las ultrapotencias el carácter conjuntista nos lo asegura el teorema siguiente:

Teorema 7.6 *En las condiciones anteriores, la relación R es conjuntista en $\mathrm{Ult}_E(Q)$, es decir, si $x\in \mathrm{Ult}_E^*(Q)$, la clase $\{y\in \mathrm{Ult}_E^*(Q)\mid y\,R\,x\}$ es un conjunto.*

Demostración: Pongamos que $x=[f,a]^*$, para cierta $f:\kappa\longrightarrow Q$ y cierto ordinal $a\in\lambda$.

Si $y=[g,b]^*\,R\,[f,a]^*$, con $g:\kappa\longrightarrow Q$, llamando $C=\bigcup\limits_{\alpha\in\kappa} f(\alpha)$,

$$(b,a)\in E(\{(\beta,\alpha)\in\kappa\times\kappa\mid g(\beta)\in f(\alpha)\})$$

$$\subset E(\{(\beta,\alpha)\in\kappa\times\kappa\mid g(\beta)\in C\}) = E(\{\beta\in\kappa\mid g(\beta)\in C\})\times\lambda.$$

Por consiguiente, $b\in E(\{\beta\in\kappa\mid g(\beta)\in C\})$.

Tomemos cualquier $h\in (C^\kappa)^Q$ que coincida con g sobre el conjunto

$$D=\{\beta\in\kappa\mid g(\beta)\in C\}.$$

Vamos a probar que $y=[g,b]^*=[h,b]^*$. En efecto,

$$(b,b)\in\{(u,v)\in E(D)\times E(D)\mid u=v\} = E(\{(\beta,\gamma)\in D\times D\mid \beta=\gamma\})$$

$$\subset E(\{(\beta,\gamma)\in\kappa\times\kappa\mid g(\beta)=h(\gamma)\}).$$

Así pues, tenemos una aplicación suprayectiva

$$(C^\kappa)^Q\times\lambda\longrightarrow\{y\in \mathrm{Ult}_E(Q)\mid y\,R\,x\}$$

que prueba que la imagen es un conjunto. ■

Nota En la demostración del teorema anterior hemos probado un hecho que usaremos en numerosas ocasiones: Todo $x\in \mathrm{Ult}_E^*(Q)$ tal que $x\,R\,[f,a]^*$ es de la forma $x=[h,b]^*$, donde $h:\kappa\longrightarrow \bigcup\limits_{\alpha\in\kappa} f(\alpha)$. ■

Hasta aquí hemos supuesto que el preextensor E es externo al modelo Q. En este contexto general no podemos asegurar que $\mathrm{Ult}_E^*(Q)$ sea una clase propia en Q, en el sentido de que $x\in \mathrm{Ult}_E^*(Q)$ no equivale a ninguna fórmula relativizada a Q, ya que en la definición de $\mathrm{Ult}_E^*(Q)$ interviene el extensor E, que es ajeno a Q. En cambio, si suponemos que $E\in Q$ es un preextensor^Q, es claro que tanto $x \in \mathrm{Ult}^*_E(Q)$ como $x\,R\,y$ (donde R es la pertenencia en $\mathrm{Ult}^*_E(Q)$) equivalen a fórmulas relativizadas a Q. Más en general, sucede que toda la construcción de la ultrapotencia es la relativización a Q de la construcción correspondiente en V (y en particular $\mathrm{Ult}^*_E(Q) \subset Q$), por lo que no perdemos generalidad si trabajamos en V, es decir, si suprimimos todas las relativizaciones a Q.

El teorema siguiente muestra la finalidad de la completitud numerable que hemos incluido en la definición de extensor:

Teorema 7.7 *Si E es un extensor, la ultrapotencia $\mathrm{Ult}^*_E(V)$ está bien fundada.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que existe una sucesión $\{[f_i, a_i]^*\}_{i\in\omega}$ tal que $[f_{i+1}, a_{i+1}]^*\, R\, [f_i, a_i]^*$. Definimos

$$A_i = \{(\alpha_0, \ldots, \alpha_{i-1}) \in \kappa \mid f_0(\alpha_0) \ni \cdots \ni f_{i-1}(\alpha_{i-1})\}.$$

Evidentemente, $\{A_i\}_{i\in\omega}$ no puede tener una sección, pero el teorema fundamental nos da que $\{E(A_i)\}_{i\in\omega}$ tiene por sección la sucesión $\{a_i\}_{i\in\omega}$. Así pues, E no es numerablemente completo. ■

Más en general, si $E \in Q$ es un extensor^Q, entonces $\mathrm{Ult}^*_E(Q)$ está bien fundada^Q, luego está bien fundada, porque "estar bien fundada" es una propiedad absoluta para modelos transitivos de ZFC.

Siempre que una ultrapotencia esté bien fundada (lo cual en ocasiones puede garantizarse incluso para ciertas ultrapotencias definidas por preextensores) la sustituiremos por su colapso transitivo, que representaremos por $\mathrm{Ult}_E(Q)$, y que será también un modelo transitivo de ZFC. Representaremos por $[f, a]$ la imagen de $[f, a]^*$ por la función colapsante y $j_E : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_E(V)$ a la composición de j^*_E con la función colapsante.

Para estudiar la inmersión canónica asociada a un extensor nos basaremos principalmente en el teorema siguiente:

Teorema 7.8 *Sea Q un modelo transitivo de* ZFC *y sea E un preextensor sobre Q con punto crítico κ y soporte λ tal que $\mathrm{Ult}_E(Q)$ esté bien fundada. Sea $d : \kappa \longrightarrow \kappa$ la identidad en κ. Entonces, cada ordinal $a < \lambda$ se representa en $\mathrm{Ult}_E(Q)$ como $a = [d, a]$.*

DEMOSTRACIÓN: Razonamos por inducción sobre a. Un elemento arbitrario de $[d, a]$ será de la forma $[f, b]$, para cierta $f : \kappa \longrightarrow Q$ y cierto $b \in \lambda$.
Entonces

$$\begin{aligned}
[f, b] \in [d, a] \leftrightarrow (a, b) \in E(\{(\gamma, \beta) \in \kappa \times \kappa \mid f(\beta) \in \gamma\}) \\
= E(\mathrm{pa}(\{(\gamma, \beta, \delta) \in \kappa \times \kappa \times \kappa \mid f(\beta) = \delta\})) \\
= \mathrm{pa}(E(\{(\gamma, \beta, \delta) \in \kappa \times \kappa \times \kappa \mid f(\beta) = d(\delta)\}))
\end{aligned}$$

$$\leftrightarrow \bigvee c \in a\ (a, b, c) \in \lambda \times E(\{(\beta, \delta) \in \kappa \times \kappa \mid f(\beta) = d(\delta)\} \leftrightarrow \bigvee c < a\ [f, b] = [d, c].$$

Por hipótesis de inducción tenemos que $[d, c] = c$, luego hemos probado que los elementos de $[d, a]$ son exactamente los de a, es decir, $[d, a] = a$. ■

La primera aplicación de esta representación es la siguiente:

Teorema 7.9 *Sea Q un modelo transitivo de* ZFC *y sea E un preextensor sobre Q con punto crítico κ y soporte λ tal que la ultrapotencia* $\mathrm{Ult}_Q(E)$ *esté bien fundada. Entonces κ es el punto crítico de la inmersión canónica j_E y, de hecho, $\lambda \leq j_E(\kappa)$.*

Demostración: Sea $d : \kappa \longrightarrow \kappa$ la identidad. Observemos que, si $\alpha < \kappa$, se cumple $j_E(\alpha) = [c_\alpha, 0] = [d, \alpha]$. En efecto, esto equivale a que

$$(0, \alpha) \in E(\{(\beta, \gamma) \in \kappa \times \kappa \mid \alpha = \gamma\}) = E(\kappa \times \{(\alpha\}) = \lambda \times \{\alpha\}.$$

Por el teorema anterior concluimos que

$$\bigwedge \alpha < \kappa \; j_E(\alpha) = \alpha.$$

En cambio, si $a < \lambda$, tenemos las equivalencias

$$a = [d, a] \in j_E(\kappa) \leftrightarrow (a, 0) \in E(\{((\alpha, \beta) \in \kappa \times \kappa \mid \alpha \in \kappa\}) = E(\kappa) = \lambda,$$

luego $\lambda \leq j_E(\kappa)$. ■

Ahora también es inmediato que, en las condiciones precedentes, para cada $A \subset \kappa$:

$$E(A) = j_E(A) \cap \lambda.$$

En efecto, para cada $a < \lambda$ se cumple que

$$a \in j_E(A) \leftrightarrow [d, a] \in [c_A, 0] \leftrightarrow (a, 0) \in E(\{(\alpha, \beta) \in \kappa \times \kappa \mid \alpha \in A\})$$

$$= E(A \times \kappa) = E(A) \times \lambda,$$

luego $a \in j_E(A) \leftrightarrow a \in E(A)$. ■

Esto significa que la λ-restricción de la inmersión elemental j_E es el propio E. En cambio, no es cierto que si E es el extensor definido por una inmersión elemental j, entonces j_E coincida con j. Tenemos un resultado análogo a 1.20, pero lo que aportan los extensores es la última afirmación del enunciado:

Teorema 7.10 *Sea $j : V \longrightarrow M$ una inmersión elemental no trivial de punto crítico κ, sea E la λ-restricción definida por j y consideremos la inmersión canónica $j_E : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_E(V)$. Entonces la aplicación $k([f, a]) = j(f)(a)$ es una inmersión elemental que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j_E"'] & M \\ \mathrm{Ult}_E(V) \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

Además, si k no es trivial, su punto crítico es $\geq \lambda$.

DEMOSTRACIÓN: La definición de k es correcta, pues $j(f) : j(\kappa) \longrightarrow V$, luego está definido $j(f)(a)$. Además, si $[f, a] = [g, b]$, tenemos que

$$(a, b) \in E(\{(\alpha, \beta) \in \kappa \mid f(\alpha) = g(\beta)\})$$
$$= \{(\alpha, \beta) \in j(\kappa) \mid j(f)(\alpha) = j(g)(\beta)\} \cap \lambda,$$

luego $j(f)(a) = j(g)(b)$.

Se cumple que k es una inmersión elemental, pues si $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Ult}_E(V)^n$, de modo que $x_i = [f_i, a_i]$, para toda fórmula ϕ, tenemos que

$$\phi^{\mathrm{Ult}}(x_1, \ldots, x_n)$$
$$\leftrightarrow (a_1, \ldots, a_n) \in E(\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \kappa \mid \phi(f_1(\alpha_1), \ldots, f_n(\alpha_n))\})$$
$$= \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in j(\kappa) \mid \phi^M(j(f_1)(\alpha_1), \ldots, j(f_n)(\alpha_n))\} \cap \lambda$$
$$\leftrightarrow \phi^M(j(f_1)(a_1), \ldots, j(f_n)(a_n)) \leftrightarrow \phi^M(k(x_1), \ldots, k(x_n)).$$

El diagrama es conmutativo:

$$k(j_E(x)) = k([c_x, 0]) = j(c_x)(0) = c_{j(x)}(0) = j(x).$$

Si $a < \lambda$, sabemos que $a = [d, a]$ y $j(d)$ es la identidad en $j(\kappa)$, luego

$$k(a) = j(d)(a) = a.$$

■

Nota Si aplicamos el teorema anterior tomando como j la propia inmersión j_E inducida por un extensor, resulta que k es la identidad. En efecto, esto equivale a que $k([f, a]) = j_E(f)(a) = [f, a]$. Para probar esto observamos que equivale a $[c_f, 0]([d, a]) = [f, a]$, que por el teorema fundamental equivale a su vez a

$$(0, a, a) \in E(\{(\alpha, \beta, \gamma) \in k \mid f(\beta) = f(\gamma)\}) \leftrightarrow (a, a) \in E(Z^{=}_{f,f}) \leftrightarrow [f, a] = [f, a].$$

■

Observemos ahora que la medida normal asociada a la inmersión canónica inducida por un extensor E es

$$D_\kappa = \{A \in \mathcal{P}\kappa \mid \kappa \in j_E(A)\} = \{A \in \mathcal{P}\kappa \mid \kappa \in E(A)\}.$$

Más en general, es fácil probar que, para cada $a \in \lambda$, el conjunto

$$D_a = \{A \in \mathcal{P}\kappa \mid a \in E(A)\}$$

es una medida en κ, y E está completamente determinado por las medidas $\{D_a\}_{a\in\lambda}$. Es posible dar una definición equivalente de extensor respecto a la cual un extensor sea una sucesión de medidas que satisfacen una serie de propiedades de compatibilidad. ■

Veamos ahora que las ultrapotencias definidas por medidas normales en cardinales medibles son un caso particular de las ultrapotencias definidas por extensores:

Teorema 7.11 *Sea κ un cardinal medible, sea D una medida normal en κ, sea $j_D : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_D(V)$ la inmersión canónica en la ultrapotencia, sea $\lambda = j_D(\kappa)$, sea E la λ-restricción de j_D y sea $j_E : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_E(V)$ la inmersión canónica en la ultrapotencia. Entonces $\mathrm{Ult}_D(V) = \mathrm{Ult}_E(V)$ y $j_D = j_E$.*

Demostración: La medida normal asociada a j_E es

$$D_\kappa = \{A \in \mathcal{P}\kappa \mid \kappa \in j_D(A)\} = \{A \in \mathcal{P}\kappa \mid [d] \in [c_A]\} = \{A \in \mathcal{P}\kappa \mid A \in D\} = D.$$

Por consiguiente, los teoremas 1.20 y 7.10 nos dan inmersiones elementales k y k' que hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j_D"] \arrow[dr, "j_E"'] & \mathrm{Ult}_D(V) \arrow[d, shift right, "k"'] \\ & \mathrm{Ult}_E(V) \arrow[u, shift right, "k'"'] \end{tikzcd}$$

Observamos además que

$$k'(k([f])) = k'(j_E(f)(\kappa)) = k'([f, \kappa]) = j_D(f)(\kappa) = [f],$$

es decir, que $k \circ k'$ es la identidad. Esto obliga a que k fije a todos los ordinales, pues no puede ser $\alpha < k(\alpha) \leq k'(k(\alpha)) = \alpha$, luego k es la identidad (por el teorema 1.2), luego también k' es la identidad, luego $\mathrm{Ult}_D(V) = \mathrm{Ult}_E(V)$ y $j_D = j_E$. ■

Terminamos con un par de resultados que usaremos repetidas veces en las secciones siguientes:

Teorema 7.12 *Sean $M \subset N$ dos modelos transitivos de* ZFC *y $E \in N$ un extensor con punto crítico $\kappa \in M$ y soporte λ de modo que $M^\kappa \cap N = M^\kappa \cap M$. Entonces $\mathrm{Ult}_E(M) \subset \mathrm{Ult}_E(N)$, de modo que si $f \in M^\kappa \cap M$ y $a \in \lambda$, entonces $[f, a]$ es el mismo calculado en M o en N.*

Demostración: Consideremos la aplicación $\mathrm{Ult}^*_E(M) \longrightarrow \mathrm{Ult}^*_E(N)$ dada por $[f, a]^*_M \mapsto [f, a]^*_N$. Es inmediato que está bien definida (no depende del representante elegido para la clase), es inyectiva y cumple

$$[f, a]^*_M \, R_M [g, b]^*_M \rightarrow [f, a]^*_N \, R_N [g, b]^*_N$$

Ahora observamos que si $g \in M^\kappa \cap M$, $f \in N^\kappa \cap N$ y $[f, a]^*_N \, R_N \, [g, b]^*_N$, por la nota tras el teorema 7.6 podemos suponer que $f \in M^\kappa \cap N = M^\kappa \cap M$. Esto implica que la extensión de $[g, b]^*_N$ está formada por las imágenes de los elementos de la extensión de $[g, b]^*_M$, de donde se sigue a su vez que $[g, b]_M = [g, b]_N$. Esto a su vez nos da la inclusión entre las ultrapotencias. ■

Teorema 7.13 *Sea μ un cardinal inaccesible, sea E un extensor de punto crítico $\kappa < \mu$ y sea $\alpha \leq \mu$ tal que $V_\alpha \subset \mathrm{Ult}_E(V)$. Entonces $V_\alpha \subset \mathrm{Ult}_E(V_\mu)$.*

Demostración: Tenemos que $V_\mu^\kappa \subset V_\mu$, luego el teorema anterior nos da que $\mathrm{Ult}_E(V_\mu) \subset \mathrm{Ult}_E(V)$, de modo que la primera ultrapotencia está formada por los elementos de la forma $[f, a]$, con $f \in V_\mu^\kappa$ y a en el soporte de E.

Probamos el resultado por inducción sobre el rango, es decir, suponemos que $x \in V_\alpha$, $x \subset \mathrm{Ult}_E(V_\mu)$ y vamos a probar que $x \in \mathrm{Ult}_E(V_\mu)$.

En principio $x = [f, a]$, para ciertos f y a, y cada $u \in x$ es de la forma $u = [g_u, a_u]$, con $g_u \in V_\mu^\kappa$, y como μ es inaccesible y $|x| < \mu$. existe un $\theta < \mu$ tal que $\bigwedge u \in x\ g_u \in V_\theta^\kappa$. Definimos entonces $\bar{f}(\delta) = f(\delta) \cap V_\theta$, de modo que $\bar{f} \in V_\mu$, y vamos a comprobar que $[f, a] = [\bar{f}, a]$.

En efecto, si $u = [g_u, a_u] \in [f, a] = x$, tenemos que

$$(a_u, a) \in E(\{(\delta, \epsilon) \in \kappa \mid g_u(\delta) \in f(\epsilon)\}) = E(\{(\delta, \epsilon) \in \kappa \mid g_u(\delta) \in \bar{f}(\epsilon)\}),$$

luego $u \in [\bar{f}, a]$. Recíprocamente, si $[g, b] \in [\bar{f}, a]$, entonces

$$(g, b) \in E(\{(\delta, \epsilon) \in \kappa \mid g(\delta) \in \bar{f}(\epsilon)\}) \subset E(\{(\delta, \epsilon) \in \kappa \mid g(\delta) \in f(\epsilon)\}),$$

luego $[g, b] \in [f, a]$. Por lo tanto $x = [\bar{f}, a] \in \mathrm{Ult}_E(V_\mu)$. ■

7.2 Cardinales fuertes

Ahora ya estamos en condiciones de definir aceptablemente los cardinales fuertes que hemos considerado al comienzo de este capítulo:

Definición 7.14 Sea κ un cardinal infinito y $\alpha \geq \kappa$ un ordinal.

a) Diremos que un extensor E con punto crítico κ es *α-fuerte* si $\alpha < j_E(\kappa)$ y $V_\alpha \subset \mathrm{Ult}_E(V)$.

b) Diremos que κ es *α-fuerte* si existe un extensor E α-fuerte con punto crítico κ.

c) Diremos que κ es *fuerte* si es α-fuerte para todo ordinal $\alpha \geq \kappa$.

Observamos que la definición de cardinal fuerte es expresable en ZFC, pues sólo involucra la existencia de extensores, que son conjuntos. El teorema siguiente nos permitirá caracterizar los cardinales fuertes en términos de inmersiones elementales arbitrarias:

Teorema 7.15 *Sea M una clase transitiva y $j : V \longrightarrow M$ una inmersión elemental con punto crítico κ y sea $\kappa \leq \alpha \leq j(\kappa)$ tal que $V_\alpha \subset M$. Consideremos un ordinal $\alpha \leq \lambda \leq j(\kappa)$ cerrado para el buen orden canónico en $\Omega \times \Omega$. Entonces la λ-restricción E de j cumple $V_\alpha \subset \mathrm{Ult}_E(M)$.*

Demostración: $V_\alpha = V_\alpha^M = V_\alpha^{\mathrm{Ult}_E(V)} \subset \mathrm{Ult}_E(V)$, donde la última igualdad se sigue de 7.10 (por el teorema 1.4). ■

Observemos que en las condiciones del teorema anterior siempre podemos tomar $\lambda = j(\kappa)$.

Teorema 7.16 *Si κ es un cardinal infinito y $\alpha \geq \kappa$ es un ordinal arbitrario, se cumple que κ es α-fuerte si y sólo si existe una clase transitiva M y una inmersión elemental $j : V \longrightarrow M$ con con punto crítico κ tal que $\alpha < j(\kappa)$ y $V_\alpha \subset M$.*

DEMOSTRACIÓN: Si κ es α-fuerte, por definición existe un extensor E tal que la inmersión elemental $j_E : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_E(V)$ cumple lo requerido. Recíprocamente, si tenemos definida una inmersión elemental en las condiciones del enunciado, el teorema anterior con $\lambda = j(\kappa)$ implica que la λ-restricción de j es α-fuerte, luego κ es α-fuerte. ■

Es obvio que si $\kappa \leq \alpha < \beta$, todo cardinal β-fuerte es α-fuerte. Al principio del capítulo ya hemos observado que un cardinal es κ-fuerte si y sólo si es $\kappa+1$-fuerte si y sólo si es medible. En cambio, los cardinales $\kappa + 2$-fuertes están por encima de los medibles en cuanto a consistencia:

Teorema 7.17 *Si κ es un cardinal $\kappa + 2$-fuerte, entonces existe una medida normal D en κ tal que*

$$\{\mu < \kappa \mid \mu \textit{ es medible}\} \in D.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $j : V \longrightarrow M$ una inmersión elemental con punto crítico κ y tal que $V_{\kappa+2} \subset M$. Esto implica que κ es medible^M. En efecto, por lo pronto, $\mathcal{P}\kappa = (\mathcal{P}\kappa)^M$ y, más aún, todos los subconjuntos de $\mathcal{P}\kappa$ están en M. En particular, si $U \subset \mathcal{P}\kappa$ es una medida en κ, tenemos que $U \in M$, y es inmediato comprobar que U es una medida^M. Por consiguiente,

$$\kappa \in j(\{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es medible}\}) = \{\mu < j(\kappa) \mid \mu \text{ es medible}^M\},$$

y esto equivale a que el conjunto de los cardinales medibles menores que κ pertenezca a la medida D determinada por j. ■

La conclusión del teorema anterior equivale a que el orden de Mitchell sea $o(\kappa) \geq 2$. En realidad se cumple mucho más:

Teorema 7.18 *Si κ es un cardinal $\kappa + 2$-fuerte, entonces $o(\kappa) = (2^\kappa)^+$.*

DEMOSTRACIÓN: Vamos a probar el siguiente resultado auxiliar:

Si $A \subset \mathcal{P}\kappa$, existe una medida normal D en κ tal que $A \in \mathrm{Ult}_D(V)$.

En efecto, llamamos $\phi(A, \kappa)$ a la afirmación contraria, es decir, a que no existe ninguna medida normal D en κ tal que $A \in \mathrm{Ult}_D(V)$.

El mismo argumento empleado en la demostración de 5.27 muestra que la condición $A \in \mathrm{Ult}_D(V)$ equivale a la existencia de una sucesión $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ de conjuntos $A_\alpha \subset \mathcal{P}\alpha$ tales que para todo $x \in \mathcal{P}\kappa$ se cumple

$$x \in A \leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid x \cap \alpha \in A_\alpha\} \in D.$$

Supongamos que existe un $A \in \mathcal{P}\kappa$ que cumple $\phi(A, \kappa)$.

Fijemos una inmersión elemental $j : V \longrightarrow M$ con punto crítico κ tal que $V_{\kappa+2} \subset M$. En particular $\mathcal{P}^M\kappa = \mathcal{P}\kappa$ y $\mathcal{P}^M\mathcal{P}^M\kappa = \mathcal{P}\mathcal{P}\kappa$.

Tenemos que $A \in M$ y se cumple $\phi^M(A,\kappa)$, pues en caso contrario existiría una medida normal^M $D \in M$ y una sucesión $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa} \in M$ en las condiciones anteriores, pero el hecho de que $V_{\kappa+2} \subset M$ implica que D es una medida normal y que la sucesión $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ prueba de hecho $\neg\phi(A,\kappa)$.

Consideremos ahora la medida normal D determinada por j, de modo que tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "j_D"'] & M \\ & \mathrm{Ult}_D(V) \arrow[u, "k"'] \end{tikzcd}$$

dado por el teorema 1.20, donde $k([f]) = j(f)(\kappa)$. En particular tenemos que $k(\kappa) = k([d]) = j(d)(\kappa) = \kappa$. Más aún, en la prueba del teorema 5.27 hemos visto que si $x \in \mathcal{P}\kappa$ entonces $x = [h_x]$, donde $h_x(\alpha) = x \cap \alpha$, luego tenemos que $k(x) = j(h_x)(\kappa) = h_{j(x)}(\kappa) = j(x) \cap \kappa = x$.

Como $(\bigvee A\, \phi(A,\kappa))^M$ y $k(\kappa) = \kappa$, tenemos que $(\bigvee A\, \phi(A,\kappa))^{\mathrm{Ult}_D(V)}$. Sea, pues, $A \in \mathrm{Ult}_D(V)$ tal que $\phi(A,\kappa)$. En particular $A \subset \mathcal{P}\kappa$, luego también $k(A) \subset \mathcal{P}\kappa$. Más aún, si $x \in \mathcal{P}\kappa$, tenemos que $x \in k(A) \leftrightarrow k(x) \in k(A) \leftrightarrow x \in A$, luego $k(A) = A$.

Por consiguiente, como se cumple $\phi^{\mathrm{Ult}_D(V)}(A,\kappa)$ y $k(A) = A$, $k(\kappa) = \kappa$, también tenemos $\phi^M(A,\kappa)$. Pero por otra parte $A \in \mathrm{Ult}_D(V)$, luego existe una sucesión $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ que lo prueba, la cual está en M, al igual que D, y contradice $\phi^M(A,\kappa)$.

Ahora ya podemos probar el teorema, para lo cual vamos a construir recurrentemente una sucesión $\{D_\alpha\}_{\alpha<(2^\kappa)^+}$ de medidas normales en κ creciente para el orden de Mitchell. Basta probar que si $\{D_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ es una sucesión creciente para el orden de Mitchell con $\beta < (2^\kappa)^+$, existe una medida normal D_β en κ tal que $\bigwedge \alpha < \beta\, D_\alpha \in \mathrm{Ult}_{D_\beta}(V)$. A su vez, para esto basta comprobar que la sucesión dada se puede codificar mediante un conjunto $A \subset \mathcal{P}\kappa$, de modo que $A \in \mathrm{Ult}_{D_\beta}(V)$ implica que todos los D_α están también en la ultrapotencia.

Una forma de realizar la codificación es la siguiente: reordenando la sucesión e introduciendo repeticiones si es necesario podemos expresarla como $\{D_y\}_{y\in\mathcal{P}\kappa}$. Seguidamente consideramos

$$X = \{(x,y) \in \mathcal{P}\kappa \times \mathcal{P}\kappa \mid x \in D_y\} \subset \mathcal{P}\kappa \times \mathcal{P}\kappa.$$

Por último consideramos la biyección $h : \mathcal{P}\kappa \times \mathcal{P}\kappa \longrightarrow \mathcal{P}\kappa$ dada por

$$h(x,y) = \{2\alpha \mid \alpha \in x\} \cup \{2\alpha + 1 \mid \alpha \in y\},$$

con lo que podemos formar $A = h[X]$. Es claro que si tomamos D_β según el resultado que hemos probado, de modo que $A \in \mathrm{Ult}_{D_\beta}(V)$, entonces se cumple que $X \in \mathrm{Ult}_{D_\beta}(V)$ y a su vez cada $D_y \in \mathrm{Ult}_{D_\beta}(V)$, es decir, cada D_α cumple $D_\alpha < D_\beta$. ■

Recordemos que, según el teorema 5.32 el máximo valor que puede tomar $o(\kappa)$ es $(2^\kappa)^+$. El argumento del teorema anterior permite probar que el número de medidas normales en un cardinal $\kappa+2$-fuerte es también el máximo posible:

Teorema 7.19 *Si κ es un cardinal $\kappa+2$-fuerte entonces existen 2^{2^κ} medidas normales en κ.*

DEMOSTRACIÓN: Sea N el conjunto de todas las medidas normales en κ. Para cada $D \in N$ en κ sea $P(D) = \mathcal{P}^{\mathrm{Ult}_D(\kappa)}\mathcal{P}\kappa$. En el teorema anterior hemos probado que

$$\mathcal{P}\mathcal{P}\kappa = \bigcup_{D\in N} P(D).$$

Por otra parte, hemos visto que cada $A \in P(D)$ está determinado por una sucesión $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$, donde $A_\alpha \subset \mathcal{P}\alpha$. Concluimos que $|P(D)| \leq 2^\kappa$. Si fuera $|N| < 2^{2^\kappa}$, tendríamos que

$$2^{2^\kappa} = |\mathcal{P}\kappa| \leq |N|2^\kappa < 2^{2^\kappa},$$

contradicción. ■

El teorema [PC 2.35] afirma que las fórmulas Σ_1 son absolutas para los modelos $H(\kappa)$, donde κ es un cardinal no numerable, luego en particular para los modelos V_κ si κ es inaccesible. En el caso de los cardinales fuertes tenemos un resultado mejor:

Teorema 7.20 *Si κ es fuerte, las fórmulas Σ_2 son absolutas para V_κ.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos una fórmula $\bigvee x\,\phi(x,x_1,\ldots,x_n)$, donde ϕ es Π_1 y sean $x_1,\ldots,x_n \in V_\kappa$. Si $\bigvee x \in V_\kappa\,\phi^{V_\kappa}(x,x_1,\ldots,x_n)$, entonces el teorema [PC 2.25] implica $\bigvee x\,\phi(x,x_1,\ldots,x_n)$ (si las fórmulas Σ_1 son absolutas para V_κ, las Π_1 también lo son).

Recíprocamente, supongamos que $\bigvee x\,\phi(x,x_1,\ldots,x_n)$. Tomemos un conjunto x tal que $\phi(x,x_1,\ldots,x_n)$ y sea $\alpha \geq \kappa$ tal que $x \in V_\alpha$. Como κ es fuerte, existe una inmersión elemental $j : V \longrightarrow M$ tal que $\alpha < j(\kappa)$ y $V_\alpha \subset M$. En particular $x \in V^M_{j(\kappa)}$. Como ϕ es Π_1, es inmediato que $(\phi^{V_{j(\kappa)}}(x,x_1,\ldots,x_n))^M$, luego $((\bigvee x\,\phi(x,x_1,\ldots,x_n))^{V_{j(\kappa)}})^M$ y, como j es elemental (y cumple $j(x_i)=x_i$) también $(\bigvee x\,\phi(x,x_1,\ldots,x_n))^{V_\kappa}$. ■

La definición de cardinal fuerte tiene una característica que no había aparecido hasta ahora, y es que involucra a todos los ordinales, por lo que no es absoluta para modelos V_μ. Por el contrario, influye en las propiedades de estos modelos para μ arbitrariamente grande. El teorema siguiente es una muestra de ello (compárese con 5.6):

Teorema 7.21 *Si κ es un cardinal fuerte y V_κ cumple la hipótesis del continuo generalizada, entonces se cumple la hipótesis del continuo generalizada.*

DEMOSTRACIÓN: Vamos a probar, más específicamente, que si κ es α-fuerte con $\kappa \leq \alpha$ y V_κ cumple la hipótesis del continuo generalizada, entonces todo cardinal $\mu \leq \alpha$ cumple $2^\mu = \mu^+$.

En efecto, sea $j : V \longrightarrow M$ una inmersión elemental de punto crítico κ tal que $\alpha < j(\kappa)$ y $V_\alpha \subset M$. Como $\bigwedge \mu < \kappa\ 2^\mu = \mu^+$, también se cumple que $\bigwedge \mu < j(\kappa)\ (2^\mu)^M = (\mu^+)^M$, luego si $\mu < \alpha < j(\kappa)$ entonces $(2^\mu)^M = (\mu^+)^M$.

Pero $\mu \leq \alpha$, luego $\mathcal{P}\mu \subset V_\alpha \subset M$, luego $\mathcal{P}^M\mu = \mathcal{P}\mu$, luego $(2^\mu)^M = 2^\mu$, luego $\mu^+ \leq 2^\mu = (2^\mu)^M \leq (\mu^+)^M \leq \mu^+$, luego $2^\mu = \mu^+$. ■

Podría conjeturarse que, por alguna clase de argumento similar al del teorema anterior, la existencia de un cardinal fuerte podría implicar la existencia de cardinales grandes mayores, pero el teorema siguiente muestra que no es así:

Teorema 7.22 *Si μ es un cardinal inaccesible y $\kappa < \mu$ es un cardinal α-fuerte para todo ordinal $\kappa \leq \alpha < \mu$, entonces κ es un cardinal fuerte$^{V_\mu}$.*

DEMOSTRACIÓN: Tomamos $\kappa \leq \alpha < \mu$ y sea $j : V \longrightarrow M$ una inmersión elemental tal que $\alpha < j(\kappa)$ y $V_\alpha \subset M$. Entonces $\lambda = |V_\alpha|^+ < \mu$ y, como $j(\kappa)$ es inaccesible^M, tenemos que

$$|V_\alpha| = |V_\alpha^M| \leq |V_\alpha|^M < j(\kappa),$$

luego $\lambda \leq j(\kappa)$. Por el teorema 7.15 la λ-restricción E de j cumple también $V_\alpha \subset \mathrm{Ult}_E(V)$, y además $\alpha < \lambda \leq j_E(\kappa)$.

Claramente $E \in V_\mu$ es un extensor$^{V_\mu}$ con punto crítico κ y soporte λ, luego en V_μ se cumple que $\alpha < \lambda \leq j_E(\kappa)$, y por 7.13 tenemos que $V_\alpha \subset \mathrm{Ult}_E(V_\mu)$. Así pues, κ es α-fuerte$^{V_\mu}$ para todo $\alpha < \mu$, luego es fuerte$^{V_\mu}$. ■

En particular, si κ es un cardinal fuerte y existe un (mínimo) cardinal inaccesible $\mu > \kappa$, resulta que V_μ es un modelo en el que existe un cardinal fuerte sin cardinales inaccesibles mayores que él.

Teorema 7.23 *Un extensor E con punto crítico κ es a lo sumo $j_E(\kappa)$-fuerte.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $j_E : V \longrightarrow M = \mathrm{Ult}_E(V)$ la inmersión canónica y llamemos $\mu = j_E(\kappa)$. Si $V_\mu \not\subset \mathrm{Ult}_E(V)$, entonces E no es μ-fuerte y no hay nada que probar. Suponemos, pues, que $V_\mu \subset \mathrm{Ult}_E(V)$ y vamos a ver que $V_{\mu+1} \not\subset \mathrm{Ult}_E(V)$.

Si $V_{\mu+1} \subset M$, entonces μ es inaccesible. En efecto, en principio tenemos que μ es inaccesible^M. Si $\nu < \mu$ es un cardinal, también es un cardinal^M, luego $(2^\nu)^M < \mu$, pero $\mathcal{P}^M\nu = \mathcal{P}\nu$, luego $2^\nu < \mu$. Esto implica que μ es un cardinal límite fuerte. Por otra parte, si $A \subset \mu$ no está acotado, tampoco está acotado^M, luego $|A|^M = \mu$, luego $|A| = \mu$. Esto implica que μ es regular, luego es inaccesible.

Si $[f, a] \in j_E(\kappa^+)$, por la nota posterior al teorema 7.6 podemos suponer que $f : \kappa \longrightarrow \kappa^+$ y $a \in \lambda \subset j_E(\kappa)$. Por consiguiente,

$$|j_E(\kappa^+)| \leq (\kappa^+)^\kappa \cdot j_E(\kappa) = 2^\kappa \cdot j_E(\kappa) \leq \mu.$$

Pero $j_E(\kappa^+) = (\mu^+)^M$ es un cardinal^M. Esto implica que el buen orden de μ que lo hace semejante a $j_E(\kappa^+)$ no puede estar en M. Se trata de un subconjunto de $\mu \times \mu$, pero este conjunto se puede biyectar con μ en M. La imagen del buen orden en μ por una biyección en M es un elemento de $V_{\mu+1}^M$ que no puede estar en M, y así E no es $\mu+1$-fuerte. ■

Definición 7.24 La *fortaleza* de un extensor E es el mayor ordinal α tal que $V_\alpha \subset \mathrm{Ult}_E(V)$.

Observemos que la fortaleza existe por el teorema anterior y porque si E es δ-fuerte para todo $\delta < \lambda$ entonces es obviamente λ-fuerte, luego el mínimo α tal que $V_\alpha \not\subset \mathrm{Ult}_E(V)$ no puede ser un ordinal límite, luego es de la forma $\beta+1$, y entonces β es la fortaleza de E.

Ahora podemos obtener una consecuencia notable de la existencia de un cardinal fuerte:

Teorema 7.25 *Si existe un cardinal fuerte, entonces*[1] $V \neq L(A)$*, para todo conjunto* A.

Demostración: Sea κ un cardinal fuerte y supongamos que $V = L(A)$. Sea α tal que $A \in V_\alpha$ y sea E un extensor α-cerrado con punto crítico κ. Entonces $A \in M = \mathrm{Ult}_E(V)$, luego

$$V = L(A) = (L(A))^M \subset M \subset V,$$

con lo que $V_{j_E(\kappa)+1} \subset \mathrm{Ult}_E(V)$, en contradicción con el teorema anterior. ■

Por el contrario, la existencia de un cardinal medible κ es consistente con que $V = L[D]$, para una medida normal D en κ.

Terminamos con un resultado sobre las ultrapotencias asociadas a los extensores fuertes:

Teorema 7.26 *Si κ es un cardinal λ-fuerte, donde λ es un ordinal límite cerrado para el buen orden canónico y con* $\mathrm{cf}\,\lambda > \kappa$*, entonces existe una inmersión elemental $j : V \longrightarrow M$ con punto crítico κ tal que $V_\lambda \subset M$ y ${}^\kappa M \subset M$.*

Demostración: Por definición de cardinal λ-fuerte existe una inmersión que cumple lo requerido salvo quizá la última propiedad, y por 7.15 podemos suponer que es la inmersión asociada a un extensor de soporte λ. Por la observación tras el teorema 7.10 esto se traduce en que todo elemento de M es de la forma $j(f)(a)$, donde $f \in {}^\kappa V$ y $a \in \lambda$.

Consideremos ahora $h \in M^\kappa$, de modo que, para cada $\delta < \kappa$, se cumple que $h(\delta) = j(f_\delta)(a_\delta)$, con $f_\delta \in V^\kappa$ y $a_\delta \in \lambda$. Por la hipótesis sobre la cofinalidad tenemos que $\{a_\delta\}_{\delta<\kappa} \in V_\lambda \subset M$. Por otra parte, como j deja invariantes a los ordinales menores que κ, es claro que $\{j(f_\delta)\}_{\delta<\kappa} = j(\{f_\delta\}_{\delta<\kappa})|_\kappa \in M$, luego $\{h(\delta)\}_{\delta<\kappa} \in M$.

Con esto hemos probado que si $h \in M^\kappa$ entonces $h[\kappa] \in M$, y si lo aplicamos a la función $h^*(\delta) = (\delta, h(\delta))$, concluimos que $h = h^*[\kappa] \in M$. ■

[1] Véase [PC Definición 3.42].

7.3 Cardinales superfuertes

Los cardinales superfuertes son los que tienen un extensor con la mayor fortaleza posible (de acuerdo con 7.23):

Definición 7.27 Un extensor E de punto crítico κ es *superfuerte* si tiene fortaleza $j_E(\kappa)$, es decir, si $V_{j_E(\kappa)} \subset \mathrm{Ult}_E(V)$.

Un cardinal κ es *superfuerte* si existe un extensor superfuerte con punto crítico κ.

El teorema 7.15 permite expresar esta propiedad en términos de inmersiones elementales arbitrarias:

Teorema 7.28 *Un cardinal κ es superfuerte si y sólo si existe una inmersión elemental $j : V \longrightarrow M$ en una clase transitiva M tal que $V_{j(\kappa)} \subset M$.*

Demostración: Una implicación es inmediata y, si existe j, entonces el teorema 7.15 con $\lambda = j(\kappa)$ implica que la λ-restricción E de j es un extensor superfuerte con punto crítico κ, luego κ es superfuerte. ■

Todo cardinal superfuerte κ es obviamente $\kappa + 2$-fuerte, luego cumple el teorema 7.17 y es medible y límite de cardinales medibles. Por otra parte, a diferencia de lo que sucede con los cardinales fuertes (teorema 7.22), un cardinal superfuerte implica la existencia de un cardinal inaccesible mayor. Más aún, hay infinitos cardinales medibles mayores:

Teorema 7.29 *Si κ es un cardinal superfuerte, entonces:*

a) Existen infinitos cardinales medibles mayores que κ.

b) Existe una medida normal D en κ tal que

$$\{\delta < \kappa \mid \delta \text{ es fuerte}^{V_\kappa}\} \in D.$$

Demostración: Sea $j : V \longrightarrow M$ una inmersión elemental con punto crítico κ tal que $V_{j(\kappa)} \subset M$. Sea $\mu = j(\kappa)$.

a) El conjunto $A = \{\nu < \kappa \mid \nu \text{ es medible}\}$ no está acotado en κ, por lo que $j(A) = \{\nu < \mu \mid \nu \text{ es medible}^M\}$ no está acotado en μ. Ahora basta observar que si $\nu < \mu$ es medible^M, entonces es medible, pues $\mathcal{P}^M\nu = \mathcal{P}\nu$ y, más aún, $(\mathcal{P}\mathcal{P}\nu)^M = \mathcal{P}\mathcal{P}\nu$, luego toda medida^M en ν es realmente una medida.

b) El teorema 7.22 implica que κ es fuerte$^{V_\mu}$, luego si D es la medida normal asociada a j y $k : \mathrm{Ult}_D(V) \longrightarrow M$ es la inmersión dada por el teorema 1.20, como $\mu = j(\kappa) = k(j_D(\kappa))$, también se cumple que κ es fuerte$^{V_{j_D(\kappa)}}$, y usando que $\kappa = [d]$ obtenemos la conclusión. ■

El apartado a) del teorema anterior implica que un cardinal fuerte no tiene por qué ser superfuerte (ya que puede haber cardinales fuertes sin cardinales inaccesibles mayores), mientras que el apartado b) implica que los cardinales superfuertes están por encima de los cardinales fuertes en la escala de consistencia. Sin embargo, el teorema siguiente implica que un cardinal superfuerte no es necesariamente fuerte:

Teorema 7.30 *Si κ es un cardinal fuerte y $\xi \geq \kappa$ es un cardinal superfuerte, entonces κ es límite de cardinales superfuertes.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos un extensor E con punto crítico ξ tal que $V_{j(\xi)} \subset \mathrm{Ult}_E(V)$. Sea $\mu = j(\xi)$.

Tomemos un cardinal $\alpha > \mu > \xi$ y sea $j : V \longrightarrow M$ una inmersión elemental con punto crítico κ tal que $\alpha < j(\kappa)$ y $V_\alpha \subset M$. Entonces $E \in V_\alpha \subset M$ y es claro que es un extensor en M. Vamos a probar que es superfuerte^M.

Como $V_\mu^\xi \subset V_\mu$, el teorema 7.12 nos da la inclusión $\mathrm{Ult}_E(V_\mu) \subset \mathrm{Ult}_E(M)$, y el teorema 7.13 implica que $V_\mu \subset \mathrm{Ult}_E(V_\mu) \subset \mathrm{Ult}_E(M)$. Falta probar que sigue siendo $\mu = j_E(\xi)^M$. Para ello observamos que, por la nota tras el teorema 7.6, todo $\delta < j(\xi)^M = [c_\xi, 0]$ es de la forma $\delta = [f, a]^M$, con $f \in {}^\xi\xi = {}^\xi\xi \cap M$. Es claro entonces que $[f, a]^M \mapsto [f, a]$ define una biyección que conserva el orden entre $j_E(\xi)^M$ y $j_E(\xi)$, luego tenemos la igualdad.

En definitiva tenemos que ξ es superfuerte^M, luego para todo $\delta < \kappa$ se cumple que

$$(\bigvee \xi(\delta < \xi < j(\kappa) \land \xi \text{ es superfuerte}))^M$$

luego $\bigvee \xi(\delta < \xi < \kappa \land \xi$ es superfuerte). ■

En particular, si existen cardinales fuertes y superfuertes, el menor cardinal fuerte es mayor que el menor cardinal superfuerte (y éste es un ejemplo de cardinal superfuerte que no es fuerte).

7.4 Cardinales de Woodin

Estudiamos ahora unos cardinales que, en cuanto a consistencia, se sitúan entre los cardinales fuertes y los superfuertes. Su definición es un tanto técnica, pero aparecen en algunas pruebas de consistencia de gran interés, como la del axioma de determinación.

Definición 7.31 Un cardinal κ es *α-fuerte respecto de un conjunto H* si existe un extensor E de punto crítico κ tal que $V_\alpha \subset \mathrm{Ult}_E(V)$ y $j_E(H \cap \kappa) \cap \alpha = H \cap \alpha$.

Un cardinal κ es *$< \alpha$-fuerte respecto a H* si es β-fuerte respecto a H para todo $\beta < \alpha$.

Un cardinal δ es un *cardinal de Woodin* si para todo $H \subset \delta$ existe un $\kappa < \delta$ que es $< \delta$-fuerte respecto de H.

Explícitamente, δ es un cardinal de Woodin si cumple:

$$\bigwedge H \subset \delta \bigvee \kappa < \delta \bigwedge \alpha < \delta \bigvee E(E \text{ es un extensor de punto crítico } \kappa$$
$$\land\, V_\alpha \subset \mathrm{Ult}_E(V) \land j_E(H \cap \kappa) \cap \alpha = H \cap \alpha).$$

Teorema 7.32 *Si δ es un cardinal de Woodin, entonces es inaccesible y el conjunto*

$$\{\kappa < \delta \mid \kappa \text{ es un cardinal medible}\}$$

es estacionario en δ. En particular δ es un cardinal de Mahlo.

Demostración: Se cumple que δ es un cardinal regular, pues si su cofinalidad fuera $\xi < \delta$, tomamos $H \subset \delta$ cofinal con cardinal ξ y tal que $H \cap \xi = \varnothing$. Sea $\kappa < \delta$ según la definición de cardinal de Woodin, sea $\alpha > \kappa$ tal que $H \cap \alpha$ contenga ordinales mayores que κ y sea E un extensor tal que

$$j_E(H \cap \kappa) \cap \alpha = H \cap \alpha.$$

Esto implica en particular que $H \cap \kappa \neq \varnothing$, luego $\xi < \kappa$, luego $|H \cap \kappa| \leq \xi < \kappa$, pero κ es un cardinal regular (es medible), luego $H \cap \kappa$ está acotado en κ, luego $j_E(H \cap \kappa) = H \cap \kappa = H \cap \alpha$, contradicción.

Ahora basta probar la segunda parte del teorema, pues entonces δ será límite de cardinales medibles, luego será un cardinal límite fuerte y, por consiguiente, inaccesible. Para ello tomamos un cerrado no acotado $H \subset \delta$ y hemos de probar que contiene un cardinal medible.

Sea $\kappa < \delta$ según la definición de cardinal de Woodin. Como H no está acotado en δ, podemos tomar $\kappa < \alpha < \delta$ tal que $H \cap \alpha$ contenga ordinales mayores que κ.

Si $H \cap \kappa$ estuviera acotado en κ, tendríamos que $j_E(H \cap \kappa) = H \cap \kappa = H \cap \alpha$, contradicción. Por lo tanto, $H \cap \kappa$ no está acotado en κ y, como H es cerrado, esto implica que $\kappa \in H$. ■

Sin embargo, enseguida veremos que los cardinales de Woodin no tienen por qué ser débilmente compactos. Para ello probamos lo siguiente:

Teorema 7.33 *Un cardinal δ es de Woodin si y sólo si para todo conjunto $H \subset \delta$ existe un cardinal $\kappa < \delta$ tal que para todo $\alpha < \delta$ existe un extensor E de punto crítico κ con soporte inaccesible $\lambda < \delta$ y fortaleza $\lambda > \alpha$ tal que $j_E(H \cap \kappa) \cap \lambda = H \cap \lambda$.*

Demostración: Una implicación es obvia. Para la contraria tomamos como $\lambda < \delta$ el menor cardinal inaccesible mayor que α, de modo que existe un extensor E de punto crítico κ que es λ-fuerte y $j_E(H \cap \kappa) \cap \lambda = H \cap \lambda$.

Sea E_λ la λ-restricción de E. Observamos que E_λ cumple también la definición de cardinal de Woodin: sigue siendo λ-fuerte por 7.15 (en particular α-fuerte) y sigue cumpliendo la última condición por 7.10, pues si k es la inmersión definida en dicho teorema, se cumple que $k(j_{E_\lambda}(H \cap \kappa)) = j_E(H \cap \kappa)$ y k fija a los ordinales menores que λ, luego

$$j_{E_\lambda}(H \cap \kappa) = j_E(H \cap \kappa) \cap \lambda = H \cap \lambda.$$

Así pues, cambiando E por E_λ, tenemos que E cumple el enunciado, salvo que falta probar que λ es también la fortaleza de E. Para ello adaptamos la prueba de 7.23: Observamos que $|j_E(\kappa^+)| \leq 2^\kappa \cdot \lambda \leq \lambda$ y, por otro lado, $\lambda \leq j_E(\kappa) < j_E(\kappa^+)$. Esto implica que $j_E(\kappa^+)$ tiene cardinal λ, pero es un cardinal^M (donde $M = \mathrm{Ult}_E(V)$), de donde se sigue que el buen orden en λ que lo hace semejante a $j_E(\kappa^+)$ no puede estar en M, y esto a su vez implica que j_E no es $\lambda + 1$-fuerte. ■

En particular, el teorema anterior implica que δ es un cardinal de Woodin si y sólo si

$$\bigwedge H \subset \delta \bigvee \kappa < \delta \bigwedge \alpha < \delta \bigvee E \in V_\delta(E \text{ es un extensor de punto crítico } \kappa$$

$$\wedge\, V_\alpha \subset \mathrm{Ult}_E(V) \wedge j_E(H \cap \kappa) \cap \alpha = H \cap \alpha)^{V_\delta}.$$

En efecto, la condición $V_\alpha \subset \mathrm{Ult}_E(V)$ (es decir, que E es α-fuerte) puede comprobarse en V_δ por el argumento empleado en la prueba del teorema 7.22, según el cual si $V_\alpha \subset \mathrm{Ult}_E(V)$, de hecho $V_\alpha \subset \mathrm{Ult}_E(V_\delta) = \mathrm{Ult}_E(V)^{V_\delta}$. Más concretamente, sabemos que si $f \in V_\delta^\kappa$, la clase $[f, a]$ es la misma calculada en V_δ o en V, y esto se aplica en particular a $j_E(H \cap \kappa) = [c_{H\cap\kappa}, 0]$, por lo que $j_E(H \cap \kappa)$ puede calcularse también en V_δ.

En resumen, tenemos que

$$\delta \text{ es un cardinal de Woodin} \leftrightarrow V_\delta \vDash \bigwedge H_2\, \phi(H_2),$$

donde la variable H_2 es de segundo orden y $\phi(H_2)$ es la fórmula de primer orden que resulta de sustituir $< \delta$ por $\in \Omega$ en la caracterización precedente. En resumen, existe una sentencia ψ de tipo Π^1_1 tal que

$$\delta \text{ es un cardinal de Woodin} \leftrightarrow V_\delta \vDash \psi.$$

Esto implica que el mínimo cardinal de Woodin no es Π^1_1-indescriptible, luego no es débilmente compacto.

Notemos ahora que la fórmula

$$\bigwedge \alpha < \delta \bigvee E \in V_\delta(E \text{ es un extensor de punto crítico } \kappa \wedge V_\alpha \subset \mathrm{Ult}_E(V))^{V_\delta}.$$

implica en particular que κ es fuerte$^{V_\delta}$, y hemos probado que todos los cardinales κ dados por la definición de cardinal de Woodin cumplen esto. Por lo tanto:

Teorema 7.34 *Si δ es un cardinal de Woodin, el conjunto*

$$\{\kappa < \delta \mid \kappa \text{ es fuerte}^{V_\delta}\}$$

es estacionario en δ.

Por lo tanto, los cardinales de Woodin están por encima de los cardinales fuertes en la escala de consistencia. Por otra parte:

Teorema 7.35 *Todo cardinal superfuerte δ es un cardinal de Woodin y existe una medida normal D en δ tal que*

$$\{\kappa < \delta \mid \kappa \text{ es un cardinal de Woodin}\} \in D.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea δ un cardinal superfuerte y sea E un extensor superfuerte con punto crítico δ. Sea $j : V \longrightarrow M$ la inmersión en la ultrapotencia y sea $\delta^* = j(\delta)$, de modo que $V_{\delta^*} \subset M$. Tomemos $\delta \leq \alpha < \delta^*$ y veamos que δ es α-fuerte^M. En virtud de 7.29, tomando un α mayor podemos suponer que α es inaccesible.

Tomamos $\alpha \leq \lambda < \delta^*$ tal que λ sea cerrado para el orden canónico en $\Omega \times \Omega$. Así, según 7.15, la λ-restricción E_α de j es α-fuerte, luego $V_\alpha \subset \mathrm{Ult}_{E_\alpha}(V)$. Notemos que $E_\alpha \in V_{\delta^*} \subset M$, y es claro que E_α es un extensor^M. Los teoremas 7.13 y 7.12 nos dan las inclusiones $V_\alpha \subset \mathrm{Ult}_{E_\alpha}(V_\alpha) \subset \mathrm{Ult}_{E_\alpha}(M)$.

Fijado $H \subset \delta$, vamos a probar que δ es α-fuerte^M respecto a $j(H)$. Para ello hemos de probar que

$$j_\alpha^M(j(H) \cap \delta) \cap \alpha = j(H) \cap \alpha,$$

pero como δ es el punto crítico de j, se cumple que $j(H) \cap \delta = H$, luego se trata de probar que

$$j_\alpha^M(H) \cap \alpha = j(H) \cap \alpha.$$

Esto a su vez se sigue de que $j_\alpha^M(H) \cap \lambda = j(H) \cap \lambda$, que es equivalente a $E_\alpha(H) = j(H) \cap \lambda$, lo cual es cierto por definición de λ-restricción.

Con esto tenemos que δ es $< \delta^*$-fuerte respecto a $j(H)$ en M, luego se cumple que $(\bigvee \kappa < j(\delta)\ \kappa$ es $< j(\delta)$-fuerte respecto a $j(H))^M$, y por consiguiente también $\bigvee \kappa < \delta\ \kappa$ es $< \delta$-fuerte respecto a H. Así pues, δ es un cardinal de Woodin.

Con la notación previa al teorema anterior, tenemos que $V_\delta \vDash \bigwedge H_2\, \phi(H_2)$, pero $V_\delta = V_\delta^M$, y también $V_{\delta+1} = V_{\delta+1}^M$, por lo que los subconjuntos de δ son los mismos en M y en V. Consecuentemente $(V_\delta \vDash \bigwedge H_2\ \phi(H_2))^M$, luego δ es un cardinal de Woodin^M. Esto a su vez implica que el conjunto indicado en el enunciado pertenece a la medida normal asociada a j. ■

Así pues, en cuanto a consistencia, los cardinales de Woodin se sitúan entre los cardinales fuertes y los superfuertes, tal y como habíamos indicado.

7.5 Cardinales 1-extensibles

Los cardinales que vamos a introducir ahora nos permitirán relacionar los cardinales que hemos estudiado en este capítulo con los siguientes en la escala de los cardinales grandes.

Definición 7.36 Un ordinal κ es 1-*extensible* si existe un ordinal α y una inmersión elemental $j : V_{\kappa+1} \longrightarrow V_\alpha$ con punto crítico κ.

Notemos que j es una inmersión elemental de modelos transitivos del lenguaje de la teoría de conjuntos (que no son modelos de ZFC). También debemos observar que esta definición en términos de inmersiones elementales es válida en ZFC porque el concepto de inmersión elemental entre modelos que son conjuntos es definible en ZFC.

En principio no hemos exigido que κ sea un cardinal, sino meramente un ordinal. Sin embargo, a continuación demostramos que los "ordinales" 1-extensibles son en realidad cardinales medibles:

Teorema 7.37 *Los ordinales* 1*-extensibles son cardinales medibles.*

DEMOSTRACIÓN: Basta comprobar que la demostración de 1.20 se generaliza sin dificultad a nuestro contexto. Sea $j : V_{\kappa+1} \longrightarrow V_\alpha$ una inmersión elemental. Como κ es el mayor ordinal$^{V_{\kappa+1}}$, tenemos también que $\lambda = j(\kappa)$ es el mayor ordinal$^{V_\alpha}$, lo que obliga a que $\alpha = \lambda + 1$.

Por otra parte κ es un ordinal límite, pues si j fija a un ordinal, también fija a su sucesor, y es un cardinal, pues si existen $\xi < \kappa$ y $f : \xi \longrightarrow \kappa$ biyectiva, entonces $f \in V_{\kappa+1}$, luego $j(f) : \xi \longrightarrow j(\kappa)$ es biyectiva, pero, como j fija a los ordinales $\delta < \xi$, es inmediato que $j(f)(\delta) = f(\delta)$, luego $j(f) = f$, luego $j(\kappa) = \kappa$, contradicción.

Ahora definimos $D = \{X \subset \kappa \mid \kappa \in j(X)\}$ y se comprueba sin dificultad que es una medida normal en κ. Veremos únicamente la κ-completitud:

Sea $\beta < \kappa$ y sea $\{X_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ una familia de elementos de D, de modo que $\bigwedge \alpha < \beta\ \kappa \in j(X_\alpha)$. Sea $X = \bigcap\limits_{\alpha<\beta} X_\beta$. Hemos de probar que $X \in D$.

Aquí nos encontramos con un problema técnico, y es que, como los conjuntos X_α pueden tener rango κ, no podemos asegurar que $\{X_\alpha\}_{\alpha<\beta} \in V_{\kappa+1}$, ya que la sucesión es un conjunto de pares ordenados (α, X_α) y la estructura de los pares ordenados incrementa el rango en varias unidades. Este problema se resuelve observando que la sucesión está completamente determinada por el conjunto

$$C = \bigcup_{\alpha<\beta} \{\alpha\} \times X_\alpha \in V_{\kappa+1},$$

con lo que podemos considerar $j(C) \in V_{\lambda+1}$. Para calcular esta imagen vemos que

$$(\bigwedge x \in C \bigvee \alpha\gamma(x = (\alpha, \gamma) \land \alpha \in \beta)))^{V_{\kappa+1}},$$

luego

$$(\bigwedge x \in j(C) \bigvee \alpha\gamma(x = (\alpha, \gamma) \land \alpha \in \beta)))^{V_{\lambda+1}}.$$

Además:

$$(\bigwedge \gamma((\alpha, \gamma) \in C \leftrightarrow \gamma \in X_\alpha))^{V_{\kappa+1}},$$

luego también

$$(\bigwedge \gamma((\alpha, \gamma) \in j(C) \leftrightarrow \gamma \in j(X_\alpha)))^{V_{\lambda+1}}.$$

Todo esto implica que

$$j(C) = \bigcup_{\alpha<\beta} \{\alpha\} \times j(X_\alpha).$$

Por otra parte, $(\bigwedge \delta(\delta \in X \leftrightarrow \bigwedge \alpha < \beta\ (\alpha, \delta) \in C))^{V_{\kappa+1}}$, luego

$$(\bigwedge \delta(\delta \in j(X) \leftrightarrow \bigwedge \alpha < \beta\ (\alpha, \delta) \in j(C)))^{V_{\lambda+1}}$$

y esto equivale a que

$$j(X) = \bigcap_{\alpha<\beta} j(X_\alpha).$$

Por consiguiente $\kappa \in j(X)$, luego $X \in D$. ■

Sin embargo, los cardinales 1-extensibles son mucho más que cardinales medibles:

Teorema 7.38 *Si κ es un cardinal* 1*-extensible, entonces es superfuerte y existe una medida normal D en κ tal que*

$$\{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es superfuerte}\} \in D.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $j : V_{\kappa+1} \longrightarrow V_{\lambda+1}$ una inmersión elemental con punto crítico κ, donde $\lambda = j(\kappa)$.

Se cumple que la aplicación $E : \mathcal{P}\kappa \longrightarrow \mathcal{P}\lambda$ dada por $E(A) = j(A)$ es un extensor (μ, λ). Probaremos únicamente la completitud numerable, pues las propiedades restantes se comprueban sin dificultad.

Sea $\{A_i\}_{i\in\omega}$ una sucesión de subconjuntos de κ. Como en la prueba del teorema anterior, nos encontramos con el problema técnico de que la sucesión no está en $V_{\kappa+1}$, pero al igual que en la prueba de dicho teorema se prueba sin dificultad que

$$C = \bigcup_{i\in\omega} \{i\} \times A_i \in V_{\kappa+1}, \qquad j(C) = \bigcup_{i\in\omega} \{i\} \times j(A_i) \in V_{\lambda+1}.$$

Una fibra para $\{E(A_i)\}_{i\in\omega}$ es una sucesión de ordinales $F = \{\alpha_i\}_{i\in\omega}$ menores que λ, con lo que $\{\alpha_i\}_{i\in\omega} \in V_{\lambda+1}$. De este modo:

$$(\bigvee f(f : \omega \longrightarrow \Omega \land \bigwedge i \in \omega\ (i, f|_i) \in j(C)))^{V_{\lambda+1}},$$

luego

$$(\bigvee f(f : \omega \longrightarrow \Omega \land \bigwedge i \in \omega\ (i, f|_i) \in C))^{V_{\kappa+1}},$$

y esto significa que la sucesión original tiene una fibra.

Por lo tanto, podemos considerar la inmersión canónica $j_E : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_E(V)$, que tiene punto crítico κ. Veamos ahora que $j_E(\kappa) = \lambda$. En efecto, un elemento de $j_E(\kappa)$ es de la forma $[f, a]$, con $f : \kappa \longrightarrow \kappa$. Como $f \in V_{\kappa+1}$, podemos considerar $j(f) : \lambda \longrightarrow \lambda$. Sea $b = j(f)(a)$. Así se cumple que $[f, a] = [d, b] = b$, pues esto equivale a que

$$(a, b) \in E(\{(\alpha, \beta) \mid f(\alpha) = \beta\}) = \{(\alpha, \beta) \mid j(f)(\alpha) = \beta\},$$

es decir, a que $j(f)(a) = b$. Con esto hemos probado que $j_E(\kappa) \leq \lambda$, y la otra desigualdad es inmediata, pues λ es el soporte de E.

Así, para todo $A \subset \kappa$, se cumple que $j_E(A) \subset j_E(\kappa) = \lambda$, de modo que $j(A) = E(A) = j_E(A) \cap \lambda = j_E(A)$.

Como κ es un límite fuerte, existe una aplicación $f : \kappa \longrightarrow V_\kappa$ biyectiva. Sea $R \subset \kappa \times \kappa$ la relación que se corresponde a través de f con la relación de pertenencia en V_κ. Entonces V_κ es el colapso transitivo de (κ, R) y f es la función colapsante. Identificando a R con un subconjunto de κ, concluimos que $S = j(R) = j_E(R)$, luego, aplicando j, tenemos que V_λ es el colapso transitivo de λ con la relación S (esto es absoluto para $V_{\lambda+1}$), mientras que aplicando j_E tenemos que dicho colapso es $V_\lambda^{\mathrm{Ult}_E(V)}$, y de aquí podemos concluir que $V_\lambda^{\mathrm{Ult}_E(V)} = V_\lambda$, es decir, que $V_\lambda \subset \mathrm{Ult}_E(V)$, con lo que κ es superfuerte.

Observemos que

$$C = \bigcup_{A \in \mathcal{P}\kappa} \{A\} \times E(A) \in V_{\lambda+1}$$

y determina completamente a E. Ahora es fácil ver que existe una fórmula $\phi(\mu, \lambda)$ de forma que, para todo ordinal límite $\lambda > \omega$, la relativización $\phi^{V_{\lambda+1}}(\mu, \lambda)$ equivale a que $\mu \in V_{\lambda+1}$ sea el punto crítico de un extensor superfuerte de soporte λ. En efecto, la fórmula ϕ es la que afirma lo siguiente:

a) Existe un $C \subset \mathcal{P}\mu \times \lambda$ que determina un extensor E de punto crítico μ y soporte λ. No importa que el extensor E, como aplicación $\mathcal{P}\kappa \longrightarrow \mathcal{P}\lambda$, no pertenezca a $V_{\lambda+1}$. Lo que importa es que, para todo $A \subset \kappa$, el conjunto $E(A) = \{\alpha \in \lambda \mid (A, \alpha) \in C\}$ puede calcularse a partir de C.

   Notemos que $\mathcal{P}\mu$ es absoluto para $V_{\lambda+1}$, al igual que ser un extensor. Lo único que podría no ser absoluto es la completitud numerable, pero lo es porque $V_{\lambda+1}$ contiene todas las sucesiones de subconjuntos de μ, todas las sucesiones de ordinales menores que λ, y puede codificar cada sucesión de subconjuntos de λ mediante un subconjunto de $\omega \times \lambda$.

b) El extensor E cumple que $j_E(\mu) = \lambda$. Esto equivale a una fórmula relativizada a $V_{\lambda+1}$ porque equivale a que para toda función $f : \mu \longrightarrow \mu$ y todo $a < \lambda$, exista un $b < \lambda$ tal que $[f, a] = [d, b]$, es decir, tal que

$$(a, b) \in E(\{(\alpha, \beta) \mid f(\alpha) = \beta\}),$$

   y todo esto puede comprobarse desde dentro de $V_{\lambda+1}$.

c) El extensor E cumple que $V_\lambda \subset \mathrm{Ult}_E(V)$. Esto equivale a una fórmula relativizada a $V_{\lambda+1}$ porque equivale a que existe una biyección $f : \mu \longrightarrow V_\mu$ tal que si $R \subset \mu \times \mu$ codifica a través de f la pertenencia en V_μ, entonces V_λ es el colapso transitivo de $(\lambda, E(R))$.

Tenemos entonces que κ cumple $\phi^{V_{\lambda+1}}(\kappa, \lambda)$, luego $\kappa \in j(A)$, donde

$$A = \{\mu < \kappa \mid \phi^{V_{\kappa+1}}(\mu, \kappa)\} \subset \{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es superfuerte}\}.$$

Por consiguiente, el conjunto de la derecha pertenece a la medida normal D construida en el teorema anterior. ■

Capítulo VIII

Cardinales compactos y supercompactos

Los cardinales compactos los definimos incidentalmente en el capítulo II al caracterizar los cardinales débilmente compactos como aquellos cardinales fuertemente inaccesibles κ tales los lenguajes formales de tipo (κ, κ) o $(\kappa, \aleph_0)$ satisfacen el teorema de compacidad débil. Allí anticipamos que si en lugar de considerar el teorema de compacidad débil consideramos el teorema de compacidad fuerte [TC 11.14], obtenemos los cardinales (fuertemente) compactos. Hemos pospuesto su estudio hasta este punto porque sucede que los cardinales compactos están por encima de los medibles en la escala de consistencia. Sin embargo, son los únicos para los que su posición exacta en la escala no es bien conocida. El estudio de los cardinales compactos lleva de forma natural a considerar los cardinales supercompactos, que son cardinales compactos y están por encima de los cardinales 1-extensibles. Sin embargo, no se sabe si la existencia de cardinales compactos es equiconsistente con la de cardinales supercompactos o si, por el contrario, los cardinales compactos están en un punto intermedio de la escala por encima de los medibles[1] y por debajo de los supercompactos.

8.1 Cardinales compactos

Al igual que los cardinales débilmente compactos, los fuertemente compactos admiten caracterizaciones variadas. Conviene tomar como definición una de las formalmente más sencillas, que no involucre lenguajes infinitos.

Definición 8.1 Diremos que un cardinal regular no numerable κ es *(fuertemente) compacto* si todo filtro κ-completo sobre todo conjunto A se extiende a un ultrafiltro κ-completo en A.

[1]En realidad, técnicas avanzadas de la teoría de modelos internos permiten probar que la consistencia de los cardinales compactos está por encima de la de los cardinales de Woodin.

Es claro que todo cardinal compacto κ es medible, pues, al ser regular, el filtro

$$F = \{x \subset \kappa \mid |\kappa \setminus x| < \kappa\}$$

es κ-completo y contiene a los subconjuntos cofinitos de κ, luego un ultrafiltro κ-completo que lo extienda será necesariamente no principal, es decir, será una medida en κ.

Vamos a ver que para que un cardinal sea compacto basta con que ciertos filtros concretos puedan extenderse hasta ultrafiltros:

Si A es un conjunto tal que $|A| \geq \kappa$, definimos[2]

$$\mathcal{P}^{<\kappa}(A) = \{P \subset A \mid |P| < \kappa\}.$$

Para cada $P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(A)$ sea $\hat{P} = \{Q \in \mathcal{P}^{<\kappa}(A) \mid P \subset Q\}$. Es fácil ver que, si κ es regular, el conjunto

$$F = \{X \subset \mathcal{P}^{<\kappa}(A) \mid \bigvee P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(A)\ \hat{P} \subset X\} \tag{8.1}$$

es un filtro κ-completo en $\mathcal{P}^{<\kappa}(A)$.

Una *medida fina* en $\mathcal{P}^{<\kappa}(A)$ es un ultrafiltro κ-completo U en $\mathcal{P}^{<\kappa}(A)$ que extiende a F, es decir, tal que $\bigwedge P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(A)\ \hat{P} \in U$.

En realidad, para que un ultrafiltro κ-completo U en $\mathcal{P}^{<\kappa}(A)$ sea una medida fina es suficiente con que $\bigwedge a \in A\ \widehat{\{a\}} \in U$, pues el caso general se sigue por la κ-completitud.

Si U es una medida fina en $\mathcal{P}^{<\kappa}(A)$, entonces U es un ultrafiltro no principal, pues para todo $P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(A)$ existe un $a \in A \setminus P$, y como $\{a\} \in \mathcal{P}^{<\kappa}(A)$, también $\widehat{\{a\}} \in U$, pero $P \notin \widehat{\{a\}}$, luego $\widehat{\{a\}} \subset \mathcal{P}^{<\kappa}(A) \setminus \{P\} \in U$, luego $\{P\} \notin U$.

Ahora podemos probar que los cardinales compactos son lo que hemos anticipado que son:

Teorema 8.2 *Sea κ un cardinal regular no numerable. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) κ es compacto.

b) Para todo conjunto A tal que $|A| \geq \kappa$, existe una medida fina en $\mathcal{P}^{<\kappa}(A)$.

c) Todo lenguaje formal de tipo (κ, κ) cumple el teorema de compacidad.

d) Todo lenguaje formal de tipo $(\kappa, \aleph_0)$ cumple el teorema de compacidad.

DEMOSTRACIÓN: a) $\rightarrow$ b) es inmediato, pues el filtro F definido en (8.1) se extiende a una medida fina en $\mathcal{P}^{<\kappa}(A)$.

b) $\rightarrow$ c) Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje formal de tipo (κ, κ) y Σ un conjunto de sentencias de $\mathcal{L}$ tal que todo subconjunto $S \subset \Sigma$ con $|S| < \kappa$ tiene un modelo M_S.

[2]Notemos que este conjunto es el que llamamos $\mathcal{P}_\kappa A$ en el apéndice B de [PC].

Sea U una medida fina en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma)$ y sea M el ultraproducto de los modelos $\{M_S\}_{S\in\mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma)}$. Entonces M es un modelo de $\mathcal{L}$ y el teorema de los ultraproductos [TC 11.31] es válido para fórmulas de tipo (κ,κ) con el enunciado siguiente: Si

$$v:\mathrm{Var}(\mathcal{L})\longrightarrow\prod_{S\in\mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma)}M_S,$$

definimos $v^*:\mathrm{Var}(\mathcal{L})\longrightarrow M$ mediante $v^*(x)=[v(x)]$ y para cada $S\in\mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma)$ definimos $v_S:\mathrm{Var}(\mathcal{L})\longrightarrow M_S$ mediante $v_S(x)=v(x)(S)$. Entonces

$$M\vDash\phi[v^*]\leftrightarrow\{S\in\mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma)\mid M_S\vDash\phi[v_S]\}\in U.$$

La demostración es la misma que la de [TC 10.31] (ahora por inducción sobre el rango de ϕ) salvo que hay que añadir dos casos más, correspondientes al conjuntor infinito y al generalizador infinito:

$$M\vDash\bigwedge_{\delta<\beta}\phi_\delta[v^*]\leftrightarrow\bigwedge\delta<\beta\ M\vDash\phi_\delta[v^*]$$

$$\leftrightarrow\bigwedge\delta<\beta\ \{S\in\mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma)\mid M_S\vDash\phi_\delta[v_S]\}\in U$$
$$\leftrightarrow\bigcap_{\delta<\beta}\{S\in\mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma)\mid M_S\vDash\phi_\delta[v_S]\}\in U$$
$$\leftrightarrow\{S\in\mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma)\mid M_S\vDash\bigwedge_{\delta<\beta}\phi_\delta[v_S]\}\in U.$$

Para el caso del generalizador infinito probamos la coimplicación de las negaciones. Si $\neg M\vDash\bigwedge_{\delta<\beta}x_\delta\,\phi[v^*]$, entonces existe $w:\mathrm{Var}(\mathcal{L})\longrightarrow\prod_{S\in\mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma)}M_S$ tal que la correspondiente w^* coincide con v^* sobre las variables distintas de las x_δ y $M\vDash\neg\phi[w^*]$. Podemos exigir, de hecho, que v y w coincidan sobre las variables distintas de las x_δ.

Por hipótesis de inducción para $\neg\phi$ (aquí usamos el caso del negador, probado en [TC 10.31]),

$$\{S\in\mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma)\mid M_S\vDash\neg\phi[w_S]\}\in U,\tag{8.2}$$

luego

$$\{S\in\mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma)\mid\neg M_S\vDash\bigwedge_{\delta<\beta}x_\delta\,\phi[w_S]\}\in U\tag{8.3}$$

(pues este conjunto contiene al anterior). En consecuencia,

$$\{S\in\mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma)\mid M_S\vDash\bigwedge_{\delta<\beta}x_\delta\,\phi[w_S]\}\notin U.$$

Recíprocamente, si se cumple esto último, y por consiguiente (8.3), definimos $w:\mathrm{Var}(\mathcal{L})\longrightarrow\prod_{S\in\mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma)}M_S$ de manera que coincida con v sobre las variables distintas de las x_δ y para cada S en el conjunto de (8.3) se cumpla $M_S\vDash\neg\phi[w_S]$. Por hipótesis de inducción (para $\neg\phi$) se cumple (8.2), luego $\neg M\vDash\bigwedge_{\delta<\beta}x_\delta\,\phi[v^*]$.

En particular, para toda sentencia ϕ de $\mathcal{L}$ tenemos que

$$M\vDash\phi\leftrightarrow\{S\in\mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma)\mid M_S\vDash\phi\}\in U.$$

Ahora bien, si $\phi \in \Sigma$, como U es una medida fina,

$$\{S \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma) \mid \phi \in S\} \in U,$$

luego $\{S \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\Sigma) \mid M_S \vDash \phi\} \in U$, pues este conjunto contiene al anterior, luego $M \vDash \phi$. Así pues, $M \vDash \Sigma$ y se cumple el teorema de compacidad.

c) $\rightarrow$ d) es evidente.

d) $\rightarrow$ a). Sea A un conjunto y F un filtro κ-completo en A. Consideremos un lenguaje formal de tipo $(\kappa, \aleph_0)$ que conste de un relator monádico R_x para cada $x \subset A$ y de una constante c. Sea $\mathcal{L}^*$ como $\mathcal{L}$ pero sin la constante.

Llamemos M al modelo de $\mathcal{L}^*$ de universo A y en el que cada relator R_x se interpreta como la pertenencia a x. Sea Δ el conjunto de las sentencias de $\mathcal{L}^*$ verdaderas en M. Sea $\Sigma = \Delta \cup \{R_x c \mid x \in F\}$. Vamos a probar que todo $S \subset \Sigma$ con $|S| < \kappa$ tiene un modelo. Dado S, sea $Y = \{x \in F \mid R_x c \in S\}$. Entonces $|Y| < \kappa$, luego al ser F un filtro κ-completo, tenemos que $\bigcap\limits_{x \in Y} x \in F$. Claramente M se convierte en un modelo de S sin más que interpretar la constante c como cualquier elemento de esta intersección.

Por hipótesis Σ tiene un modelo N. Sea $U = \{x \in \mathcal{P}A \mid N \vDash R_x c\}$. Vamos a probar que U es un ultrafiltro κ-completo en A que extiende a F.

Si $x \in F$, entonces $R_x c \in \Sigma$, luego $N \vDash R_x c$, luego $x \in U$. Así pues, $F \subset U$. En particular $A \in U$.

Como $M \vDash \bigwedge u \neg R_\varnothing u$, lo mismo vale para N, luego $N \vDash \neg R_\varnothing c$ y, por consiguiente $\varnothing \notin U$.

Si $x \in U$ y $x \subset y \subset A$, entonces $M \vDash \bigwedge u(R_x u \rightarrow R_y u)$, luego lo mismo vale para N y, como $N \vDash R_x c$, también $N \vDash R_y c$, luego $y \in U$.

Supongamos que $\{x_\delta\}_{\delta<\beta} \subset U$, con $\beta < \kappa$. Sea $x = \bigcap\limits_{\delta<\beta} x_\delta$. Entonces

$$M \vDash \bigwedge u(\bigwedge_{\delta<\beta} R_{x_\delta} u \rightarrow R_x u),$$

luego N cumple lo mismo y, como para todo $\delta < \beta$ se cumple $N \vDash R_{x_\delta} c$, también $N \vDash \bigwedge\limits_{\delta<\beta} R_{x_\delta} c$, luego $N \vDash R_x c$ y $x \in U$.

Finalmente, si $x \subset A$, entonces $M \vDash \bigwedge u(R_x u \vee R_{A \setminus x} u)$, luego N cumple lo mismo y, en particular, $N \vDash R_x c \vee R_{A \setminus x} c$, luego $x \in U \vee A \setminus x \in U$. ■

Es claro que la existencia o no de una medida fina en $\mathcal{P}^{<\kappa}(A)$ depende únicamente del cardinal de A, por lo que podemos descomponer como sigue la noción de compacidad:

Definición 8.3 Si κ es un cardinal regular no numerable y $\mu \geq \kappa$, diremos que κ es *μ-compacto* si existe una medida fina en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$.

Es inmediato entonces que κ es compacto si y sólo si es μ-compacto para todo cardinal $\mu \geq \kappa$. Así resulta patente que la definición de cardinal compacto es similar a la de cardinal fuerte en cuanto a que involucra a todos los cardinales mayores que κ.

La μ-compacidad admite una caracterización en términos de inmersiones elementales:

Teorema 8.4 *Si $\kappa \leq \mu$ son dos cardinales, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) κ es μ-compacto.

b) Existe una inmersión elemental $j : V \longrightarrow M$ de punto crítico κ tal que para todo $X \subset M$ con $|X| \leq \mu$ existe un $Y \in M$ tal que $X \subset Y$ y $|Y|^M < j(\kappa)$.

c) κ es regular no numerable y, para todo conjunto A, todo filtro κ-completo en A generado por a lo sumo μ conjuntos[3] *se extiende a un ultrafiltro κ-completo en A.*

Demostración: a) $\Rightarrow$ b) Sea U una medida fina en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ y $j : V \longrightarrow M$ la inmersión canónica en la ultrapotencia $M = \mathrm{Ult}_U(V)$ (que está bien fundada por el teorema 1.14). Sea $X \subset M$ con $|X| \leq \mu$. Digamos que $X = \{[f_\alpha] \mid \alpha < \mu\}$. Sea $F : \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \longrightarrow V$ dada por $F(x) = \{f_\alpha(X) \mid \alpha \in x\}$ y llamemos $Y = [F]$. Entonces,

$$\widehat{\{\alpha\}} \subset \{x \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid \alpha \in x\} \subset \{x \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid f_\alpha(x) \in F(x)\},$$

luego estos conjuntos están en U y así $[f_\alpha] \in [F]$, luego $X \subset Y \in M$. Además

$$(|[F]| < |[c_\kappa]|)^M \leftrightarrow \{x \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid |F(x)| < \kappa\} = \mathcal{P}^{<\kappa}\mu \in U,$$

luego $|Y|^M < j(\kappa)$.

Por último, la κ-completitud implica que j fija a todos los ordinales $< \kappa$ (por el teorema 1.13) y lo que acabamos de probar aplicado a $X = \kappa$ nos da que existe un Y tal que $\kappa \subset Y$ y $|Y|^M < j(\kappa)$, luego $\kappa \leq |Y|^M < j(\kappa)$, luego κ es el punto crítico de j.

b) $\Rightarrow$ c) Claramente κ es medible, luego es regular no numerable. Consideremos conjuntos $G \subset A$ tales que $|G| \leq \mu$ y de modo que G genere un filtro κ-completo F en $\mathcal{P}A$. Sea j una inmersión elemental en las condiciones de b) y sea $j[G] \subset Y \in M$ con $|Y|^M < j(\kappa)$.

