

Carlos Ivorra Castillo

**FUNCIONES DE
VARIABLE COMPLEJA**

El camino más corto entre dos verdades del análisis real pasa por el análisis complejo.

JACQUES HADAMARD

Índice General

Introducción	vii
Capítulo I: Funciones holomorfas	1
1.1 Diferenciación de funciones complejas	2
1.2 La integral curvilínea	17
1.3 El teorema y la fórmula integral de Cauchy	25
Capítulo II: Desarrollos en serie	41
2.1 Series de potencias	41
2.2 Series de Taylor	46
2.3 Prolongación analítica	55
2.4 El principio del módulo máximo	60
2.5 Series de Laurent	68
Capítulo III: Funciones holomorfas de una variable	75
3.1 Índices de arcos cerrados	75
3.2 Consecuencias del teorema de Cauchy	79
3.3 Los teoremas de Picard	90
3.4 Abiertos simplemente conexos	96
3.5 El teorema de Runge	113
Capítulo IV: Productos infinitos	119
4.1 Factorización de funciones holomorfas	120
4.2 Orden de crecimiento	127
4.3 La función factorial	136
Capítulo V: Funciones meromorfas periódicas	149
5.1 Funciones simplemente periódicas	151
5.2 Funciones elípticas	155
5.3 Curvas elípticas	168
5.4 Las funciones sigma y dseta	174
5.5 Las funciones zeta de Jacobi	181
5.6 Las funciones elípticas de Jacobi	196

Capítulo VI: Funciones modulares	205
6.1 El grupo modular	205
6.2 Ejemplos de funciones modulares	214
6.3 Funciones y formas modulares	224
6.4 Propiedades de las funciones modulares	233
6.5 La función eta de Dedekind	244
Capítulo VII: Funciones multiformes	249
7.1 Prolongación analítica	249
7.2 Funciones multiformes meromorfas	254
7.3 Singularidades aisladas	262
7.4 Superficies de gérmenes	269
7.5 Singularidades algebraicas	276
7.6 Funciones algebraicas	282
7.7 Superficies de Riemann compactas	292
Apéndice A: Variedades analíticas	297
A.1 Definición y ejemplos	297
A.2 Funciones holomorfas en variedades	307
A.3 Superficies de Riemann	313
A.4 Toros complejos	317
A.5 El espacio tangente holomorfo	324
A.6 Subvariedades analíticas	331
Apéndice B: Funciones armónicas	343
B.1 Propiedades básicas	343
B.2 Funciones subarmónicas	350
B.3 El problema de Dirichlet	359
B.4 La transformada de Kelvin	362
B.5 Funciones armónicas en superficies de Riemann	366
Índice de Materias	381

Introducción

El análisis complejo es el estudio de las funciones holomorfas, que son las funciones derivables en sentido complejo o, equivalentemente, las funciones que, vistas como funciones de variable real, son diferenciables y satisfacen las llamadas ecuaciones de Cauchy-Riemann. Fue Cauchy quien descubrió las ecuaciones de Cauchy-Riemann, pero fue Riemann quien comprendió su importancia. El análisis complejo de Cauchy era “puramente analítico”, mientras que Riemann comprendió que en él hay mucha “geometría subyacente” y supo aprovecharla. Fue Gauss quien enfatizó que Cauchy estaba trabajando en “el plano complejo” \mathbb{C} , pero Riemann se dio cuenta de que “en realidad” el “plano complejo” es un fragmento de lo que hoy se conoce como “la esfera de Riemann”, que no es sino la “esfera” \mathbb{C}^∞ que obtenemos al compactificar el plano con un punto infinito, la cual puede identificarse también con la recta proyectiva compleja.

Tal y como vimos en mi libro de *Geometría diferencial* [GD], fue Riemann quien esbozó el concepto moderno de variedad diferencial abstracta, que permite estudiar la diferenciabilidad de funciones definidas en espacios topológicos distintos de los meros abiertos de \mathbb{R}^n . Igualmente, Riemann se dio cuenta de que la “esfera de Riemann” no es más que un caso particular de “variedad analítica abstracta”, adecuada para tratar el “punto infinito” como un punto más, de modo que una función meromorfa $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ puede verse mejor como una función holomorfa definida también sobre sus polos y con valores en \mathbb{C}^∞ . En otros contextos resulta conveniente considerar otras variedades analíticas. Por ejemplo, las funciones elípticas que introdujeron Abel y Jacobi se entienden mejor si se las considera definidas sobre “toros complejos” y las funciones multiformes, como $\text{Log } z$, que toma infinitos valores en cada número complejo no nulo, se entienden mejor si se las considera definidas en lo que hoy se conoce precisamente como “superficies de Riemann”.

Éste no es un libro de introducción al análisis complejo, sino que supone que el lector está familiarizado con el “análisis complejo de Cauchy”, tal y como está expuesto en el capítulo VII de mi libro de *Introducción al cálculo diferencial* [IC] y desarrollado en el capítulo X de mi libro de *Análisis* [An]. Aunque el capítulo IV del presente libro está dedicado a profundizar un poco más en algunos aspectos de este análisis “de Cauchy”, el resto está orientado esencialmente hacia el análisis complejo “de Riemann”, es decir, a aquellos aspectos y resultados del análisis complejo en los que la geometría diferencial e incluso la

topología algebraica representan un papel más o menos relevante.¹ Así, en los dos primeros capítulos generalizamos los resultados de [IC] y [An] al caso de funciones holomorfas de varias variables mostrando a la vez que muchos resultados básicos del análisis complejo de una variable pueden obtenerse mediante técnicas geométricas, esencialmente el teorema de Stokes [GD 5.31] y el lema de Poincaré [GD 5.44].

La idea fundamental es que la integral curvilínea en el sentido de [IC 7.5] de una función holomorfa f a lo largo de la frontera de un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ puede verse como la integral de una forma diferencial $\omega = f(\zeta) d\zeta$ sobre la variedad $\partial\Omega$, y las ecuaciones de Cauchy-Riemann se traducen en que las formas diferenciales asociadas a funciones holomorfas son siempre cerradas, es decir, que cumplen $d\omega = 0$, por lo que el teorema de Stokes (mínimamente adaptado para tratar con funciones y formas con valores en \mathbb{C}) implica que la integral tiene que ser nula, y el teorema de Cauchy para triángulos [IC 7.13] es un caso particular de este hecho.

Por otra parte, el lema de Poincaré nos asegura que si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto contractible, entonces $H^1(\Omega) = 0$, lo que se traduce en que toda forma diferencial holomorfa $f(\zeta) d\zeta$ es de la forma $dF = F'(\zeta) d\zeta$, lo que significa que f tiene una primitiva F en Ω , y a su vez esto implica que su integral a lo largo de cualquier arco cerrado contenido en Ω es nula (aunque el arco no sea la frontera de ningún abierto). Esto es lo que afirma el teorema de Cauchy, que en [IC 7.15] probamos en el caso en que Ω es un abierto estrellado, que era una forma de garantizar que es contractible sin entrar en cuestiones topológicas.

Estos resultados de Cauchy son el germen de toda la teoría básica sobre funciones holomorfas, en el sentido de que todos los demás se deducen de ellos mediante técnicas analíticas “estándar”, mientras que demostrar que las integrales de funciones holomorfas son nulas en abiertos contractibles requiere emplear de un modo u otro ideas topológicas no triviales (como las técnicas homológicas empleadas en la sección [IC 7.4] para probar el teorema de Cauchy para un triángulo, aunque hayamos podido presentarlas reducidas a técnicas elementales).

Además, en los dos primeros capítulos generalizamos a funciones de varias variables los resultados básicos del análisis complejo de una variable y del análisis real de varias variables, incluyendo el teorema de la función inversa o el teorema de la función implícita, imprescindibles para desarrollar una teoría general de variedades analíticas. Ésta la vamos introduciendo paulatinamente en el apéndice A, cuyas secciones se pueden ir leyendo a medida que van siendo necesarias en el texto.

¹Quede claro que cuando distinguimos entre análisis de Cauchy o de Riemann nos referimos a sus características, no a la autoría de los resultados. Por ejemplo, en la sección [An 10.6] se prueba que la función dseta de Riemann tiene una prolongación meromorfa a todo el plano complejo y satisface una ecuación funcional relativamente simple, y estos resultados son de Riemann, pero son “de Cauchy” en el sentido de que en ellos la geometría no es especialmente relevante, más allá del hecho —aquí anecdótico— de que podamos ver los polos como puntos donde una función es holomorfa con valor ∞ en \mathbb{C}^∞ . Además, por supuesto, muchos resultados se deben a otros autores distintos de Cauchy o Riemann, que simplemente fueron los pioneros de la teoría.

El capítulo III está dedicado a los resultados topológicos específicos del análisis complejo de funciones de una variable. En primer lugar introducimos el concepto de índice de un arco cerrado respecto de un punto, definido en mi libro de *Topología algebraica* [TA] que se interpreta como el número de vueltas que da el arco alrededor del punto, en términos del cual podemos enunciar y probar una versión más general del teorema y las fórmulas integrales de Cauchy y del teorema de los residuos. También probamos algunos resultados clásicos más avanzados del análisis complejo en los que no entramos en [An], como el principio del argumento, el teorema de Rouché o los teoremas de Picard, entre otros.

En la sección 3.4 probamos que los abiertos $\Omega \subset \mathbb{C}$ que son simplemente conexos en el sentido introducido en [TA 8.6] tienen, por una parte, una caracterización muy simple (son los abiertos conexos tales que $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ es conexo) y, por otra parte, tienen muchas caracterizaciones en términos del comportamiento de las funciones holomorfas definidas en ellos. Por ejemplo, veremos que los abiertos simplemente conexos son los abiertos conexos en los que toda función holomorfa tiene primitiva o en los que toda función holomorfa que no se anula tiene un logaritmo holomorfo.

En realidad, la equivalencia entre todas estas caracterizaciones es relativamente fácil de probar, pero no lo es tanto ver que realmente son equivalentes a la conexión simple. Esto es consecuencia de un teorema de Riemann nada trivial: dos abiertos simplemente conexos en \mathbb{C}^∞ cuyas fronteras tengan más de un punto son necesariamente biholomorfos.

Menos trivial aún es el teorema de Osgood-Taylor-Caratheodory, que da una condición suficiente muy simple para que una aplicación biholomorfa entre dos abiertos de \mathbb{C}^∞ se extienda a un homeomorfismo entre sus clausuras (basta con que los complementarios de las clausuras tengan interior no vacío). Combinando este teorema con el teorema de la curva de Jordan [TA 2.7] probaremos el teorema de Schoenflies que en [TA] enunciamos como [TA 2.18] y lo usamos sin demostración, entre otras cosas para demostrar que toda superficie topológica es triangulable [TA 2.29].

El capítulo IV es el único capítulo puramente *à la Cauchy* de todo el libro. En él profundizamos en el estudio de los productos infinitos de funciones holomorfas mostrando cómo construir mediante tales productos funciones meromorfas con ceros y polos en puntos prefijados y con órdenes prefijados, y también como descomponer en productos infinitos funciones holomorfas con factores que se correspondan con sus ceros asegurando que los productos sean convergentes.

Como aplicación estudiamos más a fondo la función factorial y probaremos cómo la fórmula de Stirling puede expresarse como una ecuación funcional de la función factorial.

En el capítulo V estudiaremos las funciones meromorfas periódicas. En él usaremos algunos resultados elementales sobre retículos probados en la sección [ITAl 3.2]. Una función periódica puede ser de dos tipos muy distintos entre sí: sus periodos pueden ser todos múltiplos de un único periodo mínimo, como le ocurre a las funciones $\operatorname{sen} z, \operatorname{cos} z$, etc., o pueden tener dos periodos

linealmente independientes. Veremos que las funciones simplemente periódicas admiten desarrollos en serie de Fourier, pero el caso más interesante es el de las funciones doblemente periódicas.

Hasta este punto no conocemos ningún ejemplo de función meromorfa doblemente periódica o, mejor dicho, sí que conocemos ejemplos, pero no lo sabemos, porque sucede que las funciones elípticas de Jacobi estudiadas en el capítulo VI de [IC] como funciones de variable real se extienden en realidad a funciones meromorfas doblemente periódicas. De hecho, lo habitual es llamar funciones elípticas precisamente a las funciones meromorfas en \mathbb{C} doblemente periódicas.

Gauss, Abel y Jacobi llegaron a las funciones elípticas invirtiendo las llamadas ‘integrales elípticas’, pero aquí vamos a partir de su definición como funciones doblemente periódicas. Weierstrass introdujo una nueva vía para presentarlas y ésta es la que vamos a seguir nosotros. Como vimos en [IC], incluso sin considerarlas como funciones de variable compleja, las funciones elípticas dan lugar a una teoría muy rica, de la cual sólo expusimos una pequeña parte. Considerarlas como funciones de variable compleja resulta iluminador, y aún lo es más darse cuenta de que las funciones doblemente periódicas están determinadas por los valores que toman en el paralelogramo determinado por dos periodos linealmente independientes y, teniendo en cuenta que toman el mismo valor cada par de puntos de dos lados opuestos, dichos paralelogramos se pueden “coser” identificando cada par de lados opuestos para formar primero un cilindro (al identificar dos lados) y luego un toro (al identificar las dos circunferencias en que se han convertido los otros dos lados tras la primera identificación). Más técnicamente, las funciones elípticas, en lugar de verse como funciones meromorfas sobre el plano complejo, pueden verse como funciones meromorfas en un ‘toro complejo’, que es una variedad analítica compacta, y la compacidad tiene muchas consecuencias.

La teoría que vamos a exponer es demasiado rica como para resumirla aquí razonablemente, pero digamos únicamente que probaremos que todas las funciones elípticas con un par de periodos dados pueden expresarse algebraicamente a partir de la llamada función $\wp(z)$ de Weierstrass (no es una única función, sino que hay una función \wp para cada retículo de periodos) y de su derivada $\wp'(z)$. A partir de ellas definiremos las funciones elípticas de Jacobi y demostraremos que parte de ellas coinciden con las funciones que obtuvimos en [IC] como inversas de las integrales elípticas.

En el estudio de las funciones elípticas aparecen de forma natural otras funciones relacionadas que se conocen como ‘funciones modulares’ y que dan lugar a otra vasta teoría a caballo entre el álgebra y el análisis que en el capítulo VI no haremos sino esbozar.

Finalmente, el capítulo VII es el más riemanniano de todos los capítulos de este libro, donde expondremos la contribución más geométrica de Riemann al análisis complejo. Para ilustrarla vamos a analizar la “función multiforme” $\text{Log}(z)$ que a cada número complejo z no nulo le asigna el conjunto de sus logaritmos. Se trata de una función multiforme porque a cada punto le asigna varias antiimágenes (infinitas, en este caso, pero $\sqrt[3]{z}$ es otro ejemplo de función multiforme que asigna tres imágenes a cada número complejo). Sin embargo,

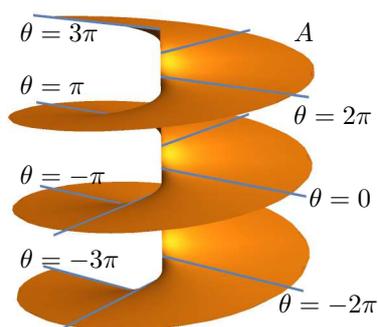
en la sección [IC 1.2] (en los ejemplos tras el teorema de la función inversa) vimos que es posible definir ramas uniformes del logaritmo $\log_\alpha : H_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$, donde H_α es el abierto que resulta de eliminar la semirrecta formada por el 0 y los números complejos de argumento α . En particular, el logaritmo $\log_{-\pi}$ está definido en \mathbb{C} menos en el semieje real negativo.

Imaginemos que partimos de $z = 1$, donde $\log_{-\pi}(1) = 0$, y nos movemos siguiendo la circunferencia unitaria en sentido antihorario. Cuando lleguemos a i el logaritmo valdrá $\log_\pi(i) = i\pi/2$ y a medida que nos acerquemos a -1 el logaritmo $\log_{-\pi}(z)$ tenderá a $i\pi$. En cambio, si nos movemos en sentido horario, cuando nos acerquemos a -1 el logaritmo $\log_{-\pi}(z)$ tenderá a $-i\pi$, y ésta es la razón por la que $\log_{-\pi}$ no puede extenderse a una función siquiera continua en el semieje real negativo: que en un punto como -1 su valor debería ser $i\pi$ para que fuera continua “por arriba” y $-i\pi$ para que fuera continua “por abajo”.

Pero esto no significa que la función logaritmo tenga ningún problema en el semieje real negativo. En realidad, si nos movemos por la circunferencia unitaria calculando logaritmos a nuestro paso, nada nos obliga a detenernos en -1 . Podemos avanzar indefinidamente sin encontrar ninguna discontinuidad. Al llegar a -1 (si nos movemos en sentido antihorario) llegaremos al logaritmo $i\pi$, y podemos seguir calculando logaritmos hasta llegar a $-i$, donde tendremos $3\pi i/2$ y completar la vuelta hasta llegar a 1, donde obtendremos el valor $2\pi i$, que es un valor diferente al valor de partida, pero eso no significa que nos hayamos encontrado con ninguna discontinuidad. Incluso podemos seguir avanzando y calculando logaritmos a nuestro paso, y cuando completemos otra vuelta y lleguemos de nuevo a 1 habremos llegado al logaritmo $4\pi i$. El único problema que tendríamos si quisiéramos calcular logaritmos a la vez que avanzamos por una curva sería si ésta pasara por 0, pues entonces nuestros logaritmos tenderían a infinito.

En realidad sí que tenemos un problema, y es que si empezamos en $z = 1$ calculando $\log 1 = 0$ y, después de “dar un paseo” calculando logaritmos llegamos (sin discontinuidades) a $\log 1 = 2\pi i$, nuestro problema es que nos vemos obligados a que la función log asigne varios valores al mismo punto 1, con lo que no podemos considerarla como una función “uniforme” usual.

Riemann se dio cuenta de que el hecho de que “al pasear” no percibamos ninguna discontinuidad (siempre y cuando no tratemos de pasar por 0) se traduce en que el problema desaparece si pensamos que la función log no está definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, sino en una superficie con el aspecto que muestra la figura. Sobre el eje marcado con $\theta = 0$ el logaritmo es el logaritmo real usual, y si partimos de $z = 1$, tenemos $\log 1 = 0$, pero a medida que giramos vamos “subiendo”, de modo que cuando hemos dado media vuelta estamos en el eje $\theta = \pi$, donde log da logaritmos con parte imaginaria π , y no es el mismo eje al que habríamos llegado si hubiéramos “bajado” girando en sentido antihorario, pues en tal caso habríamos llegado al



eje $\theta = -\pi$, donde \log proporciona logaritmos con parte imaginaria $-\pi$. Similarmente, si damos una vuelta entera en sentido antihorario, no volvemos al punto de partida, sino que llegamos al eje $\theta = 2\pi$, donde $\log z$ proporciona logaritmos con parte imaginaria $2\pi i$.

El dibujo (entendiendo que la superficie no está contenida en un cilindro, sino que se prolonga indefinidamente siguiendo los ejes) representa lo que se conoce como la superficie de Riemann de la función (multiforme) logaritmo. Si la llamamos A , en ella hay definidas dos funciones holomorfas. Por una parte una proyección $\pi : A \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ que a cada punto $z \in A$ le asigna el punto del plano complejo sobre el que está situado. Así, en cada eje paralelo a $\theta = 0$ hay un punto con proyección 1, de modo que cuando damos una vuelta completa, pasamos de un punto z_0 tal que $\pi(z_0) = 1$ a otro punto $z_{2\pi}$ tal que $\pi(z_{2\pi}) = 1$ igualmente. Por otra parte, tenemos la función $\log : A \rightarrow \mathbb{C}$ que a cada punto $z \in A$ le asigna un logaritmo de $\pi(z)$, de modo que $\log(z_0) = 0$, $\log(z_{2\pi}) = 2\pi i$, etc.

Aquí es importante que A no es meramente “una superficie”, sino una superficie analítica, es decir, una variedad diferencial con la estructura necesaria para que tenga sentido decir que la función \log definida sobre ella es holomorfa.

En el capítulo VII daremos una definición precisa de “función holomorfa multiforme” y veremos cómo asociar a cada una de ellas una superficie de Riemann en la que puede verse como una función holomorfa uniforme. En el contexto de las funciones multiformes tendrá sentido decir que la función \log tiene una singularidad aislada en $z = 0$, lo que esencialmente significa que la proyección $\pi : A \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ no se puede extender (ni siquiera ampliando A) para que 0 pase a estar en su imagen (y sin que π deje de ser una función holomorfa). Más precisamente, \log tiene dos singularidades aisladas, una en 0 y otra en ∞ .

La situación es ligeramente distinta si en lugar de considerar la función logaritmo consideramos la función multiforme $\sqrt[3]{z}$. En este caso, para hacerla uniforme, no necesitamos una superficie de Riemann tan grande como la del logaritmo. La superficie de Riemann de $\sqrt[3]{z}$ tiene el mismo aspecto que muestra la figura anterior, pero entendiendo que la espiral no se prolonga indefinidamente, sino que el eje marcado como $\theta = 3\pi$ es el mismo que el marcado como $\theta = -3\pi$, de modo que cuando damos tres vueltas alrededor de 0 volvemos al mismo punto de partida.

Esta superficie tiene también dos singularidades aisladas en 0 y en ∞ , pero con la diferencia de que ahora son ‘evitables’. Es posible compactificar A añadiéndole dos nuevos puntos, uno con proyección 0 y otro con proyección ∞ , sobre los que $\sqrt[3]{0} = 0$ y $\sqrt[3]{\infty} = \infty$ y, con estos dos puntos añadidos, la superficie A se vuelve compacta (y las funciones $\pi(z)$ y $\sqrt[3]{z}$ definidas sobre ella siguen siendo holomorfas).

Veremos que esto es posible porque la función $\sqrt[3]{z}$ es ‘algebraica’, en el sentido de que es raíz del polinomio $w^3 - z$. En general, probaremos que cada polinomio $P(w, z) \in \mathbb{C}(z)[w]$ determina una función multiforme meromorfa F que cumple $P(F(z), z) = 0$ para todo punto z que no sea un polo de ninguno de los coeficientes de P , y que las superficies de Riemann de las funciones meromorfas algebraicas en este sentido son compactas (o se pueden compactificar con

un número finito de puntos). En [TA] probamos que toda superficie compacta orientable —y las superficies de Riemann siempre son orientables— es homeomorfa a una esfera con g agujeros, y aquí daremos una fórmula (la fórmula de Hurwitz) que nos permitirá calcular el género g de la superficie de Riemann de una función algebraica a partir de la estructura de sus singularidades aisladas. Por ejemplo, el género de la función $\sqrt[3]{z}$ resulta ser $g = 0$, lo que significa que, aunque no lo parezca, su superficie de Riemann es homeomorfa a una esfera. Probaremos que hay funciones algebraicas con superficies de todos los géneros posibles.

Recíprocamente, sucede que toda superficie de Riemann compacta es la superficie de Riemann de una cierta función algebraica, pero hay un punto de la prueba que es especialmente difícil de probar, y es el hecho de que en una tal superficie hay funciones meromorfas no constantes (si no las hubiera, es obvio que la superficie no podría ser la superficie de Riemann de ninguna función).

Eso lo probaremos en la última sección del apéndice B, dedicado al estudio de las funciones armónicas, pues construiremos las funciones meromorfas deseadas construyendo previamente funciones armónicas (con singularidades).

Capítulo I

Funciones holomorfas

Recordemos algunos hechos elementales sobre los números complejos:

Todo número complejo $z \in \mathbb{C}$ se expresa de forma única como $z = x + yi$, para ciertos $x, y \in \mathbb{R}$, a los que llamamos parte real y parte imaginaria de z ($x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$). Esto nos permite identificar a z con el par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, lo que a su vez nos permite considerar que $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Las funciones $\operatorname{Re}, \operatorname{Im} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ son entonces las proyecciones.

El valor absoluto usual $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ convierte a \mathbb{C} en un cuerpo métrico, luego en particular en un espacio métrico con la distancia $d(w, z) = |w - z|$. A través de la identificación $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ el valor absoluto complejo se corresponde con la norma euclídea, por lo que la topología de \mathbb{C} se corresponde con la topología usual en \mathbb{R}^2 (que es el producto de la topología usual en \mathbb{R}).

Más en general, podemos identificar $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ sin más que identificar cada n -tupla $z = (z_1, \dots, z_n)$ de números complejos $z_k = x_k + y_k i$ con la $2n$ -tupla de números reales $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$. Es claro que, a través de esta identificación, la topología producto en \mathbb{C}^n se corresponde con la topología euclídea usual en \mathbb{R}^{2n} .

Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ es abierto, una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^m$ se identifica con una función de un abierto de \mathbb{R}^{2n} en \mathbb{R}^{2m} , por lo que podemos aplicarle todos los conceptos del cálculo diferencial de varias variables reales.

Notemos que f está determinada por sus m funciones coordenadas f_1, \dots, f_m , y cada una de ellas está a su vez determinada por las funciones $\operatorname{Re} f_k, \operatorname{Im} f_k$, que son las $2m$ funciones coordenadas de f cuando la consideramos como aplicación en \mathbb{R}^{2m} . En particular podemos hablar de las derivadas parciales

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f_k}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial \operatorname{Re} f_k}{\partial y_j}, \quad \frac{\partial \operatorname{Im} f_k}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial \operatorname{Im} f_k}{\partial y_j}$$

(que, naturalmente, para una función arbitraria pueden existir o no). Y si f es diferenciable en $\zeta \in \Omega$, podemos considerar la diferencial $df|_{\zeta} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$, que es una aplicación \mathbb{R} -lineal (pero no necesariamente \mathbb{C} -lineal).

1.1 Diferenciación de funciones complejas

Veamos ahora que podemos definir un cálculo diferencial “genuinamente complejo”, que no sea la mera particularización del cálculo diferencial real a las funciones $f : \Omega \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$.

Definición 1.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto, sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, sea $\zeta \in \Omega$ y sea $1 \leq j \leq n$. Definimos la *derivada parcial* (en sentido complejo)

$$\left. \frac{\partial f}{\partial z_j} \right|_{\zeta} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_j + h, \dots, \zeta_n) - f(\zeta)}{h},$$

donde h es una variable compleja. Cuando $n = 1$ escribiremos también

$$f'(\zeta) \quad \text{o} \quad \left. \frac{df}{dz} \right|_{\zeta}$$

en lugar de $\partial f / \partial z|_{\zeta}$ y diremos que $f'(\zeta)$ es la *derivada* de f en ζ . Si existe dicha derivada diremos que f es *derivable* en ζ .

Si la función f tiene derivada parcial respecto de z_j en todos los puntos de Ω , entonces tenemos definida la función derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} : \Omega \rightarrow \mathbb{C},$$

que en el caso $n = 1$ se representa también por $f' : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, o por df/dz .

A partir de la mera definición de derivada parcial compleja podríamos demostrar resultados como que

$$\frac{\partial w z^2}{\partial z} = 2wz$$

sin más que copiar el cálculo análogo para funciones de variables reales, o demostrar resultados generales, como que las funciones constantes tienen derivada nula, o que la derivada de una suma es la suma de las derivadas; pero no vamos a necesitar entrar en tales cálculos, sino que pronto veremos que podemos deducir las reglas de derivación compleja a partir de las reglas de derivación real.

De momento observemos que, como en el caso real, es evidente a partir de la definición que la función f tiene derivada parcial respecto de z_j en un punto ζ si y sólo si la función

$$g(z) = f(\zeta_1, \dots, z, \dots, \zeta_n)$$

que resulta de fijar todas las variables menos la j -ésima —y que está definida en un entorno de ζ_j en \mathbb{C} — es derivable en ζ_j , y en tal caso

$$\left. \frac{\partial f}{\partial z_j} \right|_{\zeta} = g'(\zeta_j).$$

Esto permite generalizar a derivadas parciales muchos resultados que probemos en principio para derivadas de funciones de una variable.

La relación entre esta noción de derivada parcial y su análoga real no es inmediata. Para ponerla de manifiesto conviene introducir el concepto de diferenciabilidad compleja:

Definición 1.2 Diremos que una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^m$ es *diferenciable* en un punto $\zeta \in \Omega$ (en sentido complejo) si es diferenciable en ζ en sentido real y $df|_{\zeta} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ es \mathbb{C} -lineal.

Veamos lo que entraña esta definición. En principio, si f es diferenciable en sentido real, $df|_{\zeta}$ es una aplicación \mathbb{R} -lineal, la determinada por la matriz jacobiana de f , que es una matriz $2n \times 2m$. Sin embargo, al exigir que sea \mathbb{C} -lineal estamos pidiendo que exista una matriz $J = (\alpha_{jk})$ de dimensión $n \times m$ con coeficientes en \mathbb{C} tal que, para todo $h \in \mathbb{C}^n$, se cumpla $df|_{\zeta}(h) = hJ$.

Observemos ahora que, al igual que en el caso real, la diferenciabilidad de una función se reduce a la de sus funciones coordenadas:

Teorema 1.3 Consideremos un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ y un punto $\zeta \in \Omega$. Entonces, una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^m$ es diferenciable en ζ si y sólo si lo son sus funciones coordenadas f^k , y en tal caso

$$df|_{\zeta} = (df^1|_{\zeta}, \dots, df^m|_{\zeta}).$$

DEMOSTRACIÓN: Con la notación de la observación precedente, la diferenciabilidad en sentido real de f equivale a que exista el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\zeta + h) - f(\zeta) - hJ}{\|h\|} = 0.$$

Esto es un límite en \mathbb{R}^{2m} que equivale a que el límite de cada componente sea 0, luego también es equivalente a que, para todo $1 \leq k \leq m$, se cumpla que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^k(\zeta + h) - f^k(\zeta) - h_1\alpha_{1k} - \dots - h_n\alpha_{nk}}{\|h\|} = 0,$$

es decir, a que la función $f^k : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sea diferenciable en ζ en sentido complejo, y que su diferencial sea

$$df^k|_{\zeta}(h) = \alpha_{1k}h_1 + \dots + \alpha_{nk}h_n.$$

En tal caso tenemos claramente la relación indicada en el enunciado entre las diferenciales de f y las de las coordenadas f^k . ■

En perfecta analogía con el caso real, tenemos también lo siguiente:

Teorema 1.4 Si Ω es un abierto en \mathbb{C}^n y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^m$ es diferenciable en un punto $\zeta \in \Omega$ (en sentido complejo), entonces todas las funciones coordenadas f^k tienen derivadas parciales en ζ , y la matriz de $df|_{\zeta}$ como aplicación \mathbb{C} -lineal es la matriz jacobiana compleja

$$J = \left(\frac{\partial f^k}{\partial z_j} \Big|_{\zeta} \right).$$

En particular, si $m = 1$ tenemos que

$$df|_{\zeta}(h) = \frac{\partial f}{\partial z_1}\Big|_{\zeta} h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z_n}\Big|_{\zeta} h_n.$$

DEMOSTRACIÓN: Continuando el argumento de la prueba del teorema anterior, tenemos que si f es diferenciable en ζ existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^k(\zeta + h) - f^k(\zeta) - h_1\alpha_{1k} - \cdots - h_n\alpha_{nk}}{\|h\|} = 0.$$

El límite seguirá siendo 0 si restringimos la variación de $h \in \mathbb{C}^n$ a n -tuplas de la forma $(0, \dots, h_j, \dots, 0)$, luego la diferenciabilidad implica que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^k(\zeta_1, \dots, \zeta_j + h, \dots, \zeta_n) - f^k(\zeta) - h\alpha_{jk}}{|h|} = 0,$$

donde ahora $h \in \mathbb{C}$. Seguidamente usamos que la función $|h|/h$ está acotada en un entorno de 0 (tiene módulo 1 en todos los puntos) y que al multiplicar una función que tiende a 0 por otra acotada, el producto sigue tendiendo a 0. Así pues:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^k(\zeta_1, \dots, \zeta_j + h, \dots, \zeta_n) - f^k(\zeta) - h\alpha_{jk}}{h} = 0,$$

y esto equivale a que

$$\alpha_{jk} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^k(\zeta_1, \dots, \zeta_j + h, \dots, \zeta_n) - f^k(\zeta)}{h} = \frac{\partial f^k}{\partial z_j}\Big|_{\zeta}. \quad \blacksquare$$

Ahora conviene observar un hecho elemental:

Teorema 1.5 *Toda función \mathbb{C} -lineal $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ es diferenciable en todo punto $\zeta \in \mathbb{C}^n$, y además $df|_{\zeta} = f$.*

DEMOSTRACIÓN: Toda función \mathbb{C} -lineal es \mathbb{R} -lineal, y esto implica que es diferenciable en el sentido real y que su diferencial es ella misma, pero al ser \mathbb{C} -lineal, esto implica que es diferenciable en el sentido complejo. \blacksquare

En particular es diferenciable la proyección j -ésima $\pi_j : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\pi_j(z) = z_j$ (o, usando una notación habitual, la función z_j) y se cumple que $dz_j|_{\zeta}$ es también la proyección j -ésima, es decir, que $dz_j|_{\zeta}(h) = h_j$.

Por consiguiente, si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función diferenciable en $\zeta \in \Omega \subset \mathbb{C}^n$, el teorema anterior nos da que

$$df|_{\zeta}(h) = \frac{\partial f}{\partial z_1}\Big|_{\zeta} h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z_n}\Big|_{\zeta} h_n = \frac{\partial f}{\partial z_1}\Big|_{\zeta} dz_1|_{\zeta}(h) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z_n}\Big|_{\zeta} dz_n|_{\zeta}(h),$$

para todo $h \in \mathbb{C}^n$, luego

$$df|_{\zeta} = \frac{\partial f}{\partial z_1}\Big|_{\zeta} dz_1|_{\zeta} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z_n}\Big|_{\zeta} dz_n|_{\zeta},$$

para todo $\zeta \in \Omega$.

Si suponemos que f es diferenciable en todos los puntos de Ω y consideramos a df (y a cada dz_j) como una función de Ω en el conjunto de todas las funciones \mathbb{C} -lineales de \mathbb{C}^n en \mathbb{C} , también podemos escribir la ecuación funcional

$$df = \frac{\partial f}{\partial z_1} dz_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z_n} dz_n,$$

análogamente al caso real.

Para funciones de una variable sucede como en el caso real: la derivabilidad equivale a la diferenciabilidad.

Teorema 1.6 *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $\zeta \in \Omega$, una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es derivable en ζ en sentido complejo si y sólo si es diferenciable en ζ en sentido complejo.*

DEMOSTRACIÓN: Si f es derivable en ζ tenemos que existe

$$f'(\zeta) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\zeta + h) - f(\zeta)}{h},$$

luego

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\zeta + h) - f(\zeta) - f'(\zeta)h}{h} = 0.$$

Como la función $h/|h|$ está acotada, podemos multiplicar por ella y concluir que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\zeta + h) - f(\zeta) - f'(\zeta)h}{|h|} = 0.$$

Esto significa que f es diferenciable en el sentido real, y la unicidad de la diferencial implica que

$$df|_{\zeta}(h) = f'(z)h,$$

luego $df|_{\zeta}$ es \mathbb{C} -lineal, lo cual implica que f es diferenciable en sentido complejo. Hemos visto que el recíproco es cierto en general: la diferenciabilidad implica la existencia de derivadas parciales. ■

Veamos finalmente la relación precisa entre la diferenciabilidad en el sentido real y en el sentido complejo (compárese con [IC 7.2]):

Teorema 1.7 *Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ es abierto y $\zeta \in \Omega$, una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^m$ es diferenciable en ζ en el sentido complejo si y sólo si lo es en el sentido real y además sus funciones coordenadas cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:*

$$\left. \frac{\partial \operatorname{Re} f^k}{\partial x_j} \right|_{\zeta} = \left. \frac{\partial \operatorname{Im} f^k}{\partial y_j} \right|_{\zeta}, \quad \left. \frac{\partial \operatorname{Im} f^k}{\partial x_j} \right|_{\zeta} = - \left. \frac{\partial \operatorname{Re} f^k}{\partial y_j} \right|_{\zeta}.$$

Además, en tal caso

$$\left. \frac{\partial f^k}{\partial z_j} \right|_{\zeta} = \left. \frac{\partial \operatorname{Re} f^k}{\partial x_j} \right|_{\zeta} + \left. \frac{\partial \operatorname{Im} f^k}{\partial x_j} \right|_{\zeta} i.$$

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que ver que las ecuaciones de Cauchy-Riemann equivalen a que las diferenciales $df^k|_\zeta$ sean \mathbb{C} -lineales. Considerando a f^k como función $f^k : \Omega \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^2$, para cada $h \in \mathbb{C}^n$, identificada con una $2n$ -tupla $(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$, tenemos que

$$df^k|_\zeta(h) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \operatorname{Re} f^k}{\partial x_j} \Big|_\zeta u_j + \frac{\partial \operatorname{Re} f^k}{\partial y_j} \Big|_\zeta v_j, \frac{\partial \operatorname{Im} f^k}{\partial x_j} \Big|_\zeta u_j + \frac{\partial \operatorname{Im} f^k}{\partial y_j} \Big|_\zeta v_j \right).$$

Que esta aplicación sea \mathbb{C} -lineal significa que existen $\alpha_{1k}, \dots, \alpha_{nk} \in \mathbb{C}$ tales que

$$df^k|_\zeta(h) = \sum_{j=1}^n \alpha_{jk} h_j = \sum_{j=1}^n (\operatorname{Re} \alpha_{jk} u_j - \operatorname{Im} \alpha_{jk} v_j, \operatorname{Im} \alpha_{jk} u_j + \operatorname{Re} \alpha_{jk} v_j).$$

Evaluando ambas expresiones cuando una de las variables $u_1, v_1, \dots, u_n, v_n$ es igual a 1 y el resto son nulas, vemos que para que ambas expresiones coincidan tiene que ser

$$\operatorname{Re} \alpha_{jk} = \frac{\partial \operatorname{Re} f^k}{\partial x_j} \Big|_\zeta = \frac{\partial \operatorname{Im} f^k}{\partial y_j} \Big|_\zeta, \quad \operatorname{Im} \alpha_{jk} = -\frac{\partial \operatorname{Re} f^k}{\partial y_j} \Big|_\zeta = \frac{\partial \operatorname{Im} f^k}{\partial x_j} \Big|_\zeta.$$

Recíprocamente, si se dan estas igualdades, las dos expresiones para la diferencial son idénticas. Esto prueba la primera parte del teorema. Además, si f es diferenciable en sentido complejo, hemos visto que $\alpha_{jk} = \partial f^k / \partial z_j|_\zeta$, luego se cumple también la segunda parte. ■

Ejercicio: Probar que si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ es un abierto conexo, toda función diferenciable $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es constante.

Pasamos ya a probar que la derivación compleja satisface las mismas reglas básicas que la derivación real. Para ello conviene probar en primer lugar la regla de la cadena:

Teorema 1.8 (Regla de la cadena) Si $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{C}^m$ son abiertos, $f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}^m$, $f[\Omega_1] \subset \Omega_2$, $g : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}^r$, $\zeta \in \Omega_1$, f es diferenciable en ζ y g es diferenciable en $f(\zeta)$, entonces $f \circ g$ es diferenciable en ζ y además $d(f \circ g)|_\zeta = df|_\zeta \circ dg|_{f(\zeta)}$.

DEMOSTRACIÓN: Es inmediato, pues la composición de aplicaciones diferenciables en sentido real es diferenciable, y su diferencial es la composición de las diferenciales, y si éstas son \mathbb{C} -lineales, la composición también lo será. ■

Nota Esto implica que la matriz jacobiana de la composición de dos funciones diferenciables es el producto de las matrices jacobianas, lo cual se traduce en la versión análoga al caso real para las derivadas parciales de una composición de funciones diferenciables:

Si tenemos funciones $w : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{C}^n$ y $f : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$, donde $w[\Omega_1] \subset \Omega_2$, w es diferenciable en ζ y f es diferenciable en $w(\zeta)$, si adoptamos el convenio usual

de representar por w_1, \dots, w_n tanto a las variables de f como a las funciones coordenadas de w , entonces tenemos la relación

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} \Big|_{\zeta} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial w_k} \Big|_{w(\zeta)} \frac{\partial w_k}{\partial z_j} \Big|_{\zeta}.$$

■

Ahora es inmediato, por ejemplo, que si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ es un abierto y tenemos dos funciones $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^m$ diferenciables en $\zeta \in \Omega$, entonces $f + g$ y αf también son diferenciables en ζ (para cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$), y

$$d(f + g)|_{\zeta} = df|_{\zeta} + dg|_{\zeta}, \quad d(\alpha f)|_{\zeta} = \alpha df|_{\zeta}.$$

En efecto, podemos expresar la suma $f + g$ como composición de la función $z \mapsto (f(z), g(z))$, que es diferenciable en ζ porque lo son sus funciones coordenadas (ya que son funciones coordenadas de f o de g), con la función suma $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, que es diferenciable porque es lineal, luego por la regla de la cadena $f + g$ es diferenciable en ζ y $d(f + g)|_{\zeta}$ es la composición de $(df|_{\zeta}, dg|_{\zeta})$ con la diferencial de la función suma, que es ella misma, luego obtenemos la igualdad del enunciado. Para el caso del producto por un escalar se razona igualmente con la función $p_{\alpha}(z) = \alpha z$, que también es diferenciable en \mathbb{C}^n por ser lineal.

De aquí se siguen las propiedades correspondientes para derivadas: en el caso $n = 1$, si f y g son derivables en ζ , también lo son $f + g$ y αf , y

$$(f + g)'(\zeta) = f'(\zeta) + g'(\zeta), \quad (\alpha f)'(\zeta) = \alpha f'(\zeta).$$

Por ejemplo, f y g son diferenciables en ζ , luego $f + g$ también lo es, luego es derivable en ζ , por la equivalencia entre derivabilidad y diferenciable en el caso $n = 1$. Además,

$$(f + g)'(\zeta) dz = d(f + g)|_{\zeta} = df|_{\zeta} + dg|_{\zeta} = f'(\zeta) dz + g'(\zeta) dz = (f'(\zeta) + g'(\zeta)) dz,$$

luego tenemos la relación requerida entre las derivadas. Igualmente se razona con αf .

A su vez, de aquí se siguen las propiedades análogas para derivadas parciales, es decir, si f y g admiten derivada parcial respecto de z_j en ζ , lo mismo vale para $f + g$ y αf , y además

$$\frac{\partial(f + g)}{\partial z_j} \Big|_{\zeta} = \frac{\partial f}{\partial z_j} \Big|_{\zeta} + \frac{\partial g}{\partial z_j} \Big|_{\zeta}, \quad \frac{\partial(\alpha f)}{\partial z_j} \Big|_{\zeta} = \alpha \frac{\partial f}{\partial z_j} \Big|_{\zeta}.$$

Basta tener en cuenta que las derivadas parciales son las derivadas de las funciones que resultan de fijar todas las variables menos la j -ésima.

Las reglas para la derivación de productos y cocientes se siguen de este teorema sobre diferenciación:

Teorema 1.9 *El producto $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y la función $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $z \mapsto 1/z$ son diferenciables en sus dominios, y además*

$$d(z_1 z_2) = z_2 dz_1 + z_1 dz_2, \quad d(1/z) = -1/z^2 dz.$$

DEMOSTRACIÓN: Considerada como función de cuatro variables reales, el producto es

$$f(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

que claramente es diferenciable en el sentido real, y cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x_1} = x_2 &= \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y_1}, & \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x_1} = y_2 &= -\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y_1}, \\ \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x_2} = x_1 &= \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y_2}, & \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x_2} = y_1 &= -\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y_2}. \end{aligned}$$

Además, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z_1} &= \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x_1} + \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x_1} i = x_2 + iy_2 = z_2, \\ \frac{\partial f}{\partial z_2} &= \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x_2} + \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x_2} i = x_1 + iy_1 = z_1, \end{aligned}$$

de donde se sigue la expresión indicada para la diferencial. Similarmente, la función $1/z$ es $g(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2} \right)$, que claramente es diferenciable en el sentido real, y

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial \operatorname{Im} g}{\partial y}, \quad \frac{\partial \operatorname{Im} g}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial \operatorname{Re} g}{\partial y}.$$

Además

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial \operatorname{Re} g}{\partial x} + \frac{\partial \operatorname{Im} g}{\partial x} i = \frac{-x^2 + 2xy + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{(x - yi)^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{1}{z^2}. \quad \blacksquare$$

Como consecuencia, si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ es un abierto, $\zeta \in \Omega$ y $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones diferenciables en ζ , también lo es fg y,

$$d(fg)|_{\zeta} = g(\zeta) df|_{\zeta} + f(\zeta) dg|_{\zeta}.$$

Si además $g(\zeta) \neq 0$, también f/g es diferenciable en ζ y

$$d(f/g)|_{\zeta} = \frac{1}{g^2(\zeta)}(g(\zeta) df|_{\zeta} - f(\zeta) dg|_{\zeta}).$$

Basta aplicar la regla de la cadena a la función $z \mapsto (f(z), g(z))$ compuesta con la función producto, luego a la función g compuesta con la función $1/z$ y finalmente el caso del producto a las funciones f y $1/g$. \blacksquare

De aquí se siguen inmediatamente las reglas de derivación de productos y cocientes como en el caso de la suma (se prueban primero para funciones de una variable, donde la derivabilidad equivale a la diferenciabilidad, y luego para derivadas parciales). Dejamos los detalles a cargo del lector.

Ejercicio: Probar que la conjugación compleja no satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann, por lo que no es diferenciable.

Las observaciones siguientes completan las reglas elementales de derivación:

- Es inmediato que las funciones constantes son diferenciables con diferencial nula (luego también tienen derivadas parciales nulas).
- La derivada de $f(z) = z$ es $f'(z) = 1$ (lo que se puede probar directamente por la definición o usando que la identidad es una función lineal, luego su diferencial es también la identidad).
- Una simple inducción a partir de la regla del producto prueba que la función $f(z) = z^n$ es derivable y que $f'(z) = nz^{n-1}$, para todo $n \geq 0$.
- Usando la regla del cociente se prueba que la regla anterior vale para $n < 0$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Hasta aquí hemos estudiado la derivabilidad y la diferenciabilidad como propiedades puntuales, pero a partir de ahora vamos a considerar funciones derivables o diferenciables en abiertos:

Definición 1.10 Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ es un abierto, una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^m$ es *holomorfa* en Ω si es diferenciable en Ω en el sentido complejo. Llamaremos $\mathcal{H}(\Omega, \mathbb{C}^m)$ al conjunto de todas las funciones holomorfas $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^m$ y abreviaremos $\mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega, \mathbb{C})$. Las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se llaman funciones *enteras*.

Observemos que en la sección [IC 7.1] adoptamos como definición que una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida en un abierto del plano complejo es holomorfa si es derivable en el sentido complejo, lo que por 1.6 equivale a que sea diferenciable, luego la definición que acabamos de dar extiende a la de [IC].

Si $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}^n$ son abiertos, una aplicación $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ es *biholomorfa* si es biyectiva, holomorfa y con inversa holomorfa.

Del hecho de que la suma y el producto por escalares de funciones diferenciables son diferenciables se sigue que $\mathcal{H}(\Omega, \mathbb{C}^m)$ es un subespacio vectorial del espacio $C(\Omega, \mathbb{C}^m)$ de todas las funciones continuas de Ω en \mathbb{C}^m (pues toda función diferenciable en el sentido real es continua).

El espacio $C(\Omega, \mathbb{C})$ tiene además estructura de álgebra con el producto definido puntualmente, y el hecho de que el producto de funciones diferenciables sea diferenciable implica que $\mathcal{H}(\Omega)$ es una subálgebra de $C(\Omega, \mathbb{C})$. Más aún, como las proyecciones z_j son claramente holomorfas, concluimos que todo polinomio es holomorfo en \mathbb{C}^n , es decir, que $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] \subset \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$.

Si una función es diferenciable en un punto en sentido complejo, entonces tiene asociadas dos matrices jacobianas distintas: la matriz jacobiana en sentido real tiene coeficientes reales y el doble de filas y de columnas que la matriz jacobiana en sentido complejo. En el caso de las aplicaciones de \mathbb{C}^n en \mathbb{C}^n las ecuaciones de Cauchy-Riemann proporcionan una relación muy simple entre sus determinantes:

Teorema 1.11 *Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ es abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ es diferenciable en $\zeta \in \Omega$ en sentido complejo, entonces el determinante de la matriz jacobiana de f en el sentido real es el cuadrado del módulo del determinante de su matriz jacobiana en el sentido complejo.*

DEMOSTRACIÓN: La matriz jacobiana real de f tiene dimensión $2n \times 2n$, y la podemos descomponer en submatrices 2×2 de la forma

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{\partial \operatorname{Re} f^k}{\partial x_j} & \frac{\partial \operatorname{Im} f^k}{\partial x_j} & \zeta \\ \frac{\partial \operatorname{Re} f^k}{\partial y_j} & \frac{\partial \operatorname{Im} f^k}{\partial y_j} & \zeta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{\partial \operatorname{Re} f^k}{\partial x_j} & \frac{\partial \operatorname{Im} f^k}{\partial x_j} & \zeta \\ -\frac{\partial \operatorname{Im} f^k}{\partial x_j} & \frac{\partial \operatorname{Re} f^k}{\partial x_j} & \zeta \end{array} \right).$$

Para calcular su determinante, podemos considerarla como matriz con coeficientes en \mathbb{C} (el valor del determinante no cambia por que extendamos el cuerpo en el que consideramos la matriz). Tampoco cambiará si a cada columna impar le sumamos la columna siguiente multiplicada por i , con lo que las submatrices se convierten en

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{\partial \operatorname{Re} f^k}{\partial x_j} + \frac{\partial \operatorname{Im} f^k}{\partial x_j} i & \frac{\partial \operatorname{Im} f^k}{\partial x_j} & \zeta \\ -\frac{\partial \operatorname{Im} f^k}{\partial x_j} + \frac{\partial \operatorname{Re} f^k}{\partial x_j} i & \frac{\partial \operatorname{Re} f^k}{\partial x_j} & \zeta \end{array} \right).$$

Seguidamente sumamos a cada fila par la fila anterior multiplicada por $-i$, con lo que las submatrices se convierten en

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{\partial \operatorname{Re} f^k}{\partial x_j} + \frac{\partial \operatorname{Im} f^k}{\partial x_j} i & \frac{\partial \operatorname{Im} f^k}{\partial x_j} & \zeta \\ 0 & \frac{\partial \operatorname{Re} f^k}{\partial x_j} - \frac{\partial \operatorname{Im} f^k}{\partial x_j} i & \zeta \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{\partial f^k}{\partial z_j} & \frac{\partial \operatorname{Im} f^k}{\partial x_j} & \zeta \\ 0 & \frac{\partial f^k}{\partial \bar{z}_j} & \zeta \end{array} \right).$$

Ahora permutamos las filas para poner todas las filas impares antes que las pares, e igualmente con las columnas (lo cual no cambia el signo del determinante, pues hacemos el mismo número de permutaciones de filas que de columnas), y la matriz pasa a tener la forma

$$\left(\begin{array}{c|c} J & * \\ \hline 0 & \bar{J} \end{array} \right),$$

donde J es la matriz jacobiana compleja de f . Por consiguiente, el determinante de la matriz real es $(\det J)(\det \bar{J}) = |\det J|^2$. ■

Así pues, una función homomorfa entre dos abiertos de \mathbb{C}^n tiene determinante jacobiano positivo (como función real), luego conserva la orientación o, dicho de otro modo, las funciones diferenciables que invierten la orientación (como es el caso de la conjugación compleja) no pueden ser holomorfas.

En [IC 7.16] demostramos que toda función holomorfa es, de hecho, infinitamente derivable. Más adelante veremos (teorema 1.25) que lo mismo es cierto para funciones de varias variables, pero de momento vamos a aceptarlo para demostrar las versiones complejas de los teoremas de la función inversa e implícita:

Teorema 1.12 (Teorema de la función inversa) *Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ una función inyectiva y holomorfa en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ cuyo determinante jacobiano sea no nulo¹ en todo punto de Ω . Entonces $\Omega^* = f[\Omega]$ es abierto en \mathbb{C}^n y $f^{-1} : \Omega^* \rightarrow \Omega$ es holomorfa.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior, el determinante jacobiano de f en el sentido real tampoco se anula, luego por el teorema de la función inversa para funciones de variable real [An 5.42] (admitiendo que f es al menos de clase C^1) sabemos que Ω^* es abierto y que f^{-1} es de clase C^1 . Además, por la regla de la cadena, como $f \circ f^{-1}$ y $f^{-1} \circ f$ son la identidad, lo mismo sucede con las diferenciales, luego si $w = f(z) \in \Omega^*$, entonces $df^{-1}|_w = df|_z^{-1}$. Como $df|_z$ es \mathbb{C} -lineal, lo mismo vale para su inversa, luego f^{-1} es holomorfa. ■

En particular, para funciones de una variable, de la relación $df|_z \circ df|_w^{-1} = 1$ deducimos que $f'(z)(f^{-1})'(w) = 1$ o, equivalentemente:

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}.$$

El teorema siguiente se sigue análogamente de [An 5.41]:

Teorema 1.13 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto, sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ una función holomorfa en Ω y sea $\zeta \in \Omega$ tal que la matriz jacobiana $Jf(\zeta)$ tenga determinante no nulo. Entonces existen abiertos $\zeta \in U \subset \Omega$ y $f(\zeta) \in V \subset \mathbb{C}^n$ de modo que $f|_U : U \rightarrow V$ es biyectiva.*

Veamos ahora la versión compleja del teorema de la función implícita:

Teorema 1.14 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^{m+n}$ un abierto, sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ una función holomorfa en Ω y sea $(w_0, z_0) \in \Omega$ tal que $f(w_0, z_0) = 0$. Supongamos que*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \Big|_{(w_0, z_0)} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z_1} \Big|_{(w_0, z_0)} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \Big|_{(w_0, z_0)} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z_n} \Big|_{(w_0, z_0)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Entonces existen abiertos $(w_0, z_0) \in U \subset \Omega$, $w_0 \in W \subset \mathbb{C}^m$ y una función holomorfa $g : W \rightarrow \mathbb{C}^n$ de modo que

$$\{(w, z) \in U \mid f(w, z) = 0\} = \{(w, g(w)) \mid w \in W\}.$$

¹Puede probarse que la hipótesis sobre el determinante jacobiano es en realidad innecesaria. Para $n = 1$ está probado en la nota tras el teorema 1.37.

DEMOSTRACIÓN: Si reformulamos las hipótesis del teorema en términos del análisis real, tenemos una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{2m+2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ (que admitimos que es de clase C^1) y un punto $(u_1, v_1, \dots, u_m, v_m, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ que cumple $f(u, v, x, y) = 0$. Además, el determinante formado por las derivadas de las $2n$ últimas funciones coordenadas de f respecto de las variables x_i e y_i (en dicho punto) es no nulo, pues es el cuadrado del módulo del determinante del enunciado (la relación entre ambos determinantes es la misma que entre los considerados en el teorema 1.11). Esto nos permite aplicar el teorema de la función implícita real, según el cual existen abiertos U y W y una función g de clase C^1 que cumplen el enunciado salvo en lo tocante a la holomorfía de g . El teorema quedará probado si demostramos que g cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Para ello basta derivar la función $f(w, g(w))$ —que es idénticamente nula en el abierto W — mediante la regla de la cadena. Por simplicidad llamaremos $z = x + iy = g(w)$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \operatorname{Re} f_k}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \operatorname{Re} f_k}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial u_j} + \frac{\partial \operatorname{Re} f_k}{\partial u_j} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \operatorname{Im} f_k}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \operatorname{Im} f_k}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial u_j} + \frac{\partial \operatorname{Im} f_k}{\partial u_j} &= 0. \end{aligned}$$

Cuando k varía entre 1 y n tenemos un sistema de $2n$ ecuaciones lineales con $2n$ incógnitas cuya matriz de coeficientes tiene determinante no nulo. Más concretamente, es de la forma

$$\left| \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B & A \end{array} \right|,$$

donde

$$A' = \left(\frac{\partial \operatorname{Re} f_k}{\partial x_i} \right), \quad B = \left(\frac{\partial \operatorname{Re} f_k}{\partial y_i} \right).$$

Esto nos permite despejar $\frac{\partial x_i}{\partial u_j}$ como cociente de dos determinantes: el denominador es el determinante anterior, y el numerador tiene la forma

$$\left| \begin{array}{c|c} A' & B \\ \hline -B' & A \end{array} \right|,$$

donde A' y B' resultan de sustituir la columna i -ésima en A y en B respectivamente por la columna formada por las derivadas

$$-\frac{\partial \operatorname{Re} f_k}{\partial u_j} \quad \text{y} \quad -\frac{\partial \operatorname{Re} f_k}{\partial v_j}, \quad k = 1, \dots, n.$$

La derivada $\frac{\partial y_i}{\partial v_j}$ tiene una expresión casi idéntica, con la única diferencia de que ahora el numerador es el determinante

$$\left| \begin{array}{c|c} A & B' \\ \hline -B & A' \end{array} \right|.$$

Mediante permutaciones de filas y columnas y cambios de signo se concluye que

$$\begin{vmatrix} A' & B \\ -B' & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B' \\ -B & A' \end{vmatrix},$$

con lo que

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_j} = \frac{\partial y_i}{\partial v_j}.$$

Similarmente se comprueban las otras ecuaciones de Cauchy-Riemann. ■

La función exponencial y las funciones trigonométricas En [ITAn 4.1] definimos la función exponencial

$$\exp z = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

y en la sección [IC 1.2] demostramos que es derivable en el sentido complejo, y que su derivada es ella misma, por lo que se trata de una función holomorfa en \mathbb{C} . Alternativamente, tras [ITAn 5.1] probamos la relación

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y),$$

que muestra que, como función de dos variables reales, la exponencial es de clase C^∞ y cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial \operatorname{Re} e^z}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial \operatorname{Im} e^z}{\partial y}, \quad \frac{\partial \operatorname{Im} e^z}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y = -\frac{\partial \operatorname{Re} e^z}{\partial y},$$

de donde se sigue también que su derivada en sentido complejo es

$$(e^z)' = \frac{\partial \operatorname{Re} e^z}{\partial x} + \frac{\partial \operatorname{Im} e^z}{\partial x} i = e^z.$$

A su vez, esto implica que también son holomorfas las funciones trigonométricas

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

y las reglas de derivación nos dan que $\operatorname{sen}' z = \cos z$, $\cos' z = -\operatorname{sen} z$. La función tangente

$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$$

está definida en todo el plano complejo menos los múltiplos enteros de 2π , y ahora sabemos que es holomorfa en su dominio, y las reglas de derivación nos dan que

$$\tan' z = \frac{1}{\cos^2 z} = 1 + \tan^2 z.$$

Ejercicio: Comprobar que son holomorfas las funciones trigonométricas hiperbólicas ($\sinh z$, $\cosh z$, $\tanh z$) y que cumplen las mismas reglas de derivación que las análogas reales. ■

Nota En general, si una función holomorfa f extiende a otra de variable real g (como es el caso de e^z y e^x o $\operatorname{sen} z$ y $\operatorname{sen} x$, etc.), entonces también se cumple que las derivadas parciales de f (en el sentido complejo) extienden a las derivadas parciales de g (en el sentido real). Esto es inmediato a partir de las propias definiciones de derivada parcial. ■

Logaritmos complejos Al contrario de lo que sucede con la exponencial real, la exponencial compleja no es inyectiva, sino que cada número complejo no nulo tiene infinitos logaritmos. En la sección [ITAn 6.1] estudiamos estos logaritmos complejos. La idea básica es que, para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, podemos definir el conjunto de los *argumentos* y el de los *logaritmos* de z como:

$$\operatorname{Arg}(z) = \{\theta \in \mathbb{R} \mid z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)\}, \quad \operatorname{Log}(z) = \{w \in \mathbb{C} \mid z = e^w\},$$

y en [ITAn 6.1] probamos que, para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, se cumple que

$$\operatorname{Log}(z) = \{\log |z| + i\theta \mid \theta \in \operatorname{Arg}(z)\}.$$

Si $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es abierto, una *determinación continua del argumento* en Ω es una aplicación continua $\arg : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada $z \in \Omega$ se cumpla que $\arg(z) \in \operatorname{Arg}(z)$.

Similarmente, una *rama uniforme del logaritmo* en Ω es una aplicación continua $\log : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que para todo $z \in \Omega$ se cumpla que $\log z \in \operatorname{Log}(z)$.

El nombre de “rama uniforme” se debe a que conviene pensar que Log es una “función multiforme”, es decir, una función que a cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ le asigna, no una imagen, sino un conjunto de imágenes en \mathbb{C} , y de esta función multiforme estamos seleccionando una rama uniforme, es decir, una función “ordinaria”.

Ahora es inmediato que si \arg es una determinación continua del argumento en Ω , entonces $\log(z) = \log |z| + i \arg(z)$ es una rama uniforme del logaritmo en Ω y, recíprocamente, si \log es una rama uniforme del logaritmo en Ω , entonces $\arg(z) = -i(\log(w) - \log |z|)$ es una determinación continua del argumento en Ω .

Si $\arg : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una determinación continua del argumento en Ω y $k \in \mathbb{Z}$, entonces $\arg z + 2k\pi$ también lo es y, recíprocamente, si Ω es un abierto conexo no vacío y $\arg_1, \arg_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son dos determinaciones continuas del argumento en Ω , entonces existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\arg_1(z) = \arg_2(z) + 2k\pi$$

para todo $z \in \Omega$. Basta tener en cuenta que $k(z) = (\arg_1(z) - \arg_2(z))/2\pi$ es continua en Ω y, por definición de argumento, sólo puede tomar valores enteros, luego tiene que ser constante.

De aquí se sigue a su vez que si $\log : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una rama uniforme del logaritmo en Ω y $k \in \mathbb{Z}$, entonces $\log(z) + 2k\pi i$ también lo es, y que si Ω es un abierto conexo no vacío y $\log_1, \log_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ son dos ramas uniformes del logaritmo en Ω , entonces existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\log_1(z) = \log_2(z) + 2k\pi i.$$

Así pues, no podemos aspirar a tener un único logaritmo complejo, sino a lo sumo a tener infinitas ramas uniformes del logaritmo definidas en ciertos abiertos de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (pero no en todos ellos).

En la sección [IC 7.2] mostramos una familia de ramas uniformes holomorfas del logaritmo. Recordemos la construcción:

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos

$$A_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha < \operatorname{Im} z < \alpha + 2\pi\}, \quad H_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \alpha \notin \operatorname{Arg}(z)\}.$$

Son conjuntos abiertos, pues el segundo es todo el plano complejo menos una semirrecta de origen 0, y es claro que la función exponencial se restringe a una biyección $A_\alpha \rightarrow H_\alpha$. Puesto que la derivada de la exponencial es ella misma y no se anula en ningún punto, el teorema de la función inversa (el teorema 1.12 o simplemente [IC 1.8]), nos da que la inversa de esta función es una función holomorfa

$$\log_\alpha : H_\alpha \rightarrow \mathbb{C},$$

y es obviamente una rama uniforme del logaritmo en H_α . Su determinación continua del argumento asociada es la que a cada $z \in H_\alpha$ le asigna su único argumento en el intervalo $]\alpha, \alpha + 2\pi[$. En particular, si $\alpha < 0 < \alpha + 2\pi$, tenemos que \log_α asigna a cada número real positivo $x \in]0, +\infty[$ un logaritmo de argumento 0, es decir, real, luego $\log_\alpha|_{]0, +\infty[}$ es el logaritmo real usual.

Como los abiertos H_α cubren $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, tenemos que todo punto de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tiene un entorno en el que hay definida una rama uniforme del logaritmo.

Observemos ahora que cualquier rama uniforme del logaritmo es holomorfa:

Teorema 1.15 *Si $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es abierto no vacío y $\log : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una rama uniforme del logaritmo en Ω , entonces \log es holomorfa y*

$$\log'(z) = \frac{1}{z}.$$

DEMOSTRACIÓN: Dado $\zeta \in \Omega$, es claro que existe un α tal que $z \in H_\alpha$, luego podemos tomar una disco² abierto $\Omega_0 = D(\zeta, r) \subset \Omega \cap H_\alpha$. Entonces $\log|_{\Omega_0}$ y $\log_\alpha|_{\Omega_0}$ son dos ramas uniformes del logaritmo en Ω_0 , luego existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\log(z) = \log_\alpha(z) + 2k\pi i$, para todo $z \in D(\zeta, r)$. Como \log_α es una función holomorfa, tenemos que \log también lo es.

El valor de la derivada se sigue inmediatamente de la regla de la cadena: como $e^{\log z} = z$, al derivar queda que $e^{\log z} \log' z = 1$, luego $\log' z = 1/z$. ■

²Es habitual llamar *discos* a las bolas en \mathbb{C} . Usaremos la notación $D(\zeta, r)$ para referirnos al disco abierto de centro ζ y radio r .

La exponencial como cubrimiento No es difícil dar un argumento directo que muestra que no existen ramas uniformes del logaritmo definidas sobre todo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, pero un poco más adelante será inmediato. Ahora vamos a dar un argumento general basado en la topología algebraica:

El fondo del problema radica en que la función exponencial $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es un cubrimiento en el sentido de [TA 1.53]. Está demostrado en uno de los ejemplos posteriores a la definición, pero acabamos de dar una prueba directa, ya que prácticamente ya hemos demostrado que los abiertos H_α , que cubren $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ son abiertos fundamentales para la exponencial, pues su antiimagen es $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_{\alpha+2k\pi}$, que es una unión de abiertos conexos disjuntos en \mathbb{C} .

