Las matemáticas de una hipoteca

Carlos Ivorra
(http://www.uv.es/ivorra)

El propósito de estas notas es explicar a un lector no familiarizado con la economía las matemáticas subyacentes en los préstamos hipotecarios: cómo se calculan las cuotas, cómo cambian al cambiar el tipo de interés o al hacer amortizaciones extraordinarias, cuántos intereses se pagan, etc.

Poca gente sabe lo que es una hipoteca, pues, según la *Real Academia Española,* se trata de una *"Finca que sirve como garantía del pago de un crédito".* Así pues, en teoría —y en contra de lo que piensa el común de los mortales—, una hipoteca no es un tipo de préstamo, sino una finca. Sin embargo, siguiendo el uso habitual, llamaremos *"hipoteca"* a lo que la RAE llama *"contrato de hipoteca"* y los bancos llaman *"préstamo hipotecario",* es decir, un préstamo concedido tomando una propiedad como garantía del pago.

En realidad, este hecho (que el préstamo venga avalado por una propiedad) es irrelevante para lo que aquí nos ocupa y, más en general, vamos a describir las matemáticas subyacentes a lo que se conoce como *"préstamos con cuota de amortización constante"*, que es el tipo de préstamo que usualmente se emplea en los contratos hipotecarios.

Como todo el mundo sabe, un *préstamo* es un contrato por el que un *prestamista* (usualmente un banco) entrega un *capital* (una cantidad de dinero) a un *prestatario,* que éste deberá reembolsar juntamente con un *interés,* es decir, una cantidad adicional de dinero, que es el precio por el servicio de anticiparle el dinero que necesita. El contrato especifica el modo en que el prestatario deberá devolver el capital y los intereses, así como la cuantía de éstos.

Un *préstamo con cuota de amortización constante* es un préstamo en el que el prestatario se compromete a devolver el capital y los intereses pagando una cantidad prefijada de *cuotas* periódicas de un mismo importe.

Con precisión, las hipotecas son *préstamos con cuota de amortización constante revisable,* es decir, préstamos en los que el capital y los intereses se devuelven mediante pagos constantes (usualmente mensuales) pero en los que las partes pueden reservarse ciertos derechos para modificar las condiciones del préstamo, lo que en última instancia se refleja en una variación del importe de la cuota o del número de cuotas. Las principales son:

- El prestamista puede reservarse el derecho de revisar periódicamente (usualmente una vez al año), aunque con unos criterios prefijados, el importe de los intereses aplicables al préstamo. En tal caso se habla de un *préstamo con interés variable o revisable,* mientras que si no se admite la modificación de los criterios que estipulan la cuantía de los intereses entonces se trata de un *préstamo con interés fijo.*

- El prestatario puede reservarse el derecho de devolver (*amortizar*) anticipadamente la totalidad o una parte del capital prestado, con la consiguente exención del pago de los intereses que habría pagado en caso de haber respetado los plazos pactados. El prestamista puede a su vez establecer *comisiones* que el prestatario deberá abonarle cada vez que decida ejercer estos derechos.

- El prestamista puede aceptar que, excepcionalmente, el prestatario demore el pago de algunas cuotas a cambio de un aumento en los intereses percibidos.

Según indicábamos, la característica específica de los préstamos hipotecarios consiste en que estipulan que, si el prestatario no puede cumplir las condiciones del contrato, la *hipoteca* (en el sentido de la RAE) pasa a ser propiedad del prestamista. No vamos a entrar aquí en las características económicas y jurídicas de estos embargos,[1] al igual que no vamos a tener en consideración algunos aspectos de las hipotecas que deberá analizar cuidadosamente —o, mejor aún, negociar con el banco— cualquiera que esté comparando distintas ofertas bancarias, como son (entre otras):

- La existencia de una *comisión de apertura,* es decir, una cantidad de dinero que el banco cobra simplemente por conceder el préstamo. Puede parecer paradójico que haya que pagar dinero hoy para que el banco me dé dinero hoy, y lo és, pero lo que a menudo sucede en la práctica es que el banco financia la comisión: si uno pide una hipoteca de 200 000 € y la comisión de apertura es del 1%, entonces el banco concederá una hipoteca por 202 000 € y se quedará los 2 000 € en concepto de comisión de apertura, de modo que el prestatario recibe 200 000 €, pero tendrá que devolver los 202 000 € con sus correspondientes intereses.

- La existencia de *comisiones por amortizacion anticipada total o parcial del préstamo,* de modo que si el prestatario quiere anticipar la totalidad o una parte del capital adeudado debe pagar al banco un porcentaje de la cantidad anticipada.

- La existencia de una *comisión de subrogación,* un porcentaje del capital adeudado que el banco percibe si el prestatario transfiere su hipoteca a otra persona (usualmente alguien que le compre la finca hipotecada).

- La existencia de cualquier clase de comisión periódica en concepto de gastos de mantenimiento del préstamo.

[1]Comentemos, no obstante, que según la legislación española, cuando un banco embarga un piso a un moroso, lo saca a subasta, pero si con el dinero obtenido por la subasta no se cubre la cantidad adeudada, el prestatario sigue en deuda con el banco, es decir, que no es cierto que uno queda en paz con el banco sólo por entregar su casa.

- El máximo capital que el banco está dispuesto a ofrecer al prestatario, que a lo sumo será el valor estimado de la propiedad hipotecada, aunque con frecuencia se fija en un 80% de dicho valor, además de tener en cuenta otro tipo de datos del prestatario, como su sueldo, su edad, su estado de salud, etc.

Al no tener en consideración las posibles comisiones y gastos estamos haciendo algo análogo a lo que hace un físico cuando estudia el movimiento "en ausencia de rozamiento". De todo lo que hemos mencionado en esta introducción, lo más delicado es la forma en que se estipula los intereses que debe abonar el prestatario. Es bien sabido que esto se suele resumir en un porcentaje, a menudo relativo a un indicador económico. El más habitual en el caso de las hipotecas es el *Euribor,* y así, es fácil encontrarse una oferta de préstamo hipotecario cuyo tipo de interés sea, por ejemplo, *Euribor* +0.5. Actualmente (noviembre de 2009) el *Euribor* es 1.242%, por lo que la hipoteca citada tendría un tipo de interés del 1.7242%, pero ¿qué significa esto? Esto es parte de lo que pretenden explicar estas notas. Empezaremos introduciendo algunos conceptos elementales de la matemática financiera.

1 El interés simple

El tipo más sencillo de préstamo en el que podemos pensar es aquel en el que un prestamista entrega un capital a un prestatario y éste se compromete a devolvérselo en un único pago al cabo de un tiempo, juntamente con unos intereses. El préstamo es un servicio que el prestamista le hace al prestatario y los intereses son el precio de dicho servicio. Podríamos pensar que el prestamista está "alquilando" su dinero al prestatario, y que los intereses son el "alquiler" que éste paga por él. Del mismo modo que se considera natural que el alquiler de un piso de lujo sea superior al alquiler de una chabola, y que el alquiler de un piso por dos años sea superior al alquiler del mismo piso por un mes, es razonable que el prestamista exija más intereses cuanto mayor sea el capital prestado y cuanto más tiempo tarde el prestatario en devolvérselo.