Entonces $(j(F)$ es un filtro $j(\kappa)$-completo en $\mathcal{P}j(A))^M$ y $|j(F) \cap Y|^M < j(\kappa)$. Por lo tanto existe un $c \in \bigcap(j(F) \cap Y)$. Definimos

$$U = \{X \in \mathcal{P}A \mid c \in j(X)\}.$$

Se comprueba sin dificultad que U es un ultrafiltro, y es κ completo, pues si $\{X_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ es una familia de elementos de U, con $\beta < \kappa$ entonces, el hecho de que j fije a los ordinales menores que κ hace que

$$j(\bigcap_{\alpha<\beta} X_\alpha) = \bigcap_{\alpha<\beta} X_\alpha,$$

con lo que c está en este conjunto y por lo tanto la intersección está en U.

[3] Aquí hay que entender que el filtro F está generado por G como filtro κ-completo, es decir, que F es el menor filtro κ-completo que contiene a G, no necesariamente el menor filtro que contiene a G.

Además, si $X \in G$, entonces $j(X) \in j(F) \cap Y$, luego $c \in j(X)$ y $X \in U$, luego $G \subset U$ y, por consiguiente, $F \subset U$.

c) $\Rightarrow$ a) Como κ es regular, el filtro $F = \{X \in \mathcal{P}^{<\kappa}\mu \mid \bigvee P \in \mathcal{P}^{<\kappa}\mu\ \hat{P} \subset X\}$ es κ-completo, y está generado (como filtro κ-completo), por $G = \{\widehat{\{\alpha\}} \mid \alpha < \mu\}$, luego se extiende a una medida fina en $\mathcal{P}^{<\kappa}\mu$. ■

Es evidente que si $\mu \leq \nu$, todo cardinal ν-compacto es μ-compacto, y que si κ es κ-compacto entonces es medible.

Veamos ahora algunas de las implicaciones que tiene la existencia de un cardinal compacto. Varias de ellas se deducen fácilmente del teorema siguiente:

Teorema 8.5 (Vopenka-Hrbacek) *Sea κ un cardinal compacto y A un conjunto de ordinales. Entonces, para todo cardinal $\mu \geq \kappa$ tal que $A \subset \mu$ se cumple que μ^+ es indescriptible$^{L[A]}$.*

Demostración: Sea $F = \{x \subset \mu^+ \mid |\mu^+ \setminus x| \leq \mu\}$. Claramente F es un filtro κ-completo en μ^+, que por compacidad se extiende a un ultrafiltro κ-completo U tal que $\bigwedge x \in U\ |x| = \mu^+$.

Definimos una ultrapotencia $\mathrm{Ult}^*_U(L[A])$ construida a partir de la clase de todas las funciones $f : \mu^+ \longrightarrow L[A]$ (sin exigir que $f \in L[A]$). La prueba del teorema fundamental 1.7 se adapta literalmente[4] y tampoco hay ningún inconveniente en probar que la ultrapotencia está bien fundada, luego podemos considerar su colapso transitivo $M = \mathrm{Ult}_U(L[A])$. Sea $j : L[A] \longrightarrow M$ la inmersión natural.

Por otra parte, consideramos la clase $P = \big\{f \in L[A]^{\mu^+} \bigm| |f[\mu^+]| \leq \mu\big\}$ y sobre ella construimos una ultrapotencia $\mathrm{Ult}^{*-}_U(L[A])$. Esta vez, para adaptar la prueba de 1.7 hay que observar que la función f que se construye en el caso del generalizador puede tomarse en P. Por lo demás la prueba es la misma, y así mismo se comprueba sin cambio alguno que la ultrapotencia está bien fundada, por lo que podemos considerar su colapso transitivo $N = \mathrm{Ult}^-_U(L[A])$. Llamaremos $i : L[A] \longrightarrow N$ a la inmersión natural.

Sea $k : N \longrightarrow M$ dada por $k([f]^-) = [f]$. Es claro que k está bien definida, es una inmersión elemental y además $i \circ k = j$.

Si $f : \mu^+ \longrightarrow \alpha$, para un $\alpha < \mu^+$, entonces $k|_{[f]^-} : [f^-] \longrightarrow [f]$ biyectiva, pues es inyectiva por ser elemental y todo elemento de $[f]$ es de la forma $[g]$, con $g : \mu^+ \longrightarrow \alpha$, luego $g \in P$, $[g]^- \in [f]^-$ y $k([g]^-) = [g]$. Como además k conserva la pertenencia y tanto $[f]^-$ como $[f]$ son ordinales, ha de ser $[f]^- = [f]$.

De aquí se sigue que $j(A) = i(A)$, pues si $[f] \in j(A)$ podemos exigir que $f : \mu^+ \longrightarrow A$, luego $f : \mu^+ \longrightarrow \mu$, luego $[f] = [f^-] \in i(A)$. Igualmente se prueba la otra inclusión.

Por consiguiente, $M = L[j(A)] = L[i(A)] = N$, luego $k : N \longrightarrow N$. Si probamos que $i(\mu^+)$ es el menor ordinal no fijado por k, el teorema 2.14 nos dará que $i(\mu^+)$ es indescriptible^N, y al ser i elemental, μ^+ será indescriptible$^{L[A]}$.

[4]Para el propósito de este teorema incluso puede simplificarse eliminando todo lo referente al descriptor.

Para ello observemos que $i(\mu^+) = \bigcup_{\alpha<\mu^+} i(\alpha)$. En efecto, si $[f]^- \in i(\mu^+)$ podemos exigir que $f : \mu^+ \longrightarrow \mu^+$ y, como $|f[\mu^+]| \leq \mu$, existe un $\alpha < \mu^+$ tal que $f : \mu^+ \longrightarrow \alpha$, con lo que $[f]^- \in i(\alpha)$.

Así pues, si $\beta < i(\mu^+)$, se cumple que $\beta < i(\alpha)$, para un $\alpha < \mu^+$, luego $\beta = [f]^-$, para un cierta $f : \mu^+ \longrightarrow \alpha$, luego $k(\beta) = k([f]^-) = [f] = [f]^- = \beta$.

Por otra parte, si d es la identidad en μ^+, es claro que todo $\alpha < \mu^+$ cumple $i(\alpha) = j(\alpha) < [d]$, luego $i(\mu^+) = \bigcup_{\alpha<\mu^+} i(\alpha) \leq [d]$, pero también es obvio que $[d] < j(\mu^+)$, luego en efecto, $i(\mu^+) < j(\mu^+) = k(i(\mu^+))$, es decir, $i(\mu^+)$ es el menor ordinal no fijado por k. ■

Como primera aplicación:

Teorema 8.6 *Si κ es un cardinal compacto y A es un conjunto cualquiera, entonces*[5] $V \neq L[A]$.

Demostración: Por [PC 3.19] existe un conjunto de ordinales A' tal que $L[A] = L[A']$. Sea $\mu \geq \kappa$ un cardinal tal que $A' \subset \mu$. Por el teorema anterior μ^+ es indescriptible$^{L[A]}$, pero obviamente no es indescriptible (ni siquiera es un cardinal límite), luego $V \neq L[A]$. ■

Si κ es un cardinal medible y U es una medida en κ, entonces $L[U]$ es un modelo donde κ es medible pero, por el teorema anterior, no es compacto. Por lo tanto, un cardinal medible no tiene por qué ser compacto. Más aún, no es posible demostrar la consistencia de que exista un cardinal compacto ni siquiera suponiendo la consistencia de que exista un cardinal medible:

Teorema 8.7 *Si κ es un cardinal compacto, existe un conjunto transitivo M tal que $M \vDash \mathrm{ZFC} + \bigvee\kappa$ κ es un cardinal medible.*

Demostración: Sea U una medida en κ, sea A un conjunto de ordinales tal que $L[U] = L[A]$, sea $\mu \geq \kappa$ un cardinal tal que $A \subset \mu$. Por 8.5 se cumple que μ^+ es indescriptible$^{L[U]}$, luego $M = (V_{\mu^+})^{L[U]}$ es un modelo transitivo de ZFC en el que κ es un cardinal medible. ■

En realidad puede probarse que si existe un cardinal compacto existe un modelo con infinitos cardinales de Woodin. Pero la existencia de un cardinal compacto no implica la existencia de ningún cardinal medible, aparte de él mismo.

Pasamos ahora a probar un teorema de Solovay sobre el efecto de los cardinales compactos sobre la función del continuo. Se trata de que los cardinales singulares mayores que un cardinal compacto cumplen necesariamente la hipótesis de los cardinales singulares. El grueso de la prueba es el teorema siguiente, que tiene interés en sí mismo:

[5]Notemos que esto implica a su vez que $V \neq L(A)$ para todo conjunto A. En efecto, si $V = L(A)$, cambiando A por $\operatorname{ct} A \cup \{A\}$ podemos suponer que A es transitivo. Sea κ su cardinal, sea $f : \kappa \longrightarrow A$ biyectiva, sea $R \subset \kappa \times \kappa$ la relación que se corresponde a través de f con la pertenencia en A, y así A es el colapso transitivo de (κ, R). Sea R' la imagen de R por una biyección constructible $\kappa \times \kappa \longrightarrow \kappa$. Entonces $V = L(R')$, en contradicción con el teorema.

Teorema 8.8 *Si κ es compacto y $\mu \geq \kappa$ es regular, entonces $\mu^{<\kappa} = \mu$.*

Demostración: Sea U una medida fina en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ y $j_U : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_U(V)$ la inmersión natural. Sea $[f]$ el menor ordinal en $\mathrm{Ult}_U(V)$ tal que

$$\bigcup_{\alpha<\mu} j_U(\alpha) \leq [f].$$

Sea $g : \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \longrightarrow \mu$ la aplicación dada por $g(P) = \bigcup\limits_{\alpha\in P} \alpha$. Como U es una medida fina, para todo $\alpha < \mu$ se cumple que

$$\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid \alpha \in P\} \in U,$$

luego $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid \alpha \leq g(P)\} \in U$. Esto se traduce en que $j_U(\alpha) \leq [g]$, luego $[f] \leq [g] < j_U(\mu)$. Por consiguiente podemos exigir que $f : \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \longrightarrow \mu$.

Sea $D = f[U] = \{X \subset \mu \mid f^{-1}[X] \in U\}$. Por 5.2 sabemos que D es un ultrafiltro κ-completo en μ. Veamos que todos sus elementos tienen cardinal μ. En efecto, si $\alpha < \mu$ entonces $j_U(\alpha) \leq [f]$, luego $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid \alpha \leq f(P)\} \in U$, luego $\{\beta < \mu \mid \alpha \leq \beta\} \in D$. De aquí se concluye que los elementos de D no están acotados en μ, luego tienen ciertamente cardinal μ.

Veamos ahora que $\{\alpha < \mu \mid \operatorname{cf} \alpha < \kappa\} \in D$, lo cual equivale[6] a que

$$\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid \operatorname{cf} f(P) < \kappa\} \in U.$$

Teniendo en cuenta que $|P \cap f(P)| < \kappa$, basta probar que

$$\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid f(P) = \bigcup_{\alpha\in P\cap f(P)} \alpha\} \in U.$$

Si llamamos $h : \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \longrightarrow \mu$ a la aplicación dada por $h(P) = \bigcup\limits_{\alpha\in P\cap f(P)} \alpha$, lo que hemos de probar es que $[f] = [h]$. Obviamente, $[h] \leq [f]$.

Sea $\alpha < \mu$. Como U es una medida fina, $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid \alpha \in P\} \in U$ y, como $j_U(\alpha) < [f]$, también $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid \alpha \in f(P)\} \in U$. Tomando la intersección tenemos que $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid \alpha \in P \cap f(P)\} \in U$, es decir, $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid \alpha \leq h(P)\} \in U$, lo cual se traduce en que $j_U(\alpha) \leq [h]$, para todo $\alpha < \mu$, luego $[f] \leq [h]$.

En resumen, D es un ultrafiltro κ-completo en μ cuyos elementos tienen todos cardinal μ y tal que casi todos los ordinales menores que μ (módulo D) tienen cofinalidad menor que κ. Consideremos ahora la ultrapotencia $\mathrm{Ult}_D(V)$ y la inmersión elemental natural $j_D : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_D(V)$.

Para cada $\alpha < \mu$ con $\operatorname{cf} \alpha < \kappa$, sea $A_\alpha \subset \alpha$ no acotado con $|A_\alpha| < \kappa$. En otro caso sea $A_\alpha = \varnothing$. Sea $g : \mu \longrightarrow V$ dada por $g(\alpha) = A_\alpha$ y sea $A = [g]_D$. Si d es la identidad en μ, tenemos que A no está acotado en $[d]_D$.

Veamos que si $\eta < \mu$ existe un η' tal que $\eta < \eta' < \mu$ de modo que

$$A \cap \{\gamma \mid j_D(\eta) \leq \gamma < j_D(\eta')\} \neq \varnothing.$$

[6] No suponemos que α sea un ordinal límite, sino que tomamos $\operatorname{cf} 0 = 0$ y $\operatorname{cf}(\alpha + 1) = 1$.

En efecto, dado $\eta < \mu$, del hecho de que los elementos de D tengan cardinal μ se sigue que $j_D(\eta) < [d]_D$, luego existe un $\gamma \in A$ tal que $j_D(\eta) \leq \gamma < [d]_D$. Sea $\gamma = [h]_D$. Así, $\{\alpha < \mu \mid h(\alpha) < \alpha\} \in D$, con lo que, según la definición de D, tenemos que $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid h(f(P)) < f(P)\} \in U$. Así $j_U(h)([f]_U) < [f]_U$, y por definición de $[f]$ ha de ser $j_U(h)([f]_U) < \bigcup\limits_{\alpha<\mu} j_U(\alpha)$. Por consiguiente, existe $\eta' < \mu$ tal que $j_U(h)([f]_U) < j_U(\eta')$. A su vez esto nos da que

$$\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid h(f(P)) < \eta'\} \in U,$$

luego $\{\alpha < \mu \mid h(\alpha) < \eta'\} \in D$ y así $\gamma = [h]_D < j_D(\eta') < [d]_D$. En conclusión, $\gamma \in A \cap \{\gamma \mid j_D(\eta) \leq \gamma < j_D(\eta')\}$.

Construimos una sucesión $\{\eta_\alpha\}_{\alpha<\mu}$. Hacemos $\eta_0 = 0$. Dado $\eta_\alpha < \mu$, elegimos $\eta_{\alpha+1}$ de modo que $\eta_\alpha < \eta_{\alpha+1} < \mu$ y

$$A \cap \{\gamma \mid j_D(\eta_\alpha) \leq \gamma < j_D(\eta_{\alpha+1})\} \neq \varnothing. \tag{8.4}$$

Para cada $\lambda < \mu$, tomamos $\eta_\lambda = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} \eta_\delta$.

Es claro que (8.4) se cumple también relativizado a $\mathrm{Ult}_D(V)$, luego

$$\bigl\{\beta < \mu \bigm| A_\beta \cap \{\gamma \mid \eta_\alpha \leq \gamma < \eta_{\alpha+1}\} \neq \varnothing\bigr\} \in D.$$

Si llamamos $B_\alpha = \{\gamma \mid \eta_\alpha \leq \gamma < \eta_{\alpha+1}\}$, tenemos que

$$\{\beta < \mu \mid A_\beta \cap B_\alpha \neq \varnothing\} \in D.$$

Definiendo $M_\beta = \{\alpha < \mu \mid A_\beta \cap B_\alpha \neq \varnothing\} \subset \mu$ tenemos que

$$\{\beta < \mu \mid \alpha \in M_\beta\} \in D.$$

Ahora, si $P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$, entonces

$$\{\beta < \mu \mid P \subset M_\beta\} = \bigcap_{\alpha \in P} \{\beta < \mu \mid \alpha \in M_\beta\} \in D.$$

En particular este conjunto no es vacío y existe un $\beta < \mu$ tal que $P \in \mathcal{P}M_\beta$.

Acabamos de probar que $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) = \bigcup\limits_{\beta<\mu} \mathcal{P}M_\beta$. Más aún, como $|A_\beta| < \kappa$ y los B_α son disjuntos dos a dos, es claro que también $|M_\beta| < \kappa$, luego

$$\mu \leq \mu^{<\kappa} = |\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)| = \Bigl|\bigcup_{\beta<\mu} \mathcal{P}M_\beta\Bigr| \leq \sum_{\beta<\mu} 2^{|M_\beta|} \leq \sum_{\beta<\mu} \kappa = \mu,$$

donde hemos usado que κ es fuertemente inaccesible. ■

Teorema 8.9 (Solovay) *Si κ es un cardinal compacto entonces la hipótesis de los cardinales singulares se cumple sobre κ, es decir, si $\mu > \kappa$ es un cardinal singular tal que $2^{\mathrm{cf}\,\mu} < \mu$, entonces $\mu^{\mathrm{cf}\,\mu} = \mu^+$.*

Demostración: Sea $\mu > \kappa$ un cardinal cualquiera. Por el teorema anterior, $\mu^{<\kappa} \leq (\mu^+)^{<\kappa} = \mu^+$. En particular $\mu^{\aleph_0} \leq \mu^+$ para todo cardinal $\mu > \kappa$. En particular, si $\mu > \kappa$ cumple $\operatorname{cf} \mu = \aleph_0$, entonces $\mu^{\operatorname{cf} \mu} = \mu^+$, es decir, la HCS se cumple para cardinales mayores que κ de cofinalidad numerable.

El teorema de Silver [TC 6.18] afirma que el mínimo cardinal que incumple la HCS ha de tener cofinalidad numerable. Modificando mínimamente la prueba podemos afirmar que el mínimo cardinal mayor que κ que incumple la HCS ha de tener cofinalidad numerable, con lo que concluimos que no puede existir tal cardinal.

En efecto, llamemos κ_0 al cardinal compacto para no entrar en conflicto con la notación del teorema de Silver. Sea $\kappa > \kappa_0$ el menor cardinal que incumple la HCS y supongamos que $\mu = \operatorname{cf} \kappa > \aleph_0$. Tenemos, pues, que $2^\mu < \kappa$ pero $\kappa^\mu > \kappa^+$.

En la prueba del teorema de Silver, podemos tomar la sucesión $\{\kappa_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ cofinal y normal en κ de modo que κ_0 sea el cardinal compacto. La única variación entonces es la comprobación de que $\bigwedge \nu < \kappa \ \nu^\mu < \kappa$. Por el teorema anterior esto es cierto si $\mu < \kappa_0$, luego podemos suponer que $\kappa_0 \leq \mu$. Entonces se cumple que ν^μ es uno de los cardinales ν, ν^+ o 2^μ, pues en la prueba del teorema [TC 6.18] el caso $\nu \leq 2^\mu$ no usa la HCS y el caso $\nu > 2^\mu \geq \mu \geq \kappa_0$ se prueba por inducción sobre ν y sólo se aplica la HCS a ν (en el caso en que es un cardinal límite), con la cual contamos. ■

8.2 Cardinales supercompactos

Muchas de las propiedades de los cardinales medibles las hemos obtenido a través del concepto de medida normal. Ahora vamos a definir una noción de medida fina normal que desempeña un papel similar al de medida normal en un cardinal medible pero con una diferencia notable: no es posible demostrar que si κ es un cardinal compacto entonces existen medidas finas normales en los conjuntos $\mathcal{P}^{<\kappa}(A)$. Por el contrario, la existencia de medidas finas normales determina una nueva clase de cardinales grandes, los cardinales supercompactos.

Teorema 8.10 *Sea κ un cardinal regular y A un conjunto tal que $|A| \geq \kappa$. Sea U una medida fina en $\mathcal{P}^{<\kappa}(A)$. Las propiedades siguientes son equivalentes:*

a) Si $\{C_a\}_{a\in A}$ es una familia de elementos de U, entonces

$$\mathop{\triangle}_{a\in A} C_a = \{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(A) \mid P \in \bigcap_{a\in P} C_a\} \in U.$$

b) Si $f : \mathcal{P}^{<\kappa}(A) \longrightarrow A$ cumple

$$\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(A) \mid f(P) \in P\} \in U,$$

existe un $x \in A$ tal que

$$\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(A) \mid f(P) = x\} \in U.$$

DEMOSTRACIÓN: a) $\Rightarrow$ b) Supongamos que para todo $x \in A$ se cumpliera que

$$C_x = \{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(A) \mid f(P) \neq x\} \in U.$$

Entonces podemos tomar $P \in \mathop{\triangle}\limits_{a\in A} C_a$ y, si $x = f(P) \in P$, tenemos que $P \in C_x$, luego $f(P) \neq x$, contradicción.

b) $\Rightarrow$ a) Sea $\{C_a\}_{a\in A}$ una familia de elementos de U y supongamos que $\mathop{\triangle}\limits_{a\in A} C_a \notin U$. Sea $C = \mathcal{P}^{<\kappa}(A) \setminus \mathop{\triangle}\limits_{a\in A} C_a \in U$. Así, si $P \in C$, existe un $f(P) \in P$ tal que $P \notin C_{f(P)}$. Si $P \notin C$ definimos $f(P) = \varnothing$, y así tenemos una función $f : \mathcal{P}^{<\kappa}(A) \longrightarrow A$ en las hipótesis de b). Por consiguiente, existe un $x \in A$ tal que $C' = \{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(A) \mid f(P) = x\} \in U$, pero entonces $C' \subset \mathcal{P}^{<\kappa}(A) \setminus C_x$, luego $C_x \notin U$, contradicción. ■

Definición 8.11 Si κ es un cardinal regular y A es un conjunto tal que $|A| \geq \kappa$, una *medida normal* en $\mathcal{P}^{<\kappa}(A)$ es una medida fina que cumpla las propiedades del teorema anterior.

Si $\mu \geq \kappa$, diremos que κ es *μ-supercompacto* si existe una medida normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$, lo cual equivale, obviamente, a que existe una medida normal en todo conjunto $\mathcal{P}^{<\kappa}(A)$ con $|A| = \mu$.

Diremos que κ es *supercompacto* si es μ-supercompacto para todo cardinal $\mu \geq \kappa$, lo cual equivale a que exista una medida normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(A)$ para todo conjunto A.

Notemos que no exigimos en la definición que κ sea no numerable, porque podemos demostrarlo: si D es una medida normal en $\mathcal{P}^{<\omega}(\mu)$, entonces

$$C_\alpha = \{x \in \mathcal{P}^{<\omega}\mu \mid \alpha + 1 \in x\} = \widehat{\{\alpha + 1\}} \in D,$$

pero $\mathop{\triangle}\limits_{\alpha\in\mu} C_\alpha = \{\varnothing\}$, pues si $P \in \mathop{\triangle}\limits_{\alpha\in\mu} C_\alpha$ no es vacío, como es un conjunto finito, tiene un máximo elemento α, y entonces $P \in C_\alpha$, luego $\alpha+1 \in P$, contradicción.

Es inmediato que todo cardinal μ-supercompacto es μ-compacto y que todo cardinal supercompacto es compacto, pero veremos que un cardinal compacto no tiene por qué ser supercompacto, es decir, que no puede probarse la existencia de medidas normales en un conjunto $\mathcal{P}^{<\kappa}(A)$ a partir del hecho de que exista una medida fina (en dicho conjunto o en cualquier otro).

La supercompacidad tiene una caracterización en términos de inmersiones elementales mucho más natural que la compacidad. Para obtenerla empezamos estudiando las ultrapotencias respecto a medidas normales:

Teorema 8.12 *Sea κ un cardinal μ-supercompacto, sea U una medida normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ y sea $j : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_U(V)$ la inmersión natural en la ultrapotencia asociada. Sea d la identidad en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$.*

a) Si $x \subset \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$, entonces $x \in U \leftrightarrow [d] \in j(x)$.

b) $[d] = j[\mu]$.

c) Si $x \subset \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$, *entonces* $x \in U \leftrightarrow j[\mu] \in j(X)$.

d) Si $f \in V^{\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)}$, *entonces* $[f] = j(f)([d])$.

Demostración: a) Claramente

$$x \in U \leftrightarrow \{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid P \in x\} \in U$$

$$\leftrightarrow \{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid d(P) \in c_x(P)\} \in U \leftrightarrow [d] \in j(x).$$

b) Si $\alpha < \mu$, como U es una medida fina, $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid \alpha \in P\} \in U$, luego $j(\alpha) \in [d]$. Recíprocamente, si $[f] \in [d]$, podemos suponer que $f : \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \longrightarrow \mu$. Ha de cumplirse que $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid f(P) \in P\} \in U$, luego por normalidad existe un $\alpha < \mu$ tal que $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid f(P) = \alpha\} \in U$, luego $[f] = j(\alpha) \in j[\mu]$. Así pues, $[d] = j[\mu]$.

c) Es consecuencia inmediata de a) y b).

d) Puesto que $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) = \{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid f(P) = c_f(P)(d(P))\} \in U$, se cumple que $[f] = [c_f]([d]) = j(f)([d])$. ■

Así pues, si κ es un cardinal medible y D es una medida normal en κ, la clase de la identidad $[d]$ representa a κ en la ultrapotencia, mientras que en el caso de una medida normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$, la clase de la identidad representa a $j[\mu]$. El teorema siguiente nos da representantes canónicos de κ y μ.

Teorema 8.13 *Sea κ un cardinal μ-supercompacto, sea U una medida normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ y consideremos la ultrapotencia asociada $\mathrm{Ult}_U(V)$. Para cada ordinal $\alpha \leq \mu$ sea $f_\alpha : \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \longrightarrow \kappa$ la función dada por $f_\alpha(P) = \mathrm{ord}(P \cap \alpha)$. Entonces $[f_\alpha] = \alpha$. Otra representación de κ es $\kappa = [g]$, donde $g : \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \longrightarrow \mathcal{P}\kappa$ viene dada por $g(P) = P \cap \kappa$.*

Demostración: Sea $j : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_U(V)$ la inmersión natural. Claramente $j(f_\alpha) : j(\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)) \longrightarrow j(\kappa)$ viene dada por $j(f_\alpha)(P) = \mathrm{ord}(P \cap j(\alpha))$. Por el teorema anterior, $[f_\alpha] = j(f_\alpha)([d]) = \mathrm{ord}([d] \cap j(\alpha)) = \mathrm{ord}\, j[\alpha] = \mathrm{ord}\, \alpha = \alpha$.

Igualmente, $j(g) : j(\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)) \longrightarrow j(\mathcal{P}\kappa)$ cumple $j(g)(P) = P \cap j(\kappa)$, de donde $[g] = j(g)([d]) = [d] \cap j(\kappa) = j[\kappa] = \kappa$, por el teorema 1.13. ■

Ahora conviene probar un resultado en un contexto general:

Teorema 8.14 *Sea U un ultrafiltro ω_1-completo en un conjunto S y llamemos $j : V \longrightarrow M = \mathrm{Ult}_U(V)$ a la inmersión natural en la ultrapotencia. Si μ es un cardinal, entonces $M^\mu \subset M$ si y sólo si $j[\mu] \in M$.*

Demostración: Supongamos que $j[\mu] \in M$, de modo que $j[\mu] = [h]$. Como $[h] \subset j(\mu)$, tenemos que $\{x \in S \mid h(s) \subset \mu\} \in U$, y podemos suponer que $h : S \longrightarrow \mathcal{P}\mu$.

Tomemos $f \in M^\mu$. Para cada $\alpha \in \mu$, sea $f(\alpha) = [g_\alpha]$ y sea $g : S \longrightarrow V$ la función dada por $g(x) : h(x) \longrightarrow V$ dada por $g(x)(\alpha) = g_\alpha(x)$. Entonces $[g] : [h] \longrightarrow V$ y $[g](j(\alpha)) = [g_\alpha]$, luego $\mathcal{R}f = \mathcal{R}[g] \in M$.

Pero entonces $\bar{f}(\alpha) = (\alpha, f(\alpha))$ cumple $\bar{f} \in M^\mu$ y, por lo que hemos probado, $f = \mathcal{R}\bar{f} \in M$, luego $M^\mu \subset M$.

El recíproco es trivial: si $M^\mu \subset M$, entonces $j|_\mu \in M$, luego también $j[\mu] = \mathcal{R}j|_\mu \in M$. ■

Ya podemos caracterizar los cardinales supercompactos en términos de inmersiones:

Teorema 8.15 *Sea κ un cardinal regular y $\mu \geq \kappa$ un cardinal. Si U es una medida normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ y $j_U : V \longrightarrow M = \mathrm{Ult}_U(V)$ es la inmersión natural en la ultrapotencia, entonces j_U tiene punto crítico κ, $\mu < j_U(\kappa)$ y $M^\mu \subset M$. Recíprocamente, si una inmersión elemental $j : V \longrightarrow M$ tiene estas propiedades, entonces*

$$U = \{x \subset \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid j[\mu] \in j(x)\}$$

es una medida normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ y existe una inmersión elemental k que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "j_U"'] & M \\ & \mathrm{Ult}_U(V) \arrow[u, "k"'] \end{tikzcd}$$

y que viene dada por $k([f]) = j(f)(j[\mu])$. Además, si k no es la identidad, su punto crítico es $> \mu$.

Demostración: Tenemos que j_U fija a los ordinales menores que κ por el teorema 1.13. Por 8.13 tenemos que $\mu = [f_\mu] < j_U(\kappa)$, pues $f_\mu : \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \longrightarrow \kappa$, luego κ es el punto crítico de j_U. Por 8.12 tenemos que $j[\mu] = [d] \in M$, y el teorema anterior nos da que $M^\mu \subset M$.

Supongamos ahora que j es arbitraria. Como $M^\mu \subset M$, se cumple $j[\mu] \in M$. Veamos que el conjunto U definido en el enunciado es ciertamente una medida normal. Notemos que

$$j(\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)) = \{x \subset j(\mu) \mid |x|^M < j(\kappa)\}.$$

Obviamente $j[\mu] \subset j(\mu)$ y además $|j[\mu]|^M = \mu < j(\kappa)$, luego $j[\mu] \in j(\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu))$, luego $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \in U$.

Es fácil probar que U es un ultrafiltro κ-completo. Veamos, por ejemplo, la κ-completitud. Sea $\beta < \kappa$ y $\{x_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ una familia de elementos de U. Sea $r : \beta \longrightarrow V$ la aplicación dada por $r(\alpha) = x_\alpha$. Como $j(\beta) = \beta$, tenemos que $j(r) : \beta \longrightarrow V$. Si $\alpha < \beta$ entonces $(\alpha, x_\alpha) \in r$ y, como j es elemental, $(\alpha, j(x_\alpha)) \in j(r)$, luego $j(r)(\alpha) = j(x_\alpha)$.

Ahora, $\bigwedge x(x \in \bigcap\limits_{\alpha<\beta} x_\alpha \leftrightarrow \bigwedge \alpha < \beta\ x \in r(\alpha))$, luego aplicando j y la transitividad de M concluimos que $j(\bigcap\limits_{\alpha<\beta} x_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha<\beta} j(x_\alpha)$. En consecuencia, $j[\mu] \in j(\bigcap\limits_{\alpha<\beta} x_\alpha)$, luego $\bigcap\limits_{\alpha<\beta} x_\alpha \in U$.

Veamos que U es una medida fina. Para ello tomamos $\alpha < \mu$. Entonces $j(\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid \alpha \in P\}) = \{P \in j(\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)) \mid j(\alpha) \in P\}$ y, como $j[\mu]$ pertenece claramente a este conjunto, concluimos que $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid \alpha \in P\} \in U$.

Ahora veamos que U es normal. Sea $f : \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \longrightarrow \mu$ una aplicación tal que $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid f(P) \in P\} \in U$. Entonces

$$j[\mu] \in j(\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid f(P) \in P\}) = \{P \in j(\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)) \mid j(f)(P) \in P\},$$

luego $j(f)(j[\mu]) \in j[\mu]$, es decir, $j(f)(j[\mu]) = j(\alpha)$, para un cierto $\alpha < \mu$. Por lo tanto $j[\mu] \in \{P \in j(\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)) \mid j(f)(P) = j(\alpha)\} = j(\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid f(P) = \alpha\})$, luego $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid f(P) = \alpha\} \in U$.

Es inmediato comprobar que k está bien definida, que es una inmersión elemental y que hace el diagrama conmutativo. Además fija a todos los ordinales $\alpha \leq \mu$, pues según 8.13 tenemos que $\alpha = [f_\alpha]$, luego

$$k(\alpha) = j(f_\alpha)(j[\mu]) = \operatorname{ord}(j[\mu] \cap j(\alpha)) = \alpha,$$

pues una semejanza viene dada por $\delta \mapsto j(\delta)$. ■

En particular:

Teorema 8.16 *Un cardinal κ es μ-supercompacto, para un cardinal $\mu \geq \kappa$, si y sólo si existe una inmersión elemental $j : V \longrightarrow M$ en una clase transitiva M con punto crítico κ tal que $\mu < j(\kappa)$ y $M^\mu \subset M$.*

Ahora es inmediato que si $\kappa \leq \mu \leq \nu$ y κ es ν-supercompacto, entonces también es μ-supercompacto. Comparando con el teorema 5.4 concluimos que un cardinal κ es medible si y sólo si es κ-supercompacto. También es fácil probar lo siguiente:

Teorema 8.17 *Todo cardinal supercompacto es fuerte.*

Demostración: Sea κ un cardinal supercompacto y sea $\alpha \geq \kappa$. Tomamos $\mu = |V_\alpha|$ y sea $j : V \longrightarrow M$ una inmersión elemental de punto crítico κ tal que $\mu < j(\kappa)$ y $M^\mu \subset M$.

Vamos a probar que $V_\alpha \subset M$. Para ello demostraremos por inducción que

$$\bigwedge \beta \leq \alpha\ V_\beta \subset M.$$

Si $\beta = 0$ o β es un ordinal límite, es trivial. Supongamos, pues, que $\beta < \alpha$ cumple que $V_\beta \subset M$ y veamos que lo mismo es cierto para $\beta + 1$.

Para ello tomamos a su vez $x \in V_{\beta+1}$, de modo que $x \subset V_\beta \subset V_\alpha \cap M$. Así $|x| \leq \mu$, luego existe $f : \mu \longrightarrow x$ suprayectiva. Entonces $f \in M^\mu \subset M$, luego también $x \in M$. ■

Precisando un poco más el argumento tenemos:

Teorema 8.18 *Si κ es un cardinal 2^κ-supercompacto, entonces es $\kappa+2$-fuerte.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mu = 2^\kappa$ y sea $j : V \longrightarrow M$ una inmersión elemental de punto crítico κ tal que $\mu < j(\kappa)$ y $M^\mu \subset M$. Como κ es inaccesible, tenemos que $|V_\kappa| = \kappa$ y $|V_{\kappa+1}| = \mu$. El argumento del teorema anterior nos da que $V_{\kappa+1} \subset M$, pero podemos dar un paso más, pues si $x \in V_{\kappa+2}$, entonces $x \subset V_{\kappa+1} \subset M$, luego $|x| \leq \mu$, luego $x \in M$, y así $V_{\kappa+2} \subset M$, lo que prueba que κ es $\kappa+2$-fuerte. ■

En particular, según el teorema 7.18, tenemos que $o(\kappa) = (2^\kappa)^+$ (y esto vale en particular para los cardinales supercompactos). Pero los cardinales 2^κ-supercompactos cumplen mucho más:

Teorema 8.19 *Si κ es un cardinal 2^κ-supercompacto existe una medida normal D en κ tal que*

$$\{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es 1-extensible}\} \in D.$$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos una inmersión elemental $j : V \longrightarrow M$ con punto crítico κ tal que $2^\kappa < j(\kappa)$ y $M^{2^\kappa} \subset M$. En la prueba del teorema anterior hemos visto que en estas circunstancias $V_{\kappa+2} \subset M$. Por lo tanto, $V_{\kappa+1} = V^M_{\kappa+1}$. Si llamamos $e = j|_{V_{\kappa+1}}$, entonces $e : V^M_{\kappa+1} \longrightarrow V^M_{j(\kappa)+1}$ y, como $|e| = 2^\kappa$, tenemos que $e \in M$. Más aún,

$$(e : V_{\kappa+1} \longrightarrow V_{j(\kappa)+1} \text{ es una inmersión elemental})^M.$$

En efecto, dada una fórmula[7] $\phi(x_1, \ldots, x_n)$, dados $x_1, \ldots, x_n \in V^M_{\kappa+1}$,

$$(\phi^{V_{\kappa+1}}(x_1, \ldots, x_n))^M \rightarrow \phi^{V^M_{\kappa+1}}(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \phi^{V_{\kappa+1}}(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\rightarrow (\phi^{V_{j(\kappa)+1}}(e(x_1), \ldots, e(x_n)))^M.$$

Así pues, κ es 1-extensible^M. Si llamamos $A = \{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es 1-extensible}\}$, entonces $j(A) = \{\mu < j(\kappa) \mid \mu \text{ es 1-extensible}^M\}$, luego $\kappa \in j(A)$, y esto significa que A pertenece a la medida normal asociada a j. ■

Sin embargo, un cardinal supercompacto no es necesariamente 1-extensible, o ni siquiera superfuerte. La razón es que por encima de un cardinal superfuerte siempre hay cardinales medibles (teorema 7.29), mientras que por encima de un cardinal supercompacto no tiene por qué haber más cardinales inaccesibles:

Teorema 8.20 *Si μ es un cardinal inaccesible y $\kappa < \mu$ es un cardinal ν-supercompacto para todo cardinal $\kappa \leq \nu < \mu$, entonces κ es supercompacto$^{V_\mu}$.*

[7] De hecho, podemos considerar una fórmula ψ perteneciente al conjunto de fórmulas del lenguaje de la teoría de conjuntos y aplicar el argumento a la fórmula $\phi(\kappa, s) \equiv V_{\kappa+1} \vDash \psi[s]$, con $s \in V^n_{\kappa+1}$. Así concluimos que e es una inmersión elemental^M en el sentido de la teoría de modelos.

Demostración: Es claro que si D es una medida normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}\nu$, entonces $D \in V_\mu$ y (D es una medida normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}\nu)^{V_\mu}$. Por lo tanto κ es supercompacto$^{V_\mu}$. ■

En particular, si κ es supercompacto y existe un (mínimo) cardinal inaccesible $\mu > \kappa$, entonces V_μ es un modelo en el que κ es supercompacto y no hay cardinales inaccesibles mayores, luego κ no es superfuerte en V_μ.

Se cumple un recíproco del teorema anterior:

Teorema 8.21 *Sea μ un cardinal ν-supercompacto, donde ν es un cardinal regular. Si $\kappa < \mu$ es un cardinal supercompacto$^{V_\mu}$, entonces es ν-supercompacto.*

Demostración: Sea U una medida normal en $\mathcal{P}^{<\mu}(\nu)$ y sea $j : V \longrightarrow M$ la inmersión natural en la ultrapotencia. Aplicando j a la hipótesis tenemos que $j(\kappa) = \kappa$ es ξ-supercompacto^M para todo cardinal^M tal que $\kappa \leq \xi < j(\mu)$. Como $\kappa \leq \nu < j(\mu)$, en particular κ es ν-supercompacto^M.

Como ν es regular, por 8.8 tenemos que $|\mathcal{P}^{<\kappa}(\nu)| \leq |\mathcal{P}^{<\mu}(\nu)| = \nu$ y, como $M^\nu \subset M$, se cumple que $\mathcal{P}\mathcal{P}^{<\kappa}(\nu) \subset M$. De aquí se sigue que si (D es una medida normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\nu))^M$, de hecho D es una medida normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\nu)$, con lo que κ es ν-supercompacto. ■

El teorema 7.21 se puede mejorar para el caso de cardinales supercompactos:

Teorema 8.22 *Si κ es un cardinal supercompacto y existe un cardinal $\nu \geq \kappa$ tal que $2^\nu > \nu^+$, entonces existen κ cardinales $\nu < \kappa$ que cumplen lo mismo. Por consiguiente, la* HCG *bajo κ implica la* HCG.

Demostración: Consideremos un cardinal $\mu > 2^\nu$, sea U una medida normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$, sea $M = \mathrm{Ult}_U(V)$ y $j : V \longrightarrow M$ la inmersión natural. Es claro que ν, ν^+ y 2^ν son cardinales^M, y del hecho de que $M^\mu \subset M$ se sigue que $\mathcal{P}\nu \subset M$, luego $(\mathcal{P}\nu)^M = \mathcal{P}\nu$, luego $(2^\nu > \nu^+)^M$.

Si $\delta < \kappa$, como $j(\delta) = \delta < \kappa \leq \nu < \mu < j(\kappa)$, tenemos que

$$\bigvee \nu(j(\delta) < \nu < j(\kappa) \wedge 2^\nu > \nu^+)^M,$$

luego $\bigvee \nu(\delta < \nu < \kappa \wedge 2^\nu > \nu^+)$. Como δ es arbitrario, hay κ cardinales ν en estas condiciones. ■

8.3 Cardinales extensibles

El teorema 8.19 muestra que los cardinales supercompactos, aunque no son necesariamente 1-extensibles (ya que ni siquiera tiene por qué ser superfuertes) dejan por debajo un conjunto estacionario de cardinales 1-extensibles. El teorema siguiente proporciona una prueba alternativa de que los cardinales supercompactos no tienen por qué ser 1-extensibles:

Teorema 8.23 *Si κ es supercompacto y 1-extensible, entonces existe una medida normal D en κ tal que*

$$\{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es supercompacto}\} \in D.$$

DEMOSTRACIÓN: Según vimos en la prueba de 7.37, si κ es extensible existe una inmersión elemental $j : V_{\kappa+1} \longrightarrow V_{j(\kappa)+1}$ y $D = \{X \subset \kappa \mid \kappa \in j(X)\}$ es una medida normal en κ.

Claramente, $j(\kappa)$ es inaccesible$^{V_{j(\kappa)+1}}$, y eso implica que es inaccesible, luego κ es supercompacto$^{V_{j(\kappa)}}$. Equivalentemente,

$$V_{j(\kappa)+1} \vDash \bigwedge\mu(\kappa \leq \mu < j(\kappa) \rightarrow \ \kappa \text{ es } \mu\text{-supercompacto}),$$

luego si $A = \{\nu < \kappa \mid \bigwedge\mu(\nu \leq \mu < \kappa \rightarrow \nu \text{ es } \mu\text{-supercompacto})\}$, tenemos que $\kappa \in j(A)$, luego $A \in D$, y si $\nu \in A$, entonces ν es supercompacto por 8.21. ■

Definición 8.24 Un cardinal κ es α-*extensible* si existe un ordinal β y una inmersión elemental $j : V_{\kappa+\alpha} \longrightarrow V_\beta$ con punto crítico κ. Se dice que κ es *extensible* si es α-extensible para todo ordinal $\alpha > 0$.

Claramente, los cardinales 1-extensibles en este sentido son los que ya teníamos definidos.

Teorema 8.25 *Si $0 < \alpha < \alpha'$, todo cardinal α'-extensible es α-extensible.*

DEMOSTRACIÓN: El resultado será inmediato si demostramos que V_α es definible en $V_{\alpha'}$, es decir, vamos a probar que existe una fórmula $\phi(\alpha, x)$ tal que si $\alpha < \alpha'$ entonces

$$V_{\alpha'} \vDash \phi[\alpha, x] \leftrightarrow x = V_\alpha.$$

En efecto, definimos:

$$\phi_1(f) \equiv \bigvee\gamma \in \Omega(f : \gamma \longrightarrow V \wedge \bigwedge\delta \in \gamma \ f(\delta) = \bigcup\{\mathcal{P}f(\epsilon) \mid \epsilon < \delta\})$$

$$\phi_2(f, \alpha, x) \equiv f : \alpha \longrightarrow V \wedge x = \bigcup\{\mathcal{P}f(\epsilon) \mid \epsilon < \alpha\})$$

$$\phi_3(f, \alpha, x) \equiv f : \alpha + 1 \longrightarrow V \wedge x = \mathcal{P}\bigcup\{\mathcal{P}f(\epsilon) \mid \epsilon < \alpha + 1\})$$

$$\phi_4(f, \alpha, x) \equiv f : \alpha + 2 \longrightarrow V \wedge x = \mathcal{P}\mathcal{P}\bigcup\{\mathcal{P}f(\epsilon) \mid \epsilon < \alpha + 2\})$$

$$\phi(\alpha, x) \equiv \bigvee f(\phi_1(f) \wedge (\phi_2(f, \alpha, x) \vee \phi_3(f, \alpha, x) \vee \phi_4(f, \alpha, x))).$$

Llamemos $f_\gamma : \gamma \longrightarrow V$ a la función que cumple $f_\gamma(\delta) = V_\delta$. Claramente, $V_{\alpha'} \vDash \phi[f]$ si y sólo si $f = f_\gamma$, para cierto $\gamma < \alpha'$. Si γ es un ordinal límite o bien $\gamma = 0$ entonces $f_\gamma \in V_{\gamma+1}$, y en otro caso $f_\gamma \in V_{\gamma+3}$.

Por lo tanto, si $x = V_\alpha$ y α es un ordinal límite, $\alpha = 0$ o bien $\alpha + 3 \leq \alpha'$, se cumple $f_\alpha \in V_{\alpha'}$, luego $V_{\alpha'} \vDash \bigvee f(\phi_1(f) \wedge \phi_2(f, \alpha, x))$.

Falta considerar los casos en que $\alpha = \delta + 1$ y $\alpha' = \alpha + 1 \vee \alpha' = \alpha + 2$. Si δ es un ordinal límite o $\delta = 0$, entonces $f_\delta \in V_\alpha$, luego $V_{\alpha'} \vDash \bigvee f(\phi_1(f) \wedge \phi_3(f, \alpha, x))$.

Si $\delta = \epsilon + 1$, entonces $f_\epsilon \in V_{\alpha+1} \subset V_{\alpha'}$, luego $V_{\alpha'} \vDash \bigvee f(\phi_1(f) \land \phi_4(f,\alpha,x))$.

Así pues, en cualquier caso se cumple $V_{\alpha'} \vDash \phi(\alpha, x)$. El recíproco es claro.

Ahora supongamos que κ es α'-extensible y sea $j : V_{\kappa+\alpha'} \longrightarrow V_\beta$ según la definición. Entonces $V_{\kappa+\alpha'} \vDash \phi(\kappa+\alpha, V_{\kappa+\alpha})$, luego $V_\beta \vDash \phi(j(\kappa+\alpha), j(V_{\kappa+\alpha}))$, es decir, $j(V_{\kappa+\alpha}) = V_{j(\kappa+\alpha)}$. Por lo tanto $j' = j|_{V_{\kappa+\alpha}} : V_{\kappa+\alpha} \longrightarrow V_{j(\kappa+\alpha)}$ y se trata de una inmersión elemental, pues

$$V_{\kappa+\alpha} \vDash \psi(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow V_{\kappa+\alpha'} \vDash \bigvee X(\phi(\kappa+\alpha, X) \land \psi^X(x_1,\ldots,x_n))$$

$$\leftrightarrow V_\beta \vDash \bigvee X(\phi(j(\kappa+\alpha), X) \land \psi^X(j(x_1),\ldots,j(x_n)))$$

$$\leftrightarrow V_{j(\kappa+\alpha)} \vDash \psi(j(x_1),\ldots,j(x_n))).$$

Por lo tanto κ es α-extensible. ■

Los cardinales extensibles son supercompactos. Para probarlo necesitamos un par de resultados previos:

Teorema 8.26 *Sea κ un cardinal infinito tal que $2^\kappa = \kappa^{\aleph_0}$. Entonces existe una función $f : {}^\omega\kappa \longrightarrow \kappa$ tal que si $A \subset \kappa$, $|A| = \kappa$ y $\gamma < \kappa$, existe una función $s \in {}^\omega A$ tal que $f(s) = \gamma$. En otros términos, para todo $A \subset \kappa$ con $|A| = \kappa$ se cumple que $f[A^\omega] = \kappa$.*

Demostración: Sea $\{(A_\alpha, \gamma_\alpha)\}_{\alpha<2^\kappa}$ una enumeración de todos los pares (A, γ) con $A \subset \kappa$, $|A| = \kappa$ y $\gamma < \kappa$. Definimos por recurrencia una sucesión $\{s_\alpha\}_{\alpha<2^\kappa} \subset {}^\omega\kappa$. Supuesta definida para $\beta < \alpha$, como $\kappa^{\aleph_0} = 2^\kappa > |\alpha|$, existe un $s_\alpha \in A_\alpha^\omega$ tal que $s_\alpha \neq s_\beta$ para todo $\beta < \alpha$.

Ahora definimos $f(s_\alpha) = \gamma_\alpha$ para todo $\alpha < 2^\kappa$ y $f(s) = 0$ si $s \neq s_\alpha$ para todo $\alpha < 2^\kappa$. Así, si $A \subset \kappa$, $|A| = \kappa$ y $\gamma < \kappa$, entonces $(A, \gamma) = (A_\alpha, \gamma_\alpha)$ para un $\alpha < 2^\kappa$, luego $f(s_\alpha) = \gamma_\alpha$ y $s_\alpha \in A_\alpha^\omega$. ■

Teorema 8.27 *Sea $j : V_\alpha \longrightarrow V_\beta$ una inmersión elemental con punto crítico $\kappa < \alpha$. Definimos $\kappa_0 = \kappa$ y, si está definido $\kappa_n \in V_\alpha$, definimos $\kappa_{n+1} = j(\kappa_n)$. Entonces, o bien existe un n tal que $\kappa_n > \alpha$, o bien está definido $\mu = \sup\limits_n \kappa_n$ y cumple $\alpha = \mu \lor \alpha = \mu + 1$*

Demostración: Suponemos que están definidos todos los $\kappa_n < \alpha$ y que, por consiguiente, está definido $\mu = \sup\limits_n \kappa_n \leq \alpha$. Supongamos que $\mu + 1 < \alpha$. Aplicando j vemos que $j(\mu) = \mu$.

Si $\alpha = \kappa + \delta$, entonces κ es δ-extensible, luego es medible, luego es fuertemente inaccesible. Como ser fuertemente inaccesible es absoluto para V_β, tenemos por inducción que todos los κ_n son cardinales inaccesibles. En particular $2^{\kappa_n} < \kappa_{n+1} < \mu$. Por consiguiente:

$$2^\mu = 2^{\sum\limits_{n<\omega} \kappa_n} = \prod_{n<\omega} 2^{\kappa_n} \leq \prod_{n<\omega} \mu = \mu^{\aleph_0} \leq \mu^\mu = 2^\mu.$$

El teorema anterior nos da entonces una función $f : {}^\omega\mu \longrightarrow \mu$ tal que para todo $A \subset \mu$ con $|A| = \mu$ se cumple $f[A^\omega] = \mu$.

Observemos que ${}^\omega\mu \subset V_\mu$, luego $f \subset {}^\omega\mu \times \mu \subset V_\mu$, luego $f \in V_{\mu+1} \subset V_\alpha$, luego podemos aplicar j a la propiedad que cumple f y obtenemos que

$$(\bigwedge A \subset \mu\, (|A| = \mu \rightarrow j(f)[A^\omega] = \mu)^{V_\beta}.$$

y, como $\mathcal{P}\mu \subset V_\beta$ (notemos que necesariamente $\alpha \leq \beta$), podemos eliminar la relativización y aplicar este hecho a $A = j[\mu] \subset \mu$. Tenemos que $j(f)[A^\omega] = \mu$, luego existe un $s \in A^\omega$ tal que $j(f)(s) = \kappa$. Como $s : \omega \longrightarrow j[\mu]$, existe $t : \omega \longrightarrow \mu$ tal que

$$\bigwedge n \in \omega\ s(n) = j(t(n))$$

o, equivalentemente, $\bigwedge n \in \omega\ s(n) = j(t)(n))$, luego $s = j(t)$. En definitiva, $\kappa = j(f)(s) = j(f)(j(t)) = j(f(t)) = j(\alpha)$, con $\alpha = f(t)$. Pero, esto es imposible, pues si $\alpha < \kappa$ entonces $j(\alpha) = \alpha < \kappa$, mientras que si $\kappa \leq \alpha$ entonces $\kappa < j(\kappa) \leq j(\alpha)$, contradicción. ■

Teorema 8.28 *Todo cardinal extensible es supercompacto.*

Demostración: Sea κ un cardinal extensible. Por el teorema de reflexión existe un ordinal límite $\lambda > \kappa$ tal que V_λ es un modelo transitivo de (el suficiente) ZFC y las fórmulas "κ es μ-supercompacto" y "κ es supercompacto" sean absolutas para V_λ. De este modo, basta probar que κ es μ-supercompacto para todo cardinal regular $\kappa \leq \mu < \lambda$, pues entonces κ será supercompacto$^{V_\lambda}$ y, por consiguiente, supercompacto.

Sea $j : V_\lambda \longrightarrow V_\beta$ una inmersión elemental con punto crítico κ. Definimos $\kappa_0 = \kappa$ y si $\kappa_n \in V_\lambda$ hacemos $\kappa_{n+1} = j(\kappa_n)$. Por el teorema anterior, o bien hay un n tal que $\kappa_n < \lambda \leq \kappa_{n+1}$, en cuyo caso aquí termina la sucesión, o bien $\lambda = \bigcup\limits_{n<\omega} \kappa_n$ (porque λ es un ordinal límite). Por lo tanto, basta demostrar que κ es μ-supercompacto para todo cardinal regular μ tal que $\kappa \leq \mu < \kappa_n$, donde n es cualquier natural para el que κ_n esté definido. Con ello lo estaremos probando para todo cardinal regular $\mu < \lambda$. Lo veremos por inducción sobre n.

En primer lugar hemos de probar que κ es μ-supercompacto para todo cardinal regular $\kappa \leq \mu < j(\kappa)$. Para ello basta observar que la prueba de 8.15 es válida en nuestro contexto cambiando V por V_λ y M por V_β. Notemos que $M^\mu \subset M$ es trivial en este caso.

Supongamos ahora que κ es μ-supercompacto para todo cardinal regular $\kappa \leq \mu < \kappa_n$. Lo mismo es cierto en V_λ, luego aplicando j obtenemos que $j(\kappa)$ es μ-supercompacto para todo cardinal regular $j(\kappa) \leq \mu < \kappa_{n+1}$. Aquí hemos usado que la μ-supercompacidad es —trivialmente— absoluta para V_λ y V_β (al igual que ser un cardinal regular).

Aplicamos el teorema 8.21: si $j(\kappa) \leq \mu < \kappa_{n+1}$ y μ es regular, tenemos que $j(\kappa)$ es μ-supercompacto y que κ es ξ-supercompacto para todo cardinal regular $\kappa \leq \xi < j(\kappa)$, luego concluimos que κ es también μ-supercompacto. En resumen, κ es μ-supercompacto para todo cardinal regular $\kappa \leq \mu < \kappa_{n+1}$. ■

Uniendo este teorema a 8.23 obtenemos inmediatamente:

Teorema 8.29 *Si κ es extensible existe una medida normal D en κ tal que*

$$\{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es supercompacto}\} \in D.$$

El teorema 8.20 implica que por encima de un cardinal supercompacto no tiene por qué haber cardinales inaccesibles. En cambio, un cardinal extensible es 1-extensible, luego superfuerte, y el teorema 7.29 nos da que existen cardinales inaccesibles (incluso medibles) por encima. Podemos decir más:

Teorema 8.30 *Si κ es un cardinal extensible, existen cardinales inaccesibles arbitrariamente grandes $\mu > \kappa$ tales que $V_\kappa \prec V_\mu$.*

Demostración: Sea $\alpha > \kappa$ un ordinal cualquiera y sea $j : V_{\alpha+2} \longrightarrow V_\beta$ una inmersión elemental con punto crítico κ. Definimos $\kappa_0 = \kappa$ y $\kappa_{n+1} = j(\kappa_n)$ mientras $\kappa_n < \alpha + 2$. Por el teorema 8.27 existe un n tal que $\mu = \kappa_n$ está definido y $\alpha + 2 \leq \mu$.

En la prueba del teorema 8.25 hemos visto que V_{κ_i} es definible en $V_{\alpha+1}$ (con κ_i como parámetro), por lo que $j(V_{\kappa_i}) = V_{\kappa_{i+1}}$, y a su vez esto implica que $j|_{V_{\kappa_i}} : V_{\kappa_i} \longrightarrow V_{\kappa_{i+1}}$ es una inmersión elemental. Componiéndolas todas obtenemos una inmersión elemental $j^n|_{V_\kappa} : V_\kappa \longrightarrow V_{\kappa_n}$, que por otra parte es la inclusión, ya que fija a todos los ordinales. Por lo tanto $V_\kappa \prec V_\mu$. ■

Como aplicación demostramos una versión más fuerte de 7.20:

Teorema 8.31 *Si κ es extensible, las fórmulas Σ_3 son absolutas para V_κ.*

Demostración: Consideremos una fórmula $\bigvee x\, \phi(x, x_1, \ldots, x_n)$, donde ϕ es Π_2 y sean $x_1, \ldots, x_n \in V_\kappa$. Si $\bigvee x \in V_\kappa\, \phi^{V_\kappa}(x, x_1, \ldots, x_n)$, el teorema 7.20 implica $\bigvee x\, \phi(x, x_1, \ldots, x_n)$ (si las fórmulas Σ_2 son absolutas para V_κ, las Π_2 también lo son).

Recíprocamente, supongamos que $\bigvee x\, \phi(x, x_1, \ldots, x_n)$. Por el teorema anterior existe un $\mu > \kappa$ inaccesible tal que $x \in V_\mu$ y $V_\kappa \prec V_\mu$. Como $V_\mu = H(\mu)$, el teorema [PC 2.35] afirma que las fórmulas Σ_1 son absolutas para V_μ, y como ϕ es Π_1, es absoluta hacia abajo, es decir, que se cumple $\bigvee x \in V_\mu\, \phi^{V_\mu}(x, x_1, \ldots, x_n)$ y por consiguiente también $\bigvee x \in V_\kappa\, \phi^{V_\kappa}(x, x_1, \ldots, x_n)$. ■

El teorema siguiente puede deducirse de 7.20 (comprobando que ser α-extensible es una propiedad Σ_2), pero también podemos dar una prueba directa:

Teorema 8.32 *Si κ es un cardinal α-extensible y $\mu > \kappa, \alpha$ es supercompacto, entonces (κ es α-extensible)$^{V_\mu}$.*

Demostración: Que κ sea α-extensible significa que existe una inmersión elemental $e : V_{\kappa+\alpha} \longrightarrow V_\beta$ con punto crítico κ. El problema para que sea extensible$^{V_\mu}$ es que, en principio, puede ser $\beta \geq \mu$.

Sea ν un cardinal tal que $|V_{\kappa+\alpha}| > \nu$, $|V_\beta| > \nu$ y sea $j : V \longrightarrow M$ una inmersión elemental con punto crítico μ tal que $j(\mu) > \nu$ y $M^\nu \subset M$.

Es claro entonces que $V_{\kappa+\alpha}^M = V_{\kappa+\alpha}$ y $V_\beta^M = V_\beta$, de donde a su vez $e \in M$ (usando siempre la condición de clausura $M^\nu \subset M$). También es claro entonces que $(e : V_{\kappa+\alpha} \longrightarrow V_\beta$ es una inmersión elemental$)^M$, y como $j(\mu) > \kappa + \alpha, \beta$, se cumple de hecho que $((\kappa$ es α-extensible$)^{V_{j(\mu)}})^M$. Por último, como j es elemental y fija a κ y α, esto implica que $(\kappa$ es α-extensible$)^{V_\mu}$. ■

De aquí se sigue fácilmente que un cardinal extensible no tiene por qué tener cardinales supercompactos por encima.

Similarmente, el teorema siguiente puede deducirse de 8.31:

Teorema 8.33 *Si $\kappa < \mu$ son cardinales tales que κ es extensible$^{V_\mu}$ y μ es extensible, entonces κ es extensible.*

Demostración: Sea $\alpha > 0$ y, de acuerdo con 8.30, sea ν un cardinal inaccesible tal que $\kappa, \alpha < \nu$ y $V_\kappa \prec V_\nu$. Entonces κ es extensible$^{V_\nu}$, luego es α-extensible$^{V_\nu}$, y esto implica que es α-extensible. Como vale para todo α, concluimos que κ es extensible. ■

Capítulo IX

Los mayores cardinales grandes

Estudiamos finalmente la parte superior de la escala de los cardinales grandes. Observemos que los puntos críticos de las inmersiones elementales no triviales $j : V \longrightarrow M$ están más arriba en la escala de consistencia cuanto más se parece M a la clase universal V. Por ejemplo, la propiedad $V_\mu \subset M$, que define a los cardinales μ-fuertes, es más débil que $M^\mu \subset M$, que define a los μ-supercompactos. Los cardinales "más grandes" que podemos definir en esta línea serían los siguientes:

Definición 9.1 Un cardinal κ es un *cardinal de Reinhardt* si existe una inmersión elemental $j : V \longrightarrow V$ no trivial con punto crítico κ.

Esto no sirve como definición en ZFC por el consabido problema de que no podemos formalizar la noción de "inmersión elemental entre clases propias". Podríamos buscar una forma de definir los cardinales de Reinhardt en términos de ultrapotencias, pero no merece la pena, porque los cardinales de Reinhardt son contradictorios. El argumento que lo prueba es una variante del que hemos empleado en la demostración del teorema 8.27 (de hecho, la prueba de 8.27 es un refinamiento de la prueba del teorema siguiente):

Teorema 9.2 (Kunen) *Si $j : V \longrightarrow M$ es una inmersión elemental no trivial, κ es su punto crítico y definimos*

$$j^0(\kappa) = \kappa, \quad \bigwedge n \in \omega \; j^{n+1}(\kappa) = j(j^n(\kappa)), \quad \mu = j^\omega(\kappa) = \sup_{n\in\omega} j^n(\kappa),$$

entonces $\mathcal{P}\mu \not\subset M$. En particular $M^\mu \not\subset M$ y, más en particular, $M \neq V$.

Demostración: Llamemos $\kappa_n = j^n(\kappa)$. Como $\kappa < j(\kappa)$, tenemos que

$$\kappa = \kappa_0 < \kappa_1 < \kappa_2 < \cdots$$

Supongamos que $\mathcal{P}\mu \subset M$. Tomando una biyección $f : \mu \longrightarrow \mu \times \mu$ tal que $f \in M$, se ve inmediatamente que $\mathcal{P}(\mu \times \mu) \subset M$. En particular, cualquier biyección entre subconjuntos de μ está en M. Es claro entonces que un ordinal $\alpha < \mu$ es un cardinal fuertemente inaccesible^M si y sólo si es un cardinal fuertemente inaccesible.

Como κ es medible, en particular es inaccesible y, como j es elemental, todos los κ_n son cardinales inaccesibles. Esto implica a su vez que μ es un límite fuerte. En consecuencia,

$$2^\mu = 2^{\sum\limits_{n<\omega} \kappa_n} = \prod_{n<\omega} 2^{\kappa_n} \leq \prod_{n<\omega} \mu = \mu^{\aleph_0}.$$

Podemos aplicar el teorema 8.26, según el cual existe $f : {}^\omega\mu \longrightarrow \mu$ tal que para todo $A \subset \mu$ con $|A| = \mu$ se cumple $f[{}^\omega A] = \mu$.

Es fácil ver que $j(\mu) = \bigcup\limits_{n<\omega} j(\kappa_n) = \bigcup\limits_{n<\omega} \kappa_{n+1} = \mu$, y obviamente $j(\omega) = \omega$. Por lo tanto, aplicando j a la propiedad de f, vemos que

$$(\bigwedge A \subset \mu(|A| = \mu \rightarrow j(f)[{}^\omega A] = \mu)^M,$$

y por la hipótesis sobre M podemos eliminar la relativización. Sea $G = j[\mu]$. Entonces $G \subset \mu$ y $|G| = \mu$, luego existe un $s \in {}^\omega G$ tal que $j(f)(s) = \kappa$. Como $s : \omega \longrightarrow j[\mu]$, existe $t : \omega \longrightarrow \mu$ tal que $\bigwedge n \in \omega\ s(n) = j(t(n))$ o, equivalentemente, $\bigwedge n \in \omega\ s(n) = j(t)(n))$, luego $s = j(t)$.

En definitiva, $\kappa = j(f)(s) = j(f)(j(t)) = j(f(t)) = j(\alpha)$, con $\alpha = f(t)$. Pero, esto es imposible, pues si $\alpha < \kappa$ entonces $j(\alpha) = \alpha < \kappa$, mientras que si $\kappa \leq \alpha$ entonces $\kappa < j(\kappa) \leq j(\alpha)$, contradicción. ■

Los cardinales que presentamos en este capítulo se acercan a la *"contradicción de Kunen"* sin llegar hasta ella.

9.1 Cardinales n-enormes

Vamos a definir ultrafiltros que determinan ultrapotencias con inmersiones elementales más potentes que las que definen a los cardinales μ-supercompactos.

Definición 9.3 Si κ es un cardinal infinito y A es un conjunto tal que $|A| \geq \kappa$, una *medida fina* en $\mathcal{P}A$ respecto de κ es un ultrafiltro κ completo no principal U en $\mathcal{P}A$ (es decir, $U \subset \mathcal{P}\mathcal{P}A$) de manera que, para todo $a \in A$, se cumple que $\{x \in \mathcal{P}A \mid a \in x\} \in U$.

El teorema siguiente se demuestra igual que 8.10

Teorema 9.4 *Sea κ un cardinal regular y A un conjunto tal que $|A| \geq \kappa$. Sea U una medida fina en $\mathcal{P}A$. Las propiedades siguientes son equivalentes:*

a) Si $\{C_a\}_{a\in A}$ es una familia de elementos de U, entonces

$$\mathop{\triangle}_{a\in A} C_a = \{P \in \mathcal{P}A \mid P \in \bigcap_{a\in P} C_a\} \in U.$$

b) *Si* $f : \mathcal{P}A \longrightarrow A$ *cumple*

$$\{P \in \mathcal{P}A \mid f(P) \in P\} \in U,$$

existe un $x \in A$ *tal que*

$$\{P \in \mathcal{P}A \mid f(P) = x\} \in U.$$

Definición 9.5 Una medida en normal en $\mathcal{P}A$ (respecto de κ) es una medida que cumpla las condiciones del teorema anterior.

La medida es *normal* si además para toda familia $\{X_a\}_{a\in A}$ de elementos de U, se cumple que $\mathop{\triangle}\limits_{a\in A} X_a = \{x \in \mathcal{P}A \mid x \in \bigcap\limits_{a\in x} X_a\} \in U$.

Dado $n \in \omega$, un cardinal regular no numerable κ es *n-enorme* si existen cardinales $\kappa = \mu_0 < \mu_1 < \cdots < \mu_n = \mu$ y una medida normal U en $\mathcal{P}\mu$ respecto de κ de modo que, para cada $i \in n$,

$$\{x \in \mathcal{P}\mu \mid \operatorname{ord}(x \cap \mu_{i+1}) = \mu_i\} \in U.$$

Veamos cómo son las ultrapotencias respecto de estas medidas:

Teorema 9.6 *Sea κ un cardinal n-enorme y sea U una medida normal en $\mathcal{P}\mu$ según la definición precedente. Sea $j : V \longrightarrow M = \mathrm{Ult}_U(V)$ la inmersión natural en la ultrapotencia. Entonces:*

a) *$j[\mu] = [d]$, donde $d : \mathcal{P}\mu \longrightarrow \mathcal{P}\mu$ es la identidad.*

b) *Para todo $i < n$, se cumple que $j(\mu_i) = \mu_{i+1}$, luego, con la notación del teorema 9.2, se cumple que $\mu_i = j^i(\kappa)$. En particular $\mu = j^n(\kappa)$.*

c) *κ es el punto crítico de j.*

d) *$M^\mu \subset M$.*

e) *Si $X \subset \mathcal{P}\mu$, entonces $X \in U \leftrightarrow j[\mu] \in j(X)$.*

f) *Si $f : \mathcal{P}\mu \longrightarrow V$, entonces $[f] = j(f)([d])$.*

g) *Si $\alpha \leq \mu$ y $f_\alpha : \mathcal{P}\mu \longrightarrow V$ viene dada por $f_\alpha(x) = \operatorname{ord}(x \cap \alpha)$, entonces $[f_\alpha] = \alpha$.*

Demostración: La prueba de a) es idéntica a la de 8.12 b).

b) Por definición de cardinal n-enorme tenemos que

$$\{x \in \mathcal{P}\mu \mid \operatorname{ord}(d(x) \cap c_{\mu_{i+1}}(x)) = c_{\mu_i}(x)\} \in U,$$

y el teorema fundamental nos da entonces que $\operatorname{ord}(j[\mu] \cap j(\mu_{i+1})) = j(\mu_i)$. Por otra parte, $j|_{\mu_{i+1}} : \mu_{i+1} \longrightarrow j[\mu] \cap j(\mu_{i+1})$ es una semejanza, luego $j(\mu_i) = \mu_{i+1}$ y, como $\mu_0 = \kappa$, se cumple que $\mu_i = j^i(\kappa)$.

c) Por el teorema 1.13 tenemos que j fija a todos los ordinales menores que κ. Si $n > 0$ el apartado anterior nos da que $j(\kappa) = \mu_1 > \mu_0 = \kappa$, luego κ es el punto crítico de j. En el caso $n = 0$ tenemos $\mu = \kappa$ y por el teorema 1.13 basta observar que la medida U no es κ^+ completa. Si lo fuera,

$$\{\kappa\} = \bigcap_{\alpha\in\kappa} \{x \in \mathcal{P}\kappa \mid \alpha \in x\} \in U,$$

con lo que U sería principal.

d) Se sigue de a) y del teorema 8.14.

e) Por a) tenemos que

$$j[\mu] \in j(X) \leftrightarrow [d] \in j(X) \leftrightarrow \{P \in \mathcal{P}\mu \mid P \in X\} \in U \leftrightarrow X \in U.$$

f) Puesto que $\mathcal{P}\mu = \{P \in \mathcal{P}\mu \mid f(P) = c_f(P)(d(P))\} \in U$, se cumple que $[f] = [c_f]([d]) = j(f)([d])$.

g) Claramente $j(f_\alpha)(x) = \operatorname{ord}(x \cap j(\alpha))$. Por f) tenemos que

$$[f_\alpha] = j(f_\alpha)([d]) = \operatorname{ord}(f[\mu] \cap j(\alpha)) = \operatorname{ord} j[\alpha] = \alpha.$$

■

Ahora probamos que estas propiedades caracterizan a los cardinales n-enormes:

Teorema 9.7 *Un cardinal κ es n-enorme si y sólo si existe una inmersión elemental $j : V \longrightarrow M$ con punto crítico κ tal que $M^{j^n(\kappa)} \subset M$.*

DEMOSTRACIÓN: Si existe una inmersión elemental en estas condiciones, llamemos $\mu_i = j^i(\kappa)$ y $\mu = \mu_n$. Sea U el conjunto dado por

$$X \in U \leftrightarrow X \subset \mathcal{P}\mu \wedge j[\mu] \in j(X).$$

Claramente U es un ultrafiltro en $\mathcal{P}\mu$. No es principal, pues si $A \in \mathcal{P}\mu$, entonces $j(\{A\}) = \{j(A)\}$, y no puede ser $j[\mu] = j(A)$, porque tendríamos

$$\alpha \in A \leftrightarrow j(\alpha) \in j(A) = j[\mu] \leftrightarrow \alpha \in \mu,$$

luego sería $A = \mu$, pero $j|_\mu \in M$ y $j|_\mu : \mu \longrightarrow j[\mu]$ biyectiva, luego $(|j[\mu]| = \mu)^M$, mientras que $j(\mu) > \mu$ es un cardinal^M, luego no puede ser $j(\mu) = j[\mu]$.

También es claro que U es κ-completo, pues si $\{A_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ es una familia de elementos de U, con $\beta < \kappa$, entonces $j(\{A_\alpha\}_{\alpha<\beta}) = \{j(A_\alpha)\}_{\alpha<\beta}$, luego

$$j[\mu] \in \bigcap_{\alpha<\beta} j(A_\alpha) = j(\bigcap_{\alpha<\beta} A_\alpha).$$

Se trata de una medida fina, pues si $\alpha \in \mu$, entonces $j(\alpha) \in j[\mu]$, luego

$$j[\mu] \in \{x \in \mathcal{P}j(\mu) \mid j(\alpha) \in x\} = j(\{x \in \mu \mid \alpha \in x\}).$$

Y es una medida normal, pues si $\{X_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ es una familia de elementos de U, entonces, llamando $F(\alpha) = X_\alpha$, tenemos que

$$\bigwedge x(x \in \underset{\alpha<\mu}{\triangle} X_\alpha \leftrightarrow \bigwedge \alpha \in x\ x \in F(\alpha)),$$

luego aplicando j:

$$\bigwedge x(x \in j(\underset{\alpha<\mu}{\triangle} X_\alpha) \leftrightarrow \bigwedge \alpha \in x\ x \in j(F)(\alpha)).$$

En particular, para $x = j[\mu]$ queda

$$j[\mu] \in j(\underset{\alpha<\mu}{\triangle} X_\alpha) \leftrightarrow \bigwedge \alpha \in \mu\ j[\mu] \in j(F)(j(\alpha)),$$

pero $j(F)(j(\alpha)) = j(F(\alpha) = j(X_\alpha)$, luego ciertamente $j[\mu]$ está en la intersección diagonal.

Por último, si $i < n$, entonces $j(\mu_i) = \mu_{i+1} \subset \mu_n$, luego j se restringe a una semejanza $j(\mu_i) \longrightarrow j[\mu_n] \cap j(\mu_{i+1})$. Por lo tanto

$$j[\mu_n] \in \{x \in \mathcal{P}j(\mu_n) \mid \operatorname{ord}(x \cap j(\mu_{i+1})) = j(\mu_i)\},$$

luego

$$\{x \in \mathcal{P}\mu \mid \operatorname{ord}(x \cap \mu_{i+1}) = \mu_i\} \in U.$$

Esto prueba que κ es n-enorme. El recíproco se cumple por el teorema anterior. ■

Del teorema anterior se desprende que los cardinales 0-enormes son simplemente los medibles. Los cardinales n-enormes forman una jerarquía estricta en cuanto a consistencia:

Teorema 9.8 *Si κ es un cardinal $n+1$-enorme, entonces es n-enorme y existe una medida normal D en κ tal que*

$$\{\nu < \kappa \mid \nu \text{ es } n\text{-enorme}\} \in D.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $j : V \longrightarrow M$ una inmersión elemental en las condiciones del teorema anterior. Sea $\mu_i = j^i(\kappa)$, sea $\mu = \mu_{n+1}$, de modo que $M^\mu \subset M$ y sea $\mu' = \mu_n$. Claramente, j también cumple el teorema anterior para $n-1$, luego la medida U en $\mathcal{P}\mu'$ dada por

$$X \in U \leftrightarrow X \subset \mathcal{P}\mu' \land j[\mu'] \in j(X)$$

satisface la definición de cardinal n-enorme. Como μ es inaccesible, tenemos que $|\mathcal{P}\mathcal{P}\mu'| < \mu$, de donde se sigue que $U \in M$, lo cual a su vez implica que κ es n-enorme^M, luego es claro que la medida normal en κ asociada a j cumple lo pedido. ■

9.2 Cardinales enormes y superenormes

Los cardinales 1-enormes se llaman simplemente *enormes*. Vamos a estudiarlos con más detalle. El teorema 9.7 para $n = 1$ afirma que un cardinal κ es enorme si y sólo si existe una inmersión elemental $j : V \longrightarrow M$ con punto crítico κ tal que $M^{j(\kappa)} \subset M$.

Obviamente κ es en tal caso un cardinal medible, y en particular inaccesible, luego $\mu = j(\kappa)$ es inaccesible^M, pero la condición $M^\mu \subset M$ implica que $j(\kappa)$ es inaccesible. A su vez, esto implica que $V_{j(\kappa)} \subset M$, luego concluimos que todo cardinal enorme es superfuerte.

Por otra parte, ahora es inmediato que todo cardinal enorme κ es 2^κ-supercompacto, y 2^{2^κ}-supercompacto, etc. El teorema 8.19 implica a su vez que existe un conjunto estacionario en κ de cardinales 1-extensibles. Ahora mostramos que, en cuanto a consistencia, los cardinales enormes son más fuertes que los extensibles y, en particular, que los supercompactos:

Teorema 9.9 *Si κ es un cardinal enorme, V_κ es un modelo transitivo de* ZFC *en el que hay una clase propia de cardinales extensibles.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $j : V \longrightarrow M$ una inmersión elemental con punto crítico κ tal que $M^\mu \subset M$, donde $\mu = j(\kappa)$. Sea $\delta < \kappa$.

Como κ es inaccesible sabemos que V_κ es un modelo transitivo de ZFC. Sea A el conjunto de los ordinales límite $\lambda < \kappa$ tales que $\operatorname{cf} \lambda = \omega$, que V_λ satisfaga suficientes axiomas de ZFC y que además las fórmulas "ν es extensible" y "$\bigvee e\beta(e : V_\alpha \longrightarrow V_\beta)$ es una inmersión elemental con punto crítico ν" sean absolutas para $V_\lambda - V_\kappa$.

Por el teorema de reflexión relativizado a V_κ tenemos que A no está acotado en κ (notemos que los ordinales λ que proporciona el teorema de reflexión tienen siempre cofinalidad numerable). En consecuencia $j(A)$ no está acotado en $j(\kappa)$, luego existe un $\lambda \in j(A)$ tal que $\kappa < \lambda < j(\kappa)$. En particular $\lambda \notin A$, luego $\lambda < j(\lambda)$. Del hecho de que $M^{j(\kappa)} \subset M$ se sigue que $V_{j(\kappa)} \subset M$ (notemos que $|V_{j(\kappa)}| = j(\kappa)$, pues $j(\kappa)$ es fuertemente inaccesible). Por consiguiente, $V^M_{j(\lambda)+1} = V_{j(\lambda)+1} \cap M = V_{j(\lambda)+1}$.

De aquí se sigue que $e = j|_{V_{\lambda+1}} : V_{\lambda+1} \longrightarrow V_{j(\lambda)+1}$ es una inmersión elemental que fija a los ordinales menores que κ, luego en particular $j(\delta) = \delta$. Como $|e| = |V_{\lambda+1}| < |V_{j(\kappa)}| = j(\kappa)$, se cumple que $e \in M$. Así pues,

$$\bigvee \eta e(\eta \in j(A) \land j(\delta) < \eta < j(\lambda) \land e : V_{\eta+1} \longrightarrow V_{j(\lambda)+1} \text{ inmersión elemental}$$
$$\land\, e|_\delta = \text{identidad})^M,$$

(basta tomar $\eta = \lambda$). Como j es elemental, existe un $\eta \in A$ tal que $\delta < \eta < \lambda$ y una inmersión elemental $e : V_{\eta+1} \longrightarrow V_{\lambda+1}$ tal que $e|_\delta$ es la identidad. Notemos que $\eta \in A \subset \kappa$, luego $\eta = j(\eta) \in j(A)$. Como todo esto está en M,

$$\bigvee \eta\lambda e(j(\delta) < \eta < \lambda \land \eta \in j(A) \land \lambda \in j(A) \land$$
$$e : V_{\eta+1} \longrightarrow V_{\lambda+1} \text{ inmersión elemental} \land e|_\delta = \text{identidad})^M.$$

Aplicando nuevamente que j es elemental obtenemos ordinales η, $\lambda \in A$ tales que $\delta < \eta < \lambda$ y una inmersión elemental $e : V_{\eta+1} \longrightarrow V_{\lambda+1}$ tal que $e|_\delta$ es la identidad.

Como η es el máximo ordinal de $V_{\eta+1}$ y λ es el mayor ordinal de $V_{\lambda+1}$, ha de ser $e(\eta) = \lambda$. Sea ν el menor ordinal no fijado por e, de modo que $\delta < \nu \leq \eta$.

Si $f : \omega \longrightarrow \nu$ es cofinal, entonces $f \in V_{\lambda+1}$ y $j(f) : \omega \longrightarrow j(\nu)$ cofinal, pero es fácil ver que $j(f) = f$, con lo que $j(\nu) = \nu$, contradicción. Por lo tanto $\operatorname{cf} \nu > \omega$, lo cual implica que $\delta < \nu < \eta$.

Si $\nu < \alpha < \eta$, entonces $e|_{V_\alpha} : V_\alpha \longrightarrow V_{e(\alpha)}$ es una inmersión elemental para la que ν es el menor ordinal no fijado (aquí usamos que V_α es definible en $V_{\eta+1}$, como es fácil comprobar).