En estos términos, las ramas uniformes del logaritmo $\log : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ no son sino las elevaciones al cubrimiento de la inclusión $i : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, y el criterio de elevación [TA 8.9] nos da una condición necesaria y suficiente para que exista una rama uniforme del logaritmo en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Teniendo en cuenta que $\pi_1(\mathbb{C}) = 1$, la condición se reduce a que $i_*[\pi_1(\Omega)] = 1$. Si Ω no es conexo, es fácil ver que la condición necesaria y suficiente es que todas sus componentes conexas cumplan esta condición.

Por ejemplo, esto sucede si Ω es simplemente conexo y, más en general, si está contenido en un abierto simplemente conexo en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Por el contrario, ahora es inmediato que no existen ramas uniformes del logaritmo en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, ya que en este caso i_* es la identidad y $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$. Más en general, no puede existir una rama uniforme del logaritmo en ningún abierto $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ que contenga a la circunferencia unitaria S^1 , pues S^1 es un retracto de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, luego también de Ω , luego en el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\Omega) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \\ \uparrow & \nearrow & \\ \pi_1(S^1) & & \end{array}$$

formado por los homomorfismos inducidos por las inclusiones, las flechas vertical y oblicua son isomorfismos (por la existencia de una retracción), luego la horizontal también lo es y la imagen de i_* no es trivial. ■

Potencias complejas Para cada elección de un logaritmo de $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ podemos definir sobre todo el plano complejo una exponencial en base a mediante

$$a^z = e^{z \log a}.$$

Pero es importante recordar que esta expresión no define una única función, sino infinitas funciones distintas, una para cada elección del logaritmo. Todas ellas son claramente holomorfas en \mathbb{C} , con derivada $(a^z)' = a^z \log a$, donde el logaritmo es precisamente el que define la exponencial.

Si queremos la variable en la base obtenemos una “función potencial” multiforme:

$$P_a(z) = e^{a \text{Log}(z)} = \{e^{aw} \mid w \in \text{Log}(z)\}.$$

Es claro que cada rama uniforme del logaritmo $\log : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ determina una rama uniforme

$$z^a = e^{a \log z}$$

de $P_a(z)$ en Ω , es decir una función tal que $z^a \in P_a(z)$ para todo $z \in \Omega$.

Como las ramas uniformes del logaritmo son holomorfas, lo mismo sucede con las ramas uniformes de las potencias, y las reglas de derivación nos dan que

$$(z^a)' = e^{a \log z} a/z = az^a/z = az^{a-1},$$

donde hay que entender que las potencias z^a y z^{a-1} se calculan con la misma rama uniforme del logaritmo.

Hay que tener presente que ramas uniformes del logaritmo distintas pueden dar lugar a la misma rama uniforme de una potencia. Por ejemplo, es fácil ver que dos ramas uniformes del logaritmo definen una misma rama uniforme de la función

$$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = \{e^{w/n} \mid w \in \text{Log}(z)\}$$

si y sólo si se diferencian en un múltiplo entero de $2n\pi i$.

Observemos que $\sqrt[n]{z}$ no es sino el conjunto de las n raíces n -simas de z , y si tiene ramas uniformes en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces tiene exactamente n ramas uniformes, ya que si p_1 y p_2 son dos de ellas, el cociente p_1/p_2 es una función continua que toma valores en el conjunto finito de las n raíces n -simas de la unidad, luego tiene que ser constante. Por lo tanto, si $\sqrt[n]{z}$ es una rama uniforme en Ω , las demás son las de la forma $\omega \sqrt[n]{z}$, donde ω recorre las raíces n -simas de la unidad. ■

1.2 La integral curvilínea

Los resultados que hemos probado en la sección precedente sobre el cálculo diferencial complejo son análogos a los resultados correspondientes del cálculo diferencial real. Sin embargo, las funciones holomorfas satisfacen propiedades mucho más fuertes que no son ni remotamente ciertas en el caso real. Entre ellas se encuentra el hecho que tenemos pendiente de demostrar, según el cual las funciones holomorfas (es decir, diferenciables en abiertos en sentido complejo) son infinitamente derivables. Este hecho y muchos otros son consecuencia de que las funciones holomorfas y sus derivadas admiten expresiones en términos de la integral curvilínea definida en [IC 7.5] y que vamos a presentar aquí de nuevo en un contexto ligeramente más general, admitiendo arcos diferenciables a trozos. Antes de introducirla conviene considerar el concepto más general de integral de una función con valores complejos:

Definición 1.16 Si X es un espacio medida, una función $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ es integrable si lo son las funciones $\text{Re } f, \text{Im } f : X \rightarrow \mathbb{R}$, y en tal caso definimos

$$\int_X f \, d\mu = \int_X \text{Re } f \, d\mu + i \int_X \text{Im } f \, d\mu \in \mathbb{C}.$$

Notemos que si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ entonces esta definición se reduce a la definición usual de integral de una función con valores reales. El teorema siguiente recoge las propiedades básicas de las integrales complejas:

Teorema 1.17 *Sea X un espacio medida.*

1. Si $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{C}$ son integrables y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, también es integrable $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ y

$$\int_X (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) d\mu = \alpha_1 \int_X f_1 d\mu + \alpha_2 \int_X f_2 d\mu.$$

2. Si $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ es integrable, también lo es $|f|$ y

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

DEMOSTRACIÓN: La primera propiedad se demuestra fácilmente separando la parte real y la parte imaginaria de $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ y aplicando la propiedad análoga para funciones con valores reales. Veamos la segunda:

Si f es integrable, también lo es $g = \sqrt{2}(|\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|)$ y, como $|f| \leq g$, también lo es $|f|$ (véase [An 4.54]). Si $\int_X f d\mu = 0$, la desigualdad del enunciado es obvia. En otro caso sea

$$\alpha = \frac{\int_X f d\mu}{\int_X f d\mu} \in \mathbb{C}.$$

Así

$$\left| \int_X f d\mu \right| = \alpha \int_X f d\mu = \int_X \alpha f d\mu = \int_X \operatorname{Re}(\alpha f) d\mu + i \int_X \operatorname{Im}(\alpha f) d\mu,$$

pero como se trata de un número real, la segunda parte ha de ser nula, o sea,

$$\left| \int_X f d\mu \right| = \int_X \operatorname{Re}(\alpha f) d\mu \leq \int_X |\alpha f| d\mu = \int_X |f| d\mu,$$

donde hemos usado que, en general, $\operatorname{Re} z \leq |z|$, así como que $|\alpha| = 1$. ■

Es inmediato que si μ es una medida de Borel finita en un espacio topológico compacto K , entonces toda función continua $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ es medible y, al estar acotada, es integrable. He aquí un resultado elemental que nos será útil en numerosas ocasiones:

Teorema 1.18 *Sea K un espacio topológico compacto y μ una medida de Borel finita sobre K . Sea $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas $f_k : K \rightarrow \mathbb{C}$ que converja uniformemente a una función $f : K \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces existe*

$$\lim_k \int_K f_k d\mu = \int_K f d\mu.$$

DEMOSTRACIÓN: Notemos que f es continua, por ser límite uniforme de funciones continuas. Dado $\epsilon > 0$, existe un número natural k_0 tal que si $k \geq k_0$ entonces $|f(x) - f_k(x)| < \epsilon/(\mu(K) + 1)$ para todo $x \in K$. Entonces

$$\sup\{|f(x) - f_k(x)| \mid x \in K\} \leq \epsilon/(\mu(K) + 1)$$

y, por consiguiente,

$$\left| \int_K f d\mu - \int_K f_k(z) d\mu \right| = \left| \int_K (f - f_k) d\mu \right| \leq \int_K |f - f_k| d\mu \leq \frac{\mu(K)\epsilon}{\mu(K) + 1} < \epsilon.$$

Esto prueba lo pedido. \blacksquare

En el caso particular de funciones continuas $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tenemos obviamente las propiedades adicionales siguientes:

Si $a < c < b$, entonces

$$\int_a^b h(t) dt = \int_a^c h(t) dt + \int_c^b h(t) dt.$$

Si $h : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ es continua y $\rho : [a, b] \rightarrow [c, d]$ es biyectiva, derivable y con derivada continua, entonces

$$\int_{\rho(a)}^{\rho(b)} h(t) dt = \int_a^b h(\rho(s))\rho'(s) ds,$$

con el convenio de que invertir los límites de integración equivale a cambiar el signo a la integral.

Ambas se demuestran separando la parte real de la imaginaria y aplicando la propiedad correspondiente para funciones con valores reales.

Arcos Antes de definir la integral curvilínea recordamos el concepto de arco regular y regular a trozos (para más detalles véase la sección [GD 2.3]):

Cuando hablemos de un *arco diferenciable* $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ se entenderá que nos referimos a un arco de clase C^1 (en el sentido de que se extiende a una aplicación de clase C^1 en un intervalo abierto que contenga a $[a, b]$) cuya derivada no se anula en ningún punto, donde la derivada se define componente a componente, es decir, si $\phi(t) = x(t) + iy(t)$, entonces $\phi'(t) = x'(t) + iy'(t)$. Representaremos por $\phi^* \subset \mathbb{C}$ a la imagen de ϕ .

Un arco $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es *diferenciable a trozos* si existe una partición

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$$

de modo que cada restricción $\phi|_{[t_{i-1}, t_i]}$ sea diferenciable. La longitud de un arco está definida como

$$L(\phi) = \int_a^b |\phi'(t)| dt.$$

Un *cambio de parámetro* es una aplicación $t : [c, d] \rightarrow [a, b]$ de clase C^1 cuya derivada no se anula en ningún punto. Diremos que conserva o invierte la orientación según que dicha derivada sea siempre positiva o siempre negativa, respectivamente. Entonces $\psi(s) = \phi(t(s))$ es también un arco diferenciable o diferenciable a trozos (según lo sea ϕ). Se dice que ψ es una *reparametrización* de ϕ .

El *arco opuesto* a ϕ se define como la reparametrización $-\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $(-\phi)(t) = \phi(a + b - t)$.

Si $\psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ es otro arco diferenciable a trozos tal que $\phi(b) = \psi(c)$, se define la *concatenación* $\phi \cup \psi : [a, b + d - c] \rightarrow \mathbb{C}$ como el arco diferenciable a trozos dado por

$$(\phi \cup \psi)(t) = \begin{cases} \phi(t) & \text{si } a \leq t \leq b, \\ \psi(c - b + t) & \text{si } b \leq t \leq b + d - c. \end{cases}$$

El siguiente resultado elemental es útil a menudo para calcular derivadas de arcos:

Teorema 1.19 *Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en el abierto Ω y sea $\phi : [a, b] \rightarrow \Omega$ un arco diferenciable. Entonces $\psi = \phi \circ f$ es también un arco diferenciable, y su derivada vale $\psi'(t) = f'(\phi(t))\phi'(t)$.*

DEMOSTRACIÓN: Es claro que ψ es de clase C^1 , y la regla de la cadena implica que

$$\psi'(t) = df(\phi(t))(\phi'(t)) = f'(\phi(t))\phi'(t). \quad \blacksquare$$

Pasamos ya a definir la integral curvilínea compleja:

Definición 1.20 *Sea $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un arco diferenciable y $f : \phi^* \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Definimos la *integral curvilínea* de f a lo largo de ϕ como*

$$\int_{\phi} f(z) dz = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t) dt.$$

Esta integral es la misma definida en [IC 7.5], pero ahora podemos considerar, un poco más en general, el caso en que ϕ es diferenciable a trozos, y entonces la integral se define como la suma de las integrales en los trozos.

Ejemplo Si $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, se cumple que

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i.$$

En efecto, hay que entender que se trata de la integral curvilínea sobre el arco $\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ dado por $\phi(t) = z_0 + re^{it}$ que parametriza la circunferencia C de centro z_0 y radio r , orientada en el sentido usual.

El teorema 1.19, aplicado a la función holomorfa $f(z) = z_0 + re^{iz}$ y al arco $t \mapsto t$ nos da que $\phi'(t) = f'(t) \cdot 1 = ire^{it}$. Por lo tanto:

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z-z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = 2\pi i. \quad \blacksquare$$

Los resultados del teorema siguiente valen para arcos diferenciables o diferenciables a trozos. La prueba en el segundo caso se reduce a aplicar el primero a cada trozo. En lo sucesivo, sobrentenderemos que todos los arcos considerados son diferenciables a trozos.

Teorema 1.21 *La integral curvilínea cumple las propiedades siguientes:*

1. Sea ϕ un arco, sean $f, g : \phi^* \rightarrow \mathbb{C}$ continuas y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\int_{\phi} (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_{\phi} f(z) dz + \beta \int_{\phi} g(z) dz.$$

2. Si ϕ es una reparametrización (orientada) de ψ y $f : \phi^* \rightarrow \mathbb{C}$ es continua, entonces

$$\int_{\phi} f(z) dz = \int_{\psi} f(z) dz.$$

3. Si ϕ es un arco y $f : \phi^* \rightarrow \mathbb{C}$ es continua, entonces

$$\int_{-\phi} f(z) dz = - \int_{\phi} f(z) dz.$$

4. Si ϕ y ψ son arcos tales que existe $\phi \cup \psi$ y $f : (\phi^* \cup \psi^*) \rightarrow \mathbb{C}$ es continua, entonces

$$\int_{\phi \cup \psi} f(z) dz = \int_{\phi} f(z) dz + \int_{\psi} f(z) dz.$$

5. Si ϕ es un arco y $f : \phi^* \rightarrow \mathbb{C}$ es continua, entonces

$$\left| \int_{\phi} f(z) dz \right| \leq L(\phi) \sup\{|f(z)| \mid z \in \phi^*\},$$

donde $L(\phi)$ representa la longitud de ϕ .

DEMOSTRACIÓN: 1) se sigue inmediatamente de la definición.

2) Sean $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $\psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$. Sea $\rho : [a, b] \rightarrow [c, d]$ creciente biyectiva, derivable y con derivada continua tal que $\phi = \rho \circ \psi$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\psi} f(z) dz &= \int_c^d f(\psi(s)) \psi'(s) ds = \int_a^b f(\psi(\rho(t))) \psi'(\rho(t)) \rho'(t) dt \\ &= \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \int_{\phi} f(z) dz. \end{aligned}$$

3) Sea $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\phi} f(z) dz &= \int_{-b}^{-a} f((-\phi)(t))(-\phi'(t)) dt = \int_{-b}^{-a} f(\phi(-t))(-\phi'(-t)) dt \\ &= \int_b^a f(\phi(s))\phi'(s) ds = - \int_a^b f(\phi(s))\phi'(s) ds = - \int_{\phi} f(z) dz. \end{aligned}$$

4) se demuestra de forma similar.

5) Sea $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Sea $S = \sup\{|f(z)| \mid z \in \phi^*\}$. Entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_{\phi} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\phi(s))\phi'(s) ds \right| \leq \int_a^b |f(\phi(s))| |\phi'(s)| ds \\ &\leq S \int_a^b |\phi'(s)| ds = L(\phi) S. \end{aligned}$$

■

He aquí la versión compleja de la regla de Barrow:

Teorema 1.22 Sea $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un arco, Ω un abierto en \mathbb{C} tal que $\phi^* \subset \Omega$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Entonces

$$\int_{\phi} f'(z) dz = f(\phi(b)) - f(\phi(a)).$$

En particular, si ϕ es un arco cerrado se cumple

$$\int_{\phi} f'(z) dz = 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que el arco ϕ es diferenciable, pues si es diferenciable a trozos basta aplicar este caso a cada trozo. El teorema 1.19 implica que $\phi \circ f$ es otro arco diferenciable y $(\phi \circ f)'(t) = f'(\phi(t))\phi'(t)$. Por lo tanto:

$$\int_{\phi} f'(z) dz = \int_a^b f'(\phi(t))\phi'(t) dt = \int_a^b (\phi \circ f)'(t) dt = f(\phi(b)) - f(\phi(a)),$$

donde hemos aplicado en cada componente la regla de Barrow para integrales de funciones reales. ■

Nota Una consecuencia interesante del teorema anterior es que hay funciones holomorfas que no tienen primitiva, como por ejemplo, la función $f(z) = 1/z$, que no tiene primitiva en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ni en ningún abierto que contenga una circunferencia de centro 0, pues según el ejemplo tras la definición 1.20 tenemos que

$$\int_{|z|=r} \frac{1}{z} dz = 2\pi i,$$

mientras que si $1/z$ tuviera primitiva la integral sería nula.

El teorema 1.15 nos da ahora una prueba alternativa de que no puede existir una rama uniforme del logaritmo en ningún abierto que contenga a la circunferencia, pues sería una primitiva de $1/z$. ■

Terminamos esta sección demostrando el resultado fundamental del que deduciremos las propiedades más notables de las funciones holomorfas (compárese con [IC 7.10]):

Teorema 1.23 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto, sea $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un arco diferenciable a trozos y $f : \Omega \times \phi^* \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua tal que, para cada j , exista la derivada*

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} : \Omega \times \phi^* \rightarrow \mathbb{C}$$

y sea continua. Sea $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ la función dada por $F(z) = \int_{\phi} f(z, \zeta) d\zeta$. Entonces $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, y sus derivadas vienen dadas por

$$\frac{\partial F}{\partial z_j} = \int_{\phi} \frac{\partial f}{\partial z_j}(z, \zeta) d\zeta.$$

DEMOSTRACIÓN: Descomponiendo f en suma de un número finito de funciones, podemos suponer que ϕ es diferenciable. Entonces

$$F(z) = \int_a^b f(z, \phi(t)) \phi'(t) dt.$$

Vamos a aplicar el teorema [An 5.27], para lo cual hemos de separar las partes real e imaginaria:

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_a^b \operatorname{Re} f(z, \phi(t)) \operatorname{Re} \phi'(t) dt - \int_a^b \operatorname{Im} f(z, \phi(t)) \operatorname{Im} \phi'(t) dt \\ &+ i \int_a^b \operatorname{Re} f(z, \phi(t)) \operatorname{Im} \phi'(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(z, \phi(t)) \operatorname{Re} \phi'(t) dt. \end{aligned}$$

Las cuatro integrales están en las condiciones de [An 5.27], luego concluimos que F es continua y tiene derivadas parciales continuas. Concretamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{Re} F}{\partial x_j} &= \int_a^b \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x_j}(z, \phi(t)) \operatorname{Re} \phi'(t) dt - \int_a^b \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x_j}(z, \phi(t)) \operatorname{Im} \phi'(t) dt, \\ \frac{\partial \operatorname{Im} F}{\partial x_j} &= \int_a^b \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x_j}(z, \phi(t)) \operatorname{Im} \phi'(t) dt + \int_a^b \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x_j}(z, \phi(t)) \operatorname{Re} \phi'(t) dt, \\ \frac{\partial \operatorname{Re} F}{\partial y_j} &= \int_a^b \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y_j}(z, \phi(t)) \operatorname{Re} \phi'(t) dt - \int_a^b \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y_j}(z, \phi(t)) \operatorname{Im} \phi'(t) dt, \\ \frac{\partial \operatorname{Im} F}{\partial y_j} &= \int_a^b \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y_j}(z, \phi(t)) \operatorname{Im} \phi'(t) dt + \int_a^b \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y_j}(z, \phi(t)) \operatorname{Re} \phi'(t) dt. \end{aligned}$$

Ahora bien, la función que resulta de fijar todas las coordenadas de f salvo z_j es derivable, luego f cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann respecto de las variables x_j, y_j , de donde se sigue que F también las satisface. Además,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z_j} &= \frac{\partial \operatorname{Re} F}{\partial x_j} + i \frac{\partial \operatorname{Im} F}{\partial x_j} \\ &= \int_a^b \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x_j}(z, \phi(t)) \operatorname{Re} \phi'(t) dt - \int_a^b \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x_j}(z, \phi(t)) \operatorname{Im} \phi'(t) dt \\ &\quad + i \int_a^b \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x_j}(z, \phi(t)) \operatorname{Im} \phi'(t) dt + i \int_a^b \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x_j}(z, \phi(t)) \operatorname{Re} \phi'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z_j}(z, \phi(t)) \phi'(t) dt = \int_\phi \frac{\partial f}{\partial z_j}(z, \zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

En ocasiones tendremos que considerar funciones definidas por integrales de funciones holomorfas sobre curvas de dominio no compacto. En tal caso el teorema anterior requiere una hipótesis adicional que garantice que la función es integrable. En la prueba necesitamos el teorema de Weierstrass 1.39. Podríamos haber pospuesto el teorema siguiente hasta entonces, pero lo incluimos aquí porque es una consecuencia directa del teorema anterior:

Teorema 1.24 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto, sea $\phi : I \rightarrow \mathbb{C}$ una curva diferenciable sobre un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y $f : \Omega \times \phi^* \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua tal que, para cada j , exista la derivada*

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} : \Omega \times \phi^* \rightarrow \mathbb{C}$$

y sea continua. Supongamos además que, para cada compacto $K \subset \Omega$, existe una función $g_K : I \rightarrow [0, +\infty[$ tal que, para todo $z \in K$ y todo $t \in I$, se cumple

$$|f(z, \phi(t))\phi'(t)| \leq g_K(t).$$

Entonces la función $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $F(z) = \int_\phi f(z, \zeta) d\zeta$ es holomorfa en Ω .

DEMOSTRACIÓN: Por definición

$$F(z) = \int_\phi f(z, \zeta) d\zeta = \int_I f(z, \phi(t))\phi'(t) dt,$$

ahora bien, para que esto sea correcto necesitamos que la función $f(z, \phi(t))\phi'(t)$ sea integrable en I , lo cual equivale a que lo sean su parte real y su parte imaginaria. A su vez, esto equivale a que sus valores absolutos tengan integral finita [An 4.54], para lo cual basta con que $|f(z, \phi(t))\phi'(t)|$ tenga integral finita, lo cual se cumple porque lo cumple g_K (con $K = \{z\}$). Así pues, F está bien definida.

Es claro que podemos expresar $I = \bigcup_n I_n$ como unión creciente de intervalos compactos. Llamamos $\phi_n = \phi|_{I_n}$. Por el teorema anterior, las funciones

$$F_n(z) = \int_{\phi_n} f(z, \zeta) d\zeta$$

son holomorfas y pueden derivarse derivando el integrando. Ahora vamos a probar que la sucesión $\{F_n\}$ converge casi uniformemente a F (definición [An 10.3]), con lo que el teorema de Weierstrass 1.39 nos asegurará que F es holomorfa.

En efecto, si $K \subset \Omega$ es compacto, para $z \in K$, tenemos que

$$\begin{aligned} |F(z) - F_n(z)| &= \left| \int_{\phi} f(z, \zeta) d\zeta - \int_{\phi_n} f(z, \zeta) d\zeta \right| = \left| \int_{I \setminus I_n} f(z, \phi(t)) \phi'(t) dt \right| \\ &= \left| \int_{I \setminus I_n} f(z, \phi(t)) \phi'(t) dt \right| \leq \int_{I \setminus I_n} g_K(t) dt = \int_I g_K(t) dt - \int_{I_n} g_K(t) dt, \end{aligned}$$

y la última expresión tiende a 0 cuando n tiende a ∞ , lo que prueba la convergencia uniforme en K . ■

1.3 El teorema y la fórmula integral de Cauchy

Finalmente vamos a generalizar el teorema [IC 7.16], según el cual toda función holomorfa (de una variable) es infinitamente derivable:

Teorema 1.25 *Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función definida en un abierto de \mathbb{C}^n , las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. f es continua y tiene derivadas parciales en Ω .
2. f es holomorfa en Ω .
3. f es infinitamente derivable en Ω en sentido complejo.

DEMOSTRACIÓN: 1) \Rightarrow 2) Supongamos que f es continua y tiene derivadas parciales en Ω y veamos que éstas también son continuas. Fijado un punto $a \in \Omega$, tomamos $r > 0$ tal que

$$U = D(a_1, r) \times \cdots \times D(a_n, r) \subset \bar{U} \subset \Omega.$$

La existencia de la derivada parcial respecto de z_j equivale a que la función que resulta de fijar todas las variables de f menos z_j es derivable, luego es holomorfa y por [IC 7.16] podemos expresarla en términos de la fórmula de Cauchy:

$$f(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_j - a_j| = r} \frac{f(z_1, \dots, \zeta_j, \dots, z_n)}{\zeta_j - z_j} d\zeta_j.$$

Sea ϕ una parametrización de la circunferencia. El integrando cumple las condiciones del teorema 1.23: si ϕ es una parametrización de la circunferencia, el integrando es una función continua en $U \times \phi^*$ y su derivada respecto de z_j es continua, en $U \times \phi^*$, pues se trata de la función

$$\frac{f(z_1, \dots, \zeta_j, \dots, z_n)}{(\zeta_j - z_j)^2}$$

(la clave es que para derivar el integrando no hay que derivar f). Por consiguiente, podemos concluir que $\partial f / \partial z_j$ es continua en U .

Así pues, f es de clase C^1 , luego es diferenciable como función de variables reales, y el hecho de que la función que resulta de fijar todas las variables menos z_j sea derivable se traduce en que f cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann para las variables x_j, y_j , luego es holomorfa.

2) \Rightarrow 3) Si f es holomorfa, en particular cumple las hipótesis de 1), y hemos probado que no sólo es holomorfa, sino que sus derivadas parciales son continuas. La fórmula de Cauchy nos da también la expresión

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_j - a_j| = r} \frac{f(z_1, \dots, \zeta_j, \dots, z_n)}{(\zeta_j - z_j)^2} d\zeta_j$$

para las derivadas parciales de f , y hemos probado que el integrando tiene derivadas parciales continuas (en $U \times \phi^*$) respecto de todas las variables z_k , luego podemos aplicar de nuevo 1.23 para concluir que $\partial f / \partial z_j$ es una función holomorfa en U , luego en Ω .

Así pues, las derivadas parciales de una función holomorfa son a su vez holomorfas, y esto implica que las funciones holomorfas son infinitamente derivables.

3) \Rightarrow 1) Si f es infinitamente derivable, es de clase C^∞ como función de variables reales, luego es diferenciable, luego es continua. ■

En el caso de una variable, toda función derivable es continua, por lo que en la propiedad 1) la hipótesis de continuidad puede eliminarse. Aunque no es trivial, lo mismo es cierto en el caso general.

Nota Si hubiéramos definido las funciones holomorfas en un abierto como las funciones de clase C^∞ en el sentido real que son diferenciables en el sentido complejo, aunque es una definición más exigente en apariencia, en realidad es equivalente a la que hemos adoptado. Esto es interesante porque en la práctica no supone ningún inconveniente exigir que las funciones holomorfas sean de clase C^∞ por definición, y ello nos evita la prueba dada en [IC] de que las funciones holomorfas de una variable son infinitamente derivables, que hemos usado en la prueba del teorema 1.25, y nos da una prueba de las fórmulas integrales de Cauchy conceptualmente más simple, basada en el teorema de Stokes. Así, lo sucesivo el lector puede elegir entre considerar que las funciones holomorfas son de clase C^∞ por definición (en cuyo caso no será necesario el teorema anterior ni su apelación a [IC 7.16]) o bien mantener la definición que hemos dado sin esta condición y usar que las funciones holomorfas son de clase C^∞ en virtud del teorema anterior. ■

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto no vacío, en la sección 3.2 de [GD] definimos el espacio $\Lambda^1(\Omega)$ de las 1-formas diferenciales $\omega = f dx + g dy$ en Ω , donde las funciones coordenadas $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son de clase C^∞ . Identificando los planos tangentes de Ω con \mathbb{R}^2 , cada $\omega \in \Lambda^1(\Omega)$ puede verse como una aplicación que a cada $\zeta \in \Omega$ le asigna una aplicación \mathbb{R} -lineal $\omega|_\zeta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, a saber, la dada por

$$\omega|_\zeta(h) = f(\zeta)h_1 + g(\zeta)h_2.$$

Por otra parte consideramos el espacio $\Lambda^2(\Omega)$ constituido por las 2-formas diferenciales $\omega = f dx \wedge dy$. La diferencial exterior $d : \Lambda^1(\Omega) \rightarrow \Lambda^2(\Omega)$ viene dada por

$$d(f dx + g dy) = df \wedge dx + dg \wedge dy = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

Ahora consideramos el espacio $\Lambda^1_1(\Omega) \times \Lambda^1_1(\Omega)$, cuyos elementos

$$\omega = (\omega_1, \omega_2) = (f_1 dx + g_1 dy, f_2 dx + g_2 dy)$$

pueden verse como aplicaciones que a cada $\zeta \in \Omega$ le asignan la aplicación \mathbb{R} -lineal $\omega|_\zeta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\omega|_\zeta(h) = (f_1(\zeta)h_1 + g_1(\zeta)h_2, f_2(\zeta)h_1 + g_2(\zeta)h_2).$$

Pero también podemos considerar que $\omega|_\zeta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, y entonces $\Lambda^1_1(\Omega) \times \Lambda^1_1(\Omega)$ adquiere una estructura natural de módulo sobre el anillo $C^1(\Omega, \mathbb{C})$ formado por las funciones $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ de clase C^1 , a saber, la dada por

$$(f\omega)|_\zeta(h) = f(\zeta)\omega|_\zeta(h).$$

En particular, identificando a \mathbb{C} con las funciones constantes de $C^1(\Omega, \mathbb{C})$, tenemos una estructura de \mathbb{C} -espacio vectorial. Si identificamos $\Lambda^1_1(\Omega)$ con $\Lambda^1_1(\Omega) \times 0$, toda 1-forma se escribe de forma única como

$$\omega = \omega_1 + i\omega_2 = f_1 dx + g_1 dy + i(f_2 dx + g_2 dy),$$

para ciertas coordenadas $f_1, g_1, f_2, g_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Podemos definir la diferencial exterior

$$d : \Lambda^1_1(\Omega) \times \Lambda^1_1(\Omega) \rightarrow \Lambda^2(\Omega) \times \Lambda^2(\Omega)$$

mediante $d(\omega_1, \omega_2) = (d\omega_1, d\omega_2)$.

Definimos ahora $\Lambda^1_1(\Omega, \mathbb{C})$ como el subespacio de $\Lambda^1_1(\Omega) \times \Lambda^1_1(\Omega)$ constituido por las formas ω tales que, para todo $\zeta \in \Omega$, la aplicación $\omega|_\zeta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sea \mathbb{C} -lineal. Esto significa que existe $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\omega|_\zeta(h) = f(\zeta)h.$$

Equivalentemente,

$$\omega = \operatorname{Re} f \, dx - \operatorname{Im} f \, dy + i(\operatorname{Im} f \, dx + \operatorname{Re} f \, dy),$$

por lo que f determina un elemento de $\Lambda_1^1(\Omega, \mathbb{C})$ si y sólo si es de clase C^∞ . Más aún, si llamamos $dz = dx + i \, dy$ (la forma que a cada punto de Ω le asigna la identidad en \mathbb{C}), lo que tenemos es que los elementos de $\Lambda_1^1(\Omega, \mathbb{C})$ se expresan de forma única como

$$\omega = f \, dz,$$

para cierta $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ de clase C^1 .

Finalmente definimos el espacio $\Lambda_h^1(\Omega)$ de las *formas diferenciales holomorfas* en Ω como el subespacio de $\Lambda^1(\Omega, \mathbb{C})$ constituido por las formas $f \, dz$, donde $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Tenemos entonces la aplicación lineal

$$d : \mathcal{H}(\Omega) \rightarrow \Lambda_h^1(\Omega).$$

Todas las propiedades que distinguen el cálculo diferencial complejo del real dependen en última instancia de un hecho elemental, y es que las formas diferenciales holomorfas son cerradas (tienen diferencial nula). La comprobación se reduce a aplicar las definiciones:

Si $\omega = f \, dz \in \Lambda^1(\Omega, \mathbb{C})$, vista como elemento de $\Lambda_1^1(\Omega) \times \Lambda_1^1(\Omega)$ es

$$\omega = (\operatorname{Re} f \, dx - \operatorname{Im} f \, dy, \operatorname{Im} f \, dx + \operatorname{Re} f \, dy),$$

luego

$$d(f \, dz) = \left(\left(-\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x} - \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y} \right) dx \wedge dy, \left(\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} - \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y} \right) dx \wedge dy \right).$$

Por consiguiente, tal y como habíamos afirmado, si f es holomorfa, las ecuaciones de Cauchy-Riemann implican³ que $d(f \, dz) = 0$.

La potencia de este hecho elemental radica en que abre la puerta a la aplicación de dos potentes resultados del cálculo diferencial: el teorema de Stokes y el lema de Poincaré. De momento nos centramos en el primero, para lo cual conviene definir la integral de una forma diferencial compleja:

Definición 1.26 Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto, $C \subset \Omega$ es una 1-variedad orientada, $A \subset C$ es un subconjunto medible y $\omega = \operatorname{Re} \omega + i \operatorname{Im} \omega \in \Lambda_1^1(\Omega) \times \Lambda_1^1(\Omega)$, definimos

$$\int_A \omega = \int_A \operatorname{Re} \omega + i \int_A \operatorname{Im} \omega.$$

La aplicación del teorema de Stokes es obvia:

³De hecho es una equivalencia: una forma $\omega \in \Lambda_1^1(\Omega, \mathbb{C})$ es holomorfa si y sólo si $d\omega = 0$.

Teorema 1.27 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{C}$ cuya clausura $\bar{\Omega}$ sea una variedad diferencial con frontera. Si f es una función holomorfa definida en un abierto que contenga a $\bar{\Omega}$, entonces

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Si llamamos $\omega = f(z) dz$, sabemos que $d\omega = 0$, lo que por definición significa que $d \operatorname{Re} \omega = d \operatorname{Im} \omega = 0$, y el teorema de Stokes nos da entonces que

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\partial\Omega} \operatorname{Re} \omega + i \int_{\partial\Omega} \operatorname{Im} \omega = \int_{\Omega} d \operatorname{Re} \omega + i \int_{\Omega} d \operatorname{Im} \omega = 0. \quad \blacksquare$$

Para sacarle partido a este resultado conviene relacionar la integral de formas diferenciales holomorfas en 1-variedades con la integral curvilínea definida en la sección precedente:

Consideremos un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, sea $C \subset \Omega$ una 1-variedad orientada y $\phi : [a, b] \rightarrow C$ un arco diferenciable tal que $\phi|_{]a, b[} \rightarrow C$ sea la inversa de una carta orientada. Así, si $\omega = f dx + g dy \in \Lambda_1^1(\Omega)$, por definición, tenemos que

$$\int_{\phi^*} \omega = \int_a^b \phi^*(\omega) = \int_a^b f(\phi(t))\phi_1'(t) + g(\phi(t))\phi_2'(t) dt.$$

Si ahora tomamos $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\omega = f dz$, aplicando el desarrollo anterior a las partes real e imaginaria de ω , vemos que

$$\begin{aligned} \int_{\phi^*} f(z) dz &= \int_{\phi^*} \operatorname{Re} f(z) dx - \operatorname{Im} f(z) dy + i \int_{\phi^*} \operatorname{Im} f(z) dy + \operatorname{Re} f(z) dx \\ &= \int_a^b (\operatorname{Re} f(\phi(t)) \phi_1'(t) - \operatorname{Im} f(\phi(t)) \phi_2'(t)) dt \\ &+ i \int_a^b (\operatorname{Im} f(\phi(t)) \phi_2'(t) + \operatorname{Re} f(\phi(t)) \phi_1'(t)) dt \\ &= \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) dt = \int_{\phi} f(z) dz, \end{aligned}$$

donde la primera integral es la integral definida en 1.26 de la forma diferencial $f(z) dz$ sobre ϕ^* como subconjunto de la variedad C y la última es la integral curvilínea de f definida en la sección anterior.

Así pues, las integrales sobre fronteras $\partial\Omega$ que aparecen en el teorema anterior pueden reducirse a sumas de integrales curvilíneas sobre arcos que parametrizan $\partial\Omega$ (en el sentido de ser inversas de cartas orientadas) salvo quizá un conjunto nulo y sin solapamientos salvo en conjuntos nulos.

Ejemplo La integral

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i$$

que hemos calculado tras la definición 1.20 puede verse ahora como

$$\int_{\partial D(z_0, r)} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i,$$

considerando a la circunferencia como variedad con la orientación inducida por la orientación usual del disco.

El arco $\phi(t) = z_0 + re^{it}$, para $t \in [0, 2\pi]$, con el que hemos calculado la integral es sólo una de las muchas parametrizaciones posibles que podríamos haber empleado para ello. Lo único relevante es que $\phi|_{]0, 2\pi[}$ es una parametrización orientada que sólo deja por cubrir un punto (que es despreciable a efectos del cálculo de la integral, pues es un conjunto nulo). También podríamos calcular la integral curvilínea con $t \in [0, 4\pi]$, pero entonces el resultado sería $4\pi i$, y no se correspondería con la integral sobre $\partial D(z_0, r)$ porque ϕ ya no sería una parametrización (en el sentido de ser la inversa de una carta). ■

Con esto podemos dar una prueba alternativa de [IC 7.16]:

Teorema 1.28 (Fórmula integral de Cauchy) *Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ que contenga un disco cerrado $D(z_0, r)$, entonces, f es infinitamente derivable en $D(z_0, r)$ y, para todo natural $n \geq 0$, sus derivadas sucesivas vienen dadas por la expresión integral*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

DEMOSTRACIÓN: Veamos primero el caso $n = 0$ y $z = z_0$, es decir, vamos a probar que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta.$$

La clave está en probar que la integral no depende de r . En efecto, si tomamos dos radios $0 < r_1 < r_2$ tales que el disco cerrado que determinan esté contenido en Ω , consideramos el anillo $A = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2\}$, que es una variedad con frontera a la que podemos aplicar el teorema 1.27. Tenemos que ∂A son dos circunferencias, pero hay que tener en cuenta que la orientación que A induce en ∂A es la positiva en la exterior, pero la negativa en la interior, luego lo que tenemos es que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = 0.$$

Sea $\epsilon > 0$ y tomemos r suficientemente pequeño para que si $|\zeta - z_0| = r$ entonces $|f(\zeta) - f(z_0)| < \epsilon$. Teniendo en cuenta el ejemplo precedente:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - f(z_0) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2\pi r} L(\phi) = \epsilon. \end{aligned}$$

Como esto se cumple para todo ϵ , concluimos que se da la igualdad buscada.

Veamos ahora el caso $n = 0$ para z arbitrario, es decir, vamos a probar que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Dado z tal que $|z - z_0| < r$, tomemos un radio s tal que $\overline{D(z, s)} \subset D(z_0, r)$. Entonces el teorema 1.27, junto con la parte ya probada, implica que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = s} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z),$$

pues las dos circunferencias constituyen la frontera del abierto $D(z_0, r) \setminus \overline{D(z, s)}$.

Tenemos así una representación integral de f en $D(z_0, r)$, cuyo interés es que nos permite aplicar el teorema 1.23. Si llamamos $\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ al arco $\phi(t) = z_0 + re^{it}$, el integrando es una función continua $g : D(z_0, r) \times \phi^* \rightarrow \mathbb{C}$ para la que existe

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2},$$

que es una función continua en $D(z_0, r) \times \phi^*$, luego 1.23 afirma que f es derivable en $D(z_0, r)$ y que su derivada es

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Así tenemos la fórmula de Cauchy para $n = 1$, y el integrando vuelve a cumplir las hipótesis del teorema 1.23. Trivialmente se razona por inducción que la fórmula vale para todo n . ■

Ahora es fácil generalizar este teorema a funciones de varias variables. Empezamos por la derivabilidad infinita:

Teorema 1.29 *Las derivadas parciales de una función holomorfa son holomorfas. En particular, toda función holomorfa es infinitamente derivable.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω . Sea $a \in \Omega$ y tomemos $r > 0$ tal que

$$U = D(a_1, r) \times \cdots \times D(a_n, r) \subset \bar{U} \subset \Omega.$$

Para cada $z \in U$, la función que resulta de fijar en f todas las coordenadas menos z_j es holomorfa en $D(a_j, r)$, luego le podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy, según la cual

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_j - a_j| = r} \frac{f(z_1, \dots, \zeta_j, \dots, z_n)}{(\zeta_j - z_j)^2} d\zeta_j.$$

Pero, llamando ϕ a una parametrización de la circunferencia, el integrando es una función continua $U \times \phi^* \rightarrow \mathbb{C}$ que tiene derivadas parciales respecto de z_1, \dots, z_n continuas en $U \times \phi^*$, luego el teorema 1.23 nos da que $\partial f / \partial z_j$ tiene derivadas parciales continuas en U .

Esto significa que es de clase C^1 , luego es diferenciable como función de variables reales y la existencia de la derivada respecto de z_k equivale a que $\partial f / \partial z_j$ verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann para las variables x_k, y_k , luego de hecho las verifica para todas las variables y es, por consiguiente, holomorfa. ■

Ahora es fácil dar una expresión integral para funciones de varias variables:

Teorema 1.30 *Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en un abierto de \mathbb{C}^n , sea $a \in \Omega$ y sean $r_1, \dots, r_n > 0$ tales que*

$$U = D(a_1, r_1) \times \dots \times D(a_n, r_n) \subset \bar{U} \subset \Omega.$$

Entonces, para todo $z \in U$ y todos los índices $j_1 + \dots + j_n = m$, se cumple que⁴

$$\frac{\partial f^m}{\partial z_1^{j_1} \dots \partial z_n^{j_n}} = \frac{j_1! \dots j_n!}{(2\pi i)^n} \int_{|\zeta_1 - a_1| = r_1, \dots, |\zeta_n - a_n| = r_n} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1)^{j_1+1} \dots (\zeta_n - z_n)^{j_n+1}} d\zeta_1 \dots d\zeta_n.$$

DEMOSTRACIÓN: Basta aplicar reiteradamente el caso de una variable. Concretamente, aplicándolo a la función $z_1 \mapsto f(z_1, \dots, z_n)$ obtenemos que

$$\frac{\partial f^{j_1}}{\partial z_1^{j_1}} = \frac{j_1!}{2\pi i} \int_{|\zeta_1 - a_1| = r_1} \frac{f(\zeta_1, z_2, \dots, z_n)}{(\zeta_1 - z_1)^{j_1+1}} d\zeta_1.$$

El teorema 1.23 nos da que

$$\frac{\partial f^{j_1+j_2}}{\partial z_1^{j_1} \partial z_2^{j_2}} = \frac{j_1!}{2\pi i} \int_{|\zeta_1 - a_1| = r_1} \frac{1}{(\zeta_1 - z_1)^{j_1+1}} \frac{\partial f(\zeta_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial z_2^{j_2}} d\zeta_1.$$

Ahora aplicamos la fórmula de Cauchy a la función $z_1 \mapsto f(\zeta_1, z_2, \dots, z_n)$, lo que nos da que

$$\frac{\partial f^{j_1+j_2}}{\partial z_1^{j_1} \partial z_2^{j_2}} = \frac{j_1! j_2!}{(2\pi i)^2} \int_{|\zeta_1 - a_1| = r_1} \int_{|\zeta_2 - a_2| = r_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, z_3, \dots, z_n)}{(\zeta_1 - z_1)^{j_1+1} (\zeta_2 - z_2)^{j_2+1}} d\zeta_2 d\zeta_1.$$

Siguiendo de este modo obtenemos n integrales iteradas, que pueden reunirse en una misma integral por el teorema de Fubini (aplicado a las partes real e imaginaria de la integral). ■

En particular podemos acotar como sigue las derivadas parciales de una función holomorfa:

Teorema 1.31 (Desigualdades de Cauchy) *En las condiciones del teorema anterior, si llamamos $r = (r_1, \dots, r_n)$ y*

$$M(r) = \sup\{|f(z)| \mid \zeta \in \partial D(a_1, r_1) \times \dots \times \partial D(a_n, r_n)\},$$

⁴Usamos para las derivadas sucesivas complejas la notación análoga a del caso real.

entonces

$$\left| \frac{\partial f^m}{\partial z_1^{j_1} \cdots \partial z_n^{j_n}} \right|_a \leq \frac{j_1! \cdots j_n!}{r_1^{j_1} \cdots r_n^{j_n}} M(r).$$

DEMOSTRACIÓN: Si expresamos la integral del teorema anterior como n integrales iteradas sobre circunferencias y aplicamos el último apartado de 1.21 resulta que

$$\left| \frac{\partial f^m}{\partial z_1^{j_1} \cdots \partial z_n^{j_n}} \right|_a \leq \frac{j_1! \cdots j_n!}{(2\pi)^n} (2\pi)^n r_1 \cdots r_n \frac{M(r)}{r_1^{j_1+1} \cdots r_n^{j_n+1}} = \frac{j_1! \cdots j_n!}{r_1^{j_1} \cdots r_n^{j_n}} M(r). \quad \blacksquare$$

En particular:

Teorema 1.32 Si $f : D(a_1, r_1) \times \cdots \times D(a_n, r_n) \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa acotada por M , entonces

$$\left| \frac{\partial f^m}{\partial z_1^{j_1} \cdots \partial z_n^{j_n}} \right|_a \leq \frac{j_1! \cdots j_n!}{r_1^{j_1} \cdots r_n^{j_n}} M.$$

(Basta aplicar el teorema anterior a un producto $D(a_1, r'_1) \times \cdots \times D(a_n, r'_n)$, con $0 < r'_j < r_j$ y hacer que r'_j tienda a r_j .)

Como consecuencia:

Teorema 1.33 (Liouville) Toda función holomorfa y acotada $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es constante.

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior aplicado a cualquier $a \in \mathbb{C}$ y haciendo tender los radios a infinito concluimos que todas las derivadas parciales de f son nulas, luego f es constante. \blacksquare

Pasamos ahora a la segunda consecuencia fundamental del hecho de que las formas diferenciales holomorfas sean cerradas. Para ello consideramos los grupos de cohomología de De Rham definidos en [GD 5.39]:

Teorema 1.34 Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto tal que $H^1(\Omega) = 0$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g' = f$.

DEMOSTRACIÓN: Hemos visto que, viendo a $f dz$ como elemento del producto $\Lambda^1(\Omega) \times \Lambda^1(\Omega)$ es

$$f dz = (\operatorname{Re} f dx - \operatorname{Im} f dy, \operatorname{Im} f dx + \operatorname{Re} f dy),$$

y que ambas componentes tienen diferencial exterior nula, luego por definición de $H^1(\Omega)$ existen funciones $g_1, g_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ tales que

$$dg_1 = \operatorname{Re} f dx - \operatorname{Im} f dy, \quad dg_2 = \operatorname{Re} f dy + \operatorname{Im} f dx.$$

Equivalentemente,

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = \operatorname{Re} f = \frac{\partial g_2}{\partial y}, \quad -\frac{\partial g_1}{\partial y} = \operatorname{Im} f = \frac{\partial g_2}{\partial x}.$$

Esto significa que la función $g = g_1 + ig_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann, luego es holomorfa, y además

$$g' = \frac{\partial g_1}{\partial x} + i \frac{\partial g_2}{\partial x} = f. \quad \blacksquare$$

El teorema anterior no es trivial gracias al lema de Poincaré [GD 5.44], según el cual los abiertos contractibles (por ejemplo, los discos abiertos) cumplen la hipótesis $H^1(\Omega) = 0$. Así pues, resulta que toda función holomorfa en un abierto de \mathbb{C} tiene una primitiva en un entorno de cada punto, aunque ya hemos visto que no la tiene necesariamente en todo su dominio. Combinando esto con la regla de Barrow compleja obtenemos otro resultado fundamental:

Teorema 1.35 (Teorema de Cauchy) *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto no vacío tal que $H^1(\Omega) = 0$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces para todo arco cerrado ϕ tal que $\phi^* \subset \Omega$ se cumple que*

$$\int_{\phi} f(z) dz = 0.$$

Ya hemos visto que la función $1/z$ no tiene integral nula sobre la circunferencia unitaria, lo que muestra que la hipótesis sobre la cohomología de Ω es necesaria.

Otra consecuencia de 1.34 es el teorema siguiente, que generaliza a [IC 7.29]:

Teorema 1.36 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto tal que $H^1(\Omega) = 0$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa que no se anule en ningún punto. Entonces existe una función holomorfa $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^{g(z)}$. Cualquier función que cumpla esto cumple además que $g' = f'/f$. Si Ω es conexo, la función g está determinada salvo suma de una constante $2k\pi i$, con $k \in \mathbb{Z}$.*

DEMOSTRACIÓN: Trabajando separadamente en cada componente conexa de Ω , no perdemos generalidad si suponemos que Ω es conexo.

Como f no se anula, la función f'/f es holomorfa en Ω , luego por 1.34 existe una función holomorfa $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $g' = f'/f$. Las reglas de derivación nos dan que $(fe^{-g})' = 0$, luego fe^{-g} es una constante $k \in \mathbb{C}$. Equivalentemente, para todo $z \in \Omega$ tenemos que $f(z) = ke^{g(z)}$. Obviamente $k \neq 0$, luego existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $k = e^{z_0}$, y así resulta que $f(z) = e^{g(z)+z_0}$. Cambiando $g(z)$ por $g(z) + z_0$ tenemos la función deseada. Derivando la igualdad $f(z) = e^{g(z)}$ obtenemos que $f'(z) = e^{g(z)}g'(z) = f(z)g'(z)$, luego $g' = f'/f$.

Si g_1, g_2 son logaritmos de f , entonces $e^{g_1(z)-g_2(z)} = 1$, para todo $z \in \Omega$, lo cual implica que $g_1 - g_2$ sólo toma valores que son múltiplos de $2\pi i$, pero la imagen de Ω tiene que ser conexa, luego tiene que ser constante. Así pues, existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $g_1(z) = g_2(z) + 2k\pi i$. \blacksquare

A menudo usaremos la notación $\log f$ para referirnos a una función en las condiciones del teorema anterior, que (si Ω es conexo) está unívocamente determinada por la imagen que toma en un punto cualquiera.

Nota En las condiciones del teorema podemos definir también funciones holomorfas $\sqrt[n]{f} = e^{(1/n)\log f}$, que tienen la propiedad de que

$$\left(\sqrt[n]{f(z)}\right)^n = f(z).$$

Una función f dada tiene exactamente n raíces n -simas (sobre un abierto conexo Ω tal que $H^1(\Omega) = 0$), pues si g_1 y g_2 son dos raíces n -simas de f en Ω , entonces

$$(g_1(z)/g_2(z))^n = 1,$$

luego g_1/g_2 es una función continua que toma valores en el conjunto de las n raíces n -simas de la unidad complejas, luego tiene que ser constante, de modo que existe una raíz de la unidad ω tal que $g_1(z) = \omega g_2(z)$, para todo $z \in \Omega$. ■

Veamos una consecuencia. Recordemos la definición [An 10.16] del orden $o(f, a)$ de un cero a de una función holomorfa f de una variable.

Teorema 1.37 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, sea $a \in \Omega$ y sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ una función no constante en un entorno de a . Llamemos $m = o(f - f(a), a) \geq 1$. Entonces existen $\delta, \epsilon > 0$ tales que todo punto $z \in D(f(a), \epsilon)$, $z \neq f(a)$ tiene exactamente m antiimágenes en $D(a, \delta)$, mientras que $f(a)$ tiene a a como única antiimagen en dicho disco.*

DEMOSTRACIÓN: Que f sea no constante en un entorno de a equivale a que $f - f(a)$ no sea idénticamente nula en un entorno de a , por lo que el orden m está bien definido. Supongamos en primer lugar que $m = 1$, lo cual equivale a que $f'(a) \neq 0$. Por el teorema 1.13 sabemos que existen abiertos U y V en \mathbb{C} tales que $a \in U$ y $f|_U : U \rightarrow V$ es biyectiva (y $f'(z)$ no se anula en U). El teorema de la función inversa 1.12 nos da que f^{-1} también es holomorfa.

En particular f es un homeomorfismo, luego podemos tomar $D(a, \delta) \subset U$ y $D(f(a), \epsilon) \subset f[D(a, \delta)]$ y así cada punto $z \in D(f(a), \epsilon)$ tiene exactamente una antiimagen en $D(a, \delta)$, que es lo que afirma el enunciado para $m = 1$.

Si $m > 1$, por [An 10.17] tenemos que $f(z) - f(a) = (z - a)^m g_0(z)$, para cierta función holomorfa tal que $g_0(a) \neq 0$. Por continuidad existe un $\delta > 0$ tal que g_0 no se anula en $D(a, \delta)$ y por la nota precedente existe $g_1 \in \mathcal{H}(D(a, \delta))$ tal que $g_0 = g_1^m$ (y en particular $g_1(a) \neq 0$), lo que nos permite expresar

$$f(z) = f(a) + ((z - a)g_1(z))^m = f(a) + h(z)^m,$$

donde $h(z) = (z - a)g_1(z)$ es una función holomorfa en $D(a, \delta)$. Además se cumple que $h'(a) = g_1(a) \neq 0$.

Por el caso $m = 1$ ya probado, reduciendo δ , podemos tomar $\eta > 0$ de modo que todo punto de $D(0, \eta)$ tiene exactamente una antiimagen por h en

$D(a, \delta)$. Tomamos $\epsilon = \eta^m$. Así, si $z \in D(f(a), \epsilon)$ cumple $z \neq f(a)$, entonces $w - f(a) \in D(0, \epsilon)$ es no nulo, luego las m raíces m -simas (distintas) de $w - f(a)$ están en $D(0, \eta)$, y cada una de ellas tiene una antiimagen $z \in D(a, \delta)$, y estas m antiimágenes son todas las antiimágenes de z por f en $D(a, \delta)$. También es claro que la única antiimagen de $f(a)$ en $D(a, \delta)$ es a . ■

Nota En el teorema anterior m es el menor natural $m \geq 1$ tal que $f^m(a) \neq 0$. Combinándolo con el teorema de inyectividad local concluimos que si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces f es localmente inyectiva si y sólo si f' no se anula en ningún punto. En particular, si f es inyectiva, satisface el teorema de la función inversa, luego $f[\Omega]$ es abierto y f es biholomorfa en su imagen. ■

De aquí se sigue a su vez una propiedad notable de las funciones holomorfas de varias variables:

Teorema 1.38 (Teorema de la aplicación abierta) *Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ es un abierto conexo no vacío, toda función holomorfa $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ no constante es abierta.*

DEMOSTRACIÓN: Si $n = 1$ el resultado es consecuencia inmediata del teorema anterior, si $U \subset \Omega$ es abierto y $z \in f[U]$, existe un $a \in U$ tal que $f(a) = z$, y aplicando el teorema anterior a $f|_U$ obtenemos un $\epsilon > 0$ tal que $D(f(a), \epsilon) \subset f[U]$, luego $f[U]$ es abierto.

En el caso general, dado $z \in f[U]$, tomamos $a \in U$ con $f(a) = z$ y consideramos un polidisco $D = D(a; r_1, \dots, r_n) \subset U$. Notemos que f no es constante en D , o lo sería en Ω por el principio de prolongación analítica. Por lo tanto, existen dos puntos distintos $w_1, w_2 \in D$ con $f(w_1) \neq f(w_2)$, luego al menos uno de los dos es distinto de $f(a)$. Sea, pues $w \in D$ tal que $f(w) \neq f(a)$ y sea

$$V = \{t \in \mathbb{C} \mid a + t(w - a) \in D\},$$

que, por continuidad, es un abierto en \mathbb{C} . Más aún, como los polidiscos son convexos, V contiene al intervalo $[0, 1]$, de donde se sigue que a y w están en la misma componente conexa V_0 de V . Sea $g : V_0 \rightarrow \mathbb{C}$ la función dada por $g(t) = f(a + t(w - a))$. Tenemos que $g(0) \neq g(1)$, luego es una función holomorfa no constante. Por el caso $n = 1$ ya probado $g[V_0]$ es abierto en \mathbb{C} y $z = f(a) = g(0) \in g[V_0] \subset f[D] \subset f[U]$, luego $f[U]$ es abierto. ■

Nota Observemos que el teorema de la aplicación abierta análogo al teorema correspondiente del análisis real es el que afirma que si una aplicación holomorfa $f : \Omega \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ tiene determinante jacobiano no nulo en todo punto, entonces es localmente inyectiva por 1.13, luego es abierta por el teorema de la función inversa 1.12. (En principio, tenemos que f transforma en abiertos los entornos abiertos suficientemente pequeños de cada punto, pero esto equivale a que sea abierta.) Lo que acabamos de probar es que para $n = 1$ no es necesaria ninguna hipótesis sobre el determinante jacobiano, sino únicamente que la función no sea constante (si el dominio es conexo, pero claramente lo mismo vale para funciones definidas en dominios arbitrarios con tal de que no sean constantes en ninguna componente conexa).

Sin embargo, esto no es cierto para un n arbitrario, es decir, para aplicaciones $f : \Omega \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$. Por ejemplo, la aplicación $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ dada por $f(z_1, z_2) = (z_1, z_1 z_2)$ es holomorfa y no es abierta, pues su imagen es el conjunto $\{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid a \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$, que no es abierto.

También es claro que el resultado no es cierto para funciones analíticas reales. Por ejemplo, la imagen de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ es el cerrado $[0, +\infty[$. ■

Ahora generalizamos el teorema de Weierstrass [An 10.8] a funciones de varias variables:

Teorema 1.39 (Teorema de Weierstrass) *Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ es un abierto no vacío y $\{f_m\}_{m=0}^\infty$ es una sucesión en $\mathcal{H}(\Omega)$ que converge casi uniformemente a una función $f \in \mathcal{C}^\Omega$, entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, y cada sucesión $\{\partial f_m / \partial z_j\}_{m=0}^\infty$ converge casi uniformemente a $\partial f / \partial z_j$.*

DEMOSTRACIÓN: Según [An 10.5] sabemos que f es una función continua en Ω , por ser límite casi uniforme de funciones continuas, luego, por 1.25, para probar que f es holomorfa en un punto $\zeta \in \Omega$ basta ver que la función $f_j^*(z) = f(\zeta_1, \dots, \zeta_{j-1}, z, \zeta_{j+1}, \dots, \zeta_n)$ es holomorfa en un disco $D(\zeta_j, \epsilon) \subset \mathbb{C}$. Ahora bien, es fácil ver que las funciones correspondientes $(f_m)_j^*$ convergen casi uniformemente a f_j^* en dicho disco, luego no perdemos generalidad si suponemos que $n = 1$, en cuyo caso podemos basta aplicar [An 10.8].

Tomemos ahora $a \in \Omega$ y sea $R > 0$ tal que

$$\overline{D(a_1, 2R)} \times \cdots \times \overline{D(a_n, 2R)} \subset \Omega.$$

La fórmula de Cauchy 1.30 nos da que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z_j} &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\zeta_1 - a_1| = 2R, \dots, |\zeta_n - a_n| = 2R} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_j - z_j)^2} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n, \\ \frac{\partial f_m}{\partial z_j} &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\zeta_1 - a_1| = 2R, \dots, |\zeta_n - a_n| = 2R} \frac{f_m(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_j - z_j)^2} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n. \end{aligned}$$

La sucesión dada converge uniformemente en el compacto

$$K = \partial D(a_1, 2R) \times \cdots \times \partial D(a_n, 2R),$$

luego, dado $\epsilon > 0$, existe un n_0 tal que si $n \geq n_0$, entonces

$$|f(\zeta) - f_m(\zeta)| < \frac{\epsilon}{2^{n+1} R^{n-2}}$$

para todos los puntos de K . Por otro lado, para todo punto $\zeta \in K$ y todo $z \in D(a_1, R) \times \cdots \times D(a_n, R)$, se cumple que $|\zeta_j - z_j| \geq R$, luego

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f_m}{\partial z_j} - \frac{\partial f}{\partial z_j} \right| &= \left| \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\zeta_1 - a_1| = 2R, \dots, |\zeta_n - a_n| = 2R} \frac{f_m(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta_j - z_j)^2} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n \right| \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^n} (4\pi R)^n \frac{\epsilon}{2^{n+1} R^n} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \end{aligned}$$

Esto prueba que $\{\partial_{z_j} f_m\}_{m=0}^\infty$ converge uniformemente a $\partial_{z_j} f$ en el abierto $D(a_1, R) \times \cdots \times D(a_n, R)$. Como todo compacto en Ω puede cubrirse por un número finito de estos abiertos, concluimos que la sucesión de derivadas converge casi uniformemente en Ω . ■

El teorema siguiente caracteriza los subespacios compactos de $\mathcal{H}(\Omega)$ cuando consideramos en éste la topología de la convergencia casi uniforme:

Teorema 1.40 (Teorema de Montel) *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto no vacío. Un conjunto $A \subset \mathcal{H}(\Omega)$ es relativamente compacto (es decir, tiene clausura compacta) si y sólo si está uniformemente acotado en todo subconjunto compacto de Ω .*

DEMOSTRACIÓN: La acotación uniforme significa que para todo $K \subset \Omega$ compacto existe un $M > 0$ tal que toda $f \in A$ cumple que $f|_K$ está acotada por M (es decir, que $|f(z)| < M$ para todo $z \in K$).

Bajo esta hipótesis basta probar que toda sucesión $\{f_m\}_{m=0}^\infty$ en A tiene una subsucesión convergente en $\mathcal{H}(\Omega)$. En tal caso, lo mismo vale para \overline{A} , pues si $\{g_m\}_{m=0}^\infty$ es una sucesión en \overline{A} , podemos tomar $f_m \in A$ de manera que $d(f_m, g_m) < 1/(m+1)$. Entonces existe $f = \lim_m f_m \in \overline{A}$, y es claro entonces que también $\lim_m g_m = f$, luego \overline{A} es compacto.

Para cada $a \in \Omega$ tomamos un polidisco $D = D(a; 2R, \dots, 2R)$ cuya clausura esté contenida en Ω y consideramos $K = \overline{D}(a; R, \dots, R)$. Vamos a probar que $\{f_m|_K\}_{m=0}^\infty$ tiene una subsucesión uniformemente convergente. Por el teorema de Ascoli-Arzelà [An 3.61] basta probar que la sucesión es equicontinua.

La clave está en que la sucesión está acotada uniformemente en la clausura de D , y esto implica que todas las derivadas $\partial f_m / \partial z_i$ están acotadas uniformemente en K . En efecto, para cada $z \in K$ tenemos que $D(z; R, \dots, R) \subset D$, luego el teorema 1.32 nos da una misma cota para todas las derivadas respecto de una variable z_i , y tomamos la máxima de las n cotas. De aquí obtenemos claramente cotas uniformes para las derivadas de las funciones $\operatorname{Re} f_m, \operatorname{Im} f_m$.

Ahora, si $z, w \in K$, consideramos la función $g_m(t) = \operatorname{Re} f_m((1-t)z + tw)$, para $t \in [0, 1]$, a la que podemos aplicar el teorema del valor medio, según el cual

$$\operatorname{Re} f_m(w) - \operatorname{Re} f_m(z) = \nabla f_m(x)(w - z),$$

para cierto x en el segmento que une z y w (notemos que los polidiscos son convexos). Como las derivadas están uniformemente acotadas, de aquí obtenemos un $M_1 > 0$ tal que

$$|\operatorname{Re} f_m(w) - \operatorname{Re} f_m(z)| \leq M_1 |w - z|.$$

Igualmente obtenemos un M_2 que cumple lo mismo con las partes imaginarias, y a partir de ambos obtenemos un $M > 0$ tal que

$$|f_m(w) - f_m(z)| \leq M |w - z|.$$

Esto implica la equicontinuidad de la sucesión $\{f_m\}_{m=0}^\infty$.

Si $K \subset \Omega$ es un subconjunto compacto arbitrario, podemos cubrirlo por un número finito de clausuras de polidiscos K_1, \dots, K_l en las condiciones precedentes, luego, tomando una subsucesión $\{f_{m_1}\}_{m_1}$ convergente en K_1 , y de ésta una subsucesión $\{f_{m_1}\}_{m_1}$ convergente en K_2 , y así sucesivamente, llegamos a una subsucesión que converge uniformemente en cada K_j luego en K .

Finalmente, consideramos la sucesión de compactos compactos

$$K_m = \{z \in \Omega \mid |z| \leq m, d(z, \partial\Omega) \geq 1/m + 1\} \subset \Omega,$$

que claramente es creciente y tiene la propiedad de que todo subconjunto compacto de Ω está contenido en uno de ellos. Sea $\{f_{m_1, k}\}_{k=0}^\infty$ una subsucesión de la sucesión dada que converja uniformemente en K_1 a una función $f^1 \in C(K_1, \mathbb{C})$, a su vez, sea $\{f_{m_2, k}\}_{k=0}^\infty$ una subsucesión de ésta que converja uniformemente en K_2 a una función $f^2 \in C(K_2, \mathbb{C})$, que necesariamente extiende a f^1 , y así sucesivamente. Entonces, la sucesión $\{f_{m_k, k}\}$ es una subsucesión de todas las anteriores, luego converge uniformemente en todo K_m a f^m , y, por consiguiente, converge casi uniformemente en Ω a una función f , que estará en $\mathcal{H}(\Omega)$ por el teorema anterior.