La ley del interés simple La forma más simple de tener en cuenta estas consideraciones consiste en estipular que los intereses serán proporcionales al capital prestado C_0 y al tiempo t que dure el préstamo. En términos matemáticos, esto significa que los intereses I que el prestatario deberá pagar por el préstamo vendrán dados por la expresión

$$I = C_0 it,$$

donde la constante de proporcionalidad i es lo que se llama *tipo de interes* o *rédito* del préstamo. Por consiguiente, el capital C que el prestatario deberá devolver cuando haya transcurrido el tiempo t será

$$C = C_0 + C_0 it = C_0(1 + it). \tag{1}$$

Periodo de aplicación Observemos que el tipo de interés i es el interés que el prestatario ha de pagar por cada unidad de capital prestado por cada unidad de tiempo transcurrida, y aquí es esencial fijar qué unidades de tiempo se están considerando o, equivalentemente, hay que especificar el *periodo* de tiempo al que corresponde el tipo de interés (un año, un mes, un día, etc.)

Así, si decimos que un préstamo está sometido a un tipo de interés *anual* $i = 0.03$ estamos diciendo que el prestatario deberá pagar en concepto de intereses 3 céntimos de euro por cada euro prestado y por cada año que dure el préstamo o, equivalentemente, que el capital a devolver se ha de calcular con la fórmula (1) con el tiempo t expresado en años, mientras que mientras que un interés *mensual* $i = 0.03$ supone que el prestatario deberá pagar 3 céntimos de euro por cada euro prestado y por cada mes que dure el préstamo o, equivalentemente, que el capital final se ha de calcular con (1) con el tiempo t expresado en meses.

Es frecuente indicar el periodo de aplicación de un tipo de interés con un subíndice, de modo que i_1 representa un interés anual, i_2 un interés semestral, i_{12} un interés mensual, i_{365} un interés diario y, en general, i_k un tipo de interés aplicable a un periodo de $1/k$ años.

Las deplorables irregularidades de nuestro calendario han vencido la meticulosidad de los banqueros, y así, todo el mundo está de acuerdo en aceptar que si se prestan 1 000 € con un tipo de interés $i_{12} = 0.05$ durante dos meses, el capital a devolver será $C = 1\,100$ € independientemente de si los meses en cuestión son enero y febrero (59 días) o julio y agosto (62 días). Las inconsistencias a que esto pueda dar lugar se salvan renunciando a ser quisquilloso.

Tipos de interés como porcentajes Observemos que un interés $i = 0.03$ significa que, por cada periodo que pasa, el prestamista va a recibir 3 € por cada 100 € prestados, por lo que es habitual decir que el tipo de interés es del 3%. En lo sucesivo aceptaremos la identidad $\% = 1/100$, de modo que podemos escribir con rigor

$$i = 3\% = 0.03 \qquad \text{(y, en particular, que } 3\% \neq 3\text{)}.$$

Leyes de capitalización La fórmula (1) es lo que se llama una *ley de capitalización,* es decir, un criterio (más o menos razonable, pero arbitrario en última instancia) para determinar el capital C en que se convierte (al sumarle intereses) un capital dado C_0 al cabo de un tiempo t. Concretamente, se conoce como la *ley de capitalización del interés simple,* donde lo de "interés simple" es el nombre concreto de la fórmula (1), que la distingue de otras leyes de capitalización alternativas. Así, si hablamos de un préstamo sujeto a un tipo de interés simple anual del 5%, estamos indicando que el préstamo estipula (por convenio) que el capital final se calculará con la ley de capitalización del interés simple.

Observemos a continuación que no hay ninguna necesidad de que el tiempo t sea múltiplo del periodo al que se aplican los intereses:

Ejemplo Si prestamos $1\,000$ € con un interés simple del 5% anual durante año y medio, los intereses ascenderán a 50 € por el primer año más 25 € por el medio año restante, y el capital a devolver será de $1\,075$ €, tal y como estipula la ley de capitalización:

$$C = 1\,000(1 + 0.05 \cdot 1.5) = 1\,075.$$

En particular, si no se establece *a priori* el tiempo de vencimiento del préstamo, la ley de capitalización, para C_0 e i fijos, puede verse como una función que determina el capital que adeudado al prestamista en función del tiempo transcurrido t.

Tipos de interés equivalentes Hemos visto que, al especificar un tipo de interés, hemos de precisar el periodo de tiempo al que se aplica, lo cual no significa que no podamos elegir las unidades de tiempo con las que queremos trabajar. Por ejemplo, si en lugar de trabajar en años queremos trabajar en meses, basta observar que un interés simple anual de, digamos, $i_1 = 9\%$ es equivalente a un interés simple mensual $i_{12} = 9\%/12 = 0.75\%$, en el sentido de que cobrar 0.75 € por cada 100 € prestados y cada mes que transcurra es equivalente a cobrar 9 € por cada 100 € prestados y año transcurrido.

En general, un tipo de interés k-ésimo simple i_k es *equivalente* a un tipo de interés anual $i_1 = ki_k$, en el sentido de que aplicar la fórmula (1) a un capital C_0 con tipo de interés i_k y el tiempo medido en años/k proporciona el mismo resultado que aplicar la misma fórmula al mismo capital con tipo de interés $i_1 = ki_k$ y el tiempo medido en años. En efecto, si t es el tiempo en años, el tiempo en años/k es kt, y el capital final es

$$C = C_0(1 + i_k kt) = C_0(1 + i_1 t).$$

Más en general aún, es claro que un interés k-ésimo simple i_k es equivalente al interés k'-ésimo simple $i_{k'} = (k/k')i_k$.

Inconvenientes del interés simple Podría pensarse que la ley de capitalización del interés simple es el medio idóneo de estipular los intereses que deben pagarse por un préstamo, pues es matemáticamente muy sencilla y su interpretación es, al menos en apariencia, razonable y justa. Sin embargo, hay circunstancias en las que resulta inapropiada.

Ejemplo Consideremos el caso de un prestamista profesional, es decir, alguien que tiene un capital que destina a prestarlo sistemáticamente a quienes lo necesitan (y son solventes) a cambio de unos intereses. Por concretar, supongamos que pide a sus clientes un interés simple $i_1 = 10\%$. Cada cliente recibe la cantidad que solicita y se compromete a devolverla con intereses en un tiempo pactado de antemano. Supongamos que, concretamente, un cliente le pide $1\,000$ € por un plazo de 2 años. Si el prestamista le concede el préstamo, al cabo de ese tiempo recibirá $1\,200$ €. Ahora bien, para el prestamista sería más ventajoso prestarle el dinero sólo por 1 año, pues así, al cabo de ese tiempo recibiría $1\,100$ € que a su vez podría prestar por un año a otros clientes, lo cual le proporcionaría a los dos años un capital

$$C = 1\,100(1 + 0.1) = 1\,210 \text{ €}.$$

Así pues, si en lugar de prestar los $1\,000$ € por dos años a un mismo cliente se los presta sólo por un año y luego presta por otro año a otro cliente la cantidad que ha recibido del primer préstamo, a partir de sus $1\,000$ € iniciales obtiene unos beneficios de 210 € en lugar de los 200 que obtenía con el préstamo a dos años. La razón es que así no sólo obtiene intereses por los $1\,000$ €, sino también por los 100 € que ha recibido de intereses. Se dice que ha *capitalizado* los intereses, es decir, que al partir el préstamo los ha convertido en capital del que puede a su vez obtener intereses.