En particular $\bigvee e\beta(e : V_\alpha \longrightarrow V_\beta$ inmersión elemental de punto crítico $\nu)^{V_\kappa}$ y, como $\eta \in A$, existe un $\beta < \eta$ y una inmersión elemental $e : V_\alpha \longrightarrow V_\beta$ de punto crítico ν. Esto prueba que ν es extensible$^{V_\eta}$ y, por definición de A, también es extensible$^{V_\kappa}$. Como $\nu > \delta$, tenemos que la clase de los cardinales extensibles$^{V_\kappa}$ no está acotada$^{V_\kappa}$. ■

Veamos ahora la relación entre los cardinales enormes y los supercompactos:

Teorema 9.10 *Sea κ un cardinal enorme.*

a) Si $\nu > \kappa$ es un cardinal regular y κ es ν-supercompacto, entonces κ es el κ-ésimo cardinal ν-supercompacto.

b) Si $\xi \leq \kappa$ es supercompacto entonces hay ξ cardinales enormes bajo ξ.

c) Si κ es supercompacto, entonces es el κ-ésimo cardinal enorme y el κ-ésimo cardinal supercompacto.

DEMOSTRACIÓN: a) Si ξ es uno de los cardinales extensibles de V_κ, entonces ξ es μ-supercompacto para todo cardinal $\xi \leq \mu < \kappa$, luego por 8.21 es, de hecho, ν-supercompacto.

b) Sea $\mu > \kappa$ y U una medida normal en $\mathcal{P}\mu$ según la definición de cardinal enorme. Como ξ es supercompacto existe una inmersión elemental $j : V \longrightarrow M$ con punto crítico ξ y $V_{\mu+3} \subset M$. Así, $\mathcal{P}\mu \in M$, $U \in M$, y κ es enorme^M. Por consiguiente, dado $\delta < \xi$, tenemos que

$$\bigvee \pi(\delta < \pi < j(\xi) \wedge \pi \text{ es enorme})^M,$$

luego existe un cardinal enorme $\delta < \pi < \xi$.

c) es consecuencia de a) y b). ■

En particular vemos que un cardinal enorme no tiene por qué ser supercompacto. Más concretamente, el menor cardinal enorme no es supercompacto.

Por otra parte, recordemos que si κ es enorme entonces es 2^κ-supercompacto y 2^{2^κ}-supercompacto, etc., y ahora podemos concluir que es el κ-ésimo cardinal que cumple esto.

Más precisamente, observemos que al particularizar a $n = 1$ la definición de cardinal n-enorme tenemos lo siguiente:

Un cardinal regular no numerable κ es enorme si existe un cardinal $\mu > \kappa$ tal que existe una medida normal U respecto de κ en $\mathcal{P}\mu$ de modo que $\{x \in \mathcal{P}\mu \mid ord\, x = \kappa\} \in U$.

En estas condiciones, lo que tenemos es que κ es μ-supercompacto. No podemos pedir que esto se cumpla para todo cardinal $\mu > \kappa$ porque, por ejemplo, estas condiciones implican que μ es inaccesible. No obstante, es fácil reforzar la definición de cardinal enorme para obtener cardinales supercompactos:

Definición 9.11 Un cardinal regular no numerable κ es *superenorme* si para todo ordinal $\alpha \geq \kappa$ existe un cardinal $\mu > \alpha$ tal que existe una medida normal U respecto de κ en $\mathcal{P}\mu$ de modo que $\{x \in \mathcal{P}\mu \mid \operatorname{ord} x = \kappa\} \in U$.

El teorema 9.7 implica que κ es superenorme si y sólo si para todo ordinal $\alpha \geq \kappa$ existe una inmersión elemental $j : V \longrightarrow M$ con punto crítico κ tal que $\alpha < j(\kappa)$ y $M^{j(\kappa)} \subset M$.

Es inmediato que los cardinales superenormes son enormes y supercompactos, luego por el teorema 9.10 son límites de cardinales enormes y de cardinales supercompactos. En realidad se cumple algo más fuerte:

Teorema 9.12 *Si κ es un cardinal superenorme, entonces es extensible, y existe una medida normal D en κ tal que*

$$\{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es extensible}\} \in D.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\alpha > 0$ arbitrario y sea $j : V \longrightarrow M$ una inmersión elemental con punto crítico κ tal que $\mu = j(\kappa) > \alpha$ y $M^\mu \subset M$. Sea $e = j|_{V_{\kappa+\alpha}}$. Como μ es inaccesible, tenemos que $|V_{\kappa+\alpha}| < \mu$, luego una simple inducción nos da $V_{\kappa+\alpha} \in M$, y a su vez concluimos que $e \in M$. Es claro entonces que κ es α-extensible^M, y por otra parte μ es supercompacto^M (porque j es elemental). Por el teorema 8.32 relativizado a M, tenemos que $((\kappa \text{ es } \alpha\text{-extensible})^{V_\mu})^M$, que es lo mismo que $(\kappa \text{ es } \alpha\text{-extensible})^{V_\mu^M}$, pero $V_\mu^M = V_\mu$, luego $(\kappa$ es α-extensible$)^{V_\mu}$, y esto implica claramente que κ es α-extensible. Como esto vale para todo α, tenemos que κ es extensible.

Más aún, hemos probado que si $j : V \longrightarrow M$ es cualquier inmersión elemental con punto crítico κ tal que $M^{j(\kappa)} \subset M$ y $\alpha < j(\kappa)$, entonces $((\kappa \text{ es } \alpha\text{-extensible})^{V_{j(\kappa)}})^M$, luego $((\kappa \text{ es extensible})^{V_{j(\kappa)}})^M$, luego si D es la medida normal en κ asociada a j tenemos que

$$\{\mu < \kappa \mid \mu \text{ es extensible}^{V_\kappa}\} \in D.$$

Pero κ es extensible, luego el teorema 8.33 nos da que todo μ en el conjunto precedente es extensible. ■

En cuanto a consistencia, los cardinales superenormes están por debajo de los 2-enormes:

Teorema 9.13 *Si κ es 2-enorme, existe una medida normal D en κ tal que $\{\nu < \kappa \mid \nu$ es superenorme$^{V_\kappa}\} \in D$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $j : V \longrightarrow M$ una inmersión elemental con punto crítico κ tal que $M^{j^2(\kappa)} \subset M$. Sea $\mu = j^2(\kappa)$ y sea $\mu' = j(\kappa)$. Tal y como hemos razonado en la prueba del teorema 9.8, la inmersión j define una medida normal U en $\mathcal{P}\mu'$ según la definición de cardinal enorme, de modo que $U \in M$ y prueba que κ es enorme^M. Más precisamente, prueba $\phi^M(\kappa, j(\kappa))$, donde $\phi(\kappa, \mu')$ es la fórmula que afirma que existe una medida normal respecto de κ en $\mathcal{P}\mu'$.

Por lo tanto, si D es la medida normal en κ asociada a M, tenemos que

$$A = \{\nu < \kappa \mid \phi(\nu, \kappa)\} \in D.$$

Ahora, si $\nu \in A$, existe una medida U' en $\mathcal{P}\kappa$ que cumple la definición de cardinal enorme para ν, pero claramente $U' \in M$, luego se cumple $\phi^M(\nu, \kappa)$ y, como $j(\nu) = \nu$, esto implica que $A_\nu = \{\xi < \kappa \mid \phi(\nu, \xi)\} \in D$, luego A_ν no está acotado en κ. Si $\xi \in A_\nu$, entonces existe una medida en $\mathcal{P}\xi$ que cumple la definición de cardinal enorme para ν, y claramente $U \in V_\kappa$, luego ν es superenorme$^{V_\kappa}$. ■

9.3 Los axiomas I

Todavía podemos definir cardinales grandes más fuertes que los n-enormes apurando el margen que deja la versión para conjuntos del teorema de Kunen, es decir, el teorema 8.27. Dicho teorema establece que si $j : V_\alpha \longrightarrow V_\beta$ es una inmersión elemental no trivial con punto crítico κ, entonces hay tres posibilidades: o bien existe un n tal que $j^n(\kappa) \geq \alpha$, con lo que ya no está definido $j^{n+1}(\kappa)$, o bien está definido $\mu = j^\omega(\kappa)$, y entonces se cumple $\alpha = \mu$ o bien $\alpha = \mu + 1$.

Ya sabemos que la existencia de inmersiones de este tipo equivale a que κ sea δ-extensible para el ordinal δ que cumple $\kappa + \delta = \alpha$, y ya conocemos la posición de estos cardinales en la escala de consistencia. Pero podemos conseguir cardinales más fuertes si consideramos inmersiones elementales $j : V_\alpha \longrightarrow V_\alpha$. En tal caso $\mu = j^\omega(\kappa)$ está siempre definido, por lo que sólo hay dos posibilidades de inmersiones elementales no triviales de un V_α en sí mismo:

$$j : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda \qquad \text{o bien} \qquad j : V_{\lambda+1} \longrightarrow V_{\lambda+1},$$

donde necesariamente $\lambda = j^\omega(\kappa)$ es un límite fuerte de cofinalidad numerable. Esto da pie a definir nuevos cardinales grandes, que resultan ser más fuertes que los que hemos definido hasta ahora. Antes de introducirlos conviene hacer algunas observaciones.

Si $\bar{\jmath} : V_{\lambda+1} \longrightarrow V_{\lambda+1}$ es una inmersión elemental, como λ es el máximo ordinal de $V_{\lambda+1}$, necesariamente $\bar{\jmath}(\lambda)$ cumple lo mismo, por lo que $\bar{\jmath}(\lambda) = \lambda$. En la prueba del teorema 8.25 hemos visto que V_λ es definible en $V_{\lambda+1}$, por lo que $\bar{\jmath}(V_\lambda) = V_{\bar{\jmath}(\lambda)} = V_\lambda$. A su vez, esto implica que $\bar{\jmath}$ se restringe a una inmersión elemental $j : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$.

En general, si $j : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$ es una inmersión elemental no trivial con punto crítico κ, la sucesión dada por

$$\kappa_0 = \kappa, \quad \kappa_{n+1} = j(\kappa_n),$$

(o, equivalentemente, $\kappa_n = j^n(\kappa)$) se llama *sucesión crítica* de j, y claramente está formada por cardinales medibles. Más aún:

Teorema 9.14 *Si $j : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$ es una inmersión elemental con punto crítico κ, entonces $V_{j^n(\kappa)} \prec V_\lambda$. En particular $V_\lambda \vDash \mathrm{ZFC}$.*

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $\kappa_n = j^n(\kappa)$, de modo que $\lambda = \sup\limits_n \kappa_n$. En general, j se restringe a inmersiones elementales $j_n : V_{\kappa_n} \longrightarrow V_{\kappa_{n+1}}$, pero, como j fija a V_{κ_0}, tenemos que j_0 es la identidad, luego $V_{\kappa_0} \prec V_{\kappa_1}$.

Si suponemos que $V_{\kappa_n} \prec V_{\kappa_{n+1}}$, esto es absoluto para V_λ, luego aplicando j obtenemos que $V_{\kappa_{n+1}} \prec V_{\kappa_{n+2}}$. Por lo tanto, si $m \leq n$ tenemos que $V_{\kappa_m} \prec V_{\kappa_n}$.

Ahora vamos a probar que para toda fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_r)$ se cumple

$$\bigwedge n \in \omega \bigwedge v \in V_{\kappa_n}^{\{x_1,\ldots,x_r\}} \ (V_{\kappa_n} \vDash \phi[v] \leftrightarrow V_\lambda \vDash \phi[v])$$

por inducción sobre la longitud de ϕ.

Si ϕ es de la forma $x = y$ o $x \in y$ la conclusión es trivial, y si el resultado vale para ϕ y ψ es obvio que vale para $\neg\phi$ y $\phi \rightarrow \psi$. El único punto no trivial se da si ϕ es de la forma $\bigwedge x\, \psi(x, x_1, \ldots, x_r)$ y suponemos el resultado válido para ψ. Si $V_{\kappa_n} \vDash \phi[v]$ tomemos cualquier $a \in V_\lambda$ y sea $m \geq n$ un número natural tal que $a, v(x_1), \ldots, v(x_n) \in V_{\kappa_m}$. Como $V_{\kappa_n} \prec V_{\kappa_m}$ también se cumple $V_{\kappa_m} \vDash \phi[v]$, luego $V_{\kappa_m} \vDash \psi[v_x^a]$ y, por hipótesis de inducción, $V_\lambda \vDash \psi[v_x^a]$. Esto prueba que $V_\lambda \vDash \phi[v]$. La implicación opuesta es trivial. ∎

Consideremos de nuevo el caso de una inmersión elemental $\bar{\jmath} : V_{\lambda+1} \longrightarrow V_{\lambda+1}$ y llamemos $j : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$ a su restricción. Si $x \in V_{\lambda+1}$, se cumple trivialmente que

$$\bar{\jmath}(x) = \bigcup_{\alpha<\lambda} (\bar{\jmath}(x) \cap V_\alpha),$$

pero si $\alpha < \lambda$ entonces $\bar{\jmath}(x) \cap V_\alpha \subset \bar{\jmath}(x) \cap V_{\bar{\jmath}(\alpha)} = \bar{\jmath}(x) \cap \bar{\jmath}(V_\alpha) = \bar{\jmath}(x \cap V_\alpha)$. Por lo tanto,

$$\bar{\jmath}(x) = \bigcup_{\alpha<\lambda} j(x \cap V_\alpha).$$

En general, dada una inmersión elemental $j : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$, podemos definir $j^+ : V_{\lambda+1} \longrightarrow V_{\lambda+1}$ mediante

$$j^+(x) = \bigcup_{\alpha<\lambda} j(x \cap V_\alpha) = \bigcup_{n\in\omega} j(x \cap V_{\kappa_n}),$$

y el argumento precedente muestra que si j puede extenderse a una inmersión elemental $\bar{\jmath} : V_{\lambda+1} \longrightarrow V_{\lambda+1}$ la extensión es necesariamente $\bar{\jmath} = j^+$ (si bien no puede probarse en general que j^+ sea una inmersión elemental).

En cualquier caso podemos afirmar que j^+ extiende a j, pues si $x \in V_\lambda$ entonces existe un $\alpha < \lambda$ tal que $x \in V_\alpha$, y así $j(x) = j(x \cap V_\alpha) \subset j^+(x)$. La otra inclusión es obvia.

Más aún, $j^+[V_{\lambda+1} \setminus V_\lambda] \subset V_{\lambda+1} \setminus V_\lambda$. En efecto, si $x \in V_{\lambda+1} \setminus V_\lambda$ pero $j^+(x) \in V_\lambda$, entonces existe un $\alpha < \lambda$ tal que $j^+(x) \in V_\alpha$, pero $x \notin V_{\alpha+1}$, luego existe un $u \in x$ tal que $u \notin V_\alpha$, luego $j(u) \in j^+(x) \subset V_\alpha \subset V_{j(\alpha)}$ y $j(u) \notin V_{j(\alpha)}$, contradicción.

De aquí deducimos a su vez que j^+ es una inmersión, es decir, que cumple

$$x \in y \leftrightarrow j^+(x) \in j^+(y), \qquad x = y \leftrightarrow j^+(x) = j^+(y).$$

Por ejemplo, si se cumple $j^+(x) \in j^+(y)$, entonces existe un $\alpha < \lambda$ tal que $j^+(x) \in j(y \cap V_\alpha)$, pero entonces $j^+(x) \in V_\lambda$, luego $x \in V_\lambda$, luego tenemos que $j(x) = j^+(x) \in j(y \cap V_\alpha)$, luego $x \in y \cap \alpha$, luego $x \in y$.

Esto implica a su vez que j^+ cumple la definición de inmersión elemental para fórmulas sin cuantificadores. Más aún, vamos a ver que es Δ_0-elemental, es decir, que cumple la definición de inmersión elemental para fórmulas Δ_0. Para ello demostramos primero lo siguiente:

Teorema 9.15 *Si $j : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$ es una inmersión elemental no trivial, para toda función $F : D \subset V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$ se cumple que $j^+(F) : j^+(D) \longrightarrow V_\lambda$.*

Demostración: Es claro que si $(a, b), (a, c) \in j^+(F)$, entonces $b = c$, pues existe un $\alpha < \lambda$ tal que $(a, b), (a, c) \in j(F \cap V_\alpha)$ y, llamando $f = F \cap V_\alpha$, se cumple que

$$V_\lambda \vDash \bigwedge xyz((x, y) \in f \land (x, z) \in f \to y = z),$$

luego también $V_\lambda \vDash \bigwedge xyz((x, y) \in j(f) \land (x, z) \in j(f) \to y = z)$.

Por lo tanto, $j^+(F)$ es una función. Lo que no es obvio es que se cumpla $\mathcal{D}j^+(F) = j^+(\mathcal{D}F)$. En principio

$$\mathcal{D}j^+(F) = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{D}j(F \cap V_{\kappa_n}) = \bigcup_{n\in\omega} j(\mathcal{D}(F \cap V_{\kappa_n})),$$

$$j^+(\mathcal{D}F) = \bigcup_{n\in\omega} j(\mathcal{D}F \cap V_{\kappa_n}),$$

y no es cierto en general que $j(\mathcal{D}(F \cap V_{\kappa_n})) = j(\mathcal{D}F \cap V_{\kappa_n})$. Por ejemplo, basta considerar $F : \omega \longrightarrow V_\lambda$ dada por $F(n) = \kappa_n$. Ahora bien:

$$j^+(\mathcal{D}F) = \bigcup_{n\in\omega} j(\mathcal{D}F \cap V_{\kappa_n}) = \bigcup_{n\in\omega} j(\bigcup_{m\in\omega} (\mathcal{D}(F \cap V_{\kappa_m}) \cap V_{\kappa_n}) =$$

$$\bigcup_{m\in\omega}\bigcup_{n\in\omega} j((\mathcal{D}(F \cap V_{\kappa_m}) \cap V_{\kappa_n}) = \bigcup_{m\in\omega} j((\mathcal{D}(F \cap V_{\kappa_m})) = \mathcal{D}j^+(F),$$

donde en la penúltima igualdad hemos usado que, fijado m, los términos de la unión para n forman una sucesión creciente que se estabiliza cuando $n = m$, pues $\mathcal{D}(F \cap V_{\kappa_m}) \subset V_{\kappa_m}$. ■

Dada una fórmula $\phi(u_0,\ldots,u_n)$ de tipo Δ_0, observemos que si ϕ contiene una subfórmula de tipo $u_i\in u$, podemos cambiarla por $\bigvee v\in u\; v=u_i$, y obtenemos una fórmula equivalente que sigue siendo Δ_0. Igualmente, podemos cambiar $u_i=u$ por

$$\bigwedge v\in u_i\; v\in u\wedge\bigwedge v\in u\; v\in u_i.$$

Con esto conseguimos que todas las variables libres u_i aparezcan únicamente en subfórmulas de tipo $u\in u_i$. Si cambiamos estas subfórmulas por R_iu, donde $R_1,\ldots,R_n$ son relatores monádicos, obtenemos una sentencia ϕ^* tal que

$$V_{\lambda+1}\vDash\phi[A_1,\ldots,A_n]\leftrightarrow(V_\lambda,A_1,\ldots,A_n)\vDash\phi^*.$$

Podemos suponer que ϕ^* está en forma prenexa, es decir, que

$$\phi^*=\bigwedge x_1\bigvee y_1\bigwedge x_2\bigvee y_2\cdots\bigwedge x_k\bigvee y_k\;\psi(x_1,y_1,\ldots,x_k,y_k),$$

donde ψ no tiene cuantificadores, ni más variables que las indicadas (pero contiene los relatores $R_1,\ldots,R_n$).

Por simplificar la notación vamos a tomar $k=2$, pero el argumento es general. Supongamos que se cumple $V_{\lambda+1}\vDash\phi[A_0,\ldots,A_n]$, es decir, que

$$(V_\lambda,A_1,\ldots,A_n)\vDash\bigwedge x_1\bigvee y_1\bigwedge x_2\bigvee y_2\,\psi(x_1,y_1,x_2,y_2).$$

Entonces existe $F_1:V_\lambda\longrightarrow V_\lambda$ tal que, para todo $x_1\in V_\lambda$,

$$(V_\lambda,A_1,\ldots,A_n)\vDash\bigwedge x_2\bigvee y_2\,\psi(x_1,F_1(x_1),x_2,y_2),$$

y a su vez existe $F_2:V_\lambda\times V_\lambda\longrightarrow V_\lambda$ tal que para todo x_1, $x_2\in V_\lambda$,

$$(V_\lambda,A_1,\ldots,A_n)\vDash\psi[x_1,F_1(x_1),x_2,F_2(x_1,x_2)].$$

Podemos definir $F_2(a)=\varnothing$ cuando a no es un par ordenado, y así se cumple que $F_2:V_\lambda\longrightarrow V_\lambda$. El teorema anterior nos garantiza así que $j^+(F_i):V_\lambda\longrightarrow V_\lambda$. Para todo $\alpha<\lambda$, se cumple que

$$V_\lambda\vDash\bigwedge x_1y_1x_2y_2((x_1,y_1)\in F_1\cap V_\alpha\wedge(x_1,x_2,y_2)\in F_2\cap V_\alpha$$
$$\rightarrow\psi^*(x_1,y_1,x_2,y_2,A_1\cap V_\alpha,\ldots,A_n\cap V_\alpha),$$

donde ψ^* es la fórmula que resulta de sustituir las subfórmulas R_iu por $u\in X_i$. Notemos que podemos poner $A_k\cap V_\alpha$ porque A_k sólo aparece en subfórmulas de tipo $x_i\in A_k$ o $y_i\in A_k$, y todos los x_i, y_i están en V_α. Como j es elemental,

$$V_\lambda\vDash\bigwedge x_1y_1x_2y_2((x_1,y_1)\in j(F_1\cap V_\alpha)\wedge(x_1,x_2,y_2)\in j(F_2\cap V_\alpha)$$
$$\rightarrow\psi^*(x_1,y_1,x_2,y_2,j(A_1\cap V_\alpha),\ldots,j(A_n\cap V_\alpha)).$$

Igualmente, como x_i, $y_i\in j(V_\alpha)$, es equivalente poner $x_i\in j(A_k\cap V_\alpha)$ que $x_i\in j^+(A_k)$, ya que si $\alpha<\beta<\lambda$ tenemos que $j(A_k\cap V\beta)\cap j(V_\alpha)=j(A_k\cap V_\alpha)$. Por consiguiente:

$$V_\lambda\vDash\bigwedge x_1y_1x_2y_2((x_1,y_1)\in j(F_1\cap V_\alpha)\wedge(x_1,x_2,y_2)\in j(F_2\cap V_\alpha)$$
$$\rightarrow\psi^*(x_1,y_1,x_2,y_2,j^+(A_1),\ldots,j^+(A_n)).$$

Finalmente, dado $x_1 \in V_\lambda$, tomamos $y_1 = j^+(F_1)(x_1)$ y, dado $x_2 \in V_\lambda$, tomamos $y_2 = j^+(F_2)(x_1, x_2)$. Existe un $\alpha < \lambda$ tal que

$$(x_1, y_1) \in j(F_1 \cap V_\alpha), \qquad (x_1, x_2, y_2) \in j(F_2 \cap V_\alpha),$$

luego

$$V_\lambda \vDash \psi^*[x_1, y_1, x_2, y_2, j^+(A_1), \ldots, j^+(A_n)],$$

o equivalentemente,

$$(V_\lambda, j^+(A_1), \ldots, j^+(A_n)) \vDash \psi[x_1, y_1, x_2, y_2].$$

Con esto hemos probado que $(V_\lambda, j^+(A_1), \ldots, j^+(A_n)) \vDash \phi^*$ o, lo que es lo mismo, que $V_{\lambda+1} \vDash \phi[j^+(A_1), \ldots, j^+(A_n)]$. Así pues, hemos probado que, para toda fórmula Δ_0,

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in V_{\lambda+1}(V_{\lambda+1} \vDash \phi[x_1, \ldots, x_n] \rightarrow V_{\lambda+1} \vDash \phi[j^+(x_1), \ldots, j^+(x_n)]).$$

Aplicando esto a $\neg\phi$ tenemos la implicación opuesta. En definitiva:

Teorema 9.16 *Si $j : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$ es una inmersión elemental, entonces la extensión $j^+ : V_{\lambda+1} \longrightarrow V_{\lambda+1}$ es una inmersión Δ_0-elemental.*

Ahora vamos a dar una condición necesaria y suficiente para que j^+ sea Σ_1-elemental, es decir, para que cumpla la definición de inmersión elemental con fórmulas Σ_1.

Consideramos nuevamente una fórmula ϕ de tipo Δ_0 y, como antes,

$$V_{\lambda+1} \vDash \phi[A_1, \ldots, A_n] \leftrightarrow (V_\lambda, A_1, \ldots, A_n) \vDash \phi^*,$$

para cierta sentencia ϕ^* con relatores monádicos $R_1, \ldots, R_n$. Por simplificar la notación vamos a suponer $n = 1$, pero el argumento vale sin cambio alguno para un n arbitrario. Como antes suponemos que ϕ^* está en forma prenexa, de modo que

$$\phi^* = \bigwedge x_0 \bigvee y_0 \bigwedge x_1 \bigvee y_1 \cdots \bigwedge x_k \bigvee y_k \; \psi(x_0, y_0, \ldots, x_k, y_k),$$

donde ψ no tiene cuantificadores.

Fijado $A_1 \in V_{\lambda+1}$, definimos $T^m_\phi(A_1)$ como el conjunto de todas las cuádruplas (m, a, F, P) tales que:

a) $m \in \omega \wedge a \subset V_{\kappa_m}$.

b) $F : D \subset \bigcup\limits_{i \leq k} V_{\kappa_m}^{i+1} \longrightarrow V_{\kappa_m}$ es una función parcial tal que

$$(V_{\kappa_m}, a, A_1 \cap V_{\kappa_m}) \vDash \psi(d_0, F(d_0), d_1, F(d_0, d_1), \ldots, d_k, F(d_0, \ldots, d_k))$$

siempre que las sucesiones $(d_0), \ldots, (d_0, \ldots, d_k)$ están en el dominio de F.

c) $P : \bigcup\limits_{i \leq k} V_{\kappa_m}^{i+1} \setminus D \longrightarrow \omega \setminus (m+1)$.

Llamamos $T_\phi(A_1) = \bigcup\limits_{m\in\omega} T_\phi^m(A_1) \in V_{\lambda+1}$ y definimos en este conjunto la relación dada por $(m, a, F, P) < (m', a', F', P')$ si:

a) $m < m' \wedge a = a' \cap V_{\kappa_m}$.

b) $F \subset F'$.

c) Para cada $d \in \bigcup\limits_{i\leq k} V_{\kappa_m}^{i+1} \setminus \mathcal{D}F$, si $P(d) \leq m'$ entonces $d \in \mathcal{D}F'$, y en caso contrario $d \notin \mathcal{D}F' \wedge P'(d) = P(d)$.

Así $T_\phi(A_1)$ se convierte en un árbol, pues por debajo de cada cuádrupla (m', a', F', P') hay exactamente una cuádrupla para cada $m < m'$, a saber, la dada por $a = a' \cap V_{\kappa_m}$, la restricción F de F' al conjunto de sucesiones $d \in \bigcup\limits_{i\leq k} V_{\kappa_m}^{i+1}$ tales que $F'(d) \in V_{\kappa_m}$ y la función P dada por

$$P(d) = \begin{cases} P'(d) & \text{si } d \notin \mathcal{D}F', \\ \text{mín}\{l \in \omega \mid F'(d) \in V_{\kappa_l}\} & \text{si } d \in \mathcal{D}F'. \end{cases}$$

Por lo tanto, $T_\phi^m(A_1)$ es el nivel m-simo de $T_\phi(A_1)$.

Ahora observamos que si existe un $A_0 \subset V_\lambda$ tal que $(V_\lambda, A_0, A_1) \vDash \phi^*$, entonces podemos definir como sigue una rama infinita en $T_\phi(A_1)$:

Tenemos que

$$(V_\lambda, A_0, A_1) \vDash \phi^* \vDash \bigwedge x_0 \bigvee y_0 \bigwedge x_1 \bigvee y_1 \cdots \bigwedge x_k \bigvee y_k \ \psi(x_0, y_0, \ldots, x_k, y_k),$$

luego existe una función $F_0^* : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$ que a cada $d_0 \in V_\lambda$ le asigna un $F_0^*(d_0)$ tal que

$$(V_\lambda, A_0, A_1) \vDash \phi^* \vDash \bigwedge x_1 \bigvee y_1 \cdots \bigwedge x_k \bigvee y_k \ \psi([d_0], [F_0^*(d_0)], x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k).$$

A su vez, existe una función $F_1^* : V_\lambda^2 \longrightarrow V_\lambda$ que a cada par (d_0, d_1) le asigna un $F_1^*(d_0, d_1)$ tal que

$$(V_\lambda, A_0, A_1) \vDash \phi^* \vDash \bigwedge x_2 \bigvee y_2 \cdots \bigwedge x_k \bigvee y_k$$

$$\psi([d_0], [F_0^*(d_0)], [d_1], [F_1^*(d_0, d_1)], x_2, y_2, \ldots, x_k, y_k),$$

y procediendo de este modo obtenemos funciones F_i^*, para $i = 0, \ldots, k$, que podemos unir en una función $F^* : \bigcup\limits_{i\leq k} V_\lambda^{i+1} \longrightarrow V_\lambda$.

Para cada $m \in \omega$, definimos $a_m = V_{\kappa_m} \cap a$, llamamos $D_m \subset \bigcup\limits_{i\leq k} V_{\kappa_m}^{i+1}$ al conjunto de las sucesiones d tales que $F^*(d) \in V_{\kappa_n}$, $F_m = F^*|_{D_m}$ y P_m a la función que a cada sucesión $d \in \bigcup\limits_{i\leq k} V_{\kappa_m}^{i+1} \setminus D_m$ le asigna el mínimo $l \in \omega$ tal que $F^*(d) \in V_{\kappa_l}$.

Es claro entonces que $\{(m, a_m, F_m, P_m)\}_{m\in\omega}$ forma una rama infinita en el árbol $T_\phi(A_1, A_1)$. (Notemos que, como ψ no tiene cuantificadores, el hecho de que la condición b) de la definición de T_ϕ^m se cumpla en V_λ implica que se cumple en V_{κ_m}.)

Recíprocamente, si $\{(m, a_m, F_m, P_m)\}_{m\in\omega}$ forma una rama infinita, definimos $A_0 = \bigcup\limits_{m\in\omega} a_m$, $F^* = \bigcup\limits_{m\in\omega} F_m$, y entonces $F^* : \bigcup\limits_{i\leq k} V_\lambda^{i+1} \longrightarrow V_\lambda$, pues si $d \in \bigcup\limits_{i\leq k} V_\lambda^{i+1}$, o bien $d \in \mathcal{D}F_m$, en cuyo caso F^* está definida en d, o bien, tomando $l = P_m(d)$, tiene que cumplirse que $d \in \mathcal{D}F_l$, por definición de la relación de orden. En cualquier caso $d \in \mathcal{D}F^*$.

Ahora es fácil ver que

$$(V_\lambda, A_0, A_1) \vDash \phi^* \vDash \bigwedge x_0 \bigvee y_0 \bigwedge x_1 \bigvee y_1 \cdots \bigwedge x_k \bigvee y_k \ \psi(x_0, y_0, \ldots, x_k, y_k).$$

En efecto, dado cualquier $d_0 \in V_\lambda$, tomamos $e_0 = F^*(d_0)$, dado cualquier $d_1 \in V_\lambda$, tomamos $e_1 = F^*(d_0, d_1)$, y así sucesivamente. Tomamos un m suficientemente grande como para que $d_0, e_0, \ldots, d_k, e_k \in V_{\kappa_m}$. Si alguna de las sucesiones $(d_0, \ldots, d_i)$, para $i = 0, \ldots, k$, no está en $\mathcal{D}F_m$, consideramos $P(d_0, \ldots, d_i)$ y cambiamos m por un número mayor que todos estos valores, con lo que garantizamos que F_m está definida en todas ellas. Así

$$(V_{\kappa_m}, a_m, A_1 \cap V_{\kappa_m}) \vDash \psi(d_0, e_0, \ldots, d_k, e_k),$$

donde $a_m = A_0 \cap V_{\kappa_m}$, y como ψ no tiene cuantificadores, esto equivale a que $(V_\lambda, A_0, A_1) \vDash \psi(d_0, e_0, \ldots, d_k, e_k)$, luego $(V_\lambda, A_0, A_1) \vDash \phi^*$.

Con esto estamos en condiciones de probar:

Teorema 9.17 *Si $j : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$ es una inmersión elemental no trivial, entonces $j^+ : V_{\lambda+1} \longrightarrow V_{\lambda+1}$ es Σ_1-elemental si y sólo si cuando $S \subset V_\lambda$ es una relación bien fundada, $j^+(S)$ también lo es.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que j^+ es Σ_1-elemental. Si S es una relación bien fundada pero $j^+(S)$ no lo es, existe una función $f : \omega \longrightarrow V_\lambda$ tal que $\bigwedge n \in \omega\ f(n+1)\, j^+(S)\, f(n)$. Llamando $A = f[\omega] \in V_{\lambda+1}$, tenemos que

$$V_{\lambda+1} \vDash \bigvee A \bigwedge x \in A \bigvee y \in A\, ((y, x) \in j^+(S)).$$

Esta fórmula es de tipo $V_{\lambda+1} \vDash \bigvee A\, \phi(A, j^+(S))$, donde ϕ es Δ_0. Por hipótesis

$$V_{\lambda+1} \vDash \bigvee A \bigwedge x \in A \bigvee y \in A\, ((y, x) \in S),$$

y esto implica que S no está bien fundada.

Ahora supongamos que j^+ conserva las relaciones bien fundadas y consideremos una fórmula $\bigvee X\, \phi(X, A_1, \ldots, A_n)$, donde ϕ es Δ_0. Supongamos que

$$\neg V_\lambda \vDash \bigvee X\, \phi(X, A_1, \ldots, A_n)$$

y consideremos el árbol $T_\phi(A_1, \ldots, A_n) \in V_{\lambda+1}$. Por la discusión previa al teorema sabemos que no tiene ramas infinitas, luego la inversa S de su relación de orden está bien fundada.

Ahora observamos que $T_\phi = \bigcup_{m\in\omega} (T_\phi \cap V_{\kappa_{m+1}})$ y que $T_\phi \cap V_{\kappa_{m+1}}$ es definible en $(V_{\kappa_{m+1}}, A_1 \cap V_{\kappa_{m+1}}, \ldots, A_n \cap V_{\kappa_{m+1}})$, por lo que $j(T_\phi \cap V_{\kappa_{m+1}})$ satisface la misma definición, pero en $(V_{\kappa_{m+2}}, j(A_1 \cap V_{\kappa_{m+1}}), \ldots, j(A_n \cap V_{\kappa_{m+1}}))$.

A su vez, esto implica que $j^+(T_\phi(A_1,\ldots,A_n)) = T_\phi(j^+(A_1),\ldots,j^+(A_n))$, e igualmente $j^+(S)$ es la inversa de la relación de orden en este árbol. Como está bien fundada, el árbol $T_\phi(j^+(A_1),\ldots,j^+(A_n))$ no tiene ramas infinitas, luego

$$\neg V_{\lambda+1} \vDash \bigvee X\, \phi(X, j^+(A_1),\ldots,j^+(A_n)).$$

Con esto hemos probado la implicación

$$V_{\lambda+1} \vDash \bigvee X\, \phi(X, j^+(A_1),\ldots,j^+(A_n)) \rightarrow V_\lambda \vDash \bigvee X\, \phi(X, A_1,\ldots,A_n),$$

pero el argumento vale en el caso particular en que ϕ no depende de X, de modo que también hemos probado la implicación

$$V_\lambda \vDash \neg\phi(A_1,\ldots,A_n) \rightarrow V_{\lambda+1} \vDash \neg\phi(j^+(A_1),\ldots,j^+(A_n))$$

para toda fórmula Δ_0. En particular, al aplicarlo a la negación de la fórmula ϕ original, tenemos

$$V_\lambda \vDash \phi(A_0, A_1,\ldots,A_n) \rightarrow V_{\lambda+1} \vDash \phi(j^+(A_0), j^+(A_1),\ldots,j^+(A_n)),$$

y de aquí se sigue inmediatamente que

$$V_\lambda \vDash \bigvee X\, \phi(X, A_1,\ldots,A_n) \rightarrow V_{\lambda+1} \vDash \bigvee X\, \phi(X, j^+(A_1),\ldots,j^+(A_n)),$$

luego j^+ es Σ_1-elemental. ■

El interés de que j^+ sea Σ_1-elemental reside en el teorema siguiente:

Teorema 9.18 *Para todo par de ordinales κ y λ, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) Existe una inmersión elemental $j : V \longrightarrow M$ con punto crítico κ, $\lambda > \kappa$, $j(\lambda) = \lambda$ y $V_\lambda \subset M$.

b) Existe una inmersión elemental $j : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$ con punto crítico κ tal que, para toda relación bien fundada $S \subset V_\lambda$, la relación $j^+(S)$ también está bien fundada.

c) Existe una inmersión elemental $j : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$ con punto crítico κ tal que la inmersión $j^+ : V_{\lambda+1} \longrightarrow V_{\lambda+1}$ es Σ_1-elemental.

Demostración: La equivalencia entre b) y c) es el teorema anterior, luego sólo tenemos que probar que a) equivale a b).

Si j cumple a), es claro que $j|_{V_\lambda} : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda^M = V_\lambda$ cumple b), porque si $S \subset V_\lambda$ está bien fundada, entonces $j^+(S) = j(S)$ está bien fundada^M, pero esto es absoluto.

Supongamos ahora que j cumple b). Entonces tenemos definida la sucesión crítica $\kappa_n = j^n(\kappa)$, de modo que $\lambda = \sup_n \kappa_n$. Definimos U_n mediante

$$X \in U_n \leftrightarrow X \subset \mathcal{P}\kappa_n \land j[\kappa_n] \in j(X).$$

El argumento del teorema 9.7 vale sin cambio alguno y prueba que U_n cumple la definición de cardinal n-grande respecto de κ, por lo que define una inmersión elemental $i_n : V \longrightarrow M_n = \mathrm{Ult}_{U_n}(V)$ con punto crítico κ tal que $M_n^{\kappa_n} \subset M$. Si $d_n : \mathcal{P}\kappa_n \longrightarrow \mathcal{P}\kappa_n$ es la identidad, el teorema 9.6 nos da que $j[\kappa_n] = [d_n]$. Además κ_n es un cardinal inaccesible, luego $V_{\kappa_n} \subset M_n$.

Si $m < n$, para cada $f : \mathcal{P}\kappa_m \longrightarrow V$, definimos $f_n : \mathcal{P}\kappa_n \longrightarrow V$ mediante $f_n(x) = f(x \cap \kappa_m)$. Así, si se cumple $[f] = [g]$ en $\mathrm{Ult}_{U_m}(V)$, tenemos que

$$\{x \in \mathcal{P}\kappa_m \mid f(x) = g(x)\} \in U_m,$$

luego $j[\kappa_n] \in \{x \in \mathcal{P}j(\kappa_m) \mid j(f)(x) = j(g)(x)\}$, lo cual equivale a que $j(f)(j[\kappa_m]) = j(g)(j[\kappa_m])$, pero claramente $j[\kappa_m] = j[\kappa_n] \cap j(\kappa_m)$, luego se cumple $j(f)(j[\kappa_n] \cap j(\kappa_m)) = j(g)(j[\kappa_n] \cap j(\kappa_m))$, y esto equivale a que

$$j[\kappa_n] \in j(\{x \in \mathcal{P}j(\kappa_n) \mid f(x \cap \kappa_m) = g(x \cap \kappa_m)\}),$$

luego

$$\{x \in \mathcal{P}\kappa_n \mid f_n(x) = g_n(x)\} = \{x \in \mathcal{P}\kappa_n \mid f(x \cap \kappa_m) = g_n(x \cap \kappa_m)\} \in U.$$

Por lo tanto $[f_n] = [g_n]$ en $\mathrm{Ult}_{U_n}(V)$. Esto significa que podemos definir una aplicación $k_{mn} : M_m \longrightarrow M_n$ mediante $k_{mn}([f]) = [f_n]$, y el mismo argumento anterior prueba que es una inmersión elemental. En efecto

$$\begin{aligned} \phi^{M_m}([f_1], \ldots, [f_k]) &\to \{x \in \mathcal{P}\kappa_m \mid \phi(f_1(x), \ldots, f_k(x))\} \in U_m \\ &\to \phi^M(j(f_1)(j[\kappa_m]), \ldots, j(f_k)(j[\kappa_m])) \\ &\to \phi^M(j(f_1)(j[\kappa_n] \cap j(\kappa_m)), \ldots, j(f_k)(j[\kappa_n] \cap j(\kappa_n))) \\ &\to \{x \in \mathcal{P}\kappa_n \mid \phi(f_1(x \cap \kappa_m), \ldots, f_k(x \cap \kappa_m)\} \in U_n \\ &\to \phi^{M_n}(k_{mn}([f_1]), \ldots, k_{mn}([f_k])). \end{aligned}$$

Si $m \leq n \leq r$ tenemos trivialmente que $(f_n)_r = f_r$, de donde se sigue que $k_{mn} \circ k_{nr} = k_{mr}$, por lo que los modelos M_m con las aplicaciones k_{mn} forman un sistema inductivo (de modelos que son clases propias).

Si $\alpha \leq \kappa_m$ y $f_\alpha^m : \mathcal{P}\kappa_m \longrightarrow V$ viene dada por $f_\alpha^m(x) = \mathrm{ord}(x \cap \alpha)$, el teorema 9.6 nos da que $[f_\alpha^m] = \alpha$, luego

$$k_{mn}(\alpha) = k_{mn}([f_\alpha]) = [(f_\alpha)_n] = [f_\alpha^n] = \alpha.$$

Como $V_{\kappa_m} \subset M_m$ y κ_n es inaccesible, el argumento del teorema 1.2 se adapta trivialmente para concluir que k_{mn} fija a todos los elementos de V_{κ_m}.

Finalmente consideramos el límite inductivo M^* de los modelos M_n (definición 1.26). Llamemos $k_n^* : M_n \longrightarrow M^*$ a las inmersiones elementales asociadas. Vamos a demostrar que M^* está bien fundado.

En caso contrario existe una sucesión $\{z_r\}_{r\in\omega}$ de elementos de M^* tales que $\bigwedge r \in \omega\, z_{r+1}\, R\, z_r$. Cambiándolos por sus rangos, podemos suponer que cada $z_r \in \Omega^{M^*}$. También podemos suponer que $z_r = k_{n_r}^*([g_r])$, de modo que la sucesión $\{n_r\}_{r\in\omega}$ sea creciente, así como que $g_r : \mathcal{P}\kappa_{n_r} \longrightarrow \Omega$. Observemos que

$$\Big|\bigcup_{r\in\omega} \mathcal{R}g_r\Big| \leq \sum_{r\in\omega} \kappa_{n_r} \leq \lambda,$$

luego podemos definir un buen orden S en λ tal que exista una aplicación estrictamente creciente $p : \bigcup_{r\in\omega} \mathcal{R}g_r \longrightarrow (\lambda, S)$.

Ahora: $(z_{r+1}, z_r) \in R \to (k_{n_{r+1}}^*([g_{r+1}], k_{n_{r+1}}^*(k_{n_r n_{r+1}}([g_r])) \in R \to$

$$[g_{r+1}] \in k_{n_r,n_{r+1}}([g_r]) = [(g_r)_{n_{r+1}}] \to$$

$$\{x \in \mathcal{P}\kappa_{n_{r+1}} \mid g_{r+1}(x) \in g_r(x \cap \kappa_{n_r})\} \in U_{n_{r+1}} \to$$

$$\{x \in \mathcal{P}\kappa_{n_{r+1}} \mid (p(g_{r+1}(x)), p(g_r(x \cap \kappa_{n_r}))) \in S\} \in U_{n_{r+1}} \to$$

$$j[\kappa_{n_{r+1}}] \in \{x \in \mathcal{P}j(\kappa_{n_{r+1}}) \mid (j(g_{r+1} \circ p)(x), j(g_r \circ p)(x \cap j(\kappa_{n_r}))) \in j^+(S)\}$$

$$\to (j(g_{r+1} \circ p)(j[\kappa_{n_{r+1}}]), j(g_r \circ p)(j[\kappa_{n_{r+1}}] \cap j(\kappa_{n_r}))) \in j^+(S)$$

$$\to (j(g_{r+1} \circ p)(j[\kappa_{n_{r+1}}]), j(g_r \circ p)(j[\kappa_{n_r}])) \in j^+(S),$$

pero esto significa que $j^+(S)$ no está bien fundada, en contra de lo supuesto.

Así pues, podemos considerar el colapso transitivo M de M^*, junto con las inmersiones elementales $k_n : M_n \longrightarrow M$.

A continuación observamos que si $m \leq n$, entonces

$$k_m(i_m(x)) = k_n(k_{mn}([c_x])) = k_n([(c_x)_n]) = k_n([c_x]) = k_n(i_n(x)).$$

Por lo tanto, podemos definir $i : V \longrightarrow M$ como $i = i_n \circ k_n$, que es una misma aplicación independiente de n, y es una inmersión elemental por ser composición de dos inmersiones elementales. Su punto crítico es κ, pues tanto i_n como k_n fijan a todos los ordinales menores que κ, mientras que $i_n(\kappa) > \kappa$, luego también $i(\kappa) > \kappa$.

Veamos ahora que si $\alpha \leq \kappa_m$, entonces $\bigwedge n \in \omega(m \leq n \to k_n(\alpha) = \alpha)$.

Suponemos que es cierto para todo $\delta < \alpha$ y tomemos $\beta \in k_n(\alpha)$. Entonces, por la construcción del límite inductivo, $\beta = k_r(\delta)$, para cierto $r \geq n$, luego $\beta = k_r(\delta) \in k_r(k_{nr}(\alpha)) = k_r(\alpha)$, luego $\delta \in \alpha$, luego, por hipótesis de inducción $\beta = k_r(\delta) = \delta \in \alpha$, luego $k_n(\alpha) \leq \alpha$ y se tiene la igualdad.

Así pues, $i(\kappa_m) = k_{m+1}(i_{m+1}(\kappa_m)) = k_{m+1}(\kappa_{m+1}) = \kappa_{m+1}$, de donde a su vez:

$$i(\lambda) = i(\sup_n \kappa_n) = \sup_n i(\kappa_n) = \sup_n \kappa_{n+1} = \lambda.$$

Por último, como $V_{\kappa_n} \subset M_n$ y κ_n es inaccesible, el argumento del teorema 1.2 implica que k_n fija a todos los elementos de V_{κ_n}, luego en particular $V_{\kappa_n} \subset M$, luego $V_\lambda \subset M$. ■

Ahora ya podemos enunciar los axiomas I:

I1 Existe un ordinal λ para el que existe una inmersión elemental no trivial $j : V_{\lambda+1} \longrightarrow V_{\lambda+1}$.

I2 Existe un ordinal λ para el que existe una inmersión elemental no trivial $j : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$ tal que, para toda relación bien fundada $S \subset V_\lambda$, la relación $j^+(S)$ también está bien fundada.

I3 Existe un ordinal λ para el que existe una inmersión elemental no trivial $j : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$.

Diremos que un cardinal κ cumple la propiedad I1, I2 o I3 si es el punto crítico de una inmersión elemental en las condiciones del axioma correspondiente. Acabamos de probar que I2 equivale a la existencia de una inmersión elemental $j : V \longrightarrow M$ con punto crítico κ de modo que existe un $\lambda > \kappa$ tal que $j(\lambda) = \lambda$ y $V_\lambda \subset M$. Más concretamente, como j se restringe a una inmersión elemental $V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$, sabemos que tiene que ser $\lambda = j^\omega(\kappa)$, luego en definitiva:

Teorema 9.19 *Un cardinal κ cumple* I2 *si y sólo si existe una inmersión elemental $j : V \longrightarrow M$ con punto crítico κ tal que $V_{j^\omega(\kappa)} \subset M$.*

Como $j^\omega(\kappa)$ es un límite fuerte, la condición $M^{j^\omega(\kappa)} \subset M$ implica la condición $V_{j^\omega(\kappa)} \subset M$, pero la primera es contradictoria por el teorema de Kunen.

Cada axioma I es más fuerte que el siguiente en cuanto a consistencia:

Teorema 9.20 *Si κ es un cardinal* I1, *entonces es* I2 *y existe una medida normal D en κ tal que*

$$\{\mu < \kappa \mid \mu \textit{ cumple } \mathrm{I2}\} \in D.$$

DEMOSTRACIÓN: Es claro que si $j : V_{\lambda+1} \longrightarrow V_{\lambda+1}$ es una inmersión elemental no trivial con punto crítico κ, entonces $j^* = j|_{V_\lambda} : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$ es una inmersión elemental con el mismo punto crítico y tal que $j = (j^*)^+$, por lo que claramente cumple I2.

Sea D la medida normal en κ definida por j, es decir,

$$D = \{x \in \mathcal{P}\kappa \mid \kappa \in j(x)\}.$$

Basta probar que $\kappa \in j(\{\mu < \kappa \mid \mathrm{I2}(\mu, \lambda)\})$. Para ello a su vez basta observar que la fórmula $\mathrm{I2}(\mu, \lambda)$ que afirma la existencia de una inmersión elemental $i : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$ que cumple I2 con punto crítico μ es equivalente a una fórmula relativizada a $V_{\lambda+1}$, pues entonces, como $j(\lambda) = \lambda$,

$$j(\{\mu < \kappa \mid \mathrm{I2}(\mu, \lambda)\} = \{\mu < j(\kappa) \mid \mathrm{I2}(\mu, \lambda)\},$$

y tenemos que κ está en este conjunto, pues cumple $\mathrm{I2}(\kappa, \lambda)$.

Para ello observamos que si $i : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$ entonces $i \subset V_\lambda \times V_\lambda \subset V_\lambda$, por lo que $i \in V_{\lambda+1}$. Por otra parte, la relación $V_\lambda \vDash \phi[v]$ es definible en $V_{\lambda+1}$, pues si $\phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$ es una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos, V_ϕ es el conjunto (finito) de sus variables libres y $v : V_\phi \longrightarrow V_\lambda$, entonces $v \in V_\lambda$, luego $(\phi, v) \in V_\lambda$, luego el conjunto

$$S = \{(\phi, v) \mid \phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}) \land v \in V_\lambda^{V_\phi} \land V_\lambda \vDash \phi[v]\} \in V_{\lambda+1}$$

es definible por recurrencia en $V_{\lambda+1}$. Es claro entonces que "$i : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$ es una inmersión elemental" es expresable mediante una fórmula relativizada a $V_{\lambda+1}$, al igual que todo lo que afirma $I2$. ■

Teorema 9.21 *Si κ es un cardinal* I2*, entonces es* I3 *y existe una medida normal D en κ tal que*

$$\{\mu < \kappa \mid \mu \text{ cumple I3}\} \in D$$

Demostración: Que κ es I3 es inmediato. Sea $j : V \longrightarrow M$ en las condiciones del teorema 9.18 a). Basta probar $\mathrm{I3}(\kappa, \lambda)^M$ y tomar como D la medida normal en κ definida por j. Para ello llamamos

$$A = \{(i, \alpha, \beta) \mid \alpha < \beta < \lambda \land V_\alpha \prec V_\lambda \land V_\beta \prec V_\lambda \land$$
$$i : V_\alpha \longrightarrow V_\beta \text{ es una inmersión elemental con punto crítico } \kappa)\}.$$

Observemos que $A \subset V_\lambda \subset M$, por lo que $A = A^M \in M$. Como λ tiene cofinalidad numerable y $\lambda = j(\lambda)$, también tiene cofinalidad numerable en M, luego podemos tomar $\{\mu_r\}_{r\in\omega} \in M$ cofinal creciente en λ.

Si (i, α, β) e (i', α', β') son dos elementos de A, definimos

$$(i, \alpha, \beta)\, S\, (i', \alpha', \beta') \leftrightarrow i' \subset i \land \bigvee r \in \omega\ \mu_r \in \alpha' \setminus \alpha.$$

Es claro que la relación $S \in M$, pues su definición es absoluta. Ahora, si $\{\kappa_{n_s}\}_{s\in\omega}$ cumple que $\bigwedge s \in \omega \bigvee r \in \omega\ \kappa_{n_s} < \mu_r < \kappa_{n_{s+1}}$, entonces las restricciones $j_s = j|_{V_{\kappa_{n_s}}} : V_{\kappa_{n_s}} \longrightarrow V_{\kappa_{n_s+1}}$ cumplen $(j_s, \kappa_{n_s}, \kappa_{n_s+1}) \in A$ y

$$\bigwedge s \in \omega\ (j_{s+1}, \kappa_{n_{s+1}}, \kappa_{n_s+1})\, S\, (j_s, \kappa_{n_s}, \kappa_{n_s+1}),$$

por lo que la relación S no está bien fundada, luego tampoco está bien fundada^M, luego existe una sucesión $\{(i_s, \alpha_s, \beta_s)\}_{s\in\omega} \in M$ de elementos de A de manera que $\bigwedge s \in \omega\ (i_{s+1}, \alpha_{s+1}, \beta_{s+1})\, S\, (i_s, \alpha_s, \beta_s)$, pero entonces $i = \bigcup\limits_{s\in\omega} i_s : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$ es una inmersión elemental de punto crítico κ y cumple $i \in M$, lo que prueba que $\mathrm{I3}(\kappa, \lambda)^M$. ■

En realidad es posible definir una jerarquía de cardinales grandes situados entre I2 e I3, exigiendo que exista una inmersión $j : V_{\lambda+1} \longrightarrow V_{\lambda+1}$ no trivial que sea Σ_n-elemental. La situación es delicada, porque puede probarse que si n es impar y j es Σ_n, entonces es Σ_{n+1}, mientras que para n par ser Σ_{n+1} es más fuerte que ser Σ_n.

Por último relacionamos I3 con los cardinales enormes:

Teorema 9.22 *Si κ es un cardinal* I3 *entonces κ es n-enorme para todo $n \in \omega$ y existe una medida normal D en κ tal que*

$$\{\nu < \kappa \mid \bigwedge n \in \omega \ \nu \text{ es } n\text{-enorme}\} \in D.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $j : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$ una inmersión elemental con punto crítico κ. Fijado $n > 0$, sea $\kappa_n = j^n(\kappa)$ y sea U_n dado por

$$X \in U_n \leftrightarrow X \subset \mathcal{P}\kappa_n \land j[\kappa_n] \in j(X).$$

La prueba del teorema 9.7 nos permite concluir que U_n cumple la definición de cardinal n-enorme para κ. Más aún, $U_n \in V_\lambda$, luego dicha definición se cumple relativizada a V_λ (para todo n) y esto nos da la conclusión del enunciado tomando como D la medida normal determinada por j. ■

Para terminar nuestro ascenso en la jerarquía de los cardinales grandes mencionaremos que I1 puede reforzarse hasta un axioma I0 que afirma la existencia de una inmersión elemental no trivial $V_{\lambda+1} \longrightarrow V_{\lambda+1}$ que se extiende a su vez a una inmersión elemental $j : L(V_{\lambda+1}) \longrightarrow L(V_{\lambda+1})$. Se cumple entonces que $\mathcal{P}\lambda \subset L(V_{\lambda+1})$, y el argumento del teorema de Kunen puede aplicarse en este contexto, pero hay un escape para la contradicción, y es que se concluye (supuesto I0) que la clase $L(V_{\lambda+1})$ no cumple el axioma de elección (pero puede probarse que cumple el principio de elecciones dependientes).

Capítulo X

Iteraciones de Easton

En [PC] hemos considerado extensiones iteradas con soportes finitos y numerables, pero en muchas pruebas de consistencia con cardinales grandes se usa una clase distinta de iteraciones que combinan límites directos e inversos:

Definición 10.1 Una iteración de preórdenes $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\alpha}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\alpha})$ es una *iteración de Easton* si para todo ordinal límite $\lambda \leq \alpha$ se cumple que $\mathbb{P}_\lambda$ es límite directo si λ es inaccesible y $\mathbb{P}_\lambda$ es límite inverso en caso contrario.

Dedicamos la primera sección a presentar algunos resultados generales sobre extensiones iteradas aplicables a las iteraciones de Easton y en las secciones siguientes veremos varias aplicaciones.

10.1 Iteraciones con límites directos e inversos

En [PC] apenas hemos tratado con límites inversos en iteraciones de c.p.o.s. Un resultado elemental que resulta útil para tratar con ellos es el siguiente:

Teorema 10.2 *Sea $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\lambda}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\lambda})$ una iteración de preórdenes en un modelo transitivo numerable M de* ZFC *tal que $\bigwedge\delta < \lambda\ \mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi_\delta$ es separativo y sea G un filtro $\mathbb{P}_\lambda$-genérico sobre M, donde λ es un ordinal límite. Entonces $\bigwedge p \in \mathbb{P}_\lambda\,(p \in G \leftrightarrow \bigwedge\delta < \lambda\ p|_\delta \in G_\delta)$, donde $G_\delta = i_{\delta\lambda}^{-1}[G]$.*

Demostración: Una implicación es obvia. Si $\bigwedge\delta < \lambda\ p|_\delta \in G_\delta$, consideramos el conjunto

$$D = \{d \in \mathbb{P}_\lambda \mid q \leq p \vee \bigvee\delta < \lambda\ d \perp i_{\delta\lambda}(p|_\delta)\}.$$

Se cumple que D es denso en $\mathbb{P}_\lambda$, pues si $q \in \mathbb{P}_\lambda$ cumple $\neg q \leq p$, entonces existe un $\delta < \lambda$ tal que $\neg q|_\delta \leq p|_\delta$ y como $\mathbb{P}_\delta$ es separativo (por [PC 7.28]) existe un $d_0 \in \mathbb{P}_\delta$ tal que $d_0 \leq q|_\delta \wedge d_0 \perp p|_\delta$. Entonces es fácil ver que $d = d_0 \cup q|_{\lambda\setminus\delta} \in \mathbb{P}_\lambda$ (se prueba por inducción que $d|_{\delta+\epsilon} \in \mathbb{P}_{\delta+\epsilon}$), así como que $d \leq q \wedge d \perp i_{\delta\lambda}(p|_\delta)$, luego $d \in D$.

Consecuentemente, existe $d \in D \cap G$, que no puede cumplir $d \perp i_{\delta\lambda}(p|_\delta)$, pues todas son condiciones en G, luego tiene que ser $d \leq p$ y, por consiguiente, concluimos que $p \in G$. ■

Veamos ahora condiciones para la conservación de las condiciones de cadena:

Teorema 10.3 *Sea $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\alpha}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\alpha})$ una iteración de preórdenes y $\kappa \leq \alpha$ un cardinal regular no numerable. Supongamos que $\mathbb{P}_\kappa$ es límite directo y que existe un conjunto estacionario $E \subset \kappa$ formado por ordinales límite de modo que para cada $\delta \in E$ el conjunto $\mathbb{P}_\delta$ sea límite directo. Entonces, si $\bigwedge\delta < \kappa\ \mathbb{P}_\delta$ cumple la c.c. κ, también la cumple $\mathbb{P}_\kappa$.*

Demostración: Sea C una anticadena maximal en $\mathbb{P}_\kappa$ y consideremos el conjunto $D = \{p \in \mathbb{P}_\kappa \mid \bigvee q \in C\ p \leq q\}$, denso en $\mathbb{P}_\kappa$. Sea $\delta < \kappa$ y sea $C_\delta = \{p|_\delta \mid p \in C\}$. Sea $\overline{D}_\delta = \{p \in \mathbb{P}_\delta \mid \bigvee q \in C_\delta\ p \leq q\}$, denso en $\mathbb{P}_\delta$. Sea M_δ una anticadena maximal en $\overline{D}_\delta$. Sea $Z_\delta \subset C_\delta$ formado por un elemento sobre cada elemento de M_δ. Así, $|Z_\delta| \leq |M_\delta| < \kappa$. Sea $D_\delta = \{p \in \mathbb{P}_\delta \mid \bigvee q \in Z_\delta\ p \leq q\}$, denso en $\mathbb{P}_\delta$. Sea $\overline{C}_\delta \subset C$ tal que $Z_\delta = \{c|_\delta \mid c \in \overline{C}_\delta\}$ y $|\overline{C}_\delta| < \kappa$. Sea $\eta_\delta < \kappa$ tal que todo elemento de $\overline{C}_\delta$ tiene su soporte en η_δ.

Consideremos la aplicación $f : \kappa \longrightarrow \kappa$ dada por $f(\delta) = \eta_\delta$. El conjunto $\{\alpha < \kappa \mid f[\alpha] \subset \alpha\}$ es c.n.a. en κ, luego existe un $\gamma \in E$ tal que $f[\gamma] \subset \gamma$, es decir, tal que $\bigwedge\delta < \gamma\ \eta_\delta < \gamma$. Veamos que los soportes de los elementos de C están todos en γ, con lo que $|C| = |C_\gamma| < \kappa$.

Sea $c \in C$. Entonces $c|_\gamma \in \mathbb{P}_\gamma$, límite directo, luego existe un $\delta < \gamma$ tal que $\operatorname{sop} c|_\gamma \subset \delta$. Tenemos que $D_\delta = \{p \in \mathbb{P}_\delta \mid \bigvee q \in \overline{C}_\delta\ p \leq q|_\gamma\}$ es denso en $\mathbb{P}_\delta$, luego podemos tomar $q \in \overline{C}_\delta$ tal que $q|_\delta$ sea compatible con $c|_\delta$. Entonces $\operatorname{sop} q \subset \eta_\delta \subset \gamma$.

Así pues, $\operatorname{sop} c|_\gamma \subset \delta$ y $\neg c|_\delta \perp q|_\delta$, luego $\neg c|_\gamma \perp q|_\gamma$. Como además $\operatorname{sop} q \subset \gamma$, concluimos igualmente que $\neg c \perp q$. Por último, $c, q \in C$, luego ha de ser $c = q$ y, por consiguiente, $\operatorname{sop} c \subset \gamma$. ■

Necesitamos un resultado similar para c.p.o.s κ-cerrados, pero en realidad necesitamos considerar una propiedad un poco más fuerte:

Definición 10.4 Sea $\mathbb{P}$ un c.p.o. y $D \subset \mathbb{P}$. Diremos que D es un subconjunto *dirigido* si $\bigwedge dd' \in D \bigvee e \in D(e \leq d \land e \leq d')$.

Si κ es un cardinal infinito, diremos que $\mathbb{P}$ es *fuertemente κ-cerrado* si para todo subconjunto dirigido D de $\mathbb{P}$ con $|D| < \kappa$ existe una condición $p \in \mathbb{P}$ tal que $\bigwedge d \in D\ p \leq d$.

Es obvio que todo c.p.o. fuertemente κ-cerrado es κ-cerrado.

Teorema 10.5 *Sea κ un cardinal, $\mathbb{P}$ un c.p.o. fuertemente κ-cerrado y π un $\mathbb{P}$-nombre para un c.p.o. tal que $\mathbb{1} \Vdash \pi$ es fuertemente $\check{\kappa}$-cerrado. Entonces $\mathbb{P} * \pi$ es fuertemente κ-cerrado.*

Demostración: Conviene probar un resultado ligeramente más general (que usaremos después en 10.7): Bajo las hipótesis del teorema, si

$$D = \{(p_\alpha, \sigma_\alpha) \mid \alpha < \lambda\}$$

es un conjunto dirigido en $\mathbb{P} * \pi$ con $\lambda < \kappa$ y $p \in \mathbb{P}$ cumple que $\bigwedge \alpha < \lambda\ p \leq p_\alpha$, entonces existe un $\sigma \in \hat{\pi}$ tal que $\bigwedge d \in D\ (p, \sigma) \leq d$.

Esto prueba ciertamente el teorema, pues claramente $D_1 = \{p_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ es un conjunto dirigido en $\mathbb{P}$, luego existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $\bigwedge \alpha < \lambda\ p \leq p_\alpha$.

Por el teorema de reflexión, basta probar la relativización del resultado a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Sea $\delta = \{(\sigma_\alpha, \mathbb{1}) \mid \alpha < \lambda\} \in M^{\mathbb{P}}$ y vamos a probar que

$$p \Vdash \delta \text{ es un subconjunto dirigido de } \pi \wedge |\delta| < \check{\kappa}.$$

Para ello sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $p \in G$. Entonces $\delta_G = \{\sigma_{\alpha G} \mid \alpha < \lambda\} \subset \pi_G$. Dados $\sigma_{\alpha G}$, $\sigma_{\beta G} \in \delta_G$, como D es dirigido, existe un $\gamma < \lambda$ tal que $(p_\gamma, \sigma_\gamma) \leq (p_\alpha, \sigma_\alpha)$ y $(p_\gamma, \sigma_\gamma) \leq (p_\beta, \sigma_\beta)$.

Tenemos que $p_\gamma \Vdash \sigma_\gamma \leq_\pi \leq \sigma_\alpha$ y $p_\gamma \Vdash \sigma_\gamma \leq_\pi \sigma_\beta$, luego p fuerza lo mismo y, por consiguiente, $\sigma_{\gamma G} \leq \sigma_{\alpha G}$ y $\sigma_{\gamma G} \leq \sigma_{\beta G}$. Esto prueba que δ_G es dirigido$^{M[G]}$.

Por otra parte, $\{(\text{p.o.}(\check{\alpha}, \sigma_\alpha), \mathbb{1}) \mid \alpha < \lambda\} \in M^{\mathbb{P}}$ nombra a una aplicación suprayectiva de λ en δ_G, luego $|\delta_G|^{M[G]} < \kappa$.

En consecuencia, $p \Vdash \bigvee q \in \pi \bigwedge x \in \delta\ q \leq_\pi x$, luego existe un $\sigma \in \hat{\pi}$ tal que $p \Vdash \bigwedge x \in \delta\, \sigma \leq_\pi x$. En particular $p \Vdash \sigma \leq_\pi \sigma_\alpha$ para todo $\alpha \leq \lambda$, con lo que el par $(p, \sigma) \in \mathbb{P} * \pi$ cumple $\bigwedge d \in D\ (p, \sigma) \leq d$. ■

Teorema 10.6 *Sea* $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \alpha}, \{\pi_\delta\}_{\delta < \alpha})$ *una iteración de preórdenes, sea* κ *un cardinal y* $\lambda < \alpha$ *un ordinal límite tal que* $\operatorname{cf} \lambda \geq \kappa$, $\mathbb{P}_\lambda$ *es límite directo y* $\bigwedge \delta < \lambda\ \mathbb{P}_\delta$ *es fuertemente* κ*-cerrado. Entonces* $\mathbb{P}_\lambda$ *es fuertemente* κ*-cerrado.*

Demostración: Sea $D \subset \mathbb{P}_\lambda$ un conjunto dirigido con $|D| < \kappa$. Si $d \in D$ existe un $\gamma_d < \lambda$ tal que $\operatorname{sop} d \subset \gamma_d$. Como $|D| < \operatorname{cf} \lambda$, existe un $\gamma < \lambda$ tal que $\bigwedge d \in D\ \gamma_d < \gamma$, o sea, $\bigwedge d \in D \operatorname{sop} d \subset \gamma$. Sea $D' = \{d|_\gamma \mid d \in D\}$. Es claro que D' es un conjunto dirigido en $\mathbb{P}_\gamma$, luego existe una condición $p \in \mathbb{P}_\gamma$ tal que $\bigwedge d \in D\ p \leq d|_\gamma$, luego $\bigwedge d \in D(i_{\gamma\lambda}(p) \leq i_{\gamma\lambda}(d|_\gamma) = d)$. Esto prueba que $\mathbb{P}_\lambda$ es fuertemente κ-cerrado. ■

Finalmente llegamos al resultado de conservación:

Teorema 10.7 *Sea* $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \alpha}, \{\pi_\delta\}_{\delta < \alpha})$ *una iteración de preórdenes cuyos límites sean todos directos o inversos, sea* κ *un cardinal tal que para todo* $\delta < \alpha$ *se cumpla que* $\mathbb{1} \Vdash \pi_\delta$ *es fuertemente* $\check{\kappa}$*-cerrado. Supongamos que para cada* $\lambda \leq \alpha$ *con* $\operatorname{cf} \lambda < \kappa$ *se cumple que* $\mathbb{P}_\lambda$ *es límite inverso. Entonces cada* $\mathbb{P}_\delta$ *es fuertemente* κ*-cerrado.*

Demostración: Por inducción sobre δ. Claramente $\mathbb{P}_0 = \{\mathbb{1}\}$ es fuertemente κ-cerrado. Si $\mathbb{P}_\delta$ es fuertemente κ-cerrado, entonces $\mathbb{P}_{\delta+1} \cong \mathbb{P}_\delta * \pi_\delta$ es fuertemente κ-cerrado por 10.5.

Supongamos que $\mathbb{P}_\delta$ es fuertemente κ-cerrado para todo $\delta < \lambda$. Si $\mathbb{P}_\lambda$ es límite directo, entonces ha de ser $\operatorname{cf} \lambda \geq \kappa$ y concluimos que $\mathbb{P}_\lambda$ es fuertemente κ-cerrado por el teorema anterior. Supongamos, pues, que $\mathbb{P}_\lambda$ es límite inverso.

Sea $D = \{p_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$ un conjunto dirigido en $\mathbb{P}_\lambda$ con $\gamma < \kappa$. Vamos a construir una sucesión $\{q_\delta\}_{\delta\leq\lambda}$, creciente respecto a la inclusión, tal que cada $q_\delta \in P_\delta$ y $q_\delta \leq p_\alpha|_\delta$, para todo $\alpha < \gamma$.

Tomamos $q_0 = \mathbb{1} \in \mathbb{P}_0$. Definidos $\{q_\delta\}_{\delta\leq\beta}$, para $\beta < \lambda$, observamos que $D' = \{p_\alpha|_{\beta+1} \mid \alpha < \gamma\}$ es un conjunto dirigido en el c.p.o. $\mathbb{P}_{\beta+1} \cong \mathbb{P}_\beta * \pi_\beta$ y $|D'| < \kappa$. A través de la semejanza, D' se corresponde con el conjunto

$$\{(p_\alpha|_\beta, p_\alpha(\beta)) \mid \alpha < \gamma\}.$$

Por hipótesis de inducción $\bigwedge\alpha < \lambda\ q_\beta \leq p_\alpha|_\beta$, luego podemos usar el resultado probado en la demostración de 10.5, según el cual existe un nombre $\tau \in \hat{\pi}_\beta$ tal que

$$\bigwedge\alpha < \gamma\ (q_\beta, \tau) \leq (p_\alpha|_\beta, p_\alpha(\beta)).$$

Equivalentemente, existe una extensión $q_{\beta+1}$ de q_β a $\mathbb{P}_{\beta+1}$ de manera que $q_{\beta+1} \leq p_\alpha|_{\beta+1}$ para todo $\alpha < \gamma$.

Podemos exigir que si $\bigwedge\alpha < \gamma\ p_\alpha(\beta) = \mathbb{1}$, entonces $q_{\beta+1}(\beta) = \mathbb{1}$.

Supongamos definidos $\{q_\delta\}_{\delta<\beta}$, donde $\beta < \lambda$ es un ordinal límite. Definimos $q_\beta = \bigcup\limits_{\delta<\beta} q_\delta$. Si $\mathbb{P}_\beta$ es un límite inverso es claro que $q_\beta \in \mathbb{P}_\beta$. Si es límite directo, por hipótesis $\operatorname{cf}\beta \geq \kappa > \gamma$, luego existe un $\delta < \beta$ tal que $\operatorname{sop} p_\alpha|_\beta \subset \delta$, para todo $\alpha < \gamma$. Esto significa que $p_\alpha(\epsilon) = \mathbb{1}$ para $\delta \leq \epsilon < \beta$ y todo $\alpha < \gamma$, y entonces, por construcción, $q_\beta(\epsilon) = \mathbb{1}$. Por consiguiente $\operatorname{sop} q_\beta \subset \alpha$, luego en cualquier caso $q_\beta \in \mathbb{P}_\beta$. También es claro que cumple lo pedido.

De este modo llegamos a una condición q_λ que extiende a todas las condiciones de D. ■

Veamos ahora un teorema de factorización similar a [PC 7.32] y a [PC 11.26]. Al admitir límites inversos es necesario trabajar con semejanzas en lugar de con meras inmersiones densas, por lo que es preferible realizar una construcción distinta.

Recordemos de [PC 7.11] que si $\mathbb{P}$ es un c.p.o. y π es un $\mathbb{P}$-nombre para un c.p.o., para cada $\sigma \in V^{\mathbb{P}*\pi}$ podemos definir

$$\sigma^* = \{(\mathrm{p.o.}(\xi^*, \tau), p) \mid (\xi, (p, \tau)) \in \sigma\},$$

de modo que $\mathbb{1} \Vdash \sigma^* \in V^\pi$ y si M es un modelo transitivo numerable de ZFC, $\mathbb{P} \in M$, $\pi \in M^{\mathbb{P}}$ es un $\mathbb{P}$-nombre en M para un c.p.o., G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, $\mathbb{Q} = \pi_G \in M[G]$ y H es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[G]$, entonces $(\sigma^*_G)_H = \sigma_{G*H}$ (teorema [PC 7.12]).

Sea $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P} * \pi$ la inmersión completa dada por $i(p) = (p, \mathbb{1})$, sea

$$\Gamma^* = \{(i(\tau), (p, \tau)) \mid (p, \tau) \in \mathbb{P} * \pi\} \in M^{\mathbb{P}*\pi}.$$

(Notemos que $\tau \in M^{\mathbb{P}}$, $i(\tau) \in M^{\mathbb{P}*\pi}$). Es fácil ver que $\Gamma^*_{G*H} = H$. Por lo tanto $\mathbb{1}_{\mathbb{P}*\pi} \Vdash \Gamma^*$ es un filtro en $i(\pi)$.

Si $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ y $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \tau$ es un π-nombre, entonces $\mathbb{1}_{\mathbb{P}*\pi} \Vdash i(\tau)$ es un $i(\pi)$-nombre, luego $\mathbb{1}_{\mathbb{P}*\pi} \Vdash \bigvee x\ x = i(\tau)_{\Gamma^*}$, luego existe un $\mathring{\tau} \in M^{\mathbb{P}*\pi}$ tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}*\pi} \Vdash \mathring{\tau} = i(\tau)_{\Gamma^*}$.

Así tenemos definidas dos correspondencias opuestas entre $\mathbb{P}$-nombres de π-nombres y $\mathbb{P} * \pi$-nombres de modo que

$$(\tau_G^*)_H = \tau_{G*H} \quad \text{y} \quad \mathring{\tau}_{G*H} = (\tau_G)_H. \tag{10.1}$$

Notemos que la definición de $\mathring{\tau}$ involucra una elección arbitraria, pero en la práctica esta elección es irrelevante, pues dos elecciones distintas dan lugar a nombres equivalentes en el sentido de que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}*\pi} \Vdash \mathring{\tau} = \mathring{\tau}'$.

De las relaciones (10.1) se sigue también que si aplicamos a un nombre τ la composición de las dos correspondencias obtenemos un nombre equivalente al de partida.

Un problema que aparece al tratar con iteraciones es que los c.p.o.s no son antisimétricos, lo que hace que una cantidad imprevisible de condiciones puedan contener la misma información, por lo que dos c.p.o.s "equivalentes" en el sentido de producir las mismas extensiones, pueden no ser semejantes. Esto se resuelve identificando las condiciones del modo siguiente:

Definición 10.8 Si $\mathbb{P}$ es un c.p.o., diremos que dos condiciones p, $p' \in \mathbb{P}$ son *equivalentes,* y lo representaremos por $p \sim p'$, si $p \leq p' \wedge p' \leq p$.

Claramente se trata de una relación de equivalencia. Llamaremos $\overline{\mathbb{P}}$ al conjunto cociente, que está parcialmente ordenado por la relación dada por $[p] \leq [q] \leftrightarrow p \leq q$.

La aplicación $i : \mathbb{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{P}}$ dada por $i(p) = [p]$ es una inmersión densa, luego ambos c.p.o.s dan las mismas extensiones. Más concretamente, si M es un modelo transitivo numerable de ZFC y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces $G' = \{[p] \mid p \in G\}$ es $\overline{\mathbb{P}}$-genérico sobre M y si G es $\overline{\mathbb{P}}$-genérico sobre M entonces $G' = \{p \in \mathbb{P} \mid [p] \in G\}$ es $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Además $G'' = G$.

Así mismo, si $\tau \in M^{\mathbb{P}}$, entonces $\tau' = i(\tau) = \{(\sigma', [p]) \mid (\sigma, p) \in \tau\} \in M^{\overline{\mathbb{P}}}$ y si $\tau \in M^{\overline{P}}$, entonces $\tau' = \{(\sigma', p) \mid (\sigma, [p]) \in \tau\} \in M^{\mathbb{P}}$, de modo que $\tau_G = \tau'_{G'}$ (para las dos definiciones).

Es claro que las condiciones p y $[p]$ fuerzan las mismas fórmulas, intercambiando los $\mathbb{P}$-nombres con los $\overline{\mathbb{P}}$-nombres.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar el teorema de factorización:

Teorema 10.9 *Sea* $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \alpha}, \{\pi_\delta\}_{\delta < \alpha})$ *una iteración de preórdenes con límites directos/inversos. Sea* $\beta \leq \alpha$ *y* $\alpha = \beta + \gamma$ *y supongamos que para todo* $\lambda \leq \gamma$ *con* $\operatorname{cf} \lambda \leq |\mathbb{P}_\beta|$ *se cumple que* $\mathbb{P}_{\beta+\lambda}$ *es límite inverso. Entonces existe* $(\{\pi_\delta^\beta\}_{\delta \leq \gamma}, \{\rho_\delta^\beta\}_{\delta < \gamma})$ *tal que:*

a) π_δ^β, $\rho_\delta^\beta \in V^{\mathbb{P}_\beta}$.

b) $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash (\{\pi_\delta^\beta\}_{\delta \leq \check{\gamma}}, \{\rho_\delta^\beta\}_{\delta < \check{\gamma}})$ *es una iteración de preórdenes* *c) Para todo $\delta \leq \gamma$ existe $\phi_\delta : \overline{\mathbb{P}}_{\beta+\delta} \longrightarrow \overline{\mathbb{P}_\beta * \pi^\beta_\delta}$ semejanza.*

d) $\rho^\beta_\delta = \pi^*_{\beta+\delta}$.

e) Para cada $\lambda \leq \gamma$, $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \pi^\beta_\lambda$ es límite directo o inverso según lo sea $\mathbb{P}_{\beta+\lambda}$.

En este enunciado hay algunos abusos de notación que debemos advertir:

Para enunciar b) correctamente deberíamos definir

$$\pi^\beta = \{(\text{p.o.}(\check{\delta}, \pi^\beta_\delta), \mathbb{1}) \mid \delta \leq \gamma\}, \qquad \rho^\beta = \{(\text{p.o.}(\check{\delta}, \rho^\beta_\delta), \mathbb{1}) \mid \delta < \gamma\},$$

de modo que $\mathbb{1}|_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash$ (π^β, ρ^β son sucesiones de dominio $\check{\gamma}+1$ y $\check{\gamma}$, respectivamente), y para todo δ,

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \pi^\beta(\check{\delta}) = \pi^\beta_\delta, \qquad \mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \rho^\beta(\check{\delta}) = \rho^\beta_\delta.$$

En estos términos, b) afirma que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash (\pi^\beta, \rho^\beta)$ es una iteración de preórdenes. Más delicado es d). En principio $\pi_{\beta+\delta}$ es un $\mathbb{P}_{\beta+\delta}$-nombre, pero a partir de él podemos pasar a $\pi'_{\beta+\delta} \in V^{\overline{\mathbb{P}}_{\beta+\delta}}$, usar la aplicación de c) para obtener $\phi_\delta(\pi'_{\beta+\delta}) \in V^{\overline{\mathbb{P}_\beta * \pi^\beta_\delta}}$, de aquí a su vez $\phi_\delta(\pi'_{\beta+\delta})' \in V^{\mathbb{P}_\beta * \pi^\beta_\delta}$ y por último $\phi_\delta(\pi'_{\beta+\delta})'^* \in V^{\mathbb{P}_\beta}$. Lo que afirma d) es que $\rho^\beta_\delta = \phi_\delta(\pi'_{\beta+\delta})'^*$.

Demostración: Basta probar la relativización del teorema a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Probaremos además que existe una aplicación $f_\delta : \mathbb{P}_{\beta+\delta} \longrightarrow \mathbb{P}_\beta * \pi^\beta_\delta$ tal que ϕ_δ viene dada por $\phi_\delta([p]) = [f_\delta(p)]$. Razonamos por inducción sobre $\delta \leq \gamma$.