El recíproco es fácil de probar: si A es relativamente compacto y $K \subset \Omega$ es compacto, los abiertos básicos $\{V(0, K, m)\}_{m=1}^\infty$ para la topología de la convergencia uniforme (definición [An 10.3]) cubren $\mathcal{H}(\Omega)$, luego podemos tomar un subcubrimiento finito que cubra a A . El máximo m que aparezca en el subcubrimiento es una cota uniforme de A en K . ■

Relación con las funciones armónicas En [An 5.49] definimos las funciones armónicas como las funciones de clase C^2 con laplaciano nulo, y en la sección [An 8.5] probamos que las funciones armónicas satisfacen varias propiedades, algunas de ellas similares a las de las funciones holomorfas. Ahora que sabemos que las funciones holomorfas son de clase C^∞ (en particular, de clase C^2) es inmediato el teorema siguiente:

Teorema 1.41 *Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ es abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa en Ω , entonces $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones armónicas.*

DEMOSTRACIÓN: Lo probamos en primer lugar para $n = 1$. Dado $z \in \Omega$, tomamos un disco $D(z, r) \subset \Omega$, donde, en virtud del teorema 1.34 tenemos que existe una función g holomorfa en el disco tal que $f = g'$. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann nos dan que

$$\operatorname{Re} f = \frac{\partial \operatorname{Re} g}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im} g}{\partial y}, \quad \operatorname{Im} f = \frac{\partial \operatorname{Im} g}{\partial x} = -\frac{\partial \operatorname{Re} g}{\partial y},$$

de donde

$$\begin{aligned} \Delta \operatorname{Re} g &= \frac{\partial^2 \operatorname{Re} g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \operatorname{Re} g}{\partial y^2} = \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} - \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y} = 0, \\ \Delta \operatorname{Im} g &= \frac{\partial^2 \operatorname{Im} g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \operatorname{Im} g}{\partial y^2} = \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x} + \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

luego $\operatorname{Re} g, \operatorname{Im} g$ son funciones armónicas (en $D(z, r)$, luego en todo Ω) y por [An 8.22] también lo son $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$.

En el caso general, las funciones que resultan de fijar en f todas las variables menos una son holomorfas, luego armónicas, luego

$$\frac{\partial^2 \operatorname{Re} f}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \operatorname{Re} f}{\partial y_j^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \operatorname{Im} f}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \operatorname{Im} f}{\partial y_j^2} = 0,$$

luego sumando para todo j resulta que $\Delta \operatorname{Re} f = \Delta \operatorname{Im} f = 0$. ■

Por ejemplo, ahora es inmediato que la versión del teorema de Liouville para funciones holomorfas se deduce de la versión [An 8.25] para funciones armónicas.

Los resultados básicos del cálculo diferencial complejo pueden generalizarse al contexto de la geometría diferencial, al igual que sucede con el cálculo diferencial real. En esta línea, el lector puede abordar ya, si lo desea, la sección A.1 del apéndice A, aunque tal vez prefiera esperar a haber asimilado el capítulo siguiente, pues entonces estará en condiciones de leer algunas secciones más del apéndice.

Capítulo II

Desarrollos en serie

En [IC 7.21] probamos que toda función holomorfa (de una variable) puede expresarse como suma de una serie de potencias en un entorno de cada punto en el que está definida. En muchos casos estos desarrollos convergen en todo el plano complejo, lo que permite tomar tales desarrollos como definiciones de las funciones elementales, como hicimos en [ITAn]:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \operatorname{cos} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

En otras ocasiones la convergencia se reduce a un disco cerrado, como en el caso del logaritmo o de la fórmula binomial:

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n, \quad (1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n,$$

convergentes para $|z| < 1$, donde (véase [IC 1.23])

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

En este capítulo generalizaremos este hecho al caso de funciones holomorfas de varias variables y veremos, de hecho, que las funciones holomorfas se caracterizan precisamente como las funciones desarrollables en serie de potencias en un entorno de cada punto de su dominio.

2.1 Series de potencias

Multi-índices Para tratar con series de potencias de varias variables conviene introducir algunos convenios que agilicen la notación:

- Un *multi-índice* α de dimensión n es un elemento de \mathbb{N}^n , es decir, una n -tupla de números naturales $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

- El *orden* de un multi-índice α es $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.
- El *factorial* de un multi-índice α se define como $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$.
- Si $x \in \mathbb{R}^n$, convenimos en que $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.
- Usamos los multi-índices para representar las derivadas parciales de una función f :

$$D_\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Anillos de series formales de potencias En [TA1 5.52] introdujimos los anillos de series formales de potencias en una indeterminada. Para estudiar las funciones definidas mediante series de potencias de varias variables es conveniente considerar series formales de potencias en varias indeterminadas:

Si A es un dominio íntegro, y $A[X_1, \dots, X_n]$ es el anillo de polinomios con n indeterminadas y coeficientes en A , para cada multi-índice α de longitud n representaremos

$$X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n},$$

que es un monomio puro (es decir, con coeficiente 1) de grado $|\alpha|$. Claramente, se cumple que $X^\alpha X^\beta = X^{\alpha+\beta}$, donde la suma de multi-índices se define componente a componente.

Todo polinomio $F \in A[X_1, \dots, X_n]$ se expresa de forma única como

$$F = \sum_{\alpha} a_{\alpha} X^{\alpha},$$

donde α recorre todos los multi-índices de longitud n y los coeficientes $a_{\alpha} \in A$ son todos nulos salvo a lo sumo una cantidad finita de ellos. Si

$$G = \sum_{\alpha} b_{\alpha} X^{\alpha}$$

es otro polinomio, la suma y el producto se expresan en la forma

$$F + G = \sum_{\alpha} (a_{\alpha} + b_{\alpha}) X^{\alpha}, \quad FG = \sum_{\gamma} \left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} a_{\alpha} b_{\beta} \right) X^{\gamma}.$$

Definición 2.1 Si A es un dominio íntegro, llamaremos anillo de las *series formales de potencias* con n indeterminadas X_1, \dots, X_n sobre A al conjunto $A[[X_1, \dots, X_n]]$ formado por todas las aplicaciones $a : \mathbb{N}^n \rightarrow A$. En la práctica, expresaremos a en la forma $\sum_{\alpha} a_{\alpha} X^{\alpha}$ o, más explícitamente,

$$\sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n=1}^{\infty} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} X^{\alpha_1} \cdots X^{\alpha_n},$$

pero hay que entender que este sumatorio es meramente formal, es decir, que, en principio, no hay realmente ninguna suma infinita, sino que una serie formal de potencias no es más que una asignación de un elemento $a_{\alpha} \in A$ a cada multi-índice α .

Es fácil ver que $A[[X_1, \dots, X_n]]$ adquiere estructura de anillo conmutativo y unitario con las operaciones dadas por

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha} a_{\alpha} X^{\alpha} + \sum_{\alpha} b_{\alpha} X^{\alpha} &= \sum_{\alpha} (a_{\alpha} + b_{\alpha}) X^{\alpha}, \\ (\sum_{\alpha} a_{\alpha} X^{\alpha}) (\sum_{\beta} b_{\beta} X^{\beta}) &= \sum_{\gamma} \left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} a_{\alpha} b_{\beta} \right) X^{\gamma}.\end{aligned}$$

Además, si identificamos cada polinomio de $F \in A[X_1, \dots, X_n]$ con la serie formal determinada por los coeficientes de sus monomios, es inmediato que $A[X_1, \dots, X_n]$ es un subanillo de $A[[X_1, \dots, X_n]]$.

Una *forma* es, o bien el polinomio nulo, o bien un polinomio no nulo cuyos monomios tienen todos grado m , y en tal caso se dice que es una forma de grado m .

Si $F \in A[[X_1, \dots, X_n]]$ y $m \in \mathbb{N}$, definimos

$$F_m = \sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha} X^{\alpha} \in A[X_1, \dots, X_n],$$

de modo que F_m es una forma de grado m o la forma nula, y F está completamente determinado por las formas F_m . Recíprocamente, toda sucesión $\{F_m\}_{m=0}^{\infty}$ donde $F_m \in A[X_1, \dots, X_n]$ es una forma de grado m o la forma nula determina una única serie formal de potencias cuyas formas asociadas son las de la sucesión, y que podemos representar por

$$F = \sum_m F_m,$$

donde, nuevamente, la suma es, en principio, una mera notación. Ahora, bien, con esta notación se cumple:

$$F + G = \sum_m (F_m + G_m), \quad FG = \sum_k \left(\sum_{m_1+m_2=k} F_{m_1} G_{m_2} \right),$$

donde ahora las operaciones entre formas son las del anillo $A[X_1, \dots, X_n]$.

En particular, si F y G son dos series formales de potencias no nulas, la forma no nula de menor grado de FG es el producto de las formas no nulas de menor grado de F y de G , lo que implica que $A[[X_1, \dots, X_n]]$ es un dominio íntegro.

Más aún, es claro que podemos identificar a $A[[X_1, \dots, X_{n-1}]]$ con un subanillo de $A[[X_1, \dots, X_n]]$, y es fácil definir un isomorfismo natural

$$A[[X_1, \dots, X_n]] \cong A[[X_1, \dots, X_{n-1}]][[X_n]].$$

Finalmente determinamos las unidades de los anillos de series formales de potencias:

Teorema 2.2 *Una serie formal de potencias $F \in A[[X_1, \dots, X_n]]$ es una unidad si y sólo si su término independiente F_0 es una unidad en A .*

DEMOSTRACIÓN: Si F es una unidad existe una serie G tal que $FG = 1$. De aquí se sigue que $F_0G_0 = 1$, luego F_0 es una unidad en A . Recíprocamente, si F_0 es una unidad podemos definir recursivamente formas G_0, G_1, \dots de modo que

$$F_0G_0 = 1, F_1G_0 + F_0G_1 = 0, F_2G_0 + F_1G_1 + F_0G_2 = 0, \dots$$

Es claro que cada G_m es una forma de grado m o la forma nula y que la serie G determinada por estas formas cumple $FG = 1$. ■

Convergencia de series de potencias En lo sucesivo \mathbb{K} representará indistintamente al cuerpo \mathbb{R} de los números reales o al cuerpo \mathbb{C} de los números complejos.

Definición 2.3 Diremos que una serie formal de potencias

$$F = \sum_{\alpha} a_{\alpha} X^{\alpha} \in \mathbb{K}[[X_1, \dots, X_n]]$$

converge absolutamente en un punto $x \in \mathbb{K}^n$ si la serie

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}$$

es absolutamente convergente en el sentido definido tras [An 2.87], es decir, si es absolutamente convergente con cualquier enumeración de sus términos.

El *dominio de convergencia* de F es la unión $\Omega \subset \mathbb{K}^n$ de todos los entornos abiertos de 0 donde la serie converge absolutamente. Entonces F define una función $F : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$F(x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}.$$

Notemos que esta serie siempre converge para $x = 0$, pero si sólo converge en este caso, entonces, por definición, $\Omega = \emptyset$, pues no hay ningún entorno de 0 donde la serie converja.

En el caso de series de una variable, el teorema [An 3.59] muestra que su dominio de convergencia en el sentido que acabamos de introducir coincide con su disco de convergencia definido allí, que es una bola abierta de centro 0 o bien todo \mathbb{K} . La forma geométrica del dominio de convergencia de una serie de potencias de varias variables es en general más complicada.

Ejemplo El dominio de convergencia de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} x_1^k x_2^k$ es

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |xy| < 1\}.$$

En efecto, basta tener en cuenta que el dominio de convergencia de la serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ es $] -1, 1[$.

Observemos que se trata de la región limitada por las cuatro ramas de las dos hipérbolas $xy = \pm 1$, que es un subconjunto no acotado de \mathbb{R}^2 , pero no es todo \mathbb{R}^2 . ■

Para estudiar el dominio de convergencia de una serie de potencias conviene introducir el concepto de polidisco:

Definición 2.4 Si $x \in \mathbb{K}^n$ y r es una n -tupla de números reales positivos, definimos el *polidisco* de centro x y polirradio r como

$$D(x, r) = D(x; r_1, \dots, r_n) = B_{r_1}(x_1) \times \dots \times B_{r_n}(x_n).$$

Teorema 2.5 Sea $F \in \mathbb{K}[[X_1, \dots, X_n]]$ una serie formal de potencias cuyo dominio de convergencia Ω sea no vacío. Entonces:

1. Ω es conexo, y si $a \in \Omega$, entonces existe un $r \in \mathbb{R}^n$ tal que $a \in D(0, r) \subset \Omega$.
2. F converge casi uniformemente a una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $F = \sum_{\alpha} a_{\alpha} X^{\alpha}$. Como Ω es abierto, si $a \in \Omega$ es claro que existe un $b \in \Omega$ tal que $|a_j| < |b_j| = r_j$ para $j = 1, \dots, n$.

Por definición de dominio de convergencia, la serie $\sum_{\alpha} |a_{\alpha}| |x_1|^{\alpha_1} \dots |x_n|^{\alpha_n}$ es convergente, para todo x en un entorno de b . Más aún, por el criterio de mayoración de Weierstrass, la serie converge absoluta y uniformemente en el polidisco $D(0; |b_1|, \dots, |b_n|)$, luego éste está contenido en Ω .

Esto implica que Ω es conexo, pues puede expresarse como unión de polidiscos de centro 0 (obviamente conexos), luego todos los puntos de Ω están en la componente conexa del 0.

Si $K \subset \Omega$ es compacto, podemos cubrirlo con un número finito de polidiscos sobre los que F converge uniformemente, lo cual implica que también converge uniformemente en K . Por consiguiente, F converge casi uniformemente en Ω . ■

Al combinar el teorema anterior para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ con el teorema de Weierstrass obtenemos que las series de potencias con coeficientes complejos definen funciones holomorfas y que pueden derivarse término a término, es decir, que

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \sum_{\alpha} \alpha_j a_{\alpha} z_1^{\alpha_1} \dots z_j^{\alpha_j - 1} \dots z_n^{\alpha_n},$$

donde hay que entender que la suma recorre sólo los multi-índices con $\alpha_j \neq 0$, pues los términos con $\alpha_j = 0$ tienen derivada nula. En particular, el teorema de Weierstrass asegura que esta serie converge en Ω . Repitiendo el argumento obtenemos el resultado general siguiente sobre derivación de series de potencias:

Teorema 2.6 Si $f(z) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} z^{\alpha}$ es la función definida por una serie formal de potencias de $\mathbb{C}[[Z_1, \dots, Z_n]]$ en su dominio de convergencia Ω , entonces f es holomorfa en Ω y, para todo $z \in \Omega$, se cumple que

$$D_{\beta} f(z) = \sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} a_{\alpha} z^{\alpha - \beta},$$

donde la suma recorre ahora los multi-índices α tales que $\alpha_j \geq \beta_j$ para todo índice j . Esto implica en particular la convergencia en Ω de la serie que define la derivada. Además, necesariamente

$$a_{\alpha} = \frac{D_{\alpha} f(0)}{\alpha!}.$$

(La última afirmación del teorema se sigue inmediatamente de evaluar en $z = 0$ la expresión para la derivada, lo que nos da que $D_{\beta} F(0) = \beta! a_{\beta}$.)

Ahora observamos que toda serie formal $F \in \mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]]$ puede considerarse también como serie formal en $\mathbb{C}[[X_1, \dots, X_n]]$, y su dominio de convergencia como serie real está contenido en su dominio de convergencia como serie compleja (pues si converge absolutamente en un entorno de un punto a , entonces converge absolutamente en un polidisco en \mathbb{C}^n que contiene a a). Además, las derivadas parciales de la suma f calculadas sobre puntos de \mathbb{R}^n son —por definición— las mismas en el sentido real que en el sentido complejo, luego podemos aplicar el teorema anterior para concluir:

Teorema 2.7 Si $f(x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}$ es la función definida por una serie formal de potencias de $\mathbb{R}[[X_1, \dots, X_n]]$ en su dominio de convergencia Ω , entonces f es de clase C^{∞} en Ω y, para todo $x \in \Omega$, se cumple que

$$D_{\beta} f(x) = \sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} a_{\alpha} x^{\alpha - \beta},$$

donde la suma recorre ahora los multi-índices α tales que $\alpha_j \geq \beta_j$ para todo índice j . Esto implica en particular la convergencia en Ω de la serie que define la derivada. Además, necesariamente

$$a_{\alpha} = \frac{D_{\alpha} f(0)}{\alpha!}.$$

2.2 Series de Taylor

Por comodidad, hasta aquí hemos considerado únicamente series de potencias centradas en 0, pero si $F = \sum_{\alpha} a_{\alpha} Z^{\alpha} \in \mathbb{K}[[X_1, \dots, X_n]]$ es una serie formal convergente en un dominio $\Omega \neq \emptyset$, donde define una función f , podemos considerar el abierto $\Omega_a = \{x \in \mathbb{K}^n \mid x - a \in \Omega\}$, y así F define la función $f_a : \Omega_a \rightarrow \mathbb{K}$ dada por $f_a(x) = f(x - a)$, que es también la suma de la serie

$$f_a(x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} (x - a)^{\alpha},$$

donde la convergencia se entiende en el mismo sentido que cuando $a = 0$, es decir, como la convergencia absoluta de la serie que resulta de fijar cualquier enumeración de los multi-índices. (Y es inmediato comprobar que la convergencia es casi-uniforme en Ω_a .)

Definición 2.8 Si $\Omega \subset \mathbb{K}^n$ es un abierto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ es una función de clase C^∞ (o bien holomorfa si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) y $a \in \Omega$, definimos su *serie de Taylor* alrededor de a como la serie funcional

$$\sum_{\alpha} \frac{D_{\alpha} f(a)}{\alpha!} (x - a)^{\alpha},$$

donde las derivadas hay que entenderlas en sentido real o complejo según si \mathbb{K} es \mathbb{R} o \mathbb{C} .

Los dos últimos teoremas de la sección precedente afirman que si

$$F = \sum_{\alpha} a_{\alpha} X^{\alpha} \in \mathbb{K}[[X_1, \dots, X_n]]$$

es una serie de potencias con dominio de convergencia no vacío Ω , la serie de Taylor en 0 de la función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$f(x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}$$

es la propia serie que define a f . Más en general, para cualquier $a \in \mathbb{K}^n$, la serie de Taylor de la función $f_a : \Omega_a \rightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$f_a(x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} (x - a)^{\alpha},$$

es la propia serie que la define, pues, por la regla de la cadena,

$$a_{\alpha} = \frac{D_{\alpha} f(0)}{\alpha!} = \frac{D_{\alpha} f_a(a)}{\alpha!}.$$

Un poco más en general, si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^k y $a \in \Omega$, para cada natural m podemos definir el *polinomio de Taylor* de grado k de f alrededor del punto a como

$$P_k f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D_{\alpha} f(a)}{\alpha!} (x - a)^{\alpha},$$

Es fácil ver que $P_k f(x)$ es el único polinomio de grado $\leq k$ cuyas derivadas parciales en a hasta grado k coinciden con las de f . Esta definición generaliza a la dada en [An 5.6] para funciones de una variable.

El teorema de Taylor [An 5.10] proporciona una expresión para la diferencia entre una función y sus polinomios de Taylor. Es fácil generalizarlo a funciones de varias variables, aunque aquí vamos a probar la generalización correspondiente al resto integral considerado en [An 5.12]:

Teorema 2.9 (Teorema de Taylor) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto convexo, sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^{k+1+l} y $a \in \Omega$. Entonces, para cada $x \in \Omega$ se cumple que

$$f(x) = P_k f(x) + \sum_{|\alpha|=k+1} R_\alpha(x)(x-a)^\alpha,$$

donde

$$R_\alpha(x) = \frac{|\alpha|}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{|\alpha|-1} D_\alpha f(a+t(x-a)) dt$$

es una función de clase C^l en Ω (entendiendo que la clase C^0 es la clase de las funciones continuas).

DEMOSTRACIÓN: Fijado $x \in \Omega$, consideramos la función dada por

$$g(t) = f(a+t(x-a)),$$

que por la convexidad de Ω está definida en un intervalo abierto que contiene a $[0, 1]$ y es de clase C^{k+1+l} . Por el teorema de Taylor para funciones de una variable tenemos que

$$g(t) = \sum_{r=0}^k \frac{g^{(r)}(0)}{r!} t^r + \frac{t^{k+1}}{k!} \int_0^1 (1-s)^k g^{(k+1)}(st) ds.$$

La regla de la cadena nos da que

$$g^{(r)}(t) = \sum_{|\alpha|=r} \binom{r}{\alpha_1 \dots \alpha_n} D_\alpha f(a+t(x-a))(x-a)^\alpha.$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{r!} \binom{r}{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \frac{1}{\alpha!},$$

para $t = 1$ queda que

$$\begin{aligned} g(x) &= P_k f(a) + \int_0^1 (1-s)^k \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{k+1}{\alpha!} D_\alpha f(a+s(x-a))(x-a)^\alpha ds \\ &= P_k f(a) + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{|\alpha|}{\alpha!} \int_0^1 (1-s)^k D_\alpha f(a+s(x-a)) ds (x-a)^\alpha. \end{aligned}$$

Las funciones $R_\alpha(x)$ son de clase C^l en virtud del teorema [An 5.27]. ■

El teorema de Taylor permite probar que, bajo hipótesis adecuadas sobre acotación de las derivadas, los polinomios de Taylor proporcionan aproximaciones cada vez mejores que una función alrededor del punto en el que se realiza el desarrollo. Sin embargo, no todas las funciones de clase C^∞ pueden expresarse como suma de sus series de Taylor.

Ejemplo La función

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

es de clase C^∞ en \mathbb{R} y todas sus derivadas son nulas en 0 (véase el ejemplo tras [An 5.12]), luego su serie de Taylor en 0 converge a la función nula y no a h . Otro ejemplo menos trivial es la función $g(x) = e^x + h(x)$, que es de clase C^∞ y sus derivadas en 0 son las de e^x , luego su serie de Taylor converge en todo \mathbb{R} , pero no a $g(x)$, sino a e^x . ■

Definición 2.10 Si $\Omega \subset \mathbb{K}^n$ es un abierto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ es una función de clase C^∞ (o bien holomorfa si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), diremos que f es *analítica* en un punto $a \in \Omega$ si su serie de Taylor alrededor de a converge a f en un entorno de a . Se dice que f es *analítica* en Ω si lo es en todos los puntos de Ω .

Acabamos de señalar que existen funciones de clase C^∞ que no son analíticas. Sin embargo, ahora vamos a probar que esto no sucede con las funciones holomorfas. Para ello conviene dar una definición adicional:

Un *dominio de Reinhardt* es un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ tal que si $z \in \Omega$ y $w \in \mathbb{C}^n$ cumple que $|w_j| = |z_j|$ para todo j , entonces $w \in \Omega$. Se dice que Ω es *completo* si además, para todo $z \in \Omega$, se cumple que $D(0; |z_1|, \dots, |z_n|) \subset \Omega$.

Claramente los polidiscos son dominios de Reinhardt completos. El teorema 2.5 prueba que los dominios de convergencia de las series de potencias son dominios de Reinhardt completos.

Ejercicio: Probar que los dominios de Reinhardt en \mathbb{C} son los discos $D(0, r)$, los anillos $A(0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$ y el propio \mathbb{C} , de los cuales son completos los discos y \mathbb{C} .

Teorema 2.11 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio de Reinhardt completo, sea $a \in \mathbb{C}^n$ y sea $\Omega_a = \{z \in \mathbb{C} \mid z - a \in \Omega\}$. Si f es una función holomorfa en Ω_a , entonces, para todo $z \in \Omega_a$ se cumple que

$$f(z) = \sum_{\alpha} \frac{D_{\alpha} f(a)}{\alpha!} (z - a)^{\alpha},$$

y la serie converge casi uniformemente en Ω_a .

DEMOSTRACIÓN: Llamamos $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ a la función holomorfa dada por $g(z) = f(z + a)$. Claramente $D_{\alpha} g(0) = D_{\alpha} f(a)$, y que f admita el desarrollo del enunciado equivale a que g admita el desarrollo

$$g(z) = \sum_{\alpha} \frac{D_{\alpha} g(0)}{\alpha!} z^{\alpha}.$$

Equivalentemente, no perdemos generalidad si suponemos que $a = 0$.

Dado $z \in \Omega$, como es abierto, podemos tomar $w \in \Omega$ tal que $|z_j| < |w_j|$, para todo índice j y, tomando $|z_j| < r_j < |w_j|$, tenemos que

$$z \in D(0, r) \subset \overline{D(0, r)} \subset D(0; |w_1|, \dots, |w_n|) \subset \Omega.$$

Basta probar que la serie de Taylor de f alrededor de 0 converge en el polidisco $D = D(0, r)$. Por la fórmula de Cauchy 1.30 sabemos que, para todo $z \in D$,

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial^* D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n.$$

Ahora usamos la convergencia (absoluta) de la serie geométrica:

$$\frac{1}{\zeta_j - z_j} = \sum_{\alpha_j=0}^{\infty} \frac{z_j^{\alpha_j}}{\zeta_j^{\alpha_j+1}},$$

para $|z_j| < |\zeta_j| = r_j$. Por [An 2.89] tenemos que

$$\frac{1}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} = \sum_{\alpha} \frac{z^{\alpha}}{\zeta_1^{\alpha_1+1} \cdots \zeta_n^{\alpha_n+1}},$$

para todo $\zeta \in \partial^* D$ y todo $z \in D$. Por lo tanto

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial^* D} \sum_{\alpha} \frac{f(\zeta) z^{\alpha}}{\zeta_1^{\alpha_1+1} \cdots \zeta_n^{\alpha_n+1}} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n.$$

Ahora bien, si M es una cota de f en $\partial^* D$, tenemos que

$$\left| \frac{f(\zeta) z^{\alpha}}{\zeta_1^{\alpha_1+1} \cdots \zeta_n^{\alpha_n+1}} \right| \leq \frac{M |z|^{\alpha}}{r_1^{\alpha_1+1} \cdots r_n^{\alpha_n+1}}$$

y

$$\sum_{\alpha} \frac{M |z|^{\alpha}}{r_1^{\alpha_1+1} \cdots r_n^{\alpha_n+1}} = \frac{M}{(r_1 - |z_1|) \cdots (r_n - |z_n|)},$$

luego el teorema de mayoración de Weierstrass nos da que la serie

$$\sum_{\alpha} \frac{f(\zeta) z^{\alpha}}{\zeta_1^{\alpha_1+1} \cdots \zeta_n^{\alpha_n+1}}$$

converge uniformemente en $\partial^* D$. Por 1.18 podemos intercambiar la suma con la integral:

$$\int_{\partial^* D} \sum_{\alpha} \frac{f(\zeta) z^{\alpha}}{\zeta_1^{\alpha_1+1} \cdots \zeta_n^{\alpha_n+1}} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n = \sum_{\alpha} \int_{\partial^* D} \frac{f(\zeta) z^{\alpha}}{\zeta_1^{\alpha_1+1} \cdots \zeta_n^{\alpha_n+1}} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n.$$

En definitiva:

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{\alpha} \left(\int_{\partial^* D} \frac{f(\zeta)}{\zeta_1^{\alpha_1+1} \cdots \zeta_n^{\alpha_n+1}} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n \right) z^{\alpha}.$$

Por las fórmulas de Cauchy esto es equivalente a la fórmula del enunciado.

El teorema 2.6 implica que el único desarrollo en serie que admite una función holomorfa es el que estamos considerando. ■

Como consecuencia tenemos otra caracterización de las funciones holomorfas:

Teorema 2.12 *Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ es un abierto no vacío, las funciones analíticas en Ω coinciden con las funciones holomorfas en Ω .*

DEMOSTRACIÓN: Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en Ω , para cada $a \in \Omega$ podemos tomar un polidisco $D(a, r) \subset \Omega$, con lo que el teorema anterior aplicado a $D(0, r)$ (que es un dominio de Reinhardt completo) nos da que la serie de Taylor de f alrededor de a converge a f en $D(a, r)$, luego f es analítica en a .

Recíprocamente, si f es analítica en Ω y $a \in \Omega$, tenemos que f coincide con su serie de Taylor en un entorno de a , y ésta define una función holomorfa en su dominio de convergencia, luego f es holomorfa en a . ■

Ahora probamos una relación fundamental entre las funciones analíticas reales y las complejas:

Teorema 2.13 *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, entonces f es analítica en $a \in \Omega$ si y sólo si existe un abierto $\Omega^* \subset \mathbb{C}^n$ tal que $a \in \Omega_0 = \Omega^* \cap \mathbb{R}^n \subset \Omega$ y existe una función holomorfa $f^* : \Omega^* \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f^*|_{\Omega_0} = f|_{\Omega_0}$. En tal caso la serie de Taylor de f alrededor de a es la misma que la de f^* .*

DEMOSTRACIÓN: Si f es analítica en a , su serie de Taylor alrededor de a converge a f en un entorno de a . Pero podemos ver a dicha serie con coeficientes reales como una serie de potencias con coeficientes complejos, y su dominio de convergencia como tal, digamos Ω_1 , contiene al dominio de convergencia real. Si Ω_2 es un abierto en \mathbb{C}^n tal que $\Omega_2 \cap \mathbb{R}^n = \Omega$, entonces $\Omega^* = \Omega_1 \cap \Omega_2$ cumple que $\Omega_0 = \Omega^* \cap \mathbb{R}^n \subset \Omega$ y la serie de Taylor de f define una función holomorfa en Ω^* que extiende a f .

Recíprocamente, si $f^* : \Omega^* \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa que extiende a f , entonces sus derivadas parciales en a en sentido complejo coinciden con sus derivadas parciales en a en sentido real (lo que en particular implica que existen y que f es de clase C^∞ en a), por lo que la serie de Taylor de f^* alrededor de a es también la serie de Taylor de f alrededor de a y en particular converge a f en Ω_0 , luego f es analítica en a . ■

El teorema anterior deducir muchas propiedades de las funciones analíticas reales a partir de las propiedades análogas de las funciones analíticas complejas. Por ejemplo:

Teorema 2.14 *Sea $F = \sum_{\alpha} a_{\alpha} X^{\alpha} \in \mathbb{K}[[X_1, \dots, X_n]]$ una serie formal de potencias con dominio de convergencia $\Omega \neq \emptyset$, sea $a \in \mathbb{K}^n$, sea*

$$\Omega_a = \{x \in \mathbb{K}^n \mid x - a \in \Omega\}$$

y sea $f_a : \Omega_a \rightarrow \mathbb{K}$ la función dada por

$$f_a(x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} (x - a)^{\alpha}.$$

Entonces f_a es analítica en Ω_a .

DEMOSTRACIÓN: En el caso complejo el teorema es trivial, pues las series de potencias definen funciones holomorfas, luego analíticas. Sin embargo, en el caso real la definición de función analítica sólo nos garantiza que f_a es analítica en a , pero por el teorema anterior es de hecho analítica en todos los puntos de Ω_a , ya que la serie de Taylor define una función holomorfa en un abierto Ω^* que contiene a Ω_a , la cual extiende trivialmente a f_a . ■

Definición 2.15 Si $\Omega \subset \mathbb{K}^n$ es un abierto no vacío, llamaremos $\mathcal{A}(\Omega)$ al conjunto de las funciones analíticas en Ω (de manera que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ entonces $\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega)$).

Teorema 2.16 Si $\Omega \subset \mathbb{K}^n$ es un abierto no vacío, entonces $\mathcal{A}(\Omega)$ es un álgebra con la suma y el producto definidos puntualmente. Además, si $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ no se anula en ningún punto, entonces $1/f \in \mathcal{A}(\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN: En el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ el teorema se sigue de las propiedades holomorfas. En el caso real, si $f, g \in \mathcal{A}(\Omega)$, para cada $a \in \Omega$ existen extensiones holomorfas f^* y g^* de f y g a un entorno de a , con lo que $f^* + g^*$ y f^*g^* son extensiones holomorfas de $f + g$ y fg a dicho entorno, luego $f + g$ y fg son analíticas en a .

Si f no se anula en ningún punto de Ω , para cada $a \in \Omega$ tenemos que f^* no se anula en a , luego por continuidad tampoco en un entorno, luego $1/f^*$ es holomorfa en un entorno de a y extiende a $1/f$, luego $1/f$ es analítica en a . ■

Nota Es importante destacar una diferencia entre la convergencia de las series de Taylor de las funciones analíticas reales y complejas. En el caso complejo, el teorema 2.11 afirma que la serie de Taylor de una función analítica compleja alrededor de un punto converge en la mayor región contenida en su dominio donde puede converger (es decir, que sea un trasladado de un dominio de Reinhardt completo). Por ejemplo, en el caso de una variable afirma que la serie de Taylor de una función analítica en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ alrededor de un punto $a \in \Omega$ converge en la mayor bola abierta de centro a contenida en Ω (o en todo \mathbb{C} si es que $\Omega = \mathbb{C}$).

Cabría pensar si lo mismo es cierto para funciones analíticas reales, es decir, si, por ejemplo, en el caso de funciones de una variable, la serie de Taylor alrededor de a de una función analítica en un intervalo $]a - r, a + r[$ converge en dicho intervalo. Sin embargo, la respuesta es negativa, como se sigue de considerar, por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

El teorema 2.13 implica que f es analítica en \mathbb{R} , ya que se extiende a la función holomorfa definida por la misma fórmula. Si se cumpliera el análogo a 2.11, su serie de Taylor alrededor de 0 convergería en \mathbb{R} , pero no es así. La fórmula para la serie geométrica de razón ix nos da inmediatamente que el desarrollo es

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^{2m},$$

pero sólo converge en el intervalo $] -1, 1[$ (o en el disco $D(0, 1) \subset \mathbb{C}$). La “explotación” estriba en que la extensión

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{(z - i)(z + i)}$$

sólo es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, por lo que el teorema 2.11 sólo garantiza la convergencia en $D(0, 1)$ y claramente es imposible que converja en un disco abierto mayor, luego la serie real no puede converger en un intervalo abierto mayor que $] -1, 1[$.

Así pues, el dominio de convergencia de una función analítica real no está determinado por su dominio, sino por el dominio de sus posibles extensiones holomorfas. ■

Espacios de gérmenes Lo que vamos a probar en este apartado es, en esencia, que la aplicación que a cada serie formal de potencias convergente le asigna la función analítica que define es un isomorfismo de álgebras, pero para formular este resultado con precisión hay que tener en cuenta que series distintas pueden tener dominios de convergencia distintos, lo que nos obliga a introducir los gérmenes de funciones analíticas:

Definición 2.17 Si $a \in \mathbb{K}^n$, llamaremos $\mathcal{A}_a(\mathbb{K}^n)$ al conjunto de todas las funciones analíticas definidas en un entorno abierto de a . En este conjunto podemos establecer la relación de equivalencia que relaciona dos funciones si coinciden en un entorno de a . Llamamos $\mathcal{G}_a(\mathbb{K}^n)$ al conjunto cociente, cuyos elementos reciben el nombre de *gérmenes de funciones analíticas* alrededor de a . Es claro que $\mathcal{G}_a(\mathbb{K}^n)$ tiene estructura de álgebra con las operaciones dadas por

$$[f] + [g] = [f + g], \quad [f][g] = [fg].$$

Teorema 2.18 *El conjunto $\mathbb{K}\{X_1, \dots, X_n\}$ de las series formales de potencias que convergen en un entorno de 0 es un subanillo de $\mathbb{K}[[X_1, \dots, X_n]]$ y, para todo $a \in \mathbb{K}^n$, la aplicación*

$$\mathbb{K}\{X_1, \dots, X_n\} \longrightarrow \mathcal{G}_a(\mathbb{K}^n)$$

que a cada serie formal $F = \sum_{\alpha} a_{\alpha} X^{\alpha}$ le hace corresponder el germen de la función

$$F_a(z) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} (x - a)^{\alpha}$$

es un isomorfismo de álgebras. Las unidades de $\mathbb{K}\{X_1, \dots, X_n\}$ son las series formales con término independiente no nulo.

DEMOSTRACIÓN: Si $F \in \mathbb{K}\{X_1, \dots, X_n\}$, tenemos que su dominio de convergencia Ω no es vacío, lo que equivale a que tampoco lo sea su dominio de convergencia alrededor de a , es decir, $\Omega_a = \{x \in \mathbb{K}^n \mid x - a \in \Omega\}$. Por lo tanto

la función F_a define un germen de funciones analíticas. Además los coeficientes de F son los de la serie de Taylor de F_a alrededor de a , lo que prueba que la aplicación del enunciado es inyectiva (notemos que todas las funciones de un mismo germen tienen la misma serie de Taylor en a). El hecho de que toda función analítica en un entorno de a admita un desarrollo en serie de Taylor alrededor de a implica que también es suprayectiva.

Sean ahora $F, G \in \mathbb{K}\{X_1, \dots, X_n\}$, digamos

$$F = \sum_{\alpha} a_{\alpha} X^{\alpha}, \quad G = \sum_{\alpha} b_{\alpha} X^{\alpha}.$$

Entonces, para todo $x \in \Omega_a^F \cap \Omega_a^G$, tenemos que

$$F_a(x) + G_a(x) = \sum_{\alpha} (a_{\alpha} + b_{\alpha})(x - a)^{\alpha},$$

lo cual significa que $F_a + G_a = (F + G)_a$, luego $[F_a] + [G_a] = [(F + G)_a]$.

La comprobación para el producto es ligeramente más delicada, por la definición que hemos dado de producto de series formales de potencias. Tenemos que

$$FG = \sum_{\gamma} \left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} a_{\alpha} b_{\beta} \right) X^{\gamma},$$

luego hay que probar que la serie

$$\sum_{\gamma} \left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} a_{\alpha} b_{\beta} \right) (x - a)^{\gamma}$$

converge (absolutamente) a $F_a(x)G_a(x)$. Por [An 2.88] basta ver que la serie

$$\sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha} b_{\beta} (x - a)^{\alpha+\beta}$$

converge (absolutamente) a $F_a(x)G_a(x)$. Ahora bien, si fijamos una enumeración de los multi-índices, las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\alpha_n} (x - a)^{\alpha_n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_{\alpha_n} (x - a)^{\alpha_n}$$

convergen respectivamente a $F_a(x)$ y $G_a(x)$, luego por [An 2.86] tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{\alpha_k} b_{\alpha_{n-k}} (x - a)^{\alpha_k + \alpha_{n-k}}$$

converge absolutamente a $F_a(x)G_a(x)$. Por otra parte, aplicando [An 2.86] a las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{\alpha_n}| |x - a|^{\alpha_n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |b_{\alpha_n}| |x - a|^{\alpha_n},$$

tenemos la convergencia de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n |a_{\alpha_k}| |b_{\alpha_{n-k}}| |x - a|^{\alpha_k + \alpha_{n-k}},$$

lo que nos permite aplicar [An 2.88] para concluir que $\sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha} b_{\beta} (x - a)^{\alpha+\beta}$ también converge a $F_a(x)G_a(x)$.

Así pues, $F_a G_a = (FG)_a$ y $[F_a][G_a] = [(FG)_a]$.

Por último, las unidades de $\mathbb{K}\{X_1, \dots, X_n\}$ se corresponden con las unidades de $\mathcal{G}_a(\mathbb{K}^n)$, que claramente son los gérmenes de las funciones que no se anulan en a , luego sus series de Taylor son las series con término independiente no nulo. ■

2.3 Prolongación analítica

Mientras las funciones de clase C^∞ son extremadamente “flexibles”, en el sentido de que es posible construir funciones “meseta”, particiones de la unidad, etc. de clase C^∞ , las funciones analíticas son enormemente “rígidas”. Por ejemplo, no existen funciones analíticas que tomen distintos valores constantes en subconjuntos abiertos de un mismo dominio conexo. Si una función analítica (con dominio conexo) es constante en un abierto, entonces es constante en todo su dominio. Más en general, una función analítica (en un dominio conexo) está completamente determinada por los valores que toma en un abierto, por pequeño que sea. Esto es lo que afirma el teorema siguiente (compárese con [IC 7.27]):

Teorema 2.19 (Principio de prolongación analítica) *Si $\Omega \subset \mathbb{K}^n$ es un abierto conexo y $f, g \in \mathcal{A}(\Omega)$, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. $f = g$.
2. Existe un abierto no vacío $U \subset \Omega$ donde $f|_U = g|_U$.
3. Existe un punto $a \in \Omega$ en el que, para todo multi-índice α , se cumple que $D_\alpha f(a) = D_\alpha g(a)$.

DEMOSTRACIÓN: La única implicación que no es inmediata es 3) \Rightarrow 1). Para probarla consideramos el conjunto

$$A = \bigcap_{\alpha} \{a \in \Omega \mid D_\alpha f(a) = D_\alpha g(a)\},$$

que claramente es cerrado, por la continuidad de las derivadas. La hipótesis 3) afirma que no es vacío, luego si probamos que es abierto tendremos que $A = \Omega$ lo que en particular (teniendo en cuenta que $D_\alpha f = f$ cuando α es el multi-índice nulo) implica que $f = g$.

Ahora bien, si $a \in A$, resulta que f y g tienen el mismo desarrollo en serie de Taylor alrededor de a , el cual converge a las funciones respectivas en entorno U de a , luego $f|_U = g|_U$, de donde $a \in U \subset A$, luego A es abierto. ■

Así pues, basta con que dos funciones analíticas coincidan en un abierto, por pequeño que sea, para que deban coincidir en todo su dominio (si es conexo, o en las componentes conexas que corten al abierto, en caso contrario).

Observaciones Una consecuencia elemental es que si $\Omega \subset \mathbb{K}^n$ es un abierto conexo no vacío, entonces $\mathcal{A}(\Omega)$ es un dominio íntegro. En efecto, si $f, g \in \mathcal{A}(\Omega)$ son dos funciones no idénticamente nulas, el teorema anterior implica que los conjuntos donde se anulan son cerrados de interior vacío, luego los conjuntos donde no se anulan son abiertos densos, luego tienen intersección no nula, luego el producto fg no es idénticamente nulo.

Otra consecuencia es que si $\Omega \subset \mathbb{K}^n$ es un abierto no vacío, podemos considerar que $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \subset \mathcal{A}(\Omega)$, identificando cada polinomio con la función que define en Ω , pues si dos polinomios definen la misma función, entonces son iguales. Más aún, si Ω es un dominio de Reinhardt, los desarrollos en serie de Taylor muestran que $\mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n]$ es denso en $\mathcal{H}(\Omega)$. ■

Para funciones de una variable podemos dar una condición más débil para que dos funciones analíticas coincidan en su dominio, que generaliza a [IC 7.27]:

Teorema 2.20 (Principio de prolongación analítica) *Si $\Omega \subset \mathbb{K}$ es abierto conexo y $f, g \in \mathcal{A}(\Omega)$, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. $f = g$.
2. El conjunto $\{x \in \Omega \mid f(x) = g(x)\}$ tiene un punto de acumulación en Ω .
3. Existe un $a \in \Omega$ en el que, para todo $n \geq 0$, se cumple que $f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$.

DEMOSTRACIÓN: 3) \Rightarrow 1) es la versión precedente. Sólo hay que probar que 2) \Rightarrow 3). Sea $a \in \Omega$ un punto de acumulación del conjunto indicado. Por la continuidad de f y g es claro que $f(a) = g(a)$. Llamamos $h = f - g \in \mathcal{A}(\Omega)$, de modo que $h(a) = 0$ y todo entorno de a contiene puntos distintos de a donde h se anula. Basta probar que todas las derivadas de h son nulas.

Sea $U \subset \Omega$ un entorno de a donde converja el desarrollo en serie de Taylor

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Si existe un n (necesariamente $n > 0$) tal que $h^{(n)}(a) \neq 0$, sea p el mínimo posible. Así

$$h(z) = \sum_{n \geq p} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = (x-a)^p \sum_{n \geq p} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^{n-p}.$$

La función

$$H(x) = \sum_{n \geq p} \frac{h^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^{n-p}$$

es analítica en U y cumple $H(a) = h^{(p)}(a)/p! \neq 0$. Como es continua, podemos concluir que h no se anula en un entorno U de a . Como $h(x) = (x-a)^p H(x)$, resulta que $H(x) \neq 0$ en $U \setminus \{a\}$, lo cual contradice la elección de a . ■

Veamos algunas aplicaciones:

Conjugación de funciones holomorfas La conjugación de una función holomorfa no constante no es holomorfa. Sin embargo, si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ es un abierto, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y llamamos

$$\Omega^* = \{z \in \mathbb{C}^n \mid (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n) \in \Omega\},$$

se cumple que la función $f^* : \Omega^* \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f^*(z) = \overline{f(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)}$ es holomorfa.

Esto puede comprobarse directamente a través de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, pero es más claro observar que si $z_0 \in \Omega^*$, entonces f admite un desarrollo en serie de Taylor en un entorno de $\bar{z}_0 = (\bar{z}_{01}, \dots, \bar{z}_{0n})$ de la forma

$$f(z) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} (z - \bar{z}_0)^{\alpha},$$

y la continuidad de la conjugación compleja hace que

$$f^*(z) = \overline{\sum_{\alpha} a_{\alpha} (\bar{z} - \bar{z}_0)^{\alpha}} = \sum_{\alpha} \bar{a}_{\alpha} (z - z_0)^{\alpha},$$

luego f^* está definida por una serie de potencias en un entorno de z_0 y es, por consiguiente, holomorfa.

Supongamos ahora que Ω es un abierto conexo tal que $\Omega^* = \Omega$ y que f es la extensión de una función definida en un abierto de \mathbb{R}^n con valores en \mathbb{R} . Sobre un punto $z_0 \in \Omega \cap \mathbb{R}^n$, las derivadas parciales de f en sentido complejo coinciden con las reales, lo cual se traduce en que los coeficientes de la serie de Taylor de f alrededor de z_0 son números reales y, según el cálculo precedente, concluimos que $f^* = f$ en el dominio de convergencia de la serie de Taylor. Ahora bien, por el principio de prolongación analítica la igualdad es válida en todo Ω . Con esto hemos probado lo siguiente:

Teorema 2.21 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto conexo tal que $z \in \Omega$ si y sólo si $\bar{z} \in \Omega$, y sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces la función $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$ es holomorfa en Ω y si f extiende a una función de variables reales, entonces $f^* = f$, con lo que, para todo $z \in \Omega$, se cumple que*

$$\overline{f(z_1, \dots, z_n)} = f(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n).$$

Un teorema de extensión Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ es un abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa, diremos que un punto $a \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega$ es una *singularidad aislada* de f si existe un $\delta > 0$ tal que $B_{\delta}(a) \setminus \{a\} \subset \Omega$, es decir, si f está definida en todos los puntos de alrededor de a , pero no en a . En tal caso $\Omega \cup \{a\}$ es abierto, y diremos que la singularidad es *evitable* si f puede extenderse a una función holomorfa $F : \Omega \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$.

Por ejemplo, la función $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$$

tiene una singularidad aislada en $a = 0$, pero es fácil ver que es evitable, sin más que considerar el desarrollo en serie de Taylor del seno:

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}$$

La serie de potencias converge en todo \mathbb{C} a una función holomorfa que obviamente coincide con f en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, luego podemos considerar a $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como función holomorfa sin más que definir $f(0) = 1$.

En cambio, la función $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = \frac{\cos z}{z}$$

tiene una singularidad no evitable en 0, ya que obviamente $\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = \infty$, y si tuviera una extensión holomorfa G a un entorno de 0 el límite sería $G(0)$.

Lo que vamos a probar aquí es que todas las singularidades aisladas de las funciones holomorfas de más de una variable son evitables. Esto marca un fuerte contraste con el caso de funciones de una variable que acabamos de ilustrar con los ejemplos precedentes, pero también con el caso de las funciones de varias variables reales, que sí que pueden tener singularidades aisladas.

Por ejemplo, basta considerar la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2},$$

que es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (analítica, de hecho), pero no puede extenderse a una función siquiera continua en $(0,0)$. Si comparamos con la función dada por

$$g(z_1, z_2) = \frac{1}{z_1^2 + z_2^2},$$

donde ahora z_1, z_2 pueden tomar valores complejos, la diferencia es que ahora $(0,0)$ ya no es una singularidad aislada, pues $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + iz_2)(z_1 - iz_2)$, por lo que g no está definida, ni tiene límite finito, en los puntos del cerrado

$$\{z \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 + iz_2 = 0\} \cup \{z \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 - iz_2 = 0\}.$$

En realidad cuesta lo mismo probar un resultado un poco más general:

Teorema 2.22 *Sea Ω un entorno abierto de 0 en \mathbb{C}^n con $n \geq 2$ y sea*

$$\Omega_0 = \Omega \setminus \{z \in \mathbb{C}^n \mid z_{n-1} = z_n = 0\}.$$

Entonces, toda función holomorfa $f : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{C}$ se extiende a una función holomorfa en Ω .

DEMOSTRACIÓN: Tomemos $a \in \{z \in \Omega \mid z_{n-1} = z_n = 0\}$ y veamos que f puede extenderse a una función holomorfa f_a en un polidisco $P_a \subset \Omega$ centrado en a .

Esto prueba el teorema, pues si $P_a \cap P_b \neq \emptyset$, es claro que $P_a \cap P_b \cap \Omega_0 \neq \emptyset$, y este conjunto es un abierto donde f_a y f_b coinciden con f , luego por el principio de prolongación analítica f_a y f_b coinciden en todo su dominio común, luego la unión de f con todas las funciones f_a determina una extensión holomorfa $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

Observemos ahora que no perdemos generalidad si suponemos que $a = 0$, pues en otro caso basta considerar la función $g(z) = f(z + a)$ sobre el abierto

$$-a + \Omega_0 = (-a + \Omega) \setminus \{z \in \mathbb{C}^n \mid z_{n-1} = z_n = 0\}.$$

Así, si g admite una extensión holomorfa g_0 a un polidisco $P_0 \subset (-a + \Omega)$ de centro 0, entonces $f_a(z) = g_0(z - a)$ es una extensión holomorfa de f al polidisco $a + P_0$ de centro a .

Fijemos cualquier polidisco $D(0; r'_1, \dots, r'_n) \subset \Omega$, fijemos radios menores $0 < r_j < r'_j$, llamemos $P_0 = D(0; r_1, \dots, r_n)$ y definamos $f_0 : P_0 \rightarrow \mathbb{C}$ mediante

$$f_0(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|\zeta_n|=r_n} \int_{|\zeta_{n-1}|=r_{n-1}} \frac{f(z_1, \dots, z_{n-2}, \zeta_{n-1}, \zeta_n)}{(\zeta_{n-1} - z_{n-1})(\zeta_n - z_n)} d\zeta_{n-1} d\zeta_n.$$

La clave está en observar que esto define ciertamente una función holomorfa en P_0 . En efecto, si $z \in P_0$, podemos tomar radios $|z_j| < r''_j < r_j$, de modo que $z \in P' = P(0; r''_1, \dots, r''_n)$ y el integrando es una función holomorfa en el abierto

$$P' \times \{\zeta_{n-1} \in \mathbb{C} \mid r''_{n-1} < |\zeta_{n-1}| < r'_{n-1}\} \times \{\zeta_n \in \mathbb{C} \mid r''_n < |\zeta_n| < r'_n\}.$$

El teorema 1.23 nos da que la integral interior es una función holomorfa en

$$P' \times \{\zeta_n \in \mathbb{C} \mid r''_n < |\zeta_n| < r'_n\}$$

(pues es continua y tiene derivadas parciales), y una nueva aplicación del mismo teorema nos da que f_0 es holomorfa en P' , luego en P_0 . Veamos ahora que f_0 extiende a f .

Fijamos $(z_1, \dots, z_{n-2}) \in D(0; r_1, \dots, r_{n-2})$ y un ζ_n tal que $|\zeta_n| = r_n$. Entonces la función $g(z_{n-1}) = f(z_1, \dots, z_{n-1}, \zeta_n)$ es holomorfa en el disco $D(0, r''_{n-1})$, luego la fórmula de Cauchy nos da que

$$f(z_1, \dots, z_{n-1}, \zeta_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_{n-1}|=r_{n-1}} \frac{f(z_1, \dots, z_{n-2}, \zeta_{n-1}, \zeta_n)}{\zeta_{n-1} - z_{n-1}} d\zeta_{n-1}$$

para todo $z_{n-1} \in D(0, r_{n-1})$. Ahora, para $0 < |z_{n-1}| < r''_n$, consideramos la función $h(z_n) = f(z_1, \dots, z_n)$, que es holomorfa en $D(0, r''_n)$ (y aquí es fundamental que $z_{n-1} \neq 0$, pues de lo contrario h no sería holomorfa en 0). La fórmula de Cauchy nos da que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_n|=r_n} \frac{f(z_1, \dots, z_{n-1}, \zeta_n)}{\zeta_n - z_n} d\zeta_n$$

para todo $z \in P_0$ tal que $z_{n-1} \neq 0$. Combinando las dos últimas expresiones integrales, lo que tenemos es que $f(z) = f_0(z)$ en todos los puntos de P_0 tales que $z_{n-1} \neq 0$, pero estos puntos forman un abierto en P_0 , luego por el principio de prolongación analítica de hecho $f|_{P_0} = f_0$, como había que probar. ■

En particular, si Ω es un entorno de 0 en \mathbb{C}^n con $n \geq 2$, toda función holomorfa en $\Omega \setminus \{0\}$ se extiende a una función holomorfa en Ω , luego todas las singularidades aisladas en 0 son evitables. Aplicando una traslación, concluimos inmediatamente que todas las singularidades aisladas de una función holomorfa de más de una variable son evitables.

2.4 El principio del módulo máximo

El resultado que da título a esta sección es una consecuencia más del carácter analítico de las funciones holomorfas, pero le dedicamos una sección propia porque de él vamos a extraer numerosas consecuencias de interés.

Teorema 2.23 (Principio del módulo máximo) *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto conexo no vacío y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que $|f|$ tenga un máximo local en un punto de Ω . Entonces f es constante.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $a \in \Omega$ un punto donde $|f|$ tenga un máximo local. Esto significa que existe un abierto $a \in U \subset \Omega$ (que podemos tomar conexo) tal que $|f(a)| = \max\{|f(z)| \mid z \in U\}$. Basta probar que f es constante en U , pues el principio de prolongación analítica implica entonces que f es constante en Ω .

Si f no es constante en U , por el teorema de la aplicación abierta $f[U] \subset \mathbb{C}$ es abierto, pero es inmediato comprobar que el módulo es una aplicación abierta $|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow [0, +\infty[$, luego $|f|[U]$ es un abierto conexo en $[0, +\infty[$, luego es un intervalo de la forma $[0, t[$ o bien $]s, t[$, en contradicción con que $f(a) \in |f|[U]$ debería ser el máximo de dicha imagen. ■

He aquí dos formulaciones alternativas:

Teorema 2.24 *Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ es un abierto conexo no vacío y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa no constante, entonces, para todo $z \in \Omega$ se cumple que*

$$|f(z)| < \sup_{w \in \Omega} |f(w)|.$$

Teorema 2.25 *Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ es un abierto conexo acotado no vacío y $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua no constante y holomorfa en Ω , entonces, para todo $z \in \Omega$ se cumple que*

$$|f(z)| < \max_{w \in \partial\Omega} |f(w)|.$$

Las pruebas son inmediatas. Por ejemplo, para el segundo teorema observamos que, por compacidad, $|f|$ debe alcanzar un máximo en $\bar{\Omega}$, pero por el primer teorema no puede alcanzarlo en Ω , luego dicho máximo está en $\partial\Omega$.

Nota Existe un *principio del módulo mínimo*, que es poco más que una reformulación del principio del módulo máximo: afirma que si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa en un abierto conexo y $|f|$ alcanza un mínimo local en un punto $z \in \Omega$, entonces f es constante o bien $f(z) = 0$.

En efecto, si $f(z) \neq 0$ contrario, existe un entorno U de z donde f no se anula, con lo que $1/f$ es holomorfa en U y su módulo alcanza un máximo en z , luego $1/f$ es constante en U , luego f también, y por el principio de prolongación analítica f es constante en Ω . ■

De aquí podemos deducir muchas propiedades sobre acotación de funciones holomorfas cuyo interés en este momento puede parecer dudoso, pero que más adelante veremos que nos serán de gran ayuda. Veamos una primera aplicación elemental, que usaremos en el capítulo siguiente en la prueba del teorema de Bloch:

Teorema 2.26 (Lema de Schwarz) *Sea f una función holomorfa en el disco unitario $D = D(0, 1)$ tal que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in D$ y que cumpla además $f(0) = 0$. Entonces se cumple que $|f'(0)| \leq 1$ y $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in D$. Además, si $|f'(0)| = 1$ o bien $|f(z)| = |z|$ para algún $z \neq 0$ en D , entonces existe una constante c tal que $|c| = 1$ y $f(z) = cz$ para todo $z \in D$.*

DEMOSTRACIÓN: La función $g(z) = f(z)/z$ es holomorfa en D . Por el principio del módulo máximo, si $0 < r < 1$ se cumple $|g(z)| \leq 1/r$ para todo z tal que $|z| \leq r$. Fijando z y haciendo tender r a 1 queda que $|g(z)| \leq 1$, o sea, $|f(z)| \leq |z|$ y $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$.

Si se da una de las igualdades entonces g alcanza su máximo dentro del disco, luego es constante igual a c . Esto nos da que $f(z) = cz$ y, usando de nuevo la igualdad que suponemos, queda $|c| = 1$. ■

Las desigualdades de Cauchy (en el caso de funciones de una variable) acotan las derivadas de una función holomorfa f en un punto en términos de una cota de $|f|$ en una circunferencia centrada en el punto. Ahora vamos a probar una variante en términos de una cota de $\operatorname{Re} f$:

Teorema 2.27 *Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ una serie de potencias convergente en $D(0, R)$. Supongamos que $\operatorname{Re} f(z) \leq U$, para todo z en dicho disco. Entonces, para $n \geq 1$,*

$$|c_n| \leq \frac{2(U - \operatorname{Re} f(z_0))}{R^n},$$

y para todo $|z - z_0| \leq r < R$ se cumple que

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \frac{2r}{R-r}(U - \operatorname{Re} f(z_0)), \quad |f^{(k)}(z)| \leq \frac{2R}{(R-r)^{k+1}}(U - \operatorname{Re} f(z_0)),$$

para todo $k \geq 1$.

DEMOSTRACIÓN: Si llamamos $g(z) = f(z + z_0)$ y probamos el teorema para g , claramente se cumple para f , luego no perdemos generalidad si suponemos que $z_0 = 0$. Llamemos

$$\phi(z) = U - f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Notemos que $\operatorname{Re} \phi(z) \geq 0$. Para todo $0 < r < R$, la fórmula integral de Cauchy nos da que

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta. \quad (2.1)$$

Por otra parte, si $n \geq 1$, el teorema de Cauchy nos da que

$$0 = \int_{|\zeta|=r} \phi(\zeta) \zeta^{n-1} d\zeta = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(re^{i\theta}) r^n e^{in\theta} d\theta,$$

luego

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(re^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta = 0.$$

Conjugamos esta integral y se la sumamos a la expresión que tenemos para $b_n r^n$:

$$b_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2 \operatorname{Re} \phi(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \phi(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

Como $\operatorname{Re} \phi \geq 0$, tenemos que

$$|b_n| r^n \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \phi(re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(re^{i\theta}) d\theta = 2 \operatorname{Re} b_0,$$

donde hemos usado (2.1) para $n = 0$. Si hacemos que r tienda a R , resulta que, para todo $n \geq 1$,

$$|c_n| = |b_n| \leq \frac{2 \operatorname{Re} b_0}{R^n} = \frac{2(U - \operatorname{Re} f(0))}{R^n}.$$

A su vez, si $|z| \leq r < R$

$$|f(z) - f(0)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \right| \leq 2(U - \operatorname{Re} f(0)) \sum_{n=1}^{\infty} (r/R)^n = \frac{2r}{R-r} (U - \operatorname{Re} f(z_0)).$$

Similarmente, si $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(z)| &\leq \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) |c_n| |z|^{n-k} \\ &\leq \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) \frac{2(U - \operatorname{Re} f(0))}{R^n} r^{n-k} \\ &= 2(U - \operatorname{Re} f(0)) \frac{d^k}{dr^k} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} \right) = 2(U - \operatorname{Re} f(0)) \frac{d^k}{dr^k} \frac{R}{R-r} \\ &= \frac{2R}{(R-r)^{k+1}} (U - \operatorname{Re} f(z_0)). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Como aplicación obtenemos una caracterización de los polinomios:

Teorema 2.28 *Sea f una función holomorfa en \mathbb{C} y $\alpha > 0$ un número real. Supongamos que existe un $r_0 > 0$ tal que $\operatorname{Re} f(z) \leq |z|^\alpha$ para $|z| \geq r_0$. Entonces $f(z)$ es un polinomio de grado menor o igual que $E[\alpha]$ (la parte entera de α).*

DEMOSTRACIÓN: Si $r \geq r_0$, el teorema anterior nos da que, para $|z| = r/2$,

$$|f(z) - f(0)| \leq \frac{2r/2}{r - r/2}(r^\alpha - \operatorname{Re} f(0)) = 2(r^\alpha - \operatorname{Re} f(0)).$$

Si a_m es el coeficiente m -simo de la serie de Taylor de f alrededor de 0, las desigualdades de Cauchy aplicadas a la función $f(z) - f(0)$ nos dan que

$$|a_m| \leq 2^{m+1} \frac{r^\alpha - \operatorname{Re} f(0)}{r^m}.$$

Pero r puede tomarse arbitrariamente grande, y si $m > \alpha$ esta última expresión tiende a 0. Así pues, $a_m = 0$ para $m > \alpha$ y, en consecuencia, f es un polinomio de grado menor o igual que $E[\alpha]$. ■

El principio del módulo máximo implica en particular que el valor de una función holomorfa en un punto z_0 está acotado por el máximo de su módulo en cualquier circunferencia de centro z_0 , pero ahora vamos a probar que esta cota puede mejorarse en función del número de ceros de la función alrededor del punto:

Teorema 2.29 *Sea f una función holomorfa en un entorno del disco $\overline{D(0, R)}$ que tenga al menos n ceros (contados con su multiplicidad) en el disco $D(z_0, r)$, con $0 < r < R$. Sea M el máximo de $|f|$ en $\partial D(z_0, R)$. Entonces*

$$|f(z_0)| \leq M \left(\frac{r}{R} \right)^n.$$

DEMOSTRACIÓN: Mediante una traslación podemos suponer que $z_0 = 0$. Sean a_1, \dots, a_n ceros de f en $D(0, r)$ repetidos según su multiplicidad. Entonces

$$f(z) = g(z) \prod_{j=1}^n \frac{R(z - a_j)}{R^2 - \bar{a}_j z},$$

donde g es holomorfa en $\overline{D(0, R)}$. Si $|z| = R$, cada factor en el producto anterior tiene módulo 1, pues $R^2 - \bar{a}_j z = z(\bar{z} - \bar{a}_j)$, luego $|g(z)| = |f(z)| \leq M$, y el principio del módulo máximo implica que $|g(0)| \leq M$, luego

$$|f(0)| \leq M \prod_{j=1}^n \frac{|a_j|}{R} \leq M \prod_{j=1}^n \frac{r}{R} = M \left(\frac{r}{R} \right)^n. \quad \blacksquare$$

En el teorema 2.25 hemos supuesto que el abierto Ω está acotado, lo cual implica a su vez que f está acotada en $\overline{\Omega}$. Veamos ahora que podemos suponer únicamente la acotación de f :

Teorema 2.30 Sea $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ un abierto no acotado, sea f una función holomorfa en un entorno de $\bar{\Omega}$ acotada en Ω y acotada por M en $\partial\Omega$. Entonces f también está acotada por M en Ω .

DEMOSTRACIÓN: Supongamos en primer lugar que $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Dado $z \in \Omega$, sea $R > |z|$ de manera que $|f(w)| \leq M$ para todo $w \in \Omega$ tal que $|w| \geq R$. Entonces f está acotada por M en la frontera de $\Omega \cap D(0, R)$, luego por el principio del módulo máximo tenemos que $|f(z)| \leq M$.

En el caso general, dado $z \in \Omega$, tomamos $\epsilon > 0$ y un punto $\zeta \in \partial\Omega$. Por continuidad f está acotada por $M + \epsilon$ en un entorno de ζ en Ω , luego podemos tomar $p \in \Omega$ y $r > 0$ tales que $\bar{D}(p, r) \subset \Omega$, $z \in V = \Omega \setminus \bar{D}(p, r)$ y con f acotada por $M + \epsilon$ en $\partial D(p, r)$. Sea

$$g_n(w) = \frac{r}{w-p} f(w)^n,$$

que es holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$ y está acotada por $(M + \epsilon)^n$ en ∂V . Además, como f está acotada en Ω , es claro que $\lim_{w \rightarrow \infty} g_n(w) = 0$. Por el caso ya probado tenemos que $|g_n(z)| \leq (M + \epsilon)^n$, luego

$$|f(z)| \leq \left(\frac{|w-p|}{r} \right)^{1/n} (M + \epsilon),$$

para todo n , luego $|f(z)| \leq M + \epsilon$, para todo ϵ , luego $|f(z)| \leq M$. \blacksquare

De aquí se siguen a su vez varias consecuencias. El teorema siguiente, a partir de cotas respectivas para una función holomorfa sobre dos rectas paralelas, nos proporciona una cota sobre cualquier recta intermedia:

Teorema 2.31 (Teorema de las tres rectas de Hadamard) Sea

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid a < \operatorname{Im} z < b\}$$

una banda vertical en el plano complejo y sea f una función holomorfa y acotada en un entorno de \bar{S} . Si $|f(x + ia)| \leq M_a$ y $|f(x + ib)| \leq M_b$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces, si $a \leq y \leq b$ y $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x + yi)| \leq M_a^{(b-y)/(b-a)} M_b^{(y-a)/(b-a)}.$$

Equivalentemente

$$\log |f(x + yi)| \leq \frac{b-y}{b-a} \log M_a + \frac{y-a}{b-a} \log M_b,$$

o también si, más concretamente, llamamos $M_y = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + yi)|$, tenemos que

$$\log M_y \leq \frac{b-y}{b-a} \log M_a + \frac{y-a}{b-a} \log M_b,$$

lo que significa que $\log M_y$ es una función convexa.