Pero esto no acaba aquí, todavía le sería más rentable dividir el préstamo en cuatro préstamos de seis meses. Los capitales que obtendría así serían los siguientes:

$$\begin{aligned}
C_{0.5} &= 1\,000(1 + 0.1 \cdot 0.5) = 1\,050,\\
C_1 &= 1\,050(1 + 0.1 \cdot 0.5) = 1\,102.5,\\
C_{1.5} &= 1\,102.5(1 + 0.1 \cdot 0.5) = 1\,157.625,\\
C_2 &= 1\,157.625(1 + 0.1 \cdot 0.5) = 1\,215.50625.
\end{aligned}$$

Vemos que terminaría con 5 € más que si sólo hace dos préstamos.

En general, lo que sucede es que un préstamo a largo plazo es menos rentable para el prestamista que muchos préstamos consecutivos a corto plazo, pues en el segundo caso los intereses se capitalizan y generan nuevos intereses.

Este fenómeno también puede perjudicar al prestatario. Supongamos de nuevo el caso en que el prestamista presta $1\,000$ € por dos años a un prestatario y que, al cabo de un año, al prestatario le interesa cambiar de prestamista. Para ello tendría que pedir al segundo prestamista los $1\,100$ € que necesita para cancelar su primer préstamo y, aunque las condiciones del segundo préstamo sean idénticas a las del primero (salvo que ahora sería por un año), el prestatario se encontraría con que al final del segundo año tendría que pagar $1\,210$ € en lugar de los $1\,200$ € que habría pagado si no hubiera hecho el cambio.

Consideremos un último ejemplo: Cuando un ahorrador deposita dinero en un banco en una cuenta corriente remunerada, en cierto sentido le está "prestando" su dinero al banco. Si el convenio fuera que, en el momento en que el cliente decidiera retirar parte de su dinero de su cuenta, el banco estuviera obligado a pagarle, no sólo el dinero depositado, sino también los intereses calculados con la ley (1) con un tipo de interés prefijado, el cliente estaría perdiendo dinero por el mero hecho de dejar sus ahorros en el banco. Sin más que sacarlos y volverlos a meter (forzando así al banco a abonarle los intereses y capitalizándolos al hacer el nuevo ingreso), el ahorrador podría obtener unos intereses algo mayores.

En definitiva, no es razonable que una operación tan "banal" en teoría como cancelar un préstamo para inmediatamente generar otro en las mismas condiciones produzca beneficios o costes. En la práctica puede generar beneficios o costes debido a la existencia de comisiones de apertura, de cancelación o de gastos de gestión, pero éstos dependen entonces de las condiciones particulares de un contrato (el equivalente al "rozamiento" en física). Lo que no es razonable es que la propia ley de capitalización introduzca estos efectos. En los contextos en los que una de las partes tiene medios para forzar la capitalización de intereses es más razonable pactar que esto se haga de forma automática y regulada que no dejarlo a la tenacidad y la perseverancia de los implicados. Así nos evitamos encontrar prestamistas urgiendo a sus prestatarios a devolverles los préstamos cuanto antes o clientes de bancos sacando y metiendo su dinero a todas horas de sus cuentas corrientes. Esto nos lleva al concepto de interés compuesto, al que dedicamos la sección siguiente.

2 Interés compuesto

Una forma de eliminar los inconvenientes del interés simple que explicábamos al final de la sección anterior consiste en estipular que los intereses no se pagarán en la fecha de vencimiento del préstamo, sino de forma periódica. Así, es frecuente que si depositamos un capital a plazo fijo en un banco por un periodo de, digamos, un año, el banco nos aplique un interés simple mensual y nos abone cada mes los intereses generados. De este modo ya no obtenemos ninguna ventaja de sacar nuestro dinero y volverlo a depositar, pues el único interés que esto tenía era que el banco nos pagara los intereses, cosa que ahora ya hace de todos modos. Ahora bien, ¿qué hacemos nosotros con esos intereses? Si lo que vamos a hacer es volverlos a invertir en el mismo banco, es más práctico aún que, en lugar de dárnoslos para que nosotros los volvamos a ingresar, el banco los sume automáticamente al capital invertido.

Más en general, una alternativa a la posibilidad de que un prestatario abone periódicamente al prestamista los intereses de su préstamo es que éstos se sumen periódicamente al capital adeudado (es decir, se capitalicen), de modo que el prestatario sigue realizando un único pago en la fecha de vencimiento del préstamo.

Concretamente, consideremos el préstamo de un capital C_0 por un periodo de t unidades de tiempo con un interés i capitalizable cada unidad de tiempo. Esto significa que, al cabo del primer periodo, el prestatario debería pagar al prestamista unos intereses iC_0, pero, en lugar de esto, los suma al capital adeudado, que pasa a ser

$$C_1 = C_0(1 + i).$$

Por consiguiente, los intereses del segundo periodo se calculan ahora sobre el capital C_1, con lo que la deuda pasa a ser

$$C_2 = C_0(1 + i)(1 + i) = C_0(1 + i)^2.$$

En general, el capital que el prestatario deberá devolver en la fecha de vencimiento del préstamo, al cabo de t periodos, será

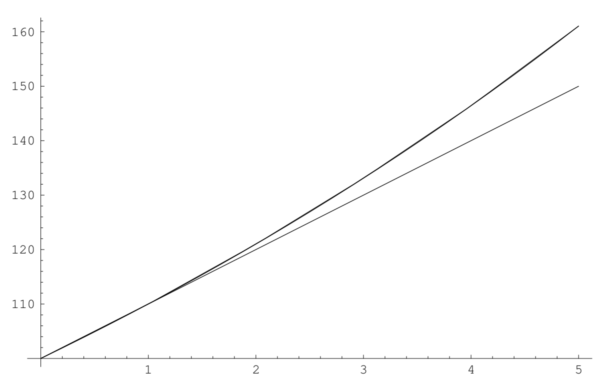
$$C = C_0(1 + i)^t. \tag{2}$$

¿Pero qué sucede si el tiempo t de vencimiento del préstamo no es un múltiplo del periodo de capitalización? Si descomponemos $t = E[t] + F[t]$, donde el primer sumando es la parte entera y el segundo la parte fraccionaria, al cabo del tiempo $E[t]$ el capital adeudado será, según lo que ya hemos visto, $C_0(1+i)^{E[t]}$, y este capital generará intereses todavía durante un periodo de tiempo $F[t]$. Los intereses (simples) correspondientes serán $C_0(1+i)^{E[t]}iF[t]$, intereses que deberán ser abonados en el momento del vencimiento del préstamo, luego el capital final abonado será