Claramente $\pi^\beta_0 = \{(\varnothing, \mathbb{1})\}$ (es decir, el nombre canónico de $\{\varnothing\}$) cumple lo pedido con la aplicación f_0 definida de forma obvia.

Supongamos construidos $(\{\pi^\beta_\delta\}_{\delta\leq\epsilon}, \{\rho^\beta_\delta\}_{\delta<\epsilon})$ para todo $\epsilon < \eta$, junto con las aplicaciones f_δ correspondientes.

Si η es un límite tomamos $\pi^\beta_\eta \in M^{\mathbb{P}_\beta}$ tal que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \pi^\beta_\eta \text{ es el límite (dir./inv.) de } \{\pi^\beta_\delta\}_{\delta<\eta}.$$

(Consideramos límite directo o inverso según lo sea $\mathbb{P}_{\beta+\eta}$.) De este modo tenemos definido $(\{\pi^\beta_\delta\}_{\delta\leq\eta}, \{\rho^\beta_\delta\}_{\delta<\eta})$.

Si $\eta = \delta+1$ tenemos definida ϕ_δ y podemos definir ρ^β_δ según d). Es claro entonces que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \rho^\beta_\delta \text{ es un } \pi^\beta_\delta\text{-nombre para un c.p.o.}$$

Tomamos $\pi^\beta_\eta \in M^{\mathbb{P}_\beta}$ de modo que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash (\{\pi^\beta_\delta\}_{\delta\leq\eta}, \{\rho^\beta_\delta\}_{\delta<\eta})$ es una iteración de preórdenes.

Ahora basta comprobar que en ambos casos (η límite o sucesor) existe la aplicación $f_\eta : \mathbb{P}_{\beta+\eta} \longrightarrow \mathbb{P}_\beta * \pi^\beta_\eta$ y cumple el teorema.

Fijemos $p \in \mathbb{P}_{\beta+\eta}$. Para cada $\delta < \eta$, tenemos que $p(\beta+\delta) \in M^{\mathbb{P}_{\beta+\delta}}$, luego podemos considerar $p(\beta+\delta)' \in M^{\overline{\mathbb{P}_{\beta+\delta}}}$, $\phi_\delta(p(\beta+\delta)') \in M^{\overline{\mathbb{P}_\beta * \pi^\beta_\delta}}$, a su vez $\phi_\delta(p(\beta+\delta)')' \in M^{\mathbb{P}_\beta * \pi^\beta_\delta}$ y por último $\tilde{p}_\delta = \phi_\delta(p(\beta+\delta)')'^{*} \in M^{\mathbb{P}_\beta}$. Además, como $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\beta+\delta}} \Vdash p(\beta+\delta) \in \pi_{\beta+\delta}$, es fácil ver que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \mathbb{1}_{\pi^\beta_\delta} \Vdash \tilde{p}_\delta \in \rho^\beta_\delta$.

Modificando la definición, podemos exigir que cuando $p(\beta+\delta) = \mathbb{1}_{\pi_{\beta+\delta}}$ entonces $\tilde{p}_\delta = \mathbb{1}_{\rho^\beta_\delta}$. Ahora definimos

$$\tilde{p} = \{(\text{p.o.}(\check{\delta}, \tilde{p}_\delta), \mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta}) \mid \delta < \eta\} \in M^{\mathbb{P}_\beta},$$

de modo que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta}$ fuerza que $\tilde{p}$ es una función de dominio $\check{\eta}$. Veamos que, más concretamente, $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \tilde{p} \in \pi^\beta_\eta$.

Para ello fijamos un filtro $\mathbb{P}_\beta$-genérico G_β y observamos que

$$\bigwedge \delta < \eta \ \tilde{p}_{G_\beta}(\delta) = (\tilde{p}_\delta)_{G_\beta},$$

luego, si $\mathbb{Q}_\delta = (\pi^\beta_\delta)_{G_\beta}$ y $q = \tilde{p}_{G_\beta}$, tenemos que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_\delta} \Vdash q(\delta) \in (\rho^\beta_\delta)_{G_\beta}$.

Una simple inducción prueba entonces que $q|_\delta \in \mathbb{Q}_\delta$. En efecto, para $\delta = 0$ es trivial y, si vale para δ, entonces vale para $\delta+1$ por la observación precedente. Si vale para todo $\delta < \lambda \leq \eta$ y $\mathbb{Q}_\lambda$ es un límite inverso, es obvio que $q|_\lambda \in \mathbb{Q}_\lambda$. Si $\mathbb{Q}_\lambda$ es límite directo, entonces por construcción $\mathbb{P}_{\beta+\lambda}$ también es límite directo, luego existe un $\gamma < \lambda$ tal que $\bigwedge \delta < \lambda(\gamma \leq \delta \rightarrow p(\beta+\delta) = \mathbb{1})$, luego por construcción $\bigwedge \delta < \lambda(\gamma \leq \delta \rightarrow q(\delta) = \mathbb{1}_{(\rho^\beta_\delta)_{G_\beta}})$, luego también $q|_\lambda \in \mathbb{Q}_\lambda$. En particular $q \in \mathbb{Q}_\eta$, que es lo que teníamos que probar.

Por consiguiente, podemos definir $f_\eta(p) = (p|_\beta, \tilde{p}) \in \mathbb{P}_\beta * \pi^\beta_\delta$.

Veamos a continuación que si $p \leq p'$, entonces $f_\eta(p) \leq f_\eta(p')$.

Obviamente, $p|_\beta \leq p'|_\beta$, y falta probar que $p|_\beta \Vdash \tilde{p} \leq \tilde{p}'$. Para ello tomamos un filtro $\mathbb{P}_\beta$-genérico sobre M tal que $p|_\beta \in G$ y llamamos $\mathbb{Q}_\delta = (\pi^\beta_\delta)_{G_\beta}$, $q = \tilde{p}_{G_\beta}$, $q' = \tilde{p}'_{G_\beta}$. Tenemos que probar que $q \leq q'$. Razonamos por inducción sobre $\delta \leq \eta$ que $q|_\delta \leq q'|_\delta$. Esto se cumple obviamente para $\delta = 0$ y el caso límite también es trivial. Supongamos que vale para δ. Tenemos que probar que $q|_\delta \Vdash q(\delta) \leq q'(\delta)$.

Para ello tomamos un filtro $\mathbb{Q}_\delta$-genérico sobre $M[G_\beta]$ tal que $q|_\delta \in H_\delta$. Entonces $G_\beta * H_\delta$ es un filtro $\mathbb{P}_\beta * \pi^\beta_\delta$-genérico sobre M, que, a través de ϕ_δ, se corresponde con un filtro $\mathbb{P}_{\beta+\delta}$-genérico $G_{\beta+\delta}$.

Ahora observamos que la definición de $\tilde{p}_\delta$ sólo depende de $p(\beta+\delta)$, por lo que $\{\tilde{p}_\epsilon\}_{\epsilon<\delta}$ es la sucesión definida a partir de $p|_{\beta+\delta}$, luego

$$\widetilde{p|_{\beta+\delta}} = \{(\text{p.o.}(\check{\epsilon}, \tilde{p}_\epsilon), \mathbb{1}_{\mathbb{P}_\epsilon}) \mid \epsilon < \delta\},$$

luego $(\widetilde{p|_{\beta+\delta}})_{G_\beta} = q|_\delta$. Esto implica que

$$f(p|_{\beta+\delta}) = (p|_\beta, \widetilde{p|_{\beta+\delta}}) \in G_\beta * H_\delta,$$

de donde se sigue que $p|_{\beta+\delta} \in G_{\beta+\delta}$. Como $p|_{\beta+\delta} \Vdash p(\beta+\delta) \leq p'(\beta+\delta)$, tenemos que $p(\beta+\delta)_{G_{\beta+\delta}} \leq p'(\beta+\delta)_{G_{\beta+\delta}}$, pero por construcción esto es lo mismo que $((\tilde{p}_\delta)_{G_\beta})_{H_\delta} \leq ((\tilde{p}'_\delta)_{G_\beta})_{H_\delta}$ o, equivalentemente, $q(\delta)_{H_\delta} \leq q'(\delta)_{H_\delta}$.

En particular, si $p \sim p'$, también $f_\eta(p) \sim f_\eta(p')$, luego f_η induce una aplicación $\phi_\eta : \overline{\mathbb{P}}_{\beta+\eta} \longrightarrow \overline{\mathbb{P}_\beta * \pi^\beta_\eta}$ que conserva el orden.

Ahora probamos que si $f_\eta(p) \leq f_\eta(p')$, entonces $p \leq p'$, con lo que ϕ_η será una semejanza en su imagen.

Probamos por inducción sobre $\delta \leq \eta$ que $p|_{\beta+\delta} \leq p'|_{\beta+\delta}$. Tenemos que $(p|_\beta, \tilde{p}) \leq (p'|_\beta, \tilde{p}')$, luego en particular $p|_\beta \leq p'|_\beta$, que es es caso $\delta = 0$. El caso límite es trivial. Supongamos que se cumple para $\delta < \eta$. Entonces hay que probar que $p|_{\beta+\delta} \Vdash p(\beta+\delta) \leq p'(\beta+\delta)$. Para ello fijamos un filtro $\mathbb{P}_{\beta+\delta}$-genérico sobre M tal que $p|_{\beta+\delta} \in G_{\beta+\delta}$.

A través de ϕ_δ el filtro $G_{\beta+\delta}$ se corresponde con un filtro $\mathbb{P}_\beta * \pi^\beta_\delta$-genérico sobre M tal que $f_\delta(p|_{\beta+\delta}) \in G_\beta * H_\delta$, es decir, $p|_\beta \in G_\beta$ y $(\widetilde{p|_{\beta+\delta}})_{G_\beta} \in H_\delta$.

Como $f_\eta(p) \leq f_\eta(p')$, se cumple que $p|_\beta \Vdash \tilde{p} \leq \tilde{p}'$, luego $q = \tilde{p}_{G_\beta} \leq \tilde{p}'_{G_\beta} = q'$, pero antes hemos razonado que $q|_\delta = (\widetilde{p|_{\beta+\delta}})_{G_\beta} \in H_\delta$, y como $q|_\delta \Vdash q(\delta) \leq q'(\delta)$, tenemos que $q(\delta)_{H_\delta} \leq q'(\delta)_{H_\delta}$, y al igual que antes, por construcción, esto es lo mismo que $p(\beta+\delta)_{G_\beta} \leq p'(\beta+\delta)_{G_\beta}$.

Sólo falta demostrar que ϕ_η es suprayectiva. Para ello tomamos una condición $(p,\sigma) \in \mathbb{P}_\beta * \pi^\beta_\eta$. Entonces $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \sigma \in \pi^\beta_\eta$, luego, para cada $\delta < \eta$, podemos tomar $\tau_\delta \in M^{\mathbb{P}_\beta}$ tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \tau_\delta = \sigma(\check{\delta})$. En particular

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash (\tau_\delta \text{ es un } \pi^\beta_\delta\text{-nombre} \wedge \mathbb{1}_{\pi^\beta_\delta} \Vdash \tau_\delta \in \rho^\beta_\delta).$$

A su vez podemos construir $\mathring{\tau}_\delta \in M^{\mathbb{P}_\beta * \pi^\beta_\delta}$. Sea $p_{\beta+\delta} = \phi_\delta^{-1}((\mathring{\tau}_\delta)')' \in M^{\mathbb{P}_{\beta+\delta}}$. Definimos

$$\bar{p}|_\beta = p \qquad \wedge \qquad \bigwedge \delta < \eta\ \bar{p}(\beta+\delta) = p_{\beta+\delta}.$$

Vamos a probar que $\bar{p} \in \mathbb{P}_{\beta+\eta}$. Para ello comprobamos por inducción sobre $\delta \leq \eta$ que $\bar{p}|_{\beta+\delta} \in \mathbb{P}_{\beta+\delta}$. Esto se cumple claramente para $\delta = 0$. Supongamos que se cumple para $\delta < \eta$. Tenemos que probar que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\beta+\delta}} \Vdash p_{\beta+\delta} \in \pi^\beta_\delta$. Ahora bien, si $G_{\beta+\delta}$ es un filtro $\mathbb{P}_{\delta+\beta}$-genérico sobre M, a través de ϕ_δ se corresponde con un filtro $\mathbb{P}_\beta * \pi^\beta_\delta$-genérico $G_\beta * H_\delta$, de modo que $((\tau_\delta)_{G_\beta})_{H_\delta} \in ((\rho^\beta_\delta)_{G_\beta})_{H_\delta}$, pero esto es lo mismo que $(p_{\beta+\delta})_{G_{\beta+\delta}} \in (\pi^\beta_\delta)_{G_{\beta+\delta}}$.

Supongamos que $\lambda \leq \eta$ y $\bigwedge \delta < \lambda\ \bar{p}|_{\beta+\delta} \in \mathbb{P}_{\beta+\delta}$. Si $\mathbb{P}_{\beta+\lambda}$ es límite inverso es claro entonces que $\bar{p}|_{\beta+\lambda} \in \mathbb{P}_{\beta+\lambda}$. Supongamos, pues que $\mathbb{P}_{\beta+\lambda}$ es límite directo, en cuyo caso, por hipótesis, $\operatorname{cf} \lambda > |\mathbb{P}_{\beta+\lambda}|$ (y éste es el único punto de la prueba en el que se requiere esta hipótesis). Por construcción tenemos además que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \pi^\beta_\lambda$ es límite directo.

Por otra parte, $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \sigma \in \pi^\beta_\eta$, luego $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \sigma|_{\check{\lambda}} \in \pi^\beta_\lambda$, luego

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \bigvee \gamma < \check{\lambda} \bigwedge \delta < \check{\lambda} (\gamma \leq \delta \rightarrow \sigma(\delta) = \mathbb{1}_{\rho^\beta_\delta}).$$

Para cada $q \in \mathbb{P}_\beta$ existen una condición $r_q \leq q$ y un ordinal $\gamma_q < \lambda$ tales que $r_q \Vdash \bigwedge \delta < \check{\lambda}(\check{\gamma}_q \leq \delta \to \sigma(\delta) = \mathbb{1}_{\rho_\delta^\beta})$. Podemos exigir que las sucesiones $\{r_q\}_{q\in\mathbb{P}_\beta}$ y $\{\gamma_q\}_{q\in\mathbb{P}_\beta}$ estén en M. Por la hipótesis sobre la cofinalidad de λ podemos afirmar que $\gamma = \bigcup\limits_{q\in\mathbb{P}_\beta} \gamma_q < \lambda$. Claramente, $r_q \Vdash \bigwedge \delta < \check{\lambda}(\check{\gamma} \leq \delta \to \sigma(\delta) = \mathbb{1}_{\rho_\delta^\beta})$.

Como el conjunto $\{r_q \mid q \in \mathbb{P}_\beta\}$ es denso en $\mathbb{P}_\beta$, podemos concluir que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \bigwedge \delta < \check{\lambda}(\check{\gamma} \leq \delta \to \sigma(\delta) = \mathbb{1}_{\rho_\delta^\beta}).$$

Ahora, si $\gamma < \delta < \lambda$ tenemos $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \tau_\delta = \mathbb{1}_{\rho_\delta^\beta}$, luego $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta * \pi_\delta^\beta} \Vdash \mathring{\tau}_\delta = \mathring{\mathbb{1}}_{\rho_\delta^\beta}$ y, tomando clases, aplicando ϕ_δ y eliminando clases, $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\beta+\delta}} \Vdash p_{\beta+\delta} = \mathbb{1}_{\pi_{\beta+\delta}}$. En la definición de $p_{\beta+\delta}$ podemos exigir que si $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\beta+\delta}} \Vdash p_{\beta+\delta} = \mathbb{1}_{\pi_{\beta+\delta}}$ entonces $p_{\beta+\delta} = \mathbb{1}_{\pi_{\beta+\delta}}$. De este modo, esta igualdad se da para $\gamma \leq \delta < \lambda$, con lo que $\bar{p}|_{\beta+\lambda} \in \mathbb{P}_{\beta+\lambda}$.

Sólo falta probar que $f_\eta(\bar{p}) = (p, \tilde{\bar{p}}) \sim (p, \sigma)$, pues entonces $\phi_\eta([\bar{p}]) = [(p,\sigma)]$. Para ello basta comprobar que $p \Vdash \tilde{\bar{p}} \sim \sigma$. Tomamos un filtro $\mathbb{P}_\beta$-genérico sobre M tal que $p \in G_\beta$ y sea $q = \tilde{\bar{p}}_{G_\beta}$. Tenemos que probar que $q \leq \sigma_{G_\beta} \wedge \sigma_{G_\beta} \leq q$, para lo cual razonaremos por inducción sobre $\delta \leq \eta$ que

$$q|_\delta \leq (\sigma_{G_\beta})|_\delta \wedge (\sigma_{G_\beta})|_\delta \leq q|_\delta.$$

Si $\delta = 0$ o δ es un ordinal límite la conclusión es trivial. Supongamos que se cumple para $\delta < \eta$, y basta probar que $q|_\delta \Vdash q(\delta) = \sigma_{G_\beta}(\delta)$. Sea $\mathbb{Q}_\delta = (\pi_\delta^\beta)_{G_\beta}$ y tomemos un filtro $\mathbb{Q}_\delta$-genérico sobre $M[G_\beta]$ tal que $q|_\delta \in H_\delta$.

Tenemos que $q(\delta) = (\tilde{\bar{p}}_\delta)_{G_\beta}$, y $\tilde{\bar{p}}_\delta$ se obtiene de $\bar{p}(\beta+\delta) = \phi_\delta^{-1}((\mathring{\tau}_\delta)')'$ justo por el proceso inverso por el que este nombre se obtiene de τ_δ, lo cual hace que

$$q(\delta)_{H_\delta} = ((p_{\beta+\delta})_{G_\beta})_{H_\delta} = ((\tau_\delta)_{G_\beta})_{H_\delta} = (\sigma_{G_\beta}(\delta))_{H_\delta}. \qquad \blacksquare$$

Conviene observar que de la demostración del teorema hemos visto que $\phi_\delta([p]) = [(p|_\beta, \tilde{p})]$.

En lo sucesivo identificaremos cada conjunto preordenado $\mathbb{P}$ con el conjunto parcialmente ordenado $\overline{\mathbb{P}}$. En otras palabras, no distinguiremos entre condiciones equivalentes. Así, por ejemplo, la parte c) del teorema anterior la enunciaremos diciendo que existe una semejanza $\phi_\delta : \mathbb{P}_{\beta+\delta} \longrightarrow \mathbb{P}_\beta * \pi_\delta^\beta$. Cualquier imprecisión que pueda provocar la adopción de este convenio se resuelve mediante las técnicas de la prueba anterior (distinguiendo entre nombres τ y τ', etc.)

La última propiedad que necesitamos estudiar sobre extensiones iteradas es la casi-homogeneidad.

Teorema 10.10 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC *y en M sea $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\alpha}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\alpha})$ una iteración de c.p.o.s. con límites directos/inversos. Supongamos que para todo $\delta < \alpha$ se cumple que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi_\delta$ es casi homogéneo, así como que existe un término $t(\delta, x_1, \ldots, x_n)$ (del lenguaje de la teoría de conjuntos) tal que para todo $\delta < \alpha$ existen conjuntos $x_1, \ldots, x_n \in M$ tales que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi_\delta = t(\check{\delta}, \check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)$. Entonces $\mathbb{P}_\alpha$ es casi homogéneo.*

(En realidad el c.p.o. casi homogéneo es $\overline{\mathbb{P}}_\alpha$ y hay que entender que existen términos como t para $\leq_{\pi_\delta}$ y $\mathbb{1}_{\pi_\delta}$.)

DEMOSTRACIÓN: Sea p, $q \in \mathbb{P}_\alpha$. Hemos de construir un $\sigma \in \operatorname{Aut}\mathbb{P}_\alpha$ y un $r \in \mathbb{P}_\alpha$ tales que $r \leq \sigma(p)$ y $r \leq q$. Construiremos por recurrencia una sucesión de condiciones $r_\delta \in \mathbb{P}_\delta$ y automorfismos $\sigma_\delta \in \operatorname{Aut}\mathbb{P}_\delta$ tales que si $\beta \leq \gamma \leq \delta$ y $u \in \mathbb{P}_\gamma$ se cumpla

a) $\sigma_\gamma(u)|_\beta = \sigma_\beta(u|_\beta)$ y $\sigma_\delta(i_{\gamma\delta}(u)) = i_{\gamma\delta}(\sigma_\gamma(u))$,

b) $r_\delta \leq \sigma_\delta(p|_\delta)$, $r_\delta \leq q|_\delta$, $r_\gamma|_\beta = r_\beta$ y si $p|_\gamma = i_{\beta\gamma}(p|_\beta)$, $q|_\gamma = i_{\beta\gamma}(q|_\beta)$, entonces también $r_\gamma = i_{\beta\gamma}(r|_\beta)$.

Para $\delta = 0$ basta tomar $r_0 = \mathbb{1}_{\mathbb{P}_0}$ y σ_0 la identidad.

Supongamos construidos r_δ y σ_δ. Como $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi_\delta = t(\check{\delta}, \check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)$, se cumple también que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \sigma_\delta(\pi_\delta) = t(\check{\delta}, \check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)$, luego $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \sigma_\delta(\pi_\delta) = \pi_\delta$.

Sean $\tau_1 = p(\delta)$ y $\tau_2 = q(\delta)$. Entonces $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \tau_1, \tau_2 \in \pi_\delta$, luego existen ϕ, $\tau_3 \in M^{\mathbb{P}_\delta}$ tales que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \phi \in \operatorname{Aut}\pi_\delta \land \tau_3 \in \pi_\delta \land \tau_3 \leq \phi(\tau_1) \land \tau_3 \leq \tau_2.$$

Si $\tau_1 = \tau_2 = \mathbb{1}_{\pi_\delta}$ podemos exigir que $\tau_3 = \mathbb{1}_{\pi_\delta}$ y que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \phi = \text{identidad}$.

Sea $r_{\delta+1}|_\delta = r_\delta$ y $r_{\delta+1}(\delta) = \tau_3$. Definimos $\sigma_{\delta+1} : \mathbb{P}_{\delta+1} \longrightarrow \mathbb{P}_{\delta+1}$ mediante $\sigma_{\delta+1}(u)|_\delta = \sigma_\delta(u|_\delta)$, $\sigma_{\delta+1}(u)(\delta) = \rho \in \hat{\pi}_\delta$ tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \rho = \phi(u(\delta))$.

Es fácil ver que $r_{\delta+1}$ y $\phi_{\delta+1}$ cumplen lo pedido.

Construidos r_δ y σ_δ para todo $\delta < \lambda \leq \alpha$, definimos $r_\lambda = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} r_\delta$ y, para cada $u \in \mathbb{P}_\lambda$ y cada $\delta < \lambda$,

$$\sigma_\lambda(u)(\delta) = \sigma_{\delta+1}(u|_{\delta+1})(\delta).$$

La condición b) garantiza que r_λ, $\sigma_\lambda(u) \in \mathbb{P}_\lambda$, y también es fácil ver que cumplen lo pedido. ■

En pruebas como la de la consistencia del axioma de Martin [PC 8.35] es necesario justificar que los c.p.o.s $\mathbb{P}_\delta$ de la iteración que se construye tienen conjuntos densos con cardinal acotado adecuadamente, porque el cardinal del propio $\mathbb{P}_\delta$ no tiene por qué cumplir las cotas deseadas. Las iteraciones de Easton que vamos a construir involucrarán cardinales inaccesibles que proporcionarán fácilmente cotas sobre los propios c.p.o.s $\mathbb{P}_\delta$, sin necesidad de restringirnos a subconjuntos densos, y para obtenerlas nos bastará el teorema siguiente:

Teorema 10.11 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC. *En M, sean κ y μ cardinales infinitos tales que $\kappa^{<\mu} = \kappa$. Sea $\mathbb{P}$ un c.p.o. con la c.c. μ y $|\mathbb{P}| \leq \kappa$. Sea π un $\mathbb{P}$-nombre para un c.p.o. tal que $\mathbb{1} \Vdash |\pi| \leq \check{\kappa}$. Entonces $|\mathbb{P} * \pi| \leq \kappa$.*

(En realidad vamos a probar que $|\overline{\mathbb{P} * \pi}| \leq \kappa$.)

DEMOSTRACIÓN: Sea $\tau \in M$ tal que $\mathbb{1} \Vdash \tau : \pi \longrightarrow \check{\kappa}$ inyectiva. Sea $(p, \sigma) \in \mathbb{P} * \pi$. Entonces $\mathbb{1} \Vdash \sigma \in \pi$. Sea $A^\sigma_\alpha = \{r \in \mathbb{P} \mid r \Vdash \tau(\sigma) = \check{\alpha}\}$. Sea

$f_\sigma(\alpha)$ una anticadena maximal en A_α^σ. Así, $|f_\sigma(\alpha)| < \mu$, y si $\alpha \neq \beta$, los elementos de A_α^σ son incompatibles con los de A_β^σ, por lo que la unión de los $f_\sigma(\alpha)$ sigue siendo una anticadena en $\mathbb{P}$, lo cual obliga a que $|\{\alpha < \kappa \mid f_\sigma(\alpha) \neq \varnothing\}| < \mu$.

Para cada $A \subset \kappa$ con $|A| < \mu$, el número de aplicaciones $f : \kappa \longrightarrow \mathcal{P}^{<\mu}\mathbb{P}$ tales que $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \neq \varnothing\} = A$ es a lo sumo κ, pues por hipótesis $|\mathcal{P}^{<\mu}\mathbb{P}| = \kappa$ y $\kappa^{|A|} = \kappa$. Así pues, hay κ posibilidades para las f_σ.

El teorema quedará probado si demostramos que la aplicación dada por $(p, \sigma) \mapsto (p, f_\sigma)$ es inyectiva.

En efecto, supongamos que tenemos dos pares (p, σ) y (p, σ') con $f_\sigma = f_{\sigma'}$. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y sea $\alpha = \tau_G(\sigma_G) < \kappa$. Sea $r \in G$ tal que $r \Vdash \tau(\sigma) = \check{\alpha}$. Así $r \in A_\alpha^\sigma$ y el conjunto $\{s \in \mathbb{P} \mid \bigvee t \in f_\sigma(\alpha)\ s \leq t\}$ es denso bajo r. Por consiguiente existe un $s \in f_\sigma(\alpha) \cap G = f_{\sigma'}(\alpha) \cap G$. Como $s \Vdash \tau(\sigma') = \check{\alpha}$, tenemos que $\tau_G(\sigma'_G) = \alpha = \tau_G(\sigma_G)$, es decir, $\sigma'_G = \sigma_G$. Hemos probado que $\mathbb{1} \Vdash \sigma = \sigma'$, luego las condiciones (p, σ) y (p, σ') son equivalentes.

■

Aunque hemos definido las iteraciones de Easton al principio de este capítulo, ninguno de los teoremas que hemos demostrado han tomado como hipótesis que las iteraciones consideradas fueran de este tipo. No obstante, como ya hemos indicado, todos ellos los vamos a aplicar a iteraciones de Easton. La clave está en que la presencia de algunos límites directos en la iteración basta para aplicar el teorema 10.3, mientras que la presencia de muchos límites inversos permite aplicar 10.7 y 10.9.

10.2 Extensiones de inmersiones elementales

Antes de aplicar los resultados de la sección anterior demostramos unos pocos resultados generales sobre extensión de inmersiones elementales que usaremos con frecuencia, sobre todo el primero de ellos:

Teorema 10.12 *Sea $k : M \longrightarrow N$ una inmersión elemental entre modelos transitivos numerables de* ZFC, *sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o., sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y H un filtro $k(\mathbb{P})$-genérico sobre N. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) $k[G] \subset H$.

b) Existe una inmersión elemental $k^+ : M[G] \longrightarrow N[H]$ que extiende a k y tal que $k^+(G) = H$.

Demostración: Es obvio que b) $\Rightarrow$ a). Si suponemos a) observamos que si $\sigma_G = \tau_G$, entonces existe $p \in G$ tal que $p \Vdash \sigma = \tau$, luego $k(p) \Vdash k(\sigma) = k(\tau)$, luego $k(\sigma)_H = k(\tau)_H$.

Por consiguiente, podemos definir k^+ mediante $k^+(\sigma_G) = k(\sigma)_H$, de modo que $k^+(x)$ no depende de la elección del nombre σ tal que $x = \sigma_G$.

En particular, como $G = \Gamma_G$, donde $\Gamma = \{(\check{p}, p) \mid p \in \mathbb{P}\}$, tenemos que $k(\Gamma) = \{\check{p}, p) \mid p \in k(\mathbb{P})\}$ y $k^+(G) = H$.

También es fácil ver que k^+ es una inmersión elemental: si se cumple $\phi^M((\tau_1)_G, \ldots, (\tau_n)_G)$, existe $p \in G$ tal que $p \Vdash \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, y así $k(p) \in H$ y $k(p) \Vdash \phi(k(\tau_1), \ldots, k(\tau_n))$, luego $\phi^{M[G]}(k^+((\tau_1)_G), \ldots, k^+((\tau_n)_G))$. ■

En principio, la inmersión elemental dada por el teorema anterior no tiene por qué ser definible en $M[G]$, puesto que su definición depende de H y no tiene por qué ocurrir que $H \in M[G]$. Si se da esta condición podemos decir más:

Teorema 10.13 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea $E \in M$ un extensor (κ, λ) en M, sea $j : M \longrightarrow N = \mathrm{Ult}_E(M)$ la inmersión natural en la ultrapotencia, sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y H un filtro $j(\mathbb{P})$-genérico sobre N tal que $j[G] \subset H$, sea $j^+ : M[G] \longrightarrow N[H]$ la inmersión elemental dada por el teorema anterior. Si $H \in M[G]$, entonces j^+ es la inmersión elemental asociada a un extensor (κ, λ) en $M[G]$ que extiende a E.*

Demostración: Sea $E^* : \mathcal{P}^{M[G]}\kappa \longrightarrow \mathcal{P}^{M[G]}\lambda$ la λ-restricción de j^+, es decir, la aplicación dada por $E^*(x) = j^+(x) \cap \lambda$. Claramente E^* extiende a E.

En realidad esta definición no se ajusta a la definición que hemos dado de λ-restricción porque no tenemos garantizado que j^+ sea definible en $M[G]$, por lo que ni siquiera sabemos si $E^* \in M[G]$. Ahora bien, podemos considerar el conjunto $C \in M$ de buenos nombres^M para subconjuntos de $\check{\kappa}$ y, como j sí que es definible en M, sabemos que $j|_C \in M \subset M[G]$. Ahora, en $M[G]$ todo elemento de $\mathcal{P}\kappa$ es de la forma $x = \tau_G$, con $\tau \in C$, luego $E^*(x) = (j|_C)(\sigma)_H \cap \lambda$. Teniendo en cuenta que, por hipótesis, $H \in M[G]$, esto prueba que E^* es definible en $M[G]$, luego $E^* \in M[G]$.

Es fácil ver que E^* es un extensor en $M[G]$ (la prueba de que las λ-restricciones de inmersiones elementales son extensores no depende de que las inmersiones sean definibles).

Ahora podemos considerar la inmersión $j_{E^*} : M[G] \longrightarrow \mathrm{Ult}_{E^*}(M[G])$, y tenemos que probar que $j^+ = j_{E^*}$. El teorema 7.10 nos da[1] una inmersión elemental $k : \mathrm{Ult}_{E^*}(M[G]) \longrightarrow N[H]$ dada por $k([f, a]) = j^+(f)(a)$ tal que $j_{E^*} \circ k = j^+$.

Tomemos ahora $x \in N[H]$, con lo que $x = \tau_H$, con $\tau \in N^{j(\mathbb{P})}$. Por consiguiente $\tau = [f, a]$, para cierta $f \in M^\kappa \cap M$ y $a \in \lambda$. Por la nota tras 7.10 tenemos que esto equivale a que $\tau = j(f)(a)$.

Por el teorema fundamental, como $[f, a]$ es un $[c_{\mathbb{P}}, 0]$-nombre, se cumple que

$$a \in E(\{\alpha \in \kappa \mid f(\alpha) \text{ es un } \mathbb{P}\text{-nombre}\})$$

modificando el valor de f sobre los ordinales tales que $f(\alpha)$ no es un $\mathbb{P}$-nombre obtenemos otra función que define la misma clase, luego podemos suponer que $f : \kappa \longrightarrow M^{\mathbb{P}}$. Sea $f^* : \kappa \longrightarrow M[G]$ dada por $\bigwedge \alpha \in \kappa\ f^*(\alpha) = f(\alpha)_G$. Entonces $\bigwedge \alpha \in j^+(\kappa)\ j^+(f^*)(\alpha) = j(f)(\alpha)_H$. En particular

$$x = \tau_H = j(f)(a)_H = j^+(f^*)(a) = k([f^*, a]).$$

[1]Notemos que la prueba es válida aunque no tengamos garantizado que la inmersión j^+ es definible en $M[G]$.

Esto prueba que k es biyectiva, luego es la identidad (por ser un isomorfismo entre conjuntos transitivos), luego $j^+ = j_{E^*}$ ■

Teorema 10.14 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, $U \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ *una medida normal en M, sea $j : M \longrightarrow N = \mathrm{Ult}_U(M)$ la inmersión natural en la ultrapotencia, sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y H un filtro $j(\mathbb{P})$-genérico sobre N tal que $j[G] \subset H$, sea $j^+ : M[G] \longrightarrow N[H]$ la inmersión elemental dada por el teorema* 10.12. *Si $H \in M[G]$, entonces j^+ es la inmersión elemental asociada a un una medida normal $U^* \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ en $M[G]$ tal que $U^* \cap M = U$.*

Demostración: Si d es la identidad en $(\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu))^M$, entonces se cumple que $j[\mu] = [d] \in N$, luego podemos definir

$$U^* = \{P \subset (\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu))^{M[G]} \mid j[\mu] \in j^+(P)\}.$$

Como en el teorema anterior, no es inmediato que $U^* \in M[G]$, pero ello se debe a que podemos tomar $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $\mathbb{1} \Vdash \sigma = \mathcal{P}^{<\check{\kappa}}(\check{\mu})$ y la restricción de j al conjunto de buenos nombres para subconjuntos de σ está en M (porque j es definible en M), y la restricción de j^+ a $(\mathcal{P}^{<\kappa}\mu)^{M[G]}$ puede definirse a partir de dicha restricción, de G y de H, y a su vez U^* puede definirse en $M[G]$ a partir de la restricción de j^+.

Por otra parte, la relación $j[\mu] = [d]$ implica también que

$$U = \{P \in (\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu))^M \mid j[\mu] \in j(P)\},$$

lo que a su vez nos da que $U^* \cap M = U$. Veamos que U^* es una medida normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}\mu$ en $M[G]$. Claramente

$$\begin{aligned} j[\mu] &\in j(\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^M) = \mathcal{P}^{<j(\kappa)}(j(\mu))^N \\ &\subset \mathcal{P}^{<j(\kappa)}(j(\mu))^{N[H]} = j^+(\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^{M[G]}), \end{aligned}$$

luego $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^{M[G]} \in U^*$.

Del hecho de que j^+ es una inmersión elemental que fija a los ordinales menores que κ se sigue sin dificultad que U^* es un ultrafiltro κ-completo$^{M[G]}$.

Si $\alpha < \mu$ hay que probar que $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^{M[G]} \mid \alpha \in P\} \in U^*$, pero esto equivale a que $j(\alpha) \in j[\mu]$, lo cual es cierto. Por lo tanto U^* es una medida fina.

Por último, si $f : \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^{M[G]} \longrightarrow \mu$ cumple $f \in M[G]$ y

$$A = \{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^{M[G]} \mid f(P) \in P\} \in U^*,$$

entonces

$$j[\mu] \in j^+(A) = \{P \in \mathcal{P}^{<j(\kappa)}(j(\mu))^{N[H]} \mid j^+(f)(P) \in P\},$$

es decir, $j^+(f)(j[\mu]) \in j[\mu]$, luego existe $\alpha < \mu$ tal que $j^+(f)(j[\mu]) = j(\alpha)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} j[\mu] &\in \{P \in \mathcal{P}^{<j(\kappa)}(j(\mu))^{N[H]} \mid j^+(f)(P) = j(\alpha)\} \\ &= j^+(\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^{M[G]} \mid f(P) = \alpha\}), \end{aligned}$$

luego $\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^{M[G]} \mid f(P) = \alpha\} \in U^*$, luego U^* es una medida normal$^{M[G]}$ en $(\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu))^{M[G]}$.

Consideramos la inmersión elemental $j_{U^*} : M[G] \longrightarrow \mathrm{Ult}_{U^*}(M[G])$, y tenemos que probar que $j_{U^*} = j^+$. Por el teorema 8.15 (cuya prueba vale aunque no tengamos garantizado que j^+ es definible en $M[G]$) existe una inmersión elemental $k : \mathrm{Ult}_{U^*}(M[G]) \longrightarrow N[H]$ dada por $k([f]) = j^+(f)(j[\mu])$ tal que $j_{U^*} \circ k = j^+$.

Si $x \in N[H]$, entonces $x = \tau_H$, con $\tau \in N^{j(\mathbb{P})}$, luego $\tau = [f] = j(f)(j[\mu])$. Por el teorema fundamental, como $[f]$ es un $[c_{\mathbb{P}}]$-nombre, en M se cumple que

$$\{P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu) \mid f(P) \text{ es un } \mathbb{P}\text{-nombre}\} \in U,$$

y podemos modificar f para que se cumpla que $f : \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^M \longrightarrow M^{\mathbb{P}}$. Consideramos entonces $f^* : \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^{M[G]} \longrightarrow M[G]$ dada por

$$(\bigwedge P \in \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)\ f^*(P) = f(P \cap \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^M)_G)^{M[G]}.$$

Así, aplicando j^+, resulta que

$$(\bigwedge P \in \mathcal{P}^{<j(\kappa)}(j(\mu))\ j^+(f^*)(P) = j(f)(P \cap \mathcal{P}^{<j(\kappa)}(j(\mu))^N)_H)^{N[H]},$$

y en particular, para $P = j[\mu]$, tenemos que

$$k([f^*]) = j^+(f^*)(j[\mu]) = j(f)(j[\mu])_H = x.$$

Esto prueba que k es biyectiva, luego es la identidad (por ser un isomorfismo entre conjuntos transitivos), luego $j^+ = j_{U^*}$ ■

10.3 La HCG con cardinales grandes

Sabemos que si es consistente que exista un cardinal medible, también lo es la existencia de un cardinal medible más la hipótesis del continuo generalizada, lo cual puede servir de base para estudiar otras alternativas para la función del continuo. Esto se debe a que el modelo $L[U]$ cumple la HCG. Sin embargo, para cardinales mayores en la escala de consistencia no tenemos ningún resultado análogo que nos garantice la consistencia de la HCG en presencia de tales cardinales. En esta sección veremos que podemos garantizarla mediante extensiones genéricas.

Definición 10.15 Sea

$$\mathbb{Q}_\kappa = \begin{cases} \mathrm{Fn}(\kappa^+, 2^\kappa, \kappa^+) & \text{si } \kappa \text{ es un cardinal y } 2^\kappa > \kappa^+, \\ \{\mathbb{1}\} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

De este modo, si κ es un cardinal entonces $\mathbb{Q}_\kappa$ es un c.p.o. casi homogéneo fuertemente κ^+-cerrado y $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_\kappa} \Vdash 2^{\check{\kappa}} = \check{\kappa}^+$.

Para cada ordinal α, definimos una iteración de Easton de c.p.o.s casi homogéneos $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\alpha}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\alpha})$ junto con una sucesión normal de cardinales infinitos $\{\theta_\delta\}_{\delta\leq\alpha}$, de modo que, para todo $\delta < \alpha$, $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi_\delta$ es casi homogéneo.

Partimos de $\mathbb{P}_0 = \{\varnothing\}$ y $\theta_0 = \aleph_0$. Dados $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\beta}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\beta})$ y $\{\theta_\delta\}_{\delta\leq\beta}$, tomamos un $\mathbb{P}_\delta$-nombre π_δ tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi_\delta = \mathbb{Q}_{\check{\theta}_\delta}$. Esto determina $\mathbb{P}_{\delta+1}$, que será casi homogéneo por 10.10. Además es claro que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\delta+1}} \Vdash \pi_{\delta+1}$ es casi homogéneo.

Sea $\theta_{\delta+1}$ el único cardinal tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\delta+1}} \Vdash \check{\theta}_{\delta+1} = \check{\theta}_\delta^+$. Su existencia es consecuencia inmediata de que $\mathbb{P}_{\delta+1}$ es casi homogéneo.[2] Claramente $\theta_\delta < \theta_{\delta+1}$.

Por último, si tenemos definidos $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\lambda}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\lambda})$ y $\{\theta_\delta\}_{\delta\leq\lambda}$, tomamos como $\mathbb{P}_\lambda$ el límite directo o inverso de los c.p.o.s precedentes según si λ es o no un cardinal inaccesible (de modo que la iteración es de Easton). Entonces $\mathbb{P}_\lambda$ es casi homogéneo de nuevo por el teorema 10.10. Definimos $\theta_\lambda = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} \theta_\delta$, que es un cardinal, porque la sucesión es creciente.

Esto termina la definición de la iteración y de la sucesión de cardinales asociada. Ahora vamos a demostrar algunas de sus propiedades, empezando por las que hemos usado en la construcción. Para las demostraciones, por el teorema de reflexión, podemos trabajar en un modelo transitivo numerable M de ZFC.

a) $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\alpha}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\alpha})$ es una iteración de Easton de c.p.o.s casi homogéneos y $\{\theta_\delta\}_{\delta\leq\alpha}$ es una sucesión normal de cardinales infinitos tales que $\theta_0 = \aleph_0$.

b) θ_δ, $|\mathbb{P}_\delta| < \beth_{\delta+\omega}$.

Razonamos por inducción sobre δ. Para $\delta = 0$ es trivial. Supuesto cierto para δ, existe un $n < \omega$ tal que θ_δ, $|\mathbb{P}_\delta| < \beth_{\delta+n}$. Si G es un filtro $\mathbb{P}_\delta$-genérico sobre M, entonces $\pi_{\delta G}$ es trivial o bien $\pi_{\delta G} = \mathrm{Fn}(\theta_\delta^+, 2^{\theta_\delta}, \theta_\delta^+)^{M[G]}$. En cualquier caso, en $M[G]$ se cumple

$$|\pi_{\delta G}| \leq (2^{\theta_\delta})^{\theta_\delta^+} \leq 2^{(\beth^M_{\delta+n})^+} \leq 2^{2^{|\beth^M_{\delta+n}|}}.$$

Volviendo a M, como $|\mathbb{P}_\delta| < \beth_{\delta+n}$, el número de buenos nombres para subconjuntos de $\check{\beth}_{\delta+n}$ es a lo sumo

$$((\beth_{\delta+n})^{\beth_{\delta+n}})^{\beth_{\delta+n}} = \beth_{\delta+n+1}.$$

Por consiguiente, otra vez en $M[G]$, se cumple que $2^{|\beth^M_{\delta+n}|} \leq \beth^M_{\delta+n+1}$. Estimando igualmente el número de buenos nombres en M para subconjuntos de $\check{\beth}_{\delta+n+1}$ llegamos a que, en $M[G]$, $|\pi_{\delta G}| \leq \beth^M_{\delta+n+2}$.

Con esto hemos probado que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash |\pi_\delta| \leq \check{\beth}_{\delta+n+2}$.

Por otra parte $\mathbb{P}_\delta$ cumple la c.c.$\beth_{\delta+n}$, $|\mathbb{P}_\delta| \leq \beth_{\delta+n+2}$ y si $\xi < \beth_{\delta+n}$ entonces $\beth^\xi_{\delta+n+2} = 2^{\beth_{\delta+n+1}\xi} = 2^{\beth_{\delta+n+1}} = \beth_{\delta+n+2}$. Por consiguiente podemos aplicar el teorema 10.11 y concluir que $|\mathbb{P}_{\delta+1}| < \beth_{\delta+n+2} < \beth_{\delta+n+1+\omega}$.

[2] En general, si M es un modelo transitivo numerable de ZFC, θ es un cardinal en M y $\mathbb{P} \in M$ es un c.p.o. casi homogéneo^M, existe un cardinal^M θ' tal que $\mathbb{1} \Vdash \check{\theta}' = \check{\theta}^+$, pues si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y $\theta' = (\theta^+)^{M[G]}$, la casi homogeneidad implica que θ' cumple lo pedido. Por el teorema de reflexión esto sigue siendo cierto sin relativizar a ningún modelo.

El hecho de que $|\mathbb{P}_\delta| \leq \beth_{\delta+n+2}$ implica que $\mathbb{P}_\delta$ cumple la c.c. $\beth^+_{\delta+n+2}$, luego $\beth^+_{\delta+n+2}$ es un cardinal$^{M[G]}$ y, por construcción, $\theta_{n+1} \leq \beth^+_{\delta+n+2} < \beth_{\delta+1+\omega}$.

Si vale para todo $\delta < \lambda$, entonces para cada δ existe un $n \in \omega$ tal que

$$\theta_\delta, |\mathbb{P}_\delta| < \beth_{\delta+n} < \beth_\lambda,$$

luego $\theta_\lambda \leq \beth_\lambda < \beth_{\lambda+\omega}$ y $|\mathbb{P}_\lambda| \leq \beth_\lambda^{|\lambda|} \leq \beth_\lambda^{\beth_\lambda} \leq 2^{\beth_\lambda} = \beth_{\lambda+1} < \beth_{\lambda+\omega}$.

c) Si $\alpha = \beta + \gamma$ y $\delta \leq \gamma$, entonces $\mathbb{P}_{\beta+\delta} \cong \mathbb{P}_\beta * \pi^\beta_\delta$, según el teorema 10.9.

Basta probar que se cumple la hipótesis de 10.9, es decir, que si $\lambda \leq \gamma$ cumple $\operatorname{cf} \lambda \leq |\mathbb{P}_\beta|$, entonces $\mathbb{P}_{\beta+\lambda}$ es límite inverso, es decir, que $\beta + \lambda$ no es inaccesible.

Si $\beta + \lambda$ es inaccesible, entonces $\lambda \leq \beta + \lambda = \operatorname{cf}(\beta + \lambda) = \operatorname{cf} \lambda \leq \lambda$, luego $\lambda = \beta + \lambda = \operatorname{cf} \lambda$ y así

$$\lambda = \operatorname{cf} \lambda \leq |\mathbb{P}_\beta| \leq \beth_{\beta+\omega} < \beth_{\beta+\omega+\lambda} = \beth_{\beta+\lambda} = \beth_\lambda = \lambda,$$

contradicción.

d) $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \pi^\beta_\delta$ es fuertemente $\check{\theta}^+_\beta$-cerrado.

Tomamos un filtro $\mathbb{P}_\beta$-genérico G_β y probamos que $\mathbb{R} = (\pi^\beta_\delta)_{G_\beta}$ es fuertemente θ^+_β-cerrado en $M[G_\beta]$. Lo que sabemos por 10.9 es que $\mathbb{R}$ un término de una iteración $(\{\mathbb{R}_\delta\}_{\delta\leq\gamma}, \{\rho_\delta\}_{\delta<\gamma})$, donde $\rho_\delta = (\pi^*_{\beta+\delta})_{G_\beta}$.

Como $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\beta+\delta}} \Vdash \pi_{\beta+\delta} = \mathbb{Q}_{\check{\theta}_{\beta+\delta}}$, en $M[G_\beta]$ se cumple que $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_\delta} \Vdash \rho_\delta = \mathbb{Q}_{\check{\theta}_{\beta+\delta}}$ y, en particular, $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_\delta} \Vdash \rho_\delta$ es fuertemente $\check{\theta}^+_\beta$-cerrado.

Ahora probamos la condición del teorema 10.7, es decir, que si $\operatorname{cf} \lambda \leq \theta_\beta$ (en $M[G_\beta]$) entonces $\mathbb{R}_\lambda$ es límite inverso, lo cual equivale a que lo sea $\mathbb{P}_{\beta+\lambda}$ y, a su vez, a que $\beta + \lambda$ no sea inaccesible^M.

En efecto, si $\beta + \lambda$ es inaccesible^M, entonces $\beta + \lambda = \lambda$, de manera que $|\mathbb{P}_\beta| < \beth_{\beta+\omega} \leq \beth_{\beta+\omega+\lambda} = \beth_\lambda = \lambda$, luego $\mathbb{P}_\beta$ conserva cardinales y cofinalidades $\geq \lambda$. En particular λ es un cardinal regular$^{M[G_\beta]}$, y esto nos lleva a contradicción:

$$\lambda = \operatorname{cf}^{M[G_\beta]} \lambda \leq \theta_\beta < \beth^M_{\beta+\omega} \leq \beth^M_{\beta+\omega+\lambda} = \beth^M_\lambda = \lambda.$$

Por lo tanto, $\mathbb{R} = \mathbb{R}_\delta$ es fuertemente θ^+_β-cerrado en $M[G_\beta]$.

e) Si $\delta < \alpha$, entonces $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash \check{\theta}_{\delta+1} = \check{\theta}^+_\delta$.

Por construcción $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\delta+1}} \Vdash \check{\theta}_{\delta+1} = \check{\theta}^+_\delta$, pero si $\alpha = \delta + 1 + \gamma$ podemos factorizar $\mathbb{P}_\alpha \cong \mathbb{P}_{\delta+1} * \pi^{\delta+1}_\gamma$, donde $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\delta+1}} \Vdash \pi^{\delta+1}_\gamma$ es fuertemente $\check{\theta}^+_{\delta+1}$-cerrado.

Así, si G es un filtro $\mathbb{P}_\alpha$-genérico sobre M, entonces $M[G] = M[G_{\delta+1}][H]$, donde $G_{\delta+1}$ es $\mathbb{P}_{\delta+1}$-genérico sobre M y, llamando $\mathbb{R} = (\pi^{\delta+1}_\gamma)_{G_{\delta+1}}$, el filtro H es $\mathbb{R}$-genérico sobre $M[G_{\delta+1}]$. Además $\mathbb{R}$ es fuertemente $\theta_{\delta+1}^+$-cerrado$^{M[G_{\delta+1}]}$.

Sabemos que $(\theta_{\delta+1} = \theta_\delta^+)^{M[G_{\delta+1}]}$ y, como $\mathbb{R}$ es $\theta_{\delta+1}^+$-cerrado, los cardinales $\leq \theta_{\delta+1}^+$ son los mismos en $M[G_{\delta+1}]$ y en $M[G]$, luego $(\theta_{\delta+1} = \theta_\delta^+)^{M[G]}$.

f) $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash \bigwedge\kappa(\omega \leq \kappa < \check{\theta}_\alpha \rightarrow 2^\kappa = \kappa^+)$.

Si G es un filtro $\mathbb{P}_\alpha$-genérico sobre M, del resultado anterior se sigue claramente que los cardinales infinitos en $M[G]$ menores que θ_α son exactamente los cardinales θ_δ, con $\delta < \alpha$. Por lo tanto hemos de probar que, para todo $\delta < \alpha$, se cumple $(2^{\theta_\delta} = \theta_{\delta+1})^{M[G]}$. Factorizamos como antes $\mathbb{P}_\alpha \cong \mathbb{P}_{\delta+1} * \pi_\gamma^{\delta+1}$. Sea G un filtro $\mathbb{P}_\alpha$-genérico sobre M y sean $\mathbb{R}$, $G_{\delta+1}$ y H como antes. Así, $M[G] = M[G_{\delta+1}][H]$ y $\mathbb{R}$ es $\theta_{\delta+1}^+$-cerrado$^{M[G_{\delta+1}]}$.

A su vez, $\mathbb{P}_{\delta+1} \cong \mathbb{P}_\delta * \pi_\delta$, de modo que $M[G_{\delta+1}] = M[G_\delta][K]$, donde G_δ es un filtro $\mathbb{P}_\delta$-genérico sobre M y K es $\mathbb{Q}_{\theta_\delta}^{M[G_\delta]}$-genérico sobre $M[G_\delta]$.

Como $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_{\theta_\delta}} \Vdash 2^{\check{\theta}_\delta} = \check{\theta}_\delta^+$, tenemos que $(2^{\theta_\delta} = \theta_\delta^+ = \theta_{\delta+1})^{M[G_{\delta+1}]}$. Como $\mathbb{R}$ es $\theta_{\delta+1}^+$-cerrado, se cumple que $\mathcal{P}^{M[G]}\theta_\delta = \mathcal{P}^{M[G_{\delta+1}]}\theta_\delta$, luego

$$(2^{\theta_\delta})^{M[G]} = (2^{\theta_\delta})^{M[G_{\delta+1}]} = \theta_{\delta+1} = (\theta_\delta^+)^{M[G]}.$$

g) Si $\aleph_0 < \beta \leq \alpha$ es un límite fuerte, entonces $\theta_\beta = \beta$.

En efecto, si $\delta, \epsilon < \beta$ entonces $|\delta + \omega + \epsilon| < \beta$, luego $\delta + \omega + \epsilon < \beta$, luego $\delta + \omega + \beta \leq \beta$, luego $\theta_\delta < \beth_{\delta+\omega} \leq \beth_{\delta+\omega+\beta} \leq \beth_\beta = \beta$. Por consiguiente $\theta_\beta \leq \beta$, y la desigualdad opuesta se cumple porque la sucesión es normal.

h) Si ξ es un límite fuerte tal que $V_\xi \vDash \mathrm{ZFC}$ (en el sentido débil de que cumple un conjunto finito de axiomas suficientemente grande), entonces los términos $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\alpha}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\alpha})$ y $\{\theta_\delta\}_{\delta\leq\alpha}$ son absolutos para V_ξ.

Razonando en un modelo numerable, probamos por inducción sobre δ que $\mathbb{P}_\delta^{V_\xi^M} = \mathbb{P}_\delta^M$, $\pi_\delta^{V_\xi^M} = \pi_\delta^M$, $\theta_\delta^{V_\xi^M} = \theta_\delta^M$. Para $\delta = 0$ y cuando δ es un ordinal límite es trivial. Supongamos que se cumple para δ.

Si G_δ es un filtro $\mathbb{P}_\delta$-genérico sobre M, también es $\mathbb{P}_\delta$-genérico sobre V_ξ^M, y se cumple que $\mathcal{P}^{M[G_\delta]}\theta_\delta = \mathcal{P}^{V_\xi^M[G_\delta]}\theta_\delta$, pues todo subconjunto de θ_δ en $M[G_\delta]$ admite un buen $\mathbb{P}_\delta$-nombre, que estará en V_ξ^M. En particular $(\theta_\delta^+)^{M[G_\delta]} \leq (2^{\theta_\delta})^{M[G_\delta]} = (2^{\theta_\delta})^{V_\xi^M[G_\delta]} \in V_\xi^M$.

Igualmente $(\theta_\delta^+)^{M[G_\delta]} = (\theta_\delta^+)^{V_\xi^M[G_\delta]}$, pues una biyección en $M[G_\delta]$ entre θ_δ y un ordinal $\epsilon < \theta$ puede representarse por un buen $\mathbb{P}_\delta$-nombre para un subconjunto de $\theta_\delta \times \epsilon$, que estará en V_ξ^M. Por lo tanto, $2^{\theta_\delta} = \theta_\delta^+$ se cumple en $M[G_\delta]$ si y sólo si se cumple en $V_\xi^M[G_\delta]$.

Esto hace que $\mathbb{Q}_{\theta_\delta}$ sea trivial en $M[G_\delta]$ si y sólo si lo es en $V_\xi^M[G_\delta]$ y, cuando no lo es, $\mathbb{Q}_{\theta_\delta}^{M[G_\delta]} = \mathbb{Q}_{\theta_\delta}^{V_\xi^M[G_\delta]}$, por el mismo argumento, pues cada elemento de $\mathbb{Q}_{\theta_\delta}^{M[G_\delta]}$ tiene un buen $\mathbb{P}_\delta$-nombre para un subconjunto de $\theta_\delta \times \mu$, donde $\mu = (2^{\theta_\delta})^{M[G_\delta]} < \xi$, luego está en V_ξ^M. Esto hace que si π_δ cumple la definición de la iteración en V_ξ^M, también la cumple en M, luego $\pi_\delta^M = \pi_\delta^{V_\xi^M}$, de donde a su vez $\mathbb{P}_{\delta+1}^M = \mathbb{P}_{\delta+1}^{V_\xi^M}$.

Ahora, si $G_{\delta+1}$ es $\mathbb{P}_{\delta+1}$-genérico sobre M (luego sobre V_ξ^M), ya hemos probado que $(\theta_\delta^+)^{M[G_\delta+1]} = (\theta_\delta^+)^{V_\xi^M[G_{\delta+1}]}$, de donde $\theta_{\delta+1}$ también es absoluto.

i) Si $\kappa \leq \alpha$ es inaccesible, entonces $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash \check{\kappa}$ es inaccesible.

En efecto, relativizando a un modelo M, suponemos que κ es inaccesible^M y tomamos un filtro genérico G. La propiedad g) nos da que $\kappa = \theta_\kappa$, y por e) esto implica que es un cardinal límite$^{M[G]}$, de hecho límite fuerte, por la propiedad f). Sólo falta probar que κ es regular en $M[G]$.

Supongamos, en caso contrario, que $\operatorname{cf}^{M[G]} \kappa < \kappa$. Sea μ un cardinal límite fuerte^M tal que $\operatorname{cf}^{M[G]} \kappa \leq \mu < \kappa$ y sea $f : \mu \longrightarrow \kappa$ cofinal, $f \in M[G]$. Podemos factorizar $\mathbb{P}_\alpha \cong \mathbb{P}_\mu * \pi$, donde π_{G_μ} es un c.p.o. fuertemente μ^+-cerrado (hemos usado la propiedad g), luego $f \in M[G_\mu]$. Ahora bien, $(|\mathbb{P}_\mu|^+)^M \leq \beth_{\mu+\omega}^M < \kappa$, porque κ es inaccesible^M, luego $\mathbb{P}_\mu$ cumple obviamente la c.c. κ. El teorema [PC 5.5] nos da una aplicación $F \in M$ tal que en M se cumple: $F : \mu \longrightarrow \mathcal{P}\kappa$, $\bigwedge \alpha < \mu\ |F(\alpha)| < \kappa$ y además $\bigwedge \alpha < \mu\ f(\alpha) \in F(\alpha)$. Como κ es inaccesible^M, tenemos que $\bigcup\limits_{\alpha<\mu} F(\alpha)$ está acotado en κ, y esto contradice que f sea cofinal.

j) Si $\kappa \leq \alpha$ es inaccesible, entonces $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash \check{\kappa}$ inaccesible $\wedge\ V_{\check{\kappa}} \Vdash$ HCG

Esto es consecuencia inmediata de las propiedades i), f).

A partir de aquí supondremos que θ es un cardinal inaccesible y consideraremos la iteración que hemos construido hasta $\alpha = \theta$. Llamaremos $\mathbb{P} = \mathbb{P}_\theta$, de modo que, según acabamos de probar, $\mathbb{1} \Vdash \check{\theta}$ es inaccesible $\wedge\ V_{\check{\theta}} \Vdash$ HCG.

Fijado un modelo transitivo numerable M de ZFC y un filtro genérico G, vamos a probar varios resultados que parten de la hipótesis de que $\kappa \in V_\theta^M$ es un cierto cardinal grande y concluyen que sigue teniendo la misma propiedad en $V_\theta^{M[G]}$, con lo que habremos probado la consistencia de la HCG con la existencia de uno o varios cardinales de dicho tipo (supuesto que ésta sea consistente, por descontado). Ya hemos probado el caso en el que κ es inaccesible. Antes de considerar otros cardinales grandes vamos a probar un sencillo resultado auxiliar que vamos a necesitar en varias ocasiones:

Teorema 10.16 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea ξ un cardinal^M tal que $V_\xi^M \models$* ZFC, *sea $\mathbb{P} \in V_\xi^M$ un c.p.o. y G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces $V_\xi^{M[G]} = V_\xi^M[G]$.*

DEMOSTRACIÓN: Notemos que G es también $\mathbb{P}$-genérico sobre V_ξ^M, por lo que la conclusión tiene sentido. Definamos en V_ξ^M una sucesión de $\mathbb{P}$-nombres mediante $\rho_0 = \varnothing$,

$$\rho_{\delta+1} = \{(\sigma, \mathbb{1}) \mid \sigma \text{ es un buen } \mathbb{P}\text{-nombre para un subconjunto de } \rho_\delta\}^{V_\xi^M}$$

y $\rho_\lambda = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} \rho_\delta$. Una simple inducción prueba que $\bigwedge \delta < \xi \ (\rho_\delta)_G = V_\delta^{M[G]}$ y, como $\rho_\delta \in (V_\xi^M)^{\mathbb{P}}$, concluimos que $V_\delta^{M[G]} \in V_\xi^M[G]$, luego $V_\xi^{M[G]} \subset V_\xi^M[G]$, y la otra inclusión es obvia. ■

Cardinales fuertes Ahora supongamos que $\kappa < \theta$ es un cardinal fuerte^M, fijemos un cardinal^M $\kappa < \mu = \theta_\gamma < \theta$ y tomemos cardinales límite fuerte^M $\mu < \nu < \xi < \xi' < \theta$ tales que $V_\nu^M \vDash \text{ZFC}$, $V_\xi^M \vDash \text{ZFC}$, $V_{\xi'}^M \vDash \text{ZFC}$.

Sea $j : M \longrightarrow N \subset M$ una inmersión elemental definible en M con punto crítico κ y $\xi' \leq j(\kappa)$, $V_{\xi'}^M \subset N$. Sea

$$j((\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \xi'}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\xi'})) = (\{\mathbb{R}_\delta\}_{\delta \leq j(\xi')}, \{\rho_\delta\}_{\delta<j(\xi')}),$$

que es una iteración de c.p.o.s en N que, junto con $j(\{\theta_\delta\}_{\delta \leq \xi'})$, satisface la definición 10.15. En particular, para cada $\delta < \xi'$, tenemos que

$$\mathbb{R}_\delta = \mathbb{P}_\delta^N = \mathbb{P}_\delta^{V_{\xi'}^N} = \mathbb{P}_\delta^{V_{\xi'}^M} = \mathbb{P}_\delta^M = \mathbb{P}_\delta,$$

(la última igualdad expresa simplemente que estamos llamando $\mathbb{P}_\delta$ al c.p.o. correspondiente definido en M), e igualmente $\theta_\delta = \theta_\delta^N$. Como $j(\nu) \geq \nu > \xi$, aplicando en N las propiedades que hemos probado para la iteración, tenemos

$$j(\mathbb{P}_\nu) = \mathbb{R}_{j(\nu)} \cong \mathbb{P}_\xi * \pi,$$

para un cierto $\mathbb{P}_\xi$-nombre π tal que $(\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\xi} \Vdash \pi$ es fuertemente $\check{\xi}^+$-cerrado$)^N$.

Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y sea G_ξ su restricción a $\mathbb{P}_\xi$, que es un filtro $\mathbb{P}_\xi$-genérico sobre M y sobre N. Por lo tanto podemos considerar el c.p.o. $\mathbb{Q} = \pi_{G_\xi} \in N[G_\xi]$, que es fuertemente ξ^+-cerrado en $N[G_\xi]$.

Si $p \in \mathbb{P}_\nu$, entonces $p|_\kappa \in \mathbb{P}_\kappa$, que es límite directo, luego existe un $\alpha < \kappa$ y $p_0 \in \mathbb{P}_\alpha$ de modo que $p|_\kappa = i_{\alpha\kappa}(p_0)$ y, como $p_0 \in V_\kappa$, se cumple que $j(p_0) = p_0$, luego $j(p)|_{j(\kappa)} = i_{\alpha,j(\kappa)}(p_0)$ y, a través de la semejanza $j(\mathbb{P}_\nu) \cong \mathbb{P}_\xi * \pi$, queda $j(p) = (s, \sigma)$, donde $s = j(p)|_\xi = i_{\alpha,j(\kappa)}(p_0)|_\xi = i_{\kappa\xi}(p|_\kappa)$. Consideremos

$$D = \{q \in \mathbb{Q} \mid \bigvee p \in G_\nu \bigvee \sigma (j(p) = (i_{\kappa\xi}(p|_\kappa), \sigma) \wedge q = \sigma_{G_\xi})\} \in N[G_\xi].$$

Claramente $|D|^{N[G_\xi]} \leq |\mathbb{P}_\nu|^{N[G_\xi]} \leq |\mathbb{P}_\nu|^N < \xi$. Veamos que es un conjunto dirigido, para lo cual tomamos q, $q' \in D$, con lo que existen p, $p' \in G_\nu$ y σ, σ' tales que

$$j(p) = (i_{\kappa\xi}(p|_\kappa), \sigma), \quad j(p') = (i_{\kappa\xi}(p'|_\kappa), \sigma'), \quad q = \sigma_{G_\xi}, \quad q' = \sigma'_{G_\xi}.$$

Sea $p'' \in G_\nu$ tal que $p'' \leq p \wedge p'' \leq p'$. Entonces

$$j(p'') = (i_{\kappa\xi}(p''|_\kappa), \sigma'') \leq (i_{\kappa\xi}(p|_\kappa), \sigma), (i_{\kappa\xi}(p'|_\kappa), \sigma').$$

Esto significa que

$$i_{\kappa\xi}(p|_\kappa) \Vdash \sigma'' \leq \sigma \wedge \sigma'' \leq \sigma',$$

pero $p'' \in G_\nu$, luego $i_{\kappa\xi}(p|_\kappa) \in G_\xi$, luego, si llamamos $q'' = \sigma''_{G_\xi}$, tenemos que $q'' \in D$, $q'' \leq q$, $q'' \leq q'$.

Consecuentemente, existe un $a \in \mathbb{Q}$ tal que $\bigwedge d \in D \; a \leq d$. Ahora tomamos un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[G_\xi]$ (que también lo es sobre $N[G_\xi]$) tal que $a \in H$. Entonces $K = G_\xi * H$ es un filtro $j(\mathbb{P}_\nu)$-genérico sobre N y $j[G_\nu] \subset K$, pues si $p \in G_\nu$, entonces $j(p) = (i_{\kappa\xi}(p|_\kappa), \sigma)$, luego $\sigma_{G_\xi} \in D$, luego $a \leq \sigma_{G_\xi} \in H$ y, por otra parte, $p \leq i_{\kappa\xi}(p|_\kappa) \in G_\xi$. Por lo tanto $j(p) \in K$.

Así podemos aplicar el teorema 10.12, según el cual j se extiende a una inmersión elemental $\bar{\jmath} : M[G_\nu] \longrightarrow N[K] = N[G_\xi][H]$.

El hecho de que $\mathbb{Q}$ sea ξ^+-cerrado en $N[G_\xi]$ implica que $V_\nu^{N[K]} = V_\nu^{N[G_\xi]}$. Considerando factorizaciones $\mathbb{P}_\xi \cong \mathbb{P}_\nu * \pi'$ (en N) y $\mathbb{P} \cong \mathbb{P}_\nu * \pi''$ (en M), de modo que

$$\mathbb{1} \Vdash \pi' \text{ es fuertemente } \nu^+\text{-cerrado}, \quad \mathbb{1} \Vdash \pi'' \text{ es fuertemente } \nu^+\text{-cerrado},$$

concluimos también que $V_\nu^{N[G_\xi]} = V_\nu^{N[G_\nu]}$ y $V_\nu^{M[G]} = V_\nu^{M[G_\nu]}$. Por otra parte, el teorema anterior nos da que $V_\xi^M[G_\nu] = V_\xi^{M[G_\nu]}$ y $V_\xi^N[G_\nu] = V_\xi^{N[G_\nu]}$, con lo que

$$V_\xi^{N[G_\nu]} = V_\xi^N[G_\nu] = V_\xi^M[G_\nu] = V_\xi^{M[G_\nu]},$$

de donde a su vez $V_\nu^{N[G_\nu]} = V_\nu^{M[G_\nu]}$ y en total:

$$V_\nu^{N[K]} = V_\nu^{N[G_\xi]} = V_\nu^{N[G_\nu]} = V_\nu^{M[G_\nu]} = V_\nu^{M[G]}.$$

En particular, $\mathcal{P}^{N[K]}\kappa = \mathcal{P}^{M[G]}\kappa = \mathcal{P}^{N[G_\nu]}\kappa$ y $\mathcal{P}^{N[K]}\mu = \mathcal{P}^{M[G]}\mu$.

En resumen, tenemos una inmersión elemental $\bar{\jmath} : M[G_\nu] \longrightarrow N[K]$ con punto crítico κ y tal que $\kappa < \mu \leq \bar{\jmath}(\kappa)$ y $V_\mu^{M[G_\nu]} \subset N[K]$. Consideramos su μ-restricción $E : \mathcal{P}^{M[G]}\kappa \longrightarrow \mathcal{P}^{M[G]}\mu$, dada por $E(x) = \bar{\jmath}(x) \cap \mu$.

Se cumple que $E \in N[K]$, porque todo $x \in \mathcal{P}^{M[G]}\kappa = \mathcal{P}^{M[G_\nu]}\kappa$ es de la forma $x = \tau_{G_\nu}$, donde τ es un buen $\mathbb{P}_\nu$-nombre para un subconjunto de $\check{\kappa}$ y $\bar{\jmath}$ viene dada por $\bar{\jmath}(\tau_{G_\nu}) = j(\tau)_K$. Como la restricción de j al conjunto de dichos nombres está en $V_\xi^M = V_\xi^N \subset N[K]$ y $G_\xi, K \in N[K]$, luego también $G_\nu \in N[K]$, concluimos que E es definible en $N[K]$ y, más concretamente, $E \in V_\nu^{N[K]} = V_\nu^{M[G]} \subset V_\theta^{M[G]}$, luego $E \in M[G]$.

El mismo argumento que prueba que las restricciones de las inmersiones elementales son extensores prueba que E es un extensor^M, el cual a su vez (por el argumento de 7.15) justifica que κ es μ-fuerte en $M[G]$. Como $\mu < \theta$ puede elegirse arbitrariamente grande, tenemos que κ es fuerte en $V_\theta^{M[G]}$. En definitiva, hemos probado que

$$\mathbb{1} \Vdash \check{\kappa} \text{ es fuerte en } V_{\check{\theta}}.$$

Cardinales supercompactos El argumento se puede modificar ligeramente para el caso de cardinales supercompactos. En efecto, si partimos de que $\kappa < \theta$ es supercompacto^M, podemos tomar la inmersión $j : M \longrightarrow N$ de modo que $M \cap N^{\xi'} \subset N$, lo cual implica $V_{\xi'}^M \subset N$, luego todo lo anterior sigue valiendo.

De la igualdad $V_\nu^{N[K]} = V_\nu^{M[G]} = V_\nu^{N[G_\nu]}$ deducimos ahora que $\mathcal{P}^{<\kappa}\mu$ es el mismo en los tres modelos, además $j|_\mu \in M \cap N^\mu \subset N$, luego $j[\mu] \in N \subset N[K]$. Así pues, podemos definir

$$U = \{x \in (\mathcal{P}^{<\kappa}\mu)^{M[G]} \mid j[\mu] \in \bar{j}(x)\}$$

y razonar como antes que $U \in N[K]$, luego $U \in V_\nu^{N[K]} = V_\nu^{M[G]}$. El mismo argumento empleado en 10.14 prueba que U es una medida normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}\mu$ en $M[G]$. Así pues,

$$\mathbb{1} \Vdash \check{\kappa} \text{ es supercompacto en } V_{\check{\theta}}.$$

Cardinales superfuertes Consideremos a continuación el caso en que κ es superfuerte^M. Ahora tenemos una inmersión elemental $j : M \longrightarrow N$ tal que $\xi = j(\kappa)$ cumple $V_\xi^M \subset N$. Más concretamente, podemos suponer que N es la ultrapotencia respecto de un extensor E. Entonces ξ es superfuerte^N, pero no tiene por qué ser regular^M. Lo máximo que podemos asegurar es que es un límite fuerte^M. Consideramos

$$j((\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\theta}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\theta})) = (\{\mathbb{R}_\delta\}_{\delta\leq j(\theta)}, \{\rho_\delta\}_{\delta<j(\theta)}),$$

y, como antes, $\mathbb{R}_\delta = \mathbb{P}_\delta$ para todo $\delta < \xi$, pero necesariamente $\mathbb{R}_\xi = \mathbb{P}_\xi$. Como ξ es inaccesible^N, se cumple que $\mathbb{R}_\xi$ es el límite directo de los $\mathbb{P}_\delta$ anteriores, mientras que $\mathbb{P}_\xi$ podría ser el límite inverso. En cualquier caso $\mathbb{R}_\xi \subset \mathbb{P}_\xi$. Más aún, ξ es de Mahlo^N, por lo que $\mathbb{R}_\xi$ cumple la c.c. ξ en N.

Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, y sea G_ξ su restricción a $\mathbb{P}_\xi$. Vamos a probar que $H_\xi = G_\xi \cap \mathbb{R}_\xi$ es un filtro $\mathbb{R}_\xi$-genérico sobre M.

En efecto, si $D \in N$ es denso en $\mathbb{R}_\xi$, sea $A \in N$ una anticadena maximal el conjunto $\{p \in \mathbb{R}_\xi \mid \bigvee d \in D\ p \leq r\}$. Se cumple que $|A|^N < \xi$ y ξ es regular^N, luego existe un $\delta < \xi$ tal que $A \subset \mathbb{P}_\delta$ (o, más exactamente, $A \subset i_{\delta\xi}[\mathbb{P}_\delta]$). Entonces $D' = \{p \in \mathbb{P}_\delta \mid \bigvee q \in A\, p \leq q\}$ es denso en $\mathbb{P}_\delta$, por la maximalidad de A, y G_δ es $\mathbb{P}_\delta$-genérico sobre M, luego sobre N, luego existe $p \in D' \cap G_\delta$, luego $i_{\delta\xi}(p) \in G_\xi \cap \mathbb{R}_\xi = H_\xi$ y existe un $d \in \mathbb{P}_\delta$ tal que $p \leq d$ y $i_{\delta\xi}(d) \in D$, luego $i_{\delta\xi}(p) \leq i_{\delta\xi}(d) \in H_\xi \cap D$.

Observemos además que $j[G_\kappa] \subset H$, pues si $p \in G_\kappa$, como $\mathbb{P}_\kappa$ es límite directo, existen $\delta < \kappa$ y $q \in \mathbb{P}_\delta$ tales que $p = i_{\delta\kappa}(q)$ y, como j fija a los elementos de $\mathbb{P}_\delta \in V_\kappa$, se cumple que $j(p) = i_{\delta\xi}(q) \in G_\xi \cap \mathbb{R}_\xi = H_\xi$.

El teorema 10.12 nos da entonces que j se extiende a una inmersión elemental $j^+ : M[G_\kappa] \longrightarrow N[H_\xi]$. Ahora factorizamos $\mathbb{P} \cong \mathbb{P}_\kappa * \pi$, de modo que $\mathbb{Q} = \pi_{G_k}$ es un c.p.o. fuertemente κ^+-cerrado en $M[G_\kappa]$. A su vez $G = G_\kappa * G^\kappa$, donde G^κ es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[G_\kappa]$. Además $j(\mathbb{P}) \cong \mathbb{P}_\xi * j(\pi)$ y $j^+(\mathbb{Q}) = j(\pi)_{H_\xi}$.

A continuación consideramos

$$H^\xi = \{r \in j^+(\mathbb{Q}) \mid \bigvee q \in G^\kappa \mid j^+(q) \leq r\},$$

que claramente es un filtro en $j^+(\mathbb{Q})$. Vamos a probar que es $j^+(\mathbb{Q})$-genérico sobre $N[H_\xi]$. Para ello tomamos un conjunto $D \in N[H_\xi]$ denso en $j^+(\mathbb{Q})$, que será de la forma $D = \sigma_{H_\xi}$, con $\sigma \in N^{\mathbb{R}_\xi}$.

Según la observación tras el teorema 7.10, tenemos que $\sigma = [f, a] = j(f)(a)$, donde $f \in M^\kappa$ y $a \in \xi$. Podemos suponer que, para todo $\delta < \kappa$, se cumple que $f(\delta) \in M^{\mathbb{P}_\kappa}$.

Ahora construimos como sigue una sucesión $\{q_\delta\}_{\delta<\kappa} \in M[G_\kappa]$ decreciente en $\mathbb{Q}$: supuesta construida $\{q_\delta\}_{\delta<\alpha}$, usamos que $\mathbb{Q}$ es κ^+-cerrado para tomar un $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \leq q_\delta$, para todo $\delta < \alpha$. Si $f(\alpha)_{G_\kappa}$ es denso en $\mathbb{Q}$, tomamos $q_\alpha \in f(\alpha)_{G_\kappa}$ tal que $q_\alpha \leq q$, y en caso contrario tomamos $q_\alpha = q$. Finalmente tomamos $q^* \in \mathbb{Q}$ que extienda a todos los q_δ, de modo que siempre que $f(\delta)_{G_\kappa}$ es denso en $\mathbb{Q}$ se cumple que q^* extiende a un elemento de $f(\delta)_{G_\kappa}$.

Más aún, al construir la sucesión podemos exigir que q_0 extienda a cualquier condición prefijada de $\mathbb{Q}$, por lo que el conjunto de las condiciones q^* que cumplen la propiedad indicada es denso en $\mathbb{Q}$, luego podemos tomar una que cumpla $q^* \in G^\kappa$. Así, $j^+(q^*) \in H^\xi$ y, como $j^+(G_\kappa) = H_\xi$, siempre que $(j^+(f)(\alpha))_{H_\xi}$ es denso en $j^+(\mathbb{Q})$, se cumple que $j(q^*)$ extiende a un elemento de dicho conjunto. En particular $j^+(q^*)$ extiende a un elemento de $j^+(f)(a)_{H_\xi} = D$, luego $H^\xi \cap D \neq \varnothing$.

Obviamente $j^+[G^\kappa] \subset H^\xi$, luego, si $K = H_\xi * H^\xi$, el teorema 10.12 nos permite extender j^+ (luego j) a una inmersión elemental $j^* : M[G] \longrightarrow N[K]$ tal que $j^*(G^\xi) = H^\xi$. Pero es claro que H_ξ y H^ξ son definibles en $M[G]$, luego $K \in M[G]$, por lo que el teorema 10.13 nos da que j^* es la inmersión asociada a un extensor de $M[G]$. Para probar que κ es superfuerte en $M[G]$ sólo falta comprobar que $V_\xi^{M[G]} \subset N[K]$.

En primer lugar observamos que $\xi = \theta_\xi$ es un cardinal límite$^{M[G]}$, y es un límite fuerte por la HCG, luego $|V_\xi|^{M[G]} = \xi$. Mediante la factorización $\mathbb{P} \cong \mathbb{P}_\xi * \pi$, donde π_{G_ξ} es un c.p.o. ξ^+-cerrado en $M[G_\xi]$, se deduce fácilmente que $V_\xi^{M[G]} = V_\xi^{M[G_\xi]}$. Por lo tanto, todo se reduce a probar que $V_\xi^{M[G_\xi]} \subset N[H_\xi]$. Notemos que $V_\xi^{M[G_\xi]}$ sigue teniendo cardinal ξ en $M[G_\xi]$.

Vamos a construir en N una sucesión $\{\rho_\delta\}_{\delta<\xi}$ de $\mathbb{R}_\xi$-nombres en V_ξ^N para los conjuntos $V_\delta^{M[G_\xi]}$. Más precisamente, vamos a definir la sucesión de modo que ρ_δ sea en realidad un $\mathbb{P}_{\epsilon_\delta}$-nombre, para un cierto $\epsilon_\delta < \xi$.

El caso $\delta = 0$ es trivial y, como $\mathbb{R}_\xi$ es límite directo y ξ es regular$^{N[H_\xi]}$, el caso límite es claro. Supongamos, pues, que $V_\delta^{M[G_\xi]} = (\rho_\delta)_{H_{\epsilon_\delta}}$, donde $\rho_\delta \in V_\xi^{N[H_\xi]}$.

Como ξ es inaccesible^N podemos tomar $\epsilon_\delta < \mu < \xi$ que sea límite fuerte en N, luego también en M (porque $V_\xi^M = V_\xi^N$). Entonces $|V_\delta|^{M[G_\xi]} < \mu$ y la factorización $\mathbb{P}_\xi \cong \mathbb{P}_\mu * \pi^\mu$ permite probar que todo $x \in V_{\delta+1}^{M[G_\xi]}$ está en $M[G_\mu]$, luego admite un buen $\mathbb{P}_\mu$-nombre para un subconjunto de ρ_δ (en M, pero también en N, porque $V_\xi^M = V_\xi^N$). Por consiguiente, si hacemos (en N)

$$\rho_{\delta+1} = \{(\sigma, \mathbb{1}) \mid \sigma \text{ es un buen } \mathbb{P}_\mu\text{-nombre para un subconjunto de } \rho_\delta\},$$

es claro que $\rho_{\delta+1}$ cumple lo requerido.

Cardinales I3 Supongamos ahora que κ cumple I3 en M, es decir, que es el punto crítico de una inmersión elemental $j : V_\lambda^M \longrightarrow V_\lambda^M$, con $j \in M$. Sea $\{\kappa_n\}_{n\in\omega}$ la sucesión crítica, dada por $\kappa_n = j^n(\kappa)$.

Por la propiedad h) sabemos que $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta<\lambda}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\lambda})$ es definible en V_λ, por lo que al aplicar j obtenemos la misma iteración. Así pues, si $\delta < \lambda$ entonces $j(\mathbb{P}_\delta) = \mathbb{P}_{j(\delta)}$. Observemos también que λ tiene cofinalidad numerable, luego $\mathbb{P}_\lambda$ es límite inverso.

Vamos a definir una condición $r \in \mathbb{P}_\lambda$. Partimos de $r|_{\kappa_0} = \mathbb{1}$. Supongamos definida $r|_{\kappa_n}$ y consideremos la factorización $\mathbb{P}_{\kappa_{n+1}} \cong \mathbb{P}_{\kappa_n} * \pi$, donde $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\kappa_n}} \Vdash \pi$ es un c.p.o. fuertemente $\check{\kappa}_n^+$-cerrado.

Si G_{κ_n} es un filtro $\mathbb{P}_{\kappa_n}$-genérico sobre M, entonces $\mathbb{Q}_{\kappa_n} = \pi_{G_{\kappa_n}}$ es un c.p.o. fuertemente κ_n^+-cerrado en $M[G_{\kappa_n}]$. Si $p \in \mathbb{P}_{\kappa_n}$, entonces $j(p) \in \mathbb{P}_{\kappa_{n+1}}$ se corresponde con un par $j(p) = (p|_{\kappa_n}, \sigma)$, de modo que $\sigma_{G_{\kappa_n}} \in \mathbb{Q}$. Esto define una aplicación $f : \mathbb{P}_{\kappa_n} \longrightarrow \mathbb{Q}$ que claramente esta en $M[G_{\kappa_n}]$ y claramente $f[G_{\kappa_n}]$ es un subconjunto dirigido de $\mathbb{Q}$ de cardinal menor o igual que $|\mathbb{P}_{\kappa_n}|^{M[G_{\kappa_n}]} \leq |\mathbb{P}_{\kappa_n}|^M < \beth_{\kappa_n+\omega}^M < \kappa_{n+1}$, luego existe una condición $q \in \mathbb{Q}$ que extiende a todas las condiciones de $f[G_{\kappa_n}]$.

Por consiguiente, podemos tomar un nombre $\tau \in M^{\mathbb{P}_{\kappa_n}}$ tal que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\kappa_n}} \Vdash \tau \in \pi \wedge \bigwedge p \in \Gamma\ \tau \leq j(p)'_\Gamma,$$

donde $j(p)'$ representa la segunda componente σ de la imagen de $j(p)$ por la factorización de $\mathbb{P}_{\kappa_n}$ (que es una aplicación en M). Definimos $r|_{\kappa_{n+1}}$ como la condición en $\mathbb{P}_{\kappa_{n+1}}$ correspondiente al par $(r|_{\kappa_n}, \tau)$.

Como $\mathbb{P}_\lambda$ es límite inverso, la sucesión creciente de condiciones $r|_{\kappa_n}$ determina ciertamente una condición $r \in \mathbb{P}_\lambda$. A partir de aquí fijamos[3] un filtro $\mathbb{P}_\lambda$-genérico sobre M tal que $r \in G_\lambda$.

Veamos que $j[G_{\kappa_n}] \subset G_{\kappa_{n+1}}$. Razonamos por inducción sobre M. En el caso $n = 0$ tenemos que si $p \in G_{\kappa_0}$, entonces existe un $\alpha < \kappa_0$ tal que $p = i_{\alpha,\kappa_0}(p_0)$, para cierta $p_0 \in \mathbb{P}_\alpha$. Y teniendo en cuenta que j fija a los elementos de V_{κ_0}, resulta que $j(p) = i_{\alpha\kappa_1}(p_0) = (p, \mathbb{1})$, con lo que $j(p) \in i_{\kappa_0\kappa_1}[G_{\kappa_0}] \subset G_{\kappa_1}$.

Supongámoslo cierto para n y sea $p \in G_{\kappa_{n+1}}$ y pongamos que, a través de la factorización $\mathbb{P}_{\kappa_{n+2}} \cong \mathbb{P}_{\kappa_{n+1}} * \pi$ se cumple que $j(p) = (j(p)|_{\kappa_{n+1}}, \sigma)$.

Tenemos que $p|_{\kappa_n} \in G_{\kappa_n}$, luego por hipótesis de inducción tenemos que $j(p)|_{\kappa_{n+1}} = j(p|_{\kappa_n}) \in G_{\kappa_{n+1}}$.

Sea $r|_{\kappa_{n+2}} = (r|_{\kappa_{n+1}}, \tau)$. Por construcción tenemos que $\tau_{G_{\kappa_{n+1}}} \in \pi_{G_{\kappa_{n+1}}}$ y

$$\bigwedge p \in G_{\kappa_{n+1}}\ \tau_{G_{\kappa_{n+1}}} \leq j(p)'_{G_{\kappa_{n+1}}},$$

que en particular nos da que $\tau_{G_{\kappa_{n+1}}} \leq \sigma_{G_{\kappa_{n+1}}}$.

Ahora bien, como $r|_{\kappa_{n+2}} \in G_{\kappa_{n+2}}$, tenemos que $(r|_{\kappa_{n+1}}, \tau) \in G_{\kappa_{n+1}} * G^{\kappa_{n+1}}$, luego $\tau_{G_{\kappa_{n+1}}} \in G^{\kappa_{n+1}}$, luego $\sigma_{G_{\kappa_{n+1}}} \in G^{\kappa_{n+1}}$, luego $j(p) \in G_{\kappa_{n+2}}$.

Así, como $\mathbb{P}_{\kappa_n} \in V_{\kappa_{n+1}}^M$ y G_{κ_n} es $\mathbb{P}_{\kappa_n}$-genérico sobre $V_{\kappa_{n+1}}^M$, podemos aplicar el teorema 10.12, según el cual $j|_{V_{\kappa_{n+1}}^M}$ se extiende a una inmersión elemental

[3] En última instancia, la elección de G_λ resultará irrelevante, porque $\mathbb{P}_\lambda$ es casi-homogéneo.

$V^M_{\kappa_{n+1}}[G_{\kappa_n}] \longrightarrow V^M_{\kappa_{n+2}}[G_{\kappa_{n+1}}]$, y esto es lo mismo que $V^{M[G_{\kappa_n}]}_{\kappa_{n+1}} \longrightarrow V^{M[G_{\kappa_{n+1}}]}_{\kappa_{n+2}}$ y, como $j(\kappa_n) = \kappa_{n+1}$, ésta se restringe a una inmersión elemental

$$i_n : V^{M[G_{\kappa_n}]}_{\kappa_n} \longrightarrow V^{M[G_{\kappa_{n+1}}]}_{\kappa_{n+1}}$$

que extiende a $j|_{V^M_{\kappa_n}}$. Por otra parte, usando la factorización $\mathbb{P}_\lambda \cong \mathbb{P}_{\kappa_n} * \pi^{\kappa_n}$, donde $\pi^{\kappa_n}_{G_{\kappa_n}}$ es fuertemente κ_n^+-cerrado, concluimos que $V^{M[G_{\kappa_n}]}_{\kappa_n} = V^{M[G_\lambda]}_{\kappa_n}$, luego de hecho tenemos inmersiones elementales

$$i_n : V^{M[G_\lambda]}_{\kappa_n} \longrightarrow V^{M[G_\lambda]}_{\kappa_{n+1}}.$$

Notemos que cada una de estas inmersiones extiende, de hecho, a las anteriores, pues si $x \in V^{M[G_\lambda]}_{\kappa_n}$, entonces $x = \sigma_{G_{\kappa_{n+1}}}$, con $\sigma \in M^{\mathbb{P}_{\kappa_{n+1}}}$ y entonces $i_n(x) = j(\sigma)_{G_{\kappa_{n+2}}}$, pero también $x = i_{\kappa_{n+1}\kappa_{n+2}}(\sigma)_{G_{\kappa_{n+2}}}$, con lo que

$$i_{n+1}(x) = j(i_{\kappa_{n+1}\kappa_{n+2}}(\sigma))_{G_{\kappa_{n+3}}} = i_{\kappa_{n+2}\kappa_{n+3}}(j(\sigma))_{G_{\kappa_{n+3}}} = j(\sigma)_{G_{\kappa_{n+2}}} = i_n(x).$$

Veamos ahora que $V^{M[G_\lambda]}_{\kappa_n} \prec V^{M[G_\lambda]}_{\kappa_{n+1}}$. Razonamos de nuevo por inducción sobre n.

Para $n = 0$ observamos que $j|_{V^M_{\kappa_0}}$ es la identidad, luego i_0 fija a todos los ordinales, luego por 1.2 es la identidad, luego $V^{M[G_\lambda]}_{\kappa_0} \prec V^{M[G_\lambda]}_{\kappa_1}$.

Supuesto cierto para n, tenemos que $V^{M[G_\lambda]}_{\kappa_{n+2}} \vDash V_{\kappa_n} \prec V_{\kappa_{n+1}}$, y aplicando i_{n+2} resulta $V^{M[G_\lambda]}_{\kappa_{n+3}} \vDash V_{\kappa_{n+1}} \prec V_{\kappa_{n+2}}$, que es lo mismo que $V^{M[G_\lambda]}_{\kappa_{n+1}} \prec V^{M[G_\lambda]}_{\kappa_{n+2}}$.

Como $V^{M[G_\lambda]}_\lambda$ es la unión de la cadena de submodelos elementales $V^{M[G_\lambda]}_{\kappa_n}$, concluimos que $V^{M[G_\lambda]}_{\kappa_n} \prec V^{M[G_\lambda]}_\lambda$. Además, la unión de las aplicaciones i_n es una aplicación $j^* : V^{M[G_\lambda]}_\lambda \longrightarrow V^{M[G_\lambda]}_\lambda$, que claramente es una inmersión elemental, pues si

$$V^{M[G_\lambda]}_\lambda \vDash \phi(x_1, \ldots, x_k),$$

entonces existe un n tal que $x_1, \ldots, x_k \in V^{M[G_\lambda]}_{\kappa_n}$, y entonces

$$V^{M[G_\lambda]}_{\kappa_n} \vDash \phi(x_1, \ldots, x_k) \to V^{M[G_\lambda]}_{\kappa_{n+1}} \vDash \phi(i_n(x_1), \ldots, i_n(x_k))$$

$$\to V^{M[G_\lambda]}_\lambda \vDash \phi(j^*(x_1), \ldots, j^*(x_k)).$$

Si extendemos G_λ a un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M a través de la factorización $\mathbb{P} \cong \mathbb{P}_\lambda * \pi^\lambda$, teniendo en cuenta que $\pi^\lambda_{G_\lambda}$ es fuertemente λ^+-cerrado en $M[G_\lambda]$ y que $|V_\lambda|^{M[G]} = \lambda$, concluimos que $V^{M[G]}_\lambda = V^{M[G_\lambda]}_\lambda$, luego

$$j^* : V^{M[G]}_\lambda \longrightarrow V^{M[G]}_\lambda,$$

y claramente $j^* \in M[G]$, ya que está definida a partir de los filtros G_{κ_n} y de parámetros que son conjuntos en $M[G]$. Por lo tanto, κ cumple I3 en $M[G]$ (y también en $V^{M[G]}_\theta$).

Cardinales I1 Vamos a esbozar cómo se modifica el último argumento para el caso en que el cardinal κ cumple I1. Entonces tenemos $j : V_{\lambda+1}^M \longrightarrow V_{\lambda+1}^M$ y, por otra parte, $V_{\lambda+1}^{M[G]} = V_{\lambda+1}^{M[G_\lambda]}$, luego basta extender j a una inmersión elemental $j^* : V_{\lambda+1}^{M[G_\lambda]} \longrightarrow V_{\lambda+1}^{M[G_\lambda]}$.

Se cumple que $j[G_\lambda] \subset G_\lambda$, pues si $p \in G_\lambda$ entonces $p|_{\kappa_n} \in G_{\kappa_n}$, luego $j(p|_{\kappa_n}) = j(p)|_{\kappa_{n+1}} \in G_{\kappa_{n+1}}$ y por 10.2 esto implica que $j(p) \in G_\lambda$.

Por otra parte, todo $x \in V_{\lambda+1}^{M[G_\lambda]}$ es de la forma $x = \sigma_{G_\lambda}$, con $\sigma \in V_{\lambda+1}^M$. Esto se prueba tomando un nombre ρ_λ para $V_{\lambda+1}^{M[G_\lambda]}$ en $V_{\lambda+1}^M$ (que puede construirse como en la prueba del teorema 10.16) y observando que los buenos nombres para subconjuntos de ρ_λ están en $V_{\lambda+1}^M$.

Esto nos permite definir la inmersión $j^* : V_{\lambda+1}^{M[G_\lambda]} \longrightarrow V_{\lambda+1}^{M[G_\lambda]}$ mediante $j^*(\sigma_{G_\lambda}) = j(\sigma)_{G_\lambda}$. La comprobación de que j^* está bien definida y es una inmersión elemental se apoya en que si $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in V_{\lambda+1}^M$, entonces la relación $p \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ es definible en $V_{\lambda+1}^M$, por lo que se conserva al aplicar j.

El teorema siguiente recoge lo que hemos demostrado:

Teorema 10.17 *Si M es un modelo transitivo numerable de $M[G]$ y θ es un cardinal inaccesible en M, entonces existe un c.p.o. $\mathbb{P} \in M$ tal que en toda extensión genérica $M[G]$ por $\mathbb{P}$ se cumple la* HCG *bajo θ, el cual es inaccesible$^{M[G]}$, y si κ es un cardinal inaccesible, fuerte, superfuerte o supercompacto o bien cumple* I3 *o* I1 *en V_θ^M, entonces lo mismo sucede en $V_\theta^{M[G]}$.*

En particular, si es consistente ZFC más la existencia de (uno, dos, infinitos) cardinales fuertes, superfuertes o supercompactos, etc., también lo es[4] si añadimos la HCG.

10.4 Conservación de cardinales supercompactos

En la sección anterior hemos visto que garantizar que un cardinal grande sigue siéndolo en una extensión genérica es un problema no trivial, y resulta ser uno de los puntos centrales de muchas pruebas de consistencia. En el apéndice A demostramos varios resultados generales de conservación de cardinales, que en esencia afirman que un cardinal grande κ se conserva como tal en las extensiones genéricas mediante c.p.o.s $\mathbb{P}$ tales que $|\mathbb{P}| < \kappa$.

Esto es útil para concluir que las pruebas de consistencia mediante extensiones genéricas que no requieren cardinales grandes (como la consistencia del axioma de Martin, o de la negación de la hipótesis del continuo, etc.) siguen siendo válidas en presencia de cardinales grandes, pero la hipótesis $|\mathbb{P}| < \kappa$ es a

[4]La presencia del cardinal inaccesible θ en el teorema anterior puede suprimirse si realizamos la extensión con una clase propia de condiciones, concretamente, con la resultante de prolongar la iteración $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\in\Omega}, \{\pi_\delta\}_{\delta\in\Omega})$ para todos los ordinales y tomar la clase $\mathbb{P}_\Omega$ como el límite directo. Esto requiere probar que la extensión $M[G]$ es realmente un modelo de ZFC, pues no siempre es cierto cuando el c.p.o. $\mathbb{P}$ es una clase propia.

menudo demasiado restrictiva cuando los cardinales grandes son un ingrediente esencial en la prueba. Aquí vamos a probar un resultado muy general debido a Laver sobre conservación de cardinales supercompactos. Se apoya en el resultado siguiente, que es una propiedad de los cardinales supercompactos que tiene interés en sí misma:

Teorema 10.18 *Sea κ un cardinal supercompacto. Existe $f : \kappa \longrightarrow V_\kappa$ tal que para todo conjunto x y todo cardinal $\mu \geq |\mathrm{ct}\, x|$, $\mu \geq \kappa$, existe una medida normal U en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ tal que $j_U(f)(\kappa) = x$.*

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $\phi(g, \xi)$ a la fórmula siguiente:

> "Existe un cardinal ν tal que $g : \nu \longrightarrow V_\nu$ y ξ es el mínimo cardinal $\geq \nu$ para el que existe un conjunto x tal que $|\mathrm{ct}\, x| \leq \xi$ y no existe una medida normal U en $\mathcal{P}^{<\nu}(\xi)$ que cumpla $j_U(g)(\nu) = x$."

Si no se cumple el teorema, entonces para cada función $f : \kappa \longrightarrow V_\kappa$ existe un cardinal $\xi_f \geq \kappa$ que verifica $\phi(f, \xi_f)$. Tomemos un cardinal límite fuerte $\mu > \bigcup\limits_{f \in V_\kappa^\kappa} \xi_f$ y sea $j : V \longrightarrow M$ una inmersión elemental de punto crítico κ tal que $j(\kappa) \geq \mu$ y $M^\mu \subset M$.

Es fácil ver[5] que se cumple $\phi^M(f, \xi_f)$ para toda $f \in V_\kappa^\kappa$. Así pues

$$\bigwedge f \in V_\kappa^\kappa \bigvee \xi < \mu \; \phi^M(f, \xi). \tag{10.2}$$

Sea $A = \{\nu < \kappa \mid \bigwedge g \in V_\nu^\nu \bigvee \xi < \nu \; \phi(g, \xi)\}$. Claramente $\kappa \in j(A)$.

Ahora definimos $f : \kappa \longrightarrow V_\kappa$ recurrentemente: si $\alpha \in A$ y $f|_\alpha : \alpha \longrightarrow V_\alpha$, entonces existe un $\xi < \alpha$ tal que $\phi(f|_\alpha, \xi)$ y a su vez existe un x_α tal que $|\mathrm{ct}\, x_\alpha| \leq \xi$ (luego $x_\alpha \in V_\xi$) y no existe una medida normal U en $\mathcal{P}^{<\alpha}(\xi)$ que cumpla $j_U(f|_\alpha)(\alpha) = x_\alpha$. Elegimos entonces $f(\alpha) = x_\alpha$. Si no se da esta situación tomamos $f(\alpha) = \varnothing$.

Sea $x = j(f)(\kappa)$. Observemos que, como j fija a V_κ, se cumple $j(f)|_\kappa = f$, luego, aplicando la inmersión elemental j a la definición de f, observamos que $j(f)|_\kappa : \kappa \longrightarrow V_\kappa^M$ y $\kappa \in j(A)$, luego x cumple la definición de $\phi^{M_\mu}(f, \xi)$ (que equivale a $\phi(f, \xi)$), para cierto $\xi = \xi_f < \mu$. Esto significa que $|\mathrm{ct}\, x| \leq \xi$ y no existe ninguna medida normal U en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\xi)$ tal que $j_U(f)(\kappa) = x$.

Ahora bien, podemos definir $U = \{X \subset \mathcal{P}^{<\kappa}(\xi) \mid j[\xi] \in j(X)\}$ que, de acuerdo con 8.15, es una medida normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\xi)$. Vamos a ver que $j_U(f)(\kappa) = x$ y así tendremos una contradicción.

Sea $k : \mathrm{Ult}_U(V) \longrightarrow M$ la inmersión elemental dada por 8.15. Como fija a los ordinales $\leq \xi$, se cumple que $k(x) = x$, luego

$$k(x) = x = j(f)(\kappa) = k(j_U(f))(k(\kappa)) = k(j_U(f)(\kappa)),$$

luego $j_U(f)(\kappa) = x$. ■

Veamos un par de resultados auxiliares. El primero es elemental:

[5] Notemos que si $|\mathrm{ct}\, x| \leq \mu_f$, entonces $x \in V_\mu \subset M$. Además, para calcular $j_U(f)$ basta considerar clases de equivalencia módulo U en V_μ y, éstas son absolutas para M.

Teorema 10.19 *Sean $N \subset M$ modelos transitivos de* ZFC *con los mismos ordinales y sea κ un cardinal^M tal que $\Omega^{<\kappa} \cap M \subset N$. Entonces $N^{<\kappa} \cap M \subset N$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $f \in N^{<\kappa} \cap M$, digamos que $f : \alpha \longrightarrow N$, con $\alpha < \kappa$. Sea $\lambda \in M$ tal que $f[\alpha] \subset V_\lambda^M \cap N = V_\lambda^N$. Sean μ, $g \in$ tales que $g : V_\lambda^N \longrightarrow \mu$ biyectiva. Entonces $f \circ g \in \Omega^{<\kappa} \cap M \subset N$, luego $f \circ g \in N$, luego $f \in N$. ■

Teorema 10.20 *Sean $N \subset M$ modelos transitivos numerables de* ZFC *con los mismos ordinales. Sea κ un cardinal regular^M, sea $\mathbb{P}$ un c.p.o. en N con la c.c. κ en M y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M (luego sobre N). Si $N^{<\kappa} \cap M \subset N$. Entonces $N[G]^{<\kappa} \cap M[G] \subset N[G]$.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior basta ver que $\Omega^{<\kappa} \cap M[G] \subset N[G]$. Sea $\alpha < \kappa$ y $f : \alpha \longrightarrow \Omega$, $f \in M[G]$. Entonces $f = \tau_G$, con $\tau \in M^{\mathbb{P}}$, y existe $p_0 \in \mathbb{P}$ tal que $p_0 \Vdash \tau : \check{\alpha} \longrightarrow \Omega$.

Para cada $\delta < \alpha$ sea $A_\delta = \{p \leq p_0 \mid \bigvee \beta\ p \Vdash \tau(\check{\delta}) = \check{\beta}\}$. Claramente A_δ es denso bajo p_0. Sea A'_δ una anticadena maximal en A_δ. Entonces,

$$A''_\delta = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee q \in A_\delta\ p \leq q\}$$

también es denso bajo p_0, pues si $r \in \mathbb{P}$ cumple $r \leq p_0$, existe $r' \in A_\delta$ tal que $r' \leq r$, luego existe $r'' \in A'_\delta$ tal que $\neg r'' \perp r'$, luego existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \leq r' \wedge p \leq r''$, luego $p \in A''_\delta \wedge p \leq p_0$.

Así pues, $A''_\delta \cap G \neq \varnothing$, luego también $A'_\delta \cap G \neq \varnothing$. Observemos que podemos tomar $\{A'_\delta\}_{\delta<\alpha} \in M$ y por hipótesis $|A'_\delta|^M < \kappa$, luego el conjunto

$$A = \{(\delta, p) \mid \delta < \alpha \wedge p \in A'_\delta\} \in M$$

cumple también que $|A|^M < \kappa$. Sea $g : A \longrightarrow \Omega$ la aplicación dada por $g(\delta, p) =$ el único β tal que $p \Vdash \tau(\check{\delta}) = \check{\beta}$. Usando que $N^{<\kappa} \cap M \subset N$ se sigue fácilmente que $g \in N$, y entonces $f \in N[G]$, pues, para cada $\delta < \alpha$, se cumple que $f(\delta)$ es el único β tal que $\bigvee p \in G\ g(\delta, p) \in \beta$. En efecto, sabemos que existe $p \in A'_\delta \cap G$, para el cual existe un β tal que $p \Vdash \tau(\check{\delta}) = \check{\beta}$, luego $f(\delta) = \beta$. La unicidad es clara. ■

Ahora ya podemos demostrar el resultado principal de esta sección:

Teorema 10.21 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC *y sea κ un cardinal supercompacto^M. Entonces existe un c.p.o. $\mathbb{Q} \in M$ que cumple la (c.c.κ)^M, $|\mathbb{Q}|^M = \kappa$ y si G es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M, entonces κ es supercompacto$^{M[G]}$ y se conserva supercompacto en cualquier extensión genérica de $M[G]$ obtenida a partir de un c.p.o. fuertemente κ-cerrado$^{M[G]}$.*

DEMOSTRACIÓN: Notemos que la última afirmación implica ya que κ es supercompacto$^{M[G]}$. Lo que sigue ha de entenderse relativizado a M. Consideremos una aplicación $f : \kappa \longrightarrow V_\kappa$ según el teorema anterior. Vamos a construir una iteración de preórdenes $(\{\mathbb{Q}_\alpha\}_{\alpha\leq\kappa}, \{\pi_\alpha\}_{\alpha<\kappa})$. Simultáneamente definiremos una sucesión de ordinales $\{\gamma_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$, de modo que $\bigwedge \alpha < \kappa\ \gamma_\alpha < \kappa$.

Tomamos $\gamma_0 = 0$. Definidos $(\{\mathbb{Q}_\delta\}_{\delta\leq\alpha}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\alpha})$ y $\{\gamma_\delta\}_{\delta\leq\alpha}$, tomamos $\pi_\alpha = \check{\mathbb{1}}$ (es decir, el nombre canónico del c.p.o. trivial) y $\gamma_{\alpha+1} = \gamma_\alpha$ a menos que:

a) $\bigwedge \delta < \alpha\ \gamma_\delta < \alpha$,

b) $f(\alpha) = (\pi, \gamma)$, donde $\gamma < \kappa$ es un cardinal y π es un $\mathbb{Q}_\alpha$-nombre para un c.p.o. tal que $1\!\!1_{\mathbb{Q}_\alpha} \Vdash \pi$ es fuertemente $\check{\alpha}$-cerrado.

En tal caso hacemos $\gamma_{\alpha+1} = \gamma$ y $\pi_\alpha = \pi$. Esto determina $\mathbb{Q}_{\alpha+1}$.

Definidos $(\{\mathbb{Q}_\delta\}_{\delta<\lambda}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\lambda})$ y $\{\gamma_\delta\}_{\delta<\lambda}$, para un ordinal límite $\lambda < \kappa$, tomamos $\gamma_\lambda = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} \gamma_\delta$ y definimos $\mathbb{Q}_\lambda$ como el límite inverso de los c.p.o.s anteriores salvo que λ sea un cardinal inaccesible (en cuyo caso tomamos el límite directo). Vamos a probar que $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_\kappa$ cumple lo pedido.

Veamos en primer lugar que $\bigwedge \alpha < \kappa\ |\mathbb{Q}_\alpha| < \kappa$. En efecto, supongamos que $|\mathbb{Q}_\alpha| < \kappa$. Teniendo en cuenta la desigualdad $\operatorname{rang} \tau_G \leq \operatorname{rang} \tau$, es inmediato que $1\!\!1_{\mathbb{Q}_\alpha} \Vdash \pi_\alpha \in V_{\check{\kappa}}$. Es claro que $1\!\!1_{\mathbb{Q}_\delta}$ fuerza que $\check{\kappa}$ es límite fuerte, luego $1\!\!1_{\mathbb{Q}_\delta} \Vdash |\pi_\alpha| < \check{\kappa}$. Más concretamente, para cada filtro $\mathbb{Q}_\alpha$-genérico G ha de existir un ordinal $\mu_G < \kappa$ y una condición $p_G \in G$ tal que $p_G \Vdash |\pi_\alpha| = \check{\mu}_G$. El supremo μ de los ordinales μ_G cumple $\mu < \kappa$, y es claro que $1\!\!1_{\mathbb{Q}_\delta} \Vdash |\pi_\alpha| < \check{\mu}$. Por el teorema 10.11 concluimos que $|\mathbb{Q}_{\alpha+1}| \leq \mu^{|\mathbb{Q}_\alpha|^+} < \kappa$. El caso límite es inmediato porque κ es fuertemente inaccesible.

Teniendo en cuenta que $\mathbb{Q}_\kappa$ es límite directo concluimos que $|\mathbb{Q}_\kappa| = \kappa$ y como κ es un cardinal de Mahlo, el teorema 10.3 implica que $\mathbb{Q}_\kappa$ cumple la c.c.κ.

Por construcción tenemos que $\bigwedge \alpha < \kappa \operatorname{rang} \pi_\alpha < \kappa$, de donde se sigue que $\bigwedge \alpha < \kappa \operatorname{rang} \mathbb{Q}_\alpha < \kappa$. En efecto, supongamos que $\operatorname{rang} \mathbb{Q}_\alpha < \kappa$ y sea $\{\rho_\delta\}_{\delta<\kappa}$ la sucesión de $\mathbb{Q}_\alpha$-nombres definida en la prueba del teorema 10.16 (el ξ de dicho teorema es aquí κ), de modo que $\operatorname{rang} \rho_\delta < \kappa$ y $1\!\!1_{\mathbb{Q}_\alpha} \Vdash \rho_\delta = V_{\check{\delta}}$.

Si $\operatorname{rang} \pi_\alpha < \delta < \kappa$, cada elemento de $\hat{\pi}_\alpha$ es equivalente a un buen nombre para un subconjunto de ρ_α, el cual tendrá rango menor que el rango de $\rho_{\alpha+1}$, luego por definición de $\hat{\pi}_\alpha$, todos sus elementos tienen rango menor que el rango de $\rho_{\alpha+1}$, de donde $\operatorname{rang} \hat{\pi}_\alpha < \kappa$. Ahora es fácil concluir que $\operatorname{rang} \mathbb{Q}_{\alpha+1} < \kappa$. El caso límite se sigue de que κ es regular.

Sea ahora G un filtro $\mathbb{Q}_\kappa$-genérico sobre M y sea $\mathbb{P} \in M[G]$ un c.p.o. fuertemente κ-cerrado$^{M[G]}$. Sea $\mathbb{P} = \pi_G$. Podemos suponer que $1\!\!1_{\mathbb{Q}_\kappa} \Vdash \pi$ es un c.p.o. fuertemente $\check{\kappa}$-cerrado.

Hemos de probar que $1\!\!1_{\mathbb{P}} \Vdash \check{\kappa}$ es supercompacto o, equivalentemente, que $1\!\!1_{\mathbb{Q}_\kappa * \pi} \Vdash \check{\kappa}$ es supercompacto.

Seguimos trabajando en M. Sea $\mu \geq \kappa$ un cardinal y tomemos otro cardinal $\xi > |\operatorname{ct} \pi|$, $\xi \geq 2^\kappa$, $\xi > |\mathbb{Q}_\kappa * \pi|$ y de modo que $1\!\!1_{\mathbb{Q}_\kappa * \pi} \Vdash \check{\xi} > 2^{2^{\check{\mu}}}$.

Sea U_ξ una medida normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\xi)$ tal que $j_{U_\xi}(f)(\kappa) = (\pi, \xi)$. Sea M_ξ la ultrapotencia correspondiente. Llamaremos $j : M \longrightarrow M_\xi$ a la inmersión natural j_{U_ξ}.

Como $\bigwedge \alpha < \kappa\ \mathbb{Q}_\alpha \in V_\kappa$, la imagen

$$j((\{\mathbb{Q}_\alpha\}_{\alpha\leq\kappa}, \{\pi_\alpha\}_{\alpha<\kappa})) = (\{\mathbb{Q}'_\alpha\}_{\alpha\leq j(\kappa)}, \{\pi'_\alpha\}_{\alpha<j(\kappa)})$$

es una iteración$^{M_\xi}$ que empieza con los mismos $(\{\mathbb{Q}_\alpha\}_{\alpha<\kappa}, \{\pi_\alpha\}_{\alpha<\kappa})$. Además, como κ es inaccesible$^{M_\xi}$, se cumple que $\mathbb{Q}'_\kappa$ es límite directo, luego $\mathbb{Q}'_\kappa = \mathbb{Q}_\kappa$. En conclusión, podemos escribir sin ambigüedad

$$j((\{\mathbb{Q}_\alpha\}_{\alpha\leq\kappa}, \{\pi_\alpha\}_{\alpha<\kappa})) = (\{\mathbb{Q}_\alpha\}_{\alpha\leq j(\kappa)}, \{\pi_\alpha\}_{\alpha<j(\kappa)}).$$

Igualmente, la sucesión $j(\{\gamma_\alpha\}_{\alpha<\kappa}) = \{\gamma_\alpha\}_{\alpha<j(\kappa)}$ extiende a la original.

En particular acabamos de ver que $\mathbb{Q}_\kappa \in M_\xi$. Además $(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_\kappa} \Vdash \pi$ es un c.p.o. fuertemente $\check{\kappa}$-cerrado$)^{M_\xi}$.

En efecto, todo subconjunto de $\mathbb{Q}_\kappa$ tiene cardinal $\leq 2^\kappa < \xi$, luego está en M_ξ, luego si G es un filtro $\mathbb{Q}_\kappa$-genérico sobre M_ξ, también es $\mathbb{Q}_\kappa$-genérico sobre M, claramente $M_\xi[G] \subset M[G]$ y π_G es fuertemente κ-cerrado en $M[G]$, luego también en $M_\xi[G]$.

La iteración extendida cumple en M_ξ la misma definición que la original cumple en M, pero con $j(f)$ en lugar de f. Observemos que κ cumple las condiciones a) y b) de la definición, pues $j(f)(\kappa) = (\pi, \xi)$, donde π es un $\mathbb{Q}_\kappa$-nombre para un c.p.o. y acabamos de ver que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_\kappa} \Vdash \pi$ es fuertemente $\check{\kappa}$-cerrado en M_ξ.

Como consecuencia, en M_ξ se cumple que $\mathbb{Q}_{\kappa+1} \cong \mathbb{Q}_\kappa * \pi$. Más aún, para todo α tal que $\kappa < \alpha < \xi$ se cumple que $\gamma_\kappa = \xi > \alpha$, luego α no cumple la condición a) y, por consiguiente, $\mathbb{Q}_{\alpha+1} \cong \mathbb{Q}_\alpha$. De aquí que $\mathbb{Q}_\xi \cong \mathbb{Q}_{\kappa+1} \cong \mathbb{Q}_\kappa * \pi$.

Veamos que (en M_ξ) podemos factorizar $\mathbb{Q}_{j(\kappa)} \cong \mathbb{Q}_\xi * \rho$.

Según el teorema 10.9, basta comprobar que si $\operatorname{cf}\lambda \leq |\mathbb{Q}_\xi|$ entonces $\mathbb{Q}_{\xi+\lambda}$ es límite inverso. Ahora bien, por la elección de ξ, tenemos que

$$\operatorname{cf}\lambda \leq |\mathbb{Q}_\xi| = |\mathbb{Q}_\kappa * \pi| \leq \xi.$$

(La desigualdad se cumple en M, luego también en M_ξ.)

Si $\mathbb{Q}_{\xi+\lambda}$ fuera límite directo, entonces $\xi + \lambda$ sería un cardinal inaccesible$^{M_\xi}$, luego $\lambda \leq \xi + \lambda = \operatorname{cf}(\xi + \lambda) = \operatorname{cf}\lambda \leq \lambda$, con lo que $\operatorname{cf}\lambda = \lambda = \xi + \lambda > \xi$, contradicción.

Veamos ahora que (en M_ξ) $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_\xi} \Vdash \rho$ es fuertemente $\check{\xi}$-cerrado.

Sea H un filtro $\mathbb{Q}_\xi$-genérico sobre M_ξ. Sea $j(\kappa) = \xi + \gamma$. Según el teorema de factorización 10.9, tenemos que $\rho_H = \mathbb{R}$ es el último paso de una iteración de preórdenes $(\{\mathbb{R}_\delta\}_{\delta\leq\gamma}, \{\sigma_\delta\}_{\delta<\gamma})$ de modo que $\sigma_\delta = \pi^*_{\xi+\delta\, H}$. El hecho de que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_{\xi+\delta}} \Vdash \pi_{\xi+\delta}$ es fuertemente $\check{\xi}$-cerrado se traduce en que $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_\delta} \Vdash \sigma_\delta$ es fuertemente $\check{\xi}$-cerrado. Para probar que $\mathbb{R}$ es fuertemente ξ-cerrado aplicaremos el teorema 10.7. Hemos de comprobar que si $\operatorname{cf}\lambda < \xi$ (en $M_\xi[H]$) entonces $\mathbb{R}_\lambda$ es límite inverso. Esto equivale a que lo sea $\mathbb{Q}_{\xi+\lambda}$ y, a su vez, esto equivale a que $\xi + \lambda$ no sea inaccesible$^{M_\xi}$. Ahora bien, antes hemos visto que si $\xi + \lambda$ no es inaccesible$^{M_\xi}$ entonces $\operatorname{cf}\lambda > \xi$, contradicción.

Por otra parte, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_\kappa} \Vdash \pi$ es fuertemente $\check{\kappa}$-cerrado (en M), luego aplicando j tenemos que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_{j(\kappa)}} \Vdash j(\pi)$ es fuertemente $j(\check{\kappa})$-cerrado (en M_ξ). En particular $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_{j(\kappa)}} \Vdash j(\pi)$ es fuertemente $\check{\xi}$-cerrado.

Consideramos en M_ξ el c.p.o.

$$\mathbb{Q}_{j(\kappa)} * j(\pi) \cong \mathbb{Q}_\xi * \rho * j(\pi) \cong \mathbb{Q}_\kappa * \pi * \rho * j(\pi).$$

Por el teorema de factorización 10.9 (aplicado a una iteración de longitud $\kappa + 3$) existe un $\mathbb{Q}_\kappa * \pi$-nombre para un c.p.o. σ tal que

$$j(\mathbb{Q}_\kappa * \pi) = \mathbb{Q}_{j(\kappa)} * j(\pi) \cong \mathbb{Q}_\kappa * \pi * \sigma.$$

Más detalladamente, si $(p, \tau) \in \mathbb{Q}_\kappa * \pi$, entonces $p \in \mathbb{Q}_\kappa$ y, como $\mathbb{Q}_\kappa$ es límite directo, de hecho $p = i_{\alpha\kappa}(p')$, para un $\alpha < \kappa$ y un $p' \in \mathbb{Q}_\alpha$. Como p' tiene rango menor que κ, $j(p') = p'$, de donde $j(p) = i_{\alpha\, j(\kappa)}(p')$. A través de la semejanza $\mathbb{Q}_{j(\kappa)} \cong \mathbb{Q}_\xi * \rho$ queda $j(p) = (q, \mathbb{1})$, donde $q = i_{\alpha\xi}(p')$. Aplicando la semejanza $\mathbb{Q}_\xi * \rho \cong \mathbb{Q}_\kappa * \pi * \rho$ queda $j(p) = (p, \mathbb{1}, \mathbb{1})$, luego

$$j(p, \tau) = (p, \mathbb{1}, \eta) \in \mathbb{Q}_\kappa * \pi * \sigma$$

(donde en realidad η sólo depende de τ).

Usando 10.5 es fácil ver que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_\kappa * \pi} \Vdash \sigma$ es fuertemente $\check{\xi}$-cerrado (en M_ξ).

Sea G un filtro $\mathbb{Q}_\kappa * \pi$-genérico sobre M (luego sobre M_ξ) y sea $\mathbb{R} = \sigma_G$, que es un c.p.o. fuertemente ξ-cerrado$^{M_\xi[G]}$. Sea

$$D = \{r \in \mathbb{R} \mid \bigvee q \in G \bigvee p\eta (j(q) = (p, \mathbb{1}, \eta) \land r = \eta_G)\} \in M_\xi[G].$$

Se cumple que $D \in M_\xi[G]$ porque $j|_{\mathbb{Q}_\kappa * \pi} \in M_\xi$. Además, por la elección de ξ tenemos que $|D|^{M_\xi[G]} \leq |G|^{M_\xi[G]} \leq |\mathbb{Q}_\kappa * \pi|^{M_\xi[G]} \leq |\mathbb{Q}_\kappa * \pi|^{M_\xi} < \xi$. Veamos que D es un subconjunto dirigido de $\mathbb{R}$.

Sean r, $r' \in D$, sean q, $q' \in G$ tales que $j(q) = (p, \mathbb{1}, \eta)$, $j(q') = (q', \mathbb{1}, \eta')$, $r = \eta_G$, $r' = \eta'_G$. Sea $q'' \in G$ tal que $q'' \leq q \land q'' \leq q'$. Sea $j(q'') = (p'', \mathbb{1}, \eta'')$. Así, $(p'', \mathbb{1}, \eta'') \leq (p, \mathbb{1}, \eta)$ y $(p'', \mathbb{1}, \eta'') \leq (p', \mathbb{1}, \eta')$. Esto significa que

$$(p'', \mathbb{1}) \Vdash \eta'' \leq \eta \quad \text{y} \quad (p'', \mathbb{1}) \Vdash \eta'' \leq \eta'.$$

Ahora bien, $q'' = (p'', \tau'') \in G$ (para cierto τ''), luego $q'' \leq (p'', \mathbb{1}) \in G$ y, por consiguiente,

$$\eta''_G \leq \eta_G = r, \quad \eta''_G \leq \eta'_G = r', \quad \eta''_G \in D.$$

Así pues, D es dirigido y, como $\mathbb{R}$ es fuertemente ξ-cerrado, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\bigwedge d \in D\ a \leq d$.

Sea H un filtro $\mathbb{R}$-genérico sobre $M[G]$ (luego sobre $M_\xi[G]$) tal que $a \in H$. Así $G * H$ es un filtro $\mathbb{Q}_\kappa * \pi * \sigma$-genérico sobre M_ξ o, equivalentemente, $j(\mathbb{Q}_\kappa * \pi)$-genérico sobre M_ξ.

Ahora observamos que $j[G] \subset G * H$.

En efecto, si $q = (p, \tau) \in G$, entonces $j(q) = (p, \mathbb{1}, \eta)$, donde $r = \eta_G \in D$, luego $a \leq r$, luego $r \in H$. Obviamente $(p, \mathbb{1}) \in G$, luego $j(q) \in G * H$.

Esto nos permite aplicar el teorema 10.12, por el que j se extiende a una inmersión elemental $j : M[G] \longrightarrow M_\xi[G * H]$. El teorema quedará probado si a partir de ella definimos una medida normal en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ en $M[G]$.

Para ello observamos que $M[G] \cap M_\xi[G]^\xi \subset M_\xi[G]$. Basta aplicar el teorema 10.20, teniendo en cuenta que $|\mathbb{Q}^\pi_\kappa|^M \leq \xi$, luego $\mathbb{Q}^\pi_\kappa$ cumple trivialmente la c.c. ξ^+ en M. Por consiguiente, $\mathbb{R}$ tiene los mismos conjuntos dirigidos de cardinal $< \xi$ tanto en $M_\xi[G]$ como en $M[G]$, luego $\mathbb{R}$ es fuertemente ξ-cerrado$^{M[G]}$. A su vez, de aquí deducimos que $\mathcal{P}\mu$ es absoluto para $M[G] - M[G][H]$, luego lo mismo es válido para 2^μ. Más aún, si $x \in M[G][H]$ cumple $x \subset (\mathcal{P}\mu)^{M[G][H]} \subset M[G]$, entonces $(|x| \leq 2^\mu < \xi)^{M[G][H]}$, luego $x \in M[G]$. Así pues, $\mathcal{P}\mathcal{P}\mu$ también es absoluto para $M[G] - M[G][H]$. Repitiendo el argumento obtenemos esto mismo para $\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\mu$. En particular tenemos que $\mathcal{P}\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ y $\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ son absolutos para $M[G] - M[G][H]$. Sea

$$U = \{x \in M[G][H] \mid x \subset \mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^{M[G][H]} \land j[\mu] \in j(x)\}.$$

Se cumple que $U \in M[G][H]$ porque la restricción de j al conjunto de los buenos nombres en M para subconjuntos de $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ está en M, luego en $M[G]$, y de aquí que la restricción de j a $\mathcal{P}\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$ está en $M[G][H]$. Puesto que $U \in \mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)$, resulta que $U \in M[G]$.

Una vez justificado esto, la prueba de que U es una medida normal es idéntica a la vista en el teorema 10.14. Así pues, κ es μ-supercompacto$^{M[G]}$. ■

Veamos una aplicación: El teorema 5.25 implica que no es posible demostrar la consistencia de que exista un cardinal medible κ tal que $2^\kappa > \kappa^+$ suponiendo consistente tan sólo la existencia de un cardinal medible. Ahora probamos que no ocurre lo mismo con los cardinales supercompactos:

Teorema 10.22 *Si es consistente la existencia de un cardinal supercompacto, también es consistente que exista un cardinal supercompacto κ (en particular medible) tal que $2^\kappa > \kappa^+$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea M_0 un modelo transitivo numerable de ZFC con un cardinal supercompacto κ. Sea M una extensión genérica de M_0 obtenida con el c.p.o. del teorema 10.21. Así, κ es supercompacto^M y sigue siendo supercompacto en cualquier extensión de M obtenida con un c.p.o. fuertemente κ-cerrado.

Si $(2^\kappa = \kappa^+)^M$, tomamos $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\kappa^{++}, 2, \kappa)^M$. Como κ es inaccesible^M, el teorema [PC 5.15] nos da que $\mathbb{P}$ cumple la $(\text{c.c.}\kappa^+)^M$ y es claro que es fuertemente κ-cerrado. Por consiguiente, si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tenemos que $M[G]$ tiene los mismos cardinales que M y κ es supercompacto$^{M[G]}$. Además los argumentos usuales nos dan que $(2^\kappa = \kappa^{++})^{M[G]}$. ■

10.5 Violación de la HCG en un cardinal débilmente compacto

Acabamos de ver que la consistencia de $2^\kappa > \kappa^+$ en un cardinal supercompacto es equivalente a la consistencia de que exista un cardinal supercompacto, mientras que la consistencia de $2^\kappa > \kappa^+$ en un cardinal medible es más fuerte que la existencia de un cardinal medible. Ahora estudiamos el caso de un cardinal débilmente compacto. Vamos a probar que la consistencia de $2^\kappa > \kappa^+$ en un cardinal débilmente compacto es equivalente a la consistencia de que exista tal cardinal. Más aún, mientras el teorema 5.6 implica que un cardinal medible no puede ser el primero en violar la HCG, sucede que un cardinal débilmente compacto sí que puede serlo:

Teorema 10.23 *Si es consistente que exista un cardinal débilmente compacto* κ, *también lo es que además* $\bigwedge\mu\,(\aleph_0 \leq \mu < \kappa \rightarrow 2^\mu = \mu^+) \wedge 2^\kappa > \kappa^+$.

DEMOSTRACIÓN: Si es consistente que exista un cardinal débilmente compacto κ, también lo es suponer además la HCG (porque κ sigue siendo débilmente compacto en L). Bajo estas hipótesis, consideramos la iteración de Easton $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\kappa}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\kappa})$ determinada por que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi_\delta = \{\mathbb{1}\}$ salvo si δ es un cardinal inaccesible, en cuyo caso[6] $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi_\delta = \mathrm{Fn}(\check{\delta}, 2, \check{\delta})$. Veamos las características de esta iteración. (En muchos casos demostraremos su relativización a un modelo transitivo numerable M de ZFC + HCG.)

a) $\bigwedge\delta < \kappa\ |\mathbb{P}_\delta| < \aleph_{\delta+\omega}$.

   Por inducción sobre δ. Si vale para δ, entonces existe un $n < \omega$ tal que $|\mathbb{P}_\delta| < \aleph_{\delta+n}$. Si G es un filtro $\mathbb{P}_\delta$-genérico sobre M, entonces tenemos que $|(\pi_\delta)_G|^{M[G]} \leq |\,\mathrm{Fn}(\delta, 2, \delta)|^{M[G]} \leq (2^{|\delta|})^{M[G]}$.

   El número de buenos $\mathbb{P}_\delta$-nombres para subconjuntos de $\check{\delta}$ en M es a lo sumo $|\mathbb{P}_\delta|^{|\mathbb{P}_\delta|^+|\delta|} \leq \aleph_{\delta+n+1}$, luego $(2^{|\delta|})^{M[G]} \leq \aleph_{\delta+n+1}$.

   Con esto hemos probado que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash |\pi_\delta| \leq \check{\aleph}_{\delta+n+1}$.

   Por otra parte tenemos que $\mathbb{P}_\delta$ cumple la c.c. $\aleph_{\delta+n+1}$, $|\mathbb{P}_\delta| \leq \aleph_{\delta+n+1}$ y $\aleph_{\delta+n+1}^{\aleph_{\delta+n}} = \aleph_{\delta+n+1}$, luego 10.11 nos da que $|\mathbb{P}_{\delta+1}| \leq \aleph_{\delta+n+1} < \aleph_{\delta+\omega}$.

   Si vale para todo $\delta < \lambda$, entonces para cada δ existe un $n \in \omega$ tal que

$$|\mathbb{P}_\delta| < \aleph_{\delta+n} < \aleph_\lambda,$$

   luego $|\mathbb{P}_\lambda| \leq \aleph_\lambda^{|\lambda|} \leq \aleph_\lambda^{\aleph_\lambda} = \aleph_{\lambda+1} < \aleph_{\lambda+\omega}$.

b) Si $\kappa = \beta + \gamma$ y $\delta \leq \gamma$, entonces $\mathbb{P}_{\beta+\delta} \cong \mathbb{P}_\beta * \pi_\delta^\beta$, según el teorema 10.9.

   Basta probar que se cumple la hipótesis de 10.9, es decir, que si $\lambda \leq \gamma$ cumple $\mathrm{cf}\,\lambda \leq |\mathbb{P}_\beta|$, entonces $\mathbb{P}_{\beta+\lambda}$ es límite inverso, es decir, que $\beta + \lambda$ no es inaccesible.

   Si $\beta + \lambda$ es inaccesible, entonces $\lambda \leq \beta + \lambda = \mathrm{cf}(\beta + \lambda) = \mathrm{cf}\,\lambda \leq \lambda$, luego $\lambda = \beta + \lambda = \mathrm{cf}\,\lambda$ y así

$$\lambda = \mathrm{cf}\,\lambda \leq |\mathbb{P}_\beta| \leq \aleph_{\beta+\omega} < \aleph_{\beta+\omega+\lambda} = \aleph_{\beta+\lambda} = \aleph_\lambda = \lambda,$$

   contradicción.

[6] En principio entendemos que $\mathrm{Fn}(\delta, 2, \delta) = \mathrm{Fn}(\delta, 2, |\delta|)$ cuando δ no es un cardinal, pero vamos a probar que todos los $\mathbb{P}_\delta$ conservan cardinales, luego esta situación no se va a dar.

c) Si ξ es un cardinal, $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\xi} \Vdash \pi_\delta^\xi$ es fuertemente $\check{\xi}$-cerrado.[7]

Sea G_ξ un filtro $\mathbb{P}_\xi$-genérico sobre M, sea $\mu = |\xi|^{M[G_\xi]}$ y veamos que $\mathbb{R} = (\pi_\delta^\xi)_{G_\xi}$ es fuertemente μ-cerrado en $M[G_\xi]$. Lo que sabemos por el teorema 10.9 es que $\mathbb{R}$ es un término de una iteración $(\{\mathbb{R}_\delta\}_{\delta\leq\gamma}, \{\rho_\delta\}_{\delta<\gamma})$, donde $\rho_\delta = (\pi^*_{\xi+\delta})_{G_\xi}$ nombra al c.p.o. trivial o bien a $\mathrm{Fn}(\xi+\delta, 2, \xi+\delta)$. En cualquier caso $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_\delta} \Vdash \rho_\delta$ es fuertemente $\check{\mu}$-cerrado.

Ahora probamos la condición del teorema 10.7, es decir, que si $\operatorname{cf}\lambda < \mu$ (en $M[G_\xi]$) entonces $\mathbb{R}_\lambda$ es límite inverso, lo cual equivale a que lo sea $\mathbb{P}_{\xi+\lambda}$ y, a su vez, a que $\xi+\lambda$ no sea inaccesible^M.

En efecto, si $\xi+\lambda$ es inaccesible^M, entonces $\xi+\lambda = \lambda$, luego

$$|\mathbb{P}_\xi| < \aleph_{\xi+\omega} \leq \aleph_{\xi+\omega+\lambda} = \aleph_\lambda = \lambda,$$

luego $\mathbb{P}_\xi$ conserva cardinales y cofinalidades $\geq \lambda$. En particular λ es un cardinal regular$^{M[G_\xi]}$, y esto nos lleva a contradicción:

$$\lambda = \operatorname{cf}^{M[G_\xi]} \lambda < \mu \leq \xi < \xi+\lambda = \lambda.$$

Por lo tanto, $\mathbb{R} = \mathbb{R}_\delta$ es fuertemente μ-cerrado en $M[G_\xi]$.

d) $\mathbb{P}_\beta$ conserva cardinales y cofinalidades, y fuerza la HCG.

Razonamos por inducción sobre β. Si se cumple para β, es trivial que se cumple para $\beta+1$, pues $M[G_{\beta+1}] = M[G_\beta]$ o bien $M[G_{\beta+1}] = M[G_\beta][H]$, donde H es $\mathrm{Fn}(\beta, 2, \beta)$-genérico sobre $M[G_\beta]$, y es claro que este c.p.o. conserva cardinales y cofinalidades y fuerza la HCG.

Supongamos que es cierto para todo $\delta < \lambda$. Si no hay ningún cardinal inaccesible^M menor que λ, entonces $M[G_\lambda] = M$ y la conclusión es trivial. Si existe un máximo inaccesible^M $\delta < \lambda$, entonces $M[G_\lambda] = M[G_{\delta+1}]$ y basta aplicar la hipótesis de inducción. Supongamos, pues, que λ es límite de cardinales inaccesibles^M (luego en particular es un cardinal límite^M).

Si $\delta < \lambda$, existe un inaccesible^M $\delta < \xi < \lambda$, con lo que

$$|\mathbb{P}_\delta| < \aleph_{\delta+\omega} \leq \aleph_\xi = \xi < \lambda.$$

Si λ es regular^M, entonces es inaccesible, $\mathbb{P}_\lambda$ es límite directo y $|\mathbb{P}_\lambda| \leq \lambda$. Por el contrario, si λ es singular^M el límite es inverso y $|\mathbb{P}_\lambda| \leq \lambda^+$.

En el primer caso $\mathbb{P}_\lambda$ conserva cardinales y cofinalidades $\geq \lambda^+$ y en el segundo $\geq \lambda^{++}$.

Por otra parte, supongamos que $\mu \leq \lambda$ es un cardinal regular^M que es singular $M[G_\lambda]$, digamos con cofinalidad $\nu < \mu$. Sea ξ un inaccesible^M tal que $\nu < \xi < \lambda$. Por hipótesis de inducción ξ es un cardinal en $M[G_\xi]$

[7] Deberíamos escribir fuertemente $|\check{\xi}|$-cerrado, pero en el apartado siguiente probaremos que $\mathbb{P}_\xi$ conserva cardinales, con lo que es equivalente (en la prueba se cumple $\mu = \xi$).

y podemos factorizar $M[G_\lambda] = M[G_\xi][H]$, donde H es un filtro genérico respecto de un c.p.o. ξ-cerrado. Pero entonces, si $f : \nu \longrightarrow \mu$ es cofinal y $f \in M[G_\lambda]$, de hecho, $f \in M[G_\xi]$, luego μ es singular en $M[G_\xi]$, en contra de la hipótesis de inducción.

Así pues, $|\mathbb{P}_\lambda|$ conserva cardinales y cofinalidades $\leq \lambda$, y falta justificar que λ^+ no se colapsa en el caso en que λ es singular^M, pero en tal caso λ es singular $M[G_\lambda]$, luego la cofinalidad de $(\lambda^+)^M$ en $M[G_\lambda]$ no puede ser λ (porque tiene que ser regular), luego es un $\nu < \lambda$, y el razonamiento anterior con $\mu = \lambda^+$ nos lleva igualmente a que λ^+ es singular en un $M[G_\xi]$, con $\xi < \lambda$, en contra de la hipótesis de inducción.

Veamos ahora que $\mathbb{P}_\lambda$ conserva la HCG. Si $\mu < \lambda$ es un cardinal en $M[G_\lambda]$, tomamos $\mu < \xi < \lambda$, donde ξ es un cardinal^M, factorizamos como antes $M[G_\lambda] = M[G_\xi][H]$ y concluimos que $\mathcal{P}^{M[G_\lambda]}\mu = \mathcal{P}^{M[G_\xi]}\mu$, y como se cumple $(2^\mu = \mu^+)^{M[G_\xi]}$, lo mismo vale en $M[G_\lambda]$.

Si $\lambda < \mu$, como $\mathbb{P}_\lambda$ cumple la c.c. λ^{++}, el número de buenos $\mathbb{P}_\lambda$-nombres en M para subconjuntos de $\check{\mu}$ es a lo sumo $|\mathbb{P}_\lambda|^{\lambda^+\mu} = \mu^+$, por lo que en $M[G_\lambda]$ se cumple $2^\mu = \mu^+$. Si λ es regular tenemos la c.c. λ^+ y $|\mathbb{P}_\lambda| \leq \lambda$, con lo que el argumento vale también para $\mu = \lambda$. Por lo tanto, sólo falta probar que $2^\lambda = \lambda^+$ en el caso en que λ es singular.

Sea $\mu = \mathrm{cf}^M \lambda < \lambda$ y sea $\mu < \xi < \lambda$ un cardinal^M. Podemos factorizar $M[G_\lambda] = M[G_\xi][H]$, donde H es un filtro genérico sobre $M[G_\xi]$ en un c.p.o. $\mathbb{R}$ fuertemente ξ-cerrado.

Fijemos una sucesión cofinal creciente $\{\mu_\delta\}_{\delta<\mu} \in M$ de cardinales inaccesibles $\mu_\delta > \xi$ y sea $\{N_\delta\}_{\delta<\mu} \in M$ la sucesión en la que N_δ es el conjunto de los buenos $\mathbb{P}_{\mu_{\delta+1}}$-nombres en M para un subconjunto de $\check{\mu}_\delta$.

Dado $x \in \mathcal{P}^{M[G_\lambda]}\lambda$, para cada $\delta < \mu$ factorizamos $M[G_\lambda] = M[G_{\mu_{\delta+1}}][H_\delta]$, donde H_δ es un filtro genérico respecto de un c.p.o. $\mu_{\delta+1}$-cerrado. Así tenemos que $x \cap \mu_\delta \in M[G_{\mu_{\delta+1}}]$, luego existe un nombre $\tau_\delta \in N_\delta$ tal que $\tau_{G_{\mu_{\delta+1}}} = x \cap \mu_\delta$. Además podemos realizar la elección en $M[G_\lambda]$, de modo $\{\tau_\delta\}_{\delta<\mu} \in M[G_\lambda]$, pero como $\mathbb{R}$ es ξ-cerrado, de hecho resulta que $\{\tau_\delta\}_{\delta<\mu} \in M[G_\xi]$. Además, si llamamos $\tau = \bigcup\limits_{\delta<\mu} i_{\mu_{\delta+1}\lambda}(\tau_\delta)$, se cumple que $\tau_{G_\lambda} = x$.

Llamamos $A \in M[G_\xi]$ al conjunto de todas las sucesiones de nombres $\{\tau_\delta\}_{\delta<\mu} \in M[G_\xi]$ tales que $\tau_\delta \in N_\delta$, y llamamos $B \in M[G_\xi]$ al conjunto de todos los $\mathbb{P}_\lambda$-nombres de la forma $\tau = \bigcup\limits_{\delta<\mu} i_{\mu_{\delta+1}\lambda}(\tau_\delta)$ con $\{\tau_\delta\}_{\delta<\mu} \in A$.

Acabamos de probar que $\mathcal{P}^{M[G_\lambda]}\lambda = \{\tau_{G_\lambda} \mid \tau \in B\}$.

Como $|\mathbb{P}_{\mu_{\delta+1}}|^M \leq \mu_{\delta+1} < \lambda$, es claro que $|N_\delta|^M < \lambda$, luego lo mismo vale en $M[G_\xi]$, y usando que $M[G_\xi]$ cumple la HCG concluimos que, en dicho modelo, $|B| \leq |A| \leq \lambda^\mu = \lambda^+$, luego lo mismo vale en $M[G_\lambda]$, por lo que $(|\mathcal{P}\lambda| \leq \lambda^+)^{M[G_\lambda]}$. Así pues, $(2^\lambda = \lambda^+)^{M[G_\lambda]}$.

e) $\mathbb{P}_\kappa$ cumple la c.c. κ.

Esto es inmediato por 10.3, ya que todo $\delta < \kappa$ cumple $|\mathbb{P}_\delta| < \kappa$, luego $\mathbb{P}_\delta$ cumple la c.c. κ. Además, κ es un cardinal de Mahlo, luego deja por debajo un conjunto estacionario de cardinales inaccesibles, en los que el límite es directo.

f) La definición de $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta<\kappa}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\kappa})$ es absoluta para V_κ.

Razonando en un modelo numerable, probamos por inducción sobre $\delta < \kappa$ que $\mathbb{P}_\delta^{V_\kappa^M} = \mathbb{P}_\delta^M$, $\pi_\delta^{V_\kappa^M} = \pi_\delta^M$. Los casos $\delta = 0$ y δ límite son triviales. Si $\mathbb{P}_\delta^{V_\kappa^M} = \mathbb{P}_\delta^M$, sea G_δ un filtro $\mathbb{P}_\delta$-genérico sobre M. Entonces el teorema [PC 10.1] implica que $V_\kappa^M[G_\delta] = V_\kappa^{M[G_\delta]}$, y es claro entonces que δ es inaccesible en $M[G]$ si y sólo si lo es en $V_\kappa^M[G]$, luego $(\pi_\delta^M)_G$ es trivial si y sólo si lo es $(\pi_\delta^{V_\kappa^M})_G$ y, en caso de no serlo, también es claro que $\mathrm{Fn}(\delta, 2, \delta)$ es el mismo en $M[G]$ y en $V_\kappa^M[G]$, luego si π_δ cumple la definición de la iteración en V_κ^M, también la cumple en M, por lo que $\pi_\delta^{V_\kappa^M} = \pi_\delta^M$, lo cual implica a su vez que $\mathbb{P}_{\delta+1}^{V_\kappa^M} = \mathbb{P}_{\delta+1}^M$.

Así pues, concluimos que $\mathbb{P}_\kappa$ conserva cardinales y cofinalidades y fuerza la hipótesis del continuo. Sea ahora G_κ un filtro $\mathbb{P}_\kappa$-genérico sobre M, sea $\mathbb{Q} = \mathrm{Fn}(\kappa^{++}, 2, \kappa)^{M[G_\kappa]}$ y sea H un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[G_\kappa]$. Claramente, en $M[G_\kappa][H]$ se cumple la HCG salvo por que $2^\kappa = \kappa^{++}$. Basta demostrar que κ sigue siendo débilmente compacto en esta extensión. Es inmediato que κ es inaccesible en ella, luego basta probar que en $M[G_\kappa][H]$ no existen κ-árboles de Aronszajn.

Consideramos un κ-árbol en $M[G_\kappa][H]$. No perdemos generalidad si suponemos que es de la forma (κ, R), para cierta relación $R \subset \kappa \times \kappa$. Pongamos que $R = \tau_H$, donde τ es un buen $\mathbb{Q}$-nombre para un subconjunto de $\check{\kappa} \times \check{\kappa}$. Como las anticadenas de $\mathbb{Q}$ tienen cardinal $\leq \kappa$, podemos tomar un conjunto $X \subset \kappa^{++}$ con $|X|^{M[G_\kappa]} = \kappa$ de modo que $\tau \in M[G_\kappa]^{\mathbb{Q}'}$, donde $\mathbb{Q}' = \mathrm{Fn}(X, 2, \kappa)^{M[G_\kappa]}$.

Claramente $\mathbb{Q}'$ es isomorfo a $\mathbb{Q}_\kappa = \mathrm{Fn}(\kappa, 2, \kappa)^{M[G_\kappa]}$, y a través de un isomorfismo podemos factorizar $\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}_\kappa \times \mathbb{Q}$ y suponer que $\tau \in M[G_\kappa]^{\mathbb{Q}_\kappa}$. A su vez, el filtro H factoriza como $H = H_\kappa \times H'$ de modo que $M[G_\kappa][H] = M[G_\kappa][H_\kappa][H']$ y $(\kappa, R) \in M[G_\kappa][H_\kappa]$.

Basta probar que (κ, R) tiene un camino en $M[G_\kappa][H_\kappa]$, pues dicho camino estará también en $M[G_\kappa][H]$.

Sea π_κ un $\mathbb{P}_\kappa$-nombre en M tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\kappa} \Vdash \pi_\kappa = \mathrm{Fn}(\check{\kappa}, 2, \check{\kappa})$, de modo que podemos prolongar la iteración hasta $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\kappa+1}, \{\pi_\delta\}_{\delta\leq\kappa})$, y $G_{\kappa+1} = G_\kappa * H_\kappa$ es un filtro $\mathbb{P}_{\kappa+1}$-genérico sobre M tal que $M[G_{\kappa+1}] = M[G_\kappa][H_\kappa]$.

A partir de ahora $\tau \in M^{\mathbb{P}_{\kappa+1}}$ será un buen nombre para un subconjunto de $\check{\kappa} \times \check{\kappa}$ tal que $R = \tau_{G_{\kappa+1}}$.

Razonamos en M: Sabemos que $\mathbb{P}_\kappa \subset V_\kappa \subset H_{\kappa^+}$. Podemos considerar que los elementos de $\mathbb{P}_{\kappa+1}$ son funciones cuya última componente es un buen

$\mathbb{P}_\kappa$-nombre para un subconjunto de $\check{\alpha} \times \check{2}$, con $\alpha < \kappa$ (pues los elementos de $\mathbb{Q}_\kappa$ son subconjuntos de $\alpha \times 2$). Esto implica que $|\mathbb{P}_{\kappa+1}| \leq \kappa$ y, más aún, que $\mathbb{P}_{\kappa+1} \in H(\kappa^+)$. A su vez esto implica que también $\tau \in H(\kappa^+)$.

Por consiguiente, $(\mathbb{P}_{\kappa+1}, \tau)$ puede codificarse mediante un conjunto $A \subset \kappa$ (un conjunto que codifique un subconjunto de $\kappa \times \kappa$ que a su vez sea una relación bien fundada cuyo colapso transitivo sea $\mathrm{ct}(\{(\mathbb{P}_{\kappa+1}, \tau)\})$).

Aplicamos ahora el teorema 2.5 en la versión descrita en la nota posterior, según la cual existe (siempre en M) una inmersión elemental $j : M_0 \longrightarrow N$ entre modelos transitivos de (un conjunto finito arbitrariamente grande de axiomas de) ZFC, con punto crítico κ y de modo que $\mathbb{P}_{\kappa+1}$, $\tau \in M_0$, $|M_0| = |N| = \kappa$, $M_0^{<\kappa} \subset M_0$, $N^{<\kappa} \subset N$.

En particular, $V_\kappa^M \subset M_0 \cap N$ y κ es inaccesible en ambos modelos.

Notemos que M_0 se construye exigiendo que $A \in M_0$, y entonces tenemos que $A = j(A) \cap \kappa \in N$, luego también $\mathbb{P}_{\kappa+1} \in N$. Es claro entonces que el filtro $G_{\kappa+1}$ es $\mathbb{P}_{\kappa+1}$-genérico sobre M_0 y N, e igualmente G_κ es $\mathbb{P}_\kappa$-genérico sobre M_0 y N.

Veamos que el argumento de 10.20 se puede adaptar para probar que

$$M[G_\kappa] \cap N[G_\kappa]^{<\kappa} \subset N[G_\kappa]. \tag{10.3}$$

La única variante se debe a que ahora M y N no tienen los mismos ordinales. Ahora bien, observamos que en M se cumple que $\mathrm{cf}\, \Omega^N \geq \kappa$, ya que si existiera $f \in M$ tal que $f : \alpha \longrightarrow \Omega^N$ cofinal, con $\alpha < \kappa$, entonces $f \in N$, pero en ZFC$-$AP se prueba que no es posible biyectar un ordinal con la clase de todos los ordinales, así que tenemos una contradicción.

Como $\mathbb{P}_\kappa$ conserva cofinalidades, esto sigue siendo cierto en $M[G_\kappa]$. Veamos ahora que el teorema 10.19 sigue siendo válido, de modo que basta demostrar que $M[G_\kappa] \cap (\Omega^N)^{<\kappa} \subset N[G_\kappa]$. En efecto, si $f \in M[G_\kappa] \cap N[G_\kappa]^{<\kappa}$ la aplicación $\delta \mapsto \mathrm{rang}\, f(\delta)$ está en $M[G_\kappa]$ y no puede ser cofinal en Ω^N, luego existe un $\lambda \in \Omega^N$ tal que $f \in (V_\lambda^N)^{<\kappa}$. A partir de aquí podemos tomar $g \in N$ tal que $g : V_\lambda^N \longrightarrow \mu$ biyectiva y completar el argumento.

Ahora el argumento de 10.20 vale sin cambio alguno para concluir la relación $M[G_\kappa] \cap (\Omega^N)^{<\kappa} \subset N[G_\kappa]$. De aquí deducimos a su vez que

$$M[G_{\kappa+1}] \cap N[G_{\kappa+1}]^{<\kappa} \subset N[G_{\kappa+1}]. \tag{10.4}$$

En efecto, nuevamente basta probar que $M[G_{\kappa+1}] \cap (\Omega^N)^{<\kappa} \subset N[G_{\kappa+1}]$, pero si $f \in M[G_{\kappa+1}] \cap (\Omega^N)^{<\kappa}$, entonces $f \in M[G_\kappa]$ porque $\mathbb{Q}_\kappa$ es κ-cerrado$^{M[G_\kappa]}$, luego $f \in N[G_\kappa] \subset N[G_{\kappa+1}]$.

En particular vemos que $\mathbb{Q}_\kappa \in N[G_\kappa]$ y $\mathrm{Fn}(\kappa, 2, \kappa)^{N[G_\kappa]} = \mathbb{Q}_\kappa$. Por lo tanto, podemos expresar

$$j(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \kappa+1}) = \{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq j(\kappa)+1} \in N.$$

En efecto, si en principio llamamos $j(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \kappa+1}) = \{\mathbb{P}'_\delta\}_{\delta \leq j(\kappa)+1}$, tenemos que $\mathbb{P}'_\delta = \mathbb{P}_\delta$ para $\delta < \kappa$, porque κ es el punto crítico de j y $\mathbb{P}_\delta \in V_\kappa^{M_0}$, de donde a su vez $\mathbb{P}'_\kappa = \mathbb{P}_\kappa$ porque ambos son el límite directo de los c.p.o.s precedentes, y veamos finalmente que también $\mathbb{P}'_{\kappa+1} = \mathbb{P}_{\kappa+1}$. Basta probar que

$$(\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\kappa} \Vdash \pi_\kappa = \mathrm{Fn}(\check{\kappa}, 2, \check{\kappa}))^N.$$

Ahora bien, si G es un filtro $\mathbb{P}_\kappa$-genérico sobre N, también lo es sobre M, porque si $D \in M$ es denso en $\mathbb{P}_\kappa$ y $A \subset D$ es una anticadena maximal, entonces $|A|^M < \kappa$, luego $A \in N$, luego $G \cap A \neq \varnothing$. Obviamente, $(\pi_\kappa)_G$ es el mismo en M y en N, pero en M es $\mathrm{Fn}(\kappa, 2, \kappa)^{M[G]} = \mathrm{Fn}(\kappa, 2, \kappa)^{N[G]}$, por (10.3).

El argumento siguiente se simplifica si tenemos en cuenta que en el argumento de la nota posterior al teorema 2.5 nuestro modelo M_0 se obtiene de forma que es elementalmente equivalente a un modelo V_λ^M, para un cierto $\lambda > \kappa$. El hecho de que la iteración $\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \kappa}$ factoriza en cualquier punto $\xi < \kappa$ con el segundo factor ξ-cerrado es verdadero en V_λ, luego en M_0, luego la imagen por j lo cumple en N.

Así pues, en N podemos factorizar $\mathbb{P}_{j(\kappa)} \cong \mathbb{P}_{\kappa+1} * \pi$, de modo que el c.p.o. $\mathbb{R}_{\kappa+1} = \pi_{G_{\kappa+1}}$ es κ-cerrado en $N[G_{\kappa+1}]$, luego en $M[G_{\kappa+1}]$ por (10.4).

Como claramente $|N[G_{\kappa+1}]|^{M[G_{\kappa+1}]} = \kappa$, podemos fijar una enumeración $\{D_\delta\}_{\delta<\kappa} \in M[G_{\kappa+1}]$ de los conjuntos densos en $\mathbb{R}_{\kappa+1}$ que están en $N[G_{\kappa+1}]$, y la κ-completitud de $\mathbb{R}_{\kappa+1}$ nos permite construir una sucesión decreciente $\{d_\delta\}_{\delta<\kappa} \in M[G_{\kappa+1}]$ de condiciones de $\mathbb{R}$ tales que $d_\delta \in D_\delta$. Entonces, el filtro $K \in M[G_{\kappa+1}]$ generado por dicha sucesión es $\mathbb{R}_{\kappa+1}$-genérico sobre $N[G_{\kappa+1}]$.

El filtro $G_{j(\kappa)} = G_{\kappa+1} * H \in M[G_{\kappa+1}]$ es $\mathbb{P}_{j(\kappa)}$-genérico sobre N y cumple $j[G_\kappa] \subset G_{j(\kappa)}$.

En efecto, toda condición $p \in G_\kappa$ es de la forma $p = i_{\delta\kappa}(p')$, con $\delta < \kappa$ y $p' \in G_\delta$, luego $j(p) = i_{\delta j(\kappa)}(p') \in G_{j(\kappa)}$. Por lo tanto j se extiende a una inmersión elemental $j : M_0[G_\kappa] \longrightarrow N[G_{j(\kappa)}]$ definible en $M[G_{\kappa+1}]$.

Se cumple que

$$M[G_{\kappa+1}] \cap N[G_{j(\kappa)}]^{<\kappa} \subset N[G_{j(\kappa)}]. \tag{10.5}$$

En efecto, como antes, basta probar que $M[G_{\kappa+1}] \cap (\Omega^N)^{<\kappa} \subset N[G_{j(\kappa)}]$, y esto es más débil que (10.4).

Sea $h = \bigcup H_\kappa$, de modo que $h : \kappa \longrightarrow 2$, $h \in N[G_{j(\kappa)}]$ y, más concretamente, $h \in \mathbb{Q}_{j(\kappa)} = \mathrm{Fn}(j(\kappa), 2, j(\kappa))^{N[G_{j(\kappa)}]}$. Como antes, tenemos que $|N[G_{j(\kappa)}]|^{M[G_{\kappa+1}]} = \kappa$, luego podemos construir un filtro $H_{j(\kappa)} \in M[G_{\kappa+1}]$ que sea $\mathbb{P}_{j(\kappa)}$-genérico sobre $N[G_{j(\kappa)}]$ y tal que $h \in H_{j(\kappa)}$. Entonces el filtro $G_{j(\kappa)+1} = G_{j(\kappa)} * H_{j(\kappa)}$ es $\mathbb{P}_{j(\kappa)+1}$-genérico sobre N.

Además, $j[H_\kappa] \subset H_{j(\kappa)}$, pues si $q \in H_\kappa$ entonces $h \leq q = j(q)$, luego $j(q) \in H_{j(\kappa)}$. Por lo tanto $j[G_{\kappa+1}] \subset G_{j(\kappa)+1}$ y esto permite extender j a una inmersión elemental

$$j : M_0[G_{\kappa+1}] \longrightarrow N[G_{j(\kappa)+1}]$$

definible en $M[G_{\kappa+1}]$.

Ahora la conclusión es inmediata: tenemos que $R = \tau_{G_{\kappa+1}} \in M_0[G_{\kappa+1}]$. Por simplificar la notación, llamemos $T = \kappa$ considerado como κ-árbol con la relación R y sea $j(T)$ el $j(\kappa)$-árbol en $N[G_{j(\kappa)+1}]$ determinado por el par $(j(\kappa), j(R))$.

Para cada $\delta < \kappa$, el conjunto T_δ formado por los elementos de T de altura $< \delta$ tiene cardinal $< \kappa$ en $M[G_{\kappa+1}]$, luego está acotado por un $\alpha < \kappa$, luego $j(T_\delta)$ está acotado también por α, luego $j(T_\delta) = T_\delta$, y así concluimos que los elementos de $j(T)$ de altura menor que κ son precisamente los de T. Por consiguiente, si $x \in j(T)$ es un elemento de altura κ, se cumple que el conjunto $\{\delta < \kappa \mid \delta\, j(R)\, x\} \in N \subset M[G_{\kappa+1}]$ es un camino en T. ■

10.6 Violación de la HCG en un cardinal medible

Hemos visto que si es consistente la existencia de un cardinal supercompacto, entonces es consistente que exista un cardinal supercompacto (y en particular medible) tal que $2^\kappa > \kappa$. Sabemos también que para probar la consistencia de que exista un cardinal medible en estas condiciones no basta con suponer la consistencia de que exista un cardinal medible, pero la hipótesis necesaria es mucho más débil que la existencia de un cardinal supercompacto. En esta sección demostraremos dicha consistencia a partir de la hipótesis más débil posible. Concretamente, vamos a demostrar el teorema siguiente:

Teorema 10.24 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC+HCG *y supongamos que existe una inmersión elemental $j : M \longrightarrow N$ (definible en M) con punto crítico κ tal que $M \cap N^\kappa \subset N$ y $(\kappa^{++})^M = (\kappa^{++})^N$. Entonces existe una extensión genérica de M en la que κ es medible y $2^\kappa = \kappa^{++}$.*

Puede probarse que si existe un cardinal medible tal que $2^\kappa > \kappa^{++}$ entonces existe un modelo interno que cumple las condiciones del enunciado, por lo que las hipótesis que estamos suponiendo son las mínimas imprescindibles, es decir, la consistencia de que exista un cardinal medible tal que $2^\kappa > \kappa^+$ es equivalente a la consistencia de las hipótesis del teorema. También puede probarse que dicha consistencia es equivalente a la consistencia de ZFC + HCG más la existencia de un cardinal medible tal que $o(\kappa) = \kappa^{++}$.

Por otro lado, las hipótesis del teorema se cumplen, por ejemplo, si κ es un cardinal $\kappa + 2$-fuerte en M.

En efecto, si κ es un cardinal $\kappa + 2$-fuerte, por 7.26 existe una inmersión elemental $j : V \longrightarrow N$ con punto crítico κ tal que $N^\kappa \subset N$ y $V_{\kappa+2} \subset N$. La condición $N^\kappa \subset N$ implica que $(\kappa^+)^N = \kappa^+$, pues si $\kappa \leq \alpha < \kappa^+$ entonces $|\alpha|^N = \kappa$. Para probar que $(\kappa^{++})^N = \kappa^{++}$ tomamos $\kappa^+ \leq \alpha < \kappa^{++}$ y probamos que $|\alpha|^N = \kappa^+$. Para ello usamos que en M existe $f : V_{\kappa+1} \longrightarrow \alpha$ biyectiva, luego podemos considerar dos buenos órdenes R, $S \subset V_{\kappa+1} \times V_{\kappa+1}$, uno de ordinal κ^+ y otro de ordinal α. Como R, $S \in V_{\kappa+2} \subset N$, concluimos que en N existen semejanzas de κ^+ en $V_{\kappa+1}$ y de $V_{\kappa+1}$ en α, luego ciertamente $|\alpha|^N = \kappa^+$.

Para probar 10.24 necesitamos un par de resultados previos. El primero es una observación elemental: Recordemos que $D \subset \mathbb{P}$ es abierto en $\mathbb{P}$ si cumple

$$\bigwedge p \in \mathbb{P} \bigwedge d \in D(p \leq d \rightarrow p \in D).$$

Entonces, un filtro G es $\mathbb{P}$ genérico sobre un modelo M si y sólo si[8] G corta a todo abierto denso en $\mathbb{P} \in M$. El segundo es el siguiente:

Teorema 10.25 *Sea κ un cardinal inaccesible, sea $\mu < \kappa$ otro cardinal y sea $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\kappa^{++}, 2, \kappa)$. Entonces, si D es un abierto denso en $\mathbb{P}$ y $E \subset D$ es el conjunto formado por las condiciones que siguen estando en D si se las modifica en cualquier conjunto de cardinal $\leq \mu$, se cumple que E también es denso en $\mathbb{P}$.*

DEMOSTRACIÓN: Tomamos $d \in D$, sea $A = \mathcal{D}d$ y sea $\{x_\delta\}_{\delta<\xi}$ una enumeración de todos los subconjuntos de A de cardinal $\leq \mu$. Como κ es inaccesible, se cumple que $\xi < \kappa$. Construimos como sigue una sucesión decreciente $\{d_\delta\}_{\delta<\xi}$ de elementos de D:

Supongamos definida $\{d_\delta\}_{\delta<\epsilon}$ y sea $d^*_\epsilon = \bigcup\limits_{\delta<\epsilon} d_\delta$ (si $\epsilon = 0$ tomamos $d^* = d$). Llamamos p_ϵ a la condición que resulta de modificar d^*_ϵ en x_ϵ. Notemos que como las condiciones toman valores en 2 sólo hay una modificación posible. Sea $d'_\epsilon \leq p_\epsilon$ tal que $d'_\epsilon \in D$ y sea d_ϵ la extensión de d^*_ϵ que coincide con d'_ϵ en $\mathcal{D}d'_\epsilon \setminus \mathcal{D}d^*_\epsilon$. Notemos que $d_\epsilon \in D$ porque D es abierto.