DEMOSTRACIÓN: Sea $g(z) = f(z)M_a^{(b+iz)/(a-b)}M_b^{(iz+a)/b-a}$, que es una función holomorfa y acotada en S . Además

$$|g(x + ia)| \leq M_a |M_a^{(b-a+ix)/(a-b)}| |M_b^{ix/(b-a)}| = M_a M_a^{-1} = 1,$$

e igualmente $|g(x + ib)| \leq 1$. El teorema anterior nos da que g está acotada por 1 en Ω , de donde se sigue la conclusión. ■

De aquí se sigue a su vez una variante con circunferencias en vez de rectas:

Teorema 2.32 (Teorema de las tres circunferencias de Hadamard) *Si*

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid a < |z| < b\}$$

es un anillo en el plano complejo y f es una función holomorfa en un entorno de $\bar{\Omega}$ acotada por M_a en $\partial D(0, a)$ y por M_b en $\partial D(0, b)$, entonces, si $a < |z| < b$, se cumple que

$$|f(z)| \leq M_a^{\log(b/|z|)/\log(b/a)} M_b^{\log(|z|/a)/\log(b/a)}.$$

Esto equivale a que $M_r = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \log |f(re^{i\theta})|$ es una función convexa de $\log r$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $S = \{z \in \mathbb{C} \mid \log a < \operatorname{Im} y < \log b\}$. Entonces la función $F(z) = f(e^{-iz})$ es holomorfa en un entorno de \bar{S} , está acotada y

$$|F(x + i \log a)| = |f(ae^{ix})| \leq M_a,$$

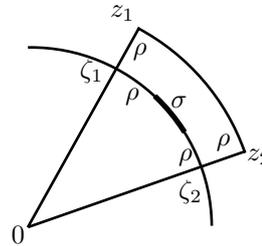
e igualmente $|F(x + i \log b)| \leq M_b$. Por el teorema anterior

$$|f(re^{i\theta})| = |F(-\theta + i \log r)| \leq M_a^{(\log b - \log r)/(\log b - \log a)} M_b^{(\log r - \log a)/(\log b - \log a)}.$$

Terminamos con una aplicación más sofisticada:

Teorema 2.33 (Teorema de Fatou) *Sea Ω un abierto en \mathbb{C} que contenga al 0 y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ su serie de Taylor en 0 y supongamos que su radio de convergencia es 1 y que $\lim_n a_n = 0$. Entonces la serie converge a f en todos los puntos de la circunferencia unidad contenidos en Ω . Además la convergencia es uniforme en los compactos.*

DEMOSTRACIÓN: Sea σ un arco cerrado de la circunferencia unidad $\sigma \subset \Omega$. Prolonguemos los extremos de σ hasta dos puntos ζ_1, ζ_2 que disten una misma cantidad ρ de dichos extremos. Prolonguemos los radios $0\zeta_1, 0\zeta_2$ en la misma distancia ρ hasta puntos z_1, z_2 . Sea S el sector cerrado considerado en la figura. Es claro que tomando ρ suficientemente pequeño podemos garantizar que el sector S esté contenido en Ω . El



arco σ está contenido en el interior de S . Hemos de probar que la serie converge uniformemente a f en σ . Sea

$$\omega_n(z) = \frac{f(z) - \sum_{k=0}^n a_k z^k}{z^{n+1}} (z - \zeta_1)(z - \zeta_2). \quad (2.2)$$

En el disco unidad ω_n admite el desarrollo

$$\omega_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k+1} z^k (z - \zeta_1)(z - \zeta_2). \quad (2.3)$$

La expresión (2.2) muestra que ω_n es holomorfa en $\Omega \setminus \{0\}$. Despejando la serie de potencias en (2.3) vemos que ésta converge en la circunferencia unidad salvo quizá en 0, pero obviamente también converge en 0, luego el segundo miembro de (2.3) es una función holomorfa en el disco unidad, y si definimos $\omega_n(0) = a_{n+k+1} \zeta_1 \zeta_2$, entonces ω_n es una función holomorfa en Ω .

Sea $\epsilon > 0$ y sea $N > 0$ tal que si $n \geq N$ entonces $|a_n| < \epsilon$. Consideremos un punto cualquiera z del segmento (abierto) $0\zeta_1$. Entonces para $n > N$ se cumple

$$|\omega_n(z)| \leq \epsilon \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k |z - \zeta_1| |z - \zeta_2| \leq \epsilon \frac{1}{1 - |z|} (1 - |z|) 2 = 2\epsilon.$$

La misma cota es válida sobre el segmento $0\zeta_2$.

Supongamos ahora que z está en el segmento (abierto) $\zeta_1 z_1$. Sea $R = 1 + \rho$. Entonces $|z - \zeta_1| = |z| - 1$, $|z - \zeta_2| \leq |z| + |\zeta_2| < 2R$. Sea M el máximo de $|f(z)|$ en el sector S .

De nuevo para $n > N$ tenemos

$$\begin{aligned} |\omega_n(z)| &\leq \frac{M + \sum_{k=0}^n |a_k| |z|^k}{|z|^{n+1}} (|z| - 1) 2R \\ &= 2R \frac{M + \sum_{k=0}^N |a_k| |z|^k}{|z|^{n+1}} (|z| - 1) + 2R \frac{\sum_{k=N+1}^n |a_k| |z|^k}{|z|^{n+1}} (|z| - 1) \\ &< 2R \left(M + \sum_{k=0}^N |a_k| R^k \right) \frac{|z| - 1}{|z|^{n+1}} + 2R\epsilon \sum_{k=N+1}^n |z|^k \frac{|z| - 1}{|z|^{n+1}} \\ &= 2R \left(M + \sum_{k=0}^N |a_k| R^k \right) \frac{|z| - 1}{|z|^{n+1}} + 2R\epsilon \frac{|z|^{n+1} - |z|^{N+1}}{|z| - 1} \frac{|z| - 1}{|z|^{n+1}} \\ &< 2R \left(M + \sum_{k=0}^N |a_k| R^k \right) \frac{|z| - 1}{|z|^{n+1}} + 2R\epsilon. \end{aligned}$$

Además

$$\frac{|z| - 1}{|z|^{n+1}} < \frac{|z| - 1}{|z|^{n+1} - 1} = \frac{1}{|z|^n + \dots + |z| + 1} < \frac{1}{n + 1}.$$

Por consiguiente

$$|\omega_n(z)| < 2R \left(M + \sum_{k=0}^N |a_k| R^k \right) \frac{1}{n+1} + 2R\epsilon.$$

Tomamos $N_1 > N$ de modo que si $n > N_1$ el primer sumando se haga menor que ϵ , con lo que para $n > N_1$ tenemos que $|\omega_n(z)| < (2R+1)\epsilon$. Obviamente esto vale también cuando z está en el segmento $\zeta_2 z_2$.

A continuación suponemos que z se encuentra en el arco cerrado de extremos z_1 y z_2 . Entonces $|z - \zeta_1| \leq |z| + |\zeta_1| < 2R$ y $|z - \zeta_2| < 2R$. Ahora

$$\begin{aligned} |\omega_n(z)| &\leq \frac{M + \sum_{k=0}^n |a_k| R^k}{R^{n+1}} 4R^2 = 4 \frac{M + \sum_{k=0}^N |a_k| R^k}{R^{n-1}} + 4 \frac{\sum_{k=N+1}^n |a_k| R^k}{R^{n-1}} \\ &\leq 4 \frac{M + \sum_{k=0}^N |a_k| R^k}{R^{n-1}} + 4\epsilon \frac{\sum_{k=N+1}^n R^k}{R^{n-1}} \\ &= 4 \frac{M + \sum_{k=0}^N |a_k| R^k}{R^{n-1}} + 4\epsilon \frac{R^{n+1} - R^{N+1}}{(R-1)R^{n-1}} \\ &< 4 \frac{M + \sum_{k=0}^N |a_k| R^k}{R^{n-1}} + \frac{4R^2\epsilon}{R-1}. \end{aligned}$$

Como antes, podemos tomar $N_2 \geq N_1 \geq N$ de modo que si $n \geq N_2$ el primer sumando del último término se haga menor que ϵ , con lo que para tales valores de n se cumple

$$|\omega_n(z)| \leq \left(1 + \frac{4R^2}{R-1} \right) \epsilon.$$

Por último notamos que $\omega_n(0) = a_{n+1}\zeta_1\zeta_2$, luego $|\omega_n(0)| = |a_{n+1}| < \epsilon$ para $n \geq N$. Además $\omega_n(\zeta_1) = \omega_n(\zeta_2) = 0$. Con todo esto concluimos que existe una constante K tal que para todo z en la frontera del sector S se cumple $|\omega_n(z)| < K\epsilon$ para todo $n \geq N_2$.

Por el principio del módulo máximo estas desigualdades valen también para los puntos z del interior de S , y en particular para los puntos del arco σ . Así pues, si z está en σ y $n \geq N_2$ tenemos

$$K\epsilon > |\omega_n(z)| = \left| f(z) - \sum_{k=0}^n a_k z^k \right| |z - \zeta_1| |z - \zeta_2| \geq \left| f(z) - \sum_{k=0}^n a_k z^k \right| \rho^2,$$

luego

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right| < \frac{K}{\rho^2} \epsilon,$$

lo que implica que la serie converge a f uniformemente en σ . ■

Como ejemplo observamos que el desarrollo

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n,$$

es válido en realidad siempre que $|z| \leq 1$ excepto en $z = -1$. Para el caso $z = 1$ obtenemos la suma de la serie armónica alternada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2.$$

También tiene interés el caso $z = i$:

$$\log(1+i) = \log \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} i^n.$$

La parte imaginaria de la serie corresponde a la suma de las potencias impares de i . Haciendo $n = 2k + 1$ queda

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots,$$

que es la conocida fórmula de Leibniz. ■

2.5 Series de Laurent

Vamos a generalizar a funciones de varias variables los desarrollos en serie de Laurent descritos en la sección [An 10.3]. Recordemos que un *anillo* es un abierto en \mathbb{C} de la forma

$$A(a; r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}.$$

y ahora definimos un *polianillo* como un abierto en \mathbb{C}^n de la forma

$$A(a; r_1, R_1, \dots, r_n, R_n) = A(a_1; r_1, R_1) \times \dots \times A(a_n; r_n, R_n).$$

No excluimos la posibilidad de que los radios inferiores sean nulos, de modo que, en particular, $A(a; 0, R) = D(a, R) \setminus \{a\}$.

Claramente los polianillos de centro 0 son dominios de Reinhardt, pero no son completos. Pese a ello, vamos a encontrar un desarrollo en serie para las funciones holomorfas definidas en polianillos.

Definición 2.34 Una *serie de Laurent* es una serie de la forma

$$\sum_{m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}} a_{m_1, \dots, m_n} (z_1 - a_1)^{m_1} \dots (z_n - a_n)^{m_n}, \quad a_{m_1, \dots, m_n} \in \mathbb{C}.$$

Su *dominio de convergencia* es la unión de todos los abiertos en

$$D_a = \{z \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq a_i, \text{ para todo } i = 1, \dots, n\}$$

donde converge absolutamente.

Observemos que una serie de Laurent se descompone en suma de 2^n series:

$$\sum_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n} \sum_{m_1, \dots, m_n} a_{\epsilon_1 m_1, \dots, \epsilon_n m_n} (z_1 - a_1)^{\epsilon_1 m_1} \dots (z_n - a_n)^{\epsilon_n m_n},$$

donde $\epsilon_i = \pm 1$ y m_i recorre los números naturales si $\epsilon_i = 1$ y los números naturales no nulos si $\epsilon_i = -1$. La serie converge (absolutamente) si y sólo si lo hacen las 2^n series en que la hemos descompuesto. Si llamamos

$$S_\epsilon(z) = \sum_{m_1, \dots, m_n} a_{\epsilon_1 m_1, \dots, \epsilon_n m_n} z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n},$$

tenemos que la serie de Laurent converge en un punto $z \in D_a$ si y sólo si cada serie de potencias S_ϵ converge en $z^\epsilon = ((z_1 - a_1)^{\epsilon_1}, \dots, (z_n - a_n)^{\epsilon_n})$, y el tal caso la suma de la serie es igual a

$$\sum_{\epsilon} S_\epsilon((z - a)^\epsilon).$$

Teniendo en cuenta que las series S_ϵ convergen casi uniformemente en sus dominios de convergencia a una función holomorfa y que la función $(z - a)^\epsilon$ es una función holomorfa $D_a \rightarrow D_0$ con inversa holomorfa, concluimos que una serie de Laurent converge casi uniformemente a una función holomorfa en su dominio de convergencia.

El resultado principal es el siguiente:

Teorema 2.35 *Sea $A = A(a; r_1, R_1, \dots, r_n, R_n) \subset \mathbb{C}^n$ un polianillo y consideremos una función holomorfa $f : A \rightarrow \Omega$. Entonces f admite un desarrollo en serie de Laurent*

$$f(z) = \sum_{m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}} a_{m_1, \dots, m_n} (z_1 - a_1)^{m_1} \dots (z_n - a_n)^{m_n},$$

donde necesariamente

$$a_{m_1, \dots, m_n} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial^* D(a; \rho_1, \dots, \rho_n)} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - a_1)^{m_1+1} \dots (\zeta_n - a_n)^{m_n+1}} d\zeta_1 \dots d\zeta_n,$$

para radios cualesquiera $r_i < \rho_i < R_i$.

DEMOSTRACIÓN: Considerando la función $g(z) = f(z + a)$, definida en el polianillo $A(0; r_1, R_1, \dots, r_n, R_n)$, podemos suponer que $a = 0$, pues f admite un desarrollo en serie de Laurent su dominio si y sólo si g lo admite en el suyo, y la expresión del enunciado para los coeficientes de la serie de f es la misma que la expresión correspondiente para los coeficientes de g .

Por simplificar la notación vamos a tomar $n = 2$, aunque el argumento es completamente general. Dado $z \in A$, fijamos radios

$$0 < r_i < r'_i < |z_i| < R'_i < R_i$$

y tomamos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño para que $\overline{D(z, \epsilon)} \subset A(0, r'_i, R'_i)$. El abierto $\Omega = A(0, r'_i, R'_i) \setminus \overline{D(z, \epsilon)}$ es una variedad con frontera tal que f está definida en un entorno de su clausura.

El teorema 1.27 nos da que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|=\epsilon} \frac{f(\zeta_1, z_2)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1 \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|=R'_1} \frac{f(\zeta_1, z_2)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|=r'_1} \frac{f(\zeta_1, z_2)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1. \end{aligned}$$

Repetimos el argumento con los integrandos considerados como funciones de su segunda variable, y así obtenemos que

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|\zeta_1|=R'_1, |\zeta_2|=R'_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} d\zeta_1 d\zeta_2 \\ &+ \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|\zeta_1|=r'_1, |\zeta_2|=r'_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} d\zeta_1 d\zeta_2 \\ &- \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|\zeta_1|=R'_1, |\zeta_2|=r'_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} d\zeta_1 d\zeta_2 \\ &- \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|\zeta_1|=r'_1, |\zeta_2|=R'_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} d\zeta_1 d\zeta_2. \end{aligned}$$

Los cuatro integrandos se desarrollan de forma similar como series de potencias. Veamos, por ejemplo, el caso del último. Para $|\zeta_1| = r'_1$ se cumple que

$$-\frac{1}{\zeta_1 - z_1} = \sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{\zeta_1^{m_1}}{z_1^{m_1+1}},$$

mientras que para $|\zeta_2| = R'_2$ tenemos que

$$\frac{1}{\zeta_2 - z_2} = \sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{z_2^{m_2}}{\zeta_2^{m_2+1}}.$$

Entonces [An 2.89] nos da la convergencia absoluta de

$$-\frac{1}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} = \sum_{m_1, m_2=0}^{\infty} \frac{\zeta_1^{m_1}}{z_1^{m_1+1}} \frac{z_2^{m_2}}{\zeta_2^{m_2+1}} = \sum_{m_1 < 0, m_2 \geq 0} \frac{z_1^{m_1} z_2^{m_2}}{\zeta_1^{m_1+1} \zeta_2^{m_2+1}}.$$

El cuarto término de la descomposición precedente se convierte así en

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|\zeta_1|=r'_1, |\zeta_2|=R'_2} \sum_{m_1 < 0, m_2 \geq 0} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_1^{m_1+1} \zeta_2^{m_2+1}} z_1^{m_1} z_2^{m_2}.$$

Exactamente igual que en la prueba del teorema 2.11, el teorema de mayoración de Weierstrass implica que la serie converge uniformemente sobre el producto de las dos circunferencias sobre las que se realiza la integración y, el teorema 1.18 nos permite entonces intercambiar la suma con la integral:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{m_1 < 0, m_2 \geq 0} \left(\int_{|\zeta_1|=r'_1, |\zeta_2|=R'_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_1^{m_1+1} \zeta_2^{m_2+1}} \right) z_1^{m_1} z_2^{m_2}.$$

Descomponiendo la integral en dos integrales iteradas y aplicando 1.27 a un anillo determinado por dos radios distintos, vemos que la integral toma el mismo valor para cualquier $r_i < r'_i < R_i$ y cualquier $r_i < R'_i < R_i$, luego la expresión anterior coincide también con

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{m_1 < 0, m_2 \geq 0} \left(\int_{|\zeta_1|=\rho_1, |\zeta_2|=\rho_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_1^{m_1+1} \zeta_2^{m_2+1}} \right) z_1^{m_1} z_2^{m_2}.$$

Agrupando las cuatro series correspondientes a las cuatro integrales en que hemos descompuesto $f(z)$ obtenemos el desarrollo en serie del enunciado.

Veamos ahora que si f admite un desarrollo en serie de Laurent, entonces los coeficientes a_m son necesariamente los dados por el teorema. En efecto, consideramos la integral

$$\int_{\partial^* D(a; \rho_1, \dots, \rho_n)} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - a_1)^{k_1+1} \dots (\zeta_n - a_n)^{k_n+1}} d\zeta_1 \dots d\zeta_n =$$

$$\int_{\partial^* D(a; \rho_1, \dots, \rho_n)} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_{m_1, \dots, m_n} (\zeta_1 - a_1)^{k_1 - m_1 - 1} \dots (\zeta_n - a_n)^{k_n - m_n - 1} d\zeta_1 \dots d\zeta_n.$$

El integrando es una serie de Laurent, luego converge casi uniformemente, lo que permite una vez más intercambiar la suma con la integral. Así pues, la integral considerada es igual a

$$\sum_{m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}} a_{m_1, \dots, m_n} \int_{|\zeta_1 - a_1|=\rho_1} (\zeta_1 - a_1)^{k_1 - m_1 - 1} d\zeta_1 \dots \int_{|\zeta_n - a_n|=\rho_n} (\zeta_n - a_n)^{k_n - m_n - 1} d\zeta_n,$$

pero todos los integrandos tienen primitiva en $\mathbb{C} \setminus \{a_j\}$ excepto cuando el exponente es -1 , por lo que las integrales son nulas, y por otra parte sabemos que

$$\int_{|\zeta_j - a_j|=\rho_j} \frac{1}{\zeta_j - a_j} d\zeta_j = 2\pi i,$$

luego, en definitiva,

$$\int_{\partial^* D(a; \rho_1, \dots, \rho_n)} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - a_1)^{k_1+1} \dots (\zeta_n - a_n)^{k_n+1}} d\zeta_1 \dots d\zeta_n = (2\pi i)^n a_{k_1, \dots, k_n},$$

y esto nos da la expresión para a_{k_1, \dots, k_n} dada en el enunciado. \blacksquare

Los teoremas [An 10.11] y [An 10.12] son casos particulares del teorema anterior. No merece la pena reproducir aquí la sección [An 10.4] sobre la clasificación de las singularidades aisladas de las funciones de una variable. En particular, tenemos que toda singularidad aislada de una función holomorfa de una variable es evitable, un polo o es esencial. Conviene dar nombre a las funciones sin singularidades esenciales:

Definición 2.36 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto no vacío. Una función *meromorfa* en Ω es una función $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus P)$, donde $P \subset \Omega$ es un conjunto de puntos aislados en los que f tiene polos. Llamaremos $\mathcal{M}(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones meromorfas en Ω .

Notemos que P no puede tener ningún punto de acumulación $z \in \Omega$, ya entonces $z \notin P$ (porque los puntos de P son aislados) y f tendría que ser holomorfa en un entorno de z , mientras que, por otra parte, en dicho entorno tendría que haber puntos de P donde no es holomorfa.

Si $f, g \in \mathcal{M}(\Omega)$, de modo que f es holomorfa en $\Omega \setminus P_f$ y g en $\Omega \setminus P_g$, podemos definir puntualmente la suma $f + g$ y el producto fg sobre el abierto $\Omega \setminus (P_f \cup P_g)$, donde son funciones holomorfas, y el teorema [An 10.19] implica que estas funciones no tienen singularidades esenciales en $P_f \cup P_g$. Si llamamos P_+ y P_\times a los subconjuntos de $P_f \cup P_g$ donde $f + g$ y fg tienen polos (es decir, eliminamos los puntos donde tengan singularidades evitables) tenemos que ambas funciones se extienden de forma única a funciones $f + g \in \mathcal{H}(\Omega \setminus P_+)$, $fg \in \mathcal{H}(\Omega \setminus P_\times)$, es decir, a funciones $f + g, fg \in \mathcal{M}(\Omega)$.

En otros términos: para sumar o multiplicar dos funciones meromorfas, las sumamos o multiplicamos en los puntos donde son holomorfas y después las extendemos a los puntos de Ω donde tengan singularidades evitables.

Se comprueba sin dificultad que $\mathcal{M}(\Omega)$ tiene estructura de anillo con estas operaciones.¹ Más aún, identificando a \mathbb{C} con las funciones constantes, obtenemos una estructura de álgebra sobre \mathbb{C} . Todavía podemos decir más:

Teorema 2.37 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto no vacío. Una función $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ tiene inversa si y sólo si $o(f, z) \neq +\infty$ para todo $z \in \Omega$. Esto equivale a que f no sea idénticamente nula en ninguna componente conexa de Ω . En particular, si Ω es conexo, entonces $\mathcal{M}(\Omega)$ es un cuerpo.*

DEMOSTRACIÓN: Si f no tiene índice infinito en ningún punto, el teorema [An 0.19] implica que $1/f$ (definida en principio donde f no tiene ceros ni polos) se extiende a una función holomorfa en todos los puntos de Ω salvo en el conjunto de puntos aislados donde f tenga ceros, y en tales puntos $1/f$ tiene polos, luego $1/f \in \mathcal{M}(\Omega)$ y es, ciertamente, la inversa de f .

Por el contrario, si f tiene orden infinito en un punto $z \in \Omega$, entonces su serie de Laurent alrededor de z es nula, luego f es idénticamente nula en un entorno de z y, por el principio de prolongación analítica, es idénticamente nula en la componente conexa de z en Ω . Esto implica que f no puede tener inversa, pues la función g que vale 1 en dicha componente conexa y 0 en las restantes cumple $fg = 0$, luego si f tuviera inversa sería $g = 0$, lo cual no es el caso. ■

Notemos que si una función meromorfa tiene un polo de orden n en un punto, entonces su inversa tiene un cero de orden n , y viceversa.

En 4.10 demostraremos que toda función meromorfa en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ es el cociente de dos funciones holomorfas, de modo que, si Ω es conexo, entonces $\mathcal{M}(\Omega)$ no es sino el cuerpo de cocientes de $\mathcal{H}(\Omega)$.

¹Por ejemplo, para probar que $(f + g) + h = f + (g + h)$ observamos que ambos miembros se restringen a una misma función holomorfa definida en Ω salvo un conjunto de puntos aislados donde pueden tener polos o singularidades evitables, lo que implica que ambas tienen singularidades evitables en los mismos puntos y que las extensiones holomorfas a dichos puntos toman el mismo valor, luego ambos miembros son la misma función.

Con lo visto en este capítulo el lector está en condiciones de leer la sección A.2 del apéndice A, algunos de cuyos resultados serán necesarios en el capítulo siguiente de forma ocasional.

Capítulo III

Funciones holomorfas de una variable

Para completar la exposición de los resultados fundamentales de las funciones holomorfas nos ocupamos aquí de algunos hechos exclusivos de funciones de una variable. Esta “exclusividad” es atribuible, por una parte, a las características de la topología de \mathbb{C} que dependen esencialmente de su carácter bidimensional y, por otra parte, del hecho de que las funciones holomorfas en abiertos de \mathbb{C} pueden estudiarse a través de sus singularidades aisladas, que no existen en dimensiones superiores.

3.1 Índices de arcos cerrados

Si $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es un arco continuo cerrado y $z \in \mathbb{C} \setminus \phi^*$, en [TA 1.59] definimos el índice $I(\phi, z)$, que se interpreta como el número de vueltas que da ϕ alrededor de z , teniendo en cuenta que las vueltas en sentido horario cancelan en el cómputo a las vueltas en sentido antihorario. Allí definimos el índice en términos de las determinaciones continuas del argumento de $\phi - z$, que proporciona la interpretación geométrica natural del índice, pero en nuestro contexto será más conveniente expresarlo en términos de determinaciones continuas del logaritmo en el sentido que vamos a introducir a continuación:

Definición 3.1 Si $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es un arco continuo y $z \in \mathbb{C} \setminus \phi^*$, una *determinación continua del argumento de ϕ relativa a z* es cualquier aplicación continua $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo $t \in [a, b]$, se cumpla que

$$\phi(t) - z = |\phi(t) - z|e^{i\alpha(t)}.$$

Si $0 \notin \phi^*$, una determinación continua del logaritmo de ϕ es cualquier aplicación continua $L : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que, para todo $t \in [a, b]$, se cumpla que

$$\phi(t) = e^{L(t)}.$$

es decir, que $L(t)$ es un logaritmo de $\phi(t)$.

La relación obvia entre ambos conceptos es que si α es una determinación continua del argumento de ϕ respecto de z , entonces $L(t) = \log |\phi(t) - z| + i\alpha(t)$ es una determinación continua del logaritmo de $\phi - z$ y, recíprocamente, si L es una determinación continua del logaritmo de $\phi - z$, entonces $\text{Im } L$ es una determinación continua del argumento de ϕ relativo a z .

Notemos que una determinación continua del logaritmo de $\phi - z$ no es sino una elevación al cubrimiento determinado por la exponencial del arco $\phi - z$, por lo que su existencia está garantizada por el teorema [TA 1.57], por lo que también podemos afirmar que todo arco ϕ admite una determinación continua del argumento respecto de cualquier punto $z \in \mathbb{C} \setminus \phi^*$.

En [TA 1.59] definimos el *índice* de un arco cerrado $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$I(\phi, z) = (\alpha(b) - \alpha(a))/2\pi,$$

donde α es cualquier determinación continua del argumento de $\phi - z$, pero ahora podemos expresarlo equivalentemente como

$$I(\phi, z) = \frac{L(b) - L(a)}{2\pi i},$$

donde L es cualquier determinación continua del logaritmo de $\phi - z$. A su vez, de aquí obtenemos una expresión más práctica para arcos diferenciables a trozos:

Teorema 3.2 *Sea ϕ un arco cerrado diferenciable a trozos y $z \in \mathbb{C} \setminus \phi^*$. Entonces*

$$I(\phi, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta.$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos en primer lugar que ϕ es un arco derivable en $[a, b]$ no necesariamente cerrado y sea $L : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una determinación continua del logaritmo de $\phi - z$. Dado cualquier $t_0 \in [a, b]$, podemos tomar un disco $D(\phi(t_0), r)$ que no contenga a z . Por el teorema 1.36 existe una función holomorfa $\log(\zeta - z)$ que a cada ζ en $D(\phi(t_0), r)$ le asigna un logaritmo de $\zeta - z$, y podemos exigir que $\log(\phi(t_0) - z) = L(t_0)$.

Ahora bien, tanto $L(t)$ como $\log(\phi(t) - z)$ son determinaciones continuas del logaritmo en un entorno de t_0 , luego por continuidad tienen que diferir en un múltiplo de $2\pi i$, pero, como coinciden en t_0 , son iguales. El teorema 1.19 nos da que L es derivable en t_0 (es decir, en cualquier punto t de su dominio) y que

$$L'(t) = \log'(\phi(t) - z)\phi'(t) = \frac{\phi'(t)}{\phi(t) - z}.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\phi} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \int_a^b \frac{\phi'(t)}{\phi(t) - z} dt = \int_a^b L'(t) dt = L(b) - L(a).$$

Si ϕ es derivable a trozos, aplicamos esta relación a cada uno de los trozos en los que ϕ es derivable y, al sumar obtenemos la misma relación para ϕ . Si además ϕ es cerrado concluimos que

$$\int_{\phi} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = L(b) - L(a) = 2\pi i I(\phi, z). \quad \blacksquare$$

El teorema [TA 1.60] recoge las propiedades fundamentales del índice de un arco cerrado respecto de un punto $z \in \mathbb{C}$, a saber, que es invariante por homotopías en $\mathbb{C} \setminus \{z\}$, que es constante en las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \phi^*$ y que es nulo en la única componente conexa no acotada.

En ocasiones será conveniente trabajar con la generalización siguiente del concepto de arco:

Definición 3.3 Llamaremos *ciclos* a los elementos del \mathbb{Z} -módulo libre generado por todos los arcos cerrados en \mathbb{C} de clase C^1 a trozos, de modo que cada ciclo no nulo ϕ se expresa de forma única como

$$\phi = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i,$$

donde $a_i \in \mathbb{Z}$ y cada $\phi_i : [u_i, v_i] \rightarrow \mathbb{C}$ es un arco cerrado de clase C^1 a trozos.

Definimos el *rango* y la *longitud* del ciclo ϕ , respectivamente, como

$$\phi^* = \bigcup_{i=1}^n \phi_i^*, \quad L(\phi) = \sum_{i=1}^n |a_i| L(\phi_i).$$

Si $f : \phi^* \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua definimos

$$\int_{\phi} f(\zeta) d\zeta = \sum_{i=1}^n a_i \int_{\phi_i} f(\zeta) d\zeta.$$

Si $z \in \mathbb{C} \setminus \phi^*$, el *índice* de ϕ respecto a z es

$$I(\phi, z) = \sum_{i=1}^n a_i I(\phi_i, z).$$

Es evidente que todas las propiedades elementales sobre integrales e índices se generalizan inmediatamente a ciclos. Por ejemplo, para probar el teorema 3.2, es decir, la relación

$$I(\phi, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta, \quad \text{para } z \in \mathbb{C} \setminus \phi^*,$$

descomponemos el índice del ciclo en combinación lineal de los índices de sus arcos componentes, aplicamos 3.2 y después la definición de integral sobre un ciclo.

Cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \phi^*$ está contenida en una componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \phi_i$, de donde se concluye que el índice de un ciclo ϕ es constante sobre las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \phi^*$, así como que se anula sobre la componente conexa no acotada.

Ahora necesitamos un resultado técnico. Recordemos que \mathbb{C}^∞ representa la compactificación de Alexandroff de \mathbb{C} .

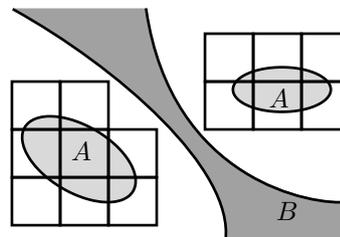
Teorema 3.4 Sean A y B cerrados disjuntos en \mathbb{C}^∞ de modo que $\infty \notin A$. Entonces existe un ciclo γ tal que

1. $\gamma^* \cap (A \cup B) = \emptyset$.
2. Para todo $z \in A$ se cumple $I(\gamma, z) = 1$,
3. Para todo $z \in B$, $z \neq \infty$ se cumple $I(\gamma, z) = 0$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $d = d(A, B \cap \mathbb{C}) > 0$. Sea $0 < \rho < d\sqrt{2}/2$. Dividamos el plano complejo en cuadrados de lado ρ (de modo que uno de ellos tenga un vértice en 0, por ejemplo).

Puesto que A es compacto, es claro que A sólo corta a un número finito de cuadrados. Llamémoslos C_1, \dots, C_n . Por ejemplo, la figura siguiente muestra un caso donde $n = 14$.

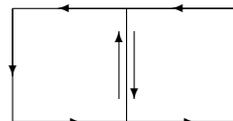
Podemos ver a cada cuadrado C_i como un arco cerrado orientado positivamente (en sentido antihorario), que se puede expresar como unión de cuatro segmentos. Llamaremos $[C_i]$ al conjunto de puntos contenidos en el cuadrado incluyendo a la frontera. Dejamos a cargo del lector las definiciones formales de estos conceptos, pues son similares a las que hemos dado para triángulos en la sección [IC 7.3]



Tenemos que $A \subset \bigcup_{i=1}^n [C_i]$. El diámetro de cada cuadrado $[C_i]$ es $\sqrt{2}\rho < d$ y, como todos los cuadrados cortan a A , es claro que $\bigcup_{i=1}^n [C_i] \cap B = \emptyset$ (tal y como muestra la figura anterior).

Consideremos el ciclo $\gamma_0 = \sum_{i=1}^n C_i$. Claramente $\gamma_0^* \cap B = \emptyset$. Además $I(\gamma_0, z) = 0$ para todo $z \in B \cap \mathbb{C}$, pues z está en la componente conexa no acotada de cada $\mathbb{C} \setminus C_i^*$.

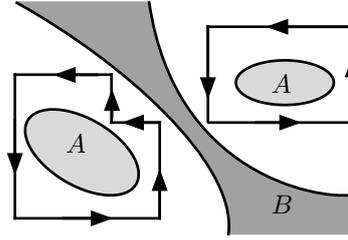
Como todos los cuadrados están orientados en sentido positivo, es claro que si dos de ellos son adyacentes (tienen un lado en común) entonces la orientación de dicho lado es distinta en cada cuadrado. Podemos eliminar todos los pares de lados comunes a dos cuadrados hasta obtener un ciclo γ que no contenga lados pertenecientes a cuadrados adyacentes.¹



Puesto que $\gamma^* \subset \gamma_0^*$ es claro que $\gamma^* \cap B = \emptyset$. Como γ se ha obtenido de γ_0 eliminando pares de arcos opuestos, se cumple que las integrales a lo largo de γ valen lo mismo que las integrales a lo largo de γ_0 , y en particular $I(\gamma, z) = 0$ para todo $z \in B \cap \mathbb{C}$.

¹Con rigor γ se obtiene de γ_0 por un proceso recurrente fácil de precisar, pero que no detallamos aquí.

También se cumple que $\gamma^* \cap A = \emptyset$, pues si existiera un punto $z_0 \in \gamma^* \cap A$ entonces $z_0 \in C_i$ para algún índice i , y el cuadrado adyacente a C_i por el lado que contiene a z_0 cortaría a A , luego es un C_j , con lo que llegamos a que γ contendría un lado que pertenece a dos de los cuadrados, en contra de la construcción que hemos hecho.



Sólo falta probar que $I(\gamma, z) = 1$ para todo $z \in A$. Para ello distinguimos dos casos:

1) $z \in A \setminus \bigcup_{i=1}^n C_i^*$. Entonces $z \in [C_i] \setminus C_i^*$ para algún i y $z \notin [C_j]$ para todo $j \neq i$. Por lo tanto $I(\gamma, z) = I(\gamma_0, z) = I(C_i, z) = 1$.

2) $z \in A \cap \bigcup_{i=1}^n C_i^*$. Entonces $z \in C_i^*$ para algún i . Sea z_0 el centro del cuadrado C_i . El segmento $[z_0, z]$ no corta a γ^* y, como es un conexo, z_0 y z están en la misma componente conexas de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Aplicando el caso anterior $I(\gamma, z) = I(\gamma, z_0) = 1$. ■

Como primera aplicación demostramos lo siguiente:

Teorema 3.5 Consideremos un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Entonces $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ es conexo si y sólo si para todo arco cerrado ϕ tal que $\phi^* \subset \Omega$ y todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, se cumple que $I(\phi, z) = 0$.

DEMOSTRACIÓN: La aplicación $I(\phi, z)$ es continua en $\mathbb{C} \setminus \phi^*$ y vale 0 en el complementario de un disco, luego se puede extender continuamente a $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ definiendo $I(\phi, \infty) = 0$. Si $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ es conexo, como el índice sólo toma valores enteros, éste ha de ser nulo en todos los puntos de $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$.

Recíprocamente, si $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega = A \cup B$, donde A y B son cerrados disjuntos no vacíos, uno de ellos, digamos B , no contendrá a ∞ . Tomemos un ciclo γ según el teorema anterior. Como $\gamma^* \cap (A \cup B) = \emptyset$ se cumple $\gamma^* \subset \Omega$. Sea $z_0 \in A$. Entonces $I(\gamma, z_0) = 1$, luego alguno de los arcos cerrados ϕ que componen a γ ha de cumplir que $I(\phi, z_0) \neq 0$ (y claramente $\phi^* \subset \Omega$), luego Ω no cumple la condición del enunciado. ■

La condición del teorema anterior puede expresarse diciendo que desde dentro de Ω no se puede rodear a ningún punto de fuera de Ω o, más gráficamente, diciendo que Ω “no tiene agujeros”.

3.2 Consecuencias del teorema de Cauchy

En 1.35 hemos probado el teorema de Cauchy para funciones holomorfas en abiertos que cumplen $H^1(\Omega) = 0$, y en 1.28 hemos probado las fórmulas integrales de Cauchy para integrales sobre circunferencias. Ahora vamos a generalizar estos resultados, para lo cual necesitamos un resultado previo:

Teorema 3.6 Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, la función g dada por

$$g(\zeta, z) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{si } \zeta \neq z, \\ f'(z) & \text{si } \zeta = z, \end{cases}$$

es holomorfa en $\Omega \times \Omega$.

DEMOSTRACIÓN: Es obvio que g es holomorfa en los puntos donde $\zeta \neq z$. Fijemos, pues, un punto (ζ_0, z_0) con $\zeta_0 = z_0$. Sea $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subset \Omega$. Basta probar que

$$g(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - \zeta)(\xi - z)} d\xi, \quad \zeta, z \in D(z_0, r),$$

pues el teorema 1.23 prueba entonces que g es holomorfa en $D(\zeta_0, r) \times D(z_0, r)$.

Si $\zeta \neq z$, las fórmulas de Cauchy nos dan

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - \zeta} d\xi, \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

de donde

$$g(\zeta, z) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - \zeta)(\xi - z)} d\xi.$$

Si $\zeta = z$ entonces, también por las fórmulas de Cauchy,

$$g(\zeta, z) = f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - \zeta)(\xi - z)} d\xi. \quad \blacksquare$$

Ahora ya podemos probar:

Teorema 3.7 (Teorema y fórmulas de Cauchy) Sea Ω un abierto en \mathbb{C} y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sea ϕ un ciclo tal que $\phi^* \subset \Omega$ y supongamos que para todo punto $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ se cumple $I(\phi, z) = 0$. Entonces

1. $\int_{\phi} f(\zeta) d\zeta = 0$.
2. Para todo número natural n y todo $z \in \Omega \setminus \phi^*$ se cumple

$$I(\phi, z) f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\phi} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

DEMOSTRACIÓN: Comenzamos probando 2) para $n = 0$. Sea $g(\zeta, z)$ la función definida en el teorema anterior y sea $G(z) = \int_{\phi} g(\zeta, z) d\zeta$. Claramente $G \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si $z \in \Omega \setminus \phi^*$ entonces

$$\begin{aligned} G(z) &= \int_{\phi} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\phi} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\phi} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) I(\phi, z) \right). \end{aligned}$$

Basta probar que G es constantemente igual a 0 en Ω .

Sea $V = \{z \in \Omega \mid I(\phi, z) = 0\}$. La continuidad del índice implica que V es abierto y cerrado en $\Omega \setminus \phi^*$, luego es abierto en \mathbb{C} . Por la hipótesis sobre el índice se cumple que $\mathbb{C} = \Omega \cup V$. Los puntos $z \in \Omega \cap V$ cumplen

$$G(z) = \int_{\phi} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

con lo que podemos definir

$$F(z) = \begin{cases} G(z) & \text{si } z \in \Omega \\ \int_{\phi} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta & \text{si } z \in V \end{cases}$$

y obtenemos así una función entera. Vamos a aplicarle el teorema de Liouville. Demostraremos que existe $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$, lo que implica que F es constantemente nula y G también.

Puesto que V contiene a la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \phi^*$, para calcular el límite podemos suponer que $z \in V$. Más aún, podemos suponer que $|z| > R$, para un R que cumpla $\phi^* \subset D(0, R)$. Entonces, si M es una cota del módulo de f sobre ϕ^* se cumple

$$|F(z)| = \left| \int_{\phi} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq L(\phi) \frac{M}{|z| - R},$$

y esta expresión tiende a 0 cuando $z \rightarrow \infty$.

El caso general de 2) se demuestra fácilmente por inducción derivando las integrales. La única precaución que hay que tomar es que dado $z \in \Omega \setminus \phi^*$ existe un $r > 0$ tal que $D(z, r) \subset \Omega \setminus \phi^*$, y en este disco $I(\phi, z)$ es constante, luego no afecta a las derivadas.

Por último fijamos $z \in \Omega \setminus \phi^*$ y definimos $g(\zeta) = (\zeta - z)f(\zeta)$. Entonces $g(z) = 0$ y la fórmula integral para $n = 0$ aplicada a g nos da 1):

$$0 = I(\phi, z)g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi} f(\zeta) d\zeta. \quad \blacksquare$$

De aquí se sigue a su vez una versión más general del teorema de los residuos [An 10.25]:

Teorema 3.8 (Teorema de los residuos) *Sea Ω un abierto en \mathbb{C} y f una función tal que si $z \in \Omega$ entonces f es holomorfa en z o bien f tiene una singularidad aislada en z . Sea γ un arco cerrado contenido en Ω y que no pase por ninguna singularidad de f . Supongamos además que $I(\gamma, z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Entonces*

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{z \in \Omega} \text{Res}(f, z) I(\gamma, z).$$

Notemos que todos los sumandos de la derecha son nulos salvo un número finito. Se entiende que si $z \in \gamma^*$ entonces $\text{Res}(f, z) I(\gamma, z) = 0$ (aunque el índice no esté definido).

DEMOSTRACIÓN: Sea B el conjunto de singularidades no evitables de f . Como todas las singularidades de f son aisladas, B es un conjunto discreto, luego numerable. Obviamente $\text{Res}(f, z) = 0$ para cualquier z que no esté en B . Más aún, B no puede tener puntos de acumulación en Ω , pues tales puntos no serían singularidades aisladas de f .

Sea $H = \{z \in B \mid I(\gamma, z) \neq 0\} \subset B$. Si $I(\gamma, z) \neq 0$ entonces z no está en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, luego H está contenido en un conjunto acotado. Si fuera infinito tendría un punto de acumulación $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, y por hipótesis $I(\gamma, z_0) = 0$. Ahora bien, como el índice es constante en las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, resultaría que $I(\gamma, z) = 0$ en un entorno de z_0 , luego habría puntos de H con índice nulo, contradicción. Así pues, H es finito.

Cambiando Ω por $(\Omega \setminus B) \cup H$ podemos suponer que f tiene un número finito de singularidades en Ω (los puntos que hemos eliminado cumplen $I(\gamma, z) = 0$, luego sigue siendo cierto que $I(\gamma, z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$).

Si $z \in H$, entonces z es una singularidad aislada de f , es decir, f es holomorfa en un entorno reducido $D'(z, r)$. Consideremos la serie de Laurent

$$f(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}(z)}{(\zeta - z)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)(\zeta - z)^n \quad \text{para } \zeta \in D'(z, r).$$

Llamemos

$$S_z(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}(z)}{(\zeta - z)^n}$$

a la parte singular de la serie. Como converge en $D'(z, r)$, la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(\zeta - z)^n$ converge en todo punto con $|\zeta - z| > 1/r$, luego su radio de convergencia es infinito, luego $S_z(\zeta)$ converge de hecho (y es holomorfa) en $\mathbb{C} \setminus \{z\}$. Consecuentemente la función $g(\zeta) = f(\zeta) - \sum_{z \in H} S_z(\zeta)$ es holomorfa en $\Omega \setminus H$. Ahora bien, si $z_0 \in H$ entonces

$$g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0)(\zeta - z_0)^n - \sum_{z \in H \setminus \{z_0\}} S_z(\zeta) \quad \text{para } \zeta \in D'(z, r),$$

luego z es una singularidad evitable de g y, por lo tanto, podemos considerar que $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Estamos en las hipótesis de la versión general del teorema de Cauchy, luego

$$0 = \int_{\gamma} g(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta - \sum_{z \in H} \int_{\gamma} S_z(\zeta) d\zeta.$$

Las series de Laurent convergen uniformemente en compactos, y γ^* es un compacto, luego por el teorema 1.18 podemos intercambiar la serie y la integral,

es decir,

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \sum_{z \in H} \int_{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}(z)}{(\zeta - z)^n} d\zeta = \sum_{z \in H} a_{-n}(z) \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} \frac{1}{(\zeta - z)^n} d\zeta.$$

Pero es claro que todos los integrandos tienen primitiva excepto para $n = 1$, luego

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \int_{z \in H} a_{-1}(z) \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i \sum_{z \in H} \text{Res}(f, z) I(\gamma, z). \quad \blacksquare$$

Vamos a obtener algunas consecuencias teóricas del teorema de los residuos, para lo cual necesitamos el concepto de derivada logarítmica de una función meromorfa:

Definición 3.9 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto no vacío y f una función meromorfa en Ω que no sea idénticamente nula en ninguna componente conexa de Ω . Definimos su *derivada logarítmica* como f'/f .

Notemos que la derivada logarítmica de f es la derivada de cualquier logaritmo holomorfo de f dado por el teorema 1.36, pero, mientras que, en principio, los logaritmos holomorfos sólo están definidos localmente, la derivada logarítmica lo está en todos los puntos de Ω donde f no se anula, es decir, en todos los puntos de Ω salvo a lo sumo en un conjunto de puntos aislados (por el principio de prolongación analítica los puntos donde f se anula son aislados).

A la hora de calcular derivadas logarítmicas es útil tener en cuenta que, por la regla de derivación de productos, la derivada logarítmica de un producto es la suma de las derivadas logarítmicas de los factores.

El teorema siguiente prueba que f'/f es meromorfa en Ω :

Teorema 3.10 Sea z_0 una singularidad aislada de orden $k \neq 0$ de una función holomorfa f . Entonces z_0 es un polo simple de f'/f y $\text{Res}(f'/f, z_0) = k$.

DEMOSTRACIÓN: Por definición de orden de una singularidad

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+k}, \quad \text{para } 0 < |z - z_0| < r,$$

donde $a_0 \neq 0$. Derivando queda

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k) a_n (z - z_0)^{n+k-1},$$

en el mismo entorno reducido. Así

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k g(z), \\ f'(z) &= (z - z_0)^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+k) a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^{k-1} h(z), \end{aligned}$$

donde las funciones $g(z)$ y $h(z)$ son holomorfas y no nulas en z_0 . En concreto, $g(z_0) = a_0$, $h(z_0) = ka_0$. Por consiguiente

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - z_0} \frac{h(z)}{g(z)}$$

tiene un polo simple en z_0 y el residuo es

$$\text{Res}(f'/f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z)}{g(z)} = k. \quad \blacksquare$$

Teorema 3.11 (Principio del argumento) *Sea Ω un abierto en \mathbb{C} y f una función meromorfa en Ω no sea idénticamente nula en ninguna componente conexa de Ω . Sea ϕ un ciclo tal que $\phi^* \subset \Omega$ y no pase por ningún cero o polo de f . Supongamos también que $I(\phi, z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Entonces*

$$I(\phi \circ f, 0) = \sum_{z \in \Omega} o(f, z) I(\phi, z).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\phi = \sum_i a_i \psi_i$, donde $a_i \in \mathbb{Z}$ y cada ψ_i es un arco cerrado definido en un intervalo $[\alpha_j, \beta_j]$. Entonces

$$\begin{aligned} I(\phi \circ f, 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi \circ f} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \sum_i a_i \int_{\psi_i \circ f} \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_i a_i \int_{\alpha_j}^{\beta_j} \frac{f'(\psi_i(t)) \psi_i'(t)}{f(\psi_i(t))} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_i a_i \int_{\psi_i} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta. \end{aligned}$$

Si los arcos ψ_i no fueran derivables sino derivables a trozos tendríamos que descomponer las integrales intermedias en sumandos correspondientes a intervalos en los que los arcos fueran derivables, pero el resultado final sería el mismo. Ahora basta aplicar el teorema de los residuos y el teorema anterior. \blacksquare

En el caso particular en que ϕ es un arco sencillo de los que solemos considerar, como una circunferencia, o un rectángulo, etc. recorrido en sentido positivo, el miembro derecho de la fórmula del principio del argumento es simplemente la diferencia entre el número de ceros menos el número de polos de f rodeados por ϕ , contado cada uno tantas veces como indica su multiplicidad. La hipótesis sobre los índices se interpreta como que no podemos permitir que ϕ rodee a un cero o polo de una prolongación analítica de f a un punto exterior a Ω y que no sea tenido en cuenta. El nombre del teorema se debe a que el miembro izquierdo es la variación del argumento de f a lo largo de ϕ dividida entre 2π .

Cuando el principio del argumento se aplica a funciones sin polos nos da cierta información sobre la existencia de ceros de una función en una región dada del plano complejo (la rodeada por un cierto arco). No obstante, calcular

las variaciones del argumento de una función no es sencillo, por lo que el principio del argumento no se presta a aplicaciones directas. Lo que vamos a ver es que en ciertas circunstancias podemos asegurar que la variación del argumento de dos funciones sobre un mismo arco es la misma, con lo que el principio del argumento nos relaciona los ceros de ambas funciones. Esto es el teorema de Rouché. La prueba se basa en un teorema geométrico intuitivamente evidente que podemos parafrasear como sigue:

Un hombre pasea con su perro de tal modo que su distancia a cierto árbol es siempre mayor que la longitud de la correa del perro. Entonces el hombre y el perro dan el mismo número de vueltas al árbol.

Teorema 3.12 Sean $\phi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ arcos cerrados y α un número complejo tal que $|\phi(t) - \psi(t)| < |\phi(t) - \alpha|$ para todo $t \in [a, b]$. Entonces $I(\phi, \alpha) = I(\psi, \alpha)$.

DEMOSTRACIÓN: Las hipótesis implican que $|\phi(t) - \alpha| > 0$ para todo t , luego $\alpha \notin \phi^*$. Así mismo, si $a \in \psi^*$ tendríamos que $\psi(t) = \alpha$ para cierto valor de t , con lo que sería $|\phi(t) - \psi(t)| = |\phi(t) - \alpha|$.

Esto prueba que los índices $I(\phi, \alpha)$, $I(\psi, \alpha)$ están bien definidos. Haciendo una traslación podemos suponer que $\alpha = 0$. Entonces ϕ y ψ no se anulan. Claramente

$$\psi(t) = \phi(t) \left(1 + \frac{\psi(t) - \phi(t)}{\phi(t)} \right) = \phi(t)\rho(t).$$

Sean $\theta, \theta' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ determinaciones continuas del argumento de ϕ y ρ respectivamente, es decir,

$$\phi(t) = |\phi(t)|e^{i\theta(t)}, \quad \rho(t) = |\rho(t)|e^{i\theta'(t)}.$$

La fórmula anterior nos da que

$$\psi(t) = |\phi(t)| |\rho(t)| e^{i(\theta(t) + \theta'(t))},$$

luego $\theta + \theta'$ es una determinación continua del argumento para ψ .

La definición de índice nos da ahora que $I(\psi, 0) = I(\phi, 0) + I(\rho, 0)$. Basta probar que el último índice es 0. Ahora bien, por hipótesis

$$|\rho(t) - 1| = \frac{|\psi(t) - \phi(t)|}{|\phi(t)|} < 1,$$

luego $\rho^* \subset D(1, 1)$. Esto implica que $I(\rho, 0) = 0$ (por ejemplo por 3.5 aplicado al disco $D(1, 1)$). ■

Uniendo este teorema al principio del argumento obtenemos el hecho siguiente, cuya prueba es inmediata salvo por una pequeña cuestión técnica:

Teorema 3.13 Sea Ω un abierto en \mathbb{C} y f, g dos funciones meromorfas en Ω . Sea ϕ un ciclo tal que $\phi^* \subset \Omega$ y no pase por ningún polo de f . Supongamos que $I(\phi, z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ y que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ para todo $z \in \phi^*$. Entonces

$$\sum_{z \in \Omega} o(f, z)I(\phi, z) = \sum_{z \in \Omega} o(g, z)I(\phi, z).$$

DEMOSTRACIÓN: Ante todo hay que notar que la desigualdad estricta de la hipótesis implica inmediatamente que ϕ^* no contiene ceros de f o de g .

Por otra parte, si $\phi = \sum_i a_i \psi_i$, donde $a_i \in \mathbb{Z}$ y cada ψ_i es un arco cerrado, esta misma hipótesis nos da que $|f(\psi_i(t)) - g(\psi_i(t))| < |f(\psi_i(t))|$, para todo t en el dominio de ψ_i , y por el teorema anterior $I(\psi_i \circ f, 0) = I(\psi_i \circ g, 0)$.

Por la definición de índice de un ciclo esto implica $I(\phi \circ f, 0) = I(\phi \circ g, 0)$. Ahora basta probar que podemos aplicar el principio del argumento.

Llamemos A a la unión de las componentes conexas de Ω que cortan a ϕ^* . Como las componentes conexas de los abiertos son abiertas, A es abierto en \mathbb{C} . Además $\phi^* \subset A$ y toda componente conexa de A contiene algún punto de ϕ^* , donde f y g no se anulan, luego f y g no son idénticamente nulas en ninguna componente conexa de A .

Sólo falta probar que $I(\phi, z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus A$. En principio sólo lo sabemos para puntos de $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Sea, pues, $z \in \Omega \setminus A$. Entonces z está en una componente conexa C de Ω que no corta a ϕ^* y que por lo tanto es disjunta con A . Así, $\overline{C} \subset \mathbb{C} \setminus A \subset \mathbb{C} \setminus \phi^*$ y es conexo. El índice $I(\phi, z)$ es constante en \overline{C} , luego basta probar que es nulo en uno cualquiera de sus puntos, no necesariamente en el z elegido. Como C es un abierto distinto de todo el plano complejo, existe un punto $w \in \overline{C} \setminus C$. Basta ver que $w \notin \Omega$, pues entonces por hipótesis $I(\phi, w) = 0$. Ahora bien, si D es cualquier otra componente conexa de Ω (distinta de C), entonces $C \subset \mathbb{C} \setminus D$, luego $\overline{C} \subset \mathbb{C} \setminus D$, luego $w \notin D$. Esto prueba que w no está en ninguna componente conexa de Ω . ■

El teorema de Rouché es esencialmente el teorema anterior en el caso particular en que las funciones f y g no tienen polos. Sin embargo vamos a probar una versión ligeramente refinada que no involucra ciclos.

Teorema 3.14 (Teorema de Rouché) *Sea Ω un abierto acotado en \mathbb{C} y sean f, g dos funciones continuas en $\overline{\Omega}$ y holomorfas en Ω . Supongamos que se cumple la desigualdad $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ para todo punto $z \in \partial\Omega$. Entonces*

$$\sum_{z \in \Omega} o(f, z) = \sum_{z \in \Omega} o(g, z) < +\infty.$$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos el conjunto

$$K = \{z \in \overline{\Omega} \mid |f(z) - g(z)| \geq |f(z)|\}.$$

Claramente es cerrado en $\overline{\Omega}$, luego es compacto. Por hipótesis K no corta a la frontera de Ω , luego $K \subset \Omega$. Ahora aplicamos el teorema 3.4 a los cerrados K y $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$, según el cual existe un ciclo γ tal que

1. $\gamma^* \cap (K \cup (\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega)) = \emptyset$ (es decir, $\gamma^* \subset \Omega \setminus K$),
2. Para todo $z \in K$ se cumple $I(\gamma, z) = 1$,
3. Para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ se cumple $I(\gamma, z) = 0$.

Obviamente f , g , Ω y γ están en las hipótesis del teorema anterior, luego

$$\sum_{z \in \Omega} o(f, z)I(\gamma, z) = \sum_{z \in \Omega} o(g, z)I(\gamma, z).$$

Por último notamos que si $z \in \Omega \setminus K$ entonces $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$, de donde se sigue que z no es un cero ni de f ni de g , y los sumandos asociados en la igualdad anterior son nulos. Así pues, los únicos sumandos no nulos corresponden a puntos de K , luego la igualdad se reduce a la indicada en el enunciado. ■

El teorema de Rouché afirma, pues, que si dos funciones f y g cumplen la desigualdad indicada en la frontera de un abierto, entonces ambas tienen el mismo número de ceros en dicho abierto, contando cada uno de ellos tantas veces como indica su orden de multiplicidad.

Ejemplo Consideremos el polinomio $g(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$. Si llamamos $f(z) = -4z^5$, entonces observamos que en la frontera del disco unidad $D(0, 1)$, es decir, si $|z| = 1$, se cumple $|f(z) - g(z)| = |-z^8 - z^2 + 1| \leq 3 < 4 = |-4z^5|$, luego el teorema de Rouché nos da que f y g tienen el mismo número de ceros en $D(0, 1)$, es decir, ambas tienen 5 ceros. ■

He aquí una aplicación sencilla del teorema de Rouché:

El teorema fundamental del álgebra Un argumento similar puede usarse para demostrar el teorema fundamental del álgebra: dado un polinomio mónico $P(z)$ de grado $n > 0$, sea $M > 0$ una cota de sus coeficientes distintos del coeficiente director. Si $|z| = M + 1$,

$$|P(z) - z^n| \leq M(|z|^{n-1} + \dots + |z| + 1) = |z|^n - 1 < |z^n|,$$

luego el teorema de Rouché nos da que $P(z)$ tiene en $D(0, M + 1)$ tantos ceros como z^n , o sea, n ceros. Por supuesto que el teorema fundamental del álgebra se deduce ya del teorema de Liouville, que es más sencillo, pero vemos que el teorema de Rouché nos proporciona una cota para el módulo de las raíces. ■

Por el teorema de la aplicación abierta, si una función holomorfa en el disco unitario cumple $f(0) = 0$, su imagen contiene un disco de centro 0. Ahora probamos que el radio de este disco puede calcularse en función de $f'(0)$ y de una cota de f :

Teorema 3.15 *Sea g una función holomorfa en $D(0, R)$ que cumpla $g(0) = 0$, $|g'(0)| = \mu > 0$ y $|g(z)| \leq M$ para todo $z \in D(0, R)$. Entonces la imagen de g contiene al disco $D(0, R^2\mu^2/6M)$.*

DEMOSTRACIÓN: Consideramos $f(z) = g(Rz)/(Rg'(0))$, definida en $D(0, 1)$. Así f es holomorfa en el disco unitario, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $|f(z)| \leq M/\mu R$. Basta probar que f cumple el teorema, es decir, que la imagen de f contiene al disco $D(0, 1/6M')$, donde $M' = M/\mu R$, pues entonces la imagen de g contendrá al disco indicado en el enunciado.

Los primeros coeficientes de la serie de Taylor de f en 0 son $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Las desigualdades de Cauchy nos dan que $|a_n| \leq M'$, luego en particular para $n = 1$ queda $M' \geq 1$. Si $|z| = 1/4M'$ se cumple

$$|f(z)| \geq |z| - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n z^n| \geq \frac{1}{4M'} - \sum_{n=2}^{\infty} M' \left(\frac{1}{4M'}\right)^n = \frac{1}{4M'} - (16M' - 4)^{-1} \geq \frac{1}{6M'}.$$

Sea $|w| < 1/6M'$. Queremos probar que la función $g(z) = f(z) - w$ tiene un cero. Para ello notamos que si $|z| = 1/4M'$ entonces

$$|f(z) - g(z)| = |w| < 1/6M' \leq |f(z)|,$$

luego podemos aplicar el teorema de Rouché y concluir que f y g tienen el mismo número de ceros en el disco $D(0, 1/4M')$, pero $f(0) = 0$, luego g también tiene un cero. ■

Sin embargo, ahora podemos probar un hecho sorprendente, y es que se cumple un resultado similar en el que no interviene la cota de g . Para ello necesitamos un hecho elemental:

Teorema 3.16 *Sea f una función holomorfa en un disco $D(a, r)$ con la propiedad de que $|f'(z) - f'(a)| < |f'(a)|$ para todo $z \neq a$ en dicho disco. Entonces f es inyectiva.*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos dos puntos $z_1 \neq z_2$ en el disco $D(a, r)$. Entonces

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &= \left| \int_{z_1}^{z_2} f'(\zeta) d\zeta \right| \geq \left| \int_{z_1}^{z_2} f'(a) d\zeta \right| - \left| \int_{z_1}^{z_2} (f'(\zeta) - f'(a)) d\zeta \right| \\ &\geq |f'(a)| |z_1 - z_2| - |z_1 - z_2| \int_0^1 |f'(tz_1 + (1-t)z_2) - f'(a)| dt \\ &= |z_1 - z_2| \int_0^1 (|f'(a)| - |f'(tz_1 + (1-t)z_2) - f'(a)|) dt > 0, \end{aligned}$$

pues una integral de una función continua positiva es positiva. ■

Teorema 3.17 (Teorema de Bloch) *Sea f una función holomorfa en un abierto que contenga al disco cerrado $\overline{D(0, R)}$ y tal que $f'(0) \neq 0$. Entonces existe un disco abierto contenido en $D(0, R)$ en el que f es inyectiva y cuya imagen contiene un disco de radio $R|f'(0)|/72$.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que $R = 1$, $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, pues en el caso general consideramos la función $g(z) = (f(Rz) - f(0))/Rf'(0)$.

Sea $M(r) = \max\{|f'(z)| \mid |z| = r\}$ y sea $h(r) = (1-r)M(r)$. Usando la continuidad uniforme de f es fácil ver que h es continua en $[0, 1]$. Claramente $h(0) = 1$ y $h(1) = 0$. Sea $r_0 = \max\{r \mid h(r) = 1\}$. Así $h(r_0) = 1$, $r_0 < 1$ y $h(r) < 1$ si $r > r_0$.

Tomemos un punto a tal que $|a| = r_0$ y $f'(a) = M(r_0) = 1/(1 - r_0)$. Sea $\rho_0 = (1 - r_0)/2$. Si $|z - a| < \rho_0$, entonces $|z| < (1 + r_0)/2$ y

$$|f'(z)| \leq M\left(\frac{1+r_0}{2}\right) = h\left(\frac{1+r_0}{2}\right) \frac{2}{1-r_0} < \frac{1}{\rho_0},$$

pues $(1 + r_0)/2 > r_0$. Consecuentemente

$$|f'(z) - f'(a)| \leq |f'(z)| + |f'(a)| < \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{2\rho_0} = \frac{3}{2\rho_0}. \quad (3.1)$$

Así, la función

$$g(z) = \frac{f'(a + \rho_0 z) - f'(a)}{\frac{3}{2\rho_0}}$$

está en las hipótesis del lema de Schwarz 2.26, del que deducimos que

$$|f'(z) - f'(a)| < \frac{3|z - a|}{2\rho_0^2}, \quad \text{para todo } z \in D(a, \rho_0).$$

(El lema de Schwarz implica que la desigualdad es estricta, ya que si no la desigualdad (3.1) sería una igualdad).

En particular si $z \in D(a, \rho_0/3)$ entonces $|f'(z) - f'(a)| < 1/2\rho_0 = |f'(a)|$. El teorema anterior implica que f es inyectiva en este disco. Veamos que su imagen contiene un disco de radio $1/72$.

Sea $g(z) = f(z + a) - f(a)$, definida en $D(0, \rho_0/3)$ (notar que en este disco $|z + a| < 1$). Entonces $g(0) = 0$, $|g'(0)| = |f'(a)| = 1/2\rho_0$. Si $z \in D(0, \rho_0/3)$ entonces el segmento $[a, z + a]$ está contenido en $D(a, \rho_0/3) \subset D(a, \rho_0)$, donde tenemos probada la desigualdad $|f'(z)| < 1/\rho_0$. Por lo tanto

$$|g(z)| = \left| \int_a^{z+a} f'(\zeta) d\zeta \right| \leq \frac{|z|}{\rho_0} < \frac{1}{3}.$$

El teorema 3.15 nos da que $g[D(0, \rho_0/3)]$ contiene el disco abierto de centro 0 y radio

$$\frac{\left(\frac{\rho_0}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{2\rho_0}\right)^2}{6 \frac{1}{3}} = \frac{1}{72}.$$

Por lo tanto $f[D(a, \rho_0/3)]$ contiene el disco $D(f(a), 1/72)$. ■

El teorema siguiente relaciona los ceros de los términos de una sucesión convergente de funciones holomorfas con los de su límite:

Teorema 3.18 (Teorema de Hurwitz) *Sea Ω un abierto en \mathbb{C} y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en Ω que converja casi uniformemente a una función f . Si f no es idénticamente nula en ninguna componente conexa de Ω y tiene al menos N ceros en Ω (contando multiplicidades) entonces existe un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ la función f_n tiene al menos N ceros en Ω .*

DEMOSTRACIÓN: Sean z_1, \dots, z_k ceros distintos de f en Ω de modo que la suma de sus órdenes sea mayor o igual que N (no tienen por qué ser todos los ceros de f en Ω , que pueden ser infinitos, sino sólo los necesarios para que los órdenes sumen al menos N).

Como el conjunto de los ceros de f en Ω no tiene acumulación en Ω , existe un $r > 0$ tal que los discos $\overline{D}(z_i, r) \subset \Omega$ son disjuntos dos a dos y no contienen más ceros de f que sus centros respectivos. Sea K la unión de las fronteras de estos discos. Como es compacto existe un $a \in K$ donde f alcanza su módulo mínimo, que es $|f(a)| > 0$.

Como $\{f_n\}$ converge uniformemente a f sobre K , para n suficientemente grande se cumplirá que $|f(z) - f_n(z)| < |f(a)| \leq |f(z)|$ para todo $z \in K$. El teorema de Rouché implica que el número de ceros de f_n en cada disco $D(z_i, r)$ es el mismo que el de f , luego en total f_n tiene al menos N ceros. ■

Veamos una aplicación sencilla que necesitaremos más adelante:

Teorema 3.19 *Sea Ω un abierto conexo en \mathbb{C} y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas e inyectivas en Ω que converja casi uniformemente a una función f . Entonces f es constante o inyectiva.*

DEMOSTRACIÓN: Si f no es inyectiva existen $a, b \in \Omega$ tales que $a \neq b$ pero $f(a) = f(b)$. Definimos la sucesión $g_n(z) = f_n(z) - f_n(a)$, que converge a $g(z) = f(z) - f(a)$. Ahora a y b son ceros de g . Tomemos un $r > 0$ tal que los discos $D(a, r)$ y $D(b, r)$ estén contenidos en Ω y sean disjuntos. Si f no es constante la función g tampoco lo es (en ninguno de los discos, pues Ω es conexo), y como tiene un cero en cada uno de los discos, aplicándoles separadamente el teorema de Hurwitz resulta que alguna función g_n tiene un cero en cada uno de los discos, luego g_n no es inyectiva y f_n tampoco. ■

3.3 Los teoremas de Picard

El teorema de Casorati-Weierstrass [An 10.21] tiene una consecuencia sencilla:

Teorema 3.20 (Teorema de Picard) *Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función entera no constante entonces $f[\mathbb{C}]$ es denso en \mathbb{C} .*

DEMOSTRACIÓN: Si f es un polinomio el teorema fundamental del álgebra implica que $f[\mathbb{C}] = \mathbb{C}$. En otro caso f admite un desarrollo en serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$$

convergente en \mathbb{C} , y con coeficientes no nulos para índices arbitrariamente grandes. Por lo tanto, la función

$$f(1/z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^{-m}$$

tiene una singularidad esencial en 0, luego por el teorema de Casorati-Weierstrass su imagen en densa en \mathbb{C} , pero la imagen de $f(1/z)$ es $f[\mathbb{C}] \setminus \{f(0)\}$, luego $f[\mathbb{C}]$ también es denso en \mathbb{C} . ■

Los resultados de la sección anterior nos permiten mejorar sustancialmente este teorema. Aislamos algunos cálculos que nos serán útiles más tarde.

Teorema 3.21 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto tal que $H^1(\Omega) = 0$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ que no tome los valores 0, 1. Entonces existe una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que*

$$f(z) = -e^{i\pi \cosh(2g(z))}.$$

Además $g[\Omega]$ no contiene discos de radio 1.

DEMOSTRACIÓN: Los cálculos que siguen son meramente heurísticos: Se ha de cumplir

$$f(z) = -e^{i\pi \cosh(2g(z))} = e^{i\pi \cosh(2g(z))+1},$$

luego $f(z) = e^{2\pi i F(z)}$, con

$$2F(z) = \cosh(2g(z)) + 1 = \frac{e^{2g(z)} + e^{-2g(z)}}{2} + 1 = \frac{(e^{g(z)} + e^{-g(z)})^2}{2}.$$

Si llamamos $H(z) = e^{g(z)}$, se ha de cumplir $(H(z) + 1/H(z))^2 = 4F$. Despejando se llega a

$$H^2(z) = -1 + 2F(z) \pm 2\sqrt{F(z)}\sqrt{F(z)-1} = (\sqrt{F(z)} - \sqrt{F(z)-1})^2.$$

Ahora veamos que realmente es posible construir todas estas funciones. Como f no se anula, el teorema 1.36 nos da un logaritmo holomorfo de f en Ω , es decir, $f(z) = e^{h(z)}$, para una cierta $h \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Llamemos $F(z) = h(z)/2\pi i$. Así $f(z) = e^{2i\pi F(z)}$. Como f no toma el valor 1, la función F no puede tomar ningún valor entero.

En particular las funciones $F(z)$ y $F(z) - 1$ no se anulan, luego también tienen ramas holomorfas del logaritmo, con las que a su vez podemos definir ramas holomorfas de la raíz cuadrada, o sea, funciones holomorfas $\sqrt{F(z)}$ y $\sqrt{F(z)-1}$. Definimos $H(z) = \sqrt{F(z)} - \sqrt{F(z)-1}$. Es claro que H no se anula, luego también tiene una rama holomorfa del logaritmo, es decir, $H(z) = e^{g(z)}$. Ahora los cálculos anteriores justifican que $f(z)$ y $g(z)$ satisfacen la relación indicada.

El resto del teorema es la parte más delicada. Sean n y m números enteros, con $n > 0$. Supongamos que existe un punto $a \in \Omega$ tal que $g(a)$ es de la forma

$$\pm \log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) + im \frac{\pi}{2}. \quad (3.2)$$

Entonces

$$\begin{aligned} 2 \cosh(2g(a)) &= e^{2g(a)} + e^{-2g(a)} \\ &= e^{im\pi}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{\pm 2} + e^{-im\pi}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{\mp 2} \\ &= (-1)^m ((\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^2 + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})^2) \\ &= (-1)^m (2(2n-1)), \end{aligned}$$

luego $\cosh(2g(a)) = (-1)^m(2n - 1)$, pero esto implica $f(a) = 1$. Concluimos que $g(a)$ no toma valores de la forma (3.2). Estos puntos forman los vértices de una red de rectángulos que cubren el plano. La altura de los rectángulos es

$$|(m + 1)\pi/2 - m\pi/2| = \pi/2 < \sqrt{3}.$$

La anchura (variable) es

$$\log(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) - \log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}).$$

Es fácil ver que esta función de n es decreciente (la derivada de la función $\log(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$ es decreciente, luego la derivada de la función completa es negativa). Por lo tanto la anchura de cualquiera de los rectángulos es menor que la del primero ($n = 1$), y ésta es $\log(1 + \sqrt{2}) < \log e = 1$. En consecuencia, la diagonal de cualquiera de los rectángulos es menor que 2.

Ahora es claro que cualquier punto del plano complejo dista menos de una unidad de uno de los puntos considerados, y como ninguno de ellos está en la imagen de g , concluimos que ésta no puede contener discos de radio 1. ■

Teorema 3.22 (Teorema pequeño de Picard) *Toda función entera no constante toma cualquier valor complejo con a lo sumo una excepción.*

DEMOSTRACIÓN: Si una función entera u no toma los valores a y b , entonces la función entera

$$f(z) = \frac{u(z) - a}{b - a}$$

no toma los valores 0, 1. Según el teorema anterior existe una función entera g (no constante) cuya imagen no contiene ningún disco de radio 1.

Como no es constante existe un punto z_0 tal que $g'(z_0) \neq 0$. Así, la función entera $h(z) = g(z + z_0)$ cumple $h'(0) \neq 0$ y su imagen tampoco contiene discos de radio 1.

Sin embargo el teorema de Bloch nos da que dicha imagen contiene discos de radio $R|h'(0)|/72$ para cualquier $R > 0$, con lo que tenemos una contradicción. ■

Veamos ahora que podemos obtener un resultado mucho más general. Una función entera no polinómica tiene una singularidad esencial en el infinito y sucede que el teorema de Picard vale para funciones holomorfas arbitrarias, no necesariamente enteras, alrededor de una singularidad esencial. Más aún, probaremos que, alrededor de una singularidad esencial, una función holomorfa toma infinitas veces cada valor complejo, con a lo sumo una excepción. Necesitamos algunos resultados previos.

Teorema 3.23 (Teorema de Schottky) *Para cada par de números reales α , β que cumplan $0 < \alpha < +\infty$, $0 \leq \beta \leq 1$, existe una constante $C(\alpha, \beta)$ de modo que si f es una función holomorfa en un abierto que contenga un disco cerrado $\overline{D}(a, R)$, que no tome los valores 0, 1 y tal que $|f(a)| \leq \alpha$, entonces $|f(z)| \leq C(\alpha, \beta)$ siempre que $|z - a| \leq \beta R$.*

DEMOSTRACIÓN: Cambiando f por $f(a + Rz)$ podemos suponer que $a = 0$ y $R = 1$. También es claro que podemos suponer $\alpha \geq 2$ y que el dominio de f es un disco abierto de centro 0. Entonces f se encuentra en las hipótesis del teorema 3.21. Consideremos las funciones h , F , H y g que aparecen en la demostración. Recordemos que h es cualquier rama uniforme del logaritmo de f , luego podemos suponer $0 \leq \operatorname{Im} h(0) < 2\pi$. Igualmente, g es cualquier rama del logaritmo de H , luego podemos suponer $0 \leq \operatorname{Im} g(0) < 2\pi$. Distinguiamos dos casos:

CASO 1: $|f(0)| \geq 1/2$. Entonces

$$|F(0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} h(0) \right| = \frac{1}{2\pi} |\log |f(0)| + \operatorname{Im} h(0)| \leq \frac{\log \alpha}{2\pi} + 1.$$

Sea $C_0(\alpha) = (1/2\pi) |\log \alpha| + 2$. También se cumple

$$|\sqrt{F(0)} \pm \sqrt{F(0) - 1}| \leq |F(0)|^{1/2} + |F(0) - 1|^{1/2} \leq 2C_0(\alpha)^{1/2}.$$

Llamemos $C_1(\alpha) = 2C_0(\alpha)^{1/2}$. Así, si $|H(0)| \geq 1$ entonces

$$|g(0)| = |\log |H(0)| + i \operatorname{Im} g(0)| \leq \log |H(0)| + 2\pi \leq \log C_1(\alpha) + 2\pi,$$

y lo mismo es válido si $|H(0)| < 1$:

$$\begin{aligned} |g(0)| &\leq -\log |H(0)| + 2\pi = \log \frac{1}{|H(0)|} + 2\pi \\ &= \log |\sqrt{F(0)} + \sqrt{F(0) - 1}| + 2\pi \leq \log C_1(\alpha) + 2\pi. \end{aligned}$$

Sea, pues, $C_2(\alpha) = \log C_1(\alpha) + 2\pi$. Para cada $a < 1$, el teorema de Bloch aplicado a una traslación de g implica que $g[D(a, 1 - |a|)]$ contiene un disco abierto de radio $(1 - |a|)g'(a)/72$. Por otro lado el teorema 3.21 afirma que $g[D(0, 1)]$ no contiene discos de radio 1, luego deducimos que

$$|g'(a)| \leq \frac{72}{1 - |a|},$$

para todo $a \in D(0, 1)$. Así pues,

$$|g(a)| \leq |g(0)| + |g(a) - g(0)| \leq C_2(\alpha) + \left| \int_0^a g'(\zeta) d\zeta \right| \leq C_2(\alpha) + \frac{72|a|}{1 - |a|}.$$

Definimos $C_3(\alpha, \beta) = C_2(\alpha) + 72\beta/(1 - \beta)$. Hemos probado que si $|z| \leq \beta$ entonces $|g(z)| \leq C_3(\beta)$. Por consiguiente, si $|z| \leq \beta$ se cumple también

$$|f(z)| = |e^{i\pi \cosh(2g(z))}| \leq e^{\pi |\cosh(2g(z))|} \leq e^{\pi e^{2|g(z)|}} \leq e^{\pi e^{2C_3(\alpha, \beta)}}.$$

Llamamos $C_4(\alpha, \beta)$ a esta última constante.

CASO 2: Supongamos que $0 < |f(0)| < 1/2$. Entonces la función $1 - f$ está en las condiciones del caso 1, pues no toma los valores 0 y 1 y $1/2 \leq |1 - f(0)| \leq 2$. Por lo tanto

$$|1 - f(z)| \leq C_4(2, \beta) \quad \text{siempre que } |z| \leq \beta.$$

Esto implica que $|f(z)| \leq 1 + C_4(2, \beta)$ y el teorema se cumple con

$$C(\alpha, \beta) = \max\{C_4(\alpha, \beta), 1 + C_4(2, \beta)\}. \quad \blacksquare$$

De aquí deducimos el resultado clave para probar el teorema grande de Picard:

Teorema 3.24 (Teorema de Montel-Caratheodory) *Sea \mathcal{F} la familia de todas las funciones holomorfas en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ que no tomen los valores $0, 1$. Entonces toda sucesión de funciones de \mathcal{F} tiene una subsucesión convergente en $\mathcal{H}(\Omega)$ o bien una subsucesión que converge casi uniformemente² a ∞ en Ω .*

DEMOSTRACIÓN: Fijemos un punto $z_0 \in \Omega$ y descompongamos \mathcal{F} en la unión de dos subconjuntos:

$$A = \{f \in \mathcal{F} \mid |f(z_0)| \leq 1\} \quad \text{y} \quad B = \{f \in \mathcal{F} \mid |f(z_0)| \geq 1\}.$$

Toda sucesión en \mathcal{F} tiene una subsucesión en A o en B , luego basta probar que ambos conjuntos cumplen el teorema. Para el caso de A es suficiente probar que A es relativamente compacto en $\mathcal{H}(\Omega)$ y por el teorema de Montel basta probar que A está casi uniformemente acotado, es decir, que todo punto posee un entorno donde las funciones de A están uniformemente acotadas. Para probarlo consideremos el conjunto G de los puntos $z \in \Omega$ tales que las funciones de A están uniformemente acotadas en un entorno de z . Por definición G es abierto. Dado que Ω es conexo, basta probar que es también cerrado en Ω . Si $w \in \Omega$ es un punto de su clausura, es claro que existe un $a \in G$ tal que $w \in D(a, R) \subset \Omega$ para cierto radio $R > 0$. Puesto que $a \in G$ existe un $\alpha > 0$ tal que $|f(a)| \leq \alpha$ para toda función $f \in A$. El teorema anterior nos da que las funciones de A están uniformemente acotadas en $D(a, R)$, luego $w \in G$. Observar que el teorema anterior, juntamente con la definición de A implica que $G \neq \emptyset$.

Ahora consideremos el conjunto B . Si $f \in B$ entonces $1/f$ es holomorfa en Ω , porque f no se anula. Además $1/f$ no toma los valores $0, 1$ y $|(1/f)(z_0)| \leq 1$, luego $1/f \in A$. Por lo tanto, si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones en B , la sucesión $\{1/f_n\}$ está contenida en A , luego tiene una subsucesión convergente a una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. El teorema 3.18 implica que f es idénticamente nula o bien no tiene ceros en Ω . En el primer caso es fácil ver que la subsucesión converge casi uniformemente a ∞ , en el segundo caso la subsucesión converge a la función holomorfa $1/f$. \blacksquare

El teorema siguiente refina al teorema de Casorati-Weierstrass [An 10.21]:

Teorema 3.25 (Teorema grande de Picard) *Sea f una función holomorfa con una singularidad esencial en un punto z_0 . Entonces f toma infinitas veces cada valor complejo en cualquier entorno reducido de z_0 , con a lo sumo una excepción.*

²Una sucesión de funciones holomorfas en Ω converge casi uniformemente a ∞ si para todo compacto $K \subset \Omega$ y todo $M > 0$ existe un natural n_0 tal que si $n \geq n_0$ y $z \in K$ se cumple $|f(z)| \geq M$.

DEMOSTRACIÓN: Es claro que no perdemos generalidad si suponemos que $z_0 = 0$. Así mismo, si suponemos que f no toma dos valores complejos en un entorno reducido $\Omega = D'(0, r)$, podemos suponer que estos valores son 0, 1 (véase la prueba del teorema 3.22).

Sea f_n la función definida en Ω mediante $f_n(z) = f(z/n)$. Así cada f_n es holomorfa y no toma los valores 0, 1. Por el teorema anterior existe una subsucesión f_{n_k} que converge uniformemente en la circunferencia $|z| = r/2$, ya sea a una función g holomorfa en Ω , ya sea a ∞ .

En el primer caso sea M el máximo de g en la circunferencia. Tenemos que

$$|f(z/n_k)| \leq |f_{n_k}(z) - g(z)| + |g(z)| \leq 2M,$$

para todo n_k suficientemente grande, luego $|f(z)| \leq 2M$ si $|z| = r/2n_k$. Por el principio del módulo máximo concluimos que f está acotada por $2M$ en los anillos $A(r/2n_{k+1}, r/2n_k)$, para k suficientemente grande, pero esto implica que $|f(z)| \leq 2M$ en un cierto entorno reducido $D'(0, r/2n_k)$. A su vez de aquí se sigue que f es holomorfa en 0.

En el segundo caso se razona de forma similar que $1/f$ tiende a 0 en 0, con lo que f tiene un polo en 0.

Con esta doble contradicción hemos probado que f toma cualquier valor complejo con a lo sumo una excepción en cualquier entorno reducido de 0. Si f toma un valor sólo una cantidad finita de veces en un entorno reducido, tomando un entorno más pequeño obtenemos que f no toma dicho valor, luego eso sólo puede ocurrir en el caso excepcional. ■

De aquí se sigue la versión fuerte del teorema pequeño de Picard:

Teorema 3.26 *Una función entera no polinómica toma infinitas veces cada valor complejo con a lo sumo una excepción.*

DEMOSTRACIÓN: Dada f , basta considerar la función $f(1/z)$, que tiene una singularidad esencial en 0. ■

El teorema siguiente está relacionado, aunque es mucho más elemental:

Teorema 3.27 *Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función entera inyectiva, existen $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$ tales que $f(z) = az + b$, para todo $z \in \mathbb{C}$.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la serie de Taylor $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$, que converge en todo \mathbb{C} . Como en la prueba del teorema anterior, si hay infinitos coeficientes no nulos, la función $g(z) = f(1/z)$ tiene una singularidad esencial en 0, luego por el teorema de Casorati-Weierstrass $g[D'(0, 1)] = f[\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, 1)}]$ es denso en \mathbb{C} , y por el teorema de la aplicación abierta 1.38 tenemos que $f[D(0, 1)]$ es abierto en \mathbb{C} , luego $f[\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, 1)}] \cap f[D(0, 1)] \neq \emptyset$, y esto contradice la inyectividad de f .

Así pues, la serie de Taylor de f es finita, luego f es un polinomio, y también lo es su derivada f' . Ahora bien, si existe un a tal que $f'(a) = 0$, entonces $o(f - f(a), a) \geq 2$, y 1.37 implica que f no es inyectiva. Por lo tanto, el

polinomio f' no tiene raíces, luego por el teorema fundamental del álgebra tiene que ser constante $f'(z) = a \neq 0$, de donde $f(z) = ax + b$. ■

3.4 Abiertos simplemente conexos

En [TA 8.6] definimos los espacios topológicos simplemente conexos como los espacios arcoconexos cuyo grupo fundamental es trivial o, lo que es lo mismo, tales que todo arco cerrado es homotópico a un punto. Para el caso de un abierto en \mathbb{C} (o incluso en \mathbb{C}^∞) la conexión por arcos equivale a la conexión, pues todo espacio conexo localmente arcoconexo es arcoconexo. En esta sección demostraremos que los abiertos simplemente conexos de \mathbb{C}^∞ se caracterizan por varias propiedades de las funciones holomorfas definidas sobre ellos.

Una de las caracterizaciones que vamos a obtener involucra funciones armónicas. Recordemos que $H(\Omega)$ representa el conjunto de todas las funciones armónicas $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Necesitaremos la definición siguiente:

Definición 3.28 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto no vacío y $f \in H(\Omega)$. Definimos la *derivada holomorfa* de f como la función $f' \in \mathcal{H}(\Omega)$ dada por

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Es inmediato comprobar que f' cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann, por lo que es ciertamente una función holomorfa.

Teorema 3.29 Sea Ω un abierto en \mathbb{C} . Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ es conexo.
2. Para todo arco cerrado ϕ contenido en Ω y toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se cumple

$$\int_{\phi} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

3. Para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F' = f$.
4. Para toda función armónica $f \in H(\Omega)$ existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f = \operatorname{Re} g$.
5. Para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ que no se anule en ningún punto existe $L \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $e^{L(z)} = f(z)$ para todo $z \in \Omega$.

Además, la función L del apartado 5) cumple $L'(z) = f'(z)/f(z)$.

DEMOSTRACIÓN: 1) \Rightarrow 2) se sigue del teorema de Cauchy juntamente con el teorema 3.5.

2) \Rightarrow 3) Razonando por separado con cada componente conexa de Ω podemos suponer que Ω es conexo, en cuyo caso es conexo por poligonales.

Fijamos $z_0 \in \Omega$. Si z es cualquier punto de Ω existe una poligonal P_z contenida en Ω y que une z_0 con z . Si Q_z es cualquier otra poligonal en estas condiciones, $P_z \cup (-Q_z)$ es un arco cerrado contenido en Ω , luego

$$0 = \int_{P_z \cup (-Q_z)} f(\zeta) d\zeta = \int_{P_z} f(\zeta) d\zeta - \int_{Q_z} f(\zeta) d\zeta.$$

Esto significa que la función dada por

$$F(z) = \int_{P_z} f(\zeta) d\zeta$$

no depende de la elección de la poligonal P_z que una z_0 con z .

Si $z_1 \in \Omega$ existe un $r > 0$ tal que $D(z_1, r) \subset \Omega$. Tomamos una poligonal P_{z_1} que una z_0 con z_1 y entonces para todo $z \in D(z_1, r)$ se cumple que $P_{z_1} \cup [z_1, z]$ es una poligonal que une z_0 con z , luego $F(z)$ viene dada por

$$F(z) = \int_{P_{z_1}} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z_1, z]} f(\zeta) d\zeta.$$

En la prueba del teorema de Morera hemos visto que $F' = f$ en $D(z_1, r)$, luego en particular $F'(z_1) = f(z_1)$ y esto para todo $z_1 \in \Omega$.

3) \Rightarrow 4) Dada $f \in H(\Omega)$, consideramos su derivada holomorfa $f' \in \mathcal{H}(\Omega)$, de modo que por 3) existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F' = f'$. Explícitamente:

$$\frac{\partial \operatorname{Re} F}{\partial x} - i \frac{\partial \operatorname{Re} F}{\partial y} = F' = f' = \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y},$$

luego

$$\frac{\partial (\operatorname{Re} F - f)}{\partial x} = \frac{\partial (\operatorname{Re} F - f)}{\partial y} = 0,$$

luego existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $f = \operatorname{Re} F + c = \operatorname{Re}(F + c)$, luego f es la parte real de una función holomorfa.

4) \Rightarrow 5) Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no se anula en ningún punto, entonces la función $\log |f|$ es armónica en Ω . En efecto, para cada $z \in \Omega$ podemos tomar un disco $A = D(z, \epsilon) \subset \Omega$ y por 1.36 $f|_A$ tiene un logaritmo holomorfo $\log(f|_A)$, cuya parte real es $\log |f|_A$, luego $\log |f|$ es armónica en A , luego en todo Ω . Entonces 4) implica que existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\log |f| = \operatorname{Re} g$, luego $|e^{g(z)}| = |f(z)|$, luego $e^{g(z)}/f(z)$ es una función holomorfa en Ω de módulo 1. Por el principio del módulo máximo es constante, digamos igual a e^c , con lo que $e^{g(z)-c} = f(z)$ y $L(z) = g(z) - c$ es un logaritmo de f en Ω . Su derivada está calculada en 1.36.

5) \Rightarrow 1) Sea f un arco cerrado contenido en Ω y sea $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Sea $f(z) = z - z_0$. Por 4) existe una función L holomorfa en Ω cuya derivada es $L'(z) = 1/(z - z_0)$. Los teoremas 1.22 y 3.2 nos dan que

$$I(\phi, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi} \frac{1}{\zeta - z_0} d\zeta = 0,$$

luego 3.5 implica que $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ es conexo. \blacksquare

Vamos a probar que los abiertos conexos que cumplen el teorema anterior son precisamente los abiertos simplemente conexos en el sentido topológico usual. Notemos también que un abierto Ω cumple cualquiera de las propiedades 2, 3, 4, 5 del teorema anterior si y sólo si la cumplen todas sus componentes conexas, por lo que restringirlo a abiertos conexos no supone ninguna limitación esencial.

En la prueba del teorema anterior hemos visto que si f es una función holomorfa (de una variable) que no se anula en ningún punto, entonces $\log |f|$ es una función armónica. Esto es cierto para funciones de varias variables y, más en general:

Teorema 3.30 *Consideremos abiertos $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{C}$, una función holomorfa $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ y una función armónica $g : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces $f \circ g$ es armónica en Ω_1 .*

DEMOSTRACIÓN: Dado $z \in \Omega_1$, sea $r > 0$ tal que $D = D(f(z), r) \subset \Omega_2$. Como los discos abiertos cumplen el teorema anterior (por ejemplo, cumplen la propiedad 1), existe $h \in \mathcal{H}(D)$ tal que $g|_D = \operatorname{Re} h$. Sea $A = f^{-1}[D]$, que es un entorno de z donde $f|_A \circ h$ es holomorfa, luego $f|_A \circ g = \operatorname{Re}(f|_A \circ h)$ es armónica en A , luego $f \circ g$ es armónica en Ω_1 . ■

Nota En el caso particular en que $n = 1$, es claro que se cumple una regla de la cadena mixta:

$$(f \circ g)'(z) = g'(f(z))f'(z),$$

donde $(f \circ g)'$ y g' son las derivadas holomorfas de las funciones armónicas correspondientes, mientras que f' es la derivada usual en sentido complejo de la función holomorfa f . En efecto, con la notación de la prueba, tenemos que

$$(f \circ g)'(z) = (f \circ h)'(z) = h'(f(z))f'(z) = g'(f(z))f'(z),$$

donde hemos aplicado la regla de la cadena usual para funciones holomorfas. ■

Como la función $\log |z|$ es armónica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (se puede comprobar calculando su laplaciano o bien observando que, en un entorno de cada punto, es la parte real de una rama uniforme del logaritmo), si $f : \Omega \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y no se anula en ningún punto, entonces la función $\log |f|$ es armónica, por el teorema anterior.

Esto muestra en particular que el principio del módulo máximo para funciones holomorfas es una consecuencia del principio del máximo [An 8.17] para funciones armónicas, aplicado a la función $\log |f|$. El ejemplo siguiente muestra la necesidad de tomar el logaritmo:

Ejemplo Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ es un abierto conexo y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no es constante, las funciones $|f|$ y $|f|^2$ no son funciones armónicas.

En efecto, supongamos en primer lugar que $n = 1$ y sea

$$F(z) = |f(z)|^2 = (\operatorname{Re} f(z))^2 + (\operatorname{Im} f(z))^2.$$

Derivando obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= 2 \left(\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} \right)^2 + 2 \operatorname{Re} f \frac{\partial^2 \operatorname{Re} f}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x} \right)^2 + 2 \operatorname{Im} f \frac{\partial^2 \operatorname{Im} f}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= 2 \left(\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y} \right)^2 + 2 \operatorname{Re} f \frac{\partial^2 \operatorname{Re} f}{\partial y^2} + 2 \left(\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y} \right)^2 + 2 \operatorname{Im} f \frac{\partial^2 \operatorname{Im} f}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

Sumamos teniendo en cuenta las ecuaciones de Cauchy-Riemann, así como que $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ son armónicas y, por lo tanto, tienen laplaciano nulo:

$$\Delta F = 4 \left(\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x} \right)^2 = 4 \left| \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} + i \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x} \right|^2 = 4|f'|^2.$$

Así pues, F no es armónica salvo que $f' = 0$, es decir, salvo si f es constante. A su vez, si f no es constante existe un punto donde f no se anula, y podemos tomar un disco donde ocurra lo mismo. Por la nota tras el teorema 1.36 la función f tiene una raíz cuadrada holomorfa $F = \sqrt{f}$ en dicho disco, luego $|f| = |F|^2$ no es armónica, por la parte ya probada.

Si $n > 1$ y $|f|$ o $|f|^2$ fueran armónicas, también lo serían los módulos de las funciones que resultan de fijar todas las variables menos una, en contradicción con la parte ya probada. ■

La función $\log|z|$ es un ejemplo de función armónica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ que no es la parte real de ninguna función holomorfa. En un entorno de cada punto es la parte real de una rama uniforme del logaritmo, pero no existe ninguna función holomorfa $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ cuya parte real sea $\log|z|$. En efecto, si la hubiera, consideramos la rama uniforme del logaritmo $\log_{-\pi} : H_{-\pi} \rightarrow \mathbb{C}$, que tendría la misma parte real que g en su dominio, luego $g - \log_{-\pi}$ tendría parte real nula. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann implican que su parte imaginaria tiene derivadas nulas, luego es constante en $H_{-\pi}$ (que es conexo). Equivalentemente, sumando una constante a g , podemos suponer que $g(z) = \log_{-\pi}(z)$ para todo $z \in H_{-\pi}$, pero esto implica que g no es continua, por ejemplo, en -1 .

El teorema siguiente prueba que $\log|z|$ es esencialmente la única función armónica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ que no es la parte real de una función holomorfa. Lo probamos más en general para funciones sobre un anillo:

Teorema 3.31 *Si f es una función armónica en un anillo $A(0, r, R)$, entonces*

$$f(z) = c \log|z| + \operatorname{Re} g(z),$$

donde $c \in \mathbb{R}$ y g es una función holomorfa en el anillo.

DEMOSTRACIÓN: Desarrollamos la derivada holomorfa de f en serie de Laurent:

$$f'(z) = \sum_{n \neq -1} a_n z^n + \frac{a_{-1}}{z}, \quad \text{para } r < |z| < R.$$

La serie tiene integral nula sobre todo arco cerrado contenido en el anillo. En efecto, como converge uniformemente en los compactos, la integral se puede

calcular término a término, pero todos los sumandos tienen primitiva en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, luego por la regla de Barrow 1.22 las integrales son nulas. El teorema de Morera implica que la serie tiene una primitiva g en el anillo. Así pues,

$$f'(z) = (\operatorname{Re} g(z))' + \frac{a-1}{z}.$$

En el abierto $A = A(0, r, R) \setminus [0, +\infty[$ la función $1/z$ tiene como primitiva a la función $\log z$ que a cada z le asigna su logaritmo con parte imaginaria en $]0, 2\pi[$. Luego en A se cumple

$$f'(z) = (\operatorname{Re} g(z))' + (\operatorname{Re}(a_{-1} \log z))'.$$

Esto significa que las funciones f y $\operatorname{Re} g(z) + \operatorname{Re}(a_{-1} \log z)$ tienen las mismas derivadas parciales, luego existe una constante $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(z) = \operatorname{Re} g(z) + \operatorname{Re}(a_{-1} \log z) + k = \operatorname{Re} g(z) + c \log |z| + d \arg z + k,$$

donde $\arg z$ es el argumento de z en $]0, 2\pi[$. La función $d \arg z + k$ tiene una extensión continua a todo el anillo, concretamente $f(z) - \operatorname{Re} g(z) - c \log |z|$, pero claramente esto sólo es posible si $d = 0$. Cambiando g por $g + k$ tenemos la expresión del enunciado (que por continuidad vale en todo el anillo). ■

Volviendo a las propiedades del teorema 3.29, nos proponemos demostrar el teorema siguiente:

Teorema 3.32 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^\infty$ un abierto conexo. Entonces, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. Ω es simplemente conexo.
2. $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ es conexo.
3. $H^1(\Omega) = 0$.

Nota Los resultados de [TA] permiten probar la equivalencia entre las tres primeras condiciones. En efecto, la equivalencia entre 1) y 2) es [TA 13.10] (allí está enunciado con \mathbb{R}^2 en lugar de \mathbb{C}^∞ , pero la equivalencia es inmediata).

Por otra parte el teorema [TA 8.34] nos da que $\pi_1(\Omega)$ es un grupo libre, luego [TA 10.30] implica que $H_1(\Omega)$ es un \mathbb{Z} -módulo libre del mismo rango, luego por [TA 12.1] $H_1^{\mathbb{R}}(\Omega)$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial de la misma dimensión, y por [TA 12.9] el grupo de cohomología singular $H_{\mathbb{R}}^1(\Omega)$ es el espacio dual del anterior, luego en particular $\pi_1(\Omega) = 1$ si y sólo si $H_{\mathbb{R}}^1(\Omega) = 0$, lo que equivale a que el grupo de cohomología singular diferenciable sea trivial y, por el teorema de De Rham [TA 13.15], esto equivale a su vez a que $H^1(\Omega) = 0$. Esto es la equivalencia entre 1) y 3).

Si nos limitamos a los resultados que hemos probado aquí, vemos que el teorema 3.5 nos da que 1) \Rightarrow 2), pues si $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ y ϕ es un arco cerrado tal que $\phi^* \subset \Omega$, por hipótesis ϕ es homotópico a un arco constante ψ , luego $I(\phi, z) = I(\psi, z) = 0$. Por otra parte, el teorema 3.29 nos da que 3) \Rightarrow 2), por ejemplo por 1.34. ■

Ahora vamos a probar un resultado de gran interés en sí mismo que vuelve inmediatas las implicaciones restantes. Para expresarlo de la forma más habitual, en el enunciado del teorema siguiente debemos entender que, por definición, un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}^\infty$ es simplemente conexo si y sólo si $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ es conexo. Cuando hayamos probado 3.32 tendremos que el teorema también es válido con la definición usual de abierto simplemente conexo.

Teorema 3.33 (Teorema de Riemann) *Si $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}^\infty$ son abiertos simplemente conexos no vacíos cuyas fronteras contienen más de un punto, existe una aplicación $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ biholomorfa.*³

DEMOSTRACIÓN: Observemos en primer lugar que si $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ es biholomorfa y Ω_1 es simplemente conexo, también lo es Ω_2 . Esto no es inmediato a partir de la definición provisional que estamos adoptando, pero se sigue de la caracterización 3) del teorema 3.29.

En efecto, si $g \in \mathcal{H}(\Omega_2)$, entonces $(f \circ g)f' \in \mathcal{H}(\Omega_1)$, luego existe $u \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ tal que $u' = (f \circ g)f'$, y es fácil ver que $v = f^{-1} \circ u \in \mathcal{H}(\Omega_2)$ cumple $v' = g$.

Basta probar que todo abierto $\Omega \subset \mathbb{C}^\infty$ simplemente conexo (en el sentido de que $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ sea conexo) no vacío y cuya frontera contenga más de un punto es biholomorfo al disco $D(0, 1)$, pues entonces dos cualesquiera serán biholomorfos entre sí.

En primer lugar vamos a demostrar que existe una aplicación biholomorfa $f : \Omega \rightarrow \Omega^*$ tal que $\Omega^* \subset \mathbb{C}$ es un abierto acotado.

Tomamos un punto $p \in \partial\Omega$ y consideramos una transformación de Möbius M tal que $M(p) = \infty$, de modo que $A = M[\Omega] \subset \mathbb{C}$ es también un abierto conexo y simplemente conexo con $\infty \in \partial A$. Por hipótesis ∂A contiene al menos otro punto $a \in \mathbb{C}$. Fijamos también un punto $z_0 \in A$.

La función $(z - a)/(z_0 - a)$ es holomorfa en A y no se anula. Por 3.29 existe la función

$$w = \log \frac{z - a}{z_0 - a}$$

holomorfa en A . Además es inyectiva, pues su inversa es $z = a + (z_0 - a)e^w$.

La imagen de A por w es un abierto B que contiene a 0 (la imagen de z_0). Tomemos un $r > 0$ tal que $D(0, r) \subset B$. Entonces $D(2\pi i, r) \subset \mathbb{C}^\infty \setminus B$, pues si un punto $2\pi i + w$, con $|w| < r$, estuviera en B , la aplicación $a + (z_0 - a)e^w$ asignaría la misma imagen a los puntos w y $2\pi i + w$, cuando tenemos que esta aplicación es una biyección $B \rightarrow A$.

Finalmente, la aplicación $1/(z - 2\pi i)$ está acotada por $1/r$ sobre B , y es inyectiva, luego transforma B en un abierto acotado $\Omega^* \subset \mathbb{C}$.

Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, inyectiva y acotada y $z_0 \in \Omega$, entonces la función

$$F(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{f'(z_0)}$$

cumple lo mismo y además $F(z_0) = 0$, $F'(z_0) = 1$.

³Aquí consideramos a \mathbb{C}^∞ como variedad analítica. Véase la sección A.1.

Sea \mathcal{F} el conjunto de todas las aplicaciones $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ inyectivas y acotadas que cumplen $F(z_0) = 0$, $F'(z_0) = 1$. Ya hemos visto que se trata de un conjunto no vacío.

Para cada función $F \in \mathcal{F}$ llamamos $M(F) > 0$ al supremo del módulo de F sobre Ω . Vamos a probar que existe una función $F \in \mathcal{F}$ en la que $M(F)$ toma un valor mínimo. En efecto, si $M = \inf\{M(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$, existe una sucesión $\{F_n\}$ de funciones de \mathcal{F} tal que la sucesión $M(F_n)$ converge a M . En particular la sucesión $M(F_n)$ está acotada, luego la sucesión $\{F_n\}$ está uniformemente acotada en Ω y podemos aplicar el teorema de Montel, según el cual tiene una subsucesión que converge casi uniformemente a una función F holomorfa en Ω . Claramente F cumple también $F(z_0) = 0$, $F'(z_0) = 1$. Esta última condición implica que F no es constante. Por el teorema 3.19 concluimos que F es inyectiva, luego pertenece a \mathcal{F} . Si $z \in \Omega$ se cumple

$$|F(z)| \leq |F_n(z)| + |F(z) - F_n(z)| \leq M(F_n) + |F(z) - F_n(z)|.$$

Tomando n suficientemente grande y correspondiente a la subsucesión que converge a F , el miembro derecho de la desigualdad se hace menor que $M + \epsilon$ para cualquier ϵ prefijado. Por lo tanto $M(F) \leq M$ y, por el carácter mínimo de M , ha de ser $M(F) = M$.

Ahora probaremos que $F[\Omega] = D(0, M)$. Ciertamente $F[\Omega] \subset D(0, M)$. Si no se da la igualdad existe un punto w perteneciente a la frontera de $F[\Omega]$ tal que $|w| < M$.

Consideramos ahora la transformación de Möbius

$$P(z) = M^2 \frac{z - w}{M^2 - \bar{w}z}.$$

Está bien definida, pues el numerador se anula en w y el denominador no. Además deja fija a la circunferencia $\partial D(0, M)$, pues si $|z| = M$, entonces tenemos que $z\bar{z} = M^2$, luego

$$P(z) = M^2 \frac{z - w}{z\bar{z} - \bar{w}z} = \frac{M^2}{z} \frac{z - w}{\bar{z} - \bar{w}},$$

luego $|P(z)| = M$. Como $P(w) = 0$, concluimos que $P[D(0, M)] = D(0, M)$, pues P tiene que hacer corresponder las componentes conexas de $\mathbb{C}^\infty \setminus \partial D(0, M)$.

Si llamamos $F_1 = F \circ P : \Omega \rightarrow D(0, M)$, tenemos que F_1 sigue siendo inyectiva y acotada y $0 \in \partial F_1[\Omega]$. Según hemos observado al inicio de la prueba, $F_1[\Omega]$ es simplemente conexo, luego por 3.29 tenemos que existe una rama uniforme del logaritmo sobre $F_1[\Omega]$, a partir de la cual se construye una rama uniforme de la función \sqrt{Mz} , que es inyectiva. Al componer F_1 con esta rama obtenemos $F_2 : \Omega \rightarrow D(0, M)$ inyectiva con $0 \in \partial F_2[\Omega]$.

Componemos ahora con la transformación de Möbius

$$Q(z) = M^2 \frac{z - F_2(z_0)}{M^2 - F_2(z_0)z},$$

que, al igual que P , fija a $D(0, M)$, y así obtenemos $F_3 : \Omega \rightarrow D(0, M)$ inyectiva con $F_3(z_0) = 0$. Ahora observamos que

$$\begin{aligned} F_3'(z_0) &= Q'(\sqrt{-Mw})f'(-w)P'(0)F'(z_0) \\ &= \frac{M^2}{M^2 - M|w|} \frac{\sqrt{M}}{2\sqrt{-w}} \frac{M^2 - |w|^2}{M^2} = \frac{M + |w|}{2\sqrt{-Mw}} > 1, \end{aligned}$$

pues la última desigualdad equivale a $(M + |w|)^2 > 4M|w|$ y ésta a su vez a $(M - |w|)^2 > 0$.

Por último, la función dada por $F_4(z) = F_3(z)/F_3'(z_0)$ es inyectiva y cumple $F_4(z_0) = 0$, $F_4'(z_0) = 1$, luego $F_4 \in \mathcal{F}$, pero $M(F_4) \leq M/|F_3'(z_0)| < M$, lo cual es imposible.

Acabamos de probar que $F : \Omega \rightarrow D(0, M)$ es biholomorfa, y ahora basta componer con $z \mapsto z/M$ para obtener una aplicación biholomorfa $\Omega \rightarrow D(0, 1)$. ■

Nota En el teorema anterior, la condición de que la frontera de Ω contenga más de un punto es necesaria, pues si $\partial\Omega$ sólo contiene un punto, mediante una transformación de Möbius que lleve dicho punto a ∞ obtenemos que Ω es biholomorfo a \mathbb{C} , pero \mathbb{C} no es biholomorfo a $D(0, 1)$ por el teorema de Liouville. Por último, si $\partial\Omega = \emptyset$, entonces $\Omega = \mathbb{C}^\infty$ que no es biholomorfo ni a \mathbb{C} ni a $D(0, 1)$, pues es compacto. En definitiva, obtenemos que hay tres clases de abiertos simplemente conexos en \mathbb{C}^∞ : el propio \mathbb{C}^∞ , los biholomorfos a \mathbb{C} y los biholomorfos a $D(0, 1)$. ■

Antes de extraer más consecuencias del teorema de Riemann probamos el teorema 3.32:

DEMOSTRACIÓN (de 3.32): Sólo hay que probar que 2) implica 1) y 3). Ahora bien, si $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ es conexo, por la nota precedente Ω es difeomorfo a \mathbb{C}^∞ , a \mathbb{C} o a $D(0, 1)$, y los tres espacios cumplen que son simplemente conexos en el sentido topológico (el primero es homeomorfo a S^2), así como que $H^1(\Omega) = 0$, y ambas propiedades se conservan por difeomorfismos. ■

Nota Si en el teorema 3.32 tomamos como hipótesis que $\Omega \subset \mathbb{C}$ (o, más en general, que $\Omega \subset \mathbb{C}^\infty$ no es compacto), entonces las tres afirmaciones del enunciado son también equivalentes a una cuarta, a saber, a que Ω es contractible, pues el teorema de Riemann nos da únicamente las opciones de que Ω sea difeomorfo a \mathbb{C} o a $D(0, 1)$, y ambos espacios son contractibles. ■

Volviendo al teorema de Riemann, hemos probado que entre dos abiertos simplemente conexos cuyas fronteras en \mathbb{C}^∞ tengan más de un punto existe una aplicación biholomorfa, pero ésta no es única. Para determinar todas las posibilidades necesitamos un resultado auxiliar, de interés en sí mismo:

Teorema 3.34 *Toda aplicación biholomorfa entre dos discos es la restricción de una transformación de Möbius.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : D(z_1, r_1) \rightarrow D(z_2, r_2)$ una aplicación biholomorfa. Las homotecias y las traslaciones son transformaciones de Möbius, luego existen transformaciones de Möbius M_1 y M_2 tales que

$$g = M_1 \circ f \circ M_2 : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$$

es biholomorfa. Basta probar que g es una transformación de Möbius. Equivalentemente, podemos suponer que $f : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$. Más aún, por el teorema A.4 existe una transformación de Möbius M que fija a $D(0, 1)$ y que cumple $M(f(0)) = 0$, con lo que $g = f \circ M$ es también una aplicación biholomorfa del disco en sí mismo que cumple $g(0) = 0$. Basta probar que g es una transformación de Möbius. Equivalentemente, podemos suponer también que $f(0) = 0$.

Fijemos $0 < r < 1$. La antiimagen por f del disco cerrado $|z| \leq r$ es un subconjunto cerrado de $D(0, 1)$, donde el módulo toma un valor máximo $R < 1$. Por lo tanto si $R \leq |z| < 1$ entonces $r \leq |f(z)| < 1$.

Sea $k = o(f, 0)$. Entonces la función $g(z) = f(z)/z^k$ es holomorfa en el disco $D(0, 1)$ y no se anula. Si $|z| = R$ se cumple $rR^{-k} \leq |g(z)| \leq R^{-k}$. Aplicando el principio del módulo máximo a las funciones g y $1/g$ obtenemos que estas desigualdades son válidas en todo el disco $|z| \leq R$.

Si fijamos z y hacemos tender r a 1 (con lo que R tiende también a 1) concluimos que $|g(z)| = 1$ para todo z en el disco unidad. Ahora el principio del módulo máximo implica que g es constante, digamos $g(z) = a$, con $|a| = 1$. Entonces $f(z) = az^k$ y, como f es inyectiva, ha de ser $k = 1$, luego $f(z) = az$ es una transformación de Möbius. ■

Teorema 3.35 *Si $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}^\infty$ son abiertos simplemente conexos no vacíos cuyas fronteras contienen más de un punto, existe una aplicación $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ biholomorfa tal que, para $z_1 \in \Omega_1$ arbitrario, $F(z_1)$ y un argumento de $F'(z_1)$ toman valores prefijados arbitrarios.*

DEMOSTRACIÓN: Fijemos $z_2 \in \Omega_2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Por teorema de Riemann, existen aplicaciones biholomorfas $f_i : \Omega_1 \rightarrow D(0, 1)$. Por el teorema A.4 podemos componerlas con transformaciones de Möbius que fijan al disco unitario para exigir que $f_1(z_1) = 0$ y $f_2(z_2) = 0$. Sean α_1 y α_2 argumentos respectivos de $f_1'(z_1)$ y $f_2'(z_2)$. Sea $g(z) = e^{i(\alpha - \alpha_1 + \alpha_2)}z$, que obviamente se restringe a una aplicación biholomorfa del disco unitario en sí mismo.

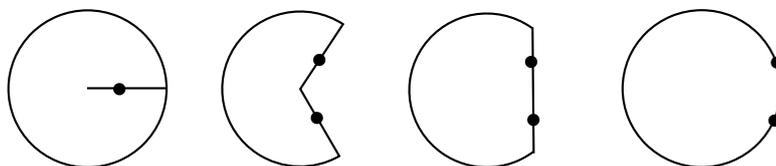
Es claro entonces que la composición $f = f_1 \circ g \circ f_2^{-1} : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ cumple $f(z_1) = z_2$ y $f'(z_1) = f_1'(z_1)e^{i(\alpha - \alpha_1 + \alpha_2)}f_2'(z_2)^{-1}$ tiene argumento α .

Supongamos ahora que $f, g : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ son dos aplicaciones biholomorfas tales que $f(z_1) = g(z_1)$ y $f'(z_1), g'(z_1)$ tienen el mismo argumento. Entonces $h = f \circ g^{-1} : \Omega_1 \rightarrow \Omega_1$ es una aplicación biholomorfa tal que $h(z_1) = z_1$ y $h'(z_1) > 0$. Basta probar que una aplicación en estas condiciones es la identidad.

Sea de nuevo $f_1 : \Omega_1 \rightarrow D(0, 1)$ una aplicación biholomorfa que cumpla $f_1(z_1) = 0$. Entonces, $F = f_1^{-1} \circ h \circ f_1 : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$ es biholomorfa, cumple $F(0) = 0$ y $F'(0) = h'(z_1) > 0$, pero, por el teorema anterior, F es

una transformación de Möbius y de acuerdo con A.4 tiene que ser de la forma $F(z) = \zeta z$, con $|\zeta| = 1$, luego la condición $F'(0) > 0$ implica que $\zeta = 1$. ■

El teorema de Osgood-Taylor-Carathéodory Terminamos esta sección con un análisis más profundo de las aplicaciones biholomorfas entre abiertos simplemente conexos. Concretamente, vamos a estudiar en qué casos una aplicación biholomorfa entre abiertos simplemente conexos se puede extender continuamente a las fronteras. En la figura siguiente vemos un disco abierto al que le hemos eliminado uno de sus radios, de modo que para transformarlo en el disco unidad los puntos del radio eliminado tienen que “desdoblarse”, lo que se traduce en que un homeomorfismo entre el disco sin el radio y el disco no puede extenderse a las fronteras:



En efecto, si consideramos una sucesión en el disco cortado que converja al punto señalado en el radio de modo que sus términos estén alternativamente arriba y abajo del límite, al aplicar la aplicación biholomorfa sobre el disco la sucesión se desdobra en dos subsucesiones convergentes a dos puntos distintos. Nuestra intención es dar condiciones para que esto no ocurra, y la sucesión imagen converja a un solo punto de la frontera. De momento probamos que los límites (sean uno o varios) están siempre en la frontera.

Teorema 3.36 Sea $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ una aplicación biholomorfa entre dos abiertos de \mathbb{C}^∞ . Si los todos puntos de acumulación de una sucesión $\{x_n\} \subset \Omega_1$ están sobre la frontera de Ω_1 entonces todos los puntos de acumulación de la sucesión $\{f(x_n)\}$ están en la frontera de Ω_2 .

DEMOSTRACIÓN: Los puntos de acumulación de $\{f(x_n)\}$ están en la clausura de Ω_2 . Basta probar que ninguno de ellos está en Ω_2 , pero si una subsucesión $\{f(x_{n_k})\}$ converge a un punto $z \in \Omega_2$ entonces, por la continuidad de la inversa de f sobre Ω_2 , tenemos que $\{x_{n_k}\}$ converge a la antiimagen de z , en contradicción con la hipótesis. ■

El ejemplo anterior muestra que si hubiéramos exigido que la sucesión de partida fuera convergente, no por ello habríamos podido asegurar lo mismo de la sucesión imagen. Para ir más lejos necesitaremos trabajar con algo más que con sucesiones:

Definición 3.37 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^\infty$ un abierto. Una *curva semiabierta* en Ω es una aplicación continua $\phi : [a, b] \rightarrow \Omega$. Llamaremos *conjunto límite* de ϕ al conjunto de los límites de todas las sucesiones convergentes de la forma $\{\phi(x_n)\}$, donde $\{x_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente en $[a, b]$ convergente a b .

Obviamente el conjunto límite de una curva semiabierta es no vacío, pero puede contener más de un punto. Un ejemplo lo proporciona la curva

$$\phi(t) = -t + i \operatorname{sen}(1/t),$$

cuyo conjunto límite lo forman los puntos ir , con $-1 \leq r \leq 1$.

Si el conjunto límite de una curva semiabierta ϕ contiene un único punto, entonces ϕ puede extenderse a una aplicación continua sobre $[a, b]$ asignando a b dicho valor límite. Este es el caso que más nos va a interesar.

El teorema 3.36 se traduce fácilmente a términos de curvas semiabiertas:

Teorema 3.38 *Sea $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ una aplicación biholomorfa entre dos abiertos de \mathbb{C}^∞ . Sea $\phi : [a, b[\rightarrow \Omega_1$ una curva semiabierta cuyo conjunto límite esté contenido en la frontera de Ω_1 . Entonces $f[\phi] = \phi \circ f$ es una curva semiabierta en Ω_2 cuyo conjunto límite está contenido en la frontera de Ω_2 .*

Sin embargo, al contrario que el teorema 3.36, este teorema sí puede mejorarse. Pensemos de nuevo en el caso del círculo cortado. La intersección con el abierto de un entorno suficientemente pequeño de un punto z del corte tiene dos componentes conexas que la aplicación biholomorfa separa. Mientras que una sucesión puede saltar libremente de una a otra, una curva semiabierta con límite z es un conexo que ha de estar en una componente fija, por lo que cabe esperar que el conjunto límite de su imagen tenga un único punto. No es fácil justificar con rigor este hecho. Nos basaremos en el ingenioso razonamiento que sigue:

Teorema 3.39 *Sea $\phi : [u, v[\rightarrow D(0, 1)$ una curva semiabierta cuyo conjunto límite esté contenido en la frontera del disco unidad y contenga más de un punto. Sea f una función holomorfa y acotada en $D(0, 1)$. Si existe $\lim_{t \rightarrow v} f(\phi(t)) = c$ entonces $f = c$.*

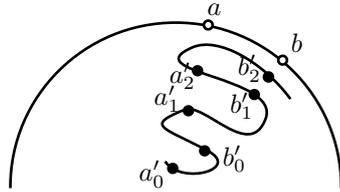
DEMOSTRACIÓN: Supongamos que la función $f(z) - c$ no es idénticamente nula en el disco $D(0, 1)$. Sea k el orden de 0 en $f(z) - c$, de modo que la función

$$g(z) = \frac{f(z) - c}{z^k}$$

es holomorfa en el disco y $g(0) = \alpha \neq 0$. Es claro que g está acotada (en el disco $|z| \leq 1/2$ lo está porque es continua, y en la corona restante lo está porque es el producto de dos funciones acotadas). Por hipótesis tenemos además que existe

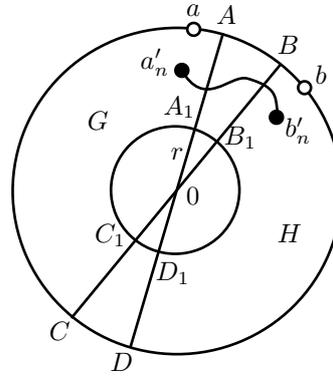
$$\lim_{t \rightarrow v} g(\phi(t)) = 0.$$

Sean a y b dos puntos distintos del conjunto límite de f . Por hipótesis $|a| = |b| = 1$. Sean $\{a'_n\}$ y $\{b'_n\}$ sucesiones sobre la curva convergentes a a y b respectivamente, es decir, $a'_n = \phi(x_n)$, $b'_n = \phi(y_n)$ para ciertas sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ estrictamente crecientes en el intervalo $[u, v[$. Tomando subsucesiones podemos suponer que $x_0 < y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots$



Llamemos σ'_n a la restricción de ϕ al intervalo $[x_n, y_n]$, que es un arco continuo con extremos a'_n y b'_n . El hecho de que $g(\phi(t))$ tiende a 0 se traduce en que el máximo del módulo de g sobre cada arco σ'_n tiende a 0 con n . Sea $0 < r < 1$. Existe un natural $N(r)$ tal que si $n > N(r)$ entonces σ'_n está contenido en el anillo $r < |z| < 1$. En caso contrario ϕ tendría un punto límite en el disco $|z| \leq r$.

Sea σ' uno de los arcos de circunferencia con extremos a y b . Tomemos m suficientemente grande de manera que σ' contenga un arco de extremos A y B (distintos de a y b) de amplitud π/m . Consideremos los puntos descritos en la figura. Sea G el abierto limitado por A, C, C_1, A_1 y sea H el abierto limitado por B, D, D_1, B_1 . Es claro que si n es suficientemente grande $a'_n \in G$ y $b'_n \in H$ y el arco σ'_n permanece fuera del disco $|z| \leq r$.



La distancia de $\sigma'_n(t)$ a G es una función continua de t y vale 0 para t suficientemente pequeño. Existe un máximo valor $x_n < t_0 < y_n$ tal que dicha distancia es 0. Entonces, el punto $a_n = \sigma'_n(t_0)$ está en la clausura de G , pero todos los puntos $\sigma'_n(t)$ con $t_0 < t \leq y_n$ están fuera de dicha clausura. Por lo tanto a_n está en la frontera de G . Más concretamente, en el segmento AA_1 o bien en C_1C .

Ahora consideramos la restricción de σ'_n al intervalo $[t_0, y_n]$. La distancia de $\sigma'_n(t)$ a H es una función continua de t que finalmente es nula, luego hay un mínimo valor del parámetro $t_0 < t_1 < y_n$ donde es igual a 0. Así $b_n = \sigma'_n(t_1)$ está en la frontera de H y los puntos $\sigma'_n(t)$ con $t_0 \leq t \leq t_1$ están fuera de G y de H . Concretamente b_n está en el segmento B, B_1 o en el segmento D_1D .

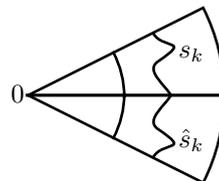
Llamemos σ_n a la restricción de σ'_n al intervalo $[t_0, t_1]$. Así σ_n es un arco continuo de extremos a_n y b_n y continuando los razonamientos anteriores se ve fácilmente que está contenido en el cerrado AA_1B_1B o en CDD_1C_1 .

Todo esto puede hacerse para todo n suficientemente grande. Tiene que haber infinitos números n_k tales que $\sigma_{n_k}^*$ está contenido en uno de los dos cerrados en concreto. Supongamos que se trata de AA_1B_1B (el caso contrario es idéntico a éste). Consideremos el giro $z \rightarrow \beta z$ que lleva a uno de los puntos A o B al 1 y deja al otro en el semiplano $\text{Im } z > 0$. Llamemos s_k a la composición con este giro del arco σ_{n_k} y $h(z) = g(z/\beta)$. Obviamente la función h es holomorfa y acotada en el disco $D(0, 1)$, $h(0) = \alpha \neq 0$ y, si llamamos $\mu_k = \max_{\zeta \in s_k^*} |h(\zeta)|$, se cumple que $\lim_k \mu_k = 0$.

Sea h^* la función definida por la serie de potencias centrada en 0 que resulta de sustituir cada coeficiente de la serie de Taylor de h por su conjugado. Obviamente el radio de convergencia de esta serie es el mismo que el de la serie de h , luego h^* es holomorfa en $D(0, 1)$ y cumple $h^*(z) = \overline{h(\bar{z})}$. Por lo tanto el módulo de h^* también está acotado en $D(0, 1)$. Sea M una cota para h y h^* .

Llamemos \hat{s}_k al arco simétrico de s_k respecto al eje real. Claramente

$$\mu_k = \max_{\zeta \in s_k^*} |h(\zeta)| = \max_{\zeta \in \hat{s}_k} |h(\zeta)|.$$



Los arcos s_k y \hat{s}_k tienen un extremo en común, luego podemos considerar su unión S_k , que es un arco continuo simétrico respecto al eje real.

Sea $j(z) = h(z)h^*(z)$. La función j es holomorfa en $D(0, 1)$ y cumple:

$$|j(z)| \leq M^2, \quad j(0) = |\alpha|^2 \neq 0, \quad \max_{\zeta \in S_k} |j(\zeta)| \leq M\mu_k \rightarrow 0.$$

El arco S_k está contenido en el ángulo de amplitud $2\pi/m$. Sus extremos están sobre los lados del ángulo y a la misma distancia de 0. Aplicando m giros a este ángulo obtenemos m arcos con extremos comunes, que podemos sumar hasta formar un arco cerrado, llamémoslo S .

Sea $J(z) = j(z)j(e^{2\pi i/m}z)j(e^{4\pi i/m}z) \dots j(e^{2(m-1)\pi i/m}z)$. Obviamente J es una función holomorfa y acotada en el disco $D(0, 1)$. Además $J(0) = |\alpha|^{2m} \neq 0$. Si $\zeta \in S^*$, uno de los puntos $e^{2u\pi i/m}\zeta$ está en S_k^* , luego $|J(\zeta)| \leq M^{2(m-1)}M\mu_k$.

Consideremos una determinación continua del argumento de S . En cada uno de los m tramos que componen S la variación del argumento es $2\pi/m$, luego la variación total es 2π y, en consecuencia, $I(S, 0) = 1$.

Por consiguiente, si Ω es la componente conexa de $\mathbb{C} \setminus S^*$ a la que pertenece 0, tenemos que Ω no es la componente no acotada, luego Ω es un abierto acotado y su frontera está contenida en S^* . La función J es holomorfa en Ω y continua en su clausura, por lo que el principio del módulo máximo nos permite concluir que $|J(0)| \leq M^{2(m-1)}M\mu_k$. Si hacemos tender k a infinito llegamos a la contradicción $J(0) = 0$. ■

Para aplicar este teorema necesitamos asegurar que los puntos de la frontera del abierto que consideremos satisfagan ciertas condiciones que excluyan casos como el del círculo cortado.

Definición 3.40 Sea Ω un abierto simplemente conexo y acotado en \mathbb{C} . Diremos que un punto $z \in \partial\Omega$ es *simple* si para toda sucesión $\{a_n\} \subset \Omega$ convergente a z existe un arco $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\phi[0, 1[\subset \Omega$, $\phi(1) = z$ y para una cierta sucesión $\{t_n\} \subset [0, 1[$ estrictamente creciente se cumple $\phi(t_n) = a_n$.

Es decir, z es simple si toda sucesión que converge a z desde Ω puede unirse para formar un arco continuo con extremo z sin salir de Ω . Un ejemplo de punto frontera no simple es cualquiera de los puntos del corte en el disco cortado. Una sucesión que converge a él alternativamente desde arriba y desde abajo puede

prolongarse a una curva semiabierta, pero tendrá en su límite a todo el tramo de corte desde z hasta el centro y, por lo tanto, no podrá prolongarse continuamente hasta tener extremo z .

Teorema 3.41 *Sea $f : \Omega \rightarrow D(0, 1)$ una aplicación biholomorfa de un abierto acotado simplemente conexo Ω en el disco unidad.*

1. *Si z es un punto frontera simple de Ω entonces f se extiende a una función continua sobre $\Omega \cup \{z\}$ y se cumple $|f(z)| = 1$.*
2. *La aplicación f se extiende continuamente a la unión de Ω con todos sus puntos frontera simples.*
3. *Si todos los puntos frontera de Ω son simples entonces $f : \bar{\Omega} \rightarrow \overline{D(0, 1)}$ es continua y suprayectiva.*

DEMOSTRACIÓN: 1) Tomemos cualquier sucesión $\{a_n\} \subset \Omega$ convergente a z y con ella formemos un arco γ según la definición de punto simple. La composición de γ (restringido a $[0, 1[$) con f es una curva semiabierta ϕ en el disco unidad y por el teorema 3.38 su conjunto límite está contenido en la circunferencia unidad. Obviamente existe

$$\lim_{t \rightarrow 1} f^{-1}(\phi(t)) = \lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) = z.$$

Si el conjunto límite de ϕ tuviera más de un punto el teorema 3.39 implicaría que f^{-1} es constante, lo cual es absurdo, luego dicho conjunto límite consta de un único punto w tal que $|w| = 1$. En particular tenemos que la sucesión $\{f(a_n)\}$ converge a w . Veamos que w es independiente de la sucesión de partida. Si partimos de dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ que converjan a z , podemos formar una tercera $\{c_n\}$ que las contenga como subsucesiones y también converja a z . A partir de ellas obtenemos tres valores w_1 , w_2 y w_3 , pero como $\{f(a_n)\}$ y $\{f(b_n)\}$ son subsucesiones de $\{f(c_n)\}$, concluimos que los tres límites coinciden. Si definimos $f(z) = w$ resulta que toda sucesión que converge a z desde Ω cumple que su imagen por f converge a $f(z)$, luego f es continua en z .

2) Sea C la unión de Ω y el conjunto de sus puntos frontera simples. Por el apartado 1) podemos extender f a C de modo que es continua en cada conjunto $\Omega \cup \{z\}$. Si z es un punto frontera simple y $\{a_n\}$ es una sucesión en C convergente a z , por la continuidad de f en cada conjunto $\Omega \cup \{a_n\}$ existen puntos $b_n \in \Omega$ tales que $|a_n - b_n| < 1/n$ y $|f(a_n) - f(b_n)| < 1/n$. Entonces es claro que $\{b_n\}$ converge a z , luego por 1) resulta que $\{f(b_n)\}$ converge a $f(z)$, y es obvio que $\{f(a_n)\}$ tiene el mismo límite.

3) Por el apartado 2) tenemos que f se extiende continuamente a $\bar{\Omega}$. Como este conjunto es compacto, su imagen ha de ser un compacto contenido en $\overline{D(0, 1)}$ y que contiene a $D(0, 1)$. Así pues, $f[\bar{\Omega}] = \overline{D(0, 1)}$. ■

En realidad la extensión a la frontera no sólo es suprayectiva, sino también inyectiva. Lo probaremos a partir del teorema siguiente:

Teorema 3.42 (Teorema de Lindelöf) Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \overline{D(0, 1)}$ un arco (continuo) todos cuyos puntos estén en $D(0, 1)$ excepto el extremo $\gamma(1) = 1$. Sea g una función holomorfa y acotada en $D(0, 1)$. Si existe $\lim_{t \rightarrow 1} g(\gamma(t)) = L$, entonces existe $\lim_{t \rightarrow 1} g(t) = L$ (donde, en el segundo límite, t varía también en el intervalo $[0, 1[$).

DEMOSTRACIÓN: No perdemos generalidad si suponemos $|g| < 1$ y $L = 0$. Dado $\epsilon > 0$, existe un $t_0 < 1$ tal que si $t_0 \leq t < 1$ entonces $|g(\gamma(t))| < \epsilon$ y $\operatorname{Re} g(t) > 1/2$. Sea $\operatorname{Re} g(t_0) < r < 1$. Definimos una función h en el abierto $\Omega = D(0, 1) \cap D(2r, 1)$ mediante

$$h(z) = g(z) \overline{g(\bar{z})} g(2r - z) \overline{g(2r - \bar{z})}.$$

Notemos que la función $\overline{g(\bar{z})}$ es holomorfa en $D(0, 1)$, pues se obtiene de g conjugando los coeficientes de su serie de Taylor en 0. Similarmente se concluye que $\overline{g(2r - \bar{z})}$ es holomorfa en $D(2r, 1)$. Por consiguiente h es holomorfa y $|h| < 1$. Notamos que $h(r) = |g(r)|^4$. Si probamos que $|h| < \epsilon$ el teorema estará probado.

Sea $E_1 = \gamma[t_1, 1]$, donde t_1 es el mayor t para el que $\operatorname{Re} \gamma(t) = r$, sea E_2 el conjugado de E_1 y sea E la unión de $E_1 \cup E_2$ con su simétrico respecto a la recta $x = r$. Teniendo en cuenta que $|h|$ es simétrica respecto a la recta $x = r$ y el eje real, es claro que $|h(z)| < \epsilon$ para todo $z \in \Omega \cap E$. Tomamos $c > 0$ y definimos

$$h_c(z) = h(z)(1 - z)^c (2r - 1 - z)^c,$$

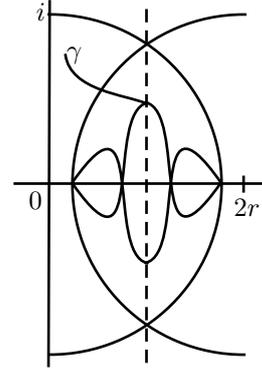
para $z \in \Omega$. Sea K la unión de E y las componentes conexas acotadas del complementario de E . Entonces K es compacto y, si definimos

$$h_c(1) = h_c(2r - 1) = 0,$$

entonces h_c es continua en K , holomorfa en su interior y $|h_c| < \epsilon$ en la frontera. El principio del módulo máximo implica que $|h_c| < \epsilon$ en K y, en particular, $|h_c(r)| < \epsilon$. Haciendo tender c a 0 queda $|h(r)| < \epsilon$. ■

Teorema 3.43 Sea $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ una aplicación biholomorfa entre abiertos simplemente conexos acotados cuyas fronteras consten de puntos simples. Entonces f se extiende a un homeomorfismo $f : \overline{\Omega}_1 \rightarrow \overline{\Omega}_2$.

DEMOSTRACIÓN: La acotación obliga a que las fronteras de los abiertos tengan más de un punto. Podemos suponer que $\Omega_2 = D(0, 1)$, pues en el caso general construimos dos aplicaciones biholomorfas u y v de los abiertos en $D(0, 1)$ y las componemos con f para obtener una aplicación biholomorfa de $D(0, 1)$ en sí mismo. Si extendemos a las fronteras las tres transformaciones indicadas, su composición será una extensión de f .



Por el teorema 3.41 sabemos que f admite una extensión continua de $\overline{\Omega}_1$ en el disco unidad cerrado. Basta ver que si z_1 y z_2 son puntos frontera distintos, entonces sus imágenes por la extensión son distintas. En caso contrario, multiplicando f por una constante adecuada de módulo 1 podemos suponer que $f(z_1) = f(z_2) = 1$. Existen arcos (continuos) γ_1 y γ_2 con un extremo igual a z_1, z_2 respectivamente y el resto contenido en Ω . Sus imágenes por f están en las hipótesis del teorema anterior aplicado a $g = f^{-1}$, luego concluimos que $\lim_{t \rightarrow 1} g(t) = z_1 = z_2$. ■

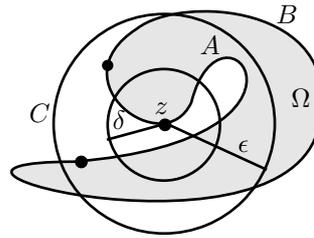
La condición sobre las fronteras es equivalente a otra mucho más natural. Para verlo probamos primero lo siguiente:

Teorema 3.44 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo acotado cuya frontera $C = \partial\Omega$ sea homeomorfa a la circunferencia unidad $\partial D(0, 1)$. Para todo $z \in C$ y todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que todo par de puntos en $\Omega \cap D(z, \delta)$ pueden unirse por una poligonal contenida en $\Omega \cap D(z, \epsilon)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : \partial D(0, 1) \rightarrow \partial\Omega$ un homeomorfismo. Componiéndolo con un giro podemos suponer que $f(1) = z$. Sea $\phi : [-1, 1] \rightarrow \partial\Omega$ la aplicación dada por $\phi(t) = f(e^{i\pi t})$. Así $\phi(0) = z$ y ϕ es un arco cerrado (es decir, que cumple $\phi(-1) = \phi(1)$) y la restricción $\phi|_{[-1, 1[}$ es biyectiva.

Sea $t_0 > 0$ lo suficientemente pequeño como para que $A = f[-t_0, t_0] \subset D(z, \epsilon)$. Sea B el arco cerrado complementario de A , es decir,

$$B = f[-1, -t_0] \cup f[t_0, 1].$$



Entonces z no está en B , luego existe $0 < \delta < \epsilon$ tal que $D(z, \delta) \cap B = \emptyset$. Veamos que este δ cumple lo pedido. Llamemos $C = \partial D(z, \epsilon)$.

Si $p, q \in \Omega \cap D(z, \delta)$, tenemos que p y q no están separados por $C \cup B$ (en el sentido de que pertenecen a la misma componente conexa del complementario), pues este conjunto está en el complementario de $D(z, \delta)$. Tampoco están separados por $\partial\Omega$, pues ambos están en Ω . Vamos a ver que la intersección es conexa, y así [TA 13.9] (véase la observación que sigue al enunciado) nos dará que p y q tampoco están separados por $C \cup B \cup \partial\Omega = C \cup \partial\Omega$.

En efecto, por construcción tenemos que A es disjunto de C y $\partial\Omega = A \cup B$, luego $C \cap \partial\Omega \subset B$. En consecuencia, $(C \cup B) \cap \partial\Omega = (C \cap \partial\Omega) \cup (B \cap \partial\Omega) = B$, conexo.

Así pues, p y q están en la misma componente conexa U de

$$\mathbb{C} \setminus (C \cup \partial\Omega) = (\mathbb{C} \setminus C) \cap (\mathbb{C} \setminus \partial\Omega).$$

Por lo tanto, U está contenido en la componente conexa de $\mathbb{C} \setminus C$ que contiene a p y q , o sea, que $U \subset D(z, \epsilon)$, y también en la componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \partial\Omega$ que contiene a p y q , o sea, que $U \subset \Omega$. Así pues, $U \subset \Omega \cap D(z, \epsilon)$, y por lo tanto p y q pueden unirse por una poligonal contenida en $\Omega \cap D(z, \epsilon)$. ■

Como consecuencia:

Teorema 3.45 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo acotado. Entonces todos los puntos de $\partial\Omega$ son simples si y sólo si $\partial\Omega$ es homeomorfa a la circunferencia unidad $\partial D(0, 1)$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\partial\Omega$ es homeomorfa a la circunferencia unidad y sea $z \in \partial\Omega$. Por el teorema anterior, para cada $n > 0$, existe un $\delta_n > 0$ tal que todo par de puntos en $D(z, \delta_n) \cap \Omega$ se pueden unir por una poligonal contenida en $D(z, 1/n) \cap \Omega$. Podemos suponer que la sucesión $\{\delta_n\}$ es decreciente y, desde luego, converge a 0. Sea $\{a_k\}$ una sucesión contenida en Ω y convergente a z . Para cada n , sea k_n el mínimo natural tal que $a_k \in D(z, \delta_n) \cap \Omega$ para todo $k \geq k_n$. La sucesión $\{k_n\}$ es creciente.

Como Ω es conexo, podemos formar un arco contenido en Ω que una los puntos a_k hasta el a_{k_1} . A partir de aquí, si $k \geq k_1$, consideramos el máximo n tal que $k_n \leq k$ y unimos a_k con a_{k+1} mediante un arco contenido en $D(z, 1/n) \cap \Omega$. Al unir todos estos arcos obtenemos una curva semiabierta que pasa por todos los puntos de la sucesión y que está contenida finalmente en cada disco $D(z, 1/n)$, por lo que su conjunto límite es $\{z\}$. Esto prueba que z es un punto simple.

Recíprocamente, si todos los puntos de $\partial\Omega$ son simples, el teorema de Riemann nos da una aplicación biholomorfa $f : D(0, 1) \rightarrow \Omega$ que por 3.43 se extiende a un homeomorfismo $f : \overline{D(0, 1)} \rightarrow \overline{\Omega}$, el cual a su vez se restringe a un homeomorfismo $\partial D(0, 1) \rightarrow \partial\Omega$. ■

Por consiguiente, el teorema 3.43 puede reformularse ahora en los términos siguientes:

Teorema 3.46 (Osgood-Taylor-Carathéodory) *Sea $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ una aplicación biholomorfa entre abiertos simplemente conexos acotados cuyas fronteras sean homeomorfas a circunferencias. Entonces f se extiende a un homeomorfismo $f : \overline{\Omega}_1 \rightarrow \overline{\Omega}_2$.*

En combinación con el teorema de Riemann obtenemos lo siguiente:

Teorema 3.47 *Sean Ω_1 y Ω_2 dos abiertos acotados simplemente conexos cuyas fronteras sean homeomorfas a circunferencias. Sean $\{a, b, c\}$ tres puntos distintos de $\partial\Omega_1$ y $\{p, q, r\}$ tres puntos distintos de $\partial\Omega_2$. Entonces existe una única aplicación biholomorfa $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ cuya extensión continua a las fronteras cumple $f(a) = p$ y $\{f(b), f(c)\} = \{q, r\}$ (pero no podemos fijar el orden).*

DEMOSTRACIÓN: Por el mismo argumento del teorema 3.43, las aplicaciones biholomorfas entre Ω_1 y Ω_2 se corresponden con las aplicaciones biholomorfas del disco unidad en sí mismo. Es fácil ver que el teorema se reduce a probar que dados $\{a, b, c\}$ y $\{p, q, r\}$ en la circunferencia unidad existe una única transformación de Möbius que deja invariante al disco unidad cerrado y cumple lo que se le pide a f en el enunciado.

Ahora bien, existe una única transformación de Möbius M que transforma (a, b, c) en $(1, i, -i)$ (en este orden). Puede ocurrir que M transforme el disco unidad abierto en sí mismo o bien en su simétrico respecto a la circunferencia unidad. En el segundo caso la transformación $M(1/z)$ deja fijo al disco

unidad y transforma (a, b, c) en $(1, -i, i)$. Así pues, existe una única transformación de Möbius M que deja fijo al disco unidad y además cumple $M(a) = 1$, $\{M(b), M(c)\} = \{i, -i\}$. Razonando igualmente con (p, q, r) obtenemos una transformación N que cumple $N(p) = 1$, $\{N(q), N(r)\} = \{i, -i\}$. Entonces MN^{-1} cumple lo pedido. Si hubiera otra $L \neq MN^{-1}$, entonces $LN \neq M$ y cumpliría las mismas condiciones que M . ■

El teorema anterior es válido igualmente para abiertos no acotados siempre y cuando sus complementarios en \mathbb{C}^∞ tengan interior no vacío, pues entonces una transformación de Möbius los transforma en abiertos acotados y, al ser homeomorfismos de \mathbb{C}^∞ , conservan todas las hipótesis.

Ahora es inmediato el teorema de Schoenflies, que en [TA] usamos sin demostración:

Teorema 3.48 (Teorema de Schoenflies) *Si C es la circunferencia unidad, todo homeomorfismo en la imagen $\phi : C \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ se extiende a un homeomorfismo $\bar{\phi} : \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$. Lo mismo es válido si cambiamos \mathbb{C}^∞ por \mathbb{C} .*

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que $\phi[C]$ es una curva de Jordan en \mathbb{C}^∞ . Por el teorema de la curva de Jordan [TA 2.7] (allí está enunciado para \mathbb{R}^2 , pero vale trivialmente para \mathbb{C}^∞ (alternativamente, véase [TA 10.10]) se cumple que $\mathbb{C}^\infty \setminus \phi[C] = \Omega_1 \cup \Omega_2$, donde los abiertos Ω_i tienen frontera $\phi[C]$ y son conexos. De hecho, son simplemente conexos, pues sus complementarios también son conexos.

Por el teorema de Riemann 3.33 existe una aplicación $\psi : D(0, 1) \rightarrow \Omega_1$ biholomorfa que, por el teorema de Osgood-Taylor-Carathéodory 3.46, se extiende a un homeomorfismo $\psi : \overline{D(0, 1)} \rightarrow \overline{\Omega_1}$ que hace corresponder C con $\phi[C]$ (aunque su restricción a C no es necesariamente ϕ). Consideramos entonces $h = \phi \circ \psi^{-1} : C \rightarrow C$ y observamos que se extiende a un homeomorfismo $f : \overline{D(0, 1)} \rightarrow \overline{D(0, 1)}$. Basta definir

$$f(z) = \begin{cases} |z|h(z/|z|) & \text{si } z \neq 0, \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}.$$

Así, $\phi_1 = f \circ \psi : \overline{D(0, 1)} \rightarrow \overline{\Omega_1}$ es un homeomorfismo que extiende a ϕ .

Similarmente, construimos un homeomorfismo $\phi_2 : \overline{D(0, 1)} \rightarrow \overline{\Omega_2}$ que extienda a ϕ . Por último, la aplicación $g : \mathbb{C}^\infty \setminus D(0, 1) \rightarrow \overline{D(0, 1)}$ dada por $g(z) = 1/\bar{z}$ es un homeomorfismo que fija a los puntos de C , y entonces ϕ_1 y $g \circ \phi_2$ se extienden a un homeomorfismo $\bar{\phi} : \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ que extiende a ϕ .

Si $\phi : C \rightarrow \mathbb{C}$ y, por ejemplo, $\infty \in \Omega_2$, por 3.35 podemos exigir que $\psi(0) = \infty$, con lo que también $\phi_2(0) = \infty$, luego $\bar{\phi}(\infty) = \infty$, con lo que $\bar{\phi}$ se restringe a un homeomorfismo de \mathbb{C} en \mathbb{C} . ■

3.5 El teorema de Runge

En esta sección vamos a añadir una equivalencia más al teorema 3.29. Probaremos que un abierto Ω cumple cualquiera de las condiciones del teorema si

y sólo si el subespacio formado por las funciones polinómicas es denso en $\mathcal{H}(\Omega)$. Para abiertos cualesquiera veremos que toda función holomorfa es el límite de una sucesión de funciones racionales.

Una función racional es una función definida por un cociente de polinomios:

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad P, Q \in \mathbb{C}[z], \quad Q \neq 0.$$

Podemos tomarlos primos entre sí, con lo que no tienen raíces comunes, por lo que f es holomorfa en todo el plano complejo menos en el conjunto finito de puntos donde se anula en denominador, y tales puntos son polos de f . Consideraremos también que f tiene un polo en ∞ si⁴

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = \infty,$$

lo cual equivale a que $\text{grad } P(z) > \text{grad } Q(z)$. Necesitamos un resultado auxiliar:

Teorema 3.49 *Sea ϕ un ciclo, f una función continua en ϕ^* , K un compacto en \mathbb{C} que no corte a ϕ^* y $\epsilon > 0$. Entonces existe una función racional R cuyos polos están todos en ϕ^* tal que*

$$\left| \int_{\phi} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - R(z) \right| < \epsilon \quad \text{para todo } z \in K.$$

DEMOSTRACIÓN: La función $f(\zeta)/(\zeta - z)$ es continua en el compacto $\phi^* \times K$, luego es uniformemente continua, lo que implica que existe un $\delta > 0$ de manera que si $\zeta, \zeta' \in \phi^*$ y $|\zeta - \zeta'| < \delta$, entonces $|f(\zeta)/(\zeta - z) - f(\zeta')/(\zeta' - z)| < \epsilon/L(\phi^*)$ para todo $z \in K$.

El teorema para ciclos se sigue inmediatamente del teorema para arcos, luego podemos suponer que ϕ es un arco. De este modo $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una función uniformemente continua, luego existe un $r > 0$ tal que si $t, t' \in [a, b]$, $|t - t'| < r$, entonces $|\phi(t) - \phi(t')| < \delta$. Tomemos puntos $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de modo que $|t_{i+1} - t_i| < r$. Definimos

$$R(z) = \sum_{i=1}^n (\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})) \frac{f(\phi(t_{i-1}))}{\phi(t_{i-1}) - z}.$$

Así, R es una función racional con todos sus polos sobre f^* (aquí hay que observar que ∞ no es un polo). Además:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\phi} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - R(z) \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{f(\phi(t))}{\phi(t) - z} \phi'(t) dt - \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{f(\phi(t_{i-1}))}{\phi(t_{i-1}) - z} \phi'(t) dt \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| \frac{f(\phi(t))}{\phi(t) - z} - \frac{f(\phi(t_{i-1}))}{\phi(t_{i-1}) - z} \right| |\phi'(t)| dt \leq \frac{\epsilon}{L(\phi)} \int_a^b |\phi'(t)| dt = \epsilon. \end{aligned}$$

■

⁴Esto es un caso particular de la definición general A.14 del orden de una singularidad aislada en una variedad analítica de dimensión 1, en este caso \mathbb{C}^∞ .

Dejamos a cargo del lector la siguiente observación topológica: Si K es un compacto en \mathbb{C} , las componentes conexas acotadas de $\mathbb{C} \setminus K$ son las mismas que las de $\mathbb{C}^\infty \setminus K$, y las componentes no acotadas se diferencian únicamente en el punto ∞ .

Teorema 3.50 (Teorema de Runge) *Sea K un compacto en \mathbb{C} y f una función holomorfa en un abierto que contenga a K . Sea $E \subset \mathbb{C}^\infty \setminus K$ un conjunto que contenga al menos un punto de cada componente conexa de $\mathbb{C}^\infty \setminus K$. Entonces para cada $\epsilon > 0$ existe una función racional R cuyos polos están contenidos en E tal que $|f(z) - R(z)| < \epsilon$ para todo $z \in K$.*

DEMOSTRACIÓN: Consideramos el álgebra $C(K)$ de todas las funciones continuas en K con valores en \mathbb{C} con la topología de la convergencia uniforme. Sea $R_E(K)$ el subespacio de las restricciones a K de las funciones racionales con polos en E , que claramente es una subálgebra, es decir, la suma y el producto de elementos de $R_E(K)$ está en $R_E(K)$. Por último sea $B_E(K)$ la clausura de $R_E(K)$ en $C(K)$. La suma y el producto son continuas para la topología de la convergencia uniforme, lo que hace que $B_E(K)$ sea también un álgebra (si dos sucesiones en $R_E(K)$ tienden a dos funciones de $B_E(K)$, la suma y el producto de las sucesiones tienden a la suma y el producto de las funciones, luego siguen en $B_E(K)$).

En estos términos, lo que queremos probar es que $f|_K \in B_E(K)$. Primeramente veremos que la función $1/(z - a)$ está en $B_E(K)$ para todo $a \in \mathbb{C} \setminus K$. El argumento consta de varios pasos. Ante todo llamemos

$$V = \{a \in \mathbb{C} \setminus K \mid 1/(z - a) \in B_E(K)\}.$$

Hemos de ver que $V = \mathbb{C} \setminus K$.

1) Si $a \in V$ entonces $D(a, d) \subset V$, donde $d = d(a, K) > 0$. En particular V es abierto.

Sea $b \in D(a, d)$. Entonces, si $z \in K$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - b} &= \frac{1}{(z - a) - (b - a)} = \frac{1}{z - a} \frac{1}{1 - \frac{b-a}{z-a}} = \frac{1}{z - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b-a}{z-a}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b-a)^n}{(z-a)^{n+1}}. \end{aligned}$$

(Notemos que $|(b-a)/(z-a)| < d/|z-a| < 1$.)

Por la unicidad de la serie de Laurent, la última serie es el desarrollo de la función $1/(z - b)$ en el anillo $A(a, |b-a|, \infty)$, luego la serie converge casi uniformemente a la función en este anillo, con lo que converge uniformemente en K .

Ahora bien, como $a \in V$ tenemos que $1/(z - a)$ está en $B_E(K)$. Como este espacio es cerrado para productos y contiene obviamente a las constantes, resulta que las funciones $(b-a)^n/(z-a)^{n+1}$ también están en $B_E(K)$, como es cerrado para sumas también contiene a las sumas parciales de la serie, y como es cerrado para la topología, contiene al límite, es decir, a la función $1/(z - b)$.

2) Si $\infty \in E$ y $R = \max\{|z| \mid z \in K\}$, entonces $A(0, R, \infty) \subset V$.

En efecto, si $a \in A(0, R, \infty)$ entonces para todo $z \in K$

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a} \frac{1}{1-\frac{z}{a}} = -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}},$$

pues $|z/a| \leq R/|a| < 1$. Esta serie converge en $D(0, |a|)$, luego converge (uniformemente) en K . Las sumas parciales son polinomios (funciones racionales con un polo en $\infty \in E$), luego están en $R_E(K)$, luego el límite está en $B_E(K)$.

3) $\partial V \subset K$.

Si $a \in \partial V$ pero $a \notin K$, tomamos $d = d(a, K)$. Existe un $b \in D(a, d/2) \cap V$, entonces $a \in D(b, d/2) \subset D(a, d) \subset \mathbb{C} \setminus K$, luego $d/2 \leq d(b, K)$ y por 1) concluimos que $D(b, d/2) \subset V$, luego $a \in V$, pero al ser V abierto es imposible que a esté en V y en su frontera.

El paso 3) implica que V no tiene puntos de frontera en $\mathbb{C} \setminus K$, luego V es abierto y cerrado en $\mathbb{C} \setminus K$. Si C es una componente conexa de $\mathbb{C} \setminus K$ entonces $V \cap C$ es abierto y cerrado en C , luego o bien $C \subset V$ o bien $C \cap V = \emptyset$. Así, para concluir que $V = \mathbb{C} \setminus K$ basta probar que V corta a todas las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus K$.

En efecto, si $a \in E$, $a \neq \infty$, entonces $1/(z-a) \in R_E(K) \subset B_E(K)$, luego por definición $a \in V$. Si C es una componente conexa acotada de $\mathbb{C} \setminus K$, entonces también es una componente conexa de $\mathbb{C}^\infty \setminus K$ y E contiene un punto de C , que está en V , según acabamos de ver, luego V corta a C . Si C es la componente conexa no acotada entonces $C \cup \{\infty\}$ es la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}^\infty \setminus K$, y el razonamiento anterior vale salvo que el único punto de $C \cup \{\infty\}$ que esté en E sea ∞ . Entonces por 2) sabemos que V contiene un anillo de la forma $A(0, R, \infty)$, que claramente contiene puntos de C .

Una vez probado que $V = \mathbb{C} \setminus K$ la conclusión es sencilla. Sea Ω un abierto en \mathbb{C} en el que f sea holomorfa y $K \subset \Omega$. El teorema 3.4 aplicado a K y $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ nos da que existe un ciclo γ tal que

1. $\gamma^* \cap K = \emptyset$, $\gamma^* \subset \Omega$,
2. Para todo $z \in K$ se cumple $I(\gamma, z) = 1$,
3. Para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ se cumple $I(\gamma, z) = 0$.

La propiedad 3) nos permite aplicar el teorema de Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \text{para todo } z \in K.$$

Por el teorema anterior, dado $\epsilon > 0$, existe una función racional R cuyos polos están sobre γ^* (luego son finitos) tal que

$$\left| \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - R(z) \right| < \epsilon, \quad \text{para todo } z \in K.$$

Cambiando $R(z)$ por $R(z)/2\pi i$ tenemos una función racional en las mismas condiciones tal que $|f(z) - R(z)| < \epsilon/2\pi < \epsilon$ para todo $z \in K$, es decir, tal que $\|f(z) - R(z)\| < \epsilon$, donde la norma es la norma supremo en $C(K)$, que induce la topología de la convergencia uniforme en $C(K)$.

Tomemos uno de los polos de $R(z)$ y consideremos su desarrollo en serie de Laurent. La parte regular del desarrollo (es decir, la suma de potencias con exponente no negativo) es una función racional cuyos polos son los polos restantes de $R(z)$, a su vez desarrollamos esta parte regular alrededor de otro de sus polos y seguimos así hasta agotar todos los polos.

Si R fuera una función arbitraria podríamos llegar a una parte regular sin polos, es decir, a un polinomio, pero eso significaría que R tendría un polo en ∞ , lo cual es falso. Por lo tanto terminamos con una expresión de la forma

$$R(z) = \sum_{n=1}^r \frac{a_n}{(z - b_n)^{k_n}},$$

donde los números b_n (no necesariamente distintos) son los polos de R .

Cada sumando está en $B_E(K)$, luego también $R(z) \in B_E(K)$. Por lo tanto hemos probado que f tiene elementos de $B_E(K)$ arbitrariamente próximos, es decir, f está en la clausura de $B_E(K)$ pero, como es cerrado, $f \in B_E(K)$. ■

El teorema de Runge puede enunciarse de un modo topológico más natural:

Teorema 3.51 (Teorema de Runge) *Sea Ω un abierto en \mathbb{C} y $E \subset \mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ un conjunto que contenga al menos un punto de cada componente conexa de $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$. Entonces el conjunto $R_E(\Omega)$ de las funciones racionales con polos en E (restringidas a Ω) es denso en $\mathcal{H}(\Omega)$.*

DEMOSTRACIÓN: Hay que probar que para toda función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, todo compacto $K \subset \Omega$ y todo $\epsilon > 0$ existe una función $R(z) \in R_E(\Omega)$ tal que $|f(z) - R(z)| < \epsilon$ para todo $z \in K$.

Para aplicar el teorema anterior habría que justificar que E corta a todas las componentes conexas de $\mathbb{C}^\infty \setminus K$, pero esto es falso en general (por ejemplo si K tiene un “agujero”). No obstante basta probar esta afirmación para los compactos

$$K_n = \{z \in \Omega \mid |z| \leq n, d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq 1/n\},$$

pues cualquier compacto está contenido en uno de ellos, y éstos sí van a cumplir la propiedad.

Sea, pues, $K = K_n$ y sea C una componente conexa de $\mathbb{C}^\infty \setminus K$. Veamos que C corta a $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$. Tomemos $z \in C$. Entonces $z \notin K$, luego hay tres posibilidades:

1. $z \notin \Omega$,
2. $|z| > n$,
3. $d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) < 1/n$.

En el primer caso $z \in C \cap (\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega)$. En el segundo $\{\lambda z \mid 1 \leq \lambda < +\infty\}$ es un conexo contenido en $\mathbb{C}^\infty \setminus K$ y que corta a C , luego está contenido en C . Por lo tanto C es la componente conexas no acotada de $\mathbb{C}^\infty \setminus K$, luego $\infty \in C \cap (\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega)$.

En el tercer caso existe un $a \in \mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ tal que $d(z, a) < 1/n$. Por definición de K se cumple que $D(a, 1/n) \cap K = \emptyset$, luego este disco es un conexo en $\mathbb{C}^\infty \setminus K$ que corta a C , luego está contenido en C , luego $a \in C \cap (\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega)$.

En cualquier caso toda componente conexas C de $\mathbb{C}^\infty \setminus K$ corta a una componente conexas D de $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$, la cual es un conexo en $\mathbb{C}^\infty \setminus K$ que corta a C , luego $D \subset C$. Como D contiene un punto de E , lo mismo le ocurre a C y podemos aplicar el teorema anterior. ■

Ahora es fácil ver que en general las funciones racionales no pueden ser sustituidas por polinomios:

Teorema 3.52 *Un abierto Ω de \mathbb{C} cumple que $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ es conexo si y sólo si el conjunto $\mathbb{C}[z]$ de todos los polinomios (restringidos a Ω) es denso en $\mathcal{H}(\Omega)$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ es conexo podemos aplicar el teorema de Runge con $E = \{\infty\}$, y las funciones racionales con polos a lo sumo en ∞ son los polinomios.

Si $\mathbb{C}[z]$ es denso en $\mathcal{H}(\Omega)$ se cumple que $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ es conexo por la caracterización 2) del teorema 3.29. En efecto, toda función f es límite casi uniforme de una sucesión de polinomios. El límite es uniforme sobre el compacto ϕ^* , luego la integral de f sobre ϕ es el límite de las integrales de los polinomios, que son nulas por el teorema de Cauchy. ■

Capítulo IV

Productos infinitos

En este capítulo estudiaremos más a fondo los desarrollos en producto infinito de las funciones holomorfas que estudiamos ya en el capítulo VIII de [ITAn]. Allí vimos algunas descomposiciones en productos infinitos, como

$$\operatorname{sen} z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right), \quad \operatorname{cos} z = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right),$$

válidas en todo el plano complejo. Ahora veremos que todas las funciones enteras admiten descomposiciones en productos infinitos que generalizan las descomposiciones en factores primos de los polinomios de $\mathbb{C}[z]$.

Comparemos, por ejemplo, el anillo $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ de las funciones enteras y el subanillo $\mathbb{C}[z]$ de las funciones polinómicas:

Ambos son dominios íntegros, y en ambos se cumple que las unidades son las funciones / polinomios que no se anulan en ningún punto. En el caso de los polinomios se trata de las funciones constantes, mientras que en el caso de las funciones enteras, por el teorema 1.36, son las funciones de la forma $e^{g(z)}$, para cierta $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Además, ambos anillos tienen los mismos primos que, salvo unidades, son los de la forma $z - a$, con $a \in \mathbb{C}$.

En efecto, $z - a$ es primo en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ porque, ciertamente, no es una unidad, y el teorema [ITAn 10.19] implica que divide exactamente a las funciones enteras que se anulan en a . De aquí se sigue inmediatamente que divide a un producto si y sólo si divide a uno de sus factores (pues si un producto se anula en a , uno de los factores debe anularse en a). A su vez, esto implica que no puede haber más primos, pues toda función que no sea una unidad se anula en algún punto a y, por consiguiente, es divisible entre $z - a$.

Mientras en las descomposiciones en factores primos “usuales” (es decir, finitas) las unidades son prácticamente irrelevantes, no sucede lo mismo con las factorizaciones infinitas. Por ejemplo, no podemos factorizar

$$\operatorname{sen} z = z(z - \pi)(z + \pi)(z - 2\pi)(z + 2\pi) \cdots$$

porque el producto infinito que resulta es divergente.

En general, si $a \neq 0$, conviene cambiar el primo $z - a$ por $1 - z/a$ (para lo cual hemos multiplicado por la unidad $1/a$), y con estos representantes de las clases de primos la situación es distinta, pues se cumple que

$$\operatorname{sen} z = z \left(1 - \frac{z}{\pi}\right) \left(1 + \frac{z}{\pi}\right) \left(1 - \frac{z}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{z}{2\pi}\right) \cdots$$

En efecto, la sucesión de productos parciales impares (contando el factor z) es la sucesión de la factorización del seno probada en [ITAn], luego converge a $\operatorname{sen} z$, y la sucesión de los productos parciales pares converge al mismo límite porque es el producto de la sucesión anterior por la sucesión $1 - z/n\pi$, que tiende a 1.

Así tenemos ya una descomposición en factores primos “mínimamente razonable”, si bien no es del todo satisfactoria, ya que del teorema [ITAn 8.5] se sigue inmediatamente que este producto no converge absolutamente en ningún punto distinto de cero. En particular no podemos agrupar arbitrariamente los factores y escribir, por ejemplo:

$$\operatorname{sen} z = z \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n\pi}\right).$$

Sin embargo, vamos a ver que este inconveniente se subsana eligiendo aún mejor los representantes de las clases de primos de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Concretamente, pronto veremos que el seno admite la factorización

$$\operatorname{sen} z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) e^{z/n\pi} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n\pi}\right) e^{-z/n\pi}. \quad (4.1)$$

De hecho basta ver que el producto es absolutamente convergente, pues entonces, agrupando los factores correspondientes a valores opuestos de n , de él se obtiene la factorización probada en [ITAn].

4.1 Factorización de funciones holomorfas

La teoría básica sobre productos infinitos de números complejos está expuesta en la sección [ITAn 8.1]. Aquí empezamos con dos teoremas que mejoran [ITAn 8.9]. En el primero de ellos \log representa al logaritmo de un número complejo cuya parte imaginaria está en el intervalo $]-\pi, \pi]$:

Teorema 4.1 *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en un abierto Ω de \mathbb{C} que no tomen el valor 0. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \log f_n(z)$ converge casi uniformemente en Ω entonces $\prod_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge casi uniformemente a una función holomorfa f que cumple*

$$f(z) = e^{\sum_{n=0}^{\infty} \log f_n(z)}.$$

Además

$$f'(z) = f(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $z_0 \in \Omega$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D(z_0, r)} \subset \Omega$. Como la serie de los logaritmos converge uniformemente en este disco cerrado, es fácil ver que $\{f_n\}$ converge uniformemente a 1, luego existe un n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces $|f_n(z) - 1| < 1$ para todo z en dicho disco. Esto implica que las funciones $\log f_n(z)$ son holomorfas en $D(z_0, r)$, luego también lo es $\sum_{n=n_0}^{\infty} \log f_n(z)$.

Por el teorema [ITAn 8.3] resulta que

$$\prod_{n=n_0}^{\infty} f_n(z) = e^{\sum_{n=n_0}^{\infty} \log f_n(z)}$$

es también una función holomorfa en z_0 , al igual que

$$\prod_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \prod_{n=0}^{n_0-1} f_n(z) \prod_{n=n_0}^{\infty} f_n(z) = e^{\sum_{n=0}^{\infty} \log f_n(z)}.$$

Esto prueba que el producto es una función holomorfa en Ω . Veamos ahora que la convergencia es casi uniforme.

Sea $K \subset \Omega$ un compacto y sea $M > 1$ una cota superior de $|f|$ en K . Sea $0 < \epsilon < 1$. Como la serie de los logaritmos converge uniformemente en K existe un k_0 tal que si $k \geq k_0$ entonces

$$\left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \log f_n(z) \right| < \frac{\epsilon}{2M} < \frac{1}{2}$$

para todo $z \in K$. Así

$$\begin{aligned} & \left| f(z) - \prod_{n=0}^k f_n(z) \right| = \left| e^{\sum_{n=0}^{\infty} \log f_n(z)} - e^{\sum_{n=0}^k \log f_n(z)} \right| \\ &= \left| e^{\sum_{n=0}^{\infty} \log f_n(z)} \left| 1 - e^{-\sum_{n=k+1}^{\infty} \log f_n(z)} \right| \right| \leq M \left| \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(- \sum_{n=k+1}^{\infty} \log f_n(z) \right)^r \right| \\ &\leq M \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(\epsilon/2M)^r}{r!} = \frac{\epsilon}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\epsilon^{r-1}}{2^{r-1} M^{r-1} r!} < \frac{\epsilon}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^{r-1}} = \epsilon. \end{aligned}$$

Finalmente, una sencilla inducción prueba que la derivada de un producto finito $\prod_{n=0}^k f_n(z)$ es igual a

$$\prod_{n=0}^k f_n(z) \sum_{n=0}^k \frac{f'_n(z)}{f_n(z)}.$$

Tomando límites se sigue la expresión buscada para la derivada del producto infinito. ■

Notemos que la última parte del teorema anterior afirma que la derivada logarítmica de un producto infinito es la suma de las derivadas logarítmicas de sus factores.

Del teorema [ITAn 8.5] se desprende inmediatamente el siguiente criterio de convergencia absoluta:

Teorema 4.2 *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en un abierto Ω de \mathbb{C}^∞ que no tomen el valor 0. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge absoluta y casi uniformemente en Ω entonces el producto $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + f_n(z))$ converge absoluta y casi uniformemente en Ω .*

Ahora damos el teorema general sobre convergencia de productos admitiendo que los factores se anulen. Las restricciones sobre los ceros de los factores son las condiciones necesarias que impone el principio de prolongación analítica para que el producto no resulte ser la función constante nula. La demostración es inmediata.

Teorema 4.3 *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en un abierto Ω de \mathbb{C}^∞ . Sea E el conjunto de los puntos de Ω donde se anula al menos una de las funciones f_n . Son equivalentes:*

1. *Si K es un subconjunto compacto de Ω entonces $E \cap K$ es finito y existe un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ la función f_n no se anula en K .*
2. *El conjunto E no tiene puntos de acumulación en Ω y en cada punto de Ω se anula un número finito de funciones f_n .*

Si además de estas afirmaciones se cumple

3. *Para cada compacto $K \subset \Omega$ (y su n_0 asociado) la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} \log f_n(z)$ converge uniformemente en K ,*

entonces el producto $\prod_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge casi uniformemente en Ω a una función holomorfa. Una condición suficiente para que se cumpla 3) es la condición

- 3') *La serie $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z) - 1|$ converge casi uniformemente en Ω ,
y en tal caso el producto converge absolutamente en Ω .*

(La última afirmación se sigue inmediatamente de la prueba de [ITAn 8.5]).

Para probar que toda función entera puede descomponerse en (tal vez infinitos) factores primos damos la siguiente definición general:

Definición 4.4 Llamaremos *factores primarios de Weierstrass* a las funciones enteras

$$E_m(z) = (1 - z)e^{\sum_{k=1}^m z^k/k}, \quad \text{para } m = 1, 2, 3, \dots$$

Por ejemplo, en estos términos (4.1) es

$$\operatorname{sen} z = z \prod_{n=1}^{\infty} E_1(z/n\pi) \prod_{n=1}^{\infty} E_1(-z/n\pi). \quad (4.2)$$

Para ello necesitaremos el siguiente resultado auxiliar:

Teorema 4.5 Para todo natural no nulo m y todo z tal que $|z| \leq 1$ se cumple

$$|1 - E_m(z)| \leq |z|^{m+1}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $f(z) = 1 - E_m(z)$. Entonces

$$\begin{aligned} f'(z) &= - \left(-1 + (1 - z) \sum_{k=0}^{m-1} z^k \right) e^{\sum_{k=1}^m z^k/k} \\ &= -(-1 + 1 - z^m) \prod_{k=1}^m e^{z^k/k} = z^m \prod_{k=1}^m e^{z^k/k}. \end{aligned}$$

Consideremos la serie de Taylor del producto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \prod_{k=1}^m e^{z^k/k} = \prod_{k=1}^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! k^n} z^{nk}.$$

Comparando los coeficientes concluimos que $a_n \geq 0$ para todo n . La serie de Taylor de $f'(z)$ es $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+m}$, luego la serie de $f(z)$ (teniendo en cuenta que $f(0) = 0$) resulta ser

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+m+1} z^{n+m+1}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |1 - E_m(z)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+m+1} |z|^{n+m+1} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+m+1} |z|^{m+1} = f(1)|z|^{m+1} = |z|^{m+1}. \end{aligned}$$

■

Ahora podemos dar un teorema general de convergencia de productos de factores de Weierstrass:

Teorema 4.6 Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos no nulos que cumpla $\lim_n z_n = \infty$. Sea $\{p_n\}$ una sucesión de números naturales tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (r/|z_n|)^{p_n+1} < +\infty$$

para todo número real $r > 0$. Entonces el producto

$$\prod_{n=0}^{\infty} E_{p_n}(z/z_n)$$

converge absoluta y casi uniformemente a una función entera cuyos ceros son exactamente los números z_n y el orden de cada cero es igual al número de veces que aparece en la sucesión.

DEMOSTRACIÓN: Es claro que el producto cumple las condiciones del teorema 4.3 salvo quizá la condición 3). Vamos a ver que de hecho cumple la condición 3'), con lo que la convergencia será absoluta. Concretamente hemos de ver que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |1 - E_{p_n}(z/z_n)|$$

converge casi uniformemente en \mathbb{C} .

Sea K un compacto en \mathbb{C} . Sea $r > 0$ tal que $K \subset \overline{D(0, r)}$. De la hipótesis se sigue que $\lim_n (r/|z_n|) = 0$, luego existe un n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces $r/|z_n| < 1$.

Si $z \in K$ y $n \geq n_0$ entonces $|z/z_n| \leq r/|z_n| < 1$ y el teorema anterior nos da que

$$|1 - E_{p_n}(z/z_n)| \leq |z/z_n|^{p_n+1} \leq (r/|z_n|)^{p_n+1},$$

luego por el criterio de mayoración de Weierstrass la serie converge uniformemente en K . ■

Esto prueba la convergencia (absoluta) del producto (4.2), pues la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (r/n)^2$ converge para cualquier $r > 0$.

Observemos que, dada una sucesión que cumpla $\lim_n z_n = \infty$, siempre es posible encontrar una sucesión $\{p_n\}$ de números naturales que cumpla la hipótesis del teorema anterior. En efecto, basta tomar $p_n = n$. Entonces, dado un $r > 0$ siempre existe un n_0 tal que para $n \geq n_0$ se cumple $r/|z_n| < 1/2$, con lo que $(r/|z_n|)^{n+1} < 1/2^{n+1}$, y por lo tanto la serie converge.

Hemos enunciado el teorema para una sucesión arbitraria porque en muchos casos pueden tomarse sucesiones mucho más simples, como hemos visto en el caso del seno, donde nos ha servido $p_n = 1$. De este modo los factores son más sencillos.

El teorema siguiente es una consecuencia inmediata del teorema 4.6 junto con la observación anterior:

Teorema 4.7 Sea B un conjunto de números complejos sin puntos de acumulación y sea $m : B \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Entonces existe una función entera f cuyos ceros son exactamente los puntos de B y para cada $z \in B$ se cumple que $o(f, z) = m(z)$.

(Basta formar una sucesión con los puntos de B donde cada punto z se repita $m(z)$ veces y tomar $p_n = z$).

Finalmente llegamos al teorema general de factorización de funciones enteras:

Teorema 4.8 (Teorema de factorización de Weierstrass) Sea f una función entera no idénticamente nula. Sea $\{a_n\}$ el conjunto de los ceros no nulos de f repetidos tantas veces como indica su orden, sea $k = o(f, 0)$ y sea $\{p_n\}$ cualquier sucesión de números naturales que cumpla la hipótesis del teorema 4.6. Entonces existe una función entera g tal que

$$f(z) = e^{g(z)} z^k \prod_{n=0}^{\infty} E_{p_n}(z/a_n).$$

DEMOSTRACIÓN: Según el teorema [An 10.19] el cociente de f entre el producto infinito se extiende a una función entera que no se anula, y por el teorema 1.36 es de la forma $e^{g(z)}$. ■

Este teorema puede ser generalizado a abiertos cualesquiera. Como los factores que se obtienen en el caso general no son tan simples como para funciones enteras, no vamos a enunciarlo explícitamente. En su lugar daremos un enunciado que generaliza al teorema 4.7, si bien en la prueba construimos un producto de funciones cada una de las cuales tiene un cero simple, y que permite factorizar cualquier función holomorfa de un modo análogo a lo visto en el teorema 4.8.

Teorema 4.9 Sea Ω un abierto en \mathbb{C} y sea $A \subset \Omega$ un conjunto sin puntos de acumulación en Ω . Para cada $\alpha \in A$ sea $m(\alpha)$ un número natural no nulo. Entonces existe una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ cuyos ceros son los puntos de A y además para cada $\alpha \in A$ se cumple $o(f, \alpha) = m(\alpha)$.

DEMOSTRACIÓN: Vamos a probar que el teorema se cumple, de hecho, para todo abierto $\Omega \subset \mathbb{C}^\infty$ tal que $\Omega \neq \mathbb{C}^\infty$. Esto requiere tener en cuenta que el concepto de orden de un cero de una función holomorfa $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ puede definirse sobre una variedad analítica arbitraria V de dimensión 1, como se muestra en A.14, lo cual implica en particular que el orden se conserva al componer con aplicaciones biholomorfas.

Sucede que esta extensión no sólo no complica la prueba del teorema, sino que en realidad la simplifica. De hecho, conviene tratar en primer lugar el caso en que $\infty \in \Omega \setminus A$. Entonces $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ es un compacto no vacío e ∞ no es un punto de acumulación de A .

Supongamos en primer lugar que A es infinito (claramente numerable) y formemos una sucesión $\{\alpha_n\}$ en la que cada $\alpha \in A$ aparezca exactamente $m(\alpha)$ veces.

Como $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ es compacto, existe un $\beta_n \in \mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$ tal que $|\alpha_n - \beta_n| \leq |\alpha_n - \beta|$ para todo $\beta \in \mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$. Veamos que $\lim_n |\alpha_n - \beta_n| = 0$.

En otro caso existiría un $\epsilon > 0$ tal que $|\alpha_n - \beta_n| \geq \epsilon$ para infinitos α_n . El conjunto de estos valores tiene un punto de acumulación $\beta \in \mathbb{C}^\infty$ y, por la hipótesis sobre A , de hecho ha de ser $\beta \in \mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$. Así podemos tomar n tal que $|\alpha_n - \beta_n| \geq \epsilon$, pero $|\alpha_n - \beta| < \epsilon$, y esto contradice la elección de β_n .

La función $E_n(z)$ es holomorfa en \mathbb{C} y tiene un único cero simple en $z = 1$, luego la función

$$E_n \left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n} \right)$$

es holomorfa en $\mathbb{C}^\infty \setminus \{\beta_n\}$, en particular en Ω , y tiene un único cero (simple) en α_n . Veamos que

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_n \left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n} \right)$$

define una función holomorfa en Ω , que claramente cumplirá lo pedido. Para ello basta probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| 1 - E_n \left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n} \right) \right|$$

converge casi uniformemente en Ω .

Sea $K \subset \Omega$ un compacto. Sea $d > 0$ la distancia de K a $\mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$. Para valores de n suficientemente grandes se cumple $|\alpha_n - \beta_n| \leq d/2 \leq |z - \beta_n|/2$, para todo $z \in K$, luego

$$\left| \frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Por el teorema 4.5 tenemos que

$$\left| 1 - E_n \left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n} \right) \right| \leq \frac{1}{2^{n+1}},$$

para todo $z \in K$. De aquí se sigue que la serie converge uniformemente en K .

Si A es finito tenemos igualmente una sucesión finita $\{\alpha_n\}$ y basta definir f igualmente (donde ahora el producto es finito) tomando cualquier $\beta_n \in \mathbb{C}^\infty \setminus \Omega$.

En el caso general, puesto que A es numerable, podemos tomar un $\xi \in \Omega \setminus A$, $\xi \neq \infty$. La transformación de Möbius $M(z) = 1/(z - \xi)$ cumple $M(\xi) = \infty$, luego $M[\Omega]$ y $M[A]$ cumplen las hipótesis del teorema y además tenemos que $\infty \in M[\Omega] \setminus M[A]$. Por la parte ya probada existe una función $f \in \mathcal{H}(M[\Omega])$ tal que sus ceros son los puntos $M(\alpha)$ para cada $\alpha \in A$ con orden $m(\alpha)$. Entonces la función $f(M(z))$ cumple lo pedido. ■

Como consecuencia probamos algo que ya habíamos anunciado:

Teorema 4.10 *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto no vacío, toda función meromorfa en Ω es el cociente de dos funciones holomorfas.*

DEMOSTRACIÓN: Si $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, el conjunto de sus polos es un conjunto de puntos aislados sin acumulación en Ω , luego por el teorema anterior existe una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ que tiene ceros exactamente en los puntos donde f tiene polos, y de modo que $o(f, z) = -o(g, z)$, para todo $z \in \Omega$ donde f tiene un polo (y trivialmente también donde f es holomorfa).

Entonces $h = fg$ tiene singularidades evitables en todos los puntos donde f tiene polos, luego se extiende a una función $h \in \mathcal{H}(\Omega)$, y $f = h/g$ en $\mathcal{M}(\Omega)$. ■

4.2 Orden de crecimiento

En esta sección obtendremos información sobre la sucesión $\{p_n\}$ y la función $g(z)$ que aparecen en la factorización de Weierstrass 4.8 de una función f . Sucede que ambas están relacionadas con el comportamiento asintótico de $f(z)$, es decir, con la velocidad a la que crece $|f(z)|$ cuando z tiende a infinito. Por ello introducimos el concepto siguiente:

Definición 4.11 Sea f una función entera. Para cada $r > 0$ definimos

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

El principio del módulo máximo implica que si f no es constante entonces $M_f(r)$ es una función estrictamente creciente. Por el teorema de Liouville se cumple también que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} M_f(r) = +\infty.$$

Vamos a ver que, mediante estimaciones de la velocidad de crecimiento de una función f a través de la función $M_f(r)$, podemos obtener mucha información útil sobre f .

Diremos que una función entera f es de *orden finito* si existen un $c > 0$ y un $r_0 > 0$ tales que $M_f(r) < e^{r^c}$ para todo $r > r_0$. En tal caso se llama *orden de crecimiento* de f al ínfimo ρ de los números c que cumplen la condición anterior. Si f no es de orden finito diremos que es de *orden infinito*, y convendremos en que su orden de crecimiento es $\rho = +\infty$.

Es importante notar que el orden de crecimiento ρ de una función de orden finito no tiene por qué ser uno de los números c que cumplen la definición. En principio, que el orden de f sea $\rho < +\infty$ significa que para todo $\epsilon > 0$ existe un $r_0 > 0$ tal que para todo $r > r_0$ se cumple $M_f(r) < e^{r^{\rho+\epsilon}}$, así como una sucesión $\{r_n\}$ de números positivos convergente a $+\infty$ de modo que $M_f(r_n) \geq e^{r_n^{\rho-\epsilon}}$. Tomando logaritmos estas desigualdades equivalen a

$$\begin{aligned} \frac{\log \log M_f(r)}{\log r} &< \rho + \epsilon, \\ \frac{\log \log M_f(r_n)}{\log r_n} &\geq \rho - \epsilon. \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log M_f(r)}{\log r}.$$

Es fácil ver que esta igualdad vale también si f es de orden infinito.

Ejemplos El lector puede comprobar fácilmente que todo polinomio tiene orden de crecimiento nulo. Para la función exponencial se cumple $M(r) = e^r$, por lo que su orden es 1. Consideremos ahora la función seno. Si $z = x + iy$ es claro que

$$\left| \frac{e^y - e^{-y}}{2} \right| \leq |\operatorname{sen} z| \leq \left| \frac{e^y + e^{-y}}{2} \right|,$$

de donde

$$\frac{e^r - 1}{2} \leq M(r) \leq \frac{e^r + 1}{2},$$

y de aquí se sigue claramente que su orden es 1 también. Un argumento similar se aplica a la función coseno.

Ahora probamos que si $P(z)$ es un polinomio de grado n , entonces la función $f(z) = e^{P(z)}$ tiene orden n .

En efecto, digamos que $P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$, con $a_n \neq 0$. Sea $a_k = \sigma_k e^{i\alpha_k}$ y $z = re^{i\theta}$. Entonces

$$|f(z)| = \left| e^{\sum_{k=0}^n \sigma_k r^k e^{i(\alpha_k + k\theta)}} \right| = e^{\sum_{k=0}^n \sigma_k r^k \cos(\alpha_k + k\theta)}.$$

El exponente puede expresarse en la forma

$$\sigma_n r^n \left(\cos(\alpha_n + n\theta) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sigma_k \cos(\alpha_k + k\theta)}{\sigma_n r^{n-k}} \right). \quad (4.3)$$

La última suma tiende a 0 uniformemente en θ cuando r tiende a $+\infty$, por lo que, dado $\epsilon > 0$, la expresión anterior está finalmente mayorada por $\sigma_n r^n (1 + \epsilon)$. Por otra parte, si $\theta = -\alpha_n/n$ tenemos que $\cos(\alpha_n + n\theta) = 1$ y (4.3) es mayor que $\sigma_n r^n (1 - \epsilon)$. Esto prueba que

$$e^{\sigma_n r^n (1-\epsilon)} \leq M_f(r) \leq e^{\sigma_n r^n (1+\epsilon)}.$$

Tomando logaritmos dos veces concluimos que el orden de f es igual a n .

Finalmente, es claro que e^{e^z} es un ejemplo de función entera de orden infinito. ■

El teorema siguiente es de gran utilidad para calcular órdenes de crecimiento:

Teorema 4.12 *El la suma y el producto de dos funciones enteras de orden menor o igual que ρ tiene orden menor o igual que ρ .*

DEMOSTRACIÓN: Sean f y g funciones enteras de orden menor o igual que ρ . Dado $\epsilon > 0$ existe un $r_0 > 0$ tal que si $r > r_0$ entonces $M_f(r) < e^{r^{\rho+\epsilon/2}}$, $M_g(r) < e^{r^{\rho+\epsilon/2}}$, luego

$$M_{f+g}(r) \leq M_f(r) + M_g(r) \leq 2e^{r^{\rho+\epsilon/2}}, \quad M_{fg}(r) \leq M_f(r)M_g(r) \leq e^{2r^{\rho+\epsilon/2}}.$$

Si $k > 0$, se cumple

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} (r^{\rho+\epsilon} - kr^{\rho+\epsilon/2}) = \lim_{r \rightarrow +\infty} r^{\rho+\epsilon/2}(r^{\rho+\epsilon/2} - k) = +\infty,$$

luego

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{e^{kr^{\rho+\epsilon/2}}}{e^{r^{\rho+\epsilon}}} = 0.$$

Por consiguiente existe un $r_1 > 0$ tal que si $r > r_1$ entonces

$$M_{f+g}(r) < e^{r^{\rho+\epsilon}}, \quad M_{fg}(r) < e^{r^{\rho+\epsilon}}.$$

Esto prueba que $f + g$ y fg tienen orden menor o igual que ρ . ■

En otras palabras, las funciones enteras de orden menor o igual que ρ forman una subálgebra de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Notemos también que si f y g tienen órdenes $\rho_1 < \rho_2$, entonces el orden de $f + g$ es exactamente ρ_2 , ya que si fuera menor, por el teorema anterior el orden de g sería menor o igual que el de $(f + g) - f$, menor que ρ_2 .

Pasamos a investigar las propiedades de las funciones enteras de orden finito.

Teorema 4.13 *Sea f una función entera de orden finito ρ . Si f no toma nunca un cierto valor A , entonces ρ es un número natural y f es de la forma*

$$f(z) = A + e^{P(z)},$$

donde P es un polinomio de grado ρ .

DEMOSTRACIÓN: La función $f(z) - A$ no se anula, luego tiene un logaritmo entero $P(z)$, es decir, f es de la forma indicada para una función holomorfa P , que hemos de probar que es un polinomio. Para ello usaremos el teorema 2.28.

La función $e^{P(z)}$ tiene orden ρ , luego, dado $\epsilon > 0$ existe un $R > 0$ tal que si $|z| = r > R$ entonces $|e^{P(z)}| < e^{r^{\rho+\epsilon}}$, luego $\operatorname{Re} P(z) < |z|^{(\rho+\epsilon)}$ y podemos aplicar 2.28 para concluir que, en efecto, P es un polinomio. Antes hemos demostrado que el orden de una función del tipo $e^{P(z)}$ es el grado de $P(z)$, luego éste es igual a ρ . ■

En particular vemos que, salvo las funciones $A + e^{P(z)}$, todas las funciones enteras de orden finito toman todos los valores complejos. Ahora veremos que, también salvo un caso particular, las funciones de orden finito toman infinitas veces cada valor complejo:

Teorema 4.14 (Teorema de Picard) *Sea f una función entera no polinómica de orden finito ρ . Entonces f toma infinitas veces cada valor complejo salvo quizá un único valor A . Si f toma sólo un número finito de veces el valor A entonces es de la forma $f(z) = A + P(z)e^{Q(z)}$, donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios. Además en tal caso ρ es un número natural no nulo que coincide con el grado de $Q(z)$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f toma sólo un número finito de veces el valor A . Entonces la función $f(z) - A$ tiene un número finito de ceros. Podemos construir un polinomio $P(z)$ con los mismos ceros que esta función y con los mismos órdenes. Entonces $(f(z) - A)/P(z)$ es una función entera que no se anula, luego tiene un logaritmo $Q(z)$, es decir, f tiene la forma indicada en el enunciado. Queda por demostrar que $Q(z)$ es un polinomio de grado ρ y que f toma infinitas veces cualquier valor complejo distinto de A .

Claramente $|e^{Q(z)}| \leq (|f(z) + A|)/|P(z)| \leq |f(z) + A|$ para $|z| = r$ suficientemente grande y, como $f(z) + A$ tiene orden ρ , fijado $\epsilon > 0$, se cumple $|f(z) + A| \leq e^{r^{\rho+\epsilon}}$. Esto prueba que el orden de $e^{Q(z)}$ es menor o igual que ρ . Más aún, si $|z|$ es suficientemente grande, $\operatorname{Re} Q(z) \leq |z|^{\rho+\epsilon}$. El teorema 2.28 prueba que Q es un polinomio de grado menor o igual que ρ . Por otra parte, el teorema 4.12 nos da que el orden de f es menor o igual que el de $e^{Q(z)}$, luego el grado de $Q(z)$ es exactamente ρ .

Por último veamos que una función del tipo $f(z) = A + P(z)e^{Q(z)}$ toma infinitas veces cualquier valor complejo distinto de A . En caso contrario, si f tampoco tomara infinitas veces un valor B , por la parte ya probada tendríamos que

$$A + P(z)e^{Q(z)} = B + R(z)e^{S(z)}, \quad (4.4)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, donde P , Q , R y S son polinomios, Q y S del mismo grado no nulo. Esto equivale a que

$$P(z)e^{Q(z)} - R(z)e^{S(z)} = C \neq 0.$$

Derivando queda

$$(P'(z) + P(z)Q'(z))e^{Q(z)} - (R'(z) + R(z)S'(z))e^{S(z)} = 0.$$

Si fuera $P'(z) + P(z)Q'(z) = 0$ para todo z , entonces $Q'(z) = -P'(z)/P(z)$ tendría polos en los ceros de P , lo cual es imposible, luego $P'(z) + P(z)Q'(z)$ es un polinomio no nulo y podemos despejar

$$e^{Q(z)-S(z)} = \frac{R'(z) + R(z)S'(z)}{P'(z) + P(z)Q'(z)}.$$

El segundo miembro es una función racional que no tiene ceros ni polos finitos, luego es constante. De aquí que $e^{Q(z)} = Ke^{S(z)}$ para todo z . Así (4.4) se convierte en

$$KP(z) - R(z) = Ce^{-S(z)},$$

y ahora el primer miembro es un polinomio sin ceros, luego es constante, lo que implica que $S(z)$ es constante también, en contradicción con la hipótesis de que f no es un polinomio. ■

Ya sabemos cómo son las funciones enteras de orden finito con un número finito de ceros. Ahora investigaremos las funciones con infinitos ceros. El primer resultado que probaremos es que en las factorizaciones de Weierstrass es posible tomar factores primarios $E_p(z/a_n)$ con p constante. Conviene introducir una definición.

Definición 4.15 Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números complejos no decreciente en módulo y que converja a $+\infty$. Llamaremos *exponente de convergencia* de la sucesión al ínfimo τ de todos los números $\lambda > 0$ tales que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\lambda} < +\infty.$$

Si la serie diverge para todo valor de λ el exponente de convergencia es $\tau = +\infty$.

Llamaremos *orden* de la sucesión κ al mayor número natural λ tal que la serie anterior diverge. Obviamente κ es finito si y sólo si lo es τ . En tal caso $\kappa \leq \tau \leq \kappa + 1$.

El teorema 4.6 asegura que el producto

$$\prod_{n=0}^{\infty} E_\kappa(z/a_n)$$

converge absolutamente a una función entera. Por lo tanto, si $\{a_n\}$ es la sucesión de los ceros no nulos de una función entera f ordenados de modo que la sucesión de los módulos sea no decreciente y repetidos tantas veces como indica su orden, y si además su exponente de convergencia es finito entonces el teorema 4.8 nos da que

$$f(z) = e^{g(z)} z^k \prod_{n=0}^{\infty} E_\kappa(z/a_n).$$

Vamos a probar que la sucesión de los ceros de una función entera de orden finito tiene exponente de convergencia finito. La clave de la demostración nos la da la llamada fórmula de Jensen.

Teorema 4.16 (Fórmula de Jensen) Sea f una función holomorfa en un abierto que contiene al disco $|z| \leq R$. Supongamos que f no tiene ceros en la circunferencia $|z| = R$ así como que $f(0) \neq 0$. Sean a_1, \dots, a_n los ceros de f en el disco $|z| < R$ repetidos según sus multiplicidades. Entonces

$$\log |f(0)| + \sum_{i=1}^n \log \frac{R}{|a_i|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta.$$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la función

$$F(z) = f(z) \prod_{i=1}^n \frac{R^2 - \bar{a}_i z}{R(z - a_i)}.$$

El producto de los numeradores no tiene ceros en el disco $|z| \leq R$, mientras que el producto de los denominadores tiene los mismos ceros que f en orden y posición, luego F es holomorfa y no nula en un abierto que contiene al disco $|z| \leq R$. Consecuentemente F tiene un logaritmo holomorfo $\log F$. Su parte real es la función armónica $\log |F(z)|$ (por 1.41), a la que podemos aplicar el teorema del valor medio de Gauss [An 8.12]:

$$\log |F(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |F(Re^{i\theta})| d\theta.$$

Sobre la circunferencia $|z| = R$ se cumple que $|F(z)| = |f(z)|$, pues todos los factores

$$\frac{R^2 - \bar{a}_i z}{R(z - a_i)}$$

tienen módulo 1 (al multiplicarlos por \bar{z}/R el numerador se convierte en el conjugado del denominador). Teniendo esto en cuenta, la fórmula de Jensen es inmediata. ■

Teorema 4.17 *Sea f una función entera de orden finito ρ y sea $\{a_n\}$ la sucesión de sus ceros no nulos ordenados de modo que sus módulos sean no decrecientes. Entonces el exponente de convergencia de esta sucesión es finito y cumple $\tau \leq \rho$.*

DEMOSTRACIÓN: Basta ver que para cualquier $\lambda > \rho$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\lambda} \tag{4.5}$$

es convergente.

Si tomamos $\rho < \alpha < \lambda$ la definición de orden nos da que $\log |f(z)| \leq |z|^\alpha$ siempre que $|z|$ sea suficientemente grande.

Aplicamos la fórmula de Jensen al disco $|z| \leq R = 2|a_n| + \epsilon$, donde n se toma de modo que R satisfaga la desigualdad anterior y ϵ de modo que no haya ningún cero a_m tal que $2|a_n| < |a_m| \leq 2|a_n| + \epsilon$. El resultado es

$$\sum_{|a_m| < 2|a_n| + \epsilon} \log \frac{2|a_n| + \epsilon}{|a_m|} \leq (2|a_n| + \epsilon)^\alpha - \log |f(0)|.$$

La elección de ϵ nos permite hacerlo tender a 0, con lo que desaparece de la fórmula. Eliminamos también todos los sumandos correspondientes a índices

$m > n$. Los restantes cumplen $\log(2|a_n|/|a_m|) \geq \log 2$, luego en total queda $n \log 2 \leq 2^\alpha |a_n|^\alpha - \log |f(0)|$. Por consiguiente

$$n \leq \frac{2^\alpha}{\log 2} |a_n|^\alpha - \frac{\log |f(0)|}{\log 2}.$$

Tomamos ahora $\alpha < \beta < \lambda$. La función $x^{\alpha-\beta}$ tiende a 0 cuando x tiende a infinito. Como consecuencia, si dividimos el miembro derecho de la desigualdad anterior entre $|a_n|^\beta$ obtenemos una sucesión que tiende a 0 con n , luego para n suficientemente grande se cumple $n < |a_n|^\beta$, luego $|a_n| > n^{1/\beta}$. Finalmente, $|a_n|^\lambda > n^{\lambda/\beta}$, luego (4.5) está mayorada por $\zeta(\lambda/\beta)$. ■

Aunque aquí no nos va a hacer falta, es interesante notar que el argumento que acabamos de emplear nos da una estimación del número de ceros de una función entera de orden finito en un disco dado. En efecto, si aplicamos la fórmula de Jensen a un disco de radio $2R + \epsilon$, llegamos igualmente a la desigualdad

$$n \leq \frac{2^\alpha}{\log 2} R^\alpha - \frac{\log |f(0)|}{\log 2},$$

donde ahora n es el número de ceros de f en el disco $|z| \leq R$ (contados según sus órdenes). Vemos, pues, que n/R^β tiende a 0. Esto prueba el teorema siguiente:

Teorema 4.18 *Sea f una función entera de orden finito ρ y sea $\epsilon > 0$. Entonces el número de ceros de f de módulo menor o igual que R (contando órdenes) es del orden de $R^{\rho+\epsilon}$ (en el sentido de que el cociente permanece acotado).*

Continuamos nuestro estudio de la factorización de funciones enteras:

Teorema 4.19 (Teorema de Hadamard) *Sea f una función entera de orden finito ρ . Sea $\{a_n\}$ la sucesión de sus ceros no nulos (repetidos según su multiplicidad y ordenados de modo que la sucesión de los módulos es no decreciente). Entonces*

$$f(z) = e^{P(z)} z^k \prod_{n=0}^{\infty} E_\kappa(z/a_n).$$

donde, $P(z)$ es un polinomio de grado menor o igual que ρ , k es el orden de 0 en f y κ es el orden de la sucesión $\{a_n\}$.

(En principio suponemos que f tiene infinitos ceros, aunque el teorema es trivialmente cierto en caso contrario, con los convenios obvios).

DEMOSTRACIÓN: Sólo hay que probar que $P(z)$ es un polinomio de grado menor o igual que ρ . Llamemos

$$u_n(z) = \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{z^i}{i a_n^i},$$

de modo que $E_\kappa(z/a_n) = (1 - z/a_n) e^{u_n(z)}$. Tomemos $R > 1$. Entonces

$$f(z) = z^k \prod_{n=0}^{n(R)} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{P(z) + \sum_{n=0}^{n(R)} u_n(z)} \prod_{n=n(R)+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{u_n(z)},$$

donde $n(R)$ es el mayor número natural n tal que $|a_n| \leq R$.

Llamaremos $g_R(z)$ a los últimos factores, de modo que

$$f(z) = z^k \prod_{n=0}^{n(R)} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) g_R(z).$$

Si $|z| = 2R$ se cumple

$$M_f(2R) \geq |f(z)| \geq (2R)^k \prod_{n=0}^{n(R)} \left(\frac{2R - R}{R}\right) |g_R(z)| \geq |g_R(z)|.$$

Así pues, $M_{g_R}(2R) \leq M_f(2R)$. Por el principio del módulo máximo, si $|z| < R$ se cumple también $|g_R(z)| \leq M_f(2R)$. La función g_R no se anula en el disco $|z| < R$, luego tiene un logaritmo $h_R(z)$. Más precisamente, según el teorema [ITAn 8.3], dicho logaritmo es

$$h_R(z) = P(z) + \sum_{n=0}^{n(R)} u_n(z) + \sum_{n=n(R)+1}^{\infty} \left(\log \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + u_n(z) \right). \quad (4.6)$$

De $|g_R(z)| \leq M_f(2R)$ se sigue que $\operatorname{Re} h_R(z) \leq \log M_f(2R)$, para $|z| < R$. Sea c_n el coeficiente n -simo de la serie de Taylor de $h_R(z)$ alrededor de 0. Sea α_0 la parte real de c_0 . Se cumple que $\operatorname{Re}(h_R(z) - c_0) \leq \log M_f(2R) - \alpha_0$ y podemos aplicar el teorema 2.27, que nos da, para $|z| = R/2$,

$$|h_R(z) - c_0| \leq 2(\log M_f(2R) - \alpha_0).$$

Las desigualdades de Cauchy implican que para $k \geq 1$ se cumple

$$|c_k| \leq \frac{2^{k+1}(\log M_f(2R) - \alpha_0)}{R^k}.$$

Llamemos d_k a los coeficientes de la serie de Taylor de $P(z)$ alrededor de 0. Hemos de probar que $d_k = 0$ para $k > \rho$. En la (4.6) podemos desarrollar cada sumando en serie de Taylor alrededor de 0. Como la convergencia es absoluta podemos reordenar los sumandos y concluir que c_k es la suma de los coeficientes k -ésimos de cada una de las series. Si $k > \rho$ los polinomios $u_n(z)$ no contribuyen y queda

$$c_k = d_k - \sum_{n=n(R)+1}^{\infty} \frac{1}{ka_n^k}.$$

Consecuentemente,

$$|d_k| \leq \frac{2^{k+1}(\log M_f(2R) - \alpha_0)}{R^k} + \sum_{n=n(R)+1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^k}.$$

Ahora basta probar que el segundo miembro tiende a 0 cuando R tiende a infinito y k queda fijo. El segundo sumando tiende a 0 porque es la cola de una serie convergente (k es mayor que ρ , que a su vez es mayor que el exponente de

convergencia de $\{a_n\}$. Respecto al primero, por definición de orden tenemos que $\log M_f(2R) < (2R)^{\rho+\epsilon}$, para un $\epsilon > 0$ prefijado y todo R suficientemente grande. Tomando $\rho + \epsilon < k$ es claro que el límite es 0. ■

Ejemplo Como aplicación del teorema de Hadamard vamos a dar una prueba muy sencilla de la factorización de la función seno (4.2). Como el orden de crecimiento del seno es 1, tenemos la factorización del teorema anterior con $\kappa = 1$ y $P(z) = az + b$ (y $k = 1$). Sólo hay que probar que $a = b = 0$. Ahora bien, es inmediato que la función $f(z) = e^{az+b}$ ha de ser par, es decir $f(z) = f(-z)$, luego $e^{2az} = 1$ para todo z , luego $a = 0$. Evaluando en 0 la función $(\sin z)/z$ y el producto infinito queda que $e^b = 1$, con lo que obtenemos la factorización buscada. ■

Ahora probamos el recíproco del teorema de Hadamard:

Teorema 4.20 (Teorema de Borel) *Sea f una función entera que admita una factorización*

$$f(z) = e^{P(z)} z^k \prod_{n=0}^{\infty} E_{\kappa}(z/a_n),$$

donde $P(z)$ es un polinomio de grado m y κ es el orden de convergencia de la sucesión $\{a_n\}$ de los ceros de f (que suponemos finito). Sea τ el exponente de convergencia. Entonces f tiene orden finito $\rho = \max\{m, \tau\}$.

DEMOSTRACIÓN: Si $|z| \leq 1/2$ se cumple

$$\begin{aligned} |E_{\kappa}(z)| &= \left| (1-z) e^{\sum_{i=1}^{\kappa} \frac{z^i}{i}} \right| = \left| e^{\log(1-z) + \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{z^i}{i}} \right| \leq \left| e^{-\sum_{i=\kappa+1}^{\infty} \frac{z^i}{i}} \right| \\ &\leq e^{|z|^{\kappa+1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|z|^i}{i+\kappa+1}} \leq e^{|z|^{\kappa+1} \sum_{i=0}^{\infty} |z|^i} \leq e^{2|z|^{\kappa+1}} \leq e^{|z|^{\kappa}}. \end{aligned}$$

(En los últimos pasos hemos usado que $|z| \leq 1/2$).

Si $|z| > 1/2$ hacemos

$$|E_{\kappa}(z)| \leq (1+|z|) e^{|z|^{\kappa} \sum_{i=0}^{\kappa-1} \frac{1}{|z|^i}} \leq (1+|z|) e^{|z|^{\kappa} \sum_{i=0}^{\kappa-1} 2^i} < e^{|2z|^{\kappa} + \log(1+|z|)}.$$

Tomemos un λ tal que $\kappa \leq \tau \leq \lambda < \kappa + 1$ y que haga convergente a la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\lambda}}.$$

Es fácil ver que $\log(1+x)/x^{\lambda}$ tiende a 0 cuando x tiende a $+\infty$, luego las dos desigualdades que hemos probado se reúnen en que $|E_{\kappa}(z)| < e^{C|z|^{\lambda}}$, para una cierta constante C y todo $z \in \mathbb{C}$. Cambiando z por z/a_n queda $|E_{\kappa}(z/a_n)| < e^{C|z/a_n|^{\lambda}}$. Es claro entonces que existe una constante K tal que

$$\left| \prod_{n=0}^{\infty} E_{\kappa}(z/a_n) \right| < e^{K|z|^{\lambda}} < e^{|z|^{\lambda+\epsilon}},$$

para cualquier $\epsilon > 0$ prefijado y todo z suficientemente grande.

Esto prueba que el orden del producto infinito es menor o igual que λ , pero λ puede tomarse arbitrariamente cerca de τ , por lo que el orden del producto es a lo sumo τ .

Por otra parte el orden de $e^{P(z)}z^k$ es m , luego, según 4.12, el orden de f es $\rho \leq \max\{m, \tau\}$. La desigualdad opuesta la da el teorema de Hadamard. ■

Ejemplo Vamos a ver ahora una función entera con orden fraccionario. La factorización de la función coseno es

$$\cos z = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2} \right),$$

lo que nos permite definir

$$\cos \sqrt{z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z}{(2n-1)^2\pi^2} \right).$$

Se trata de una función entera cuyas sucesión de ceros es $(2n-1)^2(\pi/2)^2$, cuyo exponente de convergencia es $1/2$. El teorema de Borel nos da que el orden de la función es también $1/2$. Como consecuencia obtenemos que la función $\cos \sqrt{z}$ toma infinitas veces todos los valores complejos.

Ejercicio: Probar que la ecuación $\sin z = Az$ tiene infinitas soluciones para cualquier número complejo A .

4.3 La función factorial

En [ITAn 8.16] introdujimos la función factorial mediante un producto infinito:

$$\Pi(z) = \lim_n \frac{n! n^z}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} = e^{-\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k} \right)^{-1} e^{z/k},$$

válido para todo número complejo z que no sea un entero negativo, y en [IC 3.30] la definimos mediante una integral para todo número real $s > -1$. En realidad esta segunda definición vale para todo número complejo que cumpla $\operatorname{Re} z > -1$:

Definición 4.21 Llamaremos Σ al semiplano $\operatorname{Re} z > -1$. Sobre Σ definimos la *función factorial* mediante

$$\Pi(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^z dx.$$

Por [IC 3.30] sabemos que la función $e^{-x}x^s$ es integrable en $]0, +\infty[$ para todo $s > -1$, y que $\Pi(s)$ define una función continua en $] -1, +\infty[$ que satisface la ecuación funcional $\Pi(s+1) = (s+1)\Pi(s)$, lo que en particular implica que, para todo número natural n , se cumple $\Pi(n) = n!$

La función $e^{-x}x^z$ es integrable porque lo es su módulo $|e^{-x}x^z| = e^{-x}x^{\operatorname{Re} z}$, luego $\Pi(z)$ está bien definida y obviamente extiende a la función factorial real que definida en [IC].

Teorema 4.22 *La función factorial es holomorfa en el semiplano Σ y verifica la ecuación funcional*

$$\Pi(z+1) = (z+1)\Pi(z).$$

DEMOSTRACIÓN: El teorema 1.23 implica inmediatamente que las funciones

$$\Pi_n(z) = \int_0^n e^{-x} x^z dx$$

son holomorfas en Σ . Basta probar que convergen casi uniformemente a Π . A su vez, basta probar que convergen uniformemente en cada banda $] -1, M[\times \mathbb{R}$, pues todo subconjunto compacto de Σ está contenido en una de ellas. En efecto, si $n \geq 1$,

$$|\Pi(z) - \Pi_n(z)| = \left| \int_n^{+\infty} e^{-x} x^z dx \right| \leq \int_n^{+\infty} e^{-x} x^{\operatorname{Re} z} dx \leq \int_n^{+\infty} e^{-x} x^M dx.$$

Como $e^{-x} x^M$ es integrable en $]0, +\infty[$ (la integral es $\Pi(M)$), la última integral tiende a 0 cuando n tiende a infinito, lo que prueba la convergencia uniforme.

Finalmente notamos que las funciones $\Pi(z+1)$ y $(z+1)\Pi(z)$ son ambas holomorfas y coinciden sobre el eje real positivo, luego por el principio de prolongación analítica son iguales. ■

Ahora demostramos que la función factorial así definida se extiende a una función meromorfa en \mathbb{C} . Por razones que se verán después conviene probar algo ligeramente más general:

Teorema 4.23 *Sea una función $f \in \mathcal{H}(\Sigma)$ que verifique la ecuación funcional $f(z+1) = (z+1)f(z)$. Entonces:*

1. *La función f se extiende a una función meromorfa en \mathbb{C} con singularidades aisladas en los enteros negativos y que cumple la misma ecuación funcional.*
2. *Para cada número natural $n > 0$ la singularidad de f en $-n$ es evitable si $f(0) = 0$ y un polo simple en otro caso, con residuo*

$$\operatorname{Res}(f, -n) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} f(0).$$

3. *En particular la extensión de f es entera si y sólo si $f(0) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN: Vamos a probar inductivamente que f puede prolongarse a una función meromorfa en el semiplano $\operatorname{Re} z > -n$ para todo natural n con singularidades aisladas en los enteros negativos. Esto es trivialmente cierto para $n = 1$. Supongamos que puede prolongarse hasta $\operatorname{Re} z > -n$ (salvo en los enteros negativos) de modo que se cumpla la ecuación funcional.

Entonces $f(z+1)/(z+1)$ es holomorfa en el semiplano $\operatorname{Re} z > -(n+1)$ salvo en los enteros negativos y coincide con $f(z)$ sobre el semiplano $\operatorname{Re} z > -n$. Así pues, se trata de una extensión de f y, por el principio de prolongación analítica, sigue cumpliendo la ecuación funcional (se razona como en el teorema 4.22).

Así, la función f se extiende al plano complejo menos los enteros negativos. Por la ecuación funcional, para todo z que no sea entero y todo número natural n se cumple

$$f(z+n) = (z+n)(z+n-1)\cdots(z+1)f(z).$$

Tomando límites queda

$$f(0) = (-1)(-2)\cdots(-n+1) \lim_{z \rightarrow -n} (z+n)f(z),$$

o sea,

$$\lim_{z \rightarrow -n} (z+n)f(z) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} f(0).$$

Si $f(0) = 0$ el teorema [An 10.15] implica que f es holomorfa en $-n$, mientras que si $f(0) \neq 0$ el teorema [An 10.18] nos da que f tiene un polo simple. Por consiguiente, en un entorno reducido de $-n$ se cumple

$$f(z) = \frac{R}{z+n} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z+n)^k,$$

de donde el límite que hemos calculado es precisamente el residuo R . ■

El teorema anterior se aplica a la función factorial, con lo que ésta resulta ser una función meromorfa con polos simples en los enteros negativos.

Hemos extendido la sucesión $n!$ a una función holomorfa, pero es obvio que de hecho existen infinitas funciones holomorfas f tales que $f(n) = n!$ para todo número natural n , pues si g es cualquier función entera que tenga ceros en los números naturales, la función dada por $f(z) = \Pi(z) + g(z)$ tiene esta propiedad. Sin embargo, la función factorial cumple algo más fuerte, a saber, la ecuación funcional $\Pi(z+1) = (z+1)\Pi(z)$. Cabe preguntarse si esta ecuación (junto con $\Pi(0) = 1$) caracteriza a la función factorial. La respuesta sigue siendo negativa, pues si g es cualquier función entera con periodo 1, entonces la función $f(z) = \Pi(z)g(z)$ cumple la misma ecuación funcional y, si además $g(0) = 1$, también se cumple $f(0) = 1$.

Vamos a probar que hay una condición sencilla que satisface la función factorial y que añadida a las anteriores la caracteriza por completo. De la representación integral deducimos que $|\Pi(z)| \leq \Pi(\operatorname{Re} z)$ para todo $z \in \Sigma$. Por lo tanto Π está acotada en cualquier banda vertical $-1 < a \leq \operatorname{Re} z \leq b$. Ahora probamos que esta propiedad adicional termina de determinar la función factorial:

Teorema 4.24 (Teorema de Wielandt) *Sea una función $f \in \mathcal{H}(\Sigma)$ tal que*

1. $f(z+1) = (z+1)f(z)$ para todo $z \in \Sigma$.
2. f está acotada en la banda $0 \leq \operatorname{Re} z < 1$.

Entonces $f(z) = f(0)\Pi(z)$ para todo $z \in \Sigma$.

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $g(z) = f(z) - f(0)\Pi(z)$. Teniendo en cuenta que la función factorial cumple las propiedades 1) y 2) es obvio que g también las cumple y además $g(0) = 0$. Basta probar que g es idénticamente nula. Por el teorema 4.23 la función g se extiende a una función entera que sigue cumpliendo la ecuación funcional.

Ahora consideramos la función entera $s(z) = g(z-1)g(-z)$. Si probamos que s es idénticamente nula, lo mismo valdrá para g . Para ello demostraremos que s está acotada. Como $s(0) = 0$, el teorema de Liouville nos dará la conclusión. Para ello observamos que s es periódica:

$$\begin{aligned} s(z+1) &= g(z)g(-z-1) = zg(z-1)g(-z-1) \\ &= -g(z-1)(-z)g(-z-1) = -g(z-1)g(-z) = -s(z). \end{aligned}$$

Por lo tanto el módulo de s tiene periodo 1 y basta probar que s está acotada en una banda de anchura 1. Concretamente, si $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, entonces $s(z)$ se calcula evaluando g en dos puntos de la banda $-1 \leq \operatorname{Re} z \leq 0$, luego basta demostrar que g está acotada en esta última banda. Ahora bien, esto es inmediato: por continuidad g está acotada en el compacto $-1 \leq \operatorname{Re} z \leq 0$, $-1 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$, y sobre los puntos $-1 \leq \operatorname{Re} z \leq 0$, $|\operatorname{Im} z| \geq 1$ usamos la ecuación $g(z) = g(z+1)/(z+1)$ y la condición 2). ■

Veamos una primera aplicación de esta caracterización:

Teorema 4.25 Para todo número complejo $z \neq -1, -2, -3, \dots$ se cumple

$$\Pi(z) = \lim_n \frac{n! n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n+1)} = \frac{e^{-\gamma z}}{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}}.$$

El límite no es exactamente el que tomamos como definición en [ITAn], pero basta tener en cuenta la ecuación funcional:

$$\Pi(z) = z\Pi(z-1) = \lim_n \frac{n! n^z}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Si llamamos $f(z)$ a la función definida por el límite, vamos a ver que es igual a la definida por el producto infinito. Para ello bajamos el $n!$ del numerador, a la vez que multiplicamos y dividimos por $n+1$, porque en el denominador tenemos $n+1$ factores en vez de n .

$$f(z) = \lim_n \frac{n^{z+1}}{(n+1) \frac{z+1}{1} \cdots \frac{z+n+1}{n+1}} = \lim_n \frac{n^{z+1}}{(n+1) \prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{z}{k}\right)}.$$

El producto que nos aparece no es convergente. Teniendo en cuenta que $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^2) < +\infty$, el teorema 4.6 nos asegura que el producto convergerá si

añadimos los factores $e^{-z/k}$.

$$f(z) = \lim_n \frac{e^{-z \sum_{k=1}^{n+1} 1/k} n^{z+1}}{(n+1) \prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}}.$$

Con esto tenemos garantizado que el producto converge. Ocupémonos ahora del numerador y del $n+1$ que queda en el denominador. Sustituimos $n^{z+1} = e^{(z+1) \log n}$ y $n+1 = e^{\log(n+1)}$. Al llevarlo todo al numerador queda e elevado al exponente siguiente:

$$-z \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} + z \log n + \log n - \log(n+1) = -z \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \log(n+1) \right) - (z+1) \log \frac{n+1}{n}.$$

Claramente esto converge a $-z\gamma$, donde γ es la constante de Euler definida en [ITAn 4.12]. Concluimos que

$$f(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}}.$$

Esta expresión justifica que $f \in \mathcal{H}(\Sigma)$, como exige el teorema anterior. Si llamamos

$$f_n(z) = \frac{n! n^{z+1}}{(z+1)(z+2) \cdots (z+n+1)}$$

es fácil comprobar que

$$f_n(z+1) = (z+1) \frac{n}{n+z+2} f_n(z),$$

así como que $|f_n(z)| \leq f_n(\operatorname{Re} z)$ y, pasando al límite, concluimos que f verifica todas las hipótesis del teorema de Wielandt. En consecuencia $f(z) = f(0)\Pi(z)$. Ahora bien, $f_n(0) = n/(n+1)$, luego $f(0) = 1$. ■

En particular vemos que la función factorial no se anula en ningún punto, por lo que su inversa es una función entera cuyos ceros (todos simples) son los números enteros negativos. Además tenemos su descomposición en producto infinito:

$$\frac{1}{\Pi(z)} = e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}.$$

El teorema de Borel 4.20 implica que la inversa de la función factorial tiene orden de crecimiento 1. El teorema de Picard implica que Π toma todos los valores complejos excepto 0, luego $1/\Pi$ toma todos los valores complejos.

Usando el teorema 4.1 se ve inmediatamente que el producto infinito que aparece en el teorema anterior tiene derivada 1 en $z = 0$. De ahí se sigue a su vez que

$$\Pi'(0) = -\gamma.$$

Usando la expresión integral para Π esto equivale a que¹

$$\gamma = - \int_0^{+\infty} e^{-x} \log x \, dx. \quad (4.7)$$

La factorización de $1/\Pi$ es la más sencilla que puede tener una función que se anula en los enteros negativos. Esto nos hace pensar en la factorización del seno (4.1), que también es la más sencilla que puede tener una función que se anula en los múltiplos enteros de π . Para compararlas mejor conviene considerar la función $\text{sen } \pi z$, que se anula en los enteros. Claramente

$$\text{sen } \pi z = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{z/k} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}.$$

En la factorización de $1/\Pi$ faltan los factores correspondientes a los ceros positivos y al 0, por lo que en cierto sentido podemos pensar que $1/\Pi$ es como “la mitad” de la función seno. Para reconstruir la función seno completa a partir de $1/\Pi$ basta introducir los ceros que faltan, que son —salvo $z = 0$ — los ceros de $1/\Pi(-z)$. Así:

$$\frac{1}{\Pi(z)\Pi(-z)} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{z/k} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k} = \frac{\text{sen } \pi z}{\pi z}.$$

Con esto hemos probado otra importante ecuación funcional para la función factorial. La enunciamos en dos versiones equivalentes:

Teorema 4.26 *La función factorial satisface las ecuaciones siguientes:*

$$\Pi(z)\Pi(-z) = \frac{\pi z}{\text{sen } \pi z} \quad \Pi(z-1)\Pi(-z) = \frac{\pi}{\text{sen } \pi z}.$$

(La segunda se obtiene haciendo $\Pi(z) = z\Pi(z-1)$ en la primera.)

Estas relaciones nos permiten calcular algunos valores de Π . Concretamente tenemos que $\Pi(1/2)\Pi(-1/2) = \pi/2$, y por otra parte

$$\Pi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}\Pi\left(-\frac{1}{2}\right).$$

De las dos igualdades deducimos que $\Pi(1/2)^2 = \pi/4$ y, como la función factorial es positiva en el semieje positivo, queda $\Pi(1/2) = \sqrt{\pi}/2$. De aquí $\Pi(-1/2) = 2\Pi(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Si ahora acudimos a la expresión integral de la función factorial vemos que hemos calculado las integrales siguientes:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sqrt{x} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \, dx = \sqrt{\pi}.$$

¹Para derivar dentro de la integral nos basamos en que en la prueba del teorema 4.22 hemos visto que $\int_0^n e^x x^z \, dx$ converge casi uniformemente a $\Pi(z)$, luego el teorema de Weierstrass implica que $\Pi'(z)$ es el límite de las derivadas de estas integrales, y éstas pueden calcularse derivando el integrando por el teorema 1.23.

Si en la última integral hacemos el cambio de variable $x = t^2$ obtenemos

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

que es la *integral de Poisson*.

Veamos otra aplicación del teorema de Wielandt:

Teorema 4.27 (Fórmula de duplicación de Legendre)

$$\sqrt{\pi} \Pi(2z) = 2^{2z} \Pi(z) \Pi\left(z - \frac{1}{2}\right).$$

DEMOSTRACIÓN: Definimos

$$f(z) = \frac{2^z}{\sqrt{\pi}} \Pi\left(\frac{z}{2}\right) \Pi\left(\frac{z-1}{2}\right).$$

Basta demostrar que $f(z) = \Pi(z)$. Claramente $f \in \mathcal{H}(\Sigma)$, $f(0) = 1$ (usando la fórmula $\Pi(-1/2) = \sqrt{\pi}$) y $|f(z)| \leq f(\operatorname{Re} z)$, luego f está acotada en las bandas verticales. Por el teorema de Wielandt basta probar que f verifica la ecuación funcional. En efecto:

$$\begin{aligned} f(z+1) &= 2 \frac{2^z}{\sqrt{\pi}} \Pi\left(\frac{z+1}{2}\right) \Pi\left(\frac{z}{2}\right) \\ &= 2 \frac{2^z}{\sqrt{\pi}} \frac{z+1}{2} \Pi\left(\frac{z-1}{2}\right) \Pi\left(\frac{z}{2}\right) = (z+1)f(z). \end{aligned}$$

■

La fórmula de Stirling Finalmente vamos a ver que la fórmula de Stirling [ITAn 6.7] puede convertirse en una ecuación funcional para la función factorial. Para ello empezamos dando una prueba alternativa de [ITAn 6.7]:

Teorema 4.28 (Fórmula de Stirling)

$$n! = \sqrt{2\pi n} (n/e)^n e^{\theta/8n},$$

para un cierto número $0 < \theta < 1$.

DEMOSTRACIÓN: Partiremos de la fórmula $\log n! = \sum_{s=1}^n \log s$. Primeramente observamos que

$$\log n - \log s = \int_s^n \frac{1}{x} dx.$$

Sumando obtenemos

$$\log n! = n \log n - \sum_{s=1}^n \int_s^n \frac{1}{x} dx = n \log n - \sum_{s=1}^n \sum_{k=s}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx.$$

Ahora observamos que cada sumando $\int_k^{k+1} (1/x) dx$ aparece exactamente k veces, luego

$$\log n! = n \log n - \sum_{k=1}^{n-1} k \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{k}{x} dx.$$

Para agrupar las integrales notamos que si $k \leq x < k+1$, se cumple que $k = E[x]$, luego

$$\log n! = n \log n - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{E[x]}{x} dx = n \log n - \int_1^n \frac{E[x]}{x} dx.$$

Ahora conviene hacer la manipulación siguiente

$$\begin{aligned} \log n! &= n \log n + \int_1^n \frac{\frac{1}{2} - x}{x} dx + \int_1^n \frac{x - E[x] - \frac{1}{2}}{x} dx \\ &= n \log n + \frac{1}{2} \log n - n + 1 + \int_1^n \frac{x - E[x] - \frac{1}{2}}{x} dx. \end{aligned}$$

Llamando $F[x]$ a la parte fraccionaria de x , o sea, $F[x] = x - E[x]$, obtenemos esta fórmula:

$$\log n! = \frac{1}{2}(2n+1) \log n - n + 1 + \int_1^n \frac{F[x] - \frac{1}{2}}{x} dx. \quad (4.8)$$

El motivo de modificar de este modo la integral es que $F[x] - 1/2$ tiene integral nula entre dos números naturales cualesquiera, por lo que si llamamos

$$\phi(x) = \int_a^x \left(F[x] - \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{2} F[x](F[x] - 1)$$

obtenemos una primitiva continua y periódica tal que $\phi(n) = 0$ para todo número natural y además $-1/8 \leq \phi(x) \leq 0$. Al integrar por partes queda

$$\int_1^s \frac{F[x] - \frac{1}{2}}{x} dx = \frac{\phi(s)}{s} + \int_1^s \frac{\phi(x)}{x^2} dx.$$

Claramente la función $\phi(x)/x^2$ es integrable en $[1, +\infty[$, luego $(F[x] - 1/2)/x$ también lo es. Si hubiéramos definido $\phi(x)$ como una primitiva de $E[x]$, o incluso de $F[x]$, todo esto sería falso. Vamos a calcular

$$\int_1^{+\infty} \frac{F[x] - \frac{1}{2}}{x} dx.$$

Para ello sumamos (4.8) con $\log 2^n = n \log 2$:

$$\log(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)) = \frac{1}{2}(2n+1) \log n + n \log 2 - n + 1 + \int_1^n \frac{F[x] - \frac{1}{2}}{x} dx.$$

Multiplicamos por 2:

$$\log(2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots (2n)(2n)) = (2n+1) \log n + 2n \log 2 - 2n + 2 + 2 \int_1^n \frac{F[x] - \frac{1}{2}}{x} dx.$$

En (4.8) cambiamos n por $2n+1$:

$$\log(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n+1)) = \left(2n+1 + \frac{1}{2}\right) \log(2n+1) - 2n + \int_1^{2n+1} \frac{F[x] - \frac{1}{2}}{x} dx.$$

Restamos las dos últimas fórmulas:

$$\begin{aligned} \log \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} &= -(2n+1) \log \frac{2n+1}{n} - \frac{1}{2} \log(2n+1) + 2n \log 2 \\ &+ 2 + 2 \int_1^n \frac{F[x] - \frac{1}{2}}{x} dx - \int_1^{2n+1} \frac{F[x] - \frac{1}{2}}{x} dx. \end{aligned}$$

Expresamos el primer miembro como

$$\frac{1}{2} \log \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots (2n)(2n)}{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdots (2n+1)(2n+1)}.$$

Ahora el último factor $(2n+1)$ del denominador se simplifica con el sumando $(1/2) \log(2n+1)$ de la derecha en la igualdad anterior, y la última integral se descompone en suma de dos, una de las cuales se simplifica. El resultado es

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log \prod_{k=1}^n \frac{(2k)(2k)}{(2k-1)(2k+1)} &= -(2n+1) \log \left(1 + \frac{1}{2n}\right) - \log 2 + 2 \\ &+ \int_1^n \frac{F[x] - \frac{1}{2}}{x} dx - \int_n^{2n+1} \frac{F[x] - \frac{1}{2}}{x} dx. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la fórmula de Wallis [ITAn 8.12], al tomar límites en n obtenemos la igualdad

$$\frac{1}{2} \log \frac{\pi}{2} = -1 - \log 2 + 2 + \int_1^{+\infty} \frac{F[x] - \frac{1}{2}}{x} dx.$$

Así pues,

$$\int_1^{+\infty} \frac{F[x] - \frac{1}{2}}{x} dx = \log \sqrt{2\pi} - 1.$$

Ahora expresamos

$$\int_1^n \frac{F[x] - \frac{1}{2}}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{F[x] - \frac{1}{2}}{x} dx - \int_n^{+\infty} \frac{F[x] - \frac{1}{2}}{x} dx.$$

Al sustituir en (4.8) queda

$$\log n! = \frac{1}{2}(2n+1) \log n - n + \log \sqrt{2\pi} - \int_n^{+\infty} \frac{F[x] - \frac{1}{2}}{x} dx.$$

Definimos

$$\mu(n) = - \int_n^{+\infty} \frac{F[x] - \frac{1}{2}}{x} dx$$

y aplicamos la función exponencial. Resulta $n! = \sqrt{2\pi n} (n/e)^n e^{\mu(n)}$. Ahora basta observar que $0 \leq -\phi(x) \leq 1/8$, luego

$$0 < \mu(n) = - \int_n^{+\infty} \frac{F[x] - \frac{1}{2}}{x} dx = - \int_n^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x^2} dx < \frac{1}{8} \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{8n},$$

luego $\mu(n)$ es de la forma $\mu(n) = \theta/8n$ para un cierto $\theta \in]0, 1[$. ■

En [ITAn 6.7] vimos que el factor $e^{\theta/8n}$ puede mejorarse hasta $e^{\theta/12n}$, pero aquí nos interesa la igualdad

$$n! = \sqrt{2\pi n} (n/e)^n e^{\mu(n)},$$

que es la que vamos a convertir en una ecuación funcional para la función factorial. En la prueba hemos visto que

$$\mu(n) = - \int_n^{+\infty} \frac{F[x] - \frac{1}{2}}{x} dx = - \int_n^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x^2} dx,$$

donde a su vez $F[x]$ es la parte fraccionaria de x y $\phi(x) = (1/2)F[x](F[x] - 1)$ es una primitiva de $F[x] - 1/2$, periódica de periodo 1 y tal que $-1/8 \leq \phi(x) \leq 0$.

El único término de la fórmula de Stirling en el que no tiene sentido cambiar n por z es precisamente $\mu(n)$, pero esto se arregla con un cambio de variables:

$$\mu(n) = - \int_n^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x^2} dx = - \int_n^{+\infty} \frac{\phi(x-n)}{x^2} dx = - \int_0^{+\infty} \frac{\phi(x)}{(n+x)^2} dx.$$

Así ya tiene sentido considerar a μ como una función de variable compleja:

Teorema 4.29 *La función definida por*

$$\mu(z) = - \int_0^{+\infty} \frac{\phi(x)}{(z+x)^2} dx = - \int_0^{+\infty} \frac{F[x] - \frac{1}{2}}{z+x} dx$$

es holomorfa en $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ y cumple:

1. Para todo número real $0 < \delta \leq \pi$ y todo $z \in \mathbb{C}^-$ tal que $|\arg z| \leq \pi - \delta$

$$|\mu(z)| \leq \frac{1}{8 \operatorname{sen}^2(\delta/2) |z|}.$$

2. $\mu(z+1) = \mu(z) - (z+1/2) \log(1+1/z) + 1$.

DEMOSTRACIÓN: Recordemos que la igualdad entre las dos definiciones de μ se prueba integrando por partes. Notemos también que \mathbb{C}^- es el dominio de la rama uniforme del argumento que toma valores en $]-\pi, \pi[$ y que representaremos por \arg . Si llamamos $\theta = \arg z$, tenemos

$$\begin{aligned} |z+x|^2 &= (|z|e^{i\theta} + x)(|z|e^{-i\theta} + x) = |z|^2 + 2|z|x \cos \theta + x^2 \\ &= |z|^2 \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right) + 2|z|x \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right) + x^2 \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ &= (|z|+x)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + (|z|-x)^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Consecuentemente

$$|z+x| \geq (|z|+x) \cos \frac{\theta}{2} \geq (|z|+x) \operatorname{sen} \frac{\delta}{2} \quad \text{si } |\theta| \leq \pi - \delta.$$

De aquí concluimos que

$$\left| \frac{\phi(x)}{(z+x)^2} \right| \leq \frac{1}{8 \operatorname{sen}^2(\delta/2)} \frac{1}{(|z|+x)^2}. \quad (4.9)$$

Como esta última función es claramente integrable en $[0, +\infty[$ (para cada z) llegamos a que $\mu(z)$ está bien definida. Para que sea holomorfa basta ver que el integrando está acotado por una función integrable que no dependa de z , pero de hecho basta ver que esto es cierto en un entorno de cada punto z . Si tomamos el entorno compacto y contenido en \mathbb{C}^- se cumple

$$\left| \frac{\phi(x)}{(z+x)^2} \right| \leq \frac{1}{8 \operatorname{sen}^2(\delta/2)} \frac{1}{(m+x)^2},$$

donde $m > 0$ es el mínimo de $|z|$ en el entorno considerado, y esta función es integrable en $[0, +\infty[$, como se requería.

1) Usando (4.9) resulta

$$|\mu(z)| \leq \frac{1}{8 \operatorname{sen}^2(\delta/2)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(m+x)^2} dx = \frac{1}{8 \operatorname{sen}^2(\delta/2) |z|}.$$

2) Calculamos

$$\begin{aligned} \mu(z+1) &= - \int_0^{+\infty} \frac{F[x] - \frac{1}{2}}{z+x+1} dx = - \int_0^{+\infty} \frac{F[x+1] - \frac{1}{2}}{z+x+1} dx \\ &= - \int_1^{+\infty} \frac{F[x] - \frac{1}{2}}{z+x} dx = \mu(z) + \int_0^1 \frac{x - \frac{1}{2}}{z+x} dx \\ &= \mu(z) + \int_0^1 dx - \left(z - \frac{1}{2} \right) \int_0^1 \frac{1}{z+x} dx \\ &= \mu(z) + 1 - \left(z - \frac{1}{2} \right) (\log(z+1) - \log z) \\ &= \mu(z) - \left(z - \frac{1}{2} \right) \log \left(1 + \frac{1}{z} \right) + 1. \end{aligned}$$

(Las operaciones con los logaritmos se pueden justificar considerando que z es real y extendiendo la igualdad por el principio de prolongación analítica). ■

Ahora ya podemos probar:

Teorema 4.30 (Fórmula de Stirling) *Para todo $z \in \mathbb{C}^-$ se cumple*

$$\Pi(z) = \sqrt{2\pi} z^{z+1/2} e^{-z} e^{\mu(z)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Ante todo notemos que no podemos aplicar directamente el teorema de Wielandt porque la función de la derecha no está definida en todo el semiplano Σ . Resolvemos este inconveniente sustituyendo z por $z + 1$, es decir, el teorema equivale a probar

$$\Pi(z + 1) = \sqrt{2\pi} (z + 1)^{z+3/2} e^{-z-1} e^{\mu(z+1)},$$

o también, por la ecuación funcional,

$$\Pi(z) = \sqrt{2\pi} (z + 1)^{z+1/2} e^{-z-1} e^{\mu(z+1)}.$$

(como ya comentábamos en el teorema anterior, las manipulaciones sobre exponenciales y logaritmos se pueden justificar probándolas para números reales y extendiéndolas por el principio de prolongación analítica).

Ahora la función $f(z)$ definida como el miembro derecho de la igualdad anterior sí es holomorfa en Σ , y basta comprobar que cumple las hipótesis restantes del teorema de Wielandt. Veamos la ecuación funcional. Usamos el apartado 2) del teorema anterior:

$$\begin{aligned} f(z + 1) &= \sqrt{2\pi} (z + 2)^{z+3/2} e^{-z-2} e^{\mu(z+2)} \\ &= \sqrt{2\pi} (z + 2)^{z+3/2} e^{-z-2} e^{\mu(z+1)} \left(\frac{z + 1}{z + 2} \right)^{z+3/2} e \\ &= \sqrt{2\pi} (z + 1)^{z+3/2} e^{-z-1} e^{\mu(z+1)} = (z + 1)f(z). \end{aligned}$$

Probar que f está acotada cuando $0 \leq \operatorname{Re} z < 1$ equivale a probar que $f(z - 1)$ está acotada en la banda $1 \leq \operatorname{Re} z < 2$, o sea, hay que acotar la función

$$\sqrt{2\pi} z^{z-1/2} e^{-z} e^{\mu(z)}.$$

Si $1 \leq \operatorname{Re} z < 2$ es claro que $|\arg z| \leq \pi/2$, luego el teorema anterior (con $\delta = \pi/2$) nos da la cota $|\mu(z)| \leq 1/4$. Por otra parte $|e^{-z}| = e^{-\operatorname{Re} z} \leq e^{-1} < 1$. Basta acotar $z^{z-1/2}$.

Sea $z = x + yi = |z|e^{i\theta}$, donde $1 \leq x < 2$, $-\pi < \theta < \pi$. Podemos suponer $|y| > 2$. Entonces $x < |y|$, luego $|z| \leq 2|y|$. Usando que $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ tenemos que

$$\begin{aligned} |z^{z-1/2}| &= e^{(z-1/2) \log z} = e^{(x-1/2) \log |z| - y\theta} = |z|^{x-1/2} e^{-y\theta} \\ &\leq |z|^2 e^{-y\theta} \leq 4|y|^2 e^{-y\theta}. \end{aligned}$$

Como $x < |y|$ resulta que $\tan |\theta| = |y|/x > 1$, luego $|\theta| > \pi/4$. Además y, θ tienen el mismo signo, luego $e^{-y\theta} = e^{-|y||\theta|} \leq e^{-|y|\pi/4}$. En total resulta que

$$|z^{z-1/2}| \leq 4|y|^2 e^{-|y|\pi/4} \quad \text{para } |y| > 2.$$

Esta función está acotada, luego se cumplen las hipótesis del teorema de Wielandt. Con esto tenemos probado que

$$\Pi(z) = C\sqrt{2\pi} (z+1)^{z+1/2} e^{-z-1} e^{\mu(z+1)},$$

donde $C = 1/f(0)$. Falta probar que $C = 1$, para lo cual sustituimos el valor de $\Pi(z)$ que nos da esta ecuación en la fórmula de duplicación. Por simplificar la manipulación de las exponenciales podemos trabajar con números reales positivos x . Después de simplificar y agrupar los términos similares queda

$$\begin{aligned} e^{\mu(2x+1)-\mu(x+1)-\mu(x+1/2)+1/2} &= C \frac{(x+1)^{x+1/2} (x+1/2)^x}{(2x+1)^{2x+1/2}} 2^{2x+1/2} \\ &= C \left(1 + \frac{1}{2x+1}\right)^{x+1/2}. \end{aligned}$$

Tomamos logaritmos y hacemos tender x a $+\infty$. El resultado es $C = 1$. ■

Capítulo V

Funciones meromorfas periódicas

Las funciones e^z , $\cos z$, $\sin z$ son ejemplos de funciones enteras periódicas. En este capítulo estudiaremos sistemáticamente las funciones meromorfas en \mathbb{C} que admiten periodos. El lector debería leer antes el apéndice A hasta la sección A.4. La definición de función periódica es obvia:

Definición 5.1 Un número $\omega \in \mathbb{C}$ es un *periodo* de una función meromorfa $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ si para todo $z \in \mathbb{C}$ se cumple que $f(z + \omega) = f(z)$.

Notemos que estamos considerando a las funciones meromorfas como funciones con imagen en \mathbb{C}^∞ , de manera que en los polos las consideramos definidas con el valor ∞ .

Según la definición que acabamos de dar, el 0 es trivialmente un periodo de cualquier función meromorfa, por lo que normalmente, cuando hablemos de los periodos de una función, sobrentenderemos que nos referimos a los periodos no nulos.

Así, por ejemplo, diremos que una función meromorfa es *periódica* si tiene un periodo no nulo.

No obstante, en ciertos casos es esencial contar al cero como periodo, por ejemplo, al afirmar que *el conjunto de los periodos de una función meromorfa es un subgrupo aditivo de \mathbb{C}* . Se comprueba trivialmente, pero para que sea cierto debemos incluir al cero entre los periodos.

Obviamente, el grupo de periodos de una función constante es \mathbb{C} . En el caso de una función no constante, el grupo de periodos es necesariamente mucho menor, pues es necesariamente un conjunto discreto:

Teorema 5.2 Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ es una función meromorfa periódica no constante, entonces el conjunto de sus periodos es un subconjunto discreto de \mathbb{C} .

DEMOSTRACIÓN: Equivalentemente, se trata de probar que el conjunto de los periodos no tiene puntos de acumulación. Supongamos, por el contrario, que $z \in \mathbb{C}$ es el límite de una sucesión $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ de periodos de f , con $\omega_n \neq z$, para todo n . Vamos a probar que f es constante. Si fuera $f(z) = \infty$, podríamos pasar a $g = 1/f$, que es también una función meromorfa con los mismos periodos, pero ahora $g(z) = 0$. Si probamos que g es constante, tendremos que f también lo será.¹ Alternativamente, podemos suponer que $f(z) = a$ es finito, es decir, que f es holomorfa en z . Pero $\{z + \omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión convergente a z tal que $f(z + \omega_n) = a$, luego por el principio de prolongación analítica f es constante igual a a . ■

Ahora podemos aplicar el teorema [TAI 3.7], según el cual un subgrupo discreto de \mathbb{R}^n (en particular de \mathbb{C}) es un retículo, es decir, que está generado por un número finito de números complejos linealmente independientes sobre \mathbb{R} (con lo que tienen que ser a lo sumo dos). Dichos generadores también son linealmente independientes sobre \mathbb{Z} , luego el grupo de periodos es un \mathbb{Z} -módulo libre de rango a lo sumo 2. Con esto tenemos una primera clasificación de las funciones meromorfas periódicas:

Definición 5.3 Una función meromorfa periódica no constante $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{\infty}$ es *simplemente o doblemente periódica* según si el rango de su grupo de periodos es 1 o 2, respectivamente.

Es claro que las funciones que tienen entre sus periodos a los elementos de un cierto retículo $R \subset \mathbb{C}$ forman un subcuerpo del cuerpo $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ de todas las funciones meromorfas en \mathbb{C} , que además es cerrado para la derivación (de la propia definición de derivada se sigue que la derivada de una función f tiene al menos los mismos periodos que f).

La observación siguiente no va a ser necesaria a lo largo de este capítulo, pero a la hora de entender el comportamiento de las funciones periódicas resulta útil tener en cuenta que, según probamos en A.29, si R es un retículo en \mathbb{C} , el grupo cociente \mathbb{C}/R admite una única estructura de variedad analítica tal que la proyección $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/R$ es localmente biholomorfa. Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{\infty}$ es una aplicación meromorfa cuyo grupo de periodos contiene a R , claramente podemos definir $f^* : \mathbb{C}/R \rightarrow \mathbb{C}^{\infty}$ mediante $f^*([z]) = f(z)$. La periodicidad de f implica que la definición de f^* no depende de la elección del representante de la clase con el cual se calcula. Además f^* está completamente determinada por la relación $p \circ f^* = f$.

El hecho de que p sea localmente biholomorfa implica que f^* es holomorfa (como aplicación en \mathbb{C}^{∞} , es decir, meromorfa), pues si $p|_U : U \rightarrow W$ es biholomorfa, entonces $f^*|_W = (p|_U)^{-1} \circ f$, y todo punto de \mathbb{C}/R tiene un entorno W en estas condiciones.

Teniendo esto en cuenta, el teorema siguiente es inmediato:

¹En realidad llegaríamos a que g es constante igual a 0, luego f sería constante igual a ∞ , lo cual es absurdo, con lo que la conclusión es que $g(z) = 0$ es imposible.

Teorema 5.4 Si R es un retículo en \mathbb{C} , la aplicación $\mathcal{M}(\mathbb{C}/R) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{C})$ dada por $f^* \mapsto p \circ f$ es un isomorfismo del cuerpo de las funciones meromorfas en \mathbb{C}/R en el cuerpo de las funciones meromorfas en \mathbb{C} cuyo grupo de periodos contiene a R .

5.1 Funciones simplemente periódicas

Las funciones e^z , $\cos z$, $\sin z$ que poníamos antes como ejemplos de funciones periódicas son, más concretamente, ejemplos de funciones enteras simplemente periódicas. El grupo de periodos de la primera está generado por $\omega = 2\pi i$, y el de las otras dos está generado por $\omega = 2\pi$. La función $\tan z$ es un ejemplo de función meromorfa (simplemente) periódica que no es entera.

A la hora de estudiar las funciones simplemente periódicas, no perdemos generalidad si nos restringimos a las que tienen un periodo en particular, por ejemplo $2\pi i$, porque si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ es una función meromorfa con periodo ω , podemos definir $\tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ mediante

$$\tilde{f}(z) = f\left(\frac{\omega}{2\pi i} z\right),$$

y es claro que \tilde{f} es periódica de periodo $2\pi i$. En otras palabras, toda función simplemente periódica se transforma en otra de periodo $2\pi i$ (o cualquier otro periodo prefijado) mediante un cambio de variable lineal.

A su vez, podemos definir $f^* : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ mediante

$$f^*(z) = \tilde{f}(\text{Log } z).$$

Esto ha de entenderse como sigue: dado $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tomamos un logaritmo cualquiera w y calculamos $f^*(z) = \tilde{f}(w)$. El resultado no depende de la elección de w , pues si w_1 y w_2 son dos logaritmos de z , entonces $w_1 = w_2 + 2k\pi i$, para un cierto $k \in \mathbb{Z}$, luego $\tilde{f}(w_1) = \tilde{f}(w_2)$.

La función f^* así definida es meromorfa. En efecto, dado $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, existe un disco $D = D(z_0, r)$ sobre el cual hay definida una rama uniforme (holomorfa) L del logaritmo. Llamemos $\zeta_0 = L(z_0)$. Puesto que \tilde{f} sólo tiene singularidades aisladas, reduciendo r podemos exigir que $L[D]$ no contenga polos de \tilde{f} salvo a lo sumo ζ_0 .

Entonces $f^*|_D$ es la composición de un logaritmo holomorfo con la función \tilde{f} , que es holomorfa en todos los puntos de $L[D]$ salvo a lo sumo en ζ_0 . Si \tilde{f} es holomorfa en ζ_0 , entonces f^* es holomorfa en z_0 , mientras que si \tilde{f} tiene un polo en ζ_0 , entonces f^* tiene una singularidad aislada en z_0 , y, como L es un homeomorfismo en su imagen:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f^*(z) = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \tilde{f}(\zeta) = \infty,$$

luego f^* tiene un polo en z_0 .

Puesto que $z \in \text{Log } z$, la propia definición de f^* nos da que $\tilde{f}(z) = f^*(e^z)$, luego $f(z) = f^*(e^{2\pi i z/\omega})$. En total hemos probado lo siguiente:

Teorema 5.5 Para cada $\omega \in \mathbb{C}$ no nulo, la aplicación $\mathcal{M}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{C})$ dada por $f^* \mapsto f^*(e^{2\pi iz/\omega})$ es un isomorfismo en su imagen, que es el cuerpo de las funciones meromorfas con periodo ω .

Una consecuencia no trivial es la siguiente:

Teorema 5.6 Toda función meromorfa con periodo $\omega \neq 0$ es el cociente de dos funciones enteras periódicas de periodo ω .

DEMOSTRACIÓN: Dada una función meromorfa periódica f , podemos representarla como $f^*(e^{2\pi iz/\omega})$, donde f^* es una función meromorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Por el teorema 4.10 podemos expresar $f^* = u/v$, donde u y v son funciones holomorfas en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Por consiguiente $f(z) = u(e^{2\pi iz/\omega})/v(e^{2\pi iz/\omega})$ y tanto el numerador como el denominador son funciones enteras de periodo ω . ■

Nota En el teorema anterior, si la función dada f es simplemente periódica y tomamos como ω una base de su grupo de periodos, entonces el numerador y el denominador que obtenemos tienen ambos el mismo grupo de periodos que f , pero si f es doblemente periódica, no podemos asegurar lo mismo del numerador y el denominador. ■

Vamos a dar una interpretación más clásica al isomorfismo del teorema 5.5:

Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función entera de periodo 2π , podemos expresarla en la forma $f(z) = f^*(e^{iz})$, para cierta función holomorfa $f^* : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$. A su vez, la función f^* admitirá un desarrollo en serie de Laurent

$$f^*(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \quad (5.1)$$

convergente en todo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, luego, para todo $z \in \mathbb{C}$, tenemos el desarrollo

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inz}. \quad (5.2)$$

Veamos que la convergencia es uniforme en cualquier banda horizontal (lo cual es más que casi uniforme). Si $z = x + iy$, entonces $e^{iz} = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x)$, luego la función e^{iz} transforma una banda $\alpha \leq \operatorname{Im} z \leq \beta$ en la corona circular $e^{-\beta} \leq |z| \leq e^{-\alpha}$. La serie de Laurent (5.1) converge uniformemente en dicha corona compacta, de donde se sigue inmediatamente la convergencia uniforme de (5.2) en la banda.

Sustituimos en (5.2) la identidad $e^{inz} = \cos nz + i \operatorname{sen} nz$ y agrupamos el término correspondiente a n con el correspondiente a $-n$ (aquí usamos que la serie converge absolutamente). El resultado es

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n \cos nz + ic_n \operatorname{sen} nz) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ((c_n + c_{-n}) \cos nz + i(c_n - c_{-n}) \operatorname{sen} nz). \end{aligned}$$

Si llamamos $a_0 = 2c_0$ y, para $n \geq 1$, $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$, resulta

$$f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nz + b_n \operatorname{sen} nz). \quad (5.3)$$

Definición 5.7 Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función entera de periodo 2π , los desarrollos de la forma (5.2) o (5.3) se llaman desarrollos en *serie de Fourier* de f .

Acabamos de probar que toda función entera de periodo 2π admite un desarrollo en serie de Fourier que converge uniformemente en cada banda horizontal. Es claro que tanto los coeficientes c_n como los coeficientes a_n, b_n están unívocamente determinados por f , porque determinan la función entera f^* , que a su vez está unívocamente determinada por f . No obstante, es interesante observar que pueden calcularse con las mismas fórmulas integrales válidas para los desarrollos en serie de Fourier de funciones de variable real:

Teorema 5.8 *Toda función entera de periodo 2π admite un único desarrollo en serie de Fourier*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inz},$$

o bien

$$f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nz + b_n \operatorname{sen} nz),$$

donde los coeficientes vienen dados por

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{sen} nt dt.$$

La serie converge absoluta y uniformemente en cada banda horizontal.

DEMOSTRACIÓN: Partimos del teorema 2.35, según el cual

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=1} \frac{f^*(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f^*(e^{it})}{e^{(n+1)it}} i e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Por consiguiente,

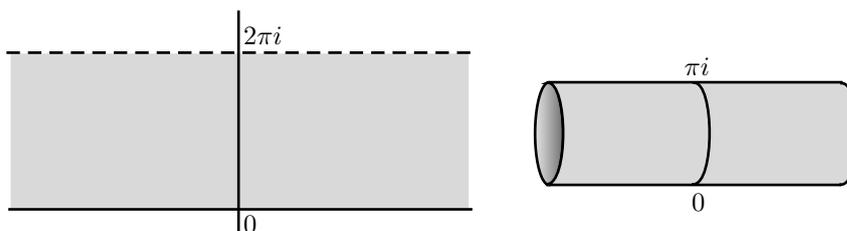
$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{e^{-int} + e^{int}}{2} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt,$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{sen} nt dt.$$

Gracias al convenio $a_0 = 2c_0$ la primera fórmula vale también para $n = 0$. ■

Obviamente, este teorema puede modificarse de forma natural para el caso de funciones enteras de cualquier periodo ω .

El teorema 5.4 nos permite representar las funciones periódicas con periodo ω como funciones meromorfas sobre la variedad cociente $\mathbb{C}/\langle\omega\rangle_{\mathbb{Z}}$. Aunque no hemos necesitado este hecho en ningún momento, conviene observar que tiene una interpretación geométrica muy clara. Por ejemplo, si $R = \langle 2\pi i \rangle_{\mathbb{Z}}$, el cociente $\mathbb{C}/R \cong S^1 \times \mathbb{R}$ es geoméricamente un toro, el toro que resulta de identificar los lados de la banda horizontal $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$, o también, de “enrollar” todo el plano complejo en un cilindro dando una vuelta completa cada vez que se asciende o se desciende 2π unidades en el eje imaginario.



Así, una función meromorfa con periodo $2\pi i$ puede identificarse con una función meromorfa sobre el cilindro, que no es sino el cociente del plano en el que todos los puntos que se diferencian en un múltiplo de $2\pi i$ se identifican en una misma clase de equivalencia.

El hecho de que toda función de periodo ω pueda transformarse en una función de periodo $2\pi i$ mediante un cambio de variable lineal se corresponde con el hecho de que si $\omega \in \mathbb{C}$ es cualquier número complejo no nulo, el isomorfismo $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definido por $h(z) = \omega z / 2\pi i$ induce un isomorfismo biholomorfo $\bar{h} : \mathbb{C}/\langle 2\pi i \rangle_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{C}/R$, que a su vez define un isomorfismo $f \mapsto \tilde{f} = \bar{h} \circ f$ entre el cuerpo de las funciones meromorfas de periodo ω y el cuerpo de las funciones meromorfas de periodo $2\pi i$. Notemos que \tilde{f} es la misma función que hemos asociado a f al principio de esta sección.

En particular, vemos que los cilindros definidos por periodos distintos son esencialmente la misma variedad analítica, si bien en la práctica hemos podido expresar de forma sencilla la relación entre las funciones meromorfas de periodo ω y las de periodo $2\pi i$ sin necesidad de mencionar ninguna variedad analítica abstracta.

Más precisamente, todos los cilindros abstractos son biholomorfos al abierto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, pues es claro que la función exponencial induce un isomorfismo biholomorfo $g : \mathbb{C}/\langle 2\pi i \rangle_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$. (Como la exponencial es localmente biholomorfa, la aplicación que induce en el cociente también lo es, pero además es biyectiva, luego es biholomorfa). Esto nos da a su vez un isomorfismo $\mathcal{M}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{C}/\langle 2\pi i \rangle_{\mathbb{Z}})$ dado por $f \mapsto g \circ f$, que no es sino el considerado en el teorema 5.5.

Así pues, el abierto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sustituye perfectamente a las variedades abstractas $\mathbb{C}/\langle\omega\rangle_{\mathbb{Z}}$ a la hora de representar las funciones simplemente periódicas.

El hecho de que cualquier función meromorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ defina una función simplemente periódica implica que las funciones simplemente periódicas pueden ser muy variadas o, dicho de otro modo, que el hecho de que sean periódicas no aporta mucha información sobre su comportamiento. Ahora veremos que la situación es muy distinta en el caso de las funciones doblemente periódicas.

5.2 Funciones elípticas

Las funciones doblemente periódicas se conocen habitualmente como funciones elípticas:

Definición 5.9 Una *función elíptica* es una función meromorfa $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ que admita dos periodos $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ linealmente independientes sobre \mathbb{R} .

Notemos que en esta definición no estamos excluyendo a las funciones constantes. Más aún, si $R = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle \subset \mathbb{C}$ es un retículo completo (es decir, un retículo de rango 2), llamaremos *funciones elípticas sobre R* a las funciones meromorfas que tengan por periodos a todos los elementos de R , sin excluir que puedan tener más periodos.

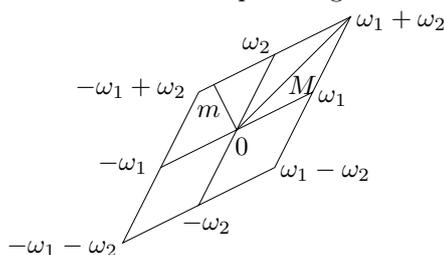
Antes de entrar en consideraciones generales sobre funciones elípticas, debemos reparar en el hecho de que no conocemos ningún ejemplo de función elíptica no constante, así que empezaremos construyendo algunos ejemplos. Nos basaremos en el teorema siguiente:

Teorema 5.10 Si R es un retículo completo en \mathbb{C} y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces la serie

$$\sum_{\omega \in R \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^\alpha}$$

converge (absolutamente) si y sólo si $\alpha > 2$.

DEMOSTRACIÓN: Notemos que, puesto que no hemos especificado un orden en los sumandos, sólo tiene sentido hablar de convergencia absoluta. Sea ω_1, ω_2 una base de R y llamemos m y M a las distancias mínima y máxima, respectivamente, de 0 a la frontera del paralelogramo indicado en la figura:



Si $\omega \neq 0$ es cualquiera de los 8 elementos de R representados en la figura, tenemos que $m \leq |\omega| \leq M$. Si dibujamos los 12 paralelogramos que rodean a los 4 que aparecen en la figura, encontraremos 16 nuevos elementos $\omega \in R$ tales que $2m \leq |\omega| \leq 2M$. A continuación encontraremos 24 nuevos elementos tales que $3m \leq |\omega| \leq 3M$, etc.

En general, encontramos $8k$ elementos de R que satisfacen las desigualdades

$$\frac{1}{(kM)^\alpha} \leq \frac{1}{|\omega|^\alpha} \leq \frac{1}{(km)^\alpha}.$$

Si llamamos $S(n) = \sum |\omega|^{-\alpha}$, donde ω recorre los $8(1+2+\dots+n)$ elementos de R más cercanos a 0, tenemos que

$$\frac{8}{M^\alpha} + \frac{2 \cdot 8}{(2M)^\alpha} + \dots + \frac{n \cdot 8}{(nM)^\alpha} \leq S(n) \leq \frac{8}{m^\alpha} + \frac{2 \cdot 8}{(2m)^\alpha} + \dots + \frac{n \cdot 8}{(nm)^\alpha},$$

lo cual equivale a

$$\frac{8}{M^\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{\alpha-1}} \leq S(n) \leq \frac{8}{m^\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{\alpha-1}}.$$

Por [ITAn 4.9], si $\alpha > 2$, la serie de la derecha es convergente, luego $S(n)$ también, mientras que si $\alpha \leq 2$ la serie de la izquierda es divergente, luego $S(n)$ también. La convergencia de $S(n)$ equivale a la convergencia absoluta de la serie del enunciado. ■

De aquí deducimos la convergencia de una serie funcional:

Teorema 5.11 *Si R es un retículo, $\alpha > 2$ y $M > 0$, entonces la serie*

$$\sum_{|\omega| > M} \frac{1}{(z - \omega)^\alpha},$$

donde ω recorre los elementos de R de módulo mayor que M , converge absoluta y uniformemente en el disco $D(0, M)$.

DEMOSTRACIÓN: Basta encontrar una constante K tal que

$$\frac{1}{|z - \omega|^\alpha} \leq \frac{K}{|\omega|^\alpha}, \quad (5.4)$$

para todo $\omega \in R$ con $|\omega| > M$ y todo z con $|z| \leq M$. La convergencia absoluta de la serie se sigue entonces del criterio de mayoración de Weierstrass y del teorema anterior. A su vez, esta desigualdad equivale a

$$\left| \frac{z - \omega}{\omega} \right|^\alpha \geq \frac{1}{K} = \epsilon.$$

Para encontrar ϵ tomamos un $\omega \in R$ tal que $|\omega| > M$ pero que tenga módulo mínimo $|\omega| = M + \delta$. Entonces, si $|z| \leq M$ se cumple

$$\left| \frac{z - \omega}{\omega} \right| = \left| 1 - \frac{z}{\omega} \right| \geq 1 - \frac{|z|}{|\omega|} \geq 1 - \frac{M}{M + \delta} = \epsilon. \quad \blacksquare$$

Ahora ya es fácil mostrar un ejemplo de función elíptica no constante:

Teorema 5.12 *Si R es un retículo, entonces la serie*

$$f(z) = \sum_{\omega \in R} \frac{1}{(z - \omega)^3}$$

define una función elíptica sobre R con polos de orden 3 en cada uno de los puntos de R .

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior, la suma para $|\omega| > M$ de la serie del enunciado converge absoluta y uniformemente en el disco $D(0, M)$, luego define una función holomorfa en el disco abierto. La función f se diferencia de esta suma en un número finito de términos, que constituyen una fracción algebraica con polos triples en cada uno de los puntos de R contenidos en el disco. Como esto vale para todo M , vemos que f es una función meromorfa en \mathbb{C} cuyos únicos polos son los puntos de R .

Todo $\omega_0 \in R$ es un periodo de f , pues, teniendo en cuenta la convergencia absoluta,

$$f(z + \omega_0) = \sum_{\omega \in R} \frac{1}{(z + \omega_0 - \omega)^3} = \sum_{\omega \in R} \frac{1}{(z - \omega)^3},$$

ya que cuando ω recorre R , lo mismo hace $\omega_0 - \omega$. ■

El teorema 5.11 nos ha obligado a poner un 3 como exponente de los denominadores de la serie con la que hemos definido a f , pero con un pequeño arreglo podemos rebajarlo hasta un 2:

Definición 5.13 Se llama *función \wp de Weierstrass* asociada a un retículo R completo de \mathbb{C} a la función dada por

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in R \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Teorema 5.14 *Si R es un retículo completo en \mathbb{C} , entonces la función \wp es una función elíptica sobre R con polos dobles en los puntos de R . Además*

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in R} \frac{1}{(z - \omega)^3}.$$

DEMOSTRACIÓN: Claramente,

$$\left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \left| \frac{z(2\omega - z)}{\omega^2(z - \omega)^2} \right|.$$

Fijado $M > 0$, hay un número finito de elementos $\omega \in R$ en el disco $D(0, M)$. Para los restantes tenemos (5.4), con lo que

$$\left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| \leq \frac{KM(2|\omega| + M)}{|\omega|^4} = \frac{KM(2 + M/|\omega|)}{|\omega|^3} \leq \frac{3KM}{|\omega|^3}.$$

Esto implica que la serie que define a \wp (salvo un número finito de términos) converge absoluta y uniformemente en cada disco $D(0, M)$, luego define una función holomorfa. Al sumarle los primeros términos obtenemos una función meromorfa con un polo doble en cada elemento de R . La derivada de \wp puede calcularse término a término, y es claramente la que se indica en el enunciado.

Observemos ahora que \wp es par, es decir, que cumple $\wp(z) = \wp(-z)$. En efecto, usamos que

$$(-z - \omega)^2 = (z + \omega)^2 = (z - (-\omega))^2,$$

sumamos sobre ω y usamos que $-\omega$ recorre R cuando ω lo hace.

Sabemos que \wp' es elíptica sobre R , luego si $\omega \in R$ la función $\wp(z + \omega) - \wp(z)$ es constante. Ahora bien, para $z = -\omega/2$ ha de ser

$$\wp(z + \omega) - \wp(z) = \wp(\omega/2) - \wp(-\omega/2) = 0,$$

luego $\wp(z + \omega) - \wp(z)$ es la función nula. ■

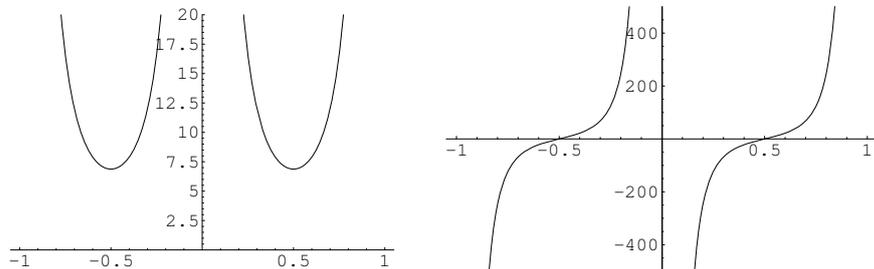
Las funciones \wp y \wp' se llaman *funciones elípticas de Weierstrass* asociadas al retículo completo R . Tenemos que \wp es par y \wp' es impar, es decir, que se cumplen las ecuaciones funcionales

$$\wp(-z) = \wp(z), \quad \wp'(-z) = -\wp'(z).$$

La primera ecuación la hemos visto en la prueba del teorema anterior y la segunda se sigue inmediatamente de la serie que define a \wp' .

Nota Por el teorema 5.10 sabemos que la serie $\sum_{\omega \in R \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^2}$ es divergente, luego también lo es la serie $\sum_{\omega \in R \setminus \{0\}} \frac{1}{(z - \omega)^2}$ (pues la resta de ambas, que aparece en la definición de \wp , es convergente). Esto muestra que los términos $1/\omega^2$ son necesarios en la definición de \wp para asegurar la convergencia. ■

Ejemplo Si un retículo R es estable para la conjugación (es decir, si los conjugados de elementos de R están en R), es fácil ver que $\wp(z) = \wp(\bar{z})$, por lo que en particular \wp toma valores reales sobre los números reales. He aquí las gráficas de las restricciones a \mathbb{R} de las funciones \wp y \wp' para el retículo $R = \langle 1, i \rangle$:



■

De acuerdo con el teorema 5.4, si R es un retículo completo en \mathbb{C} , las funciones elípticas sobre R pueden identificarse con las funciones meromorfas en la variedad cociente \mathbb{C}/R , que es lo que en A.30 llamamos un toro complejo (de dimensión 1). No vamos a necesitar este hecho, pero sí que es conveniente considerar al menos \mathbb{C}/R como grupo cociente y tener en cuenta algo totalmente elemental:

Cada función elíptica $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ sobre R se corresponde con una función $f^* : \mathbb{C}/R \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ dada por $f^*([z]) = f(z)$.

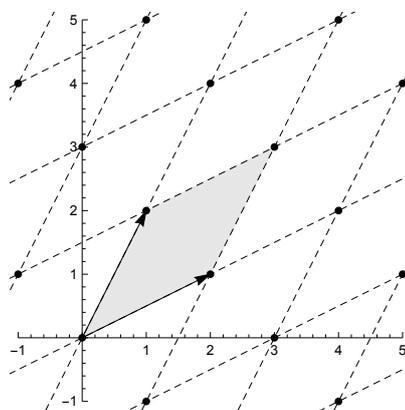
Esto no requiere tener en cuenta que \mathbb{C}/R admite una estructura de variedad analítica.² De todos modos, nos referiremos a \mathbb{C}/R como el toro complejo determinado por R , pero —insistimos— no necesitaremos tener en cuenta su estructura de variedad analítica, sino que nos bastará considerarlo como grupo cociente. En la práctica no distinguiremos entre f y f^* .

La estructura analítica de \mathbb{C}/R la podemos sustituir en la práctica considerando el concepto de *paralelogramo fundamental* de un retículo R asociado a una base ω_1, ω_2 , que es el conjunto

$$P = \{\alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \mid 0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \beta < 1\}.$$

Si expresamos un número complejo z como combinación lineal con coeficientes reales de ω_1 y ω_2 y separamos las partes enteras y fraccionarias de las coordenadas, obtenemos que z se expresa en forma única como $z = \omega + \zeta$, con $\omega \in R$ y $\zeta \in P$.

Equivalentemente, esto significa que los trasladados $\omega + P$, con $\omega \in R$ forman una partición de \mathbb{C} , o también, que la proyección natural $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/R$ se restringe a una biyección $P \rightarrow \mathbb{C}/R$.



La figura muestra el paralelogramo fundamental asociado a los números complejos $\omega_1 = 2 + i$, $\omega_2 = 1 + 2i$, así como algunos de sus trasladados.

²Si lo tenemos en cuenta, podemos decir que —de acuerdo con 5.4— las funciones $f^* : \mathbb{C}/R \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ para las que la función f definida por la relación anterior es elíptica son precisamente las funciones meromorfas sobre la variedad analítica \mathbb{C}/R , pero esto es lo que decimos que no vamos a necesitar en ningún momento.

Notemos que el paralelogramo fundamental depende de la base de R elegida. Por ejemplo, otra base del retículo mostrado en la figura es $2 + i, 1 - i$, y el paralelogramo fundamental asociado es diferente.

Ahora podemos visualizar el toro complejo \mathbb{C}/R como el espacio que resulta de identificar los lados opuestos de un paralelogramo fundamental de R , que es, ciertamente, homeomorfo a un toro en el sentido geométrico.

Pasamos ya a estudiar las propiedades de las funciones elípticas:

Teorema 5.15 (Primer teorema de Liouville) *Toda función elíptica sin polos es constante.*³

DEMOSTRACIÓN: Si f es elíptica sobre R y no tiene polos, entonces está acotada en la clausura de un paralelogramo fundamental de R , pero por la periodicidad está acotada en \mathbb{C} , luego por el teorema de Liouville 1.33 es constante. ■

Así pues, el hecho de que estudiemos las funciones meromorfas doblemente periódicas y no meramente las enteras es una cuestión de necesidad. En caso contrario estaríamos estudiando únicamente las funciones constantes. Todavía podemos decir más sobre los polos de una función elíptica, aparte de que existen:

Teorema 5.16 (Segundo teorema de Liouville) *Si f es una función elíptica no constante sobre un retículo R , entonces f tiene un número finito de polos en \mathbb{C}/R , y la suma de sus residuos es 0.*

DEMOSTRACIÓN: Si P es un paralelepípedo fundamental de R , la biyección $P \rightarrow \mathbb{C}/R$ hace que el teorema sea equivalente a que f tiene sólo un número finito de polos en P . En caso contrario, por compacidad, habría un punto en \bar{P} que sería un punto de acumulación de polos y, por consiguiente, sería una singularidad no aislada de la función.

Es claro entonces que podemos tomar $a \in \mathbb{C}$ tal que no haya ningún polo de f en la frontera del trasladado $P_a = a + P$. El teorema de los residuos nos da entonces que

$$\int_{\partial P_a} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{z \in P_a} \text{Res}(f, z).$$

Ahora bien, la integral de f sobre un lado del paralelogramo P_a se cancela con la integral sobre el lado opuesto. Concretamente, si la base de periodos respecto a la que se calcula P es ω_1, ω_2 , entonces

$$\begin{aligned} \int_{\partial P_a} f(\zeta) d\zeta &= \int_{[a, a+\omega_1]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[a+\omega_1, a+\omega_1+\omega_2]} f(\zeta) d\zeta \\ &+ \int_{[a+\omega_1+\omega_2, a+\omega_2]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[a+\omega_2, a]} f(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

³Usando que los toros complejos son variedades analíticas (compactas y conexas) tenemos una prueba alternativa, consistente en aplicar el teorema A.10 a f vista como aplicación holomorfa $f : \mathbb{C}/R \rightarrow \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
&= \omega_1 \int_0^1 f(a + t\omega_1) dt + \omega_2 \int_0^1 f(a + \omega_1 + t\omega_2) dt \\
&- \omega_1 \int_0^1 f(a + \omega_2 + (1-t)\omega_1) dt - \omega_2 \int_0^1 f(a + (1-t)\omega_2) dt \\
&= \omega_1 \int_0^1 f(a + t\omega_1) dt + \omega_2 \int_0^1 f(a + t\omega_2) dt \\
&- \omega_1 \int_0^1 f(a + (1-t)\omega_1) dt - \omega_2 \int_0^1 f(a + (1-t)\omega_2) dt \\
&= \omega_1 \int_0^1 f(a + t\omega_1) dt + \omega_2 \int_0^1 f(a + t\omega_2) dt \\
&- \omega_1 \int_0^1 f(a + t\omega_1) dt - \omega_2 \int_0^1 f(a + t\omega_2) dt = 0.
\end{aligned}$$

Así pues, la suma de los residuos es nula. \blacksquare

Por ejemplo, la función de Weierstrass \wp asociada a un retículo tiene un único polo doble, mientras que \wp' tiene un único polo triple. En cambio, es imposible que una función elíptica tenga un único polo simple, pues entonces su residuo no sería nulo y contradiría el teorema anterior.

A la hora de hacer cálculos sobre los órdenes de los ceros y los polos de una función elíptica conviene observar lo siguiente:

Si f es una función elíptica sobre R y $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ es el desarrollo en serie de Laurent de f alrededor de un punto $a \in \mathbb{C}$, entonces, para cada $\omega \in R$ tenemos que

$$f(z) = f(z - \omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - (a + \omega))^n$$

es el desarrollo en serie de Laurent de f alrededor del punto $a + \omega$, luego en particular $o(f, z) = o(f, z + \omega)$, para todo $\omega \in R$. Por lo tanto, podemos hablar del *orden*⁴ de f en un punto $[z] \in \mathbb{C}/R$ como el orden de f en cualquier representante z de la clase de equivalencia.

Definición 5.17 El *orden* de una función elíptica f en un retículo R se define como

$$o(f) = - \sum_z o(f, z),$$

donde z recorre todos los polos de f en \mathbb{C}/R (o, equivalentemente, en un paralelogramo fundamental de R).

⁴Si consideramos a \mathbb{C}/R como variedad analítica, este orden que estamos introduciendo es simplemente el orden de f en $[z]$ como función meromorfa en el sentido de la definición A.14, pues si $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/R$ es la proyección natural, las inversas locales $(p|_U)^{-1}$ son cartas de \mathbb{C}/R , de donde se sigue que si f es elíptica sobre R y $f^* : \mathbb{C}/R \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ es la función asociada sobre el toro, entonces $o(f, z) = o(f^*, p(z))$.

Así, el primer teorema de Liouville afirma que las funciones elípticas de orden 0 son constantes, y el segundo teorema de Liouville implica —como ya hemos señalado— que no existen funciones elípticas de orden 1. Las funciones de Weierstrass \wp y \wp' tienen orden 2 y 3 respectivamente.

Teorema 5.18 (Tercer teorema de Liouville) *Si f es una función elíptica no constante sobre un retículo R , entonces*

$$\sum_{z \in \mathbb{C}/R} o(f, z) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN: La función f'/f también es elíptica en R y, según 3.10, tenemos que $o(f, z) = \text{Res}(f'/f, z)$, luego basta aplicar el segundo teorema de Liouville. ■

La suma del teorema anterior puede descomponerse en la suma de los órdenes de los ceros más la suma de los órdenes de los polos, y la segunda es $-o(f)$, luego lo que afirma el teorema es que $o(f)$ es también la suma de los órdenes de los ceros de f en \mathbb{C}/R . Equivalentemente, que una función elíptica tiene el mismo número de ceros que de polos, contándolos con sus multiplicidades respectivas.

Nota En realidad este resultado puede refinarse ligeramente. Dada cualquier función holomorfa f tal que $f(z) = a$, podemos definir $o_a(f, z) = o(f - a, z)$. Notemos que si f tiene un polo en z , entonces $o_a(f, z) = o(f, z)$. Así, al aplicar el teorema anterior a la función $f - a$, para cualquier $a \in \mathbb{C}$, obtenemos que

$$\sum_{z \in f^{-1}[a] \cap P} o_a(f, z) = o(f),$$

lo que se interpreta como que f toma $o(f)$ veces cada valor $a \in \mathbb{C}$, contando cada uno “con su multiplicidad”. En particular vemos que una función elíptica no constante toma todos los valores de \mathbb{C}^∞ . ■

Veamos un último resultado general sobre la distribución de los ceros y polos de una función elíptica:

Teorema 5.19 *Sea f una función elíptica no constante sobre un retículo R y sean z_1, \dots, z_r los puntos de \mathbb{C}/R donde f tiene ceros o polos, de multiplicidades m_1, \dots, m_r respectivamente. Entonces, en el grupo \mathbb{C}/R se cumple que*

$$\sum_{j=1}^r m_j z_j = 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $R = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ y sea P el paralelogramo fundamental asociado a la base fijada. Podemos tomar un $a \in \mathbb{C}$ tal que la frontera de $P_a = a + P$ no contenga ceros ni polos de f . A su vez, podemos identificar a z_1, \dots, z_r con puntos de P_a , y lo que hay que probar es que $\sum_{j=1}^r m_j z_j \in R$.

El teorema 3.10 nos da que la función f'/f tiene polos simples en los puntos z_i con residuo m_i . Por consiguiente, la función $z f'/f$ tiene polos simples en los puntos z_i con residuo $m_i z_i$ (entendiendo que si $z_i = 0$ entonces $z f'/f$ es holomorfa en z_i , con lo que su “residuo” es 0).

No podemos aplicar el segundo teorema de Liouville a esta función porque no es elíptica, pero vamos a adaptar su demostración a este caso. El teorema de los residuos nos da que

$$\int_{\partial P_a} \frac{\xi f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = 2\pi i \sum_{j=1}^r m_j z_j.$$

Ahora evaluamos la integral en un par de lados opuestos del paralelogramo:

$$\begin{aligned} & \int_a^{a+\omega_1} \frac{\xi f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi + \int_{a+\omega_1+\omega_2}^{a+\omega_2} \frac{\xi f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi = \\ & \omega_1 \int_0^1 \frac{(a+t\omega_1)f'(a+t\omega_1)}{f(a+t\omega_1)} dt - \omega_1 \int_0^1 \frac{(a+\omega_2+t\omega_1)f'(a+\omega_2+t\omega_1)}{f(a+\omega_2+t\omega_1)} dt \\ & = -\omega_1\omega_2 \int_0^1 \frac{f'(a+t\omega_1)}{f(a+t\omega_1)} dt = -\omega_2 \int_a^{a+\omega_1} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi. \end{aligned}$$

Una primitiva del integrando (sobre un entorno del segmento) es una determinación holomorfa $\log f(z)$ del logaritmo de $f(z)$ (que existe porque f no se anula sobre el segmento). Por lo tanto la integral es la diferencia de dos logaritmos de $f(a) = f(a + \omega_1)$. En total obtenemos $-2k\pi i\omega_2$, para cierto $k \in \mathbb{Z}$. Lo mismo es válido para la integral sobre el otro par de lados del paralelogramo, luego

$$2\pi i \sum_{j=1}^r m_j z_j = 2\pi i(k_1\omega_1 + k_2\omega_2),$$

de donde se sigue el teorema. ■

Según el tercer teorema de Liouville, la función \wp tiene que tener dos ceros en \mathbb{C}/R (o tal vez un cero doble), mientras que \wp' tiene que tener tres. Sucede que las expresiones explícitas para los ceros de \wp son muy complicadas. En cambio, los ceros de \wp' son fáciles de localizar:

Teorema 5.20 *Si R es un retículo completo en \mathbb{C} , la función \wp' asociada tiene tres ceros simples en \mathbb{C}/R , que son precisamente los tres elementos de orden 2 del grupo cociente. Concretamente, si ω_1, ω_2 es una base de R , se trata de las clases de $\omega_1/2, \omega_2/2, (\omega_1 + \omega_2)/2$.*

DEMOSTRACIÓN: Si ω tiene orden 2 en el grupo \mathbb{C}/R , eso significa que $\omega \notin R$, pero $2\omega \in R$. Entonces, como \wp' es impar:

$$\wp'(\omega) = \wp'(\omega - 2\omega) = \wp'(-\omega) = -\wp'(\omega),$$

luego $\wp'(\omega) = 0$. Esto hace que $\omega_1/2, \omega_2/2, (\omega_1 + \omega_2)/2$ sean tres ceros de \wp' distintos dos a dos (como elementos de \mathbb{C}/R). Por el tercer teorema de Liouville no puede haber más y tienen que ser simples, ya que la función tiene orden 3. ■

Esto a su vez nos da información sobre cómo falla la inyectividad de \wp :

Teorema 5.21 Si R es un retículo completo en \mathbb{C} con función de Weierstrass \wp , para cada $z, w \in \mathbb{C}/R$ se cumple $\wp(z) = \wp(w)$ si y sólo si $z = \pm w$.

DEMOSTRACIÓN: Sabemos que \wp es par, por lo que si $z = \pm w$, ciertamente $\wp(z) = \wp(w)$. Supongamos ahora esta igualdad. Si es $\wp(z) = \wp(w) = \infty$, entonces $z = w = 0$, luego ciertamente $z = \pm w$. Supongamos, por el contrario, que el valor común es finito. Entonces consideramos $f(z) = \wp(z) - \wp(w)$, que es una función elíptica en R de orden 2, igual que \wp , luego tiene exactamente dos ceros (contando multiplicidades). Ciertamente $f(\pm w) = 0$, luego si $w \neq -w$, los únicos ceros son estos dos puntos, y concluimos que, en efecto, la igualdad $\wp(z) = \wp(w)$ sólo se da cuando $z = \pm w$. Si, por el contrario, $w = -w$, entonces el teorema anterior nos da que $\wp'(w) = 0$, luego también $f'(w) = 0$, por lo que w es un cero doble de f y, consecuentemente, es el único. La conclusión es que la igualdad $\wp(z) = \wp(w)$ sólo se da cuando $z = \pm w$. ■

Definición 5.22 Si $R = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ es un retículo completo en \mathbb{C} y \wp es su correspondiente función de Weierstrass, definimos

$$e_1 = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad e_2 = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right), \quad e_3 = \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right).$$

Tenemos que los valores e_i son las imágenes por \wp de los tres únicos puntos de orden 2 del grupo \mathbb{C}/R , luego (salvo el orden) son independientes de la elección de la base de R . Por el teorema anterior son, junto con ∞ , los únicos puntos de la esfera de Riemann \mathbb{C}^∞ que tienen una única antiimagen por \wp . Todos los demás puntos tienen dos antiimágenes (si una es z , la otra es $-z$). Más aún, los tres números e_1, e_2, e_3 son distintos dos a dos, pues si dos de ellos coincidieran, dos de los números $\omega_1/2, \omega_2/2, (\omega_1 + \omega_2)/2$ tendrían que ser congruentes módulo R , y no es el caso.

Vamos a determinar el desarrollo en serie de Laurent alrededor de 0 de las funciones de Weierstrass.

Definición 5.23 Sea R un retículo completo en \mathbb{C} . Para cada natural $n \geq 3$, definimos la *serie de Eisenstein* de R de orden n como

$$G_n = \sum_{\omega \in R \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^n}.$$

El teorema 5.10 prueba la convergencia de las series de Eisenstein. En la demostración del teorema siguiente se ve que $G_{2n+1} = 0$ para todo n :

Teorema 5.24 La serie de Laurent en 0 de la función de Weierstrass \wp de un retículo completo R es

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)G_{2n+2}z^{2n}.$$

DEMOSTRACIÓN: Usamos el desarrollo de Taylor

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n, \quad |z| < 1.$$

Sea $m > 0$ el menor módulo de un elemento no nulo de R . Si $0 < |z| < m$ y $\omega \in R$ es no nulo, entonces $|z/\omega| < 1$ y

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} = \frac{1}{\omega^2 (1 - \frac{z}{\omega})^2} = \frac{1}{\omega^2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(\frac{z}{\omega}\right)^n \right),$$

luego

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\omega^{n+2}} z^n.$$

Sumando sobre ω y teniendo en cuenta que todas las series convergen absolutamente,

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \sum_{\omega \in R \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^{n+2}} z^n = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) G_{n+2} z^n.$$

Como \wp es una función par, las series de Eisenstein G_{2k+1} han de ser nulas, con lo que queda la expresión del enunciado. ■

De aquí se deduce una relación algebraica entre las funciones \wp y \wp' o, equivalentemente, que \wp satisface una ecuación diferencial:

Teorema 5.25 *La función \wp de un retículo completo R satisface la ecuación diferencial*

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$

donde $g_2 = 60G_4$ y $g_3 = 140G_6$.

DEMOSTRACIÓN: Derivando la serie de Laurent de \wp obtenemos que (para todo z cercano a 0)

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6G_4z + 20G_6z^3 + \dots$$

Por lo tanto

$$\wp'(z)^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{24G_4}{z^2} - 80G_6 + \dots$$

donde los puntos suspensivos representan una función holomorfa que se anula en 0. Por otra parte,

$$\wp(z)^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{9G_4}{z^2} + 15G_6 + \dots$$

Por consiguiente

$$\wp'(z)^2 - 4\wp^3 + 60G_4\wp(z) = -140G_6 + \dots$$

Esta función es elíptica y no tiene polos, luego ha de ser constante, lo que nos da la ecuación diferencial que buscamos. ■

Conocemos las raíces del polinomio del miembro derecho de la ecuación del teorema anterior:

Teorema 5.26 *Si R es un retículo completo en \mathbb{C} , entonces*

$$4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3).$$

Por consiguiente, e_1, e_2, e_3 son las raíces del polinomio $4X^3 - g_2X - g_3$ y, como son distintas dos a dos, su discriminante⁵ es $16\Delta \neq 0$, donde $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$.

DEMOSTRACIÓN: Sea α_i uno de los tres números $\omega_1/2, \omega_2/2, (\omega_1 + \omega_2)/2$, de modo que $\wp(\alpha_i) = e_i$. Como $\wp'(\alpha_i) = 0$, tenemos que α_i es un cero de $\wp - e_i$ de orden al menos dos. Contando los polos vemos que la función tiene orden 2, luego α_i ha de ser su único cero y su orden ha de ser exactamente 2.

Por consiguiente, la función $g(z) = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)$ tiene exactamente tres ceros dobles. Lo mismo podemos decir de la función \wp'^2 , que tiene orden 6 (sólo tiene polos de orden 6 en los puntos de R) y acabamos de ver que tiene ceros de orden al menos 2 en los mismos puntos que g . Así pues, dichos ceros han de ser exactamente de orden 2 y no puede tener más. El cociente

$$\frac{\wp'(z)^2}{g(z)} = \frac{4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3}{4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)}$$

es una función elíptica sin ceros, luego ha de ser constante y, calculando su límite en 0 (dividiendo entre \wp^3), vemos que la constante ha de ser 1, y así tenemos la igualdad del enunciado.

Vemos entonces que el polinomio

$$4X^3 - g_2X - g_3 - 4(X - e_1)(X - e_2)(X - e_3)$$

se anula en todos los números complejos (pues \wp toma todos los valores complejos), luego es idénticamente nulo. ■

Terminamos esta sección probando que las funciones de Weierstrass no son dos meros ejemplos de funciones elípticas, sino que generan a todas las demás. Empezamos demostrando lo siguiente:

Teorema 5.27 *Si f es una función elíptica par sobre un retículo R cuyos polos están todos en R , entonces $f = P(\wp)$, donde $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ es un polinomio de grado $o(f)/2$.*

DEMOSTRACIÓN: Por hipótesis $f(z) = f(-z)$, luego, sustituyendo esta igualdad en la serie de Laurent de f alrededor de 0, concluimos que sus coeficientes impares son todos nulos, luego el orden del polo es par y, al ser el único, podemos afirmar que $o(f) = 2n$, para cierto natural n . Ahora basta razonar por inducción sobre n .

⁵Véase [Al 7.9] y los ejemplos siguientes.

Si $n = 0$ la función f es constante y la conclusión es trivial. Si toda función en las hipótesis del enunciado con orden menor que $2n$ es un polinomio en \wp y f tiene orden $2n$, digamos con un desarrollo en serie de Laurent de la forma

$$f(z) = a_{-2n}z^{-2n} + a_{2(n-1)}z^{-2(n-1)} + \dots$$

entonces $f - a_{-2n}\wp^n$ está también en las hipótesis del teorema, pero tiene orden menor que $2n$, luego

$$f(z) - a_{-2n}\wp^n(z) = Q(\wp),$$

para cierto polinomio $Q(X) \in \mathbb{C}[X]$ de grado menor que $2n$, luego $f(z) = P(\wp)$, con $P(X) = a_{-2n}X^{2n} + Q(X)$. ■

A su vez:

Teorema 5.28 *Si f es una función elíptica par sobre un retículo R , entonces $f = P(\wp)$, donde $P(X) \in \mathbb{C}(X)$ es una función racional (un cociente de polinomios).*

DEMOSTRACIÓN: Si f tiene sus polos en R basta aplicar el teorema anterior. Supongamos ahora que f tiene polos en puntos $\zeta_1, \dots, \zeta_r \in \mathbb{C}/R$ no nulos. Entonces $\wp(\zeta_i) \in \mathbb{C}$ y si $n_i = -o(f, \zeta_i)$, la función $(\wp(z) - \wp(\zeta_i))^{n_i}$ tiene un cero de orden n_i en ζ_i , luego la función

$$\prod_{i=1}^r (\wp(z) - \wp(\zeta_i))^{n_i} f(z)$$

sigue siendo elíptica sobre R , par y sólo tiene polos en R . Por el teorema anterior es de la forma $P(\wp)$, para cierto polinomio P , luego, tomando

$$Q(X) = \prod_{i=1}^r (X - \wp(\zeta_i))^{n_i},$$

se cumple que $f(z) = P(\wp)/Q(\wp)$. ■

En otras palabras, el cuerpo $\mathbb{C}(\wp)$ es el cuerpo de todas las funciones elípticas pares sobre R . Finalmente:

Teorema 5.29 *Toda función elíptica sobre un retículo R se expresa en la forma*

$$f = P(\wp) + Q(\wp)\wp',$$

para ciertas funciones racionales $P(X), Q(X) \in \mathbb{C}(X)$.

DEMOSTRACIÓN: Si f es una función elíptica, podemos descomponerla como

$$f(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2} + \frac{f(z) - f(-z)}{2},$$

donde el primer sumando es par y el segundo es impar. Por el teorema anterior, el primero es de la forma $P(\wp)$, y si llamamos $g(z)$ al segundo, podemos expresarlo como $g(z) = (g(z)/\wp'(z))\wp'(z)$, donde el cociente es una función par, luego de la forma $Q(\wp)$. ■

Así, en términos de la teoría de extensiones, el cuerpo de las funciones elípticas sobre R es $\mathcal{M}(\mathbb{C}/R) = \mathbb{C}(\wp, \wp') = \mathbb{C}(\wp)[\wp']$, donde \wp' es un elemento algebraico de grado 2 sobre el cuerpo $\mathbb{C}(\wp)$.

5.3 Curvas elípticas

Varias de las propiedades de las funciones de Weierstrass tienen una interpretación natural en términos de curvas elípticas.⁶

Definición 5.30 Una *curva elíptica (compleja)* es un conjunto de la forma

$$V = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid zy^2 = 4x^3 - g_2xz^2 - g_3z^3\},$$

para ciertos números $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ tales que $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$.

Si tomamos como recta del infinito la recta $z = 0$, vemos que cada curva elíptica contiene un único punto infinito, a saber $O = [0, 1, 0]$. La parte finita de la curva (es decir, el conjunto de los puntos $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ tales que $[x, y, 1] \in V$) es

$$V_0 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3\}.$$

En la práctica conviene trabajar con esta parte afín, pero teniendo presente que en realidad la curva contiene un punto más. Según hemos visto en 5.26, el número Δ es, salvo una constante, el discriminante del polinomio en x , por lo que la condición $\Delta \neq 0$ equivale a que éste tenga tres raíces simples.

Aunque aquí no nos apoyaremos en este hecho, en A.54 probamos que V es una subvariedad analítica del plano proyectivo (de dimensión 1, y de ahí el nombre de “curva”).

La relación con las funciones elípticas es casi inmediata:

Teorema 5.31 Sea $R \subset \mathbb{C}$ un retículo completo y sea V la curva elíptica determinada por los números g_2, g_3 considerados en el teorema 5.25. Entonces la aplicación $\pi : \mathbb{C} \rightarrow V$ dada por $\pi(z) = [\wp(z), \wp'(z), 1]$ para $z \in \mathbb{C} \setminus R$ y $\pi(z) = [0, 1, 0]$ si $z \in R$ induce una biyección $\pi : \mathbb{C}/R \rightarrow V$.

DEMOSTRACIÓN: Es claro que $\pi(z)$ sólo depende de la clase de z en \mathbb{C}/R , luego π induce una aplicación $\pi : \mathbb{C}/R \rightarrow V$.

Si $(x, y) \in V_0$, en la prueba de 5.21 hemos visto que \wp toma todos valores complejos, luego existe un $z \in \mathbb{C}$ tal que $\wp(z) = x$. Necesariamente, $z \notin R$, pues en tal caso sería un polo y $\wp(z)$ no sería finito. Por el teorema 5.25 resulta que $\wp'(z) = \pm y$, luego, cambiando z por $-z$ si es preciso, conseguimos que $\wp(z) = x$, $\wp'(z) = y$.

Esto prueba que π es suprayectiva, y también es inyectiva, pues si se cumple $\pi([z]) = \pi([w])$, entonces, o bien $[z] = [w] = 0$, o bien $[z] \neq 0 \neq [w]$, pues 0 es el único punto de \mathbb{C}/R cuya imagen es el punto infinito de V . En el segundo caso $\wp(z) = \wp(w)$, luego, por 5.21 tenemos que $z = \pm w$, pero, como también se cumple que $\wp'(z) = \wp'(w)$, tiene que ser $z = w$. ■

Si tenemos en cuenta que tanto \mathbb{C}/R como V son variedades analíticas, es fácil ver que π es, de hecho, una aplicación biholomorfa, lo cual está probado también en A.55. Así pues, las curvas elípticas definidas por los números g_2, g_3 asociados a un retículo completo son biholomorfas a toros complejos.

⁶En realidad la definición que damos es un caso particular de otra mucho más general.

Esto nos plantea el problema de si toda curva elíptica puede parametrizarse mediante las funciones de Weierstrass asociadas a un retículo completo o, equivalentemente, si cualquier par de números complejos g_2, g_3 que cumplan $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ es el par de números asociados en el teorema 5.25 a un cierto retículo completo. La respuesta es afirmativa, pero lo probaremos en el capítulo siguiente (teorema 6.18).

El teorema siguiente es un caso muy particular de una teoría general sobre intersecciones de variedades algebraicas, pero es lo único que necesitaremos para relacionar las curvas elípticas con las funciones elípticas que estamos estudiando.

Teorema 5.32 *Si $V \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ es una curva elíptica, entonces cada recta proyectiva corta a V en a lo sumo tres puntos, y es posible asignar un índice a cada punto de la intersección para que, contando cada punto tantas veces como indica su índice, el número de puntos de intersección sea exactamente 3. Por cada punto de V pasa una única recta proyectiva cuyo índice de intersección es mayor o igual que 2, la cual recibe el nombre de recta tangente a V por el punto indicado.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $zy^2 = 4x^3 - g_2xz^2 - g_3z^3$ la ecuación que define la curva elíptica. Consideremos en primer lugar la recta infinita R , de ecuación $z = 0$. Ya hemos visto que corta a V únicamente en el punto $O = [0, 1, 0]$, por lo que el índice de intersección de V y R en O tiene que definirse⁷ como 3.

Consideremos ahora una recta que pase por el punto infinito O que no sea la recta infinita. Las rectas (afines) que tienen a O como punto infinito son las de la forma $x = x_0$, y su intersección con la parte afín V_0 de V , determinada por la ecuación $y^2 = g(x)$, donde

$$g(x) = 4x^3 - g_2x - g_3,$$

está formada por los puntos $[x_0, y_0, 1]$, donde y_0 es una raíz de la ecuación cuadrática $y^2 = g(x_0)$.

Si $g(x_0) \neq 0$, tendremos dos valores distintos para b , luego dos puntos de intersección además del punto infinito, por lo que en total hay tres y a cada uno de ellos tenemos que asignarle un índice igual a 1.

Si $g(x_0) = 0$, es que x_0 es una de las tres raíces simples e_1, e_2, e_3 de $g(x)$, y en estos tres casos el punto $[e_i, 0, 1]$ es el único punto de intersección, además del punto infinito, por lo que le asignamos un índice de 2 (y un índice de 1 al punto infinito).

En ambos casos, el punto O tiene índice 1 respecto de cualquier recta que pase por él que no sea la recta infinita, luego ésta es la recta tangente a V en el punto O .

⁷La geometría algebraica permite dar una definición intrínseca del índice de intersección entre dos curvas que no depende de argumentos *ad hoc* como los que estamos dando. No obstante, es fácil entender que la asignación de un 3 no es arbitraria. Los puntos que cumplen la ecuación de V y la ecuación $z = 0$ están determinados por la ecuación $4x^3 = 0$, que es cúbica, luego tiene tres soluciones que “casualmente” son iguales. Igualmente sucede con los demás casos que vamos a considerar.

Ahora consideremos una recta R que no pase por O . Como no corta a V en ningún punto infinito, podemos trabajar únicamente con la ecuación afín, que será de la forma $y = ax + b$ (no puede ser una recta vertical, pues éstas son precisamente las que pasan por O). Al sustituir $y = ax + b$ en la ecuación $y^2 = g(x)$ obtenemos una ecuación polinómica en x de grado 3, luego tiene tres raíces si contamos cada una de ellas con su multiplicidad. La intersección $V \cap R$ consta de los puntos $[x_0, y_0, 1]$, donde x_0 es una de estas raíces e $y_0 = ax_0 + b$. Si definimos el índice de intersección de cada una de ellas como la multiplicidad de x_0 en la ecuación cúbica, tenemos que el número de puntos de intersección (contado algebraicamente) es 3.

Por último, tomemos un punto de V de la forma $P = [x_0, y_0, 1]$. Las rectas que pasan por P son, por una parte, la recta $x = x_0$, donde el índice de intersección es 1 salvo si $u = e_1, e_2, e_3$, y las de la forma $y - y_0 = m(x - x_0)$, para $m \in \mathbb{C}$. Para determinar su índice, consideramos la ecuación

$$g(x) - (y_0 + m(x - x_0))^2 = 0,$$

que tiene raíz x_0 . El índice será mayor que 1 si x_0 es una raíz múltiple, es decir, si la derivada se anula en x_0 :

$$g'(x_0) - 2my_0 = 0.$$

Si $y_0 = 0$, entonces $x_0 = e_1, e_2, e_3$, luego $g'(x_0) \neq 0$ (porque x_0 es raíz simple de $g(x)$). Por lo tanto, no se cumple la condición y concluimos que la única recta con índice mayor que 1 es la vertical $x = x_0$.

Si $y_0 \neq 0$, la única posibilidad es

$$m = \frac{g'(x_0)}{2y_0}$$

y, como además $x_0 \neq e_1, e_2, e_3$, resulta que $x = x_0$ tiene índice 1 y concluimos que la única recta con índice mayor que 1 que pasa por (x_0, y_0) es

$$2y_0(y - y_0) - g'(x_0)(x - x_0) = 0.$$

Notemos que esta expresión se reduce a $x = x_0$ en el caso $y_0 = 0$, luego nos proporciona la recta tangente⁸ a V por cualquiera de sus puntos finitos. ■

Si $R \subset \mathbb{C}$ es un retículo completo, la biyección $\pi : \mathbb{C}/R \rightarrow V$ dada por el teorema 5.31 permite traspasar a la curva elíptica V la estructura de grupo

⁸Si llamamos $f(x) = y^2 - g(x)$ a la ecuación que define la parte afín V_0 de V , la ecuación de la recta tangente es

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} (y - y_0) = 0,$$

que, según A.52, es la ecuación de la recta tangente a V_0 como curva analítica, de modo que la tangente en el sentido de la geometría algebraica coincide con la tangente en el sentido de la geometría diferencial. También es fácil ver que la tangente a V en su punto infinito, de acuerdo con las observaciones posteriores al teorema A.53 es la recta infinita, luego también en este caso tenemos la equivalencia entre ambas definiciones.

del toro complejo, es decir, que, dados dos puntos $P, Q \in V$, podemos definir su suma como $P + Q = \pi(p + q)$, donde $p, q \in \mathbb{C}/R$ son los únicos puntos que cumplen $\pi(p) = P$, $\pi(q) = Q$.

Vamos a ver ahora que esta estructura de grupo puede caracterizarse en términos puramente geométricos. Por ejemplo, como $f(0) = O$, vemos que el elemento neutro de V es O . También es fácil determinar el opuesto de un punto finito de V .

También es fácil caracterizar el punto opuesto de un punto finito (el de O es él mismo, por ser el elemento neutro). Basta tener en cuenta que si $f(u) = P$, entonces $-P = f(-u) = (\wp(-u), \wp'(-u)) = (\wp(u), -\wp'(u))$ es el simétrico de P respecto al eje x . Esto todavía admite una expresión más geométrica:

El opuesto de P es el tercer punto en el que la recta OP corta a V .

Aquí hay que entender que si la recta OP es tangente a V , entonces dicho tercer punto es el propio P . En efecto, en tal caso, según hemos visto en la prueba de 5.32, el punto P es uno de los tres puntos $(e_i, 0) = f([\alpha_i])$, donde $2\alpha_i \in R$, luego $2P = 0$, luego $-P = P$.

De hecho, la afirmación precedente vale también para $P = O$ si entendemos que entonces OP es la recta tangente a V por O (la recta infinita) y que el tercer punto es de nuevo O , ya que el índice de intersección es 3. Pero todavía se cumple un hecho más general:

Teorema 5.33 *Si V es una curva elíptica⁹ tres puntos $A, B, C \in V$ cumplen $A + B + C = 0$ si y sólo si son los tres puntos en que una recta proyectiva corta a V (teniendo en cuenta los índices de intersección).*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $A + B + C = O$ y distingamos varios casos. Si uno de los puntos es el punto infinito de V , por ejemplo $C = O$, entonces $B = -A$ y acabamos de probar que B es el tercer punto donde la recta AO corta a V , luego se cumple la condición del enunciado.

Supongamos ahora que los tres puntos son finitos y que son distintos dos a dos. Entonces existen números $u, v \in \mathbb{C} \setminus R$ tales que $A = (\wp(u), \wp'(u))$, $B = (\wp(v), \wp'(v))$ y, por consiguiente,

$$C = -A - B = (\wp(u + v), -\wp'(u + v)).$$

Tiene que ser $\wp(u) \neq \wp(v)$, pues en caso contrario $u = -v$ por 5.21 (dado que estamos suponiendo que $A \neq B$), pero entonces $u + v = 0$ y sería $C = O$. La recta que pasa por A y B es la de ecuación

$$y = \frac{\wp'(v) - \wp'(u)}{\wp(v) - \wp(u)}(x - \wp(u)) + \wp'(u).$$

⁹En principio vamos a probar el teorema para curvas elípticas asociadas a retículos completos $R \subset \mathbb{C}$, que es en las únicas en las que tenemos definida la estructura de grupo, pero en 6.18 demostraremos que toda curva elíptica está asociada a un retículo completo, luego el teorema se aplica realmente a todas las curvas elípticas.

Por lo tanto, los puntos finitos en que esta recta corta a V son los de la forma $(\wp(z), \wp'(z))$, donde

$$h(z) = \frac{\wp'(v) - \wp'(u)}{\wp(v) - \wp(u)} (\wp(z) - \wp(u)) + \wp'(u) - \wp'(z) = 0.$$

La función $h(z)$ es elíptica sobre R con un único polo triple en $[0]$. Por otra parte, se anula en $z = u$ y $z = v$. Según el teorema 5.19 tiene un tercer cero w tal que $[u] + [v] + [w] = 0$, luego $h(-u - v) = 0$ (en particular $u + v \notin R$), y esto significa que $C = \pi(-u - v)$ es el tercer punto de intersección entre V y la recta AB .

Supongamos ahora que dos de los puntos son iguales, por ejemplo $A = B$. Pongamos que $A = (\wp(u), \wp'(u))$, con lo que $C = (\wp(2u), -\wp'(2u))$, y consideremos la recta tangente a V por A , cuya ecuación, según hemos visto en la prueba de 5.32, es

$$2\wp'(u)(y - \wp'(u)) - (12\wp(u)^2 - g_2)(x - \wp(u)) = 0.$$

Tiene que ser $\wp'(u) \neq 0$, pues en caso contrario sería $2u \in R$ y $C = O$. Por otra parte, derivando la ecuación diferencial del teorema 5.25 vemos que $2\wp''(u) = 12\wp(u)^2 - g_2$, luego la ecuación de la recta tangente es

$$\wp'(u)(y - \wp'(u)) - \wp''(u)(x - \wp(u)) = 0.$$

Los puntos en que esta recta corta a V son los de la forma $(\wp(z), \wp'(z))$ tales que

$$h(z) = \wp'(u)(\wp'(z) - \wp'(u)) - \wp''(u)(\wp(z) - \wp(u)) = 0.$$

La función h es elíptica y tiene un único polo triple en $[0]$. Por otra parte, se anula en u y, más aún, el cero es (al menos) doble. En efecto, si consideramos las series de Taylor alrededor de u de las funciones $\wp(z) - \wp(u)$ y $\wp'(z) - \wp'(u)$ obtenemos que

$$h(z) = \wp'(u) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\wp^{(n+1)}(u)}{n!} (z - u)^n - \wp''(u) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\wp^{(n)}(u)}{n!} (z - u)^n$$

y vemos que el coeficiente de $(z - u)$ es nulo. Por consiguiente, el teorema 5.19 nos da que h tiene un tercer cero w tal que $2[u] + [w] = 0$. No excluimos que pueda ser $[w] = [u]$, pero, en cualquier caso es $[w] = [-2u]$ y el tercer punto de la intersección de V con la recta tangente (sea o no igual al punto $A = B$) es C .

Con esto hemos probado una implicación, pero el recíproco es trivial: si A, B, C son los tres puntos donde una recta proyectiva corta a V , entonces dicha recta es la única recta que pasa por A y B (entendiendo que es la recta tangente si $A = B$), y hemos probado que el tercer punto por el que pasa es $-A - B$, luego tiene que ser $C = -A - B$, luego $A + B + C = 0$. ■

De la prueba del teorema anterior se deducen unas relaciones de la función de Weierstrass que conviene destacar:

Teorema 5.34 (Teorema de adición) Sea $R \subset \mathbb{C}$ un retículo completo y sean $u, v \in \mathbb{C}$ tales que $u, v, u \pm v \notin R$. Entonces

$$\wp(u+v) = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} \right)^2 - \wp(u) - \wp(v).$$

Teorema 5.35 (Fórmula de duplicación) Sea $R \subset \mathbb{C}$ un retículo completo y sea $u \in \mathbb{C}$ tal que $u, 2u \notin R$. Entonces

$$\wp(2v) = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp''(v)}{\wp'(v)} \right)^2 - 2\wp(v).$$

DEMOSTRACIÓN: En las hipótesis del teorema de adición, tenemos que los puntos

$$(x_1, y_1) = (\wp(u), \wp'(u)), (x_2, y_2) = (\wp(v), \wp'(v)), (x_3, y_3) = (\wp(u+v), -\wp'(u+v))$$

están alineados. Notemos que $x_1 \neq x_2$, pues en caso contrario $[u] = \pm[v]$, en contra de lo supuesto. La ecuación de la recta que pasa por los dos primeros puntos es

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1).$$

Por el teorema anterior, los tres puntos (repetidos o no) son la intersección de V con esta recta. Más precisamente, los tres cumplen la ecuación

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

y los números x_1, x_2, x_3 (no necesariamente distintos) son las tres raíces de la ecuación polinómica

$$\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)^2 (x - x_1)^2 = 4x^3 - g_2x - g_3,$$

(cuya multiplicidad es por definición el índice de intersección de cada punto). Si pasamos todo a la derecha y dividimos entre 4 para que el coeficiente director sea 1, entonces el coeficiente de x^2 es

$$-x_1 - x_2 - x_3 = -\frac{1}{4} \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)^2,$$

que es precisamente la fórmula del enunciado.

La fórmula de duplicación puede demostrarse análogamente o bien puede deducirse como sigue del teorema de adición:

El desarrollo en serie de Taylor alrededor de v de \wp nos da que

$$\wp(u) = \wp(v) + \wp'(v)(u-v) + (u-v)^2 f(u),$$

luego

$$\frac{\wp(u) - \wp(v)}{u - v} = \wp'(v) + (u - v)f(u),$$

luego

$$\lim_{u \rightarrow v} \frac{\wp(u) - \wp(v)}{u - v} = \wp'(v).$$

Igualmente se razona con \wp' en lugar de \wp , por lo que basta tomar límites en la fórmula del teorema de adición. ■

El teorema de adición puede verse como el análogo para la función \wp de la fórmula para el seno de una suma en términos de los senos y los cosenos de los sumandos (el coseno es el análogo a \wp'), e igualmente, la fórmula de duplicación es el análogo a la fórmula del seno del ángulo doble. En el caso del seno, su segunda derivada vuelve a ser el seno (cambiado de signo) o, alternativamente, en la fórmula de duplicación podemos eliminar $\wp'' = 6\wp - g_2/2$.

Ejemplo Consideremos la curva elíptica V determinada por la ecuación

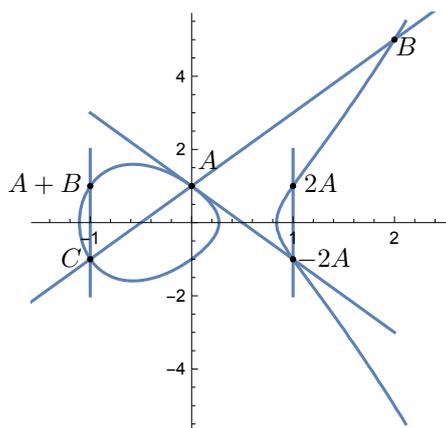
$$y^2 = 4x^3 - 4x + 1.$$

La figura muestra la gráfica de sus puntos reales. Es una sección transversal de un toro formada por dos "aros" homeomorfos a circunferencias. El de la derecha se ve abierto porque se cierra con el punto infinito, que obviamente no aparece representado. Entre los puntos de V se encuentran $A = (0, 1)$ y $B = (2, 5)$. Si los unimos por una recta y buscamos el tercer punto de intersección encontramos el punto

$$C = -A - B = (-1, -1),$$

por lo que $A + B = (-1, 1)$. Por otra parte, si trazamos la tangente a V por A encontramos el punto $-2A = (1, -1)$, luego $2A = (1, 1)$.

Todo esto presupone que V es la curva elíptica asociada a un retículo completo en \mathbb{C} , pues en otro caso no tenemos probado que las construcciones geométricas que estamos considerando determinen una estructura de grupo. No obstante, como ya hemos avanzado, en 6.18 demostraremos que todas las curvas elípticas están asociadas a retículos completos. ■



5.4 Las funciones sigma y dseta

Otra forma de llegar a las funciones de Weierstrass consiste en partir de una función que tenga ceros simples en todos los puntos de un retículo dado R . La forma natural de hacerlo es mediante un producto infinito.

El teorema 5.10 garantiza la convergencia (absoluta) de la serie

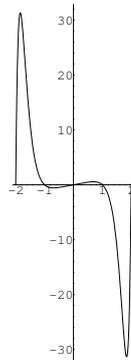
$$r^3 G_3 = \sum_{\omega \in R \setminus \{0\}} (r/\omega)^{2+1},$$

para todo $r > 0$, luego el teorema 4.6 afirma que, para conseguir una función con ceros simples en los puntos de R , nos basta tomar factores primarios de Weierstrass de orden 2:

Definición 5.36 La *función sigma de Weierstrass* asociada a un retículo complejo R es la función $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\sigma(z) = z \prod_{\omega \in R \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) e^{\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2}}.$$

Por el teorema 4.6 sabemos que el producto converge casi uniformemente en \mathbb{C} y que σ es una función entera con ceros simples en los puntos de R (y sólo en ellos).



Se trata de una función impar, pues $-\omega$ recorre $R \setminus \{0\}$ cuando ω lo hace, y claramente

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sigma(z)}{z} = 1,$$

lo que equivale a que $\sigma'(0) = 1$.

Todos estos hechos determinan una cierta analogía entre las funciones $\sigma(z)$ y $\sin z$. La función sigma no puede ser elíptica sobre R , pues tendría orden 1. La figura muestra la función sigma del retículo $\langle 1, i \rangle_{\mathbb{Z}}$. Presenta oscilaciones cuya amplitud crece muy rápidamente.

Para relacionar la función sigma con las funciones elípticas introducimos la *función dseta de Weierstrass*, definida por

$$\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}.$$

Se trata de una función impar meromorfa en \mathbb{C} con polos simples en los puntos de R . La convergencia absoluta del producto que define la función sigma equivale a la convergencia absoluta y casi uniforme de la serie

$$\log \frac{\sigma(z)}{z} = \sum_{\omega \in R \setminus \{0\}} \left(\log \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) + \frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2} \right),$$

la cual determina un logaritmo holomorfo de $\sigma(z)/z$ en un entorno de 0. El logaritmo que aparece en la serie es el que toma partes imaginarias en $]-\pi, \pi[$. Derivando queda

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} - \frac{1}{z} = \sum_{\omega \in R \setminus \{0\}} \left(\frac{-1/\omega}{1 - z/\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right),$$

luego

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\omega \in R \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right).$$

En principio tenemos probada esta igualdad en un entorno de 0, pero por el principio de prolongación analítica se cumple en todo \mathbb{C} , dado que la serie converge uniformemente en todo compacto que no contenga puntos de R . En efecto, el término general es $z^2/(z - \omega)\omega^2$, y basta compararlo con $1/\omega^3$.

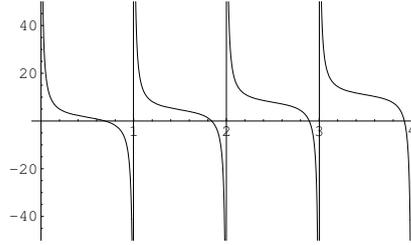
Vemos que ζ tiene residuo 1 en todos sus polos. Volviendo a derivar llegamos a que

$$\zeta'(z) = -\frac{1}{z^2} - \sum_{\omega \in R \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) = -\wp(z).$$

La periodicidad de \wp implica ahora que si $\omega \in R$ la función $\zeta(z + \omega) - \zeta(z)$ tiene derivada nula, luego existe una constante $2\eta_\omega \in \mathbb{C}$ tal que

$$\zeta(z + \omega) = \zeta(z) + 2\eta_\omega.$$

Es inmediato comprobar que $\eta : R \rightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo de grupos.



La figura muestra la función dseta del retículo $\langle 1, i \rangle_{\mathbb{Z}}$. Vemos cómo, en efecto, en cada “cuasiperiodo” se incrementa en una cierta cantidad.

En términos de la función sigma, la definición de η_ω es

$$\frac{\sigma'(z + \omega)}{\sigma(z + \omega)} - \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = 2\eta_\omega.$$

El miembro izquierdo es la derivada de la función $\log \frac{\sigma(z + \omega)}{\sigma(z)}$, luego existe $c_\omega \in \mathbb{C}$ tal que

$$\log \frac{\sigma(z + \omega)}{\sigma(z)} = 2\eta_\omega z + c_\omega,$$

luego

$$\sigma(z + \omega) = \sigma(z)e^{2\eta_\omega z + c_\omega}. \quad (5.5)$$

Para calcular la constante c_ω sustituimos $z = -\omega/2$ y usamos que σ es impar:

$$\sigma(\omega/2) = \sigma(-\omega/2)e^{-\omega\eta_\omega + c_\omega} = -\sigma(\omega/2)e^{-\omega\eta_\omega + c_\omega}.$$

Si suponemos que $\omega/2 \notin R$ (lo cual sucede, por ejemplo, cuando ω forma parte de una base de R), llegamos a que $e^{c\omega} = -e^{\omega\eta_\omega}$, luego

$$\sigma(z + \omega) = -\sigma(z)e^{\eta_\omega(2z + \omega)}. \quad (5.6)$$

Esto justifica el comportamiento observado en la gráfica de sigma.

De aquí deducimos un resultado notable:

Teorema 5.37 (Abel) *Sea R un retículo completo en \mathbb{C} y sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ dos listas de puntos de \mathbb{C}/R sin puntos en común, pero de modo que en cada una puede haber repeticiones. Entonces existe una función elíptica en R cuyos ceros sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ y cuyos polos sean β_1, \dots, β_n (con multiplicidades iguales al número de veces que cada punto aparece en su lista) si y sólo si $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \dots + \beta_n$.*

DEMOSTRACIÓN: La necesidad es el teorema 5.19. Si las listas cumplen la condición indicada y elegimos representantes en \mathbb{C} de cada una de las clases, sucederá que $\alpha_1 + \dots + \alpha_n - \beta_1 - \dots - \beta_n = \omega \in R$, pero podemos cambiar β_n por $\beta_n - \omega$ y así tenemos igualmente que $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \dots + \beta_n$, pero ahora como números complejos, no como clases en \mathbb{C}/R . Consideramos la función

$$f(z) = \frac{\sigma(z - \alpha_1) \cdots \sigma(z - \alpha_n)}{\sigma(z - \beta_1) \cdots \sigma(z - \beta_n)},$$

que ciertamente tiene los ceros y los polos requeridos. Sólo falta probar que es elíptica en R . Ahora bien, si $\omega \in R$, por (5.5) se cumple que

$$f(z + \omega) = f(z) \frac{e^{2\eta_\omega(z - \alpha_1) + c_\omega} \cdots e^{2\eta_\omega(z - \alpha_n) + c_\omega}}{e^{2\eta_\omega(z - \beta_1) + c_\omega} \cdots e^{2\eta_\omega(z - \beta_n) + c_\omega}} = f(z). \quad \blacksquare$$

Observemos que la función proporcionada por el teorema anterior es única salvo un factor constante. Esto implica que toda función elíptica puede ser descompuesta en factores enteros que separen sus ceros y sus polos:

Teorema 5.38 *Sea f una función elíptica no nula sobre un retículo R y sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ los ceros y los polos de f en \mathbb{C}/R (repetidos según su multiplicidad). Entonces existe una constante $c \in \mathbb{C}$ tal que*

$$f(z) = c \frac{\sigma(z - \alpha_1) \cdots \sigma(z - \alpha_n)}{\sigma(z - \beta_1) \cdots \sigma(z - \beta_n)},$$

donde los representantes de las clases de equivalencia se eligen de modo que $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \dots + \beta_n$ en \mathbb{C} .

DEMOSTRACIÓN: Si llamamos $\phi(z)$ al cociente del miembro derecho, en el teorema anterior hemos probado que es una función elíptica con los mismos ceros y polos que f , luego f/ϕ es una función elíptica sin ceros ni polos, luego es una constante c . \blacksquare

No podemos aplicar este teorema a la función \wp porque no tenemos ninguna expresión para sus ceros. No obstante, podemos decir lo siguiente:

Teorema 5.39 Sea R un retículo completo en \mathbb{C} y $w \in \mathbb{C} \setminus R$. Entonces

$$\wp(z) - \wp(w) = -\frac{\sigma(z+w)\sigma(z-w)}{\sigma^2(z)\sigma^2(w)}.$$

DEMOSTRACIÓN: La función $\wp(z) - \wp(w)$ tiene un polo doble en 0 y ceros en los puntos $-w$ y w . Notemos que si w y $-w$ son congruentes módulo R se trata del mismo cero, pero el carácter impar de \wp' implica entonces que es un cero doble. La prueba del teorema anterior muestra entonces que la función

$$\phi(z) = \frac{\sigma(z+w)\sigma(z-w)}{\sigma^2(z)}$$

es elíptica sobre R y tiene los mismos ceros y polos de $\wp(z) - \wp(w)$. Por consiguiente $\wp(z) - \wp(w) = c\phi(z)$. Basta probar que $c = -1/\sigma^2(w)$. En efecto,

$$z^2\wp(z) - z^2\wp(w) = c \frac{\sigma(z+w)\sigma(z-w)}{\sigma^2(z)/z^2}$$

y, tomando el límite cuando $z \rightarrow 0$, queda $1 = c\sigma(w)\sigma(-w) = -c\sigma^2(w)$. ■

Si calculamos la derivada logarítmica (respecto de z) en ambos miembros de la fórmula del teorema anterior, obtenemos

$$\frac{\wp'(z)}{\wp(z) - \wp(w)} = \zeta(z+w) + \zeta(z-w) - 2\zeta(z).$$

Intercambiando z y w obtenemos:

$$\frac{\wp'(w)}{\wp(w) - \wp(z)} = \zeta(z+w) + \zeta(w-z) - 2\zeta(w),$$

y al sumar ambas igualdades (teniendo en cuenta que ζ es impar) resulta:

$$\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)} = 2\zeta(z+w) - 2\zeta(z) - 2\zeta(w).$$

Equivalentemente:

$$\zeta(z+w) = \zeta(z) + \zeta(w) + \frac{1}{2} \frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}.$$

Tenemos así una función que calcula la función dseta de una suma en términos de los dos sumandos por separado y de las derivadas sucesivas de la función dseta.

Volvamos al teorema 5.39. Si $R = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ y llamamos $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, tenemos que

$$\wp(z) - e_i = -\frac{\sigma(z + \omega_i/2)\sigma(z - \omega_i/2)}{\sigma^2(z)\sigma^2(\omega_i/2)}.$$

Ahora bien,

$$\sigma(z + \omega_i/2) = \sigma(z - \omega_i/2 + \omega_i) = -\sigma(z - \omega_i/2)e^{2\eta_i z},$$

luego

$$\wp(z) - e_i = e^{-2\eta_i z} \frac{\sigma(z + \omega_i/2)^2}{\sigma^2(z)\sigma^2(\omega_i/2)}.$$

Esto nos permite definir

$$\sqrt{\wp(z) - e_i} = e^{-\eta_i z} \frac{\sigma(z + \omega_i/2)}{\sigma(z)\sigma(\omega_i/2)}.$$

Ahora conviene introducir más notación:

Definición 5.40 Si $R = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ es un retículo completo y $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, definimos

$$\sigma_i(z) = e^{-\eta_i z} \frac{\sigma(z + \omega_i/2)}{\sigma(\omega_i/2)}.$$

Tenemos así tres funciones enteras con ceros simples en los puntos de $\omega_i/2 + R$ y tales que

$$\sqrt{\wp(z) - e_i} = \frac{\sigma_i(z)}{\sigma(z)}. \quad (5.7)$$

La ecuación diferencial de \wp nos da que

$$\wp'(z)^2 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3) = 4 \frac{\sigma_1^2(z)\sigma_2^2(z)\sigma_3^2(z)}{\sigma^6(z)},$$

luego

$$\wp'(z) = \pm 2 \frac{\sigma_1(z)\sigma_2(z)\sigma_3(z)}{\sigma^3(z)}.$$

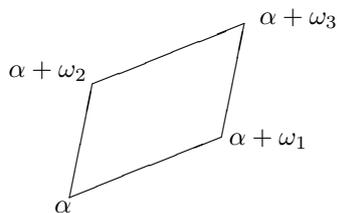
Para calcular el signo multiplicamos por z^3 y tomamos límites cuando $z \rightarrow 0$. El miembro izquierdo tiende a -2 y el derecho a ± 2 , luego el signo es negativo y llegamos a una factorización de \wp' :

$$\wp'(z) = -2 \frac{\sigma_1(z)\sigma_2(z)\sigma_3(z)}{\sigma^3(z)}. \quad (5.8)$$

Ahora necesitamos el resultado siguiente:

Teorema 5.41 (Relación de Legendre) Sea $R = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ un retículo completo en \mathbb{C} y sean $\eta_i = \eta_{\omega_i}$. Si $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$, entonces

$$\omega_2\eta_1 - \omega_1\eta_2 = \pi i.$$



DEMOSTRACIÓN: Llamemos $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ y $\alpha = -\omega_3/2$. Integramos la función ζ sobre la frontera del paralelogramo¹⁰ indicado en la figura. En su interior, la función ζ tiene un único polo en 0 con residuo 1, luego la integral vale $\pm 2\pi i$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} \zeta(\xi) d\xi + \int_{\alpha+\omega_3}^{\alpha+\omega_2} \zeta(\xi) d\xi = \\ & \int_0^1 (\zeta(\alpha + t\omega_1)\omega_1 - \zeta(\alpha + \omega_2 + t\omega_1)\omega_1) dt = \int_0^1 -2\eta_2\omega_1 dt = -2\eta_2\omega_1; \\ & \int_{\alpha+\omega_1}^{\alpha+\omega_3} \zeta(\xi) d\xi + \int_{\alpha+\omega_2}^{\alpha} \zeta(\xi) d\xi = \\ & \int_0^1 (\zeta(\alpha + \omega_1 + t\omega_2)2\omega_2 - \zeta(\alpha + t\omega_2)\omega_2) dt = \int_0^1 2\eta_1\omega_2 dt = 2\eta_1\omega_2. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $2\eta_1\omega_2 - 2\eta_2\omega_1 = 2\pi i$. ■

Con esto podemos particularizar (5.6) al caso de las funciones σ_i :

$$\begin{aligned} \sigma_i(z + \omega_j) &= e^{-\eta_i(z+\omega_j)} \frac{\sigma(z + \omega_i/2 + \omega_j)}{\sigma(\omega_i/2)} \\ &= -e^{-\eta_i(z+\omega_j) + \eta_j(2z + \omega_i + \omega_j)} \frac{\sigma(z + \omega_i/2)}{\sigma(\omega_i/2)} \\ &= -e^{-\eta_i\omega_j + 2\eta_j z + \eta_j\omega_i + \eta_j\omega_j} \sigma_i(z) = -e^{\eta_j(2z + \omega_j) + \eta_j\omega_i - \eta_i\omega_j} \sigma_i(z). \end{aligned}$$

Si $i \neq j$ tenemos que $\eta_j\omega_i - \eta_i\omega_j = \pm\pi i$, por lo que

$$\sigma_i(z + \omega_j) = e^{\eta_j(2z + \omega_j)} \sigma_i(z).$$

Si $i = j$ queda

$$\sigma_i(z + \omega_i) = -e^{\eta_i(2z + \omega_i)} \sigma_i(z).$$

Conviene observar también que, mientras que σ es impar, las funciones σ_i son pares. En efecto,

$$\begin{aligned} \sigma_i(-z) &= e^{\eta_i z} \frac{\sigma(-z + \omega_i/2)}{\sigma(\omega_i/2)} = e^{\eta_i z} \frac{-\sigma(z - \omega_i/2)}{\sigma(\omega_i/2)} \\ &= e^{\eta_i z} \frac{\sigma(z + \omega_i/2)e^{-z\eta_i}}{\sigma(\omega_i/2)} = e^{-\eta_i z} \frac{\sigma(z + \omega_i/2)}{\sigma(\omega_i/2)} = \sigma_i(z). \end{aligned}$$

¹⁰Si $\omega_1 = a + bi$, $\omega_2 = c + di$, la condición $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$ equivale a que $ad - bc > 0$, es decir, a que ω_1, ω_2 sea una base orientada de \mathbb{C} como \mathbb{R} -espacio vectorial. A su vez, esto equivale a que al recorrer el paralelogramo en la forma $\alpha \rightarrow \alpha + \omega_1 \rightarrow \alpha + \omega_3 \rightarrow \alpha + \omega_2 \rightarrow \alpha$ el sentido de giro es positivo, por lo que el índice de los puntos interiores vale 1.

5.5 Las funciones zeta de Jacobi

Hasta aquí hemos presentado la teoría básica sobre funciones elípticas siguiendo esencialmente el enfoque adoptado por Weierstrass. Sin embargo, Jacobi adoptó un enfoque formalmente muy distinto que también conviene conocer. Concretamente, se basó en el estudio de una función que no es elíptica, pero que representa el mismo papel en la teoría que la función σ de Weierstrass que acabamos de estudiar. Se trata de la función siguiente, definida en $\mathbb{C} \times D(0, 1)$:

$$\theta(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2n\pi iz}.$$

Teorema 5.42 *La serie anterior converge absoluta y casi uniformemente en $\mathbb{C} \times D(0, 1)$ a una función holomorfa.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que la serie converge absoluta y casi uniformemente, pues, como los sumandos $q^{n^2} e^{2n\pi iz}$ son obviamente holomorfos en $\mathbb{C} \times D(0, 1)$, el teorema de Weierstrass implica que θ también lo es.

Sea $K \subset \mathbb{C} \times D(0, 1)$ un conjunto compacto. Entonces existen $k > 0$, $0 < r < 1$ tales que si $(z, q) \in K$, se cumple que $|z| \leq k$, $|q| \leq r$. Por consiguiente, si $z = x + yi$,

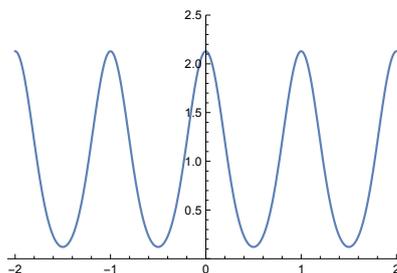
$$|q^{n^2} e^{2n\pi iz}| = |q|^{n^2} e^{-2n\pi y} \leq r^{n^2} e^{2n\pi k}.$$

Para todo n suficientemente grande, se cumple que $2^n r^{n^2} e^{2n\pi k} < 1$. Para comprobarlo basta tomar logaritmos y tener en cuenta que $\log r < 0$. Por consiguiente, la serie definida por $|q^{n^2} e^{2n\pi iz}|$ está mayorada por la serie geométrica definida por $1/2^n$, luego el teorema de mayoración de Weierstrass nos da la convergencia absoluta y uniforme en K . ■

Hay una expresión alternativa de interés para la función zeta:

$$\begin{aligned} \theta(z, q) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} e^{2n\pi iz} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} e^{-2n\pi iz} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} (e^{2n\pi zi} + e^{-2n\pi zi}) \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2n\pi z. \end{aligned}$$

A menudo conviene pensar en $\theta(z, q)$ como una función holomorfa en \mathbb{C} con $q \in D(0, 1)$ como parámetro. Observemos que la expresión trigonométrica de la función zeta muestra que si $z, q \in \mathbb{R}$, entonces $\theta(z, q) \in \mathbb{R}$, por lo que podemos representar gráficamente la restricción a \mathbb{R} de las funciones con parámetro real. Por ejemplo, ésta es la gráfica de $\theta(z, 0.5)$:



Vemos que tiene período 1, es decir, que $\theta(z+1, q) = \theta(z, q)$. Esto es válido para todo $(z, q) \in \mathbb{C} \times D(0, 1)$, como se sigue inmediatamente