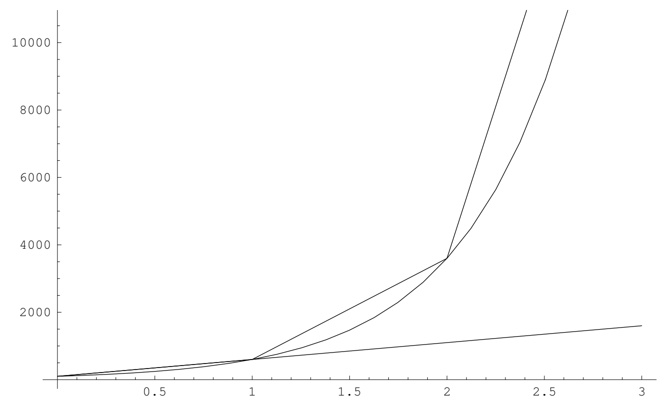
$$C = C_0(1+i)^{E[t]}(1 + iF[t]).$$

Esta fórmula es la ley de capitalización correspondiente al *interés simple con capitalización periódica de intereses.* Obviamente coincide con (2) cuando t es entero, pues entonces $E[t] = t$ y $F[t] = 0$. La ley de capitalización correspondiente al *interés compuesto* es simplemente (2), es decir, la consistente en aceptar que el capital final tras un tiempo t es el dado por (2) aunque t no sea entero. Esto en principio puede considerarse como un mero convenio. Debemos tener presente que una ley de capitalización es siempre, en última instancia, un convenio arbitrario, de modo que no tiene sentido plantearse si una es más justa o más injusta que otra, sino que todo es cuestión de que prestamista y prestatario la consideren aceptable. En realidad la ley de capitalización del interés compuesto tiene una interpretación económica en todo instante t (y no sólo en los múltiplos del periodo de capitalización de intereses), pero ahora no vamos a entrar en ella, sino que la discutiremos en el apéndice que figura como última sección de este artículo. Aquí nos limitaremos a hacer dos observaciones:

La primera es que la diferencia entre el interés compuesto y el interés simple con capitalización periódica de intereses son muy parecidos en la práctica. En efecto, la figura siguiente muestra las gráficas de las funciones $C(t)$ para un capital inicial $C_0 = 100$ € y un tipo de interés $i = 0.05$ para el interés simple (la recta que va por debajo), el interés compuesto y el interés simple con capitalización periódica de intereses.



Como vemos, las dos últimas gráficas son indistinguibles. Para apreciar la diferencia tenemos que considerar un tipo de interés exagerado. Por ejemplo, la figura siguiente corresponde a $i = 500\%$:



Vemos que el interés simple con capitalización de intereses está por encima del interés compuesto para tiempos fraccionarios y, como tenía que ser, coincide para tiempos enteros (múltiplos del periodo de capitalización). El interés simple coincide con éste último durante el primer año y luego queda sustancialmente por debajo. Para tipos de interés razonables (por ejemplo, no superiores al 20%) la diferencia entre el interés continuo y el interés simple con capitalización periódica de intereses nunca excede el 0.5% del capital acumulado en el último periodo. Para tipos de interés inferiores al 10% la diferencia nunca llega al 0.12%.

La segunda observación sobre el interés compuesto, que es la que lo hace a todas luces preferible sobre el interés simple con capitalización periódica de intereses, es que, además de que su fórmula es mucho más simple desde un punto de vista matemático, presenta la siguiente propiedad de aditividad:

Si un prestamista presta un capital C_0 por un tiempo t_1 y, tras el vecimiento del préstamo, presta a su vez el capital obtenido $C_0(1+i)^{t_1}$ por un tiempo t_2, el capital final que obtiene es

$$C = C_0(1+i)^{t_1}(1+i)^{t_2} = C_0(1+i)^{t_1+t_2},$$

que es exactamente el mismo que habría obtenido si hubiera mantenido el préstamo original durante un tiempo $t_1 + t_2$.

En general, con el interés compuesto no se obtiene beneficio ni perjuicio alguno por dividir un préstamo en varios sucesivos, o por cambiar de prestamista, o por cancelar un préstamo y volverlo a contratar, etc. Los únicos efectos que pueden tener estas operaciones se deberán a condiciones particulares del contrato (comisiones, gastos, etc.).

Tipos de interés equivalentes Observemos que en el interés compuesto el periodo de aplicación del tipo de interés coincide con el periodo de capitalización. Como en el caso del interés simple, podemos cambiar este periodo de capitalización pasando a un tipo de interés equivalente, si bien la transformación es ligeramente más complicada. Por simplicidad partiremos de un interés compuesto anual i_1 y vamos a determinar el tipo de interés equivalente i_k para un periodo de capitalización de $1/k$ años. Si t es el tiempo en años, entonces kt es el tiempo en años$/k$, y el tipo de interés buscado i_k ha de cumplir la identidad

$$C_0(1+i_k)^{kt} = C_0(1+i_1)^t.$$

Claramente, la relación entre i_1 e i_k es la dada por

$$(1+i_k)^k = 1+i_1.$$

Explícitamente:

$$i_1 = (1+i_k)^k - 1, \qquad i_k = (1+i_1)^{1/k} - 1.$$

Ejemplo Un interés compuesto anual $i_1 = 5\%$ equivale a un interés compuesto mensual

$$i_{12} = (1.05)^{1/12} - 1 = 0.4044\%,$$

de modo que capitalizar unos intereses del 0.4% cada mes producen el mismo efecto que capitalizar el 5% cada año.

Los bancos suelen trabajar con el interés compuesto mensual, pero en los contratos y en la publicidad prefieren hablar de intereses anuales. Como la fórmula de conversión es engorrosa. En la práctica los bancos indican el *tipo de interés nominal* que cobran o pagan por sus servicios, definido en general como como $j = ki_k$. Para indicar que un tipo de interés no es nominal se emplea la palabra *efectivo.*

Ejemplo Si un banco anuncia un préstamo hipotecario con un tipo de interés de *Euribor* $+0.39$ y el *Euribor* actual es 1.231%, esto significa que el interés nominal aplicable es $j = 1.231\% + 0.39\% = 1.621\%$, lo cual, a su vez, significa por definición que el banco aplicará un interés efectivo mensual $i_{12} = j/12 = 0.13508\%$. El interés efectivo anual será

$$i_1 = (1+0.0013508)^{12} - 1 = 1.633\%.$$

Así pues, un interés nominal no tiene ningún significado intrínseco, sino que no es más que un interés efectivo mensual multiplicado por 12. En particular no tiene sentido incluir un interés nominal en la fórmula del interés compuesto.

3 Transporte de capitales

Imaginemos una persona o una empresa que dispone de un capital, es decir, de una cantidad de dinero que no necesita utilizar para ningún fin. En el mercado existen múltiples formas de invertir ese capital para hacerlo aumentar con el tiempo, de modo que, cuando llegue el momento de hacer uso de él, sea el mayor posible. A efectos teóricos, dichas inversiones están determinadas por su *rentabilidad,* que es un interés compuesto

i. Algunas de ellas son arriesgadas, en el sentido de que la rentabilidad que proporcionarán es incierta, pudiendo ser incluso negativa. En cambio, otras son seguras, y tienen una rentabilidad garantizada (salvo catástrofes económicas). Así, esta persona o empresa puede plantearse cuál es la máxima rentabilidad i que puede obtener del capital de que disponga en cada instante. Puede tratarse de una rentabilidad sin riesgo o, tal vez, de una rentabilidad que confía en conseguir aun incurriendo en un riesgo. A este valor de i lo llamaremos *factor de capitalización* de esta persona o empresa. Por simplicidad supondremos que no varía con el tiempo, aunque todo lo que vamos a decir se adaptaría fácilmente para el caso en que i tomara un valor en un periodo de tiempo, y a continuación pasara a tomar otro valor, y así sucesivamente. Por ejemplo, para un ciudadano particular no muy versado en economía i sería simplemente el tipo de interés que le ofrece su banco a cambio de depositar en él su capital. Ciertamente, el banco cambiará de tanto en tanto el interés que ofrece a sus clientes, pero no tendremos esto en cuenta aquí. Este factor de capitalización se vuelve imprescindible para comparar capitales en tiempos distintos.