Finalmente sea $\bar{d} = \bigcup\limits_{\delta<\xi} d_\delta$, que es una condición de $\mathbb{P}$ porque κ es inaccesible y está en D porque D es abierto. Además $\bar{d} \leq d$. Esta condición tiene la propiedad de que si p resulta de modificar $\bar{d}$ en un subconjunto de A de cardinal $\leq \kappa$, entonces $p \in D$. En efecto, dicho subconjunto será un x_ϵ y basta probar que $p \leq d'_\epsilon$.

Si $\delta \in x_\epsilon$, entonces, como $\bar{d} \leq d_\epsilon \leq d^*_\epsilon$, tenemos que $\bar{d}(\delta) = d^*_\epsilon(\delta)$, luego también $p(\delta) = p_\epsilon(\delta) = d'_\epsilon(\delta)$.

Si, por el contrario, $\delta \in \mathcal{D}d'_\epsilon \setminus x_\epsilon$, o bien $\delta \in \mathcal{D}d^*_\epsilon$, en cuyo caso $d'_\epsilon(\delta) = p_\epsilon(\delta) = d^*_\epsilon(\delta) = \bar{d}(\delta) = p(\delta)$, o bien $\delta \in \mathcal{D}d'_\epsilon \setminus \mathcal{D}^* d_\epsilon$, en cuyo caso $p(\delta) = \bar{d}(\delta) = d_\epsilon(\delta) = d'_\epsilon(\delta)$, por definición de d_ϵ.

Ahora construimos una nueva sucesión decreciente $\{d_\delta\}_{\delta<\mu^+}$ mediante

$$d_0 = d, \quad d_{\delta+1} = \bar{d}_\delta, \quad d_\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} d_\delta.$$

Vamos a probar que $d' = d_{\mu^+} \in E$. En efecto, si p resulta de modificar d' en un conjunto x de cardinal $\leq \mu$, existirá un $\delta < \mu^+$ tal que $x \subset A = \mathcal{D}d_\delta$. Sea $A' = \mathcal{D}d_{\delta+1}$. Entonces $p|_{A'}$ resulta de modificar $d_{\delta+1} = \bar{d}_\delta$ en x, que es un subconjunto de A de cardinal $\leq \mu$, luego por construcción de $\bar{d}_\delta$ tenemos que $p|_{A'} \in D$, y como $p \leq p|_{A'}$, también $p \in D$ porque D es abierto.

Con esto hemos probado que todo elemento de D tiene una extensión en E, luego E es denso. ■

[8] Si $D \in M$ es denso en $\mathbb{P}$, entonces $D' = \{d' \in \mathbb{P} \mid \bigvee d \in D\ d' \leq d\}$ es abierto denso en $\mathbb{P}$, luego $G \cap D' \neq \varnothing$, luego $G \cap D \neq \varnothing$.

Demostración (de 10.24): De momento razonamos en $M = V$ y luego relativizaremos al modelo numerable M todo cuanto habremos dicho. Tenemos, pues, una inmersión elemental $j : V \longrightarrow N$ con punto crítico κ tal que $N^\kappa \subset N$ y $(\kappa^{++})^N = \kappa^{++}$. Observamos ahora que la inmersión elemental $j^* : V \longrightarrow \mathrm{Ult}_E(V)$ asociada a la κ^{++}-restricción E de j sigue cumpliendo todas las condiciones. En efecto, llamando $\mu = \kappa^{++}$, como $N^\kappa \subset N$, se cumple en particular que ${}^\kappa\mu \subset N$, y esto basta para que el argumento del teorema 7.26 sea aplicable, de modo que ${}^\kappa\,\mathrm{Ult}_E(V) \subset \mathrm{Ult}_E(V)$.

Por otra parte tenemos la inmersión elemental $k : \mathrm{Ult}_E(V) \longrightarrow N$ dada por el teorema 7.10, que fija a todos los ordinales $< \mu$. Por consiguiente, si $\kappa \leq \alpha < \kappa^+$, tenemos que $\alpha = k(\alpha)$ es biyectable con $\kappa = k(\kappa)$ en N, luego α es biyectable con κ en $\mathrm{Ult}_E(V)$ y, por consiguiente, $\kappa^+ = (\kappa^+)^{\mathrm{Ult}_E(V)}$, e igualmente se razona con κ^{++}.

Así pues, podemos suponer que la inmersión elemental dada es la asociada a un extensor E de soporte κ^{++}. Consideramos también la medida normal en κ determinada por j según 1.20, es decir, $D = \{X \in \mathcal{P}\kappa \mid \kappa \in j(X)\}$. Si $i : V \longrightarrow N' = \mathrm{Ult}_D(V)$ es la inmersión elemental asociada a la ultrapotencia correspondiente, dicho teorema nos da también una tercera inmersión elemental $k : N' \longrightarrow N$ tal que $j = i \circ k$. Recordemos que viene dada por $k([f]) = j(f)(\kappa)$.

A partir de aquí llamaremos $\xi = (\kappa^{++})^{N'}$. Observemos que

$$\xi = (\kappa^{++})^{N'} < i(\kappa) < \kappa^{++} = (\kappa^{++})^N = k((\kappa^{++})^{N'}) = k(\xi).$$

La primera desigualdad se debe a que $i(\kappa)$ es inaccesible$^{N'}$ y la segunda al teorema 5.4 h) junto con la HCG.

Vamos a probar que ξ es el punto crítico de k. Obviamente k fija a los ordinales $< \kappa$. También fija a κ porque $k(\kappa) = k([d]) = j(d)(\kappa) = \kappa$, donde d es la identidad en κ. Como el punto crítico de k tiene que ser un cardinal$^{N'}$, la única opción que falta por descartar es que sea $(\kappa^+)^{N'}$, pero

$$k((\kappa^+)^{N'}) = (\kappa^+)^N = \kappa^+ = (\kappa^+)^{N'},$$

donde las dos últimas igualdades se deben a que $N^\kappa \subset N$, $N'^\kappa \subset N'$.

Ahora consideramos la iteración de Easton $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \kappa+1}, \{\pi_\delta\}_{\delta\leq\kappa})$ determinada por que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash \pi_\alpha = \mathrm{Fn}(\check{\alpha}^{++}, 2, \check{\alpha})$$

si α es un cardinal inaccesible y $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash \pi_\alpha = \{\mathbb{1}_{\pi_\alpha}\}$ en caso contrario. Recordemos que el ser una iteración de Easton significa que los límites son directos en los cardinales inaccesibles e inversos en los demás ordinales límite.

Esta iteración es muy similar a la considerada en la sección anterior, y sus características básicas se demuestran con cambios mínimos en los argumentos, así que omitimos las pruebas. Conviene observar que ninguna prueba requiere que κ sea más que un cardinal de Mahlo:

a) $\bigwedge \delta \leq \kappa + 1\ |\mathbb{P}_\delta| < \aleph_{\delta+\omega}$.

b) Si $\kappa = \beta + \gamma$ y $\delta \leq \gamma$, entonces $\mathbb{P}_{\beta+\delta} \cong \mathbb{P}_\beta * \pi^\beta_\delta$, según el teorema 10.9.

c) Si ξ es un cardinal, $1\!\!1_{\mathbb{P}_\xi} \Vdash \pi^\xi_\delta$ es fuertemente $\check{\xi}$-cerrado.

d) $\mathbb{P}_\beta$ conserva cardinales y cofinalidades, y fuerza la HCG salvo en los cardinales inaccesibles $\xi \leq \beta$, para los cuales $1\!\!1_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash 2^{\check{\xi}} = \check{\xi}^{++}$.

e) $\mathbb{P}_\kappa$ cumple la c.c. κ.

f) La definición de $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta<\kappa}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\kappa})$ es absoluta para V_κ.

La propiedad siguiente es un caso particular de c) que enunciamos y demostramos junto con una variante que vamos a necesitar:

g) Si μ es un cardinal inaccesible y $\mu \leq \alpha \leq \kappa + 1$, entonces

$$1\!\!1_{\mathbb{P}_\mu} \Vdash \pi^\mu_\delta \text{ es fuertemente } \check{\mu}\text{-cerrado.}$$

Si $\mu \leq \nu < \xi \leq \kappa$, donde ξ es el menor cardinal inaccesible mayor que μ, entonces

$$1\!\!1_{\mathbb{P}_{\mu+1}} \Vdash \pi^{\mu+1}_\delta \text{ es fuertemente } \check{\nu}\text{-cerrado.}$$

Fijado un filtro $\mathbb{P}_\mu$-genérico (o $\mathbb{P}_{\mu+1}$-genérico) G sobre M y llamando $\mathbb{R} = (\pi^\mu_\delta)_G$ (o bien $(\pi^{\mu+1}_\delta)_G$) entonces, en $M[G]$ se cumple que $\mathbb{R}$ es el último término de una iteración $(\{\mathbb{R}_\delta\}_{\delta\leq\gamma}, \{\rho_\delta\}_{\delta<\gamma})$, donde $\rho_\delta = (\pi^*_{\mu\,(+1)+\delta})_G$, y es inmediato comprobar que $1\!\!1_{\mathbb{R}_\delta} \Vdash \rho_\delta$ es fuertemente $\check{\mu}$-cerrado (o $\check{\nu}$-cerrado, respectivamente).

Sólo falta comprobar que se cumple la hipótesis del teorema 10.7, es decir, que si $\operatorname{cf}\lambda \leq \mu$ (resp. ν) en $M[G]$, entonces $\mathbb{R}_\lambda$ es límite inverso en $M[G]$, lo cual equivale a que lo sea $\mathbb{P}_{\mu\ (+1)+\lambda}$ en M, o también a que $\mu + \lambda$ no sea inaccesible en M.

Si lo fuera, entonces $\mu < \mu + \lambda = \lambda$. Así pues, λ es inaccesible^M, luego, en el segundo caso, $\nu < \xi \leq \lambda$.

Por otra parte, $|\mathbb{P}_\mu| \leq \mu < \mu + \lambda = \lambda$, luego $\mathbb{P}_\mu$ conserva cardinales y cofinalidades $\geq \lambda$. En particular λ es un cardinal regular$^{M[G]}$, y esto nos lleva a contradicción: $\lambda = \operatorname{cf}^{M[G]} \lambda \leq \mu$ o bien $\lambda \leq \nu$.

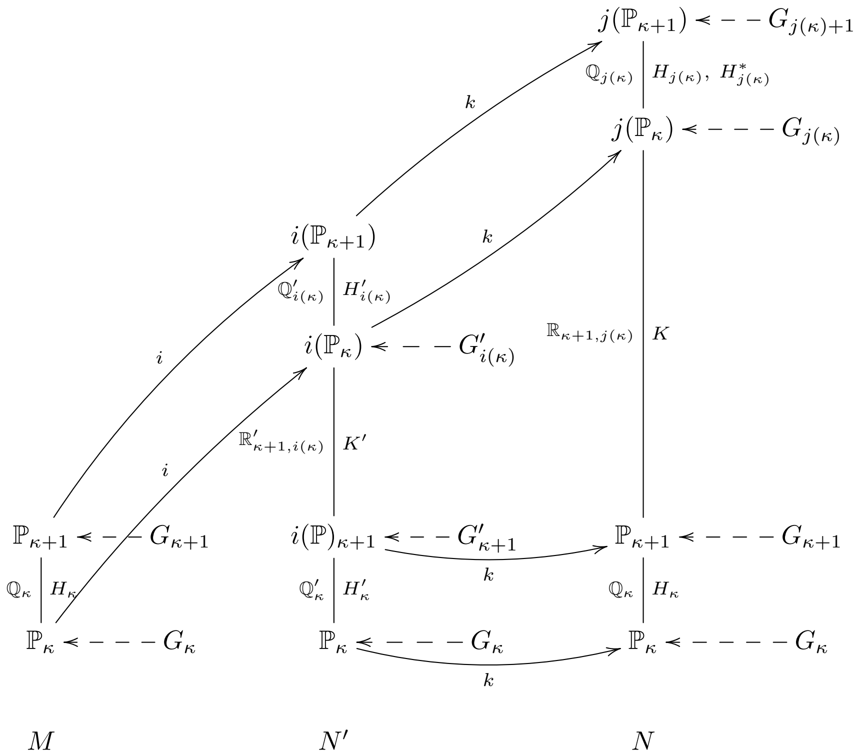
Para terminar destacamos dos casos particulares de d):

$$1\!\!1_{\mathbb{P}_\kappa} \Vdash \check{\kappa} \text{ es inaccesible} \wedge 2^{\check{\kappa}} = \check{\kappa}^+, \quad 1\!\!1_{\mathbb{P}_{\kappa+1}} \Vdash \check{\kappa} \text{ es inaccesible} \wedge 2^{\check{\kappa}} = \check{\kappa}^{++}.$$

A partir de aquí trabajaremos en todo momento en un modelo transitivo numerable M de ZFC + HCG y $G_{\kappa+1}$ será un filtro $\mathbb{P}_{\kappa+1}$-genérico sobre M. Llamemos

$$(\{j(\mathbb{P})_\delta\}_{\delta\leq j(\kappa)+1}, \{j(\pi)_\delta\}_{\delta\leq j(\kappa)}), \quad (\{i(\mathbb{P})_\delta\}_{\delta\leq i(\kappa)+1}, \{i(\pi)_\delta\}_{\delta\leq i(\kappa)}),$$

a las imágenes por j y por i (en N y N', respectivamente) de la iteración de c.p.o.s que hemos construido. El esquema siguiente resume el análisis que vamos a realizar de dichas iteraciones:



En primer lugar observamos que

$$\bigwedge \delta \leq \kappa \ j(\mathbb{P})_\delta = \mathbb{P}_\delta, \qquad \bigwedge \delta \leq \kappa \ i(\mathbb{P})_\delta = \mathbb{P}_\delta,$$

pues $V_\kappa^M = V_\kappa^N = V_\kappa^{N'}$, lo que nos da el resultado para $\delta < \kappa$ por la propiedad f) precedente relativizada a N y a N'. Como κ es inaccesible en N y en N', tenemos que $j(\mathbb{P})_\kappa$, $i(\mathbb{P})_\kappa$, son límites directos de los c.p.o.s precedentes en la iteración, luego también coinciden con $\mathbb{P}_\kappa$.

Esto está expresado en la línea inferior del diagrama. Observemos que $G_{\kappa+1}$ es también $\mathbb{P}_\kappa$-genérico sobre N' y sobre N. El teorema 10.20 nos da que

$$M[G_\kappa] \cap N[G_\kappa]^\kappa \subset N[G_\kappa], \qquad M[G_\kappa] \cap N'[G_\kappa]^\kappa \subset N'[G_\kappa],$$

pues κ es inaccesible en M, N' y N, luego $|\mathbb{P}_\kappa| \leq \kappa$ en los tres modelos.

Como consecuencia, teniendo en cuenta que

$$(\kappa^{++})^{M[G_\kappa]} = (\kappa^{++})^M = (\kappa^{++})^N = (\kappa^{++})^{N[G_\kappa]},$$

concluimos que

$$\mathbb{Q}_\kappa = \mathrm{Fn}(\kappa^{++}, 2, \kappa)^{M[G_\kappa]} = \mathrm{Fn}(\kappa^{++}, 2, \kappa)^{N[G_\kappa]},$$

pues si $h \in \mathrm{Fn}(\kappa^{++}, 2, \kappa)^{M[G_\kappa]}$ podemos tomar $f : \kappa \longrightarrow h$ suprayectiva, y entonces $f \in M[G_\kappa] \cap N[G_\kappa]^\kappa \subset N[G_\kappa]$, luego $h = f[\kappa] \in N[G_\kappa]$.

Esto implica a su vez que si $\pi \in N^{\mathbb{P}_\kappa}$ cumple $(\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\kappa} \Vdash \pi = \mathrm{Fn}(\check{\kappa}^{++}, 2, \check{\kappa}))^N$, lo mismo vale en M, luego podemos tomar $\pi_\kappa^M = \pi_\kappa^N$ y, por consiguiente, $j(\mathbb{P})_{\kappa+1} = \mathbb{P}_{\kappa+1}$ y $G_{\kappa+1}$ también es $\mathbb{P}_{\kappa+1}$-genérico sobre N.

Sabemos que $\mathbb{P}_\kappa$ cumple la c.c. κ en M, y $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\kappa} \Vdash \pi_\kappa$ cumple la c.c. κ^+, por lo que $\mathbb{P}_{\kappa+1}$ cumple la c.c. κ^+ en M. Esto nos permite aplicar el teorema 10.20 para concluir que

$$M[G_{\kappa+1}] \cap N[G_{\kappa+1}]^\kappa \subset N[G_{\kappa+1}]. \tag{10.6}$$

Pasamos ahora a N', donde la situación no es exactamente la misma porque $\xi = (\kappa^{++})^{N'}$ no coincide con $(\kappa^{++})^M$, pero aun así

$$\mathbb{Q}'_\kappa = \mathrm{Fn}(\xi, 2, \kappa)^{N'[G_\kappa]} = \mathrm{Fn}(\xi, 2, \kappa)^{M[G_\kappa]}$$

y la inclusión $\mathbb{Q}'_\kappa \subset \mathbb{Q}_\kappa$ es una inmersión completa en $M[G_\kappa]$. Por la propia definición de la iteración tenemos que $i(\mathbb{P})_{\kappa+1} \cong \mathbb{P}_\kappa * i(\pi_\kappa)$, donde $i(\pi_\kappa)_{G_\kappa} = \mathbb{Q}'_\kappa$.

La factorización $\mathbb{P}_{\kappa+1} \cong \mathbb{P}_\kappa * \pi_\kappa$ induce una factorización $G_{\kappa+1} = G_\kappa * H_\kappa$, donde H_κ es un filtro $\mathbb{Q}_\kappa$-genérico sobre $M[G_\kappa]$, lo que a su vez implica que $H'_\kappa = H_\kappa \cap \mathbb{Q}'_\kappa$ es un filtro $\mathbb{Q}'_\kappa$-genérico sobre $M[G_\kappa]$ y también sobre $N'[G_\kappa]$, luego $G'_{\kappa+1} = G_\kappa * H'_\kappa$ es un filtro $i(\mathbb{P})_{\kappa+1}$-genérico sobre M, luego sobre N'.

Notemos además que $H'_\kappa \in M[G_{\kappa+1}]$, luego $G'_{\kappa+1} \in M[G_{\kappa+1}]$.

Sigue siendo cierto en M que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\kappa} \Vdash i(\pi_\kappa)$ cumple la c.c. κ^+, por lo que $i(\mathbb{P})_{\kappa+1}$ cumple la c.c. κ^+ en M, y el teorema 10.20 nos da que

$$M[G'_{\kappa+1}] \cap N'[G'_{\kappa+1}]^\kappa \subset N'[G'_{\kappa+1}]. \tag{10.7}$$

Como κ es un cardinal de Mahlo en M, tenemos que $i(\kappa)$ lo es en N', y esto basta para que $i(\mathbb{P})$ cumpla hasta $i(\kappa) + 1$ todas las propiedades que hemos probado en general sobre la iteración. En particular $i(\kappa)$ es inaccesible en $N'[G'_{\kappa+1}]$.

Como el punto crítico de k es ξ y $\mathbb{P}_\kappa \subset V_\kappa$, es claro que $k[G_\kappa] = G_\kappa$, por lo que la inmersión elemental $k : N' \longrightarrow N$ se extiende por el teorema 10.12 a una inmersión elemental $k : N'[G_\kappa] \longrightarrow N[G_\kappa]$.

Si $q \in \mathbb{Q}'_\kappa = \mathrm{Fn}(\xi, 2, \kappa)^{N'}$, el dominio de q está contenido en un cierto $\alpha < \xi$, luego $k(q) = q$. Por consiguiente, $k[H'_\kappa] = H'_\kappa \subset H_\kappa$, luego por el mismo teorema podemos extender k hasta una inmersión elemental $k : N'[G'_{\kappa+1}] \longrightarrow N[G_{\kappa+1}]$ tal que $k(G'_{\kappa+1}) = G_{\kappa+1}$.

Con esto están justificadas las dos últimas filas del diagrama. Pasamos al nivel siguiente:

En N' factorizamos $i(\mathbb{P}_\kappa) \cong i(\mathbb{P})_{\kappa+1} * \pi$, de manera que $\mathbb{R}'_{\kappa+1,i(\kappa)} = \pi_{G'_{\kappa+1}}$ es el término $i(\kappa)$-ésimo de una iteración de Easton en $N'[G'_{\kappa+1}]$, digamos $(\{\mathbb{R}'_{\kappa+1,\delta}\}_{\delta<i(\kappa)}, \{\rho_\delta\}_{\delta<i(\kappa)}\})$, donde cada ρ_δ es un nombre para el c.p.o. trivial o bien para $\mathrm{Fn}(\delta^{++}, 2, \delta)$ si $\delta > \kappa$ es inaccesible$^{N'}$ (notemos que en tal caso $\delta = \kappa + 1 + \delta$).

En particular $\mathbb{R}'_{\kappa+1,i(\kappa)}$ es fuertemente ξ-cerrado (o también $(\xi^+)^{N'}$-cerrado) en $N'[G'_{\kappa+1}]$, por la propiedad g), porque ξ (o ξ^+) es menor que el mínimo cardinal inaccesible$^{N'}$ mayor que κ.

Observemos que $\mathbb{R}'_{\kappa+1,i(\kappa)} \in N'[G'_{\kappa+1}] \subset M[G'_{\kappa+1}]$. Veamos que $\mathbb{R}'_{\kappa+1,i(\kappa)}$ es $(\kappa^+)^M$-cerrado en $M[G'_{\kappa+1}]$. Consideremos una sucesión $\{r_\alpha\}_{\alpha<\eta} \in M[G'_{\kappa+1}]$ decreciente en $\mathbb{R}'_{\kappa+1,i(\kappa)}$, con $\eta < (\kappa^+)^M$. Usando la relación (10.7) concluimos que $\{r_\alpha\}_{\alpha<\eta} \in N'[G'_{\kappa+1}]$. Por otra parte,

$$\eta < (\kappa^+)^M = (\kappa^+)^{N'} < (\kappa^{++})^{N'} = \xi,$$

luego podemos usar que $\mathbb{R}'_{\kappa+1,i(\kappa)}$ es ξ-cerrado en $N'[G'_{\kappa+1}]$ para concluir que $\{r_\alpha\}_{\alpha<\eta}$ tiene una cota inferior, como había que probar.

Al igual que hemos razonado con la iteración $\mathbb{P}$, es fácil ver que si $\delta < i(\kappa)$ entonces $|\mathbb{R}'_{\kappa+1,\delta}|^{N'[G'_{\kappa+1}]} < i(\kappa)$. En particular $\mathbb{R}'_{\kappa+1,\delta}$ cumple la c.c. $i(\kappa)$ en $N'[G'_{\kappa+1}]$ y, como $\mathbb{R}'_{\kappa+1,i(\kappa)}$ es límite directo, también cumple la c.c. $i(\kappa)$.

Así pues, toda anticadena en $\mathbb{R}'_{\kappa+1,i(\kappa)}$ (siempre en $N'[G'_{\kappa+1}]$) tiene cardinal $< i(\kappa)$, luego es de la forma $i_{\delta,i(\kappa)}[A]$, donde A es una anticadena en $\mathbb{R}'_{\kappa+1,\delta}$. El número de tales anticadenas es a lo sumo $|\mathbb{R}'_{\kappa+1,\delta}|^+ < i(\kappa)$. En definitiva, si llamamos $\mathcal{A}$ al conjunto de todas las anticadenas maximales en $\mathbb{R}'_{\kappa+1,i(\kappa)}$ en $N'[G'_{\kappa+1}]$, se cumple que $|\mathcal{A}|^{N'[G'_{\kappa+1}]} \leq i(\kappa) < (\kappa^{++})^M$. Esto nos permite enumerar $\mathcal{A} = \{A_\epsilon\}_{\epsilon<\kappa^+}$ en $M[G'_{\kappa+1}]$.

Ahora es fácil construir una sucesión decreciente $\{r_\epsilon\}_{\epsilon<\kappa^+} \in M[G'_{\kappa+1}]$ en $\mathbb{R}_{\kappa+1,i(\kappa)}$ tal que $\bigwedge \epsilon < \kappa^+ \bigvee a \in A_\epsilon \; r_\epsilon \leq a$. En efecto, supuesta construida $\{r_\epsilon\}_{\epsilon<\eta}$, con $\eta < \kappa^+$, si $\eta = \epsilon + 1$ basta tener en cuenta que r_ϵ tiene que ser compatible con un elemento de $a \in A_{\epsilon+1}$, luego basta tomar $r_{\epsilon+1} \leq a$ y $r_{\epsilon+1} \leq r_\epsilon$. Si η es un límite usamos que $\mathbb{R}'_{\kappa+1,i(\kappa)}$ es κ^+-cerrado en $M[G'_{\kappa+1}]$ para obtener una condición r' que extienda a todos los r_ϵ y luego tomamos r_η que extienda a r' y a un elemento de A_η.

Sea

$$K' = \{r \in \mathbb{R}'_{\kappa+1,i(\kappa)} \mid \bigvee \epsilon \in \kappa^+ \; r \leq r_\epsilon\} \in M[G'_{\kappa+1}] \subset M[G_{\kappa+1}].$$

el filtro generado por la sucesión que acabamos de construir. Veamos que es $\mathbb{R}'_{\kappa+1,i(\kappa)}$-genérico sobre $N'[G'_{\kappa+1}]$ (toda la construcción que estamos realizando es para justificar que lo podemos tomar en $M[G'_{\kappa+1}]$).

Si $D \in N'[G'_{\kappa+1}]$ es denso en $\mathbb{R}'_{\kappa+1,i(\kappa)}$, entonces una anticadena maximal $A \in N'[G'_{\kappa+1}]$ en el conjunto $D^* = \{d \in \mathbb{R}'_{\kappa+1,i(\kappa)} \mid \bigvee d' \in D \; d \leq d'\}$ es de hecho una anticadena maximal en $\mathbb{R}'_{\kappa+1,i(\kappa)}$, pues si existiera $r \in \mathbb{R}'_{\kappa+1,i(\kappa)}$

incompatible con todos los elementos de A, entonces podemos tomar $d \in D$ tal que $d \leq r$, y así $d \in D^*$ y $A \cup \{d\}$ es una anticadena en D^*, en contradicción con la maximalidad de A. Por consiguiente $A = A_\epsilon$, para cierto $\epsilon < \kappa^+$, luego existe un $a \in A$ tal que $r_\epsilon \leq a$, luego existe un $d \in D$ tal que $r_\epsilon \leq a \leq d$, luego $d \in K' \cap D$.

Así podemos llamar $G'_{i(\kappa)} = G_{\kappa+1} * K' = G_\kappa * H'_\kappa * K'$, que es un filtro $i(\mathbb{P}_\kappa)$-genérico sobre N'. Observemos que toda condición $p \in \mathbb{P}_\kappa$ es de la forma $i_{\delta\kappa}(p')$, con $p' \in \mathbb{P}_\delta$, por lo que $i(p) = i_{\delta i(\kappa)}(p')$, por lo que $i[G_\kappa] \subset G'_{i(\kappa)}$ y podemos extender i a una inmersión elemental $i : M[G_\kappa] \longrightarrow N'[G'_{i(\kappa)}]$. Es importante que G_κ, H'_κ, $K' \in M[G'_{\kappa+1}]$, luego $G'_{i(\kappa)} \in M[G'_{\kappa+1}] \subset M[G_{\kappa+1}]$.

Ahora pasamos a N: Aplicando la inmersión k a $i(\mathbb{P}_\kappa) \cong i(\mathbb{P})_{\kappa+1} * \pi$ obtenemos que $j(\mathbb{P}_\kappa) \cong \mathbb{P}_{\kappa+1} * k(\pi)$, y $k(\mathbb{R}'_{\kappa+1,i(\kappa)}) = k(\pi_{G'_{\kappa+1}}) = k(\pi)_{G_{\kappa+1}}$. Definimos $\mathbb{R}_{\kappa+1,j(\kappa)} = k(\pi)_{G_{\kappa+1}} = k(\mathbb{R}'_{\kappa+1,i(\kappa)}) \in N[G_{\kappa+1}] \subset M[G_{\kappa+1}]$.

Vamos a probar que el filtro generado por $k[K']$, es decir,

$$K = \{r \in \mathbb{R}_{\kappa+1,j(\kappa)} \mid \bigvee r' \in K' \ k(r') \leq r\} \in M[G_{\kappa+1}]$$

es $\mathbb{R}_{\kappa+1,j(\kappa)}$-genérico sobre $N[G_{\kappa+1}]$, y obviamente $k[K'] \subset K$.

Tomamos, pues, un abierto denso en $\mathbb{R}_{\kappa+1,j(\kappa)}$ tal que $D \in N[G_{\kappa+1}]$. Entonces $D = \tau_{G_{\kappa+1}}$, con $\tau \in N^{\mathbb{P}_{\kappa+1}}$, y podemos suponer que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\kappa+1}} \Vdash \tau$ es abierto denso en $k(\pi)$.

Como $\tau \in N$, tenemos que $\tau = [f, a] = j(f)(a)$, donde $a < (\kappa^{++})^M$ y $f \in M \cap M^\kappa$. Equivalentemente, $\tau = k(i(f))(a)$, o también $\tau = k(h)(a)$, donde tomamos $h = i(f)|_\xi \in N' \cap N'^\xi$ y tenemos en cuenta que $k(\xi) = (\kappa^{++})^M$.

Si llamamos $h^* : \xi \longrightarrow N'$ a la aplicación dada por

$$h^*(\alpha) = \begin{cases} h(\alpha) & \text{si } h(\alpha) \in N'^{i(\mathbb{P})_{\kappa+1}} \wedge \mathbb{1}_{i(\mathbb{P})_{\kappa+1}} \Vdash h(\alpha) \text{ es abierto denso en } \pi, \\ \pi & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

tenemos que

$$\bigwedge \alpha < \xi (h(\alpha) \in N'^{i(\mathbb{P})_{\kappa+1}} \wedge \mathbb{1} \Vdash h(\alpha) \text{ es abierto denso en } \pi \rightarrow h^*(\alpha) = h(\alpha))$$

luego aplicando k resulta que si $\alpha < k(\xi)$, $k(h)(\alpha) \in N^{\mathbb{P}_{\kappa+1}}$ y $\mathbb{1} \Vdash k(h)(\alpha)$ es abierto denso en $k(\pi)$, entonces $j(h^*)(\alpha) = j(h)(\alpha)$. En particular resulta que $\tau = j(h^*)(a)$. Equivalentemente, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\bigwedge \alpha < \xi \ h(\alpha) \in N'^{i(\mathbb{P})_{\kappa+1}} \wedge \mathbb{1} \Vdash h(\alpha)$ es abierto denso en π.

Si llamamos $D_\alpha = h(\alpha)_{G'_{\kappa+1}}$, tenemos que $\{D_\alpha\}_{\alpha<\xi}$ es una familia de abiertos densos en $\mathbb{R}'_{\kappa+1,i(\kappa)}$, que es ξ^+-cerrado en $N'[G'_{\kappa+1}]$. Por lo tanto, por [PC 5.52] $E = \bigcap\limits_{\alpha<\xi} D_\alpha$ es abierto denso en $\mathbb{R}'_{\kappa+1,i(\kappa)}$, luego existe $r' \in E \cap K'$.

Tenemos entonces que $\bigwedge \alpha < \xi \ r' \in h(\alpha)_{G'_{\kappa+1}}$, luego aplicando k resulta que $\bigwedge \alpha < k(\xi) \ k(r') \in k(h)(\alpha)_{G_{\kappa+1}}$, luego en particular

$$k(r') \in k(h)(a)_{G_{\kappa+1}} = \tau_{G_{\kappa+1}} = D,$$

luego $k(r') \in K \cap D$.

Así podemos llamar $G_{j(\kappa)} = G_{\kappa+1} * K \in M[G_{\kappa+1}]$, que es un filtro $j(\mathbb{P}_\kappa)$-genérico sobre N tal que $j[G_\kappa] \subset G_{j(\kappa)}$. Además $k[G'_{i(\kappa)}] \subset G_{j(\kappa)}$, luego podemos extender las inmersiones elementales que estamos considerando hasta

$$\begin{tikzcd} M[G_\kappa] \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "i"'] & N[G_{j(\kappa)}] \\ & N'[G'_{i(\kappa)}] \arrow[u, "k"'] \end{tikzcd}$$

de modo que el diagrama es conmutativo.

Pasamos ahora a la parte más delicada de la prueba, que es justificar que j puede extenderse hasta $M[G_{\kappa+1}]$.

Recordemos que $\mathbb{Q}_\kappa \in M[G_\kappa]$, H_κ es un filtro $\mathbb{Q}_\kappa$-genérico sobre $M[G_\kappa]$ y que $G_{\kappa+1} = G_\kappa * H_\kappa$. Consideramos $\mathbb{Q}'_{i(\kappa)} = i(\mathbb{Q}_\kappa) = \mathrm{Fn}(i(\kappa)^{++}, 2, i(\kappa))^{N'[G'_{i(\kappa)}]}$. Así $i(\mathbb{P}_{\kappa+1}) \cong i(\mathbb{P}_\kappa) * i(\pi_\kappa)$ con $i(\pi_\kappa)_{G'_{i(\kappa)}} = \mathbb{Q}'_{i(\kappa)}$. Por otra parte, consideremos

$$\mathbb{Q}_{j(\kappa)} = j(\mathbb{Q}_\kappa) = k(\mathbb{Q}'_{i(\kappa)}) = j(\pi_\kappa)_{G_{j(\kappa)}} = \mathrm{Fn}(j(\kappa)^{++}, 2, j(\kappa))^{N[G_{j(\kappa)}]}.$$

Como $G'_{i(\kappa)}, G_{j(\kappa)} \in M[G_{\kappa+1}]$, también $\mathbb{Q}'_{i(\kappa)} = i(\pi_\kappa)_{G'_{i(\kappa)}} \in M[G_{\kappa+1}]$ y $\mathbb{Q}_{j(\kappa)} = j(\pi_\kappa)_{G_{j(\kappa)}} \in M[G_{\kappa+1}]$. Sea $H'_{i(\kappa)}$ un filtro $\mathbb{Q}'_{i(\kappa)}$-genérico sobre $M[G_{\kappa+1}]$, luego en particular sobre $N'[G'_{i(\kappa)}]$. Veamos que el filtro

$$H_{j(\kappa)} = \{q \in \mathbb{Q}_{j(\kappa)} \mid \bigvee q' \in H'_{i(\kappa)}\ k(q') \leq q\} \in M[G_{\kappa+1}][H'_{i(\kappa)}]$$

es $\mathbb{Q}_{j(\kappa)}$-genérico sobre $N[G_{j(\kappa)}]$. El argumento es el mismo que hemos empleado para K. Tomamos $D = \tau_{G_{j(\kappa)}} \in N[G_{j(\kappa)}]$ abierto denso en $\mathbb{Q}_{j(\kappa)}$, donde podemos suponer que $\mathbb{1}_{j(\mathbb{P}_\kappa)} \Vdash \tau$ es abierto denso en $j(\pi_\kappa)$. A su vez $\tau = k(h)(a)$, con $h \in N'^{\xi} \cap N'$ y $a < (\kappa^{++})^M$. También podemos suponer que

$$\bigwedge \alpha < \xi\ h(\alpha) \in N'^{i(\mathbb{P}_\kappa)} \wedge \mathbb{1}_{i(\mathbb{P}_\kappa)} \Vdash h(\alpha) \text{ es abierto denso en } i(\pi_\kappa).$$

Así podemos considerar $D_\alpha = h(\alpha)_{G'_{i(\kappa)}}$, que es abierto denso en $\mathbb{Q}'_{i(\kappa)}$ y además $\{D_\alpha\}_{\alpha<\xi} \in N'[G'_{i(\kappa)}]$. Pero $\mathbb{Q}'_{i(\kappa)}$ es $i(\kappa)$-completo en $N'[G'_{i(\kappa)}]$, luego, de nuevo por [PC 5.52], $E = \bigcap\limits_{\alpha<\xi} D_\alpha$ es abierto denso en $\mathbb{Q}'_{i(\kappa)}$, luego podemos tomar $q' \in H'_{i(\kappa)} \cap E$, y entonces, como antes, $k(q') \in H_{j(\kappa)} \cap D$.

Claramente $k[H'_{i(\kappa)}] \subset H_{j(\kappa)}$, pero en principio, como la elección de $H'_{i(\kappa)}$ ha sido arbitraria, nada nos asegura que $i[H_\kappa] \subset H'_{i(\kappa)}$ ni, por lo tanto, que $j[H_\kappa] \subset H_{j(\kappa)}$.

Para arreglar esto consideramos $Q = \bigcup j[H_\kappa]$, que es una función parcial $j[(\kappa^{++})^M] \longrightarrow 2$. Observemos que $Q \in M[G_{\kappa+1}]$ y recordemos que también $\mathbb{Q}_{j(\kappa)} \in M[G_{\kappa+1}]$.

Tomemos una condición $p \in \mathbb{Q}_{j(\kappa)}$, que podemos expresar como $p = \tau_{G_{j(\kappa)}}$, con $\tau \in N^{\mathbb{P}_{j(\kappa)}}$. Podemos suponer que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{j(\kappa)}} \Vdash \tau \in j(\pi_\kappa)$.

Entonces $\tau = [f, a] = j(h)(a)$, donde $h \in M \cap M^\kappa$ y $a < (\kappa^{++})^M$. Como antes, podemos suponer que, para todo $\alpha < \kappa$, $h(\alpha) \in M^{\mathbb{P}_\kappa}$ y $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\kappa} \Vdash h(\alpha) \in \pi_\kappa$.

Llamamos $f \in M[G_\kappa]$ a la función dada por $f(\alpha) = h(\alpha)_{G_\kappa}$, de modo que $f : \kappa \longrightarrow \mathbb{Q}_\kappa$ y $j(f)(a) = j(h)(a)_{G_{j(\kappa)}} = \tau_{G_{j(\kappa)}} = p$.

Si $\alpha \in \mathcal{D}p \cap \mathcal{D}Q$, entonces $\alpha = j(\delta)$, con $\delta < (\kappa^{++})^M$, y, tomando $\beta = a$, se cumple que $\bigvee \beta \in \mathcal{D}j(f)\ j(\delta) \in \mathcal{D}j(f)(\beta)$. Como j es elemental tenemos también que $\bigvee \beta \in \mathcal{D}f\ \delta \in \mathcal{D}f(\beta)$. Por lo tanto, si llamamos $A = \bigcup\limits_{\beta<\kappa} \mathcal{D}f(\beta)$, tenemos $\mathcal{D}p \cap \mathcal{D}Q \subset j[A] = B$.

Como $|\mathcal{D}f(\beta)|^{M[G_\kappa]} < \kappa$, concluimos que A tiene cardinal $\leq \kappa$ en $M[G_\kappa]$, luego en $M[G_{\kappa+1}]$. Como la restricción de j a una cota superior de A está en M, también $B \in M[G_{\kappa+1}]$ y tiene cardinal $\leq \kappa$, luego por (10.6) $B \in N[G_{\kappa+1}]$.
Igualmente, $Q|_B \in M[G_{\kappa+1}]$ tiene cardinal $\leq \kappa$ en este modelo, luego de nuevo por (10.6) tenemos que $Q|_B \in N[G_{\kappa+1}] \subset N[G_{j(\kappa)}]$.

Llamemos p^* a la condición que resulta de modificar p en los puntos de $\mathcal{D}p \cap \mathcal{D}(Q|_B)$ para que p^* y $Q|_B$ coincidan en su dominio común (con lo que, de hecho, p^* y Q coinciden en su dominio común). El hecho de que podamos definir p^* en $N[G_{j(\kappa)}]$ prueba que $p^* \in N[G_{j(\kappa)}]$ y, por consiguiente, $p^* \in \mathbb{Q}_{j(\kappa)}$, pues p^* tiene el mismo cardinal que p en $N[G_{j(\kappa)}]$. Pero, por otra parte, hemos visto que p^* también es definible en $M[G_{\kappa+1}]$.

Sabemos que $H_{j(\kappa)} \in M[G_{\kappa+1}][H'_{i(\kappa)}]$, luego en este modelo podemos definir $H^*_{j(\kappa)} = \{p^* \mid p \in H_{j(\kappa)}\}$. Es inmediato que se trata de un filtro en $\mathbb{Q}_{j(\kappa)}$, y el teorema 10.25 implica que es $\mathbb{Q}_{j(\kappa)}$-genérico sobre $N[G_{j(\kappa)}]$. En efecto, si $D \in N[G_{j(\kappa)}]$ es un abierto denso en $\mathbb{Q}_{j(\kappa)}$, el conjunto $E \in N[G_{j(\kappa)}]$ formado por las condiciones de D que siguen estando en D cuando se modifican en un conjunto de cardinal $\leq \kappa$ es también denso, luego existe $p \in H_{j(\kappa)} \cap E$, luego $p^* \in H^*_{j(\kappa)} \cap D$.
Se cumple que $j[H_\kappa] \subset H^*_{j(\kappa)}$, pues si $p \in H_\kappa$, entonces $j(p) \subset Q$, luego $j(p)$ es compatible con todas las condiciones de $H^*_{j(\kappa)}$, luego $j(p) \in H^*_{j(\kappa)}$ (por el teorema [PC 4.18]).
Así, $G_{j(\kappa)+1} = G_{j(\kappa)} * H^*_{j(\kappa)} \in M[G_{\kappa+1}][H'_{i(\kappa)}]$ es un filtro $j(\mathbb{P}_{\kappa+1})$-genérico sobre N tal que $j[G_{\kappa+1}] \subset G_{j(\kappa)+1}$, luego j se extiende a una inmersión elemental

$$j : M[G_{\kappa+1}] \longrightarrow N[G_{j(\kappa)+1}].$$

Sin embargo, esto no implica que κ sea medible en $M[G_{\kappa+1}]$, porque no es necesariamente cierto que $G_{j(\kappa)+1} \in M[G_{\kappa+1}]$, por lo que j no es necesariamente definible en $M[G_{\kappa+1}]$.

Llamemos $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}'_{i(\kappa)}$, que a partir de ahora consideramos como c.p.o. en M, y sea $H = H'_{i(\kappa)}$. En estos términos sabemos que $G_{j(\kappa)+1} \in M[G_{\kappa+1}][H]$. Por lo tanto, $j(\mathbb{Q}) \in N[G_{j(\kappa)+1}] \subset M[G_{\kappa+1}][H]$. Sea

$$H' = \{q' \in j(\mathbb{Q}) \mid \bigvee q \in H\ j(q) \leq q'\} \in M[G_{\kappa+1} * H].$$

Claramente H' es un filtro en $j(\mathbb{Q})$ tal que $j[H] \subset H'$. Si probamos que es $j(\mathbb{Q})$-genérico sobre $N[G_{j(\kappa)+1}]$, tendremos que j se extenderá a una inmersión elemental

$$j : M[G_{\kappa+1} * H] \longrightarrow N[G_{j(\kappa)+1} * H']$$

y $G_{j(\kappa)+1} * H' \in M[G_{\kappa+1} * H]$, por lo que la extensión será definible en el modelo $M[G_{\kappa+1} * H]$, luego κ será medible en él.[9]

El mismo argumento empleado con $\mathbb{R}'_{\kappa+1,i(\kappa)}$ nos da que $\mathbb{Q}$ es $(\kappa^+)^M$ cerrado en $M[G'_{\kappa+1}]$. Ahora observamos que

$$\mathbb{Q}_\kappa = \mathrm{Fn}(\kappa^{++}, 2, \kappa)^{M[G_\kappa]}, \quad \mathbb{Q}'_\kappa = \mathrm{Fn}(\xi, 2, \kappa)^{M[G_\kappa]},$$

y claramente

$$\mathbb{Q}_\kappa \cong \mathbb{Q}'_\kappa \times \mathrm{Fn}(\kappa^{++} \setminus \xi, 2, \kappa)) \cong \mathbb{Q}'_\kappa \times \mathbb{Q}_\kappa.$$

Por lo tanto, $M[G_{\kappa+1}]$ se obtiene de $M[G'_{\kappa+1}]$ mediante una extensión por $\mathbb{Q}_\kappa$, el cual cumple la c.c. κ^+ en $M[G_\kappa]$, y también en $M[G'_{\kappa+1}]$ por [PC 8.42]. Ahora aplicamos el teorema [PC 5.56], que nos da que $\mathbb{Q}$ es κ-distributivo en $M[G_{\kappa+1}]$.

Esto nos basta para llevar adelante el argumento que hemos empleado ya varias veces: Fijamos un abierto denso $D = \tau_{G_{j(\kappa)+1}} \in N[G_{j(\kappa)+1}]$ en $j(\mathbb{Q})$, de modo que

$$\mathbb{1}_{j(\mathbb{P}_{\kappa+1})} \Vdash \tau \text{ es abierto denso en } j(\check{\mathbb{Q}}).$$

A su vez, $\tau = [h, a] = j(h)(a)$, con $h \in M^\kappa \cap M$ y $a < (\kappa^{++})^M$, y podemos suponer que $\bigwedge \alpha < \kappa\ h(\alpha) \in M^{\mathbb{P}_{\kappa+1}} \wedge \mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\kappa+1}} \Vdash h(\alpha)$ es abierto denso en $\check{\mathbb{Q}}$.

Llamamos $D_\alpha = h(\alpha)_{G_{\kappa+1}}$, de modo que $\{D_\alpha\}_{\alpha<\kappa} \in M[G_{\kappa+1}]$ es una familia de abiertos densos en $\mathbb{Q}$. Tomamos $q \in H \cap \bigcap\limits_{\alpha<\kappa} D_\alpha$, con lo que

$$\bigwedge \alpha < j(\kappa)\ j(q) \in j(h)_{G_{j(\kappa)+1}},$$

luego en particular $j(q) \in j(h)(a)_{G_{j(\kappa)+1}} = D$ y $j(q) \in H'$.

Así pues, κ es medible en $M[G_{\kappa+1} * H]$ y sólo falta una última comprobación, y es que en este modelo se sigue cumpliendo que $2^\kappa = \kappa^{++}$.

Para ello basta demostrar que $\mathbb{Q}$ cumple la c.c. κ^{++} en $M[G_{\kappa+1}]$, pues entonces conservará κ^+ y κ^{++} y obviamente en la extensión $2^\kappa \geq \kappa^{++}$. La otra desigualdad se sigue de que, como ya hemos visto, $\mathbb{Q}$ es κ-distributivo en $M[G_{\kappa+1}]$, luego $\mathcal{P}\kappa$ es el mismo en $M[G_{\kappa+1}]$ y en la extensión genérica.

En $M[G_\kappa]$, consideramos $\bar{\mathbb{Q}} = \prod\limits_{\alpha<\kappa} \mathbb{Q}_\kappa$, con el orden definido componente a componente. La aplicación $\phi : \bar{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Fn}(\kappa \times \kappa^{++}, 2, \kappa^+)$ dada por

$$\phi(f)(\alpha, \beta) = f_\alpha(\beta)$$

[9]Lo más sencillo es observar que la restricción de j a $\mathcal{P}\kappa$ es definible, lo cual basta para que la medida normal en κ asociada a j sea definible.

es claramente una inmersión y $\mathrm{Fn}(\kappa \times \kappa^{++}, 2, \kappa^+)$ cumple la c.c. κ^{++}, luego lo mismo vale para $\bar{\mathbb{Q}}$. Por otra parte, es claro que $\bar{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q}_\kappa \times \bar{\mathbb{Q}}$, luego [PC 8.42] implica que $\bar{\mathbb{Q}}$ cumple la c.c. κ^{++} en $M[G_{\kappa+1}]$.

Ahora observamos que si $q \in \mathbb{Q} = i(\mathbb{Q}_\kappa) \subset N'$, entonces $f = \tau_{G'_{i(\kappa)}}$, y podemos suponer que $\mathbb{1}_{i(\mathbb{P}_\kappa)} \Vdash \tau \in i(\pi_\kappa)$. A su vez $\tau = [h] = i(h)(\kappa)$, para cierta función $h \in M^\kappa \cap M$, y podemos suponer que

$$\bigwedge \alpha < \kappa \; h(\alpha) \in M^{\mathbb{P}_\kappa} \wedge \mathbb{1}_{\mathbb{P}_\kappa} \Vdash h(\alpha) \in \pi_\kappa.$$

Por lo tanto, en $M[G_\kappa]$ tenemos la función $f \in \bar{\mathbb{Q}}$ dada por $f(\alpha) = h(\alpha)_{G_\kappa}$. Así $i(f)(\kappa) = i(h)(\kappa)_{G'_{i(\kappa)}} = \tau_{G'_{i(\kappa)}} = q$.

Si $A \in M[G_{\kappa+1}]$ es una anticadena en $\mathbb{Q}$, para cada $q \in A$ podemos elegir (en $M[G_{\kappa+1}]$) una $f_q \in \bar{\mathbb{Q}}$ tal que $i(f_q)(\kappa) = q$, pero las f_q tienen que ser incompatibles dos a dos, pues si f_q y $f_{q'}$ son compatibles, entonces $\bigwedge \alpha < \kappa \; \neg f_q(\alpha) \perp f_q(\alpha)$, luego $\bigwedge \alpha < i(\kappa) \; \neg i(f_q)(\alpha) \perp i(f_{q'})(\alpha)$, luego $\neg i(f_q)(\kappa) \perp i(f_{q'})(\kappa)$, luego $\neg q \perp q'$. Esto implica que $(|A| < \kappa^{++})^{M[G_{\kappa+1}]}$. ■

Capítulo XI

La independencia de la HCS

Las pruebas de consistencia que hemos visto en el capítulo anterior resuelven problemas planteados por la propia teoría de los cardinales grandes (como si es consistente que un cardinal medible cumpla $2^\kappa > \kappa^+$, etc.). Sin embargo, en muchas ocasiones la hipótesis de que cierto cardinal grande es consistente es necesaria para probar la consistencia de una afirmación que en principio no tiene nada que ver con cardinales grandes. Ya hemos visto un caso en la sección 12.1 de [PC]: para probar la consistencia de que no existan $\aleph_2$-árboles de Aronszajn es necesario suponer la consistencia de que exista un cardinal débilmente compacto. Aquí vamos a ver otro ejemplo de este tipo. Vamos a probar la consistencia de la negación de la hipótesis de los cardinales singulares.

El teorema de Easton [PC 5.39] muestra que a partir de la mera consistencia de ZFC puede probarse la consistencia de cualquier alternativa razonable a la HCG sobre los cardinales regulares, pero en los modelos construidos en la demostración se cumple siempre la HCS, lo que lleva a plantearse si ésta no será un teorema de ZFC. Como ya hemos indicado, la respuesta es negativa y vamos a probarlo aquí, pero la prueba requiere necesariamente suponer la consistencia de cierto cardinal grande. Puede demostrarse que la hipótesis exacta que hace falta es la misma que hemos empleado en el capítulo anterior para probar la consistencia de que un cardinal medible cumpla $2^\kappa > \kappa^+$. Aquí no probaremos dicha equivalencia, sino que nos limitaremos a probar la consistencia de la negación de la HCS bajo esta hipótesis. Luego veremos algunas variantes.

11.1 Extensiones de Prikry

En [PC 5.2] se prueba que si un c.p.o. conserva las cofinalidades entonces conserva los cardinales. Los c.p.o.s que vamos a estudiar en esta sección muestran que, en presencia de un cardinal medible, el recíproco no es cierto en general. Más concretamente, vamos a construir un c.p.o. que conserva cardinales y convierte a un cardinal medible en un cardinal de cofinalidad numerable. Esto nos dará inmediatamente un contraejemplo a la HCS.

Definición 11.1 Si κ es un cardinal medible y D es una medida normal en κ, definimos $\mathbb{P}$ como el conjunto de todos los pares (p, A) tales que:

a) p es un subconjunto finito de κ,

b) $A \in D$,

c) $\text{mín}\, A > \text{máx}\, p$.

Equivalentemente, podemos suponer que p es una sucesión creciente finita de elementos de κ. Consideramos a $\mathbb{P}$ como c.p.o. con la relación siguiente:

Si $(p, A), (q, B) \in \mathbb{P}$, diremos que $(p, A) \leq (q, B)$ si

a) $q \subset p$,

b) $A \subset B$,

c) $p \setminus q \subset B$.

Claramente $\mathbb{P}$ tiene máximo $\mathbb{1} = (\varnothing, \kappa)$. Diremos que una condición (p, A) es una *extensión directa* de (q, B), y lo representaremos por $(p, A) \leq^* (q, B)$ si

a) $p = q$,

b) $A \subset B$.

De este modo, en una condición (p, A), el conjunto A contiene los ordinales que pueden usarse para extender a p. Observemos que la condición c) de la definición de $\mathbb{P}$ y la correspondiente en la definición de $\leq$ implican que si se cumple $(p, A) \leq (q, B)$ entonces p extiende a q como sucesión creciente, es decir, que los elementos de $p \setminus q$ son mayores que todos los elementos de q.

El teorema siguiente muestra el objetivo fundamental de estas definiciones:

Teorema 11.2 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea κ un cardinal medible^M y sea $D \in M$ una medida normal^M en κ. Sea $\mathbb{P} \in M$ el c.p.o. que acabamos de definir, sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y consideremos $s = \bigcup\{p \mid \bigvee pA\ (p, A) \in G\} \in M[G]$. Entonces s es un conjunto de ordinal ω cofinal en κ.*

DEMOSTRACIÓN: Es claro que si $\alpha < \kappa$, el conjunto D_α formado por las condiciones (p, A) tales que $\text{máx}\, p > \alpha$ es denso en $\mathbb{P}$. Por lo tanto s es cofinal en κ. En particular s es infinito, y tiene ordinal ω porque si $\alpha \in s$, existe $(q, B) \in G$ tal que $\alpha \in q$, y si $\beta \in s$ cumple $\beta \leq \alpha$, entonces existe un $(p, A) \in G$ tal que $\beta \in p$, y podemos suponer que $(p, A) \leq (q, B)$, con lo que $\beta \in q$, ya que si $\beta \in p \setminus q$ entonces sería $\beta > \alpha$. Por lo tanto en s sólo hay un número finito de elementos menores que α. ■

Ejercicio: Probar que si $A \in D$ entonces $s \setminus A$ es finito, es decir, visto como sucesión, s está finalmente en todo elemento de D.

Así pues, κ tiene cofinalidad numerable en $M[G]$. Sin embargo, vamos a probar que los cardinales de $M[G]$ son los mismos que los de M, con lo que en particular κ seguirá siendo un cardinal límite en $M[G]$. Necesitamos algunos resultados previos.

Teorema 11.3 $\mathbb{P}$ *cumple la c.c.* κ^+.

DEMOSTRACIÓN: Si $C \subset \mathbb{P}$ tiene cardinal κ^+, entonces tiene que haber dos condiciones $(p, A), (q, B) \in C$ tales que $p = q$, pues sólo hay κ subconjuntos finitos de κ. Pero entonces $(p, A \cap B)$ es una extensión común. ■

El teorema siguiente recoge la propiedad fundamental del c.p.o. $\mathbb{P}$:

Teorema 11.4 *Para toda fórmula* $\phi(x_1, \ldots, x_n)$*, dada una condición* $(q, B) \in \mathbb{P}$ *y nombres* $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in V^{\mathbb{P}}$*, existe* $(p, A) \leq^* (q, B)$ *tal que* $(p, A) \parallel \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$*, es decir, tal que* $(p, A) \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *o bien* $(p, A) \Vdash \neg\phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

DEMOSTRACIÓN: Definimos $F : [B]^{<\omega} \longrightarrow 2$ mediante

$$F(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bigvee C((q \cup s, C) \in \mathbb{P} \land (q \cup s, C) \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)), \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por el teorema 5.5 existe[1] $A \in D$, $A \subset B$ homogéneo para F. Veamos que (q, A) cumple lo requerido. En caso contrario podríamos considerar condiciones $(q \cup s_1, B_1), (q \cup s_2, B_2) \leq (q, A)$ tales que

$$(q \cup s_1, B_1) \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \quad (q \cup s_2, B_2) \Vdash \neg\phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Extendiendo una de las condiciones podemos suponer que s_1 y s_2 tienen la misma longitud m, pero entonces debería ser $F(s_1) = F(s_2)$, pero sucede lo contrario. ■

Como consecuencia obtenemos:

Teorema 11.5 *Sea* M *un modelo transitivo numerable de* ZFC*, sea* κ *un cardinal medible*^{M} *y sea* $D \in M$ *una medida normal*^{M} *en* κ*. Sea* $\mathbb{P} \in M$ *el c.p.o. que estamos considerando y sea* G *un filtro* $\mathbb{P}$*-genérico sobre* M*. Entonces todo subconjunto acotado de* κ *en* $M[G]$ *está en* M.

DEMOSTRACIÓN: Sea $P = (\mathcal{P}\kappa)^M$ Supongamos que existe $x \in M[G]$ tal que existe $\lambda < \kappa$ tal que $x \subset \lambda$, pero $x \notin P$. Sea $x = \tau_G$ y sea $(p, A) \in \mathbb{P}$ tal que $(p, A) \Vdash \tau \subset \check{\lambda} \land \tau \notin \check{P}$.

Razonando en M, vamos a definir una sucesión decreciente $\{A_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ de elementos de D tal que $A_0 \subset A$. Supuesta definida $\{A_\alpha\}_{\alpha<\delta}$, con $\delta < \lambda$, formamos $A^* = \bigcap\limits_{\alpha<\delta} A_\delta \in D$ (o tomamos $A^* = A$ en el caso $\delta = 0$), y por el teorema anterior elegimos $A_\delta \in D$ tal que $A_\delta \subset A^*$ y $(p, A_\delta) \parallel \check{\delta} \in \tau$. Por último tomamos $B = \bigcap\limits_{\alpha<\delta} A_\delta$, de modo que $(p, B) \in \mathbb{P}$ y claramente $(p, B) \leq^* (p, A)$.

Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $(p, B) \in G$. Entonces $x = \tau_G \subset \lambda$ y $x \notin M$, pero por otra parte

$$x = \{\alpha < \lambda \mid (p, B) \Vdash \check{\alpha} \in \tau\} \in M,$$

contradicción. ■

[1]Podemos extender F a $[\kappa]^{<\omega} \longrightarrow 3$ haciendo que tome el valor 2 sobre los subconjuntos que no estén contenidos en B, pero entonces $A \cap B$ también es homogéneo para F y F no puede tomar el valor 2 sobre sus subconjuntos finitos.

Ahora ya podemos enunciar las características principales de la extensión genérica determinada por $\mathbb{P}$:

Teorema 11.6 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea κ un cardinal medible^M y sea $D \in M$ una medida normal^M en κ. Sea $\mathbb{P} \in M$ el c.p.o. que estamos considerando y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces:*

a) Los cardinales de M son los mismos que los de $M[G]$.

b) κ tiene cofinalidad numerable.

c) Todos los subconjuntos acotados de κ en $M[G]$ están en M.

Demostración: Ya tenemos probado c). Como $\mathbb{P}$ cumple la c.c. κ^+, conserva todos los cardinales (y cofinalidades) mayores que κ. Si $\mu < \kappa$ es un cardinal en M, entonces tiene que ser un cardinal en $M[G]$, porque en caso contrario existiría en $M[G]$ un buen orden R en μ de ordinal $< \mu$, pero entonces podemos tomar $g : \mu \times \mu \longrightarrow \mu$ tal que $g \in M$ y $g[R]$ es un subconjunto acotado de κ en $M[G]$, luego $g[R] \in M$, luego $R \in M$ y tenemos una contradicción.

Por lo tanto, κ es un supremo de cardinales en $M[G]$, luego es también un cardinal en $M[G]$. Su cofinalidad es numerable por el teorema 11.2. ■

Nota Es claro que $\mathbb{P}$ conserva todas las cofinalidades excepto la de κ.

Ahora ya es fácil violar la HCS:

Teorema 11.7 *Si es consistente la* HCG *más existencia de una inmersión elemental no trivial $j : V \longrightarrow N$ con punto crítico κ tal que $N^\kappa \subset N$ y $(\kappa^{++})^N = \kappa^{++}$ (en particular, si es consistente la* HCG *más la existencia de un cardinal κ^{++}-fuerte κ) entonces es consistente la existencia de un cardinal κ de cofinalidad numerable que cumpla cualquiera de los dos casos siguientes:*

a) κ es límite fuerte y $\kappa^+ < \kappa^{\operatorname{cf}\kappa} = 2^\kappa$.

b) $2^{\operatorname{cf}\kappa} < \kappa$ y $\kappa^+ < \kappa^{\operatorname{cf}\kappa} < 2^\kappa$.

Demostración: Por el teorema 10.24 existe un modelo transitivo numerable M de ZFC en el que existe un cardinal medible κ tal que $2^\kappa > \kappa^+$. Aplicando el teorema anterior a dicho modelo obtenemos una extensión genérica $M[G]$ con los mismos cardinales y donde κ tiene cofinalidad numerable. Obviamente,

$$(2^\kappa)^{M[G]} \geq (2^\kappa)^M > (\kappa^+)^M = (\kappa^+)^{M[G]}.$$

Si $\mu < \kappa$, el teorema anterior nos da también que $(\mathcal{P}\mu)^{M[G]} = (\mathcal{P}\mu)^M$, luego $(2^\mu)^{M[G]} = (2^\mu)^M < \kappa$. Así pues, κ es un límite fuerte$^{M[G]}$.

Estos hechos implican en general (usando [TC 5.70]) la igualdad $\kappa^{\operatorname{cf}\kappa} = 2^\kappa$:

$$\kappa^+ < 2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\operatorname{cf}\kappa} = \kappa^{\operatorname{cf}\kappa} \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa.$$

Así pues, $M[G]$ es un modelo de a). Para obtener un modelo de b) tomamos un cardinal inaccesible^M $\mu < \kappa$ (existe porque κ es medible^M). En particular μ es un límite fuerte^M y, según lo visto, también es un límite fuerte$^{M[G]}$, es decir, $(2^{<\mu} = \mu)^{M[G]}$. Del hecho de que M y $M[G]$ tengan los mismos subconjuntos acotados de κ se sigue inmediatamente que μ sigue siendo regular en $M[G]$, es decir, μ es inaccesible$^{M[G]}$. Consideremos también $\xi = ((2^\kappa)^+)^{M[G]}$.

Sea $\mathbb{Q} = \mathrm{Fn}(\xi, 2, \mu)^{M[G]}$ y sea H un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[G]$. Los cardinales y las cofinalidades de $M[G][H]$ son los mismos que los de $M[G]$. En particular κ sigue teniendo cofinalidad numerable. Además es claro que en $M[G][H]$ se cumple $2^\mu \geq \xi$.

Como el c.p.o. $\mathbb{Q}$ es μ-cerrado$^{M[G]}$, es claro que en $M[G][H]$ se cumple que $2^{\operatorname{cf}\kappa} = 2^{\aleph_0} < \kappa$, pero

$$(\kappa^{\operatorname{cf}\kappa})^{M[G][H]} = (\kappa^{\operatorname{cf}\kappa})^{M[G]} = (2^\kappa)^{M[G]} < \xi \leq (2^\mu)^{M[G][H]} \leq (2^\kappa)^{M[G][H]}.$$

En conclusión, $M[G][H]$ cumple b). ■

Magidor desarrolló una teoría de iteración de extensiones de Prikry con la que demostró los dos teoremas siguientes:

Teorema 1 *Si es consistente la existencia de un cardinal compacto, también lo es que el menor cardinal compacto sea también el menor cardinal medible*

Teorema 2 *Si es consistente la existencia de un cardinal supercompacto, también lo es que el menor cardinal supercompacto sea también el menor cardinal compacto.*

El teorema 1 se demuestra cambiando la cofinalidad de todos los cardinales medibles por debajo de un cardinal compacto. Éste sigue siendo compacto en la extensión, pero ya no tiene cardinales medibles por debajo.

Para probar el teorema 2 se parte de un modelo con un cardinal supercompacto κ tal que $2^\kappa = \kappa^{++}$, con lo que la HCG es violada en un conjunto no acotado de cardinales medibles bajo κ. Dichos cardinales se convierten en cardinales singulares en la extensión, de modo que κ sigue siendo supercompacto, pero tiene por debajo un conjunto no acotado de cardinales que violan la HCS. Por el teorema 8.9, ningún cardinal menor que κ puede ser compacto.

Así pues, como consecuencia del teorema 1, aunque la existencia de un cardinal compacto implica la consistencia de que existan infinitos cardinales medibles, a partir de la existencia de un cardinal compacto no puede demostrarse que existan otros cardinales medibles aparte de él mismo. Además, vemos que no es posible probar que todo cardinal compacto sea supercompacto, a pesar de que es consistente que así sea, según el teorema 2. Este teorema implica igualmente que la existencia de un cardinal supercompacto no implica la existencia de otros cardinales compactos, pero en este caso no se sabe si la consistencia de que exista un cardinal compacto es o no equivalente a la consistencia de que exista un cardinal supercompacto.

11.2 La HCG en cardinales singulares

En la sección anterior hemos partido de un cardinal medible que cumple $2^\kappa > \kappa^+$ para violar la HCS, y la consistencia de que exista dicho cardinal la hemos obtenido en el capítulo precedente mediante una extensión de Easton. Sin embargo, la hipótesis de que la HCG falla en un cardinal medible implica que es violada infinitas veces bajo κ. Ahora vamos a presentar un método para cambiar la cofinalidad de un cardinal grande κ a la vez que "hinchamos" $\mathcal{P}\kappa$ partiendo de que κ es fuerte y de la HCG, de modo que obtendremos un modelo en el que κ tiene cofinalidad numerable y es el primero en violar la HCG (y por tanto la HCS). Recordemos ([TC 6.18]) que el menor cardinal en el que falla la HCG no puede ser un cardinal límite de cofinalidad no numerable. Ahora vamos a probar que sí que puede ser un cardinal límite de cofinalidad numerable.

Más concretamente, vamos a suponer la HCG más la existencia de un cardinal κ que sea $\kappa+\delta$-fuerte, con $\delta \geq 2$. Sea E un extensor $\kappa+\delta$-fuerte con punto crítico κ y sea $j : V \longrightarrow M = \mathrm{Ult}_E(V)$ la inmersión en la ultrapotencia, de modo que $V_{\kappa+\delta} \subset M$. Supondremos también que $\mu = \aleph_{\kappa+\delta}$ es un cardinal regular (lo cual sucede, por ejemplo, si δ es un ordinal sucesor).

Más aún, vamos a suponer que existe una función $f_\mu : \kappa \longrightarrow \kappa$ tal que $j(f_\mu)(\kappa) = \mu$ (lo que implica en particular que $\mu < j(\kappa)$).

Por ejemplo, si $\delta < \kappa$ basta tomar una función que cumpla $f_\mu(\aleph_\alpha) = \aleph_{\alpha+\delta}$, pues entonces $j(f_\mu)(\kappa) = j(f_\mu)(\aleph_\kappa^M) = \aleph_{\kappa+\delta}^M = \aleph_{\kappa+\delta} = \mu$. Aquí hemos usado que si $\alpha < \kappa+\delta$ entonces $\aleph_\alpha^M = \aleph_\alpha$. En efecto, si vale para α, como $\omega+\alpha < \kappa+\delta$ y $|V_{\omega+\alpha}| = \aleph_\alpha$, para todo $\aleph_\alpha < \beta < \aleph_{\alpha+1}$ existe un buen orden R en $V_{\omega+\alpha}$ de ordinal β, y $R \in V_{\kappa+\delta} \subset M$, luego $|\beta|^M = \aleph_\alpha = \aleph_\alpha^M$. Esto implica que $\aleph_{\alpha+1}^M = \aleph_{\alpha+1}$.

Con una hipótesis más fuerte tenemos garantizada la existencia de f_μ para cualquier δ que elijamos (notemos que $\kappa+\delta \leq \mu$, por lo que todo extensor μ-fuerte es en particular $\kappa+\delta$-fuerte):

Teorema 11.8 *Si κ es un cardinal fuerte, para cada cardinal $\mu > \kappa$ existe un extensor μ-fuerte E y una función $f : \kappa \longrightarrow \kappa$ tal que $j_E(f)(\kappa) = \mu$.*

Demostración: Supongamos que existe un $\mu > \kappa^+$ tal que para todo extensor μ-fuerte E de punto crítico κ y soporte μ y para toda $f : \kappa \longrightarrow \kappa$ se cumpla $j_E(f)(\kappa) \neq \mu$. Tomamos el mínimo μ posible, consideramos un extensor E^* de punto crítico κ que sea μ^+-fuerte, de modo que $V_{\mu^+} \subset \mathrm{Ult}_{E^*}(V)$ y sea $j : V \longrightarrow M = \mathrm{Ult}_{E^*}(V)$ la inmersión elemental canónica.

Observemos que si $E : \mathcal{P}\kappa \longrightarrow \mathcal{P}\lambda$ es un extensor, con $\lambda \leq \mu$, los elementos de $V_\lambda^{\mathrm{Ult}_E(V)}$ son de la forma $[f, a]$, con $f : \kappa \longrightarrow V_\lambda$ y $a < \lambda$, por lo que $V_\lambda^{\mathrm{Ult}_E(V)}$ se puede calcular a partir de V_{μ^+}, luego $(V_\lambda^{\mathrm{Ult}_E(V)})^M = V_\lambda^{\mathrm{Ult}_E(V)}$.

Esto significa que los extensores λ-fuertes con punto crítico κ y soporte $\lambda \leq \mu$ en M son los mismos que en V. Igualmente, si $f : \kappa \longrightarrow \kappa$ (y todas las funciones de este tipo están en M) el valor de $j_E(f)$ puede calcularse en V_{μ^+}, por lo que la condición $j_E(f)(\kappa) = \lambda$ se cumple en M si y sólo si se cumple en V.

En definitiva, μ es también en M el mínimo cardinal tal que para todo extensor μ-fuerte E de punto crítico κ y soporte μ y para toda $f : \kappa \longrightarrow \kappa$ se cumple $j_E(f)(\kappa) \neq \mu$.

Por otra parte, consideremos $g : \kappa \longrightarrow \kappa$ definida por $g(\alpha) = 0$ salvo que α sea un cardinal y exista un mínimo $\lambda < \kappa$ tal que para todo extensor λ-fuerte E de punto crítico α y soporte λ y toda $f : \alpha \longrightarrow \alpha$ se cumpla $j_E(f)(\alpha) \neq \lambda$, en cuyo caso $g(\alpha) = \lambda$. De este modo, al ser j elemental, la minimalidad de μ en M hace que $j(g)(\kappa) = \mu$. Pero si llamamos E a la μ-restricción de j, se sigue cumpliendo que $V_\mu \subset \mathrm{Ult}_E(V)$ por 7.15, y también $j_E(g)(\kappa) = \mu$, pues, considerando la inmersión k dada por el teorema 7.10, si $j_E(g)(\kappa) = \nu$, tenemos que

$$\mu = j(g)(\kappa) = k(j_E(g))(k(\kappa)) = k(j_E(g)(\kappa)) = k(\nu),$$

y no puede ser $\nu < \mu$, porque entonces $k(\nu) = \nu < \mu$, ni tampoco $\mu < \nu \leq k(\nu)$, luego $\mu = \nu$. Esto contradice la elección de μ. ■

Fijemos, pues, un extensor $\kappa + \delta$-fuerte E y $\mu = \aleph_{\kappa+\delta}$ regular, con $\delta \geq 2$ y una función $f_\mu : \kappa \longrightarrow \kappa$ tal que $j(f_\mu)(\kappa) = \mu$, donde $j : V \longrightarrow M = \mathrm{Ult}_E(V)$ es la inmersión canónica.

Vamos a extraer algunas consecuencias de estas hipótesis.

a) $V_{\kappa+\delta}^{\kappa^+} \subset M$.

Si $f : \kappa^+ \longrightarrow V_{\kappa+\delta}$, entonces, como $|V_{\kappa+\delta}| = \mu$ regular y $\kappa^+ < \mu$, tenemos que $\big|\bigcup\limits_{\delta<\kappa^+} \mathrm{ct}\, f(\delta)\big| < \mu$, por lo que $|\mathrm{ct}\, f| < \mu$. Existe un $\epsilon < \delta$ tal que $|V_{\kappa+\epsilon}| \geq |\mathrm{ct}\, f|$, luego podemos definir una relación bien fundada R en un conjunto $A \subset V_{\kappa+\epsilon}$ tal que el colapso transitivo de (A, R) sea $\mathrm{ct}\, f \cup \{f\}$. Entonces $A, R \in V_{\kappa+\delta} \subset M$, luego $f \in M$.

b) ${}^{<\kappa^{++}}\mu \subset M$.

Si $\alpha < \kappa^{++}$ y $f : \alpha \longrightarrow \mu$, entonces existe un $\beta < \mu$ tal que $f : \alpha \longrightarrow \beta$, luego también $|\mathrm{ct}\, f| < \mu$, y razonamos como antes.

c) $(\kappa^+)^M = \kappa^+$ y $(\kappa^{++})^M = \kappa^{++}$.

Tenemos que ${}^{(\kappa^+)}2 \subset M$, luego $\mathcal{P}\kappa^+ \subset M$ y por lo tanto M contiene buenos órdenes en κ y κ^+ de todos los ordinales posibles, luego los cardinales hasta κ^+ son los mismos en V y en M.

d) Para cada $\alpha < \mu$ definimos $U_\alpha \subset \mathcal{P}\kappa$ como el ultrafiltro dado por

$$X \in U_\alpha \leftrightarrow \alpha \in j(X).$$

Cada U_α es un ultrafiltro κ-completo en κ. Si $\alpha < \kappa$ se trata del ultrafiltro principal generado por $\{\alpha\}$, pero si $\kappa \leq \alpha < \mu$ entonces U_α es una medida en κ. Además, U_κ es la medida normal en κ asociada a la inmersión elemental j.

e) Para cada $\kappa \leq \alpha < \mu$, tenemos diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "i_\alpha"'] & M \\ & N_\alpha \arrow[u, "k_\alpha"'] \end{tikzcd}$$

donde $i_\alpha : V \longrightarrow N_\alpha = \mathrm{Ult}_{U_\alpha}(V)$ es la inmersión natural y k_α viene dada por $k_\alpha([f]) = j(f)(\alpha)$. Es inmediato comprobar que es una aplicación bien definida y que es una inmersión elemental.

f) El punto crítico de k_α es $(\kappa^{++})^{N_\alpha}$.

Basta probar que $k_\alpha(\kappa) = \kappa$, pues entonces, por una parte,

$$k_\alpha((\kappa^+)^{N_\alpha}) = (\kappa^+)^M = \kappa^+ = (\kappa^+)^{N_\alpha},$$

porque $N_\alpha^\kappa \subset N_\alpha$. Por otra parte,

$$k_\alpha((\kappa^{++})^{N_\alpha}) = (\kappa^{++})^M = \kappa^{++},$$

pero $(\kappa^{++})^{N_\alpha} \leq i_\alpha(\kappa) < \kappa^{++}$, por 5.4 h), teniendo en cuenta que tanto M como V cumplen la HCG. Así pues, $(\kappa^{++})^{N_\alpha}$ será el menor cardinal no fijado por k_α.

Ahora consideramos la función f_μ que cumple $j(f_\mu)(\kappa) = \mu$. En primer lugar $j(f_\mu) = k_\alpha(i_\alpha(f_\mu))$. Es claro que $i_\alpha(f_\mu)|_\kappa = f_\mu$, luego

$$(\bigwedge \delta < \kappa\, (i_\alpha(f_\mu)(\delta) < \kappa)^{N_\alpha},$$

luego aplicando k_α queda:

$$(\bigwedge \delta < k_\alpha(\kappa)\, (j(f_\mu)(\delta) < k_\alpha(\kappa))^M.$$

Por otra parte, si d es la identidad en κ, en la prueba de 1.13 se ve que $\kappa \leq [d]$, luego $k_\alpha(\kappa) \leq k_\alpha([d]) = \alpha < \mu$, luego

$$(\bigwedge \delta < k_\alpha(\kappa)\, (j(f_\mu)(\delta) < \mu)^M.$$

Como $\kappa \leq k_\alpha(\kappa)$ y $j(f_\mu)(\kappa) = \mu$, tiene que ser $k_\alpha(\kappa) = \kappa$.

g) Para cada $\alpha, \beta \in \mu$, definimos

$$\alpha \preceq \beta \leftrightarrow \alpha \leq \beta \land \bigvee f \in {}^\kappa\kappa\ j(f)(\beta) = \alpha.$$

Esto implica en particular que, para todo $X \subset \kappa$,

$$X \in U_\alpha \leftrightarrow f^{-1}[X] \in U_\beta$$

(y se dice entonces que $U_\alpha \leq_{RK} U_\beta$, donde $\leq_{RK}$ es el llamado *orden de Rudin-Keisler*[2] sobre los ultrafiltros de κ).

[2]Notemos que el orden de Rudin-Keisler no es antisimétrico, por lo que no es realmente un orden, sino que induce un orden en un conjunto oportuno de clases de equivalencia de ultrafiltros.

En efecto, tenemos que

$$f^{-1}[X] \in U_\beta \leftrightarrow \beta \in j(\{\delta < \kappa \mid f(\delta) \in X\}) \leftrightarrow$$
$$\alpha = j(f)(\beta) \in j(X) \leftrightarrow X \in U_\alpha.$$

h) Si $\kappa \leq \alpha < \mu$ entonces $\kappa \preceq \alpha$.

Pongamos que $\kappa = [g]$ en N_α, donde podemos suponer $g : \kappa \longrightarrow \kappa$. Entonces $j(g)(\alpha) = k_\alpha([g]) = k_\alpha(\kappa) = \kappa$.

i) Si $\kappa \leq \beta \preceq \alpha < \mu$, y llamamos $\pi_{\alpha\beta} : \kappa \longrightarrow \kappa$ a cualquier función que cumpla $j(\pi_{\alpha\beta})(\alpha) = \beta$, entonces $\beta^* = [\pi_{\alpha\beta}] \in N_\alpha$ hace que la aplicación $k_{\beta\alpha} : N_\beta \longrightarrow N_\alpha$ dada por $k_{\beta\alpha}([f]) = i_\alpha(f)(\beta^*)$ sea una inmersión elemental que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i_\alpha"] \arrow[d, "i_\beta"'] & N_\alpha \arrow[d, "k_\alpha"] \\ N_\beta \arrow[ur, "k_{\beta\alpha}"'] \arrow[r, "k_\beta"'] & M \end{tikzcd}$$

Observemos que $k_\alpha(\beta^*) = j(\pi_{\alpha\beta})(\alpha) = \beta$, luego

$$\phi^{N_\beta}([f_1], \ldots, [f_r]) \leftrightarrow \{\gamma \in \kappa \mid \phi(f_1(\gamma), \ldots, f_r(\gamma))\} \in U_\beta$$
$$\leftrightarrow \phi^M(j(f_1)(\beta), \ldots, j(f_r)(\beta)) \leftrightarrow$$
$$\phi^M(k_\alpha(i_\alpha(f_1))(k_\alpha(\beta^*)), \ldots, k_\alpha(i_\alpha(f_r))(k_\alpha(\beta^*))) \leftrightarrow$$
$$\phi^{N_\alpha}(i_\alpha(f_1)(\beta^*), \ldots, i_\alpha(f_r)(\beta^*)) \leftrightarrow \phi^{N_\alpha}(k_{\beta\alpha}([f_1]), \ldots, k_{\beta\alpha}([f_r])).$$

Esto prueba que $k_{\beta\alpha}$ es una inmersión elemental (y el caso particular en que $\phi \equiv x = y$ prueba que está bien definida). La conmutatividad del diagrama se obtiene sin más que aplicar las definiciones.

j) Si $\kappa \leq \gamma < \beta \leq \alpha < \mu$ cumplen $\beta \preceq \alpha$ y $\gamma \preceq \alpha$ entonces

$$\{\delta < \kappa \mid \pi_{\alpha\gamma}(\delta) < \pi_{\alpha\beta}(\delta)\} \in U_\alpha.$$

En efecto, $k_\alpha([\pi_{\alpha\beta}]) = k_\alpha(k_{\beta\alpha}([d])) = k_\beta([d]) = j(d)(\beta) = \beta$. Igualmente tenemos que $k_\alpha([\pi_{\alpha\gamma}]) = \gamma$. Como $\gamma < \beta$ y k_α es elemental, $[\pi_{\alpha\gamma}] < [\pi_{\alpha\beta}]$, y ahora basta aplicar el teorema fundamental.

k) Si $\kappa \leq \gamma \preceq \beta \preceq \alpha < \mu$, existe un $Y \in U_\alpha$ tal que para todo $\delta \in Y$ se cumple $\pi_{\alpha\gamma}(\delta) = \pi_{\beta\gamma}(\pi_{\alpha\beta}(\delta))$.

Basta probar que $[\pi_{\alpha\gamma}] = [\pi_{\alpha\beta} \circ \pi_{\beta\gamma}]$ en N_α, para lo cual a su vez observamos que

$$k_\alpha([\pi_{\alpha\beta} \circ \pi_{\beta\gamma}]) = j(\pi_{\alpha\beta} \circ \pi_{\beta\gamma})(\alpha) = j(\pi_{\beta\gamma})(j(\pi_{\alpha\beta})(\alpha)) = j(\pi_{\beta\gamma})(\beta) = \gamma,$$

y, como hemos visto en el apartado anterior, $k_\alpha([\pi_{\alpha\gamma}]) = \gamma$. Como k_α es inyectiva tenemos la igualdad que necesitamos.

l) Si $\kappa \leq \beta \preceq \alpha < \mu$, entonces $A'_\alpha = \{\delta < \kappa \mid \pi_{\alpha\beta}(\delta) < f_\mu(\pi_0(\delta))\} \in U_\alpha$.
Esto equivale a que $j(\pi_{\alpha\beta})(\alpha) < j(f_\mu)(j(\pi_0)(\alpha)) = j(f_\mu)(\kappa)$, es decir, a que $\beta < \mu$.

Consideramos ahora el conjunto

$$A = \{\delta < \kappa \mid \bigvee \nu \leq \delta(\nu \text{ inaccesible} \wedge f_\mu|_\nu : \nu \longrightarrow \nu \wedge f_\mu(\nu) > \delta)\}.$$

Para todo $\kappa \leq \alpha < \mu$, se cumple $A \in U_\alpha$, pues esto equivale a que

$$\bigvee \nu \leq \alpha(\nu \text{ inaccesible}^M \wedge j(f_\mu)|_\nu : \nu \longrightarrow \nu \wedge j(f_\mu)(\nu) > \alpha),$$

y esto se cumple tomando $\nu = \kappa$. Observemos además que κ es el mínimo ordinal que cumple esto.

Definimos $\pi_0 : \kappa \longrightarrow \kappa$ como la aplicación tal que, para $\delta \in A$, $\pi_0(\delta)$ es el mínimo inaccesible $\nu \leq \delta$ que cumple la definición de A, y si $\delta \notin A$, entonces $\pi_0(\delta) = 0$.

En estos términos, hemos demostrado que, para todo $\kappa \leq \alpha < \mu$, se cumple $j(\pi_0)(\alpha) = \kappa$. Equivalentemente, la misma función π_0 justifica que $\kappa \preceq \alpha$ para todo $\kappa \leq \alpha < \mu$.

Las funciones $\pi_{\alpha\beta}$ (para $\kappa \leq \beta \preceq \alpha < \mu$) las hemos elegido arbitrariamente sin más condición que $j(\pi_{\alpha\beta})(\alpha) = \beta$. Vamos a concretar esta elección. Para $\alpha = \beta$ tomaremos como $\pi_{\alpha\beta}$ la identidad en κ, que obviamente cumple lo requerido. Para $\kappa < \alpha$ tomamos $\pi_{\alpha\kappa} = \pi_0$, que, según acabamos de probar, es también una elección válida. En lo sucesivo escribiremos $\delta^0 = \pi_0(\delta)$.

Por otra parte, para $\kappa < \beta \prec \alpha < \mu$, podemos exigir que $\pi_{\alpha\beta}|_{\kappa\setminus A} = 0$, y para $\delta \in A$, tenemos $\delta^0 \leq \delta < f_\mu(\delta^0)$, y si sucede

$$\pi_{\alpha\beta}(\delta) < \pi_{\alpha\kappa}(\delta) = \delta^0 \vee f_\mu(\delta^0) \leq \pi_{\alpha\beta}(\delta),$$

entonces hacemos $\pi_{\alpha\beta}(\delta) = \delta$, con lo que se cumple $\delta^0 \leq \pi_{\alpha\beta}(\delta) < f_\mu(\delta^0)$ para todo $\delta \in A$. Notemos que, por las propiedades j) y l) (junto con el hecho de que $A \in U_\alpha$), todo esto supone modificar $\pi_{\alpha\beta}$ en un conjunto que no está en U_α, por lo que se sigue cumpliendo $j(\pi_{\alpha\beta})(\alpha) = \beta$.

Con esta corrección, si $\delta \in A$, se cumple también $\pi_{\alpha\beta}(\delta) \in A$, pues el mismo δ^0 lo atestigua, ya que $f_\mu(\delta^0) > \pi_{\alpha\beta}(\delta)$, y $\nu = \delta^0$ es el mínimo posible, ya que $f_\mu[\nu] \subset \nu \leq \pi_{\alpha\beta}(\delta)$. Equivalentemente, esto significa que $\pi_{\alpha\kappa}(\delta) = \pi_{\beta\kappa}(\pi_{\alpha\beta}(\delta))$. Notemos que esto vale trivialmente si $\alpha = \beta$.

Por otra parte, el hecho de que $j(\pi_0)(\kappa) = \kappa$, según hemos visto en la propiedad g), se traduce en que, para todo $X \subset \kappa$,

$$X \in U_\kappa \leftrightarrow \pi_0^{-1}[X] \in U_\kappa,$$

y a su vez concluimos que $\pi_0[A] \in U_\kappa$, pues $A \subset \pi_0^{-1}[\pi_0[A]]$.

Vamos a recapitular los conceptos que hemos definido y las propiedades que vamos a necesitar sobre ellos:

a) *Tenemos definido un conjunto parcialmente ordenado $(\mu \setminus \kappa, \preceq)$ con mínimo κ y que es κ^{++}-dirigido, es decir, todo subconjunto de cardinal $\leq \kappa^+$ está acotado superiormente (con una cota estrictamente mayor que todos sus elementos).*

Para probarlo fijamos una enumeración $\{a_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ de $[\kappa]^{<\kappa}$ tal que para todo cardinal regular $\nu < \kappa$ se cumpla que $\{a_\alpha\}_{\alpha<\nu}$ sea una enumeración de $[\nu]^{<\nu}$ en la que cada conjunto aparece ν veces.

Como cada conjunto a_α está acotado en κ, es claro que $j(a_\alpha) = a_\alpha$, por lo que $j(\{a_\alpha\}_{\alpha<\kappa}) = \{a_\alpha\}_{\alpha<j(\kappa)}$, es decir, la imagen por j de la sucesión extiende a la sucesión inicial. En particular, $\{a_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ enumera a $([\mu]^{<\mu})^M$ (en particular a $[\mu]^{<\kappa^{++}}$) de modo que cada conjunto aparece μ veces.

Ahora consideramos una sucesión $\{\alpha_\delta\}_{\delta<\kappa^+}$ en $\mu\setminus\kappa$ y tomamos un ordinal $\alpha \in \mu \setminus \bigcup\limits_{\delta<\kappa^+} (\alpha_\delta + 1)$ tal que $a_\alpha = \{\alpha_\delta \mid \delta < \kappa^+\}$. Notemos que siempre existe un α en las condiciones indicadas, por la elección de la sucesión $\{a_\alpha\}_{\alpha<\mu}$. Basta probar que $\bigwedge\delta < \kappa^+ \ \alpha_\delta \prec \alpha$.

Sea $\{a^*_\alpha\}_{\alpha<i_\alpha(\kappa)} = i_\alpha(\{a_\alpha\}_{\alpha<\kappa})$, y así $\{a_\alpha\}_{\alpha<j(\kappa)} = k_\alpha(\{a^*_\alpha\}_{\alpha<i_\alpha(\kappa)})$. Sea d la identidad en κ y consideremos $\alpha^* = [d] \in N_\alpha$. Entonces $k_\alpha(\alpha^*) = \alpha$, luego $a_\alpha = k_\alpha(a^*_{\alpha^*})$. En M se cumple que a_α es el rango de una sucesión de longitud κ^+ y, como k_α es elemental y fija a κ^+, tenemos que en N_α se cumple que $a^*_{\alpha^*} = \{\alpha^*_\delta \mid \delta < \kappa^+\}$ y $a_\alpha = \{k_\alpha(\alpha^*_\delta) \mid \delta < \kappa^+\}$.

Por lo tanto, si $\delta < \kappa^+$, existe un $\delta^* = \alpha^*_\epsilon$, para cierto $\epsilon < \kappa^+$ de manera que $\alpha_\delta = k_\alpha(\delta^*)$. Si $\delta^* = [h] \in N_\alpha$, entonces $j(h)(\alpha) = k_\alpha(\delta^*) = \alpha_\delta$, luego $\alpha_\delta \prec \alpha$.

b) Tenemos una sucesión $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mu\setminus\kappa}$ de medidas en κ y una familia de aplicaciones $\pi_{\alpha\beta} : \kappa \longrightarrow \kappa$, para $\kappa \leq \beta \preceq \alpha < \mu$, de modo que si $\beta \preceq \alpha$ entonces $X \in U_\beta \leftrightarrow \pi^{-1}_{\alpha\beta}[X] \in U_\alpha$.

c) Para todo $\kappa < \alpha < \mu$ y todo $\delta < \kappa$, se cumple $\pi_{\alpha\kappa}(\delta) = \delta^0$, independientemente de α, mientras que $\pi_{\alpha\alpha}(\delta) = \delta$ (esto último incluso para $\alpha = \kappa$).

d) U_κ es una medida normal en κ y $\pi_0[A] \in U_\kappa$ (en particular $\pi_0[A]$ no está acotado en κ).

e) Tenemos un conjunto A que pertenece a todas las medidas U_α. Si $\delta \in A$ entonces $\delta^0 \leq \delta$ es un cardinal inaccesible. Además

$$\bigwedge\delta_1\delta_2 \in A(\delta_1 \leq \delta_2 \to \delta_1^0 \leq \delta_2^0),$$

$$\bigwedge\delta_1\delta_2 \in A(\delta_1^0 < \delta_2^2 \to |\{\delta \in A \mid \delta^0 = \delta_1^0\}| < \delta_2^0).$$

En efecto, si $\delta_1 \leq \delta_2$ entonces δ_2^0 cumple $f_\mu(\delta_2^0) > \delta_2 \geq \delta_1$ y $f_\mu[\delta_2^0] \subset \delta_2^0$, luego $\delta_1^0 \leq \delta_2^0$, porque δ_1^0 es el menor cardinal que cumple estas propiedades.

Además, si $\delta \in A$ cumple $\delta^0 = \delta_1^0$, entonces $\delta < f_\mu(\delta^0) = f_\mu(\delta_1^0) < \delta_2^0$, luego $|\{\delta \in A \mid \delta^0 = \delta_1^0\}| \leq |f_\mu(\delta_1^0)| < \delta_2^0$.

f) Si $\kappa \leq \gamma < \beta \leq \alpha < \mu$ cumplen $\beta \preceq \alpha$ y $\gamma \preceq \alpha$ entonces

$$\{\delta < \kappa \mid \pi_{\alpha\gamma}(\delta) < \pi_{\alpha\beta}(\delta)\} \in U_\alpha.$$

g) Si $\kappa \leq \gamma \preceq \beta \preceq \alpha < \mu$, existe un $Y \in U_\alpha$ tal que, para todo $\delta \in Y$, se cumple $\pi_{\alpha\gamma}(\delta) = \pi_{\beta\gamma}(\pi_{\alpha\beta}(\delta))$.

Éstas son las propiedades j) y k) precedentes. Para $\gamma = \kappa$ se cumple más en general:

h) Si $\kappa \leq \beta \preceq \alpha < \mu$, para todo $\delta < \kappa$ se cumple $\pi_{\alpha\kappa}(\delta) = \pi_{\beta\kappa}(\pi_{\alpha\beta}(\delta))$.

i) Cada U_α es un P-punto, es decir, para toda $f : \kappa \longrightarrow \kappa$, si f no es constante en ningún conjunto de U_α, existe un $Y \in U_\alpha$ tal que para todo $\delta < \kappa$ se cumple $|Y \cap f^{-1}[\delta]| < \kappa$.

Para probarlo consideremos la función $h = \pi_{\alpha\kappa} \circ f : \kappa \longrightarrow \kappa$. Para cada $\delta < \kappa$, tenemos que $h^{-1}[\delta] = \pi_{\alpha\kappa}^{-1}[f^{-1}[\delta]] \notin U_\kappa$, ya que $f^{-1}[\delta] \notin U_\alpha$. Como U_κ es normal, h no puede ser regresiva, es decir, $\{\gamma \in \kappa \mid h(\gamma) \geq \gamma\} \in U_\kappa$. Como $\pi_{\alpha\kappa}|_A = g$, tenemos que $A \subset \{\gamma \in \kappa \mid \pi_{\alpha\kappa}(\gamma) \leq \gamma\} \in U_\kappa$, luego

$$A \cap \{\gamma \in \kappa \mid h(\gamma) \geq \gamma\} \subset \{\gamma \in \kappa \mid f(\pi_{\alpha\kappa}(\gamma)) \geq \pi_{\alpha\kappa}(\gamma)\} \in U_\kappa,$$

y esto a su vez equivale a que $Y = \{\beta \in \kappa \mid f(\beta) \geq \beta\} \in U_\alpha$. Este conjunto cumple lo pedido, pues $Y \cap f^{-1}[\delta] \subset \delta + 1$.

j) Si $\{X_\delta\}_{\delta<\kappa}$ es una familia de elementos de U_α, entonces

$$X = \mathop{\triangle^*}_{\delta<\kappa} X_\delta = \{\epsilon < \kappa \mid \bigwedge\delta < \epsilon^0 \ \epsilon \in X_\delta\} \in U_\alpha.$$

Hemos de ver que

$$\alpha \in j(\{\epsilon < \kappa \mid \bigwedge\delta < \pi_{\alpha\kappa}(\epsilon) \ \epsilon \in X_\delta\}) =$$

$$\{\epsilon < j(\kappa) \mid \bigwedge\delta < j(\pi_{\alpha\kappa})(\epsilon) \ \epsilon \in j(X)_\delta\}$$

y esto equivale a que $\bigwedge\delta < \kappa \ \alpha \in j(X_\delta)$, lo cual es cierto.

A partir de aquí sólo necesitaremos las propiedades que acabamos de enumerar, sin necesidad de considerar el extensor, las ultrapotencias o a las inmersiones elementales con las que las hemos obtenido. Recordemos que hemos probado que toda esta construcción es posible siempre que $\mu = \aleph_{\kappa+\delta}$ es regular con $2 \leq \delta < \kappa$ si κ es $\kappa+\delta$-fuerte o bien si κ es fuerte y $\delta \geq 2$ es arbitrario.

Diremos que una sucesión finita $(\delta_0, \ldots, \delta_{n-1}) \in \kappa^n$ es creciente^0 si cumple $\delta_0^0 < \cdots < \delta_{n-1}^0$ (lo que implica en particular que es creciente). Diremos que δ es *admisible* para $(\delta_0, \ldots, \delta_{n-1})$ si $\delta^0 > \delta_{n-1}^0$ (es decir, si la sucesión se puede prolongar con δ de modo que siga siendo creciente^0).

Pasamos ya a definir el c.p.o. que vamos a considerar en toda esta sección:

Definición 11.9 El conjunto de condiciones $\mathbb{P}$ estará formado por pares ordenados $p = (\bar{p}, T_p)$ (aunque en la práctica escribiremos también p en lugar de $\bar{p}$) que cumplan las condiciones siguientes:

a) p es una función cuyo dominio, al que llamaremos *soporte* de p y representaremos por $\operatorname{sop}(p)$, cumple $\operatorname{sop}(p) \subset \mu \setminus \kappa$, $|\operatorname{sop}(p)| \leq \kappa$, $\kappa \in \operatorname{sop}(p)$ y además tiene elemento máximo respecto a la relación $\preceq$, que lo representaremos por $m(p)$. Abreviaremos $p^m = p(m(p))$.

b) Si $\gamma \in \operatorname{sop}(p)$, entonces $p^\gamma = (p_0^\gamma, \ldots, p_{n-1}^\gamma)$ es una sucesión creciente^0 de elementos de A, salvo si $\gamma = \kappa$, en cuyo caso es una sucesión creciente de elementos de $\pi_0[A]$. Si $n > 0$ escribiremos $p_{\max}^\gamma = p_{n-1}^\gamma$.

c) $\pi_{m(p),\kappa}$ transforma p^m en p^κ. En particular ambas sucesiones tienen la misma longitud.

d) Si $p^m \neq \varnothing$, para todo $\gamma \in \operatorname{sop}(p)$, se cumple que $\pi_{m(p),\gamma}(p_{\max}^m)$ no es admisible para la sucesión p^γ.

e) T_p es un subárbol del árbol de todas las sucesiones finitas crecientes^0 en A (o de todas las sucesiones finitas crecientes en $\pi_0[A]$ si $m(p) = \kappa$) con el orden dado por la inclusión. Además:

   1. p^m está en el tronco de T_p, es decir, toda sucesión $t \in T_p$ cumple $t \subset p^m \vee p^m \subset t$.
   2. Si $t \in T_p \wedge p^m \subset t$, se cumple que
   $$\operatorname{suc}_{T_p}(t) = \{\delta \in \kappa \mid t^\frown\delta \in T\} \in U_{m(p)}.$$
   3. Si $t_1, t_2 \in T_p$ cumplen $p^m \subset t_1 \subset t_2$, entonces $\operatorname{suc}_{T_p}(t_2) \subset \operatorname{suc}_{T_p}(t_1)$.

f) Para cada $\delta \in \operatorname{suc}_{T_p}(p^m)$, se cumple que
$$|\{\gamma \in \operatorname{sop}(p) \mid \delta \text{ es admisible para } p^\gamma\}| \leq \delta^0.$$

Usaremos las notaciones siguientes sobre árboles:
$$T/s = \{t \in T \mid s^\frown t \in T\}, \quad T[s] = \{t \in T \mid s \subset t\},$$
$$s^\frown T = \{s|_i \mid i \in \mathcal{D}s\} \cup \{s^\frown t \mid t \in T\},$$
es decir, $s^\frown T$ es el árbol de tronco s que resulta de prolongar s con las sucesiones de T.

Consideramos a $\mathbb{P}$ como c.p.o. con la relación de orden respecto a la cual se cumple $p \leq q$ si:

a) $\operatorname{sop}(q) \subset \operatorname{sop}(p)$.

b) Para cada $\gamma \in \operatorname{sop}(q)$ la sucesión p^γ extiende a q^γ.

c) $p^{m(q)} \in T_q$.

d) Para cada $\gamma \in \operatorname{sop}(q)$, pongamos que $q^\gamma = (q_0^\gamma, \ldots, q_k^\gamma)$ y

$$p^{m(q)} = (q_0^{m(q)}, \ldots, q_n^{m(q)}, p_{n+1}^{m(q)}, \ldots, p_{n'}^{m(q)})$$

y sea $n < i \leq n'$ el máximo índice tal que $p_i^{m(q)}$ no es admisible para q^γ. Entonces[3]

$$p^\gamma = (q_0^\gamma, \ldots, q_k^\gamma, \pi_{m(q)\gamma}(p_{i+1}^{m(q)}), \ldots, \pi_{m(q)\gamma}(p_{n'}^{m(q)})).$$

e) $\pi_{m(p),m(q)}$ transforma T_p/p^m en un subárbol de $T_q/p^{m(q)}$.

f) Para cada $\gamma \in \operatorname{sop}(q)$ y todo $\delta \in \operatorname{suc}_{T_p}(p^m)$ admisible para p^γ,

$$\pi_{m(p)\gamma}(\delta) = \pi_{m(q)\gamma}(\pi_{m(p)m(q)}(\delta)).$$

Observaciones Aunque todas las medidas U_α son medidas en κ, conviene pensar que son medidas en μ copias "distintas" de κ, conectadas por las aplicaciones $\pi_{\alpha\beta}$. Cada condición $p \in \mathbb{P}$ contiene información parcial para la construcción de μ sucesiones en estas μ "copias" de κ, de modo que cada sucesión p^γ debe "pensarse" como una sucesión finita en la γ-ésima copia de κ.

Cada condición $p \in \mathbb{P}$ tiene dos sucesiones destacadas (que eventualmente pueden coincidir), p^κ y p^m. Si son distintas y la segunda es $(p_0^m, \ldots, p_{n-1}^m)$, entonces la primera está determinada como $((p_0^m)^0, \ldots, (p_{n-1}^m)^0)$. Todas las demás sucesiones p^γ (si las hay) están obligadas a que la sucesión $((p_0^\gamma)^0, \ldots, (p_{k-1}^\gamma)^0)$ cumpla $(p_{\max}^\gamma)^0 \geq (p_{\max}^m)^0 = p_{\max}^\kappa$, por la propiedad d) de la definición de $\mathbb{P}$, es decir, las sucesiones^0 correspondientes a las sucesiones intermedias deben subir al menos tanto como p_κ. El árbol T_p empieza por p^m y contiene las extensiones admisibles de p^m en las extensiones de p, como indica la condición c) de la definición de $\leq$. El conjunto de ordinales admitidos para prolongar p^m está en $U_{m(p)}$, y los conjuntos de posibles extensiones subsiguientes forman una sucesión decreciente.

Para formar una extensión $p \leq q$, la sucesión $p^{m(q)}$ hay que elegirla en T_q, según ya hemos dicho, y ésta determina a su vez las extensiones de todas las sucesiones q^γ con $\gamma \in \operatorname{sop}(q)$, por la propiedad d) de la definición de $\leq$. Sobre las sucesiones nuevas que aparecen en p no hay más restricción que el hecho de que sus sucesiones^0 deben llegar al menos tal arriba como p^κ.

La propiedad e) establece que T_p se obtiene esencialmente restringiendo T_q, aunque hay que mediar con la función $\pi_{m(p)m(q)}$ para que cada conjunto de extensiones posibles esté "en la copia adecuada" de κ. Por último, la propiedad f) exige que se cumpla localmente una propiedad de conmutatividad que no podemos garantizar globalmente. ■

Vamos a probar que la relación que acabamos de definir es realmente una relación de orden en $\mathbb{P}$. La reflexividad es trivial, y la antisimetría se comprueba sin dificultad (si bien no la vamos a necesitar para nada). Probaremos que la relación es transitiva. Para ello consideramos condiciones $p \leq q \leq r$ y veamos que se cumple $p \leq r$.

[3]Notemos que un ordinal $\delta < \kappa$ es admisible para q^γ si y sólo si lo es $\pi_{m(q)\gamma}(\delta)$, ya que $\pi_{\gamma\kappa}(\pi_{m(q)\gamma}(\delta)) = \pi_{m(q)\kappa}(\delta)$.

Las propiedades a) y b) de la definición son obvias. Para que se cumpla c) tenemos que probar que $p^{m(r)} \in T_r$. Por c) sabemos que $p^{m(q)} \in T_q$ y por b) que $p^{m(q)}$ extiende a q^m, luego $p^{m(q)} = q^m{}^\frown t$, con $t \in T_q/q^m$. Por e) resulta que[4] $\pi_{m(q)m(r)}[t] \in T_r/q^{m(r)}$. En particular, esto significa que todos los elementos de t son admisibles para $q^{m(r)}$, luego d) se reduce así a que $p^{m(r)} = q^{m(r)}{}^\frown \pi_{m(q)m(r)}[t]$, luego $p^{m(r)} \in T_r$.

Para probar d) tomamos $\gamma \in \operatorname{sop}(r)$. Entonces $q^{m(r)} = r^m{}^\frown s_1{}^\frown s_2$, de modo que $q^\gamma = r^\gamma{}^\frown \pi_{m(r)\gamma}[s_2]$, donde t_2 es la parte añadida a r^m admisible para r^γ. Análogamente, $p^{m(q)} = q^m{}^\frown t_1{}^\frown t_2$, de modo que $p^\gamma = q^\gamma{}^\frown \pi_{m(q)\gamma}[t_2]$, donde t_2 es la parte añadida a q^m admisible para q^γ. Por otra parte, en la prueba de c) hemos visto que

$$p^{m(r)} = q^{m(r)}{}^\frown \pi_{m(q)m(r)}[t_1{}^\frown t_2] = r^m{}^\frown s_1{}^\frown s_2{}^\frown \pi_{m(q)m(r)}[t_1{}^\frown t_2].$$

En particular vemos que t_1^0 extiende a s_2^0, que es la parte final de $(q^\gamma)^0$. Esto significa que en realidad $t_1^0 = \varnothing$, y $p^{m(q)} = q^m{}^\frown t_2$ y

$$p^{m(r)} = r^m{}^\frown s_1{}^\frown s_2{}^\frown \pi_{m(q)m(r)}[t_2].$$

Por consiguiente, de toda la parte de $p^{m(r)}$ añadida a r^m, la parte admisible para r^γ es $s_2{}^\frown \pi_{m(q)m(r)}[t_2]$ y vemos que

$$p^\gamma = q^\gamma{}^\frown \pi_{m(q)\gamma}[t_2] = r^\gamma{}^\frown \pi_{m(r)\gamma}[s_2]^\frown \pi_{m(q)\gamma}[t_2] = r^\gamma{}^\frown \pi_{m(r)\gamma}[s_2{}^\frown \pi_{m(q)m(r)}[t_2]],$$

donde al final hemos usado la propiedad f) para q y r. Esto es correcto porque $p^{m(q)} = q^m{}^\frown t_2 \in T_q$, luego cada $\delta = t_2(i)$ es admisible para q^γ por definición de t_2 y está en $\operatorname{suc}_{T_q}(q^m)$ por la propiedad e3) de la definición de $\mathbb{P}$ (aplicada a la condición q).

Veamos la propiedad e), es decir, que $\pi_{m(p)m(r)}$ transforma T_p/p^m en un subárbol de $T_r/p^{m(r)}$. Sabemos que $\pi_{m(p)m(q)}$ transforma T_p/p^m en un subárbol de $T_q/p^{m(q)}$ y que $\pi_{m(q)m(r)}$ transforma T_q/q^m en un subárbol de $T_r/q^{m(r)}$. Además, si $p^{m(q)} = q^m{}^\frown t$, entonces $t^\frown T_q/p^{m(q)}$ es un subárbol de T_q/q^m, luego $\pi_{m(q)m(r)}$ lo transforma en un subárbol de $\pi_{m(q)m(r)}[t]^\frown T_r/q^{m(r)}$, que es un subárbol de $T_r/p^{m(r)}$ porque ya hemos visto que $p^{m(r)} = q^{m(r)}{}^\frown \pi_{m(q)m(r)}[t]$.

En suma tenemos que $\pi_{m(p)m(q)} \circ \pi_{m(q)m(r)}$ transforma T_p/p^m en un subárbol de $T_r/p^{m(r)}$. Ahora basta aplicar la propiedad f) para p y q con $\gamma = m(r)$ para concluir que dicha composición es $\pi_{m(p)m(r)}$. Notemos que la composición envía cada $t \in T_p/p^m$ a un elemento de $T_r/p^{m(r)}$, lo cual implica en particular que los elementos de t son admisibles para $p^{m(r)}$, y todos están en $\operatorname{suc}_{T_p}(p^m)$ por la propiedad e3) de la definición de $\mathbb{P}$.

Probamos, por último, la propiedad f). Para ello tomamos $\gamma \in \operatorname{sop}(r)$ y un ordinal $\delta \in \operatorname{suc}_{T_p}(p^m) \subset T_p/p^m$ admisible para p^γ. Entonces por e) tenemos

[4]Usamos la notación $\pi_{m(q)m(r)}[t]$ para representar la sucesión que resulta de aplicar $\pi_{m(q)m(r)}$ a cada término de t.

que $\epsilon = \pi_{m(p)m(q)}(\delta) \in \mathrm{suc}_{T_q}(p^{m(q)}) \subset \mathrm{suc}_{T_q}(q^m)$ y es admisible para q^γ. Por f) para q y r tenemos que

$$\pi_{m(q)\gamma}(\epsilon) = \pi_{m(r)\gamma}(\pi_{m(q)m(r)}(\delta)).$$

A su vez, por f) para p y q resulta que

$$\pi_{m(p)\gamma}(\delta) = \pi_{m(q)\gamma}(\pi_{m(p)m(q)}(\delta)) = \pi_{m(q)\gamma}(\epsilon)$$
$$= \pi_{m(r)\gamma}(\pi_{m(q)m(r)}(\epsilon)) = \pi_{m(r)\gamma}(\pi_{m(p)m(r)}(\delta)),$$

donde la última igualdad se sigue de f) para p y q:

$$\pi_{m(q)m(r)}(\epsilon) = \pi_{m(q)m(r)}(\pi_{m(p)m(q)}(\delta)) = \pi_{m(p)m(r)}(\delta).$$

Aquí hemos usado que δ es admisible para $p^{m(r)}$, lo cual se cumple por la propiedad e) ya demostrada. ■

Observemos que $\mathbb{P}$ tiene un elemento máximo, la condición $\mathbb{1}$ determinada por $\mathrm{sop}\,\mathbb{1} = \{\kappa\}$, $\mathbb{1}_\kappa = \varnothing$ y con $T_{\mathbb{1}}$ igual al árbol de todas las sucesiones crecientes en $\pi_0[A]$.

Si $p, q \in \mathbb{P}$ son distintas de $\mathbb{1}$, definimos $p \leq^* q$ si $p \leq q$ y para todo $\gamma \in \mathrm{sop}\,q$ se cumple $p^\gamma = q^\gamma$.

El teorema siguiente recoge un ajuste técnico que usaremos en repetidas ocasiones:

Teorema 11.10 *Sean p, $q \in \mathbb{P}$ tales que se cumple la definición de $p \leq q$ salvo a lo sumo por la propiedad* f). *Entonces existe una condición $p' \in \mathbb{P}$ que se diferencia de p únicamente en que $T_{p'}$ es un subárbol de T_p y que cumple $p' \leq q$.*

Demostración: Llamamos $X = \mathrm{suc}_{T_p}(p^{*m}) \in U_{m(p)}$. Para cada $\delta \in X$ llamamos

$$B_\delta = \{\gamma \in \mathrm{sop}\,q \mid \gamma \neq m(q) \wedge \delta \text{ es admisible para } q^\gamma\}.$$

Tenemos que $|B_\delta| \leq \delta^0$, porque $p \in \mathbb{P}$. Claramente, si dos ordinales $\delta, \epsilon \in X$ cumplen $\delta^0 = \epsilon^0$, entonces $B_\delta = B_\epsilon$, y si $\epsilon^0 < \delta^0$ entonces $B_\epsilon \subset B_\delta$. Además, si el conjunto $\{\epsilon^0 \mid \epsilon \in X\} \cap \delta^0$ no está acotado en δ^0, entonces

$$B_\delta = \bigcup\{B_\epsilon \mid \epsilon \in X \wedge \epsilon^0 < \delta^0\}.$$

Por último, $\bigcup\{B_\delta \mid \delta \in X\} = \mathrm{sop}(q) \setminus \{m(q)\}$.

En efecto, dado $\gamma \in \mathrm{sop}(q) \setminus \{m(q)\}$ tal que $q^\gamma \neq \varnothing$ (en caso contrario la conclusión es trivial) entonces obviamente $\kappa \setminus (q^\gamma_{\max})^0 \in U_\kappa$, lo que implica que $\pi^{-1}_{m(p)\kappa}[\kappa \setminus (q^\gamma_{\max})^0] \in U_{m(p)}$, luego también $X \cap \pi^{-1}_{m(p)\kappa}[\kappa \setminus (q^\gamma_{\max})^0] \in U_{m(p)}$, y si δ está en esta intersección entonces $\gamma \in B_\delta$.

Esto nos permite construir una enumeración $\{\gamma_\eta\}_{\eta<\kappa}$ de $\mathrm{sop}(q) \setminus \{m(q)\}$ tal que para cada $\delta \in X$ se cumpla $B_\delta \subset \{\gamma_\eta\}_{\eta<\delta^0}$.

En efecto, sea $\{\zeta_\epsilon\}_{\epsilon<\kappa}$ una enumeración creciente de $\{\delta^0 \mid \delta \in X\}$, hemos visto que si $\zeta_\epsilon = \delta^0$, podemos definir $B'_\epsilon = B_{\delta^0}$ sin que importe la elección de δ. Partimos de una enumeración $\{\gamma_\eta\}_{\eta<\zeta_0}$ de B'_0, supuesta definida una enumeración $\{\gamma_\eta\}_{\eta<\zeta_\epsilon}$ de B'_ϵ, la extendemos hasta una enumeración $\{\gamma_\eta\}_{\eta<\zeta_{\epsilon+1}}$ de $B'_{\epsilon+1}$, y si $\zeta^* = \bigcup\limits_{\epsilon<\lambda} \zeta_\epsilon$, o bien $\zeta^* < \zeta_\lambda$, en cuyo caso podemos extender la enumeración $\{\gamma_\eta\}_{\eta<\zeta^*}$ hasta una enumeración de B'_λ, o bien $\zeta^* = \zeta_\lambda$, en cuyo caso $\{\gamma_\eta\}_{\eta<\zeta^*}$ es ya una enumeración de B'_λ. Es claro que de este modo obtenemos la enumeración requerida.

Para cada $\eta < \kappa$, por la propiedad e) de la página 310 podemos tomar un conjunto $C_\eta \in U_{m(p)}$ tal que $C_\eta \subset X$ y para todo $\delta \in C_\eta$ se cumpla la relación $\pi_{m(p)\gamma_\eta}(\delta) = \pi_{m(q)\gamma_\eta}(\pi_{m(p)m(q)}(\delta))$.

Sea $C = X \cap \underset{\eta<\kappa}{\triangle^*} C_\eta = \{\delta \in X \mid \bigwedge \eta < \delta^0 \ \delta \in C_\eta\} \in U_{m(p)}$.

Ahora definimos $T_{p'}$ como el árbol que resulta de cortar con C cada nivel del árbol T_p por encima de su tronco p^m. La condición p' es la determinada por este árbol y las sucesiones de p. Del hecho de que $p \in \mathbb{P}$ se sigue trivialmente que $p' \in \mathbb{P}$. Vamos a probar que $p' \leq q$.

Todas las condiciones de la definición de $p \leq q$ se cumplen trivialmente salvo la última. Para probarla tomamos $\gamma \in \operatorname{sop}(q)$ y $\delta \in \operatorname{suc}_{T_{p'}}(p'^m)$ admisible para p'^γ. Tenemos que probar que

$$\pi_{m(p')\gamma}(\delta) = \pi_{m(q)\gamma}(\pi_{m(p')m(q)}(\delta)).$$

Si $\gamma = m(q)$ la igualdad se cumple trivialmente, pues $\pi_{m(q)m(q)}$ es la identidad en A. Supongamos, pues, que $\gamma \in \operatorname{sop}(q) \setminus \{m(q)\}$. Entonces $\gamma \in B_\delta$ por definición de B_δ, luego existe un $\eta < \delta^0$ tal que $\gamma = \gamma_\eta$. Como $\delta \in C$, se cumple que $\delta \in C_\eta$, de donde se sigue la conclusión. ∎

El teorema siguiente prueba la existencia de condiciones no triviales[5]:

Teorema 11.11 *Si $q \in \mathbb{P}$ y $\alpha \in \mu \setminus \kappa$, existe $p \leq^* q$ tal que $\alpha \in \operatorname{sop} p$.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que $\alpha \notin \operatorname{sop} q$, pues en caso contrario basta tomar $p = q$. Supongamos en primer lugar que $\kappa \prec \alpha \prec m(q)$. En tal caso basta tomar como p la condición que coincide con q salvo que está definida además la sucesión p^α, que es cualquiera que cumpla la condición d) de la definición de $\mathbb{P}$. El resto de la definición de condición y todas las cláusulas de la definición de $p \leq^* q$ se cumplen trivialmente.

Consideremos ahora el caso en que $\alpha \not\preceq m(q)$. Como $(\mu \setminus \kappa, \preceq)$ es κ^{++}-dirigido, existe un $\beta \in \mu \setminus \kappa$ tal que $m(q) \preceq \beta$, $\alpha \preceq \beta$. Basta probar que q se extiende a una condición p tal que $\beta \in \operatorname{sop} p$, pues si $\beta \neq \alpha$ podemos aplicar

[5] Observemos que cualquier sucesión finita creciente en $\pi_0[A]$ determina una condición p de dominio $\{\kappa\}$ tal que p^κ es la sucesión dada y T_p es el árbol de las sucesiones crecientes en $\pi_0[A]$ que empiezan por p^κ o están contenidas en p^κ. Aplicando el teorema obtenemos condiciones con soportes finitos mayores.

el caso anterior para extender a su vez p a una condición con α en su soporte. Equivalentemente, podemos suponer que $m(q) \prec \alpha$.

Ahora definimos p^* como la condición que resulta de extender q con una sucesión $p^{*\alpha}$ en A tal que[6] $\pi_{\alpha\kappa}[p^{*\alpha}] = q_\kappa = p^*_\kappa$. Observemos que $p^{*m} = p^{*\alpha}$, por lo que con esta elección se cumple la propiedad c) de la definición de condición. Definimos $T_{p^*} = p^{*m\frown}\{s \in A^{<\omega} \mid \pi_{\alpha\, m(q)}[s] \in T_q/q^m\}$. Veamos que $p^* \in \mathbb{P}$.

Es claro que cumple las condiciones a) y b), la condición c) se cumple por la elección de p^α, esto a su vez implica que si $p^{*m} \neq \varnothing$, entonces, para $\gamma \in \operatorname{sop} p^*$ distinto de α se cumple que

$$(\pi_{m(p^*)\gamma}(p^{*m}_{\max}))^0 = (\pi_{\alpha\gamma}(q^\kappa_{\max}))^0 = (\pi_{\alpha\gamma}(q^m_{\max}))^0 = (\pi_{m(q)\gamma}(q^m_{\max}))^0,$$

luego $\pi_{m(p^*)\gamma}(p^{*m}_{\max})$ no es admisible para $q^\gamma = p^{*\gamma}$, y esto es trivialmente válido para $\gamma = \alpha = m(p^*)$. Por lo tanto p^* cumple la condición d). La propiedad f) es inmediata, pues si $\delta \in \operatorname{suc}_{T_{p^*}}(p^{*m})$, entonces $\pi_{m(p^*)m(q)}(\delta) \in \operatorname{suc}_{T_q}(q^m)$, luego

$$|\{\gamma \in \operatorname{sop}(p^*) \mid \delta \text{ es admisible para } p^\gamma\}| \leq \delta^0,$$

ya que esto vale con q en lugar de p^* y con $\pi_{m(p^*)m(q)}(\delta)$ en lugar de δ, y al restringir el conjunto a $\operatorname{sop}(q)$ perdemos a lo sumo un elemento, y si $\gamma \in \operatorname{sop}(q)$, la admisibilidad de δ para $p^\gamma = q^\gamma$ equivale a la de $\pi_{m(p^*)m(q)}(\delta)$ (podemos descartar el caso en que $m(q) = \kappa$ pues entonces el conjunto es finito y la condición se cumple trivialmente).

Sólo falta demostrar la propiedad e). Por construcción p^{*m} está en el tronco de T_{p^*} y $\operatorname{suc}_{T_{p^*}}(p^{*m}) = \pi^{-1}_{m(p^*)m(q)}[\operatorname{suc}_{T_q}(q^m)] \in U_{m(p^*)}$. Por último, si se cumple $p^{*m} \subset p^{*m\frown}t_1 \subset p^{*m\frown}t_2$, entonces

$$q^m \subset q^{m\frown}\pi_{m(p^*)m(q)}[t_1] \subset q^{m\frown}\pi_{m(p^*)m(q)}[t_2],$$

luego $\operatorname{suc}_{T_q}(q^{m\frown}\,\pi_{m(p^*)m(q)}[t_2]) \subset \operatorname{suc}_{T_q}(q^{m\frown}\,\pi_{m(p^*)m(q)}[t_1])$, y entonces aplicando $\pi^{-1}_{m(p^*)m(q)}$ llegamos a que $\operatorname{suc}_{T_{p^*}}(p^{*m\frown}t_2) \subset \operatorname{suc}_{T_{p^*}}(p^{*m\frown}t_1)$.

Con esto tenemos probado que $p^* \in \mathbb{P}$. Sin embargo, no cumple necesariamente $p^* \leq q$. En realidad se cumplen trivialmente todas las condiciones de la definición salvo quizá la última, la propiedad f), pero ahora podemos aplicar el teorema anterior, que nos da una condición $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \leq q$. Además, p sólo se diferencia de p^* en el árbol, por lo que obviamente $p \leq^* q$ y $\alpha \in \operatorname{sop}(p)$). ■

El c.p.o. de la sección precedente cumplía la c.c. κ^+. Ahora podemos probar un poco menos:

Teorema 11.12 $\mathbb{P}$ *cumple la c.c.* κ^{++}.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{p_\alpha\}_{\alpha<\kappa^{++}}$ una familia de condiciones de $\mathbb{P}$. Por el lema de los sistemas Δ podemos suponer que la familia de sus soportes es cuasidisjunta de raíz r. Como hay a lo sumo κ sucesiones finitas crecientes[0] en

[6]Aquí usamos que q_κ es una sucesión en $\pi_0[A] = \pi_{\alpha\kappa}[A]$.

$A \subset \kappa$, hay a lo sumo κ^+ posibilidades para cada $p_\alpha|_r$, luego restringiendo la familia podemos suponer que todas las condiciones coinciden en r. Similarmente, como hay κ posibilidades para p^m_α, podemos suponer que todas ellas son iguales a una misma sucesión t. Más aún, el número de subárboles del árbol de todas las sucesiones finitas crecientes^0 en A es a lo sumo κ^+, luego también podemos suponer que todos los árboles T_{p_α} son un mismo árbol T. Ahora basta probar que dos condiciones p y q tales que para todo $\gamma \in \mathrm{sop}(p) \cap \mathrm{sop}(q)$ se cumple $p^\gamma = q^\gamma$, $p^m = q^m$ y $T_p = T_q$ son compatibles.

Sea $\alpha < \mu$ un ordinal tal que $\bigwedge \gamma \in \mathrm{sop}(p) \cup \mathrm{sop}(q)\ \gamma \prec \alpha$. Por el teorema anterior existe una condición $p' \leq^* p$ tal que $\alpha \in \mathrm{sop}\, p'$. Más aún, en la prueba se ve que podemos exigir que $\mathrm{sop}(p') = \mathrm{sop}(p) \cup \{\alpha\}$.

Sea r la condición dada por $\mathrm{sop}(r) = \mathrm{sop}(p') \cup \mathrm{sop}(q)$ y de modo que $r^\gamma = p^\gamma$ para $\gamma \in \mathrm{sop}(p')$, $r^\gamma = q^\gamma$ para $\gamma \in \mathrm{sop}(q)$ y $T^r = T^{p'}$. Notemos que ciertamente $r \in \mathbb{P}$. La condición d) se cumple por la f), ya que

$$\pi_{m(r)\gamma}(r^m_{\max})^0 = (r^m_{\max})^0 = (r^\kappa_{\max})^0 = (p^\kappa_{\max})^0 = (q^\kappa_{\max})^0 = (p^m_{\max})^0 = (q^m_{\max})^0.$$

La condición e) se cumple porque si $\delta \in \mathrm{suc}_{T_r}(r^m)$, entonces

$$\pi_{m(r)m(p)}(\delta) \in \mathrm{suc}_{T_p}(p^m) = \mathrm{suc}_{T_q}(q^m).$$

Es claro además que $r \leq p' \leq p$, pero no podemos asegurar que $r \leq q$. Las cuatro primeras propiedades de la definición se cumplen trivialmente, y la propiedad e) se cumple también si pasamos a una condición r' que coincide con r salvo por que $T_{r'}/r'^m = T_r/r^m \cap \pi^{-1}_{m(r)m(q)}[T_q/q^m]$. Es claro que $r' \in \mathbb{P}$ y sigue cumpliendo $r' \leq p$, y ahora se cumple $r' \leq q$ salvo quizá por la propiedad f), pero ésta se garantiza mediante el teorema 11.10. La condición r'' que nos da este teorema se diferencia de r únicamente en que $T_{r''}$ es un subárbol de T_r, por lo que claramente sigue cumpliéndose que $r'' \leq p$, y ahora además $r'' \leq q$. ■

El análogo al teorema siguiente era trivial en el caso del c.p.o. de la sección precedente, y lo hemos usado varias veces de forma implícita:

Teorema 11.13 *$\mathbb{P}$ con el orden $\leq^*$ es κ-cerrado.*

Demostración: Sea $\lambda < \kappa$ y sea $\{p_\delta\}_{\delta<\lambda}$ una sucesión de condiciones de $\mathbb{P}$ decreciente respecto de $\leq^*$. Podemos tomar $\alpha \in \mu \setminus \kappa$ tal que $m(p_\delta) \prec \alpha$, para todo $\delta < \lambda$. Sea $p = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} p_\delta \cup \{(\alpha, t)\}$, donde t es una sucesión creciente^0 en A tal que $\pi_{\alpha\kappa}[t] = p^\kappa_0$.

Definimos $T_p = t^\frown(\bigcap\limits_{\delta<\lambda} \pi^{-1}_{\alpha m(p_\delta)}[T_{p_\delta}/p^m_\delta] \cap B)$, donde B es el árbol formado por las sucesiones finitas en $A \cap \pi_0^{-1}[\kappa \setminus \lambda]$. Con esto tenemos definida una condición $p \in \mathbb{P}$. En efecto, las condiciones a), b), c) se cumplen trivialmente, la condición d) se cumple porque si $\gamma \in \mathrm{sop}(p_\delta)$ entonces $\pi_{m(p)\gamma}(p^m_{\max})^0 = (p^\kappa_0)_{\max} = (p^m_{\delta\,\max})^0$, y $p^m_{\delta\,\max}$ no es admisible para $p^\gamma_\delta = p^\gamma$. De la condición e) la única parte no trivial es la segunda, pero, como $\kappa \setminus \lambda \in U_\kappa$, se cumple también que $\pi_0^{-1}[\kappa \setminus \lambda] = \pi^{-1}_{\alpha\kappa}[\kappa \setminus \lambda] \in U_\alpha$, luego si $t^\frown s \in T_p$, entonces

$$\mathrm{suc}_{T_p}(t^\frown s) = \bigcap_{\delta<\lambda} \pi^{-1}_{\alpha m(p_\delta)}[\mathrm{suc}_{T_{p_\delta}}(p^m_\delta{}^\frown \pi_{\alpha m(p_\delta)}[s])] \cap \pi_0^{-1}[\kappa \setminus \lambda] \in U_\alpha.$$

Por último, la propiedad f) se cumple porque si $\delta \in \mathrm{suc}_{T_p}(p^m)$, por construcción $\delta^0 \geq \lambda$ y

$$\{\gamma \in \mathrm{sop}(p) \mid \delta \text{ es admisible para } p^\gamma\} =$$
$$\bigcup_{\delta<\lambda} \{\gamma \in \mathrm{sop}(p_\delta) \mid \delta \text{ es admisible para } p_\delta^\gamma\},$$

que es una unión de $\lambda \leq \delta^0$ conjuntos de cardinal $\leq \delta^0$.

Como es habitual, se cumplen todas las condiciones de la definición de $p \leq p_\delta$ excepto a lo sumo la última, y el teorema 11.10 nos da una condición p'_δ que se diferencia de p únicamente en que $T_{p'_\delta}$ es un subárbol de T_p de manera que $p'_\delta \leq p_\delta$. Ahora basta tomar $T_{p''} = \bigcap\limits_{\delta<\lambda} T_{p'_\delta}$, lo cual determina una condición $p'' \in \mathbb{P}$ que cumple $p'' \leq^* p_\delta$ para todo $\delta < \lambda$. ■

Ahora probamos el resultado fundamental, análogo a 11.4:

Teorema 11.14 *Para toda fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$, dada una condición $q \in \mathbb{P}$ y nombres $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in V^{\mathbb{P}}$, existe $p \leq^* q$ tal que $p \parallel \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.*

Demostración: Tomemos $\eta > \kappa$ tal que V_η sea un modelo de (el suficiente) ZFC y consideramos $N \prec V_\eta$ tal que $V_{\kappa+1} \cup \{q, \mu, \mathbb{P}, \sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \subset N$, $|N| = \kappa^+$ y $N^\kappa \subset N$. Para ello basta construir una sucesión de núcleos de Skolem

$$N_0 = N(V_{\kappa+1} \cup \{q, \mu, \mathbb{P}\}), \quad N_{\alpha+1} = N(N_\alpha \cup N_\alpha^\kappa), \quad N_\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} N_\delta$$

y finalmente $N = N_{\kappa^+}$. En particular $\mathrm{sop}(q) \subset N \cap (\mu \setminus \kappa)$ y $|N \cap (\mu \setminus \kappa)| \leq \kappa^+$, luego podemos tomar $\alpha \in \mu \setminus \kappa$ tal que $\bigwedge \delta \in N \cap (\mu \setminus \kappa)\ \delta \prec \alpha$. El teorema 11.11 nos da una condición q' tal que $q' \leq^* q$ y $\alpha \in \mathrm{sop}(q')$. Más concretamente, la prueba muestra que podemos exigir que $m(q') = \alpha$ y que $\mathrm{sop}(q') = \mathrm{sop}(q) \cup \{\alpha\}$.

Llamemos $\mathbb{P}_0$ al conjunto de todas las sucesiones $p \in N$ cuyo dominio es un subconjunto de $\mu \setminus \kappa$ de cardinal $\leq \kappa$ que representaremos por $\mathrm{sop}(p)$, que contiene a κ, y de modo que si $\gamma \in \mathrm{sop}(p)$ entonces p^γ es una sucesión finita creciente^0 en A (salvo si $\gamma = \kappa$, en cuyo caso sólo exigimos que sea creciente).

Vamos a trabajar con condiciones de la forma $[p, t, T] = (p \cup \{(\alpha, t)\}, T)$, donde $p \in \mathbb{P}_0$, T es un subárbol del árbol de las sucesiones finitas crecientes^0 en κ y $t \in T$. Observemos que un objeto de esta forma no es necesariamente una condición.

Dado $[p, t, T]$ (sea o no una condición) y una sucesión finita s de manera que $t^\frown s \in T$, representaremos por $[p, t, T]_s$ al objeto $[\bar{p}, t^\frown s, \bar{T}]$ determinado por las condiciones siguientes:

a) $\mathrm{sop}(\bar{p}) = \mathrm{sop}(p)$.

b) Si $\gamma \in \mathrm{sop}(p)$ y $s = s_1{}^\frown s_2$, donde los términos de s_1 no son admisibles para p^γ y los de s_2 sí que lo son, entonces $\bar{p}^\gamma = p^{\gamma\frown}\pi_{\alpha\gamma}[s_2]$.

c) $\bar{T} = \bar{p}^{m\frown} T/\bar{p}^m$.

Es inmediato que si $[p,t,T] \in \mathbb{P}$ entonces $[p,t,T]_s \in \mathbb{P}$, $[p,t,T]_s \leq [p,t,T]$.

Vamos a demostrar que existen $p \in N$ y un subárbol T de $T_{q'}$ tales que $[p, q'^m, T] \in \mathbb{P}$, $[p, q'^m, T] \leq^* q'$ y $[p, q'^m, T] \parallel \phi$. Con esto quedará probado el teorema. Supongamos lo contrario.

Vamos a construir una sucesión de condiciones $\{[p_n, q'^m, T_n]\}_{n\in\omega}$, decreciente para $\leq^*$, con $[p_0, q'^m, T_0] = q'$ y de modo que si $t \in T_n/q'^m$ tiene longitud $n \geq 1$ y existe una condición $[r, q'^m{}^\frown t, R]$ tal que $[r, q'^m, R] \leq^* [p_n, q'^m, T_n]_t$ y $[r, q'^m, R] \Vdash \phi$ (resp. $[r, q'^m, R] \Vdash \neg\phi$), entonces $[p_n, q'^m, T_n]_t \Vdash \phi$ (resp. $[p_n, q'^m, T_n]_t \Vdash \neg\phi$).

Además, si t_1, $t_2 \in T_n/q'^m$ tienen ambas longitud $n \geq 1$, entonces

$$[p_n, q'^m, T_n]_{t_1} \Vdash \phi \quad (\text{resp. } \neg\phi) \quad \leftrightarrow \quad [p_n, q'^m, T_n]_{t_2} \Vdash \phi \quad (\text{resp. } \neg\phi).$$

Fijemos $n \geq 1$, supongamos construida $[p_{n-1}, q'^m, T_{n-1}]$ y fijemos una enumeración $\{t_\delta\}_{\delta\in\kappa}$ del nivel n-simo de T_{n-1}/q'^m de modo que si $\delta_1 < \delta_2$ entonces $t_{\delta_1 \max} \leq t_{\delta_2 \max}$.

Vamos a definir recurrentemente una sucesión $\{p_\delta\}_{\delta<\kappa}$ en $\mathbb{P}_0$ creciente respecto de la inclusión y una sucesión de árboles $\{T_\delta\}_{\delta<\kappa}$.

Supongamos definidos p_ϵ y T_ϵ para todo $\epsilon < \delta$. Si $\delta = 0$ llamamos $p''_\delta = p_{n-1}$, y en caso contrario definimos $p''_\delta = \bigcup_{\epsilon<\delta} p_\epsilon$ (que está en N porque $N^\kappa \subset N$). En ambos casos $p''_\delta \in \mathbb{P}_0$. Sea $[p''_\delta, q'_m, T_{n-1}]_{t_\delta} = [p'_\delta, q'^m{}^\frown t_\delta, T'_{n-1}]$. Distinguimos dos casos:

Si existen $p'''_\delta \in \mathbb{P}_0$ y un árbol T_δ tales que $p'_\delta \subset p'''_\delta$ y $[p'''_\delta, q'^m{}^\frown t_\delta, T_\delta] \parallel \phi$, entonces definimos $p_\delta = p''_\delta \cup (p'''_\delta \setminus p'_\delta)$. En caso contrario tomamos $p_\delta = p''_\delta$ y $T_\delta = T_{n-1}[q'^m{}^\frown t_\delta]$. En ambos casos p_δ extiende a p''_δ, luego a todas las sucesiones anteriores.

Ahora definimos $p_n = \bigcup_{\delta<\kappa} p_\delta \in N$. Sea $X = \{t_{\delta \max} \mid \delta < \kappa\} \in U_\alpha$. Para cada $\epsilon < \kappa$ sea

$$C_\epsilon = \begin{cases} X \text{ si no existe ningún } \delta < \kappa \text{ tal que } t^0_{\delta \max} = \epsilon, \\ \bigcap\{\mathrm{suc}_{T_\delta}(q'^m{}^\frown t_\delta) \mid \delta < \kappa \wedge t^0_{\delta \max} = \epsilon\} \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Observemos que $C_\epsilon \in U_\alpha$, pues si ϵ es de la forma $t^0_{\delta \max} \in A$, la propiedad e) de la página 309 nos da que $Y_\epsilon = \{\epsilon' \in A \mid \epsilon'^0 = \epsilon\}$ cumple $|Y_\epsilon| < \kappa$ y

$$\{\delta < \kappa \mid t^0_{\delta \max} = \epsilon\} = \bigcup_{\epsilon' \in Y_\epsilon} \{\delta < \kappa \mid t_{\delta \max} = \epsilon'\}$$

tiene también cardinal $< \kappa$, y la construcción de los árboles T_δ muestra que los conjuntos $\mathrm{suc}_{T_\delta}(q'^m{}^\frown t_\delta)$ están todos en U_α. Sea

$$X^* = X \cap \mathop{\triangle^*}_{\epsilon<\kappa} C_\epsilon \in U_\alpha.$$

Así, si $\epsilon \in X^*$, para todo $\delta < \kappa$ tal que $\eta = t^0_{\delta \max} < \epsilon^0$ se cumple que $\epsilon \in C_\eta$, luego $\epsilon \in \mathrm{suc}_{T_\delta}(q'^m{}^\frown t_\delta)$.

Llamemos T al árbol que se obtiene de T_{n-1} sustituyendo $T_{n-1}/q'^m{}^\frown t_\delta$ por $T_\delta/q'^m{}^\frown t_\delta$, para cada $\delta < \kappa$, y cortando todos los niveles por encima de q'^m con X^*. Vamos a ver que $p^* = [p_n, q'^m, T] \in \mathbb{P}$.

Las condiciones a) y b) se cumplen trivialmente por construcción. La propiedad c) también es inmediata, pues $p^{*\kappa} = q^\kappa = q'^\kappa$ y $p^{*m} = q'^m$, y basta tener en cuenta la propiedad correspondiente para q'. Para probar d) tomamos $\gamma \in \operatorname{sop}(p^*)$, y no perdemos generalidad si suponemos que $\gamma \neq \alpha$. Si $\gamma \in \operatorname{sop}(p_{n-1})$, entonces trivialmente $q'^m_{\max} = p^m_{n-1\,\max}$ no es admisible para $p^{*\gamma} = p^\gamma_{n-1}$, porque $[p_{n-1}, q'^m, T_{n-1}] \in \mathbb{P}$. En caso contrario, existe un mínimo $\delta < \kappa$ tal que $p^{*\gamma} = p^\gamma_\delta$, pero entonces $t_{\delta\,\max}$ no es admisible para p^γ_δ y $(q'^m_{\max})^0 < t^0_{\delta\,\max}$, luego $q'^m_{\max}$ tampoco lo es, y esto equivale a que $\pi_{m(p^*)\gamma}(q'^m_{\max})$ no lo sea. La propiedad e) se comprueba sin dificultad.

La única propiedad que requiere algo más de atención es la f). Fijemos $\epsilon \in \operatorname{suc}_{T_{p^*}}(p^{*m})$ y sea

$$B_\epsilon = \{\gamma \in \operatorname{sop}(p_n) \mid \epsilon \text{ es admisible para } p^\gamma_n\}.$$

Tenemos que probar que $|B_\epsilon| \leq \epsilon^0$. Si $\gamma \in B_\epsilon \setminus \operatorname{sop}(p_{n-1})$, podemos considerar el mínimo $\delta < \kappa$ tal que $\gamma \in \operatorname{sop}(p_\delta)$. Entonces no puede ser $p_\delta = p''_\delta$, luego $p_\delta = p''_\delta \cup (p'''_\delta \setminus p'_\delta)$ y, concretamente, $p^\gamma = p^\gamma_\delta = p'''^\gamma_\delta$, luego $t_{\delta\,\max}$ no es admisible para p^γ (porque $[p'''_\delta, q'^m{}^\frown t_\delta, T_\delta] \in \mathbb{P}$), pero ϵ sí que lo es, luego tiene que ser $t^0_{\delta\,\max} < \epsilon^0$.

Para cada $\delta < \kappa$, sea $B_{\epsilon\delta}$ el conjunto de los γ tales que δ es el mínimo ordinal tal que $\gamma \in \operatorname{sop}(p_\delta)$ y ϵ es admisible para $p^\gamma_n = p^\gamma_\delta$. Así, hemos probado que

$$B_\epsilon = \bigcup\{B_{\epsilon\delta} \mid \delta < \kappa \land t^0_{\delta\,\max} < \epsilon^0\} \cup \{\gamma \in \operatorname{sop}(p_{n-1}) \mid \epsilon \text{ es admisible para } p^\gamma_{n-1}\}.$$

Como $[p_{n-1}, q'^m, T_{n-1}] \in \mathbb{P}$, teniendo en cuenta que $\epsilon \in \operatorname{suc}_{T_{n-1}}(q'^m)$, el último conjunto tiene cardinal $\leq \epsilon^0$.

Por otra parte, $|\{\delta < \kappa \mid t^0_{\delta\,\max} < \epsilon^0\}| \leq \epsilon^0$, pues, obviamente, el conjunto $A_\epsilon = \{\delta^0 \mid \delta^0 < \epsilon^0\}$ tiene cardinal $\leq \epsilon^0$, y por la propiedad e) de la página 309 sabemos que, para todo $\delta_1 \in A_\epsilon$, el conjunto $A_{\delta_1} = \{\delta \in A \mid \delta^0 = \delta_1\}$ tiene cardinal $< \epsilon^0$ y

$$\{\delta < \kappa \mid t^0_{\delta\,\max} < \epsilon^0\} = \bigcup_{\delta_1 \in A_\epsilon} \bigcup_{\delta \in A_{\delta_1}} \{\delta < \kappa \mid t^0_{\delta\,\max} = \delta_1\},$$

y cada uno de los conjuntos de la derecha tiene cardinal $\delta_1 < \epsilon^0$. Por lo tanto, basta probar que $|B_{\epsilon\delta}| \leq \epsilon^0$, para cada $\delta < \kappa$ tal que $t^0_{\delta\,\max} < \epsilon^0$.

Según hemos visto, tiene que ser $p_\delta = p''_\delta \cup (p'''_\delta \setminus p'_\delta)$ y $p^\gamma = p^\gamma_\delta = p'''^\gamma_\delta$. Como $\epsilon \in X^*$ y $t^0_{\delta\,\max} < \epsilon^0$, tenemos que $\epsilon \in \operatorname{suc}_{T_\delta}(q'^m{}^\frown t_\delta)$, y teniendo en cuenta que $p^*_\delta = [p'''_\delta, q'^m{}^\frown t_\delta, T_\delta] \in \mathbb{P}$, resulta que

$$|\{\gamma \in \operatorname{sop}(p^*_\delta) \mid \epsilon \text{ es admisible para } p^{*\gamma}_\delta\}| \leq \epsilon^0,$$

pero $B_{\epsilon\delta}$ está contenido en el conjunto de la izquierda, pues si $\gamma \in B_{\epsilon\delta}$, entonces ϵ es admisible para $p^\gamma_\delta = p'''^\gamma_\delta = p^{*\gamma}_\delta$. Así pues, $|B_{\epsilon\delta}| \leq \epsilon^0$.

Es claro que $p^* = [p_n, q'^m, T] \leq^* [p_{n-1}, q'^m, T_{n-1}]$.

Veamos ahora que la condición que acabamos de construir cumple la primera de las dos propiedades que queremos que tenga $[p_n, q'^m, T_n]$, es decir, que si $t \in T/q'^m$ tiene longitud n y existe una condición $[r, q'^m{}^\frown t, R] \in \mathbb{P}$ tal que $[r, q'^m{}^\frown t, R] \leq^* [p_n, q'^m, T]_t$ y $[r, q'^m{}^\frown t, R] \Vdash \phi$ (resp. $[r, q'^m{}^\frown t, R] \Vdash \neg\phi$), entonces $[p_n, q'^m, T]_t \Vdash \phi$ (resp. $[p_n, q'^m, T]_t \Vdash \neg\phi$).

En primer lugar, existe un $\delta < \kappa$ tal que $t = t_\delta$, y la existencia de r y R implica que en la construcción de p_δ se da el caso no trivial $p_\delta = p''_\delta \cup (p'''_\delta \setminus p'_\delta)$, pues si $p' = [p_n, q'^m, T]_{t_\delta}$, entonces, como $p''_\delta \subset p_n$, es claro que $p'_\delta \subset p' \subset r$.

Consecuentemente, $\bar{p}_\delta = [p_n, q'^m, T]_{t_\delta} \leq^* [p'''_\delta, q'_m{}^\frown t_\delta, T_\delta]$, pues para formar $[p_n, q'^m, T]_{t_\delta}$ las sucesiones p_n^γ con $\gamma \in \operatorname{sop}(p'''_\delta)$ se extienden precisamente hasta $p'^\gamma_\delta = p'''^\gamma_\delta$ y $T_{\bar{p}_\delta}/(q'^m{}^\frown t_\delta) = T/(q'^m{}^\frown t_\delta)$ es un subárbol de $T_\delta/(q'^m{}^\frown t_\delta)$ (el que resulta de restringirlo a sucesiones en X^*). Así pues,

$$[r, q'^m{}^\frown t_\delta, R] \leq^* [p_n, q'^m, T]_{t_\delta} \leq^* [p'''_\delta, q'_m{}^\frown t_\delta, T_\delta].$$

Ahora la conclusión es inmediata: las condiciones de los extremos deciden ϕ, luego la central también lo decide, y las tres tienen que hacerlo en el mismo sentido.

Veamos ahora cómo refinar la condición hasta otra que cumpla también la segunda propiedad. Descompongamos

$$\operatorname{Niv}_n(T/q'^m) = P_1^n \cup P_2^n \cup P_3^n,$$

donde P_1^n está formado por las sucesiones t tales que $[p_n, q'^m, T]_t \Vdash \phi$, el conjunto P_2^n está formado por las que cumplen $[p_n, q'^m, T]_t \Vdash \neg\phi$ y P_3^n contiene las restantes.

Supuestos definidos conjuntos tales que $\operatorname{Niv}_j(T/q'^m) = P_1^j \cup P_2^j \cup P_3^j$, definimos P_i^{j-1} como el conjunto de las sucesiones $t \in \operatorname{Niv}_{j-1}(T)$ tales que

$$\{\delta \in \kappa \mid t^\frown \delta \in P_i^j\} \in U_\alpha,$$

y es claro que también $\operatorname{Niv}_{j-1}(T/q'^m) = P_1^{j-1} \cup P_2^{j-1} \cup P_3^{j-1}$. Llegamos así a que

$$\operatorname{Niv}_1(T/q'^m) = \operatorname{suc}_T(q'^m) = P_1^1 \cup P_2^1 \cup P_3^1,$$

luego existe un i tal que $P_i^1 \in U_\alpha$, y es fácil ver que esto se traduce en que podemos "podar" el árbol T hasta un subárbol T_n de tronco q'^m de modo que $\operatorname{Niv}_n(T_n/q'^m) = P_i^n$ y que siga cumpliendo la propiedad e) de la definición de $\mathbb{P}$.

Es claro entonces que $[p_n, q'^m, T_n] \in \mathbb{P}$ y

$$[p_n, q'^m, T_n] \leq^* [p_n, q'^m, T] \leq^* [p_{n-1}, q'^m, T_{n-1}].$$

Veamos que esta condición cumple las dos propiedades requeridas. Para toda $t \in T_n/q'^m$ de longitud n, si existe una condición $[r, q'^m{}^\frown t, R] \in \mathbb{P}$ tal que $[r, q'^m{}^\frown t, R] \leq^* [p_n, q'^m, T_n]_t$ y $[r, q'^m{}^\frown t, R] \Vdash \phi$ (resp. $[r, q'^m{}^\frown t, R] \Vdash \neg\phi$), entonces $[r, q'^m\frown t, R] \leq^* [p_n, q'^m, T_n]_t \leq^* [p_n, q'^m, T]_t$, y hemos probado que entonces $[p_n, q'^m, T]_t \Vdash \phi$ (resp. $[p_n, q'^m, T]_t \Vdash \neg\phi$), y esto a su vez implica que $[p_n, q'^m, T_n]_t \Vdash \phi$ (resp. $[p_n, q'^m, T_n]_t \Vdash \neg\phi$). Esto prueba que $[p_n, q'^m, T_n]$ cumple la primera propiedad.

En particular vemos que $[p_n, q'^m, T]_t \Vdash \phi$ (resp. $[p_n, q'^m, T]_t \Vdash \neg\phi$) si y sólo si $[p_n, q'^m, T_n]_t \Vdash \phi$ (resp. $[p_n, q'^m, T_n]_t \Vdash \neg\phi$), pero todas las sucesiones $t \in T_n/q'^m$ cumplen $[p_n, q'^m, T]_t \Vdash \phi$, o todas cumplen $[p_n, q'^m, T]_t \Vdash \neg\phi$, o ninguna cumple ninguno de los dos casos, luego lo mismo vale para las condiciones $[p_n, q'^m, T_n]$ que, por consiguiente, cumplen también la segunda propiedad.

Así pues, tenemos definida la sucesión $\{[p_n, q'^m, T_n]\}_{n\in\omega}$, y el teorema 11.13 nos da una extensión común respecto a $\leq^*$. De hecho, teniendo en cuenta que los soportes de todas las condiciones de la sucesión tienen el mismo máximo α, es fácil ver que la prueba puede modificarse (simplificarse, de hecho) para concluir que la extensión puede tomarse de la forma $[p, q'^m, T]$, donde $p = \bigcup\limits_{n\in\omega} p_n \in N$.

Las dos propiedades que cumplen los términos de la sucesión que hemos construido tienen la traducción siguiente:

a) *Para toda sucesión $t \in T/q'^m$ no vacía, si existe $[r, q'^m\frown t, R] \in \mathbb{P}$ tal que $[r, q'^m, R] \leq^* [p, q'^m, T]_t$ y $[r, q'^m, R] \Vdash \phi$ (resp. $[r, q'^m, R] \Vdash \neg\phi$), entonces $[p, q'^m, T]_t \Vdash \phi$ (resp. $[p, q'^m, T]_t \Vdash \neg\phi$).*

b) *Si t_1, $t_2 \in T/q'^m$ tienen la misma longitud $n \geq 1$, entonces*

$$[p, q'^m, T]_{t_1} \Vdash \phi \quad (\textit{resp. } \neg\phi) \quad \leftrightarrow \quad [p, q'^m, T]_{t_2} \Vdash \phi \quad (\textit{resp. } \neg\phi).$$

En efecto, para probar a) observamos que si t tiene longitud $n \geq 1$, entonces

$$[r, q'^m, R] \leq^* [p, q'^m, T]_t \leq^* [p_n, q'^m, T_n]_t,$$

luego $[p_n, q'^m, T_n]_t \Vdash \phi$ (resp. $\neg\phi$), y esto implica que $[p, q'^m, T]_t \Vdash \phi$ (resp. $\neg\phi$).

En particular,

$$[p, q'^m, T]_t \Vdash \phi \quad (\text{resp. } \neg\phi) \quad \leftrightarrow \quad [p_n, q'^m, T_n]_t \Vdash \phi \quad (\text{resp. } \neg\phi),$$

y sabemos que la parte derecha no depende de t. Esto prueba b).

Veamos ahora que si $t \in T/q'^m$ tiene longitud $n \geq 0$, entonces toda extensión de $[p, q'^m, T]_t$ es compatible con una condición $[p, q'^m, T]_{t'}$, para cierta sucesión $t' \in T/q'^m$ de longitud $n + 1$.

Sea, pues, $r \leq [p, q'^m, T]_t$. Entonces $r^\alpha \in T$ y $q'^m\frown t \subset r^\alpha$. Supongamos en primer lugar que la inclusión es estricta, de modo que existe un $t' \in T/q'^m$ de longitud $n+1$ tal que $q'^m\frown t' \subset r^\alpha$. Basta probar entonces que $r \leq [p, q'^m, T]_{t'}$. Llamemos $p(t) = [p, q'^m, T]_t$ y $p(t') = [p, q'^m, T]_{t'}$.

a) Ciertamente $\operatorname{sop}(p(t')) = \operatorname{sop}(p(t)) \subset \operatorname{sop}(r)$.

c) También es claro que $r^{m(p(t'))} = r^{m(p(t))} \in T_{p(t')} = T[q'^m\frown t']$.

Para probar las propiedades b) y d) tomamos

$$\gamma \in \operatorname{sop}(p(t')) = \operatorname{sop}(p(t)),$$

y sea $r^{m(p(t'))} = q'^m{}^\frown t'^\frown s = q'^m{}^\frown t^\frown t'_{\max}{}^\frown s = p(t)^m{}^\frown t'_{\max}{}^\frown s$. Sabemos que r^γ se obtiene adjuntando a $p(t)^\gamma$ los términos admisibles de la sucesión $\pi_{m(p(t'))\gamma}[t'_{\max}{}^\frown s]$ y $p(t')^\gamma = p(t)^\gamma{}^\frown \pi_{m(p(t'))\gamma}(t'_{\max})$, luego r^γ se obtiene adjuntando a $p(t')^\gamma$ los términos admisibles de la sucesión $\pi_{m(p(t'))\gamma}[s]$. Esto prueba d) y, en particular, muestra que $p(t')^\gamma \subset r^\gamma$, luego también tenemos b).

La propiedad e) es inmediata, pues $\pi_{m(r)m(p(t'))}$ transforma T_r/r^m en un subárbol de $T_{p(t)}/r^{m(p(t))} = T_{p(t')}/r^{m(p(t'))}$. La propiedad f) se cumple trivialmente.

Falta considerar el caso en que $r^\alpha = q'^m{}^\frown t = p(t)^m$. Tomamos $\epsilon \in \mathrm{suc}_{T_r}(r^m)$ que sea admisible para $p(t)^m$ y consideramos una extensión $r' \leq r$ con el mismo soporte que r de modo que si $\gamma \in \mathrm{sop}(r)$ cumple que ϵ es admisible para r^γ entonces $r'^\gamma = r^\gamma{}^\frown \pi_{m(r)\gamma}(\epsilon)$, y en caso contrario $r'^\gamma = r^\gamma$.

Si hacemos $T_{r'} = r'^m{}^\frown T_r/r'^m$ se cumple claramente que $r' \in \mathbb{P}$, así como todas las propiedades de la definición de $r' \leq r$ salvo a lo sumo la última, que se garantiza restringiendo $T_{r'}$ según el teorema 11.10. Es claro entonces que $r' \leq r$ y $r'^{m(p(t))}$ extiende estrictamente a $p(t)^m$, luego por la parte ya probada existe un t' que extiende a t tal que $r' \leq p(t')$, luego r y $p(t)$ son compatibles.

Como $[p, q'^m, T] \in \mathbb{P}$, $[p, q'^m, T] \leq q'$ y $p \in N$, estamos suponiendo que $[p, q'^m, T] = [p, q'^m, T]_\varnothing$ no decide ϕ. Ahora podemos concluir que ninguna condición $[p, q'^m, T]_t$ con $t \in T/q'^m$ puede decidir ϕ.

En efecto, sabemos que todas las condiciones de la forma $[p, q'^m, T]_{t'}$ (con $t' \in T/q'^m$ de longitud $n+1$) fuerzan ϕ, o bien todas fuerzan $\neg\phi$, o bien ninguna decide ϕ. Si se diera uno de los dos primeros casos, como toda extensión de una condición $[p, q'^m, T]_t$ con t de longitud n es compatible con una de la forma $[p, q'^m, T]_{t'}$, tendríamos que el conjunto de las condiciones que fuerzan ϕ (resp. $\neg\phi$) sería denso bajo $[p, q'^m, T]_t$, luego esta condición decidiría ϕ. Así pues, si las condiciones $[p, q'^m, T]_t$ con t de longitud n no deciden ϕ, las de dicha forma con t de longitud $n+1$ tampoco lo hacen.

A su vez, de aquí concluimos que si $[r, s, R] \in \mathbb{P}$, $[r, s, R] \leq [p, q'^m, T]$, entonces $[r, s, R]$ no decide ϕ.

En efecto, podemos expresar $s = q'^m{}^\frown t$, con $t \in T/q'^m$, y entonces es claro que $[r, s, R] \leq^* [p, q'^m, T]_t$, y hemos visto que si $[r, s, R]$ decidiera ϕ, también lo haría $[p, q'^m, T]_t$.

Ahora bien, obviamente existe una condición $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq [p, q'^m, T]$ y $r \parallel \phi$. Al elegir η al principio de la prueba, podemos tomarlo de modo que la fórmula $r \parallel \phi$ sea absoluta para V_η, por lo que r cumple lo requerido en V_η y, por consiguiente, podemos tomar $r \in N$. (Aquí usamos que $[p, q'^m, T] \in N$.) Por el teorema 11.11 podemos extender r a una condición con α en su soporte, pero entonces se trata de una condición de la forma $[r, s, R]$ que extiende a $[p, q'^m, T]$ y decide ϕ, en contradicción con lo que hemos probado. ■

A partir de aquí relativizamos la construcción de $\mathbb{P}$ a un modelo transitivo numerable M de ZFC+HCG en el que exista un cardinal κ que cumpla las hipótesis que hemos empleado. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Para cada

$\alpha < \mu \setminus \kappa$, definimos $G_\alpha = \{p \in G \mid \alpha \in \operatorname{sop}(p)\}$, que es no vacío por 11.11, y $G^\alpha = \bigcup G_\alpha$.

Se cumple que $G^\alpha : \omega \longrightarrow \kappa$ es cofinal creciente. Para probarlo fijamos $n \in \omega$ y $\epsilon < \kappa$ y basta probar que el conjunto

$$D_{\alpha,n,\epsilon} = \{d \in \mathbb{P} \mid \alpha \in \operatorname{sop}(d) \land \bigvee k \in \mathcal{D}d^\alpha\ (k > n \land d^\alpha_k \geq \epsilon)\}$$

es denso en $\mathbb{P}$. Ya sabemos que toda condición se extiende a otra con α en su soporte. Falta probar que toda condición p con α en su soporte se puede extender a otra en dicho conjunto.

Sea $\epsilon' = \text{máx}\{\epsilon, p^\alpha_{\max}\}$. Como $\kappa \setminus \epsilon' \in U_\alpha$, tenemos que $\pi^{-1}_{m(p)\alpha}[\kappa \setminus \epsilon'] \in U_{m(p)}$, luego podemos tomar $\delta \in \pi^{-1}_{m(p)\alpha}[\kappa \setminus \epsilon'] \cap \operatorname{suc}_{T_p}(p^m)$. Así $\pi_{m(p)\alpha}(\delta) \geq \epsilon$ y δ es admisible para p^α. Ahora tomamos una sucesión $s \in T_p/p^m$ de longitud $n+1$ que empiece por δ. Definimos una condición d con el mismo soporte que p tal que $d^m = p^m{}^\frown s$ y para todo $\gamma \in \operatorname{sop}(d)$, la sucesión d^γ se define como la prolongación de p^γ determinada por la propiedad d) de la definición de $\leq$. Si hacemos $T_d = p^m{}^\frown s^\frown T_p/(p^m{}^\frown s)$ obtenemos una condición $d \in \mathbb{P}$ que cumple $d \leq p$ salvo a lo sumo por la condición f), pero esto se arregla con el teorema 11.10 restringiendo el árbol T_d. La condición d así definida cumple que $d^\alpha = p^\alpha{}^\frown \pi_{m(p)\alpha}[s]$, que tiene longitud $> n$ y $d^\alpha_{\max} \geq \pi_{m(p)\alpha}(\delta) \geq \epsilon$. Por lo tanto $d \in D_{\alpha,n,\epsilon}$.

Ejercicio: Probar que cada G^α está finalmente en todo elemento de U_α.

Veamos ahora que si $\alpha \neq \beta$, entonces $G^\alpha \neq G^\beta$. Más precisamente, si $\alpha < \beta$, entonces $G^\alpha(k) < G^\beta(k)$ para todo k suficientemente grande.

Consideremos cualquier condición $p \in \mathbb{P}$ que tenga a α y β en su soporte. Extendiéndola si es necesario podemos suponer que $\alpha, \beta \prec \gamma = m(p)$. Por la propiedad f) de la página 310 se cumple que $X = \{\delta < \kappa \mid \pi_{\gamma\alpha}(\delta) < \pi_{\gamma\beta}(\delta)\} \in U_\gamma$.

Si cambiamos T_p por el árbol que resulta de cortar con X todos sus niveles superiores a p^m obtenemos una extensión de p (que seguiremos llamando p) con la propiedad de que

$$\operatorname{suc}_{T_p}(p^m) \subset \{\delta < \kappa \mid \pi_{m(p)\alpha}(\delta) < \pi_{m(p)\beta}(\delta)\}.$$

A su vez podemos extender p^α y p^β para que tengan la misma longitud. Por último tomamos $\delta \in \operatorname{suc}_{T_p}(p^m)$ admisible para p^α y p^β, y formamos una condición $q \in \mathbb{P}$ con el mismo soporte que p y de modo que $q^\epsilon = p^\epsilon{}^\frown \pi_{\gamma\epsilon}(\delta)$ si δ es admisible para p^ϵ y $q^\epsilon = p^\epsilon$ en caso contrario. El árbol correspondiente es $T_q = p^m{}^\frown \delta^\frown T_p/(p^m{}^\frown \delta)$. Con esto hemos probado que toda condición puede extenderse a una que cumpla:

a) $\alpha, \beta \in \operatorname{sop}(q)$,

b) $\mathcal{D}q^\alpha = \mathcal{D}q^\beta$,

c) $q^\alpha_{\max} = \pi_{m(q)\alpha}(q^m_{\max})$, $q^\beta_{\max} = \pi_{m(q)\beta}(q^m_{\max})$,

d) $\mathrm{suc}_{T_q}(q^m) \subset \{\delta < \kappa \mid \pi_{m(q)\alpha}(\delta) < \pi_{m(q)\beta}(\delta)\}$.

Por lo tanto, podemos tomar $q \in G$ que cumpla estas condiciones. Así, si k está fuera del dominio de q^α y q^β, entonces $G^\alpha(k) = p^\alpha(k)$ y $G^\beta(k) = p^\beta(k)$, para cierta condición $p \in G$ que podemos suponer $p \leq q$.

Pongamos que $p^{m(q)} = q^m{}^\frown t$, con $t \in T_q/q^m$. Sucede que todos los términos de t son admisibles para q^α y q^β, por la propiedad c), luego $p^\alpha = q^\alpha{}^\frown \pi_{m(q)\alpha}[t]$, $p^\beta = q^\beta{}^\frown \pi_{m(q)\beta}[t]$, y por la propiedad b) resulta que $G^\alpha(k) = \pi_{m(q)\alpha}(t_i)$, $G^\beta(k) = \pi_{m(q)\beta}(t_i)$, para un mismo i, luego $G^\alpha(k) < G^\beta(k)$ por la propiedad d).

El teorema siguiente recoge los resultados que hemos probado junto con algunos más:

Teorema 11.15 *Si M es un modelo transitivo numerable de* ZFC + HCG *y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces:*

a) Todo subconjunto acotado de κ en $M[G]$ está en M.

b) $M[G]$ tiene los mismos cardinales que M.

c) Las sucesiones $G^\alpha : \omega \longrightarrow \kappa$ son cofinales y distintas dos a dos.

d) En $M[G]$ se cumple la HCG *bajo κ, pero $2^\kappa \geq \mu$.*

Demostración: a) Sea $P = (\mathcal{P}\kappa)^M$. Supongamos que existe $x \in M[G]$ tal que existe $\lambda < \kappa$ con $x \subset \lambda$ pero $x \notin P$. Sea $x = \tau_G$ y sea $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \Vdash \tau \subset \check{\lambda} \land \tau \notin \check{P}$.

Los teoremas 11.13 y 11.14 nos permiten construir en M una sucesión decreciente para $\leq^*$ de condiciones $\{p_\delta\}_{\delta<\lambda}$ tales que $p_0 \leq^* p$ y $p_\delta \parallel \check{\delta} \in \tau$. Una nueva aplicación de 11.13 nos da una condición p^* que extiende a todas las condiciones de la sucesión. Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $p^* \in G$, entonces $\tau_G \subset \lambda$ y $\tau_G \notin \mathcal{P}^M\kappa$. Pero por otra parte $\tau_G = \{\delta < \lambda \mid p^* \Vdash \check{\delta} \in \tau\} \in M$, contradicción.

b) Por el teorema 11.12 sabemos que $\mathbb{P}$ conserva todos los cardinales $\geq \kappa^{++}$ y por la propiedad anterior (por el mismo argumento empleado en 11.6) también conserva los cardinales $< \kappa$, luego el propio κ seguirá siendo un cardinal en $M[G]$, por ser supremo de cardinales. Sólo falta probar que κ^+ sigue siendo un cardinal en $M[G]$. Esto lo demostraremos en el teorema siguiente.

c) Lo hemos demostrado en los párrafos precedentes a este teorema.

d) La propiedad a) implica que si $\nu < \kappa$ es un cardinal^M, entonces se cumple $\mathcal{P}^M\nu = \mathcal{P}^{M[G]}\nu$, de donde $(2^\nu)^{M[G]} = (2^\nu)^M = (\nu^+)^M = (\nu^+)^{M[G]}$, donde hemos usado que los cardinales $< \kappa$ en M son los mismos que en $M[G]$.

Como $G \in M[G]$, la aplicación $\mu \setminus \kappa \longrightarrow {}^\kappa 2$ dada por $\alpha \mapsto G^\alpha$ está en $M[G]$ y es inyectiva, luego $(2^\kappa)^{M[G]} \geq \mu$. ■

Está pendiente demostrar un caso del apartado b) del teorema anterior:

Teorema 11.16 *Si M es un modelo transitivo de* ZFC + HCG *y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces $(\kappa^+)^M$ es un cardinal en $M[G]$.*

Demostración: Si $(\kappa^+)^M$ no es un cardinal en $M[G]$, entonces tiene que ser $\xi = \operatorname{cf}^{M[G]}(\kappa^+)^M \leq \kappa$, pero no puede darse la igualdad porque κ es singular en $M[G]$. Así pues, $\xi < \kappa$. Sea $g : \xi \longrightarrow (\kappa^+)^M$ cofinal, $g \in M[G]$. Pongamos que $g = \tau_G$ y sea $q \in \mathbb{P}$ tal que $q \Vdash \tau : \check{\xi} \longrightarrow \check{\kappa}^+$ cofinal.

Razonando en M, tomamos un modelo N en las mismas condiciones que en la prueba del teorema 11.14 (ahora con $\tau \in N$), y como allí, fijamos un $\alpha \in \mu \setminus \kappa$ tal que $\bigwedge \delta \in N \cap (\mu \setminus \kappa)\ \delta \prec \alpha$. Elegimos también una condición $q' \leq q$ tal que $\operatorname{sop}(q') = \operatorname{sop}(q) \cup \{\alpha\}$. Usaremos la misma notación $[p, t, T]$ para (posibles) condiciones de $\mathbb{P}$.

Veamos que podemos construir una sucesión $\{p_\delta\}_{\delta<\xi}$ en $\mathbb{P}_0$ y una sucesión de árboles $\{T_\delta\}_{\delta<\xi}$ de modo que $\{[p_\delta, q'^m, T_\delta]\}_{\delta<\xi}$ es una sucesión decreciente respecto de $\leq^*$ de condiciones que extienden a q' y con la propiedad siguiente:

Para toda sucesión $t \in T_\delta/q'^m$ no vacía y todo $\epsilon < \kappa^+$, si existe una condición $[r, q'^m \frown t, R] \in \mathbb{P}$ tal que $[r, q'^m, R] \leq^* [p_\delta, q'^m, T_\delta]_t$ y $[r, q'^m, R] \Vdash \tau(\check{\delta}) = \check{\epsilon}$, entonces también $[p_\delta, q'^m, T_\delta]_t \Vdash \tau(\check{\delta}) = \check{\epsilon}$.

En efecto, si suponemos construidas $\{p_\delta\}_{\delta<\eta}$ y $\{T_\delta\}_{\delta<\eta}$, el teorema 11.13 nos da una condición que extiende a todas las condiciones $[p_\delta, q'^m, T_\delta]$, y el hecho de que todas tengan soporte con el mismo máximo nos permite adaptar la prueba para garantizar que la extensión es de la forma $[p_\eta, q'^m, T]$, con $p_\eta = \bigcup\limits_{\delta<\eta} p_\delta \in N$.

Ahora aplicamos a esta condición toda la construcción considerada en la prueba del teorema 11.14 (simplificada porque no necesitamos que se cumpla la condición análoga a la condición b) de la página 322), considerando, en vez de las dos fórmulas ϕ y $\neg\phi$, las infinitas fórmulas $\tau(\check{\delta}) = \check{\epsilon}$, para cada $\epsilon < \kappa^+$. El resultado es una condición $[p_\eta, q'^m, T_\eta]$ que cumple lo requerido.

Una vez construida la sucesión, otra aplicación del teorema 11.13 nos da una condición, que podemos tomar de la forma $[p, q'^m, T]$, tal que, para todo $\delta < \xi$ cumple $[p, q'^m, T] \leq^* [p_\delta, q'^m, T_\delta]$.

Obviamente, dado $\delta < \xi$, existe una condición $r \in \mathbb{P}$ y un $\epsilon < \kappa^+$ de modo que $r \leq [p, q'^m, T]$ y $r \Vdash \tau(\check{\delta}) = \check{\epsilon}$. El mismo argumento empleado en la prueba de 11.14 nos permite tomar $r \in N$ y luego pasar a otra condición de la forma $[r, q'^m \frown t, R]$, con $t \in T/q'^m$, y entonces $[p_\delta, q'^m, T_\delta]_t \Vdash \tau(\check{\delta}) = \check{\epsilon}$. Pero $|T| = \kappa$, luego

$$|\{\epsilon < \kappa^+ \mid \bigvee \delta < \xi \bigvee t \in T/q'^m\ [p, q'^m, T]_t \Vdash \tau(\check{\delta}) = \check{\epsilon}\}| \leq \kappa,$$

luego el conjunto está acotado en κ^+, digamos por $\theta < \kappa^+$. Por consiguiente,

$$\{\epsilon < \kappa^+ \mid \bigvee r \in \mathbb{P} \cap N \bigvee \delta < \xi\ r \Vdash \tau(\check{\delta}) = \check{\epsilon}\} \subset \theta.$$

Pero esto es imposible: como $q \Vdash \tau : \check{\xi} \longrightarrow \check{\kappa}^+$ cofinal, existen $r \leq q$, $\delta < \xi$ y $\epsilon \geq \theta$ tales que $r \Vdash \tau(\check{\delta}) = \check{\epsilon}$, y como N es un submodelo elemental podemos tomar $r \in \mathbb{P} \cap N$, en contradicción con lo que acabamos de probar. ■

El teorema siguiente resume lo que hemos obtenido:

Teorema 11.17 *Si M es un modelo transitivo numerable de* ZFC + HCG *en el que existe un cardinal fuerte κ y $\delta \in \Omega^M$ es un ordinal $\delta \geq 2$, entonces existe* *una extensión genérica N de M con los mismos cardinales en la que κ tiene cofinalidad numerable, se cumple la* HCG *bajo κ y $2^\kappa \geq \aleph_{\kappa+\delta}$.*

Notemos que no hace falta exigir que $\aleph_{\kappa+\delta}$ sea regular porque siempre podemos cambiar δ por $\delta+1$. Conviene observar también que si $\delta < \kappa$ basta con que κ sea $\kappa+\delta$-fuerte (ahora sí, con $\aleph_{\kappa+\delta}$ regular).

Así pues, el menor cardinal que incumple la HCG puede ser singular (pero necesariamente de cofinalidad numerable, por el teorema de Silver [TC 6.18]).

11.3 La HCG en $\aleph_\omega$.

En dos modelos que hemos construido hasta ahora en los que falla la HCS, el fallo se produce en un cardinal "grande", no en el sentido de ser un "cardinal grande" (pues en ambos casos tiene cofinalidad numerable), sino en el sentido de que era un cardinal grande en el modelo base de la extensión y ningún cardinal se ha colapsado. En particular, κ es en la extensión genérica un límite de cardinales de Mahlo, hiper-Mahlo, etc. En esta sección vamos a modificar la construcción de la sección precedente para mostrar que el menor cardinal en el que falla la HCG (y en particular la HCS) puede ser $\aleph_\omega$.

Más concretamente, fijamos un número natural $m \geq 2$ y vamos a construir un modelo en el que se cumpla

$$\bigwedge n \in \omega\ 2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1} \wedge 2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+m}.$$

Para ello partiremos de un modelo de ZFC + HCG en el que exista un cardinal κ que sea $\kappa+m$-fuerte. En la sección anterior hemos visto que esto es suficiente para construir las medidas $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mu\setminus\kappa}$, donde $\mu = \aleph_{\kappa+m}$, las aplicaciones $\pi_{\alpha\beta}$, para $\beta \preceq \alpha$, etc.

Como $m < \kappa$, en la construcción hemos visto que podemos tomar como f_μ la función $f_\mu(\aleph_\alpha) = \aleph_{\alpha+m}$. Esto nos permite mejorar ligeramente la propiedad e) de la página 309:

Si $\nu \in A$, entonces $|\{\delta \in A \mid \delta^0 = \nu^0\}| \leq \aleph_{\nu^0+m}$,

pues en general hemos probado que dicho cardinal es $\leq |f_\mu(\nu^0)|$ y ν^0 es inaccesible, luego $\nu^0 = \aleph_{\nu^0}$.

También tenemos definido el c.p.o. $\mathbb{P}$, cuyas condiciones son pares (p, T). Recordemos que U_κ es una medida normal y que p^κ es una sucesión finita creciente en $\pi_0[A]$, por lo que sus elementos son cardinales inaccesibles.

Definición 11.18 Definimos un conjunto de condiciones $\mathbb{P}^*$ compuesto por las cuádruplas $p = (\bar{p}, T, f, F)$ (aunque a menudo escribiremos $p = (p, T_p, f_p, F_p)$) que cumplen las propiedades siguientes:

a) $(p, T) \in \mathbb{P}$.

b) Si $p^\kappa = (\nu_0, \ldots, \nu_{n-1})$, entonces $f = (f_0, \ldots, f_n)$, con

$$f_0 \in \mathrm{Fn}(\omega, \nu_0, \aleph_0), \quad f_{i+1} \in \mathrm{Fn}(\omega_{\nu_i+m+1}, \nu_{i+1}, \aleph_{\nu_i+m+1},), \quad i < n-1,$$

$$f_n \in \mathrm{Fn}(\omega_{\nu_{n-1}+m+1}, \kappa, \aleph_{\nu_{n-1}+m+1}).$$

c) Si $T^\kappa = \pi_{m(p)\kappa}[T]$, entonces F es una función definida en el árbol T^κ/p^κ tal que $F(\varnothing) = f_n$ y $F(\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}) \in \mathrm{Fn}(\omega_{\xi_{n-1}+m+1}, \kappa, \aleph_{\xi_{n-1}+m+1})$.

Usaremos la notación $\ell(t)$ para referirnos a la longitud (es decir, el dominio) de una sucesión finita. Definimos en $\mathbb{P}^*$ la relación dada por $p \leq q$ si se cumplen las condiciones siguientes:

a) $(p, T_p) \leq (q, T_q)$ como elementos de $\mathbb{P}$. (Esto implica que T_p^κ es un subárbol de T_q^κ.)

b) $\ell(q^\kappa) \leq \ell(p^\kappa)$ y para cada $i \in \ell(q^\kappa)$, se cumple $f_{p,i} \leq f_{q,i}$ (es decir, que $f_{q,i} \subset f_{p,i}$).

c) Si $q^\kappa = (\nu_0, \ldots, \nu_{n-1})$ y $p^\kappa = (\nu_0, \ldots, \nu_{n-1}, \nu_n, \ldots \nu_{m-1})$, entonces para todo $s \in T_p^\kappa/p^\kappa$ se cumple que

$$F_p(s) \leq F_q((\nu_n, \ldots, \nu_{m-1})^\frown s)$$

d) Para cada $n \leq i < m$ se cumple que

$$F_q(\nu_n, \ldots, \nu_i) \subset f_{p,\,i}.$$

e) Si $n < m$, entonces ν_n contiene a la imagen de $f_{q,n}$.

Observaciones De acuerdo con lo visto en la sección anterior, la parte (p, T) de las condiciones de $\mathbb{P}^*$ tiene por finalidad incorporar $\aleph_{\kappa+m}$ sucesiones de Prikry para que se cumpla $2^\kappa = \aleph_{\kappa+m}$. Los elementos añadidos a las condiciones de $\mathbb{P}^*$ pretenden colapsar cardinales para que κ pase a ser $\aleph_\omega$ en la extensión genérica. Concretamente (suponiendo por simplicidad $m = 2$) si una condición $p \in \mathbb{P}^*$ cumple que $p^\kappa = (\nu_0, \nu_1, \nu_2)$, entonces f_0 contiene información parcial para colapsar ν_0 y hacerlo numerable, f_1 pretende colapsar ν_1 para que tenga cardinal ν_0^{+++}, igualmente f_2 pretende colapsar ν_2 para que tenga cardinal ν_1^{+++} y en principio f_3 pertenece al preorden que colapsa κ hasta ν_2^{+++}, pero esto es provisional, pues una extensión q de p para la que $q^\kappa = (\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$ tiene que cumplir que ν_3 contenga a la imagen de f_3, de modo que f_3 pasa a ser un elemento del c.p.o. que colapsa ν_3 hasta ν_2^{+++}. En total, pretendemos que los cardinales bajo κ en la extensión genérica sean:

$$\begin{array}{cccccccccc} \omega & \nu_1^+ & \nu_1^{++} & \nu_1^{+++} & \nu_2^+ & \nu_2^{++} & \nu_2^{+++} & \nu_3^+ & \cdots \\ \aleph_0 & \aleph_1 & \aleph_2 & \aleph_3 & \aleph_4 & \aleph_5 & \aleph_6 & \aleph_7 & \cdots \end{array}$$

Además garantizaremos que la HCG se conserve bajo κ. ■

Es inmediato comprobar que la relación que hemos definido en $\mathbb{P}^*$ es un preorden (de hecho es un orden parcial) sabiendo que lo es la de $\mathbb{P}$.

Existe una condición máxima $\mathbb{1} \in \mathbb{P}^*$, formada por el máximo de $\mathbb{P}$ (de modo que $\operatorname{sop}(\mathbb{1}) = \{\kappa\}$ y $\mathbb{1}^\kappa = \varnothing$), $f_0 = \varnothing$ y F la función que toma el valor constante $\varnothing$.

Diremos que p es una *extensión directa* de q (y lo representaremos por $p \leq^* q$) si $p \leq q$ y, para cada $\gamma \in \operatorname{sop}(q)$, se cumple que $p^\gamma = q^\gamma$ (es decir, si se cumple $(p, T_p) \leq^* (q, T_q)$ en el sentido de $\mathbb{P}$).

El teorema 11.11 se generaliza fácilmente al caso de $\mathbb{P}^*$. Observemos que al extender la parte de $\mathbb{P}$ no alteramos la sucesión q^κ, por lo que no hay que definir nuevas funciones f_i y sólo hace falta restringir F_q al nuevo dominio T_p^κ.

Teorema 11.19 $\mathbb{P}^*$ *cumple la c.c.* κ^{++}.

Demostración: Es claro que la parte f_p de una condición p puede tomar a lo sumo κ valores diferentes. Veamos ahora que F_p puede tomar a lo sumo κ^+ valores diferentes. Sucesiones finitas crecientes en $\pi_0[A]$ hay a lo sumo κ, luego subárboles del árbol de todas ellas hay a lo sumo κ^+ (recordemos que estamos suponiendo la HCG). Para cada subárbol posible T_p^κ (que tiene cardinal κ), F_p asigna a sus elementos imágenes en un conjunto de cardinal κ, luego hay a lo sumo κ^+ funciones F_p posibles con un mismo árbol como dominio. Es claro entonces que en total hay κ^+ posibilidades para F_p.

Esto implica que si tenemos una familia $\{p_\alpha\}_{\alpha<\kappa^{++}}$ de condiciones distintas en $\mathbb{P}^*$, pasando a una subfamilia, podemos exigir (teniendo en cuenta la prueba de 11.12) que la familia de sus soportes sea cuasidisjunta de raíz r, que todas las restricciones $p_\alpha|_r$ sean idénticas (en particular que p_α^κ sea la misma sucesión para todas ellas) y que T_{p_α}, p_α^m, f_{p_α}, F_{p_α} sean independientes de α. En la prueba de 11.12 se ve que en estas circunstancias dos condiciones (p_α, T_{p_α}) cualesquiera son compatibles, y tienen una extensión común con la misma sucesión p_α^κ. Es claro entonces que se puede completar hasta una extensión común de las condiciones correspondientes p_α en $\mathbb{P}^*$. ■

Es fácil ver que $\mathbb{P}^*$ no es κ-cerrado, al contrario que $\mathbb{P}$, pero cumple claramente una propiedad más débil: Dada una condición $p \in \mathbb{P}^*$, consideramos el conjunto $\mathbb{P}^*/p$ de todas las extensiones de p. Sea $p^\kappa = (\nu_0, \ldots, \nu_{n-1})$, sea $j < n$ y $\nu = \nu_j$. Definimos entonces $(\mathbb{P}^*/p)^{<\nu}$ como el conjunto de todas las sucesiones $(f_0, \ldots, f_j)$ con

$$f_0 \in \operatorname{Fn}(\omega, \nu_0, \aleph_0), \quad f_{i+1} \in \operatorname{Fn}(\omega_{\nu_i+m+1}, \nu_{i+1}, \aleph_{\nu_i+m+1},), \quad i < j,$$

de modo que $f_i \leq f_{p,i}$, para todo $i \leq j$. Por otra parte, llamamos $(\mathbb{P}^*/p)^{\geq\nu}$ al conjunto de todas las condiciones $p' \in \mathbb{P}^*/p$ tales que $f_{p',i} = f_{p,i}$ para todo $i \leq j$. El teorema siguiente se prueba sin dificultad:

Teorema 11.20 *En las condiciones anteriores,* $\mathbb{P}^*/p \cong (\mathbb{P}^*/p)^{\geq\nu} \times (\mathbb{P}^*/p)^{<\nu}$ *y* $(\mathbb{P}^*/p)^{\geq\nu}$ *es un c.p.o.* $\aleph_{\nu+m+1}$*-cerrado respecto a* $\leq^*$.

El problema principal es demostrar el teorema análogo a 11.14:

Teorema 11.21 *Para toda fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$, dada una condición $q \in \mathbb{P}^*$ y nombres $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in V^{\mathbb{P}^*}$, existe $p \leq^* q$ tal que $p \parallel \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.*

DEMOSTRACIÓN: Fijemos un modelo N como en la prueba del teorema 11.14, es decir, N es un submodelo elemental de un V_η suficientemente grande como para que todos los conceptos que consideramos sean absolutos para V_η, y además $V_{\kappa+1} \cup \{\mathbb{P}, q, \mu\} \subset N$, $|N| = \kappa^+$ y $N^\kappa \subset N$. Fijamos también $\alpha \in \mu \setminus \kappa$ tal que $\bigwedge \delta \in N \cap (\mu \setminus \kappa)\ \delta \prec \alpha$. Consideramos una condición $(q', T_{q'}) \leq^* (q, T_q)$ de $\mathbb{P}$ tal que $\mathrm{sop}(q') = \mathrm{sop}(q) \cup \{\alpha\}$, con la cual podemos construir una condición $q' = (q', T_{q'}, f_q, F_q) \leq^* q$ en $\mathbb{P}$.

Usaremos la notación $[p, t, T, f, F] = (p \cup \{(\alpha, t)\}, T, f, F)$ (que no es necesariamente una condición de $\mathbb{P}$) entendiendo siempre que $p \in \mathbb{P}_0$, donde $\mathbb{P}_0$ es el mismo conjunto definido en la prueba de 11.14.

Basta probar que existen $p \in N$, un subárbol T de $T_{q'}$ y funciones f y F tales que $[p, q'^m, T, f, F] \in \mathbb{P}$, $[p, q'^m, T, f, F] \leq^* q'$ y $[p, q'^m, T, f, F] \parallel \phi$. Para ello suponemos lo contrario.

Veamos primero lo siguiente:

> *Existen $p \in N$, F y T tales que*
>
> $$[p, q'^m, T, f_q, F] \in \mathbb{P}^*, \quad [p, q'^m, T, f_q, F] \leq^* q'$$
>
> *y para toda $t \in T/q'^m$, si existe $[r, q'^m{}^\frown t, T_r, f_r, F_r] \in \mathbb{P}^*$ de modo que $[r, q'^m{}^\frown t, T_r, f_r, F_r] \leq [p, q'^m, T, f_q, F]$ y*
>
> $$[r, q'^m{}^\frown t, T_r, f_r, F_r] \Vdash \phi \quad (\textit{resp. } \neg\phi),$$
>
> *entonces*
>
> $$[p_t, q'^m{}^\frown t, T[q'^m{}^\frown t], f_r|_{\ell(r^\kappa)}{}^\frown F(\pi_{\alpha\kappa}[t]), F_t] \Vdash \phi \quad (\textit{resp. } \neg\phi),$$
>
> *donde p_t resulta de prolongar cada p^γ con los términos admisibles de $\pi_{\alpha\gamma}[t]$ y $F_t(s) = F(t^\frown s)$.*

Sea $\{(t^\kappa_\delta, f_\delta, t_\delta)\}_{\delta<\kappa}$ una enumeración de las ternas tales que $t_\delta \in T_{q'}/q'^m$, no es nula, $t^\kappa_\delta = \pi_{\alpha\kappa}[t_\delta]$ y si $t^\kappa_\delta = (\nu_0, \ldots, \nu_{n-1})$, entonces $f_\delta = (f_0, \ldots, f_{n-1})$ es como en la definición de $\mathbb{P}^*$ (salvo que no incluimos una coordenada f_n).

Según hemos observado al principio de la sección, si $\nu \in A$ se cumple que

$$|\{\delta \in A \mid \delta^0 = \nu^0\}| \leq \aleph_{\nu^0+m}.$$

Por lo tanto podemos suponer que $\{(t^\kappa_\delta, f_\delta, t_\delta)\}_{\delta<\omega_{\nu^0+m}}$ enumera todas las ternas en las condiciones indicadas con $t^\kappa_{\delta\,\max} \leq \nu^0$ (porque el número de t_δ's posibles es a lo sumo $\aleph_{\nu^0+m}$).

Vamos a definir recurrentemente cuatro sucesiones:

- $\{p_\delta\}_{\delta<\kappa}$ es una sucesión en $\mathbb{P}_0$ y creciente respecto de la inclusión.
- $\{T_\delta\}_{\delta<\kappa}$ es una sucesión de subárboles de $T_{q'}$ en las condiciones de la propiedad e) de la definición de $\mathbb{P}$ (con tronco $q'^m{}^\frown t_\delta$ y respecto de la medida U_α).
- $\{F_\delta\}_{\delta<\kappa}$ cumple que cada F_δ está definida sobre $T_\delta^\kappa/(q'^\kappa{}^\frown t_\delta^\kappa)$ y
$$F_\delta(\xi_0,\ldots,\xi_{n-1}) \in \mathrm{Fn}(\omega_{\xi_{n-1}+m+1},\kappa,\aleph_{\xi_{n-1}+m+1}).$$
- $\{\bar{f}_\delta\}_{\delta<\kappa}$ cumple que $\bar{f}_\delta \in \mathrm{Fn}(\omega_{t_\delta^\kappa+m+1},\kappa,\aleph_{t_\delta^\kappa+m+1})$.

Suponiendo definidas las sucesiones para $\epsilon<\delta$, definimos $p''_\delta = \bigcup\limits_{\epsilon<\delta} p_\epsilon \in N$ si $\delta>0$, mientras que para $\delta=0$ tomamos como $p''_0 \in \mathbb{P}_0$ la sucesión q' sin su componente q'^m. Sea $p'_\delta = (p''_\delta)_{t_\delta}$, sea $T'_\delta = T_{q'}[q'^m{}^\frown t_\delta]$ y $T'^\kappa_\delta = \pi_{\alpha\kappa}[T'_\delta]$.

Vamos a definir una función F'_δ sobre $T'^\kappa_\delta/(q'^\kappa{}^\frown t^\kappa_\delta)$. Dado $t\in T'^\kappa_\delta/(q'^\kappa{}^\frown t^\kappa_\delta)$, si $\delta=0$ tomamos $F'_0(t) = F_{q'}(t^\kappa_0{}^\frown t)$. Para $\delta>0$ consideramos el conjunto
$$C = \{\epsilon<\delta \mid t^\kappa_\epsilon \subset t^\kappa_\delta{}^\frown t \in T^\kappa_\epsilon/q'^\kappa\}.$$

Así, si $\epsilon\in C$, tenemos que $t^\kappa_{\epsilon\,\max} \leq (t^\kappa_\delta{}^\frown t)_{\max}$, luego $\epsilon < \omega_{(t^\kappa_\delta{}^\frown t)_{\max}+m}$. Por lo tanto, $C\subset \omega_{(t^\kappa_\delta{}^\frown t)_{\max}+m}$. Definimos
$$F'_\delta(t) = \bigcup_{\epsilon\in C} F_\epsilon(t^\epsilon) \in \mathrm{Fn}(\omega_{(t^\kappa_\delta{}^\frown t)_{\max}+m+1},\kappa,\aleph_{(t^\kappa_\delta{}^\frown t)_{\max}+m+1}),$$
donde $t^\kappa_\delta{}^\frown t = t^\kappa_\epsilon{}^\frown t^\epsilon$, con $t^\epsilon \in T^\kappa_\epsilon/(q'^\kappa{}^\frown t^\kappa_\epsilon)$.

Consideramos $[p'_\delta, q'^m{}^\frown t_\delta, T'_\delta, f_\delta{}^\frown F'_\delta(\varnothing), F'_\delta]$. Distinguimos dos casos:

Si $[p'_\delta, q'^m{}^\frown t_\delta, T'_\delta, f_\delta{}^\frown F'_\delta(\varnothing), F'_\delta] \in \mathbb{P}^*$ y existen $p'''_\delta\in\mathbb{P}_0$, T_δ, $\bar{f}_\delta$ y F_δ tales que
$$[p'''_\delta, q'^m{}^\frown t_\delta, T_\delta, f_\delta{}^\frown \bar{f}_\delta, F_\delta]\in\mathbb{P}^*,$$
$$[p'''_\delta, q'^m{}^\frown t_\delta, T_\delta, f_\delta{}^\frown \bar{f}_\delta, F_\delta] \leq^* [p'_\delta, q'^m{}^\frown t_\delta, T'_\delta, f_\delta{}^\frown F'_\delta(\varnothing), F'_\delta],$$
$$[p'''_\delta, q'^m{}^\frown t_\delta, T_\delta, f_\delta{}^\frown \bar{f}_\delta, F_\delta] \parallel \phi,$$
entonces elegimos de este modo T_δ, $\bar{f}_\delta$ y F_δ y tomamos $p_\delta = p''_\delta{}^\frown(p'''_\delta\setminus p'_\delta)$. En caso contrario tomamos $p_\delta = p''_\delta$, $T_\delta = T'_\delta$, $F_\delta = F'_\delta$ y $\bar{f}_\delta = F_\delta(\varnothing)$. Notemos que en ambos casos se cumple que $\bar{f}_\delta = F_\delta(\varnothing)$.

Esto termina la definición recurrente de las cuatro sucesiones. Ahora tomamos $p = \bigcup\limits_{\delta<\kappa} p_\delta \in N$ y definimos un subárbol T de $T_{q'}$. Partimos de que T tiene tronco q'^m y definimos los niveles siguientes de forma recurrente. Si tenemos definido hasta un cierto nivel y éste contiene a t, entonces hacemos
$$\begin{aligned}\mathrm{suc}_T(t) = \{\delta\in A \mid \delta^0 > t^\kappa_{\max} \wedge \textstyle\bigwedge \epsilon<\delta^0\ (\delta\in \mathrm{suc}_{T_\epsilon}(q'^m{}^\frown t_\epsilon)\\ \wedge\ (t\in T_\epsilon[q'^m{}^\frown t_\epsilon] \rightarrow \delta\in\mathrm{suc}_{T_\epsilon}(t)))\}.\end{aligned}$$

Es claro entonces que $\mathrm{suc}_T(t) \in U_\alpha$. Además, $T/(q'^m{}^\frown t_\epsilon) \subset T_\epsilon/(q'^m{}^\frown t_\epsilon)$. En efecto, esto equivale a que si $q'^m{}^\frown t_\epsilon \subset t \in T$, entonces $t \in T_\epsilon$, y se comprueba por inducción sobre la longitud de t. Si $t = q'^m{}^\frown t_\epsilon$ es trivial y, si vale para t y $\delta \in \mathrm{suc}_T(t)$, entonces $t^\kappa_{\epsilon\,\max} \leq t^\kappa_{\max} < \delta^0$, luego $\epsilon < \omega_{t^\kappa_{\max}+m} < \delta^0$, luego $\delta \in \mathrm{suc}_{T_\epsilon}(t)$, luego $t^\frown\delta \in T_\epsilon$.

Ahora definimos una función F sobre la proyección T^κ/q'^κ del árbol T/q'^m. Para ello observamos que si $t \in T^\kappa/q'^\kappa$ no es vacía, podemos considerar el conjunto

$$C_t = \{\epsilon < \kappa \mid t^\kappa_\epsilon \subset t \in T^\kappa_\epsilon/q'^\kappa\}.$$

Así, si $\epsilon \in C_t$, tenemos que $t^\kappa_{\epsilon\,\max} \leq t_{\max}$, luego $\epsilon < \omega_{t_{\max}+m}$. Equivalentemente, $C_t \subset \omega_{t_{\max}+m}$ y, por consiguiente, podemos definir

$$F(t) = \bigcup_{\epsilon \in C_t} F_\epsilon(t^\epsilon) \in \mathrm{Fn}(\omega_{t_{\max}+m+1}, \kappa, \aleph_{t_{\max}+m+1}),$$

donde $t = t^\kappa_\epsilon{}^\frown t^\epsilon$, con $t^\epsilon \in T^\kappa_\epsilon/(q'^\kappa{}^\frown t^\kappa_\epsilon)$. Además definimos $F(\varnothing) = f_{q'\,\max}$. Observemos que $F(t^\kappa_\delta) \leq F_\delta(\varnothing) = \bar{f}_\delta$.

Veamos ahora que $p^* = [p, q'^m, T, f_{q'}, F] \in \mathbb{P}^*$. Se cumplen claramente todas las propiedades que exige la definición salvo quizá que $[p, q'^m, T] \in \mathbb{P}$. Las propiedades a), b), c) de la definición de $\mathbb{P}$ se cumplen trivialmente. Para probar d) tomamos $\gamma \in \mathrm{sop}(p^*)$, y no perdemos generalidad si suponemos que $\gamma \neq \alpha$. Si $\gamma \in \mathrm{sop}(q')$, entonces trivialmente $q'^m_{\max}$ no es admisible para $p^\gamma = q'^\gamma$, porque $q' \in \mathbb{P}$. En caso contrario, existe un mínimo $\delta < \kappa$ tal que $p^{*\gamma} = p^\gamma_\delta = p'''^\gamma_\delta$, pero entonces $t_{\delta\,\max}$ no es admisible para p^γ_δ y $(q'^m_{\max})^0 \leq t^0_{\delta\,\max}$, luego $q'^m_{\max}$ tampoco lo es, y esto equivale a que $\pi_{m(p^*)\gamma}(q'^m_{\max})$ no lo sea. La propiedad e) se comprueba sin dificultad.

La única propiedad no trivial es la f), es decir, que para todo $\epsilon \in \mathrm{suc}_T(q'^m)$

$$|\{\gamma \in \mathrm{sop}(p) \mid \epsilon \text{ es admisible para } p^\gamma\}| \leq \epsilon^0.$$

Ahora bien, si $\gamma \in \mathrm{sop}(p) \setminus \mathrm{sop}(q')$, podemos considerar el mínimo $\delta < \kappa$ tal que $\gamma \in \mathrm{sop}(p_\delta)$, de modo que $p^\gamma = p^\gamma_\delta = p'''^\gamma_\delta$, luego ϵ es admisible para $t_{\delta\,\max}$, es decir, $t^\kappa_{\delta\,\max} < \epsilon^0$, lo cual implica que $\delta < \omega_{t_{\delta\,\max}+m} < \epsilon^0$. Así pues, podemos descomponer:

$$\{\gamma \in \mathrm{sop}(p) \mid \epsilon \text{ es admisible para } p^\gamma\} = \{\gamma \in \mathrm{sop}(q') \mid \epsilon \text{ es admisible para } p^\gamma\}$$

$$\cup \bigcup_{\delta < \epsilon^0} \{\gamma \in \mathrm{sop}(p'''_\delta) \mid \epsilon \text{ es admisible para } p^\gamma\},$$

y todos los conjuntos considerados tienen cardinal $\leq \epsilon^0$.

Una modificación mínima de este argumento demuestra que en realidad $[p'_\delta, q'^m{}^\frown t_\delta, T'_\delta, f_\delta{}^\frown F'(\varnothing), F_\delta] \in \mathbb{P}^*$ para todo $\delta < \kappa$.

Vamos a probar que p^* cumple lo requerido. Observemos que $p^* \leq^* q'$. En efecto, por construcción, la sucesión q' (sin su componente q'^m) está contenida en $p''_0 \subset p_0 \subset p$, luego se cumplen las propiedades a) y b) de la definición de $\leq$

para $\mathbb{P}$ (y, de hecho se cumple con $\leq^*$ en lugar de $\leq$). Las propiedades c), d) y f) son triviales, y por construcción T/q'^m es un subárbol de $T_{q'}/q'^m$, luego también se cumple la propiedad e). Con esto tenemos que se cumple la propiedad a) de la definición de $\leq$ para $\mathbb{P}^*$ y las restantes son triviales.

Supongamos que $[r, q'^m{}^\frown t, T_r, f_r, F_r] \in \mathbb{P}^*$ cumple $[r, q'^m{}^\frown t, T_r, f_r, F_r] \leq p^*$ y $[r, q'^m{}^\frown t, T_r, f_r, F_r] \Vdash \phi$ (resp. $\neg\phi$).

No puede ser $t = \varnothing$, pues entonces tendríamos una extensión directa de q' que decidiría ϕ con $r \in N$, en contra de lo supuesto. Por lo tanto existe un $\delta < \omega_{r^\kappa_{\max}+m}$ tal que $(\pi_{\alpha\kappa}[t], f_r|_{\ell(r^\kappa)}, t) = (t^\kappa_\delta, f_\delta, t_\delta)$. Veamos que

$$[r, q'^m{}^\frown t, T_r, f_r, F_r] \leq^* [p'_\delta, q'^m{}^\frown t_\delta, T'_\delta, f_\delta{}^\frown F'_\delta(\varnothing), F_\delta].$$

En efecto, si $\gamma \in \operatorname{sop}(p'_\delta)$ (y podemos suponer $\gamma \neq \alpha$), entonces r^γ se obtiene de $p^{*\gamma} = p^\gamma_\delta$ añadiendo la parte admisible de $\pi_{\alpha\gamma}[t]$. Si γ está ya en el soporte de q' o de algún p_ϵ anterior, entonces $p^\gamma_\delta = p''^\gamma_\delta$ y $r^\gamma = p'^\gamma_\delta$, por construcción. Si γ aparece por primera vez en el soporte de p_δ, entonces igualmente llegamos a que $p^\gamma_\delta = p'''^\gamma_\delta = p'^\gamma_\delta$. Por otra parte,

$$T_r/(q'^m{}^\frown t) \subset T/(q'^m{}^\frown t_\delta) \subset T_\delta/(q'^m{}^\frown t_\delta) \subset T'_\delta/(q'^m{}^\frown t_\delta),$$

con lo que es claro que se cumple la propiedad a) de la definición de $\leq$ en $\mathbb{P}^*$ (y de hecho se cumple con $\leq^*$ en lugar de $\leq$).

La propiedad b) se cumple porque, por una parte, $f_\delta = f_r|_{\ell(r^\kappa)}$ y, como $t^\kappa_\delta \in T^\kappa_\delta/q'^\kappa$, se cumple que $\delta \in C_{t^\kappa_\delta}$ (el conjunto usado para definir F) y entonces $F'_\delta(\varnothing) \subset F_\delta(\varnothing) \subset F(t^\kappa_\delta) \subset f_{\ell(r^\kappa)}$.

Para probar la propiedad c) tomamos una sucesión

$$s \in T^\kappa_r/r^\kappa \subset T^\kappa/r^\kappa = T^\kappa/(q'^\kappa{}^\frown t^\kappa_\delta) \subset T^\kappa_\delta/(q'^\kappa{}^\frown t^\kappa_\delta).$$

Entonces $t' = t^\kappa_\delta{}^\frown s \in T^\kappa_\delta/q'^\kappa$, luego $\delta \in C_{t'}$, luego $F_r(s) \leq F(t') \leq F_\delta(s)$. Las propiedades d) y e) se cumplen trivialmente.

Esto implica que se cumple el caso no trivial de la definición de p_δ, es decir, que $p_\delta = p''_\delta{}^\frown(p'''_\delta \setminus p'_\delta)$. Por lo tanto,

$$[p'''_\delta, q'^m{}^\frown t_\delta, T_\delta, f_\delta{}^\frown \bar{f}_\delta, F_\delta] = [(p_\delta)_t, q'^m{}^\frown t, T_\delta, f_r|_{\ell(r^\kappa)}{}^\frown \bar{f}_\delta, F_\delta],$$

donde, recordemos, $(p_\delta)_t$ representa la sucesión que resulta de prolongar cada p^γ_δ con la parte admisible de $\pi_{\alpha\gamma}[t]$), y esta condición decide ϕ. Ahora basta comprobar que

$$[r, q'^m{}^\frown t, T_r, f_r, F_r] \leq^* [p_t, q'^m{}^\frown t, T[q'^m{}^\frown t], f_r|_{\ell(r^\kappa)}{}^\frown F(\pi_{\alpha\kappa}[t]), F_t]$$

$$\leq^* [(p_\delta)_t, q'^m{}^\frown t, T_\delta, f_r|_{\ell(r^\kappa)}{}^\frown \bar{f}_\delta, F_\delta],$$

pues así tenemos que las condiciones de los extremos deciden ϕ, luego la del centro también lo hace, y las tres tienen que hacerlo en el mismo sentido.

Observemos que el hecho de que la condición del centro esté realmente en $\mathbb{P}^*$ se sigue fácilmente de que $p^* \in \mathbb{P}^*$. La primera desigualdad es también consecuencia inmediata de que $[r, q'^m{}^\frown t, T_r, f_r, F_r] \leq p^*$. Para la segunda desigualdad observamos que, por construcción, $(p_\delta)_t \subset p_t$, $T[q'^m{}^\frown t_\delta] \subset T_\delta$, $F(\pi_{\alpha\kappa}(t)) = F(t_\delta^\kappa) \leq \bar{f}_\delta$ y $F_\delta(s) \subset F(t_\delta{}^\frown s) = F_t(s)$.

Ahora demostramos lo siguiente:

Existe $p^{**} = [p, q'^m, T^{**}, f_{q'}, F|_{T^{**}}] \leq^* p^*$ *tal que no existe ninguna condición* $[r, q'^m{}^\frown t, T_r, f_r, F_r] \in \mathbb{P}^*$ *tal que*

$$[r, q'^m{}^\frown t, T_r, f_r, F_r] \leq p^{**} \land [r, q'^m{}^\frown t, T_r, f_r, F_r] \parallel \phi.$$

Para ello vamos a construir recurrentemente una sucesión de árboles $\{T_l\}_{l\leq\omega}$ de modo que $\{[p, q'^m, T_l, f_{q'}, F|_{T_l^\kappa/q'^\kappa}]\}_{l\leq\omega}$ sea una sucesión decreciente respecto de $\leq^*$ de condiciones $\leq^* p^*$ y de modo que no exista ninguna condición $[r, q'^m{}^\frown t, T_r, f_r, F_r] \in \mathbb{P}^*$ tal que[7]

$$\ell(t) \leq l \land [r, q'^m{}^\frown t, T_r, f_r, F_r] \leq [p, q'^m, T_l, f_{q'}, F] \land [r, q'^m{}^\frown t, T_r, f_r, F_r] \parallel \phi.$$

Es claro entonces que $p^{**} = [p, q'^m, T_\omega, f_{q'}, F]$ cumplirá lo requerido. Empezamos definiendo $T_0 = T$, con lo que

$$[p, q'^m, T_0, f_{q'}, F] = [p, q'^m, T, f_{q'}, F] = p^*,$$

que por hipótesis cumple la propiedad para $l = 0$.

Llamemos X_0 al conjunto de todos los $\delta \in \mathrm{suc}_T(q'^m)$ para los cuales existe una condición de la forma

$$[p_\delta, q'^m{}^\frown\delta, T[q'^m{}^\frown\delta], (f_0^\delta, \ldots, f_n^\delta, F(\delta^0)), F_\delta] \leq [p, q'^m, T, f_{q'}, F]$$

tal que

$$[p_\delta, q'^m{}^\frown\delta, T[q'^m{}^\frown\delta], (f_0^\delta, \ldots, f_n^\delta, F(\delta^0)), F_\delta] \Vdash \phi,$$

donde p_δ es la sucesión que resulta de prolongar las sucesiones p^γ con $\pi_{\alpha\gamma}(\delta)$ cuando éste es admisible y $F_\delta(s) = F(\delta{}^\frown s)$. Definimos igualmente X_1 cambiando ϕ por $\neg\phi$, y llamamos $X_2 = \mathrm{suc}_T(q'^m) \setminus (X_0 \cup X_1)$. Tiene que existir un $i < 3$ tal que $X_i \in U_\alpha$. Sea T_1 el árbol que resulta de cortar todos los niveles de T sobre q'^m con U_i. Vamos a probar que cumple lo requerido. En caso contrario existe una condición tal que, por ejemplo,

$$[r, q'^m{}^\frown\delta, T_r, f_r, F_r] \leq [p, q'^m, T_1, f_{q'}, F] \land [r, q'^m{}^\frown\delta, T_r, f_r, F_r] \Vdash \phi$$

(igualmente se razonaría con $\neg\phi$ en lugar de ϕ). Como $[p, q'^m, T_1, f_{q'}, F] \leq p^*$, esto implica que

$$[p_\delta, q'^m{}^\frown\delta, T[q'^m{}^\frown\delta], f_r|_{\ell(r^\kappa)}{}^\frown F(\delta^0), F_\delta] \Vdash \phi.$$

[7]Por brevedad escribimos F en lugar de $F|_{T_k^\kappa/q'^\kappa}$.

Entonces $\delta \in X_0$, luego tiene que ser $X_0 \in U_\alpha$ el conjunto que hemos usado para construir T_1. Así pues, para todo $\delta \in \mathrm{suc}_T(q'^m)$ existen $f_0^\delta, \ldots, f_n^\delta$ tales que

$$[p_\delta, q'^m\frown\delta, T[q'^m\frown\delta], (f_0^\delta, \ldots, f_n^\delta, F(\delta^0)), F_\delta] \in \mathbb{P}^*,$$

$$[p_\delta, q'^m\frown\delta, T[q'^m\frown\delta], (f_0^\delta, \ldots, f_n^\delta, F(\delta^0)), F_\delta] \leq [p, q'^m, T, f_{q'}, F],$$

$$[p_\delta, q'^m\frown\delta, T[q'^m\frown\delta], (f_0^\delta, \ldots, f_n^\delta, F(\delta^0)), F_\delta] \Vdash \phi.$$

Observemos que el número de n-tuplas $(f_0^\delta, \ldots, f_{n-1}^\delta)$ posibles es $< \kappa$, por lo que existe un $Y \in U_\alpha$ y una n-tupla $(f_0, \ldots, f_{n-1})$ tales que $Y \subset \mathrm{suc}_T(q'^m)$ y si $\delta \in Y$ entonces $(f_0^\delta, \ldots, f_{n-1}^\delta) = (f_0, \ldots, f_{n-1})$. No podemos incluir en este argumento a $f_n^\delta \in \mathrm{Fn}(\omega_{q'^\kappa_{n-1}+m+1}, \delta^0, \aleph_{q'^\kappa_{n-1}+m+1})$, porque hay κ valores posibles, pero podemos hilar más fino. Para ello consideramos la inmersión elemental $j : V \longrightarrow M = \mathrm{Ult}_E(V)$. Llamamos $\nu = \omega_{q'^\kappa_{n-1}+m+1} < \kappa$ y consideramos la aplicación $h(\delta) = f_n^\delta$. Entonces $j(h) : j(\kappa) \longrightarrow \mathrm{Fn}^M(\nu, j(\kappa), \nu)$ y, más concretamente, como $h(\delta) \in \mathrm{Fn}(\nu, \pi_0(\delta), \nu)$ para todo $\delta < \kappa$, se cumple que $f_n = j(h)(\alpha) \in \mathrm{Fn}(\nu, \kappa, \nu)$, ya que $j(\pi_0)(\alpha) = \kappa$. En particular $f_n \in V_\kappa$, luego $j(f_n) = f_n$.

Ahora observamos que $Y' = \{\delta \in \kappa \mid f_n^\delta = f_n\} \in U_\alpha$, pues por definición de U_α esto equivale a que $\alpha \in j(Y)$, es decir, a que $f_n = j(h)(\alpha) = j(f_n)$.

Sea T_1' el árbol que resulta de cortar todos los niveles de T_1 sobre q'^m con $Y \cap Y'$ y sea $F' = F|_{T_1/q'^m}$. Así, para todo $\delta \in \mathrm{suc}_{T_1}(q'^m)$ se cumple que

$$[p_\delta, q'^m\frown\delta, T_1'[q'^m\frown\delta], (f_0, \ldots, f_n, F(\delta^0)), F'_\delta] \in \mathbb{P}^*,$$

$$[p_\delta, q'^m\frown\delta, T_1'[q'^m\frown\delta], (f_0, \ldots, f_n, F(\delta^0)), F'_\delta] \leq [p, q'^m, T, f_{q'}, F],$$

$$[p_\delta, q'^m\frown\delta, T_1'[q'^m\frown\delta], (f_0, \ldots, f_n, F(\delta^0)), F'_\delta] \Vdash \phi,$$

pero es fácil ver que toda extensión de $[p, q'^m, T_1', (f_0, \ldots, f_n), F']$ es compatible con una condición de la forma $[p_\delta, q'^m\frown\delta, T_1'[q'^m\frown\delta], (f_0, \ldots, f_n, F(\delta^0)), F'_\delta]$, luego podemos concluir que

$$[p, q'^m, T_1', (f_0, \ldots, f_n), F'] \leq^* p^* \leq^* q' \wedge [p, q'^m, T_1', (f_0, \ldots, f_n), F'] \Vdash \phi,$$

ya que el conjunto de las condiciones que fuerzan ϕ es denso bajo esta condición, y esto contradice la hipótesis de que no existen extensiones directas de q' que deciden ϕ. Esto termina la prueba para $l = 1$.

Para definir T_2 fijamos $\eta \in \mathrm{Suc}_{T_1}(q'^m)$ y consideramos una enumeración $\{(f_\delta, \epsilon_\delta)\}_{\delta<\omega_{\eta^0+m}}$ de todos los pares tales que $\epsilon_\delta \in \mathrm{suc}_{T_1}(q'^m)$ cumple $\epsilon_\delta^0 = \eta^0$ y $f_\delta = (f_0^\delta, \ldots, f_n^\delta)$ está formada por funciones según la propiedad b) de la definición de $\mathbb{P}^*$ (respecto de $q'^\kappa = (\nu_0, \ldots, \nu_{n-1})$) que extienden a las de $f_{q'}$ y con $f_n^\delta \in \mathrm{Fn}(\omega_{\nu_{n-1}+m+1}, \eta^0, \aleph_{\nu_{n-1}+m+1})$.

Definimos una sucesión de árboles $\{S_\delta\}_{\delta<\omega_{\eta^0+m}}$ de tronco q'^m. Supuesta definida para $\delta' < \delta$, llamamos $S^* = \bigcap\limits_{\delta'<\delta} S_{\delta'}$ o bien $S^* = T_1$ si $\delta = 0$. Sea $S = S^* \cap T_1[q'^m\frown\epsilon_\delta]$.

Consideramos $r_\delta = [p_{\epsilon_\delta}, q'^m{}^\frown\epsilon_\delta, S, f_\delta{}^\frown F(\epsilon_\delta), F|_{S^\kappa/(q'^m{}^\frown\eta^0)}] \in \mathbb{P}^*$. Claramente $r_\delta \leq [p, q'^m, T_1, F]$, luego por la construcción de T_1 sabemos que ni r_δ ni ninguna de sus extensiones directas deciden ϕ. Ahora aplicamos a r_δ la misma construcción que hemos aplicado a $[p, q'^m, T_0, f_{q'}, F]$ para construir T_1, de modo que obtenemos un subárbol S'_δ de S con la propiedad de que no existe ninguna condición de la forma

$$[p_{(\epsilon_\delta,\zeta)}, q'^m{}^\frown\epsilon_\delta{}^\frown\zeta, S', f', F'] \leq [p_{\epsilon_\delta}, q'^m{}^\frown\epsilon_\delta, S'_\delta, f_\delta{}^\frown F(\epsilon_\delta), F|_{S'^\kappa_\delta/(q'^\kappa{}^\frown\eta^0))}]$$

que decida ϕ.

Llamamos S_δ al árbol que coincide con S^* salvo $S_\delta[q'^m{}^\frown\epsilon_\delta] = S'_\delta[q'^m{}^\frown\epsilon_\delta]$. Con esto tenemos definida la sucesión de árboles, y podemos definir a su vez $T_2^\eta = \bigcap\limits_{\delta<\omega_{\eta^0+m}} S_\delta$ y $T_2 = \bigcup\limits_{\eta\in\mathrm{suc}_{T_1}(q'^m)} T_2^\eta$. Así, toda condición

$$[r, q'^m{}^\frown\eta{}^\frown\zeta, T_r, f_r, F_r] \leq [p, q'^m, T_2, f_{q'}, F] \leq^* p^*$$

cumple $(f_r|_{n+1}, \eta) = (f_\delta, \epsilon_\delta)$ para cierto δ, y entonces, si decide ϕ, por la elección de p^*, también

$$[p_{(\epsilon_\delta,\zeta)}, q'^m{}^\frown\epsilon_\delta{}^\frown\zeta, T[q'^m{}^\frown\epsilon_\delta{}^\frown\zeta], f_\delta{}^\frown f_r^{n+1}{}^\frown F(\zeta^0), F_{(\epsilon_\delta,\zeta)}] \parallel \phi,$$

y lo mismo vale si cambiamos el árbol por $S' = S'_\delta[q'^m{}^\frown\epsilon_\delta{}^\frown\zeta]$ (pues con ello obtenemos una extensión de la condición considerada). Con este cambio, la condición extiende a $[p_{\epsilon_\delta}, q'^m{}^\frown\epsilon_\delta, S'_\delta, f_\delta{}^\frown F(\epsilon_\delta), F|_{S'^\kappa_\delta/(q'^\kappa{}^\frown\eta^0)}]$, contradicción.

Por lo tanto, T_2 cumple lo requerido para $l = 2$, y del mismo modo definimos toda la sucesión $\{T_n\}_{n\in\omega}$. Por último, $T_\omega = \bigcap\limits_{n<\omega} T_n$ cumple claramente la condición para $l = \omega$.

Obviamente, existe $r \leq p^{**}$ tal que $r \parallel \phi$. Como en la conclusión de la prueba del teorema 11.14, podemos suponer que $r \in N$ y, extendiendo r para que α esté en su dominio, llegamos a una condición de la forma

$$[r, q'^m{}^\frown t, T_r, f_r, F_r] \leq p^{**} \land [r, q'^m{}^\frown t, T_r, f_r, F_r] \parallel \phi,$$

contradicción. ■

A partir de aquí relativizamos todos los resultados precedentes a un modelo transitivo numerable M de ZFC + HCG. Sea G un filtro $\mathbb{P}^*$-genérico sobre M. Los argumentos de la sección anterior se generalizan trivialmente para justificar que G define sucesiones $G^\alpha : \omega \longrightarrow \kappa$ cofinales y distintas dos a dos, para todo $\alpha \in \mu\setminus\kappa$, y si llamamos $\kappa_n = G^0(n)$, ahora en $M[G]$ tenemos también funciones suprayectivas $f_0 : \omega \longrightarrow \kappa_0$, $f_{n+1} : \omega^M_{\kappa_n+m+1} \longrightarrow \kappa_{n+1}$.

Sea $p \in G$ tal que $p^\kappa = (\kappa_0, \ldots, \kappa_n)$, con $n > 0$. Pasando a una condición mayor (que, por lo tanto, seguirá en G), podemos suponer que $f_p = (\varnothing, \ldots, \varnothing)$, que T_p está formado por todas las sucesiones en A que extienden a p^m y que $F(s) = \varnothing$ para toda sucesión s en su dominio.

En M tenemos que $\mathbb{P}^*/p$ es un c.p.o. y $G_p = G \cap (\mathbb{P}^*/p)$ es claramente un filtro $\mathbb{P}^*/p$-genérico sobre M. Además $M[G] = M[G_p]$, pues es claro que $G \in M[G_p]$ y $G_p \in M[G]$. A su vez tenemos un isomorfismo $(\mathbb{P}^*/p)^{\geq \kappa_n} \times \mathbb{P}^*/p \cong (\mathbb{P}^*/p)^{<\kappa_n}$, a través del cual G_p se corresponde con un producto $G^{\geq \kappa_n} \times G_{<\kappa_n}$, y por consiguiente $M[G] = M[G^{\geq \kappa_n}][G_{<\kappa_n}]$.

Ahora observamos que $(\mathbb{P}^*/p)^{\geq \kappa_n}$ es similar al construido en esta sección, salvo por el hecho de que hay que reducir el conjunto A para que no contenga cardinales menores que κ_n y por que no incluye funciones parciales para colapsar dichos cardinales. Nada de esto afecta a la prueba del teorema 11.21, que es, por lo tanto, válido para $(\mathbb{P}^*/p)^{\geq \kappa_n}$. Uniendo esto a que es $\aleph^M_{\kappa_n+m+1}$-cerrado respecto de $\leq^*$, exactamente el mismo argumento empleado en la prueba del teorema 11.15 a) nos da que todo subconjunto acotado de $\omega^M_{\kappa_n+m+1}$ en $M[G^{\geq \kappa_n}]$ está en M. En particular, todos los cardinales $< \omega^M_{\kappa_n+m+1}$ se conservan en $M[G^{\geq \kappa_n}]$ y todos ellos cumplen la HCG.

Por otra parte, el c.p.o. $(\mathbb{P}^*/p)^{<\kappa_n}$ es el producto de los c.p.o.s $\mathrm{Fn}(\omega, \kappa_0, \aleph_0)$ y $\mathrm{Fn}(\omega_{\kappa_i+m+1}, \kappa_{i+1}, \aleph_{\kappa_i+m+1})$, para $i < n$, y todos ellos son absolutos para $M - M[G^{\geq \kappa_n}]$. Por lo tanto, $M[G]$ se obtiene de $M[G^{\geq \kappa_n}]$ a partir de un producto finito de c.p.o.s de funciones parciales correspondientes a cardinales que cumplen la HCG. La teoría básica sobre este tipo de c.p.o.s nos da entonces[8] que los cardinales infinitos en $M[G]$ por debajo de $\omega^M_{\kappa_n+m+1}$ son exactamente ω y los de la forma $\aleph^M_{\kappa_i+m'}$, con $1 \leq m' \leq m+1$, $i < n$, y además todos ellos cumplen la HCG. Como esto vale para todo n, hemos demostrado el apartado a) del teorema siguiente:

Teorema 11.22 *Si M es un modelo transitivo numerable de* ZFC + HCG *y G es un filtro $\mathbb{P}^*$-genérico sobre M, entonces:*

a) Los cardinales infinitos en $M[G]$ menores que κ son ω y los de la forma $\aleph^M_{\kappa_i+m'}$, con $1 \leq m' \leq m+1$, $i < n$, y todos ellos cumplen la HCG.

b) $\kappa = \aleph^{M[G]}_\omega$, luego en $M[G]$ se cumple la HCG *bajo $\aleph_\omega$.*

c) $(2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+m})^{M[G]}$.

DEMOSTRACIÓN: Ya tenemos probado el apartado a), el cual implica trivialmente el apartado b), pues los cardinales infinitos de $M[G]$ menores que κ forman un conjunto de ordinal ω.

Para probar c) observamos en primer lugar que, como $\mathbb{P}^*$ cumple la c.c. κ^{++}, todos los cardinales $\geq \kappa^{++}$ de M se conservan en $M[G]$, y κ también se conserva, por b). Admitamos de momento que κ^+ también se conserva. Entonces es claro que $\aleph^M_{\kappa+m'} = \aleph^{M[G]}_{\omega+m'}$, para todo $m' \in \omega$. En particular, $\mu = \aleph^M_{\kappa+m} = \aleph^{M[G]}_{\omega+m}$. En $M[G]$ tenemos las sucesiones $\{G^\alpha\}_{\alpha \in \mu \setminus \kappa}$, que prueban que $2^{\aleph_\omega} \geq \aleph_{\omega+m}$. La desigualdad opuesta se obtiene con las cotas usuales sobre los buenos nombres para subconjuntos de κ, teniendo en cuenta que $|\mathbb{P}^*|^M = \mu$.

[8]Hay que descomponer la extensión en un número finito de extensiones sucesivas, empezando por la correspondiente a κ_{n-1} y terminando con la correspondiente a ω.

Así pues, sólo falta justificar que $(\kappa^+)^M$ se conserva en $M[G]$. Si no fuera así, la cofinalidad ξ de κ^+ en $M[G]$ tendría que ser un cardinal regular menor que κ^+, luego no podría ser κ (porque es singular en $M[G]$), luego sería $\xi < \kappa_n$, para cierto $n \in \omega$. Descomponemos $M[G] = M[G^{\geq\kappa_n}][G_{<\kappa_n}]$ (lo que supone fijar una condición $p \in \mathbb{P}^*$ que determine la sucesión G^κ hasta κ_n), y sabemos que la segunda extensión conserva cardinales y cofinalidades $> \kappa_n$, luego $(\kappa^+)^M$ no puede ser un cardinal en $M[G^{\geq\kappa_n}]$, y su cofinalidad en esta extensión sigue siendo $\xi < \kappa_n$.

A partir de aquí, por comodidad llamaremos $\mathbb{P}^* = (\mathbb{P}^*/p)^{\geq\kappa_n}$ y $G = G^{\geq\kappa_n}$. Ahora tenemos que $\mathbb{P}^*$ es ξ-cerrado respecto de $\leq^*$. Sea $g : \xi \longrightarrow (\kappa^+)^M$ una aplicación cofinal creciente, $g \in M[G]$. Pongamos que $g = \tau_G$ y sea $q \in \mathbb{P}^*$ tal que $q \Vdash \tau : \check{\xi} \longrightarrow \check{\kappa}^+$ cofinal.

Razonando en M, tomamos un modelo N en las mismas condiciones que en la prueba del teorema 11.21 (ahora con $\tau \in N$), y como allí, fijamos un $\alpha \in \mu\setminus\kappa$ tal que $\bigwedge\delta \in N \cap (\mu \setminus \kappa)\ \delta \prec \alpha$. Elegimos también una condición $q' \leq q$ tal que $\operatorname{sop}(q') = \operatorname{sop}(q) \cup \{\alpha\}$. Usaremos la misma notación $[p, t, T, f, F]$ para (posibles) condiciones de $\mathbb{P}^*$, con la única salvedad de que ahora f no contiene componentes correspondientes a cardinales menores que κ_n.

Veamos que podemos construir una sucesión $\{p_\delta\}_{\delta<\xi}$ en $\mathbb{P}_0$ y sucesiones $\{T_\delta\}_{\delta<\xi}$, $\{f_\delta\}_{\delta<\xi}$ y $\{F_\delta\}_{\delta<\xi}$, de modo que $\{[p_\delta, q'^m, T_\delta, f_\delta, F_\delta]\}_{\delta<\xi}$ es una sucesión decreciente respecto de $\leq^*$ de condiciones que extienden a q' y con la propiedad siguiente:

Para toda sucesión $t \in T_\delta/q'^m$ no vacía y todo $\epsilon < \kappa^+$, si existe una condición $[r, q'^m{}^\frown t, T_r, f_r, F_r] \in \mathbb{P}^*$ tal que

$$[r, q'^m{}^\frown t, T_r, f_r, F_r] \leq [p_\delta, q'^m, T_\delta, f_\delta, F_\delta]$$

y $[r, q'^m{}^\frown t, T_r, f_r, F_r] \Vdash \tau(\check{\delta}) = \check{\epsilon}$, entonces también

$$[(p_\delta)_t, q'^m{}^\frown t, T[q'^m{}^\frown t], f_r|_{\ell(r^\kappa)}{}^\frown F(\pi_{\alpha\kappa}[t]), (F_\delta)_t] \Vdash \tau(\check{\delta}) = \check{\epsilon}.$$

En efecto, si suponemos construidas $\{p_\delta\}_{\delta<\eta}$ y $\{T_\delta\}_{\delta<\eta}$, $\{f_\delta\}_{\delta<\eta}$ y $\{F_\delta\}_{\delta<\eta}$, como $\mathbb{P}^*$ es ξ-cerrado para $\leq^*$, existe una condición que extiende a todas las condiciones $[p_\delta, q'^m, T_\delta, f_\delta, F_\delta]$, y podemos tomarla de la forma $[p_\eta, q'^m, T, f, F]$, con $p_\eta = \bigcup\limits_{\delta<\eta} p_\delta \in N$.

Ahora aplicamos a esta condición la construcción de la primera parte de la prueba de 11.21, considerando, en vez de las dos fórmulas ϕ y $\neg\phi$, las infinitas fórmulas $\tau(\check{\delta}) = \check{\epsilon}$, para cada $\epsilon < \kappa^+$. El resultado es una condición $[p_\eta, q'^m, T_\eta, f_\eta, F_\eta]$ que cumple lo requerido.

Una vez construida la sucesión, usando de nuevo que $\mathbb{P}^*$ es ξ-cerrado obtenemos una condición, que podemos tomar de la forma $[p, q'^m, T, f, F]$, tal que, para todo $\delta < \xi$ cumple $[p, q'^m, T, f, F] \leq^* [p_\delta, q'^m, T_\delta, f_\delta, F_\delta]$.

Obviamente, dado $\delta < \xi$, existe una condición $r \in \mathbb{P}^*$ y un $\epsilon < \kappa^+$ de modo que $r \leq [p, q'^m, T, f, F]$ y $r \Vdash \tau(\check{\delta}) = \check{\epsilon}$. El mismo argumento empleado en la prueba de 11.14 nos permite tomar $r \in N$ y luego pasar a otra condición de la forma $[r, q'^m{}^\frown t, T_r, f_r, F_r]$, con $t \in T/q'^m$, y entonces

$$[(p_\delta)_t, q'^m{}^\frown t, T[q'^m{}^\frown t], f_r|_{\ell(r^\kappa)}{}^\frown F(\pi_{\alpha\kappa}[t]), (F_\delta)_t] \Vdash \tau(\check{\delta}) = \check{\epsilon}.$$

Pero $|T| = \kappa$, y también hay a lo sumo κ valores posibles para $f_r|_{\ell(r^\kappa)}$, luego

$$|\{\epsilon < \kappa^+ \mid \bigvee \delta < \xi \bigvee t \in T/q'^m \bigvee f$$

$$[(p_\delta)_t, q'^m{}^\frown t, T[q'^m{}^\frown t], f^\frown F(\pi_{\alpha\kappa}[t]), (F_\delta)_t] \Vdash \tau(\check{\delta}) = \check{\epsilon}\}| \leq \kappa,$$

luego el conjunto está acotado en κ^+, digamos por $\theta < \kappa^+$. Por consiguiente,

$$\{\epsilon < \kappa^+ \mid \bigvee r \in \mathbb{P}^* \cap N \bigvee \delta < \xi \ r \Vdash \tau(\check{\delta}) = \check{\epsilon}\} \subset \theta.$$

Pero esto es imposible: como $q \Vdash \tau : \check{\xi} \longrightarrow \check{\kappa}^+$ cofinal, existen $r \leq q$, $\delta < \xi$ y $\epsilon \geq \theta$ tales que $r \Vdash \tau(\check{\delta}) = \check{\epsilon}$, y como N es un submodelo elemental podemos tomar $r \in \mathbb{P}^* \cap N$, en contradicción con lo que acabamos de probar. ■

En definitiva, hemos demostrado el teorema siguiente:

Teorema 11.23 *Si M es un modelo transitivo numerable de* ZFC + HCG*, $m \in \omega$, $m \geq 2$ y $\kappa \in M$ es un cardinal $\kappa + m$-fuerte, entonces en una extensión genérica de M se cumple que $\kappa = \aleph_\omega$, $\bigwedge n \in \omega\ 2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$ y $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+m}$.*

Apéndice A

Extensiones con c.p.o.s pequeños

En general, un cardinal grande κ sigue siendo grande en cualquier extensión genérica realizada con un c.p.o. que cumpla $|\mathbb{P}| < \kappa$. Esto requiere una prueba distinta para cada definición de cardinal grande, así que nos limitaremos a considerar algunos casos representativos. Empezamos por los más sencillos:

Teorema A.1 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea κ un cardinal en M, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. tal que $|\mathbb{P}|^M < \kappa$ y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces si κ es (débilmente) inaccesible o (débilmente) Mahlo en M, también lo es en $M[G]$.*

Demostración: Como $\mathbb{P}$ cumple en M la c.c. $|\mathbb{P}|^+$, conserva cardinales y cofinalidades $\geq |\mathbb{P}|^+$, luego si κ es un cardinal límite regular en M, también lo es en $M[G]$. Esto prueba el teorema para cardinales débilmente inaccesibles.

Si κ es (fuertemente) inaccesible en M y $\alpha < \kappa$, entonces, según el teorema [PC 5.20] el número de buenos nombres para subconjuntos de $\check{\alpha}$ en M es a lo sumo $|\mathbb{P}|^{|\mathbb{P}||\alpha|} < \kappa$, luego según [PC 5.22] tenemos que $(2^{|\alpha|})^{M[G]} < \kappa$, luego κ es un límite fuerte en $M[G]$ y, en consecuencia, es fuertemente inaccesible.

El resultado para cardinales de Mahlo se sigue de lo ya probado junto con el hecho de que si $E \subset \kappa$ es estacionario^M también es estacionario$^{M[G]}$. Para probar esto consideremos un conjunto $C = \tau_G$ c.n.a. en κ. Podemos exigir[1] que $\mathbb{1} \Vdash \tau$ es c.n.a. en $\check{\kappa}$. Entonces $D = \{\alpha < \kappa \mid \mathbb{1} \Vdash \check{\alpha} \in \tau\} \in M$ es un subconjunto c.n.a. en κ. En efecto, es cerrado, pues si $\lambda < \kappa$ y $D \cap \lambda$ no está acotado en λ, dado cualquier filtro genérico H, tenemos que τ_H es c.n.a. en κ y $D \cap \lambda \subset \tau_H \cap \lambda$, luego $\lambda \in \tau_H$, luego $\lambda \in D$.

Para ver que D es no acotado tomamos $\alpha_0 < \kappa$. Para cada $p \in \mathbb{P}$ existe una condición $q \leq p$ y un $\beta_p < \kappa$ de modo que $\alpha_0 < \beta_p$ y $q \Vdash \check{\beta} \in \tau$. Sea $\alpha_1 < \kappa$ el supremo de los ordinales β_p. Claramente $\mathbb{1} \Vdash \bigvee \beta \in \tau\ \check{\alpha}_0 < \beta \leq \check{\alpha}_1$. Repitiendo

[1] Usamos que $\mathbb{1} \Vdash \bigvee x(x$ es c.n.a. en $\check{\kappa} \land (\tau$ es c.n.a. en $\check{\kappa} \rightarrow x = \tau))$.

el proceso obtenemos una sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ tal que $\mathbb{1} \Vdash \bigvee \beta \in \tau\ \check{\alpha}_n < \beta \leq \check{\alpha}_{n+1}$. Sea $\alpha < \kappa$ el supremo de los α_n. Es claro que $\alpha \in D$.

Así pues, $E \cap D \neq \varnothing$, pero $E \cap D \subset E \cap C$, luego E es estacionario$^{M[G]}$. ■

Veamos ahora el caso de los cardinales asociados a relaciones de partición:

Teorema A.2 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea κ un cardinal en M, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. tal que $|\mathbb{P}|^M < \kappa$ y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces si κ es débilmente compacto o de Ramsey en M, también lo es en $M[G]$.*

Demostración: Sea $\mathbb{B}$ la compleción de $\mathbb{P}$ en M. Su cardinal es a lo sumo $2^{|\mathbb{P}|} < \kappa$, ya que κ es inaccesible^M, luego no perdemos generalidad si en lugar de trabajar con $\mathbb{P}$ trabajamos con $\mathbb{B}$.

Si κ es débilmente compacto^M, sea $F : [\kappa]^2 \longrightarrow 2$ una partición en $M[G]$. Podemos suponer que $F = \tau_G$ y $\|\tau : [\check{\kappa}]^2 \longrightarrow 2\| = \mathbb{1}$.

Sea $F' : [\kappa]^2 \longrightarrow \mathbb{B}$ dada por $F'(\{\alpha, \beta\}) = \|\tau(\{\check{\alpha}, \check{\beta}\}) = 0\|$. Claramente $F' \in M$ y es una partición de $[\kappa]^2$ en menos de κ, partes, luego existe $H \subset \kappa$ homogéneo para F'. Claramente también es homogéneo para F, pues F tomará el valor 0 o 1 en $[H]^2$ según si el valor constante que toma F' está o no en G. Así pues, κ es débilmente compacto$^{M[G]}$. La propiedad de Ramsey se trata igualmente. ■

Nota El caso de la existencia de sostenidos es mucho más simple, pues si $M[G]$ es cualquier extensión genérica de un modelo M y $x \in V^M_{\omega+1}$, entonces $x^\sharp$ existe en M si y sólo si existe en $M[G]$. Esto se deduce del teorema 3.38, pues si $a = x^\sharp$ existe en M entonces existe en $L[a]^M = L[a]^{M[G]}$, luego $x^\sharp$ existe en $M[G]$, e igualmente se prueba el recíproco. ■

Pasamos ahora a los cardinales caracterizables en términos de inmersiones elementales sobre la clase universal:

Teorema A.3 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea κ un cardinal en M, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. tal que $|\mathbb{P}|^M < \kappa$ y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces si κ es medible, fuerte o superfuerte en M, también lo es en $M[G]$.*

Demostración: Cambiando $\mathbb{P}$ por un c.p.o. isomorfo podemos suponer que $\mathbb{P} \in V_\kappa$. Si κ es medible en M, por 7.11 existe un extensor E en M que define una inmersión elemental $j : M \longrightarrow N$ con punto crítico κ. En particular j es la identidad sobre $\mathbb{P}$, luego $j[G] = G$. Además, como $N \subset M$, tenemos que G es $\mathbb{P}$-genérico sobre N (y $j(\mathbb{P}) = \mathbb{P}$), luego podemos aplicar el teorema 10.13 con $H = G \in M[G]$, lo que nos da una inmersión elemental (definible[2]) en $M[G]$ con punto crítico κ, luego κ es medible en $M[G]$.

[2]El hecho de que la inmersión sea definible en $M[G]$ es crucial. Por ejemplo, si existe $0^\sharp$ existe una inmersión elemental no trivial $j : L \longrightarrow L$, pero esto no implica que su punto crítico sea medible en L (no podría serlo), y esto es posible porque j no es definible en L.

Consideremos ahora $\mu \geq \kappa$ un cardinal regular en M y supongamos que κ es μ-fuerte en M. Sea $E \in M$ un extensor tal que $\mu < j_E(\kappa)$ y $V_\mu^M \subset \mathrm{Ult}_E(M)$. El mismo argumento que acabamos de emplear nos asegura que podemos aplicar el teorema 10.13, que nos da un extensor $E^* \in M[G]$ tal que la inmersión natural $j_{E^*} : M[G] \longrightarrow \mathrm{Ult}_{E^*}(M[G])$ extiende a j_E. En particular $\mu < j_{E^*}(\kappa)$.

Por [PC 11.1] tenemos que $V_\mu^{M[G]} = V_\mu^M[G] \subset \mathrm{Ult}_E(M)[G] = \mathrm{Ult}_{E^*}(M[G])$, donde la última igualdad está probada en el teorema 10.13. Esto prueba que κ es μ-fuerte en $M[G]$, luego si κ es fuerte en M, también lo es en $M[G]$.

Si κ es superfuerte en M, basta aplicar el razonamiento anterior a $\mu = j(\kappa)$ para concluir que κ es superfuerte en $M[G]$. ■

Teorema A.4 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea κ un cardinal en M, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. tal que $|\mathbb{P}|^M < \kappa$ y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Si κ es compacto o supercompacto en M, también lo es en $M[G]$.*

Demostración: Podemos suponer que $\mathbb{P} \in V_\kappa^M$. Sea $\mu > \kappa$ y sea $U \in M$ una medida fina (o normal) en $(\mathcal{P}^{<\kappa}\mu)^M$, sea $j : M \longrightarrow N = \mathrm{Ult}_U(M)$ la inmersión natural en la ultrapotencia. Como en el teorema anterior, $j[G] = G$, luego 10.12 es aplicable con $H = G$, por lo que j se extiende a una inmersión elemental $j^+ : M[G] \longrightarrow N[G]$.

En el caso en que la medida es normal, el teorema 10.14 nos da directamente que j^+ está asociada a una medida normal en $M[G]$, por lo que κ es también μ-supercompacto en $M[G]$, para todo μ, luego κ es supercompacto en $M[G]$.

Si la medida es fina, parte del razonamiento de 10.14 vale igualmente cambiando $j[\mu]$ por $[d]$, donde d es la identidad en $(\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu))^M$, es decir, definimos

$$U^* = \{P \subset (\mathcal{P}^{<\kappa}\mu)^{M[G]} \mid [d] \in j^+(P)\},$$

y al igual que en 10.14 se comprueba que $U^* \in M[G]$ y es una medida fina en $\mathcal{P}^{<\kappa}(\mu)^{M[G]}$. ■

Teorema A.5 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea κ un cardinal en M, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. tal que $|\mathbb{P}|^M < \kappa$ y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Si κ cumple* I3 *en M, también lo cumple en $M[G]$.*

Demostración: Podemos suponer que $\mathbb{P} \in V_\kappa^M$. Sea $j : V_\lambda^M \longrightarrow V_\lambda^M$ una inmersión elemental con punto crítico κ. Si $x \in V_\lambda^{M[G]}$, existe un $n \in \omega$ tal que $x \in V_{j^n(\kappa)}^{M[G]} = V_{j^n(\kappa)}^M[G]$, luego $x = \tau_G$, con $\tau \in V_\lambda^{M\mathbb{P}}$. Como $j[G] = G$, el mismo argumento del teorema 10.12 prueba que $j^+ : V_\lambda^{M[G]} \longrightarrow V_\lambda^{M[G]}$ dada por $j^+(\tau_G) = j(\tau)_G$ es una inmersión elemental que extiende a j, luego su punto crítico es κ y éste cumple I3 en $M[G]$. ■

Ejercicio: Demostrar que la existencia de cardinales grandes de cualquiera de los tipos considerados en los teoremas precedentes no implica ni contradice la hipótesis del continuo.

Ejercicio: Demostrar que el axioma de Martin es consistente con la existencia de dichos cardinales grandes.

Bibliografía

[1] Abramson, F.G., Harrington, L.A., Kleinberg, E.M. y Zwicker, W.S., *Flipping properties: A unifying thread in the theory of large cardinals,* Ann. Math. Logic, 12 (1977) 25–58.

[2] Boos, W. *Lectures on large cardinal axioms,* ISILC Logic Conference, Springer, Lecture Notes in Mathematics Volumen 499 (1975) 25-88

[3] Corazza, P. *Consistency of $V = HOD$ with the wholeness axiom,* Arch. Math. Logic 39 (2000) 219–226.

[4] — *Lifting elementary embeddings $j : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$* Arch. Math. Logic 46 (2007) 61–72.

[5] Cummings, J., *Iterated Forcing and Elementary Embeddings,* en [9].

[6] Devlin, K.J., *Constructibility,* Springer, 1984

[7] Donder, H.D.,Jensen, R.B. y Koppelberg, B. *Some applications of the core model,* en *Set theory and model theory,* Jensen, R.B. y Prestel, A. (eds), Springer, Berlín (1981).

[8] Feng, Q. y Jech, T, *Projective Stationary Sets and the Strong Reflection Principle,* Journal of the London Mathematical Society, 58 (1998), 271–283.

[9] Foreman, M., Kanamori, A., (Eds.) *Handbook of Set Theory,* Springer (2010).

[10] Friedman, H.M., *Subtle cardinals and linear orderings,* Annals of Pure and Applied Logic, 107 (2001) 1–34.

[11] Friedman, S.D. *Large Cardinals and L-like universes,* en Alessandro Andretta (Ed.), *Set Theory: Recent Trends and Applications,* Quaderni di Matematica, vol. 17, Seconda Università di Napoli (2005), pp. 93-–110.

[12] Gitik, M., *Prikry-Type Forcings,* en [9].

[13] Gitik, M., Shelah, S. *Less saturated ideals,* Proceedings of the American Mathematical Society, 125, 5 (1997), 1523–1530.

[14] Gitman, V. *Ramsey-like cardinals,* Journal of symbolic logic, 76 (2011) 519–540.

[15] Jech, T.J. *Set Theory.* Academic Press, New York, (1978).

[16] — *Set Theory, The Third Millenium Edition, revised and expanded,* Springer, (2000).

[17] Kanamori, A. *Diamonds, large cardinals and ultrafilters,* Contemporary Mathematics, 69 (1988) 35–42.

[18] — *The Higher Infinite,* Springer, New York, 2009.

[19] Kunen, K. *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs,* North Holland, Amsterdam, 1985.

[20] Laver, R. *Implications between strong large cardinal axioms,* Annals of Pure and Applied Logic, 90 (1997), 79–90.

[21] Moore, J.T. *Set Mapping Reflection,* Journal of Mathematical Logic, 5 (2005) 87–97.

[22] Schmerl, J.H. *On κ-like structures which embed stationary and closed unbounded subsets,* Ann. Math. Logic, 11 (1976) 289–314.

[23] Veličovič, B. *Forcing axioms and cardinal arithmetic,* en *Logic coloquium 2006,* Cooper, S.B., Geuvers, H., Pillay, A. y Väänänen, J. (Eds.) Cambridge University Press, New York, 2009.

Índice de Materias