

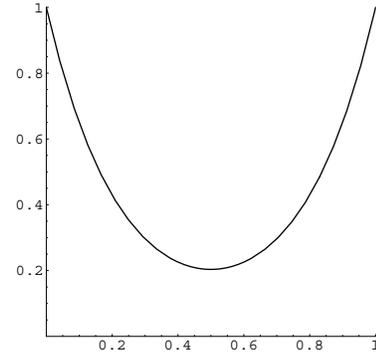
# La catenaria

Carlos Ivorra

<http://www.uv.es/ivorra>

**Introducción** La *catenaria* es la curva cuya forma es la que adopta una cuerda de densidad uniforme sujeta por sus dos extremos y sometida únicamente a la fuerza de la gravedad. En sentido estricto, no es una curva, sino una familia de curvas, cada una de las cuales está determinada por las coordenadas de sus extremos  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  y por su longitud  $L$ . En principio, también podría depender de su densidad  $\rho$  y de la intensidad del campo gravitatorio  $g$ , pero lo cierto es que, según veremos, no es así.

Por ejemplo, la figura muestra la catenaria de longitud  $L = 2$  sujeta por los puntos  $(0, 1)$  y  $(1, 1)$ . Vemos que se parece mucho a una parábola. De hecho, Galileo creyó que las catenarias eran parábolas, pero veremos que no lo son. En primer lugar vamos a encontrar la expresión analítica de las catenarias.



**La expresión analítica** Llamemos  $y(x)$  a la función que estamos buscando, definida sobre un intervalo  $[x_0, x_1]$  y sujeta a las condiciones iniciales  $y(x_0) = y_0$ ,  $y(x_1) = y_1$ . Además exigimos que su longitud sea igual a un valor prefijado  $L$ , es decir, que

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = L.$$

Más en general, consideramos la longitud de arco  $s : [x_0, x_1] \rightarrow [0, L]$  dada por

$$s(x) = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + y'(x)^2} dx,$$

que es una función creciente, derivable, con derivada

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'(x)^2} > 0,$$

por lo que tiene inversa  $s(x)$ , la cual nos da la parametrización por la longitud de arco,  $\phi : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $\phi(s) = (x(s), y(s))$ , donde  $y(s) = y(x(s))$ . De este modo, la longitud del arco comprendido entre  $\phi(s)$  y  $\phi(s + \Delta s)$  es exactamente  $|\Delta s|$ .

Que la cuerda tenga densidad uniforme  $\rho$  significa, por definición, que la masa de un arco de cuerda de longitud  $\Delta s$  es exactamente  $\rho \Delta s$ .

Llamaremos  $\alpha(s)$  al ángulo que forma con la horizontal la tangente a la cuerda en  $\phi(s)$ . La interpretación geométrica de la derivada equivale a que

$$y'(x) = \tan \alpha(s(x)).$$

Consideremos un punto cualquiera de la cuerda (es decir, un punto  $\phi(s)$ , para un cierto  $s \in [0, L]$ ). La fuerza de cohesión que mantiene unida la cuerda por dicho punto —la fuerza que desaparecería si cortáramos la cuerda— está representada por dos vectores de tensión opuestos,  $\vec{T}(s)$  y  $-\vec{T}(s)$ , donde convenimos que  $\vec{T}(s)$  es el que tiene su componente horizontal positiva. Concretamente,  $\vec{T}(s)$  es la fuerza que la parte de la cuerda posterior a  $s$  ejerce sobre la parte anterior y  $-\vec{T}(s)$  es la fuerza que la parte anterior de la cuerda ejerce sobre la parte posterior. Si, como en la figura, consideramos un punto donde la curva es creciente, podemos decir, más descriptivamente, que  $\vec{T}(s)$  es la fuerza con la que la parte superior de la cuerda “sostiene” de la parte inferior, mientras que  $-\vec{T}(s)$  es la fuerza con la que la parte inferior de la cuerda “estira” de la parte superior. En los puntos donde la curva es decreciente se invierten los papeles. Que ambas tensiones tengan la misma dirección e intensidad, pero sentidos opuestos, es consecuencia de la tercera ley de Newton: la fuerza que ejerce una parte de la cuerda sobre la otra ha de ser exactamente la opuesta de la que la otra ejerce sobre la primera. Es claro que su dirección debe ser la de la tangente a la curva<sup>1</sup>, luego podemos descomponer  $\vec{T}(s)$  como

$$\vec{T}(s) = (T(s) \cos \alpha(s), T(s) \sin \alpha(s)).$$

Alguien podría pensar que sobre el punto  $\alpha(s)$  se ejerce una tercera fuerza, a saber, el peso, pero debemos recordar que los puntos no tienen masa, por lo que tampoco tienen peso. Para tener en cuenta el peso hemos de considerar, no un punto, sino un arco de cuerda, digamos el correspondiente al intervalo de parámetros  $[s, s + \Delta s]$ .

Dicho arco está sometido a tres fuerzas: su peso

$$\vec{P} = (0, -\rho g \Delta s)$$

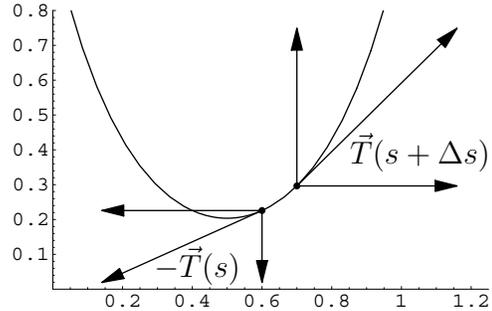
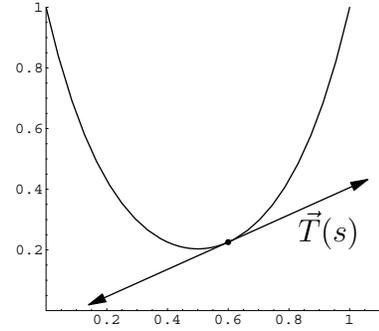
y las tensiones con las que la cuerda “tira” de sus extremos, que son  $\vec{T}(s + \Delta s)$ ,  $-\vec{T}(s)$ . La condición de equilibrio es que la suma total sea nula:<sup>2</sup>

$$\vec{T}(s + \Delta s) - \vec{T}(s) + \vec{P} = \vec{0}.$$

Más explícitamente:

$$T(s + \Delta s) \cos \alpha(s + \Delta s) - T(s) \cos \alpha(s) = 0,$$

$$T(s + \Delta s) \sin \alpha(s + \Delta s) - T(s) \sin \alpha(s) = \rho g \Delta s.$$



<sup>1</sup>La tensión de una cuerda recta se ejerce en la dirección determinada por ella misma, y una curva diferenciable, vista al microscopio en un entorno de uno de sus puntos, se confunde con su recta tangente, lo que muestra que ésta ha de ser la dirección de las tensiones en ese punto.

<sup>2</sup>Observemos que las tensiones se aplican en puntos distintos y que el peso no se aplica en ningún punto en particular. La condición de suma nula sería obviamente necesaria si el arco fuera rígido, pero con mayor razón ha de ser necesaria si es flexible, ya que una suma de fuerzas que movería un arco rígido, con mayor razón movería a un arco flexible.

Si hacemos tender  $\Delta s \rightarrow 0$  vemos que

$$\frac{d(T \cos \alpha)}{ds} = 0, \quad \frac{d(T \sin \alpha)}{ds} = \rho g.$$

Esto es cierto para todo punto  $s \in ]0, L[$ . La primera condición equivale a que la componente horizontal de la tensión es constante:

$$T(s) \cos \alpha(s) = \kappa > 0.$$

Sustituyendo  $T(s)$  en la segunda igualdad obtenemos que

$$\frac{d \tan \alpha(s)}{ds} = \frac{\rho g}{\kappa} = \mu.$$

Equivalentemente:

$$\mu = \frac{d \tan \alpha(s(x))}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{dy'(x)}{dx} \frac{1}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}.$$

En resumen, hemos llegado a la ecuación diferencial:

$$\frac{y''(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = \mu.$$

Integrando ambos miembros queda:

$$\arg \sinh y'(x) = \mu x + c_1 \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \sinh(\mu x + c_1) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{y(x) = \frac{\cosh(\mu x + c_1)}{\mu} + c_2.}$$

Ésta es la ecuación general de la catenaria, que nos da una familia de curvas dependiente de tres parámetros  $\mu$ ,  $c_1$  y  $c_2$ . Éstos pueden determinarse por las condiciones iniciales del problema. Observemos para ello que la longitud de  $y(x)$  es

$$\begin{aligned} L &= \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \sinh^2(\mu x + c_1)} dx = \int_{x_0}^{x_1} \cosh(\mu x + c_1) dx \\ &= \left[ \frac{\sinh(\mu x + c_1)}{\mu} \right]_{x_0}^{x_1} = \frac{\sinh(\mu x_1 + c_1)}{\mu} - \frac{\sinh(\mu x_0 + c_1)}{\mu}. \end{aligned}$$

Así pues, la relación entre los parámetros y las condiciones iniciales es:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\cosh(\mu x_0 + c_1)}{\mu} + c_2 &= y_0, & \frac{\cosh(\mu x_1 + c_1)}{\mu} + c_2 &= y_1, \\ \frac{\sinh(\mu x_1 + c_1) - \sinh(\mu x_0 + c_1)}{\mu} &= L. \end{aligned}}$$

**Existencia y unicidad en el caso horizontal** Vamos a probar que el sistema de ecuaciones anterior tiene solución única  $(\mu, c_1, c_2)$  para todos los valores posibles de  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  y  $L$  que cumplan la restricción obvia

$$L > L_0 = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2},$$

(cuya interpretación es que la longitud de una catenaria que una dos puntos dados ha de ser mayor que la distancia  $L_0$  entre ellos).

Más precisamente, fijado un intervalo  $[x_0, x_1]$ , se trata de probar que la aplicación  $(\mu, c_0, c_1) \mapsto (y_0, y_1, L)$  determinada por las ecuaciones anteriores biyecta las ternas que cumplen  $\mu > 0$  con las ternas que cumplen  $L > L_0$ .

En este apartado trataremos separadamente el caso en que los dos extremos de la catenaria se encuentran a la misma altura, pues es considerablemente más simple que el caso general. Eligiendo el sistema de referencia, no perdemos generalidad si nos restringimos a un intervalo  $[-r, r]$  y suponemos que las condiciones iniciales son  $y(-r) = y(r) = 0$ . Tenemos entonces que

$$\frac{\cosh(-\mu r + c_1)}{\mu} + c_2 = 0, \quad \frac{\cosh(\mu r + c_1)}{\mu} + c_2 = 0.$$

Despejando  $c_2$  e igualando obtenemos  $\cosh(-\mu r + c_1) = \cosh(\mu r + c_1)$ , de donde se sigue que  $-\mu r + c_1 = -(\mu r + c_1)$  (la alternativa con signo positivo es contradictoria) y, por consiguiente,  $c_1 = 0$ . Despejando ahora  $c_2$  y llevándolo a la expresión general de  $y(x)$ , vemos que ésta se reduce a

$$y_\mu(x) = \frac{\cosh \mu x - \cosh \mu r}{\mu}.$$

La longitud de esta catenaria es

$$L_\mu = \int_{-r}^r \cosh \mu x \, dx = \frac{\sinh \mu r - \sinh \mu(-r)}{\mu} = \frac{2 \sinh \mu r}{\mu}.$$

Basta probar que  $L_\mu : ]0, +\infty[ \rightarrow ]2r, +\infty[$ , pues esto significa que existe una única catenaria (correspondiente a un valor del parámetro  $\mu > 0$ ) para cada longitud posible  $L > L_0 = 2r$ . Por una parte observamos que

$$\frac{dL_\mu}{d\mu} = \frac{2r\mu \cosh \mu r - 2 \sinh \mu r}{\mu^2} > 0.$$

En efecto, la función que aparece en el numerador toma el valor 0 cuando  $\mu = 0$  y su derivada es  $2r^2\mu \sinh \mu r > 0$  para  $\mu > 0$ , lo que prueba que el numerador es positivo. Esto prueba a su vez que  $L_\mu$  es estrictamente creciente en  $]0, +\infty[$ , luego es inyectiva. La suprayectividad se sigue de que

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} L_\mu = 2r, \quad \lim_{\mu \rightarrow +\infty} L_\mu = +\infty,$$

como se comprueba inmediatamente aplicando la regla de L'Hôpital.

**Existencia y unicidad en el caso general** Nos ocupamos ahora del caso en el que los extremos de la catenaria no están a la misma altura. Observemos que si  $y(x)$  es una catenaria definida en el intervalo  $[x_0, x_1]$ , entonces

$$y(-x) = \frac{\cosh(-\mu x + c_1)}{\mu} + c_2 = \frac{\cosh(\mu x - c_1)}{\mu} + c_2$$

es una catenaria definida en  $[-x_1, -x_0]$ , luego, a la hora de probar la existencia y la unicidad, no perdemos generalidad si suponemos que  $y_0 \leq y_1$ . Similarmente, las traslaciones (tanto horizontales como verticales) de las catenarias son también catenarias, luego tampoco perdemos generalidad si suponemos que  $x_0 = y_0 = 0$  (y, por lo tanto,  $y_1 \geq 0$ ). Así podemos eliminar la constante  $c_2$ , ya que la condición  $y(0) = 0$  es

$$c_2 = \frac{\cosh c_1}{\mu},$$

y la expresión general de la catenaria pasa a ser:

$$y = \frac{\cosh(\mu x + c_1) - \cosh c_1}{\mu}.$$

Por último, podemos suponer que  $x_1 = 1$ , ya que esto equivale a tomar como unidad de medida la distancia (horizontal) entre los extremos de la catenaria. Así, las ecuaciones que determinan los parámetros  $\mu$  y  $c_1$  se convierten en

$$\frac{\cosh(\mu + c_1) - \cosh c_1}{\mu} = y_1, \quad \frac{\sinh(\mu + c_1) - \sinh(c_1)}{\mu} = L.$$

(Más detalladamente, si una catenaria cumple estas condiciones con  $x_1 y_1$  en vez de  $y_1$  y  $x_1 L$  en lugar de  $L$ , entonces la catenaria de constantes  $\mu/x_1$ ,  $c_1$  cumple  $y(0) = 0$ ,  $y(x_1) = y_1$  con longitud  $L$ .)

Vamos a probar que, fijado  $\mu > 0$ , existe un único  $c_1$  tal que la catenaria correspondiente cumple  $y(1) = y_1$ , es decir,

$$\cosh(\mu + c_1) - \cosh c_1 = \mu y_1.$$

Esto equivale a probar que la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(t) = \cosh(t + \mu) - \cosh t$$

es biyectiva. La comprobación es elemental: su derivada es

$$f'(t) = \sinh(t + \mu) - \sinh t > 0,$$

pues el seno hiperbólico es creciente, luego  $f$  es inyectiva. Además,

$$f(t) = \frac{e^{t+\mu} + e^{-t-\mu} - e^t - e^{-t}}{2} = \frac{e^\mu - 1}{2} e^t - \frac{1 - e^{-\mu}}{2} e^{-t},$$

y es claro entonces que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -\infty,$$

luego  $f$  es biyectiva.

Con esto hemos visto que existe una función  $c_1 = c_1(\mu)$  de forma que las catenarias que cumplen  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = y_1$  son las de la forma

$$y_\mu(x) = \frac{\cosh(\mu x + c_1(\mu)) - \cosh c_1(\mu)}{\mu}.$$

Llamemos

$$L_\mu = \frac{\sinh(\mu + c_1(\mu)) - \sinh c_1(\mu)}{\mu}$$

a la longitud de  $y_\mu$  en el intervalo  $[0, 1]$ . Hemos de ver que  $L_\mu : ]0, +\infty[ \rightarrow ]L_0, +\infty[$  es biyectiva, donde ahora  $L_0 = \sqrt{1 + y_1^2}$ .

Por el teorema del valor medio, existe un  $\xi \in ]c_1(\mu), c_1(\mu) + \mu[$  tal que

$$y_1 = \frac{\cosh(\mu + c_1(\mu)) - \cosh c_1(\mu)}{\mu} = \sinh \xi.$$

Ahora bien, este  $\xi$  está unívocamente determinado por  $y_1$ . De aquí se sigue la desigualdad<sup>3</sup>

$$y_1 = \sinh \xi < \sinh(\mu + c_1(\mu)) = y'_\mu(1).$$

Por la continuidad del seno hiperbólico, dado  $\epsilon > 0$ , existe un  $\mu_0 > 0$  tal que si  $0 < \xi - c_1 < \mu_0$ , entonces  $|\sinh c_1 - \sinh \xi| < \epsilon$ . En particular, si  $0 < \mu < \mu_0$ , tenemos que  $0 < \xi - c_1(\mu) < \mu < \mu_0$ , luego  $|\sinh c_1(\mu) - y_1| < \epsilon$ . En definitiva:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \sinh c_1(\mu) = y_1.$$

A su vez, de aquí deducimos que

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \sinh(\mu + c_1(\mu)) = \lim_{\mu \rightarrow 0} (\sinh \mu \cosh c_1(\mu) + \cosh \mu \sinh c_1(\mu)) = 0 \cdot \sqrt{1 + y_1^2} + y_1 = y_1.$$

La función  $y_\mu$  es convexa, luego su derivada es creciente, luego, para todo  $x \in [0, 1]$ ,

$$\sinh c_1(\mu) = y'_\mu(0) \leq y'_\mu(x) \leq y'_\mu(1) = \sinh(\mu + c_1(\mu)),$$

y de aquí se sigue la existencia del límite  $\lim_{\mu \rightarrow 0} y'_\mu(x) = y_1$  uniformemente en  $[0, 1]$ .

---

<sup>3</sup>Esta desigualdad tiene una interpretación geométrica clara: la pendiente con la que la catenaria llega al extremo derecho ha de ser mayor que la pendiente de la recta que une los dos extremos. También puede deducirse del hecho de que la catenaria es convexa.

Por consiguiente,

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \sqrt{1 + y_\mu'^2(x)} = \sqrt{1 + y_1^2}$$

uniformemente en  $[0, 1]$ , luego también existe

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} L_\mu = \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^1 \sqrt{1 + y_\mu'^2(x)} = \sqrt{1 + y_1^2} = L_0.$$

Observemos a continuación que  $\mu$  y  $c_1(\mu)$  están relacionados por la ecuación

$$F(c_1, \mu) = \cosh(\mu + c_1) - \cosh(c_1) - \mu y_1 = 0.$$

El teorema de la función implícita nos asegura que la función  $c_1(\mu)$  es infinitamente derivable, y además (recordando que hemos probado que  $y_\mu'(1) > y_1$ ):

$$c_1'(\mu) = \frac{-F_\mu'}{F_{c_1}'} = \frac{y_1 - \sinh(\mu + c_1)}{\sinh(\mu + c_1) - \sinh c_1} = \frac{y_1 - y_\mu'(1)}{\mu L_\mu} < 0.$$

Así pues, la función  $c_1(\mu)$  es monótona decreciente. Existe un  $\mu > 0$  tal que  $c_1(\mu) = 0$ , pues<sup>4</sup> esto equivale a que

$$\frac{\cosh \mu - 1}{\mu} = y_1,$$

y la función de la izquierda biyecta  $]0, +\infty[$  con  $]0, +\infty[$ . Como  $c_1(\mu)$  toma el valor 0 y es decreciente, también toma valores negativos. Más aún, concluimos que  $c_1(\mu) < 0$  para todo  $\mu$  suficientemente grande.

Para tales valores de  $\mu$ , tenemos que  $y_\mu'(0) = \sinh c_1(\mu) < 0$  y, como  $y_\mu(1) = y_1 \geq 0$ , la función  $y_\mu$  tiene necesariamente un mínimo en  $]0, 1[$ , pero dicho mínimo ha de ser (derivando e igualando a 0) el punto  $\xi = -c_1(\mu)/\mu \in ]0, 1[$ .

Fijemos un  $M > 0$  y sea  $K > y_1 + M$ . Sea  $\mu_0 > 1$  tal que, para todo  $\mu \geq \mu_0$  se cumpla que  $c_1(\mu) < 0$  y

$$\frac{\cosh(\mu/2)}{\mu} > K.$$

Así, por la monotonía del coseno hiperbólico, si  $|x| \geq 1/2$  se cumple también que

$$\frac{\cosh(\mu x)}{\mu} > K.$$

Dado  $\mu \geq \mu_0$ , o bien  $1 + c_1(\mu)/\mu \geq 1/2$  o bien  $-c_1(\mu)/\mu \geq 1/2$ , luego, por lo que acabamos de decir,

$$\frac{\cosh(\mu + c_1(\mu))}{\mu} > K \quad \text{o bien} \quad \frac{\cosh c_1(\mu)}{\mu} > K.$$

---

<sup>4</sup>Aquí usamos que  $y_1 > 0$ , ya que esto es falso para  $y_1 = 0$ . Podemos excluir este caso porque ya lo hemos tratado en el apartado anterior o, alternativamente, es fácil ver que si  $y_1 = 0$  entonces  $c_1(\mu) = -\mu/2$ , y así vemos que  $c_2$  toma valores negativos, que es lo único que se usa a continuación.

Entonces, si fuera

$$\frac{\cosh c_1(\mu)}{\mu} \leq M < K,$$

tendríamos que

$$y_1 = y_\mu(1) = \frac{\cosh(\mu + c_1(\mu)) - \cosh c_1(\mu)}{\mu} > K - M > y_1,$$

contradicción, luego ha de ser

$$\frac{\cosh c_1(\mu)}{\mu} > M,$$

luego

$$y_\mu(\xi) = \frac{1 - \cosh c_1(\mu)}{\mu} < \frac{1}{\mu} - M < 1 - M.$$

Es obvio que  $L_\mu > -y_\mu(\xi) > M - 1$ , luego hemos probado que

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} L_\mu = +\infty.$$

En total tenemos que  $L_\mu : ]0, +\infty[ \rightarrow ]L_0, +\infty[$  es suprayectiva, lo que termina la prueba de la existencia de catenarias con una longitud y unos extremos dados. Para probar la unicidad falta ver que la aplicación es inyectiva. Más en general, lo que queremos probar es que la aplicación

$$(\mu, c_1) \mapsto (y_1, L) = \left( \frac{\cosh(\mu + c_1) - \cosh c_1}{\mu}, \frac{\sinh(\mu + c_1) - \sinh c_1}{\mu} \right)$$

biyecta el abierto  $\mu > 0$  con el abierto  $L > L_0$ . Ya sabemos que es suprayectiva y queremos ver que es inyectiva. El determinante jacobiano de esta aplicación es

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\mu \sinh(\mu + c_1) - \cosh(\mu + c_1) + \cosh c_1}{\mu^2} & \frac{\mu \cosh(\mu + c_1) - \sinh(\mu + c_1) + \sinh c_1}{\mu^2} \\ \frac{\sinh(\mu + c_1) - \sinh c_1}{\mu} & \frac{\cosh(\mu + c_1) - \cosh c_1}{\mu} \end{vmatrix}$$

Operando y aplicando las fórmulas del seno y el coseno hiperbólico de una resta, llegamos a que

$$J = \frac{2 \cosh \mu - \mu \sinh \mu - 2}{\mu^3}.$$

Vamos a probar que  $J \neq 0$ , para lo cual estudiamos el numerador  $f(\mu)$ . Se comprueba que

$$f'(\mu) = \sinh \mu - \mu \cosh \mu, \quad f''(\mu) = -\mu \sinh \mu.$$

Vemos que  $f(0) = f'(0) = f''(0)$  y  $f''(\mu) < 0$  para  $\mu > 0$ , luego  $f'$  es decreciente en  $]0, +\infty[$ , luego  $f'$  es negativa en dicho intervalo, luego  $f$  también es decreciente, luego también es negativa, luego  $J < 0$  para todo  $\mu > 0$ .

Este hecho nos permite asegurar que la aplicación  $\phi(\mu, c_1) = (y_1, L)$  es *localmente inyectiva*, es decir, que cada par  $(\mu, c_1)$  tiene un entorno donde es inyectiva, pero no podemos asegurar todavía la inyectividad global.

Ahora volvemos al problema de la inyectividad de  $L_\mu$  (que es lo que realmente necesitamos probar y que, de hecho, es equivalente a la inyectividad global de  $\phi$ ). Si  $L_\mu$  no fuera inyectiva, tomaría el mismo valor para dos valores distintos de  $\mu$ , luego en el intervalo comprendido entre dichos valores  $L_\mu$  tendría un máximo o un mínimo global. Pongamos que dicho extremo es  $\mu^*$  y llamemos  $c_1^* = c_1(\mu^*)$ . Vamos a probar que  $\phi$  no es localmente inyectiva en  $(\mu^*, c_1^*)$ , con lo que tendremos una contradicción y la prueba habrá terminado.

Dado  $\epsilon > 0$ , es claro que existen dos valores  $\mu_0 < \mu^* < \mu_1$  tales que  $|\mu_1 - \mu_0| < \epsilon$  y  $L_{\mu_0} = L_{\mu_1} = \bar{L}$ . (Esto le sucede a toda función continua en un extremo local.) Por la continuidad de  $c_1(\mu)$ , podemos tomar  $\mu_1$  y  $\mu_2$  suficientemente próximos a  $\mu^*$  para asegurar que  $c_{1,0} = c_1(\mu_0)$  y  $c_{1,1} = c_1(\mu_1)$  cumplen  $|c_{1,1}^* - c_{1,0}^*| < \epsilon$ ,  $|c_{1,1}^* - c_{1,1}^*| < \epsilon$ . En resumen, en un entorno arbitrario de  $(\mu^*, c_1^*)$  hemos encontrado dos puntos  $(\mu_0, c_{1,0})$  y  $(\mu_1, c_{1,1})$  tales que  $\phi(\mu_0, c_{1,0}) = \phi(\mu_1, c_{1,1}) = (y_1, \bar{L})$ . (Notemos que la primera componente es  $y_1$  en ambos casos por definición de la función  $c_1(\mu)$ .) Esto contradice la inyectividad local de  $\phi$ .

**Consecuencias geométricas** Desde un punto de vista geométrico, observamos que la expresión general de la catenaria es la función

$$y_\mu(x) = \frac{\cosh \mu x}{\mu}$$

sometida a una traslación horizontal  $x \mapsto x - c_1$  y a una traslación vertical  $y \mapsto y + c_2$ , de modo que toda catenaria de parámetro  $\mu$  es un segmento de la gráfica de la función  $y_\mu$ . La figura muestra las

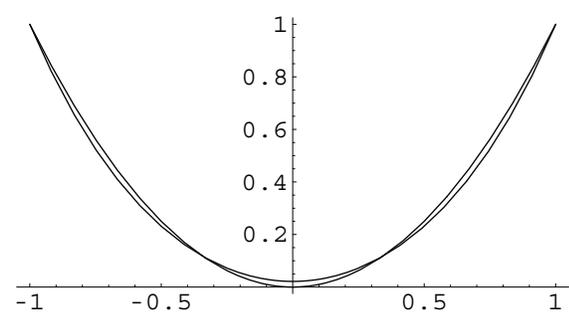
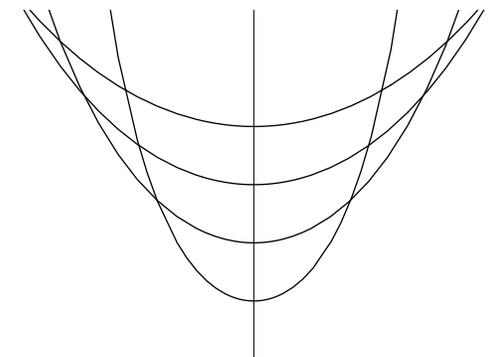
funciones  $y_\mu$  para  $\mu = 1/0.5, 1, 1/1.5$  y  $1/2$  (que cortan al eje  $y$ , respectivamente, en 0.5, 1, 1.5 y 2). Parecen parábolas porque el desarrollo en serie de Taylor de  $y_\mu$  en 0 es

$$y_\mu(x) = \frac{1}{\mu} + \mu x^2 + \mu^4 x^4 + \dots$$

de modo que difiere de una parábola en un término de grado 4. La figura muestra la parábola  $y = x^2$  junto con la catenaria de la misma longitud entre  $-1$  y  $1$ .

Del teorema siguiente deduciremos una propiedad elemental de las catenarias:

**Teorema** Sean  $y(x), \bar{y}(x)$  dos catenarias en un intervalo  $[x_0, x_1]$  tales que  $y(x_0) = \bar{y}(x_0), y(x_1) = \bar{y}(x_1)$ . Entonces existe un  $\xi \in ]x_0, x_1[$  tal que  $y'(\xi) = \bar{y}'(\xi)$ .



DEMOSTRACIÓN: Supongamos primero que  $y(x_0) = y(x_1)$ . El teorema de Rolle nos da que existe un punto  $\xi \in ]x_0, x_1[$  tal que  $y'(\xi) = \sinh(\mu\xi + c_1) = 0$ , luego  $\xi = -c_1/\mu$ . Por otra parte, la condición  $y(x_0) = y(x_1)$  implica que  $\cosh(\mu x_0 + c_1) = \cosh(\mu x_1 + c_1)$ , luego  $\mu x_0 + c_1 = -\mu x_1 - c_1$  (el signo positivo es imposible). Así pues,

$$\xi = -\frac{c_1}{\mu} = \frac{x_0 + x_1}{2}.$$

Vemos que  $\xi$  es independiente de  $y$ , luego  $y'(\xi) = \bar{y}'(\xi) = 0$ .

Si  $y(x_0) \neq y(x_1)$  aplicamos el teorema de Cauchy, en virtud del cual existe un cierto  $\xi \in ]x_0, x_1[$  tal que

$$1 = \frac{y(x_1) - y(x_0)}{\bar{y}(x_1) - \bar{y}(x_0)} = \frac{y'(\xi)}{\bar{y}'(\xi)},$$

luego  $y'(\xi) = \bar{y}'(\xi)$ . ■

De aquí deducimos:

**Teorema** *Dos catenarias distintas no pueden tener más de dos puntos en común.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que dos catenarias  $y(x)$  y  $\bar{y}(x)$  coinciden en tres puntos  $x_0 < x_1 < x_2$ . Entonces el teorema anterior nos da puntos  $x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2$  tales que  $y'(\xi_1) = \bar{y}'(\xi_1)$ ,  $y'(\xi_2) = \bar{y}'(\xi_2)$ . Explícitamente:

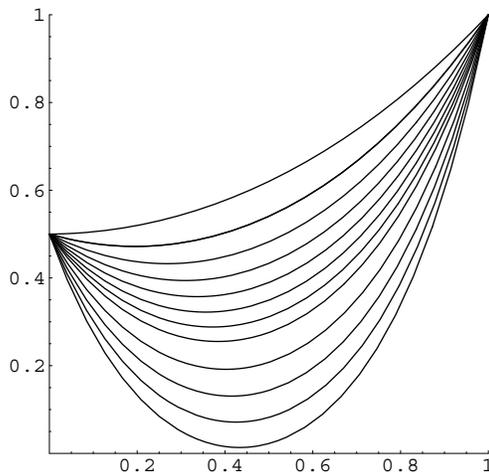
$$\sinh(\mu\xi_1 + c_1) = \sinh(\bar{\mu}\xi_1 + \bar{c}_1), \quad \sinh(\mu\xi_2 + c_1) = \sinh(\bar{\mu}\xi_2 + \bar{c}_1),$$

luego

$$\mu\xi_1 + c_1 = \bar{\mu}\xi_1 + \bar{c}_1, \quad \mu\xi_2 + c_1 = \bar{\mu}\xi_2 + \bar{c}_2.$$

Las funciones  $\mu x + c_1$  y  $\bar{\mu} x + \bar{c}_1$  son dos rectas que coinciden en dos puntos, luego son iguales, luego  $\mu = \bar{\mu}$ ,  $c_1 = \bar{c}_1$ , luego las dos catenarias son idénticas. ■

Por consiguiente, dos catenarias con extremos comunes en  $[x_0, x_1]$  no pueden cortarse dentro del intervalo, luego una permanecerá siempre por debajo de la otra. (La diferencia entre ambas es una función continua que no toma el valor 0 en  $]x_0, x_1[$ , luego es siempre positiva o siempre negativa.) La figura muestra catenarias de distintas longitudes entre los puntos  $(0, 1/2)$  y  $(1, 1)$ .



**Consecuencias físicas** La unicidad de la solución implica en particular que, tal y como habíamos afirmado, la forma de la catenaria no depende ni de  $\rho$  ni de  $g$ , aunque esto se deduce también de las condiciones

$$\frac{d(T \cos \alpha)}{ds} = 0, \quad \frac{d(T \sin \alpha)}{ds} = \rho g.$$

En efecto, si una función  $\alpha(s)$  cumple estas condiciones cuando, por ejemplo,  $\rho g = 1$  con una tensión  $T(s)$ , entonces la misma función  $\alpha(s)$  con la tensión  $\rho g T(s)$  cumple estas mismas condiciones para valores arbitrarios de  $\rho$  y  $g$ , luego la catenaria calculada con  $\rho g$  arbitrarios es la misma que calculamos con  $\rho g = 1$ , aunque las tensiones asociadas sean distintas. Notemos que es fácil calcular la función  $T(s)$ . Para ello observamos que

$$\tan \alpha(x) = y'(x) = \sinh(\mu x + c_1),$$

y las relaciones trigonométricas nos dan que

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha(x)} = 1 + \sinh^2(\mu x + c_1) = \cosh^2(\mu x + c_1),$$

luego

$$T(x) = \frac{\kappa}{\cos \alpha(x)} = \rho g \frac{\cosh(\mu x + c_1)}{\mu}.$$

Cuando la longitud de la catenaria tiende a la longitud del segmento que une sus extremos, la catenaria converge a dicho segmento. Tal vez el lector se plantee si el segmento mismo es una catenaria, pero la respuesta es negativa. Esto es obvio desde el momento en que las ecuaciones de las catenarias que hemos obtenido no son rectas en ningún caso, pero además tiene su interpretación física: Al menos en teoría, es imposible sujetar una cuerda por sus extremos y lograr que se mantenga recta, por mucho que se tense. (Otra cosa es que el abombamiento que sufra sea prácticamente inapreciable.)

Si pensamos, concretamente, en una cuerda horizontal, es claro que ninguna tensión horizontal, por grande que sea, puede contrarrestar el peso (vertical) de la cuerda, luego ésta se arqueará un poco necesariamente (aun a costa de estirarse aumentando su longitud). En general, el hecho de que la componente horizontal de la tensión tenga que ser constante implicaría que también tendría que serlo la componente vertical, y esto a su vez lleva a un absurdo, pues la tensión vertical debería ser mayor en los puntos más altos.

Mencionaremos, por último, que el problema de la catenaria puede abordarse desde un punto de vista completamente distinto, partiendo del hecho de que la catenaria debe ser la curva que une dos puntos con una longitud dada con la mínima energía potencial. La energía potencial de una curva es

$$E(y) = \int_0^L gy(s)\rho ds = \rho g \int_{x_0}^{x_1} y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

Este enfoque conduce al empleo de técnicas de análisis funcional.

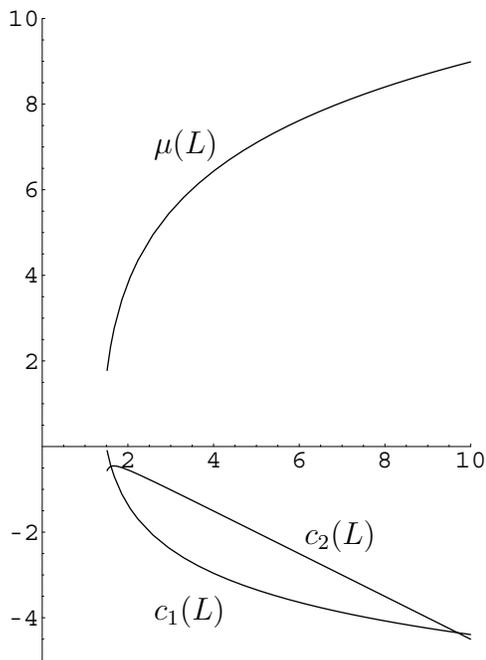
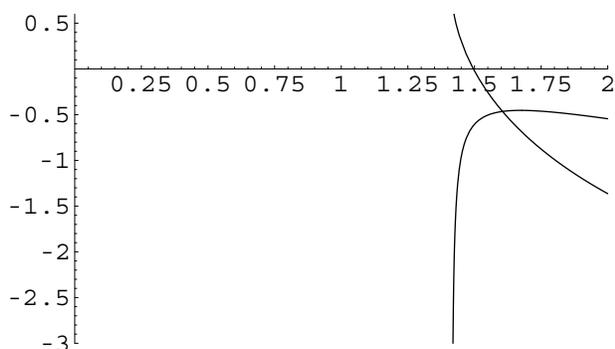
**Cálculo de las constantes** Las constantes  $\mu$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ , para unas condiciones iniciales dadas, no pueden calcularse más que mediante técnicas de análisis numérico. Por ejemplo, para la catenaria representada en la introducción, que pasa por los puntos  $(0, 1)$  y  $(1, 1)$  con longitud  $L = 2$ , resultan ser  $\mu = 4.35464\dots$ ,  $c_1 = -2.17732\dots$ ,  $c_2 = -0.02602\dots$

En la dirección

<http://www.uv.es/ivorra/Libros/animacion.gif>

puede verse una animación que parte de la catenaria que acabamos de mencionar, en una primera fase, reduce su longitud de  $L = 2$  hasta  $L = 1.5$  y luego realiza diversos movimientos de su extremo derecho manteniendo constante la longitud. En cada imagen se indican los valores correspondientes de los parámetros  $(\mu, c_1, c_2)$ .

La figura de la derecha muestra las funciones  $\mu(L)$ ,  $c_1(L)$  y  $c_2(L)$  para las catenarias de extremos  $(0, 0)$  y  $(1, 1)$ . Notemos que las funciones están definidas únicamente a partir de  $L_0 = \sqrt{2}$ . La función  $c_2(L)$  no es siempre negativa. La figura inferior muestra la gráfica con más detalle cerca de  $\sqrt{2}$ .



El cambio de signo tiene una interpretación geométrica clara: es fácil ver que (si  $x_0 = 0$ ,  $y_1 > y_0$ ) el parámetro  $c_1$  es negativo si y sólo si la catenaria alcanza su mínimo en el interior del intervalo, y no en el extremo izquierdo.

La última figura muestra la función  $c_1(\mu)$ . Vemos que, tal y como hemos demostrado, es decreciente, aunque, en contra de lo que la gráfica pueda dar a entender, no es una recta.