Ejemplo Supongamos que el factor de capitalización de un individuo es $i_1 = 0.05$ y que hemos convenido en pagarle una deuda de $2\,000$ € dentro de dos años. Sin embargo, le preguntamos si le importaría posponer el cobro tres años más y, a cambio, le pagaríamos $2\,500$ €. En el supuesto de que no le urja disponer del dinero, un análisis racional de la propuesta consiste en el siguiente cálculo: si le pagáramos los $2\,000$ € en el plazo previsto, tres años después los habría convertido en

$$C = 2\,000(1 + 0.05)^3 = 2\,315.25\,€.$$

Por lo tanto, debería aceptar nuestra oferta. De hecho, la tendría que haber aceptado igualmente si le hubiéramos ofrecido exactamente $2\,315.25$ €, pero debería haberla rechazado si le hubiéramos ofrecido menos. La diferencia es que con nuestra oferta está ganando dinero, mientras que si le hubiéramos ofrecido esta cantidad las dos opciones (cobrar dentro de dos años o dentro de cinco) le resultarían indiferentes.

Podemos decir que para esta persona es equivalente disponer de $2\,000$ € dentro de dos años o de $2\,315.25$ € dentro de cinco, pues en cualquier caso él puede (o confía en poder) convertir la primera cantidad en la segunda en dicho plazo.

Igualmente, si nos preguntamos qué cantidad deberíamos abonarle hoy mismo para saldar nuestra deuda, la respuesta justa no es razonar que tenemos con él una deuda de $2\,000$ € y que, por consiguiente, deberíamos pagarle $2\,000$ €, pues en realidad a esta persona le bastaría con que hoy le diéramos

$$C = 2\,000(1 + 0.05)^{-2} = 1\,814.06\,€,$$

ya que está en condiciones de convertirlos en $2\,000$ € dentro de dos años, con lo que, al darle esta cantidad, acabaría con los $2\,000$ € previstos en la fecha prevista.

En general, fijado un factor de capitalización i, podemos decir que un capital C_0 disponible en un tiempo t_0 es *equivalente* a un capital C_1 disponible en un tiempo t_1 si entre ellos se da la relación

$$C_1 = C_0(1 + i)^{t_1 - t_0}.$$

Notemos que no importa si $t_1 < t_0$, pues en ese caso la equivalencia consistiría en que

$$C_0 = C_1(1+i)^{t_0-t_1},$$

y esta relación es equivalente a la anterior.

La propiedad aditiva del interés compuesto hace que la equivalencia de capitales (o, más precisamente, de pares (C,t)) sea una relación de equivalencia en sentido matemático, es decir, que es reflexiva, simétrica y transitiva. Además, la ley del interés compuesto permite transportar un capital de un instante dado t_0 a cualquier otro instante t_1, en el sentido de que permite determinar un único capital en t_1 equivalente al dado en t_0.

La equivalencia de capitales es un concepto muy poco arraigado en la mentalidad popular. Por ejemplo, supongamos que a una persona A le llega el recibo de una hipoteca por importe de 615 € y no está en condiciones de pagárselo. Entonces recurre a un pariente B, que le presta el dinero y, viéndolo apurado, le dice que no es necesario que se lo devuelva, que se lo regala. Sin embargo, A, todo digno, replica que de ningún modo, que se lo devolverá lo antes posible, y así lo hace.

En otra ocasión, A necesita 6 000 € y se los pide prestados a B con el compromiso de devolvérselos dentro de 2 años. B se los deja sacándolos de un banco que le ofrece una interés del 5% (efectivo anual). Si B no le hubiera dejado el dinero, al cabo de 2 años tendría en el banco 6 615 €, pero la opinión general es que sería una grosería propia de un usurero reclamar a A los 615 € de intereses. Probablemente, A considerará que ha saldado su deuda si al cabo de 2 años le devuelve el capital prestado y, si B le exigiera los 615 €, consideraría que se estaría aprovechando de él, que se pretendería lucrarse a sus expensas, cuando en realidad no es así: A está haciendo perder 615 € a B por pedirle el préstamo. La paradoja es que A no está dispuesto a aceptar una "limosna" de B de 615 € de alquiler y, al mismo tiempo, considera que B debe perdonarle los 615 € que pierde por prestarle dinero.

El fondo del asunto es que A, como el común de los mortales, piensa que 6 000 € hoy son equivalentes a 6 000 € dentro de dos años, y que lo de pedir intereses es sólo una forma de lucro. Pero, desde el momento en que un banco ofrece intereses a B, no pagarle intereses no es impedir que gane dinero, sino hacerle perder dinero. Lo que sería abusivo por parte de B sería cobrarle a A unos intereses superiores a los que le da su banco.

Sin ánimo de cambiar el concepto que tiene el lector sobre lo que es de buen o mal gusto entre parientes, lo que sí es esencial que comprenda es que, en matemática financiera, comparar capitales en tiempos distintos sin más que mirar su cuantía es una barbaridad, y no digamos ya sumar capitales en tiempos distintos.

Ejemplo Supongamos que, B le propone a A que, en lugar de pagarle los 6 000 € que le debe todos de golpe, al final, lo haga poco a poco, devolviéndole 250 € al mes durante los dos años. Esto le parecerá bien a A, cuyas cuentas serán que $250 \times 12 = 6\,000$, con lo cual "es lo mismo" que pagar los 6 000 € al final. Lo cierto es que así B sigue perdiendo dinero, aunque menos que de la otra forma. La razón es que, en cuanto B cobra una cuota, puede meterla en el banco y obtener de ella una rentabilidad del 5% anual, con lo que, al cabo de los 2 años tendrá más que los $250 \times 12 = 6\,000$ €, aunque menos que los $6\,615$ € que hubiera tenido si no hubiera prestado su dinero. ¿Cuánto exactamente?

Si el préstamo se produce en $t = 0$, los 250 € que A le paga en el mes n-simo ($t = n/12$), son equivalentes a $250 \cdot 1.05^{2-n/12}$ € en $t = 2$, luego la suma de todas las cuotas que paga A (bien calculada, es decir, transportando los capitales) es

$$\sum_{n=1}^{24} 250 \cdot 1.05^{2-n/12} = 6289.7\,€.$$

Así B sólo ha perdido 326 €, en lugar de los 615 € que perdía del otro modo, aunque para A ambas opciones de pago sean "equivalentes".

Si transportamos este capital a $t = 0$ obtenemos

$$6\,289.7 \cdot 1.05^{-2} = 5\,704.94\,€.$$

La interpretación de esta cantidad es que se trata del capital que B tendría que haber prestado a A en $t = 0$ para que los pagos de 250 € mensuales durante 2 años hubieran sido una devolución justa del préstamo.

---

4 Préstamos con cuota de amortización constante

Un préstamo con cuota de amortización constante es un préstamo en el que se conviene en devolver el capital prestado C_0 con un tipo de interés determinado i a través de N cuotas periódicas, que supondremos mensuales, con el mismo importe c. Como las cuotas van a ser mensuales, supondremos por comodidad que i es el tipo de interés efectivo mensual aplicable.

El problema básico que presenta el estudio de este tipo de préstamos es determinar, fijados los valores de C_0, i, N, el importe de la cuota c para que podamos considerar que las N cuotas saldan exactamente la deuda. Para ello podemos pensar que, en teoría, estamos contratando N préstamos, cada uno con una fecha de vencimiento distinta. Si en $t = n$ vence un préstamo y la cantidad que hemos de reembolsar es c, entonces el capital prestado en $t = 0$ ha de ser $c(1 + i)^{-n}$. Queremos que los N capitales prestados en $t = 0$ sumen C_0, es decir:

$$\sum_{n=1}^{N} c(1+i)^{-n} = C_0. \tag{3}$$

Sumando la serie geométrica obtenemos

$$C_0 = c\,\frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-N-1}}{1-(1+i)^{-1}} = c\,\frac{1-(1+i)^{-N}}{i},$$

donde en el último paso hemos multiplicado numerador y denominador por $1 + i$. Por lo tanto el valor de la cuota es

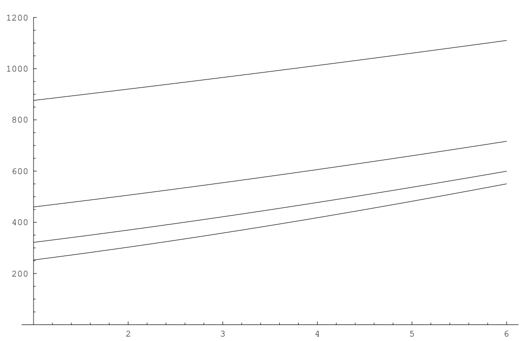
$$c = \frac{C_0\, i}{1-(1+i)^{-N}}. \tag{4}$$

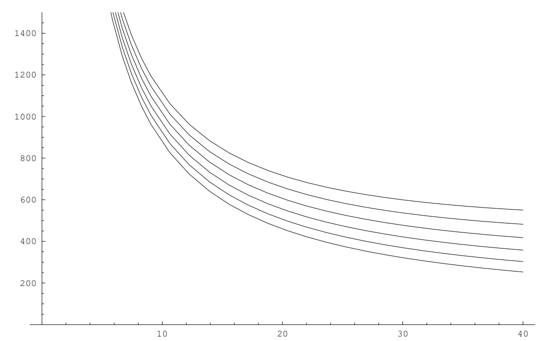
Ejemplo Un banco ofrece una hipoteca con un tipo de interés $Euribor + 0.39$ y queremos contratarla para financiar un capital de $200\,000$ € a devolver en 30 años ($N = 360$). Vamos a determinar el importe de la cuota de la hipoteca tomando como valor del $Euribor$ 1.231.

El interés nominal de la hipoteca es $j = 1.231 + 0.39 = 1.621\%$, luego el interés efectivo mensual es $i = 1.621\%/12 = 0.1351\%$. El importe de la cuota será:

$$c = \frac{200\,000 \cdot 0.001351}{1 - 1.001351^{-360}} = 701.91\,\text{€/mes}.$$

Las gráficas siguientes muestran la cuota correspondiente a un capital de $100\,000$ € en función del tipo de interés a 10, 20, 30 y 40 años (a la izquierda) y en función del tiempo para un interés del 1%, 2%, 3%, 4%, 5% y 6% (a la derecha). Observemos que la cuota es proporcional al capital prestado, de modo que, por ejemplo, para un capital de $200\,000$ € basta multiplicar por dos la escala del eje vertical.





5 Desglose de la cuota en capital e intereses

Cada vez que pagamos una cuota de una hipoteca debemos menos dinero al banco, pero ¿cuánto menos? Nuestra deuda no disminuye en el importe de la cuota, puesto que en ella estamos pagando una parte en concepto de intereses. Para determinar qué parte de cada cuota corresponde a capital amortizado y qué parte a intereses, vamos a calcular primero cuánto dinero debemos al banco justo después de pagar la cuota n-sima o, equivalentemente, cuánto tendríamos que pagarle en $t = n$ si quisiéramos cancelar de golpe nuestra deuda. En principio, ésta se salda pagando las $N - n$ cuotas pendientes de importe c. Ahora bien, si queremos pagarle al banco en $t = n$ la cuota que deberíamos pagarle en $t = j$, hemos de descontar los intereses que nos cobraría por prestarnos el dinero desde n hasta j, con lo que la cantidad que habremos de abonar será $c(1 + i)^{n-j}$. Por consiguiente, la deuda total que tenemos con el banco en $t = n$ (habiendo pagado ya la cuota n-sima) asciende a

$$C_n = \sum_{j=n+1}^{N} c(1 + i)^{n-j}. \tag{5}$$

Sumando la serie geométrica queda

$$C_n = c\,\frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{n-N-1}}{1-(1+i)^{-1}} = c\,\frac{1-(1+i)^{n-N}}{i}. \tag{6}$$

Observemos que (5) para $n = 0$ coincide con (3), es decir, que C_0 calculado con (5) no es sino el capital inicial que ya veníamos llamando C_0. Así pues, en general, C_n es el capital que adeudamos al banco en el tiempo $t = n$ (despues de pagar la cuota si $n > 0$). La diferencia

$$A_n = C_{n-1} - C_n$$

es el capital que dejamos de deber al banco tras pagar la cuota n-sima, es decir, el capital amortizado con dicha cuota. (Aquí hay que entender que $C_N = 0$ y que $A_N = C_{N-1}$.) Ahora observamos que, para $n > 0$,

$$C_n = \sum_{j=n}^{N} c(1+i)^{n-j} - c = (1+i)\sum_{j=n}^{N} c(1+i)^{n-1-j} - c = (1+i)C_{n-1} - c,$$

luego podemos descomponer la cuota en la forma

$$c = A_n + iC_{n-1}. \tag{7}$$

En principio, la deducción es válida para $n < N$, pues $C_N = 0$ no puede calcularse con la fórmula (5), pero para $n = N$ dicha fórmula nos da que $C_{N-1} = c(1+i)^{-1}$, luego

$$c = (1+i)C_{N-1} = C_{N-1} + iC_{N-1} = A_N + iC_{N-1},$$

luego (7) también es válida en este caso. Su segundo sumando es el dinero que pagamos sin reducir la deuda, es decir, los intereses. Así pues:

$$I_n = iC_{n-1}. \tag{8}$$

Concluimos que *los intereses que pagamos en cada cuota son exactamente los correspondientes al mes precedente para el capital C_{n-1} que adeudamos.*

Restando las ecuaciones

$$c = A_{n+1} + iC_n, \qquad c = A_n + iC_{n-1}$$

obtenemos una relación recurrente para los capitales amortizados:

$$0 = A_{n+1} - A_n + i(C_n - C_{n-1}) = A_{n+1} - A_n + iA_n \quad \Rightarrow \quad A_{n+1} = A_n(1+i),$$

de donde

$$A_n = A_1(1+i)^{n-1}. \tag{9}$$

Ésta es la fórmula más práctica para calcular los A_n, partiendo de que $A_1 = c - iC_0$, según (7).

Vemos que el capital amortizado en cada cuota va creciendo, concretamente según la fórmula del interés compuesto.

Ejemplo En las condiciones del ejemplo precedente, el desglose de las primeras y las últimas cuotas en capital más intereses es el siguiente:

Cuota	c	A_n	I_n	C_n
1	701.91	431.74	270.17	199 568.25
2	701.91	432.33	269.58	199 135.93
3	701.91	432.91	269.00	198 703.01
4	701.91	433.50	268.42	198 269.51
5	701.91	434.08	267.83	197 835.43
...	...	...	...	...
356	701.91	697.19	4.72	2 798.18
357	701.91	698.13	3.78	2 100.05
358	701.91	699.07	2.84	1 400.98
359	701.91	700.02	1.89	700.96
360	701.91	700.96	0.95	0.00

6 Modificaciones de una hipoteca

Un contrato de hipoteca puede prever modificaciones en sus términos. El más frecuente es la revisión del tipo de interés. Aunque una hipoteca puede contratarse con un tipo de interés fijo, lo más habitual es que éste dependa de algún indicador económico. El más habitual es el *Euribor,* que se calcula a partir de los tipos de interés con los que los principales bancos europeos se prestan dinero unos a otros. Podría decirse que el el tipo de interés que ha de pagar un banco cuando necesita que le presten dinero. Otra modificación habitual es que el prestatario realice una amortización anticipada de parte del capital.

Sea cual sea la modificación que se quiera hacer a las condiciones de una hipoteca, la forma de plantearla consiste en considerar que, a efectos teóricos, un cambio a partir de la cuota $n+1$-sima puede considerarse como la cancelación de la hipoteca en la cuota n-ésima seguida de la apertura de una nueva hipoteca por el capital pendiente de amortización C_n con las nuevas condiciones deseadas. En particular, si no se desea modificar el número total de cuotas, la nueva hipoteca constará de $N-n$ cuotas.

Ejemplo En las condiciones de los ejemplos precedentes, supongamos que, al cabo de un año, el *Euribor* ha subido del 1.231% a un 4%. ¿Cuál será la nueva cuota?

Para averiguarlo, calculamos en primer lugar el capital pendiente de amortización que, según (6), es

$$C_{12} = 701.91\,\frac{1-1.001351^{12-360}}{0.001351} = 194\,780.38\,€.$$

El nuevo tipo de interés nominal es 4.39%, luego el nuevo tipo de interés efectivo mensual es $i_{12} = 4.39\%/12 = 0.3658\%$. La fórmula (4) nos da que la cuota pasa a ser

$$c = \frac{194\,780.38 \cdot 0.003658}{1 - 1.003658^{-(360-12)}} = 990.53\,\text{€/mes}.$$

Si se desea modificar el número de cuotas manteniendo el importe de las mismas, surge un problema técnico, y es que el resultado no tiene por qué ser entero. En efecto, se trata de despejar N en la ecuación (4), y el resultado es:

$$N = -\frac{\log(1 - C_0 i/c)}{\log(1+i)}. \tag{10}$$

Si N no es entero, lo redondearemos *por exceso,* y sucederá que el importe de la última cuota será algo menor que las anteriores. Ahora hemos de prestar atención, pues estamos considerando un préstamo cuyas cuotas de amortización son todas iguales a c menos la última, que tendrá un importe c' que hemos de determinar. La fórmula (5) se convierte ahora, para $n < N$, en

$$C_n = \sum_{j=n+1}^{N-1} c(1+i)^{n-j} + c'(1+i)^{n-N},$$

y al sumar la serie geométrica obtenemos

$$C_n = c\,\frac{1-(1+i)^{n-N+1}}{i} + c'(1+i)^{n-N}.$$

El valor de c' se calcula a partir del caso $n = 0$, pues el valor de C_0 es conocido:

$$C_0 = c\,\frac{1-(1+i)^{-N+1}}{i} + c'(1+i)^{-N},$$

$$c' = C_0(1+i)^N - c\,\frac{(1+i)^N - 1 - i}{i}. \tag{11}$$

Es fácil ver que la deducción de (7) sigue siendo válida para $n < N$, mientras que para N se cumple con c' en lugar de c, ya que $C_{N-1} = c'(1+i)^{-1}$ y $C_N = 0$, y razonamos igual que al probar (7) aparte en el caso $n = N$.

En particular, sigue siendo cierto cierta la fórmula (8) para calcular los intereses que pagamos en cada cuota, así como la fórmula (9) cuando $n < N$ para calcular el capital amortizado.

Ejemplo Supongamos que, tras la revisión del *Euribor* considerada en el ejemplo precedente, al cabo de año y medio queremos amortizar $10\,000$ € de capital y reducir en consecuencia el plazo de la hipoteca. ¿Cuál sería el nuevo plazo?

Calculamos el capital pendiente de vencimiento

$$C_{18} = 990.53 \cdot \frac{1 - 1.003658^{18-360}}{0.003658} = 193\,097.33\,€,$$

al restarle los $10\,000$ € amortizados pasa a ser $C_{18} = 183\,097.33$ €, y ahora aplicamos (10) para calcular el nuevo número de cuotas, que resulta ser

$$N = -\frac{\log 0.32383}{\log 1.003658} = 308.80.$$

Como ya llevamos pagadas 18 cuotas, si no queremos alterar la numeración de los meses, diremos que la hipoteca original (modificada) tendrá ahora $N = 327$ cuotas. A partir del segundo año éstas tenían un importe $c = 990.53$ €, pero ahora la última será menor. La calculamos[2] mediante (11):

$$c' = 183\,097.33 \cdot 1.003658^{309} - 990.53\,\frac{1.003658^{309} - 1.003658}{0.003658} = 823.10\,€.$$

7 Cálculo recursivo del estado de una hipoteca

Si una hipoteca va a sufrir varias modificaciones, a la hora de calcular cada cuota es más práctico hacerlo de forma recursiva, es decir, calcular su estado en un periodo dado a partir de su estado en el periodo anterior. Este estado está completamente determinado por los cuatro valores (C, i, N, c), donde C es el capital pendiente de vencimiento, i es el tipo de interés vigente, N el número de cuotas pendientes y c el importe de dichas cuotas.

Los intereses de la cuota siguiente serán iC, luego el capital amortizado será $c - iC$, luego el nuevo capital pendiente de vencimiento será $(1+i)C - c$. Así pues, el paso del estado en un periodo al siguiente viene dado por

$$(C, i, N, c) \quad \Rightarrow \quad ((1+i)C - c, i, N-1, c).$$

Esto puede no ser válido para $N = 1$, si se ha modificado el número de cuotas. En tal caso la última transformación será:

$$(C, i, 1, c) \quad \Rightarrow \quad (0, i, 0, (1+i)C).$$

[2] La expresión indicada da en realidad $c' = 797.502$, pero ello es debido a errores de redondeo. Los resultados finales de los ejemplos no están calculados a partir de las expresiones indicadas (en las que las cantidades están redondeadas) sino que han sido obtenidos con *Mathematica,* que trabaja con más precisión.

Para introducir una modificación en la hipoteca basta alterar el estado en que se produce la modificación, recalcular N o c, y pasar al estado siguiente a partir del estado modificado. He aquí un esquema de programa que realiza los cálculos:

```
Input Capital, Euribor, Diferencia, Años;

N=Años*12, i=(Euribor+Diferencia)/1200, c=Cuota[Capital, i, N], j =0;

While N > 0
  N = N - 1, j = j + 1;
  If N = 0 then
    s = ((1+i)*Capital, Capital, i*Capital, 0)
  else
    s = (c, c-i*Capital, i*Capital, (1+i)*Capital-c)
  End If;

  Capital = (1 + i)*Capital - c;
  Salida;

  [MODIFICACIONES]

End While.
```

El código precedente llama a la función `Cuota[C, i, N]`, que aplica la fórmula (4), y a una rutina `Salida` que imprime el estado de la hipoteca. Un posible formato de salida sería:

Periodo	Cuota	Capital amortizado	Intereses	Capital pendiente	Euribor	Cuotas restantes
j	s_1	s_2	s_3	s_4	Euribor	N

Al final del programa se pueden incluir llamadas a subrutinas que modifiquen el estado de la hipoteca. Por ejemplo, la subrutina siguiente **ModTipo**[`T,E`] introduce la modificación correspondiente a que el *Euribor* pase a ser `E` tras tras haber pagado la cuota `T` (es decir, a partir del periodo `T + 1`):

```
ModTipo[T, E]
If j = T then
 Euribor = E, i = (Euribor + Diferencia)/1200, c = Cuota[Capital, i, t];
End If.
```

Similarmente, la subrutina **ModCuota**[`T, M`] modifica la cuota de la hipoteca tras amortizar un capital `M`:

```
ModCuota[T, M]
If j = T then
 Capital = Capital - M, c = Cuota[Capital, i, t];
End If.
```

Por último, la subrutina **ModTiempo**[`T, M`] modifica el número de cuotas (manteniendo su importe) tras amortizar un capital `M`:

```
ModTiempo[T, M]
If j = T then
  Capital = Capital - M, t = NuevoT[Capital, i, c];
End If.
```

Aquí, la función `NuevoT` aplica la fórmula (10) y redondea por exceso el resultado.

8 Apéndice: El interés continuo

Terminamos este trabajo con una cuestión que es irrelevante para todo lo concerniente a las hipotecas, pero surge de forma natural de la discusión que hemos presentado sobre el interés simple frente al interés compuesto. Hemos visto que el interés simple perjudica al prestamista en el sentido de que, puesto que pospone el pago de los intereses hasta la fecha de vencimiento del préstamo, al prestamista le interesa que ésta sea lo menos lejana posible, pues cuanto antes disponga de los intereses antes podrá invertirlos para obtener de ellos nuevos intereses, y esto hace que la cancelación de un préstamo se convierta en algo no trivial, con repercusiones financieras, ya que coincide con el momento de liquidación de los intereses.

En realidad, el interés simple con capitalización periódica de intereses no resuelve este problema, sino que simplemente lo atenúa. Por ejemplo, si se conviene en capitalizar anualmente los intereses, sigue siendo cierto que al prestamista le convendría cancelar el préstamo a mitad de un año, pues así cobraría anticipadamente los intereses que, en principio, no va a cobrar hasta que finalice el año. Lo que sucede es que ahora las "pérdidas" que tiene el prestamista por no disponer anticipadamente de los intereses no se acumulan, como en el caso del interés simple, sino que se van paliando periódicamente.

Podemos preguntarnos entonces cuál sería la ley de capitalización "ideal" para el prestamista, en la que los inconvenientes del retraso en el pago de los intereses desaparecieran por completo. Para ello consideremos un tipo de interés simple i, anual, por simplicidad, y consideremos un préstamo a dicho interés pero en el que los intereses capitalizan cada $1/k$ años. Si el capital prestado es C_0, al cabo del primer periodo de capitalización se convierte en $C_0(1+i/k)$, al cabo del segundo en $C_0(1+i/k)^2$ y, como cada año tiene k periodos de capitalización, cal cabo de t años el capital será

$$C_k = C_0(1+i/k)^{kt}.$$

Es fácil ver que esta expresión crece con k, es decir, que cuanto mayor es la frecuencia de capitalización, mayor es el capital final, como era de esperar, pero ahora notamos que este crecimiento es convergente, y podemos calcular

$$C = \lim_{k\to\infty} C_0(1+i/k)^{kt} = C_0\, e^{it}.$$

Tenemos así una nueva ley de capitalización:

$$C = C_0 e^{it}, \tag{12}$$

conocida como ley de capitalización con *interés continuo,* y que también podríamos llamar interés simple con capitalización instantánea de intereses, pues nos proporciona el capital al que tiende como límite el capital acumulado por capitalización periódica de intereses cuando el periodo de capitalización tiende a 0. Si alguien cree que el paso al límite está más allá de toda interpretación práctica, deberá tener presente que, a efectos prácticos, los errores de más de un céntimo de euro son irrelevantes, por lo que la fórmula precedente proporciona el mismo resultado en la práctica que si capitalizáramos los intereses cada décima de segundo, por ejemplo, que es un tiempo pequeño, pero no cero.

Es claro entonces que el interés continuo es lo máximo que puede pedir un prestamista ávido de intereses. Y lo más destacable es que, en realidad, no se trata de algo nuevo, sino que es equivalente al interés compuesto usual. En efecto, basta observar que

$$C_0(1+i_1)^t = C_0\, e^{t\log(1+i_1)},$$

donde log representa el logarimo en base e. Por consiguiente, las relaciones mutuamente inversas

$$i_\infty = \log(1+i_1), \qquad \Leftrightarrow \qquad i_1 = e^{i_\infty} - 1$$

determinan una correspondencia entre un interés efectivo anual i_1 y un interés continuo i_∞ equivalente, en el sentido de que ambos dan lugar a los mismos capitales finales con sus respectivas leyes de capitalización. Ahora podemos decir que la ley del interés compuesto $C = C_0(1+i_1)^t$ capitaliza intereses de forma instantánea, sólo que no a razón de i_1 € por cada € y año, sino a razón de i_∞ € por cada € y año y que, por consiguiente, elegir entre interés continuo o interés compuesto no es elegir realmente entre dos propuestas de capitalización de intereses, sino únicamente entre un valor u otro para el tipo de interés.

Ejemplo Un interés continuo $i_\infty = 5\%$ es equivalente a un interés anual

$$i_1 = e^{0.05} - 1 = 5.13\%,$$

de modo que elegir entre un 5% interés continuo o un 5% de interés compuesto anual es equivalente a elegir entre un 5.13% de interés compuesto o un 5% de interés compuesto.

Desde un punto de vista matemático, la fórmula del interés continuo es todavía más simple que la del interés compuesto, y por ello los economistas la usan con frecuencia en estudios teóricos.

Más en general, si $C(t)$ es una función arbitraria (que no se anule en ningún punto) que representa la evolución de un capital invertido en función del tiempo, podemos definir su *rentabilidad instantánea* como

$$i_\infty(t) = \frac{1}{C}\frac{dC}{dt}, \tag{13}$$

que representa el incremento instantáneo del capital por unidad de capital y de tiempo, es decir, la rentabilidad instantánea que está proporcionando cada unidad de capital en un momento dado.

La ley de capitalización (12) es la solución de la ecuación diferencial (13) cuando el miembro izquierdo es la función constante i_∞ y con la condición inicial $C(0) = C_0$. En estos términos podemos decir que la ley de capitalización del interés continuo describe la evolución en el tiempo de un capital que proporciona una rentabilidad instantánea constante igual al tipo de interés i_∞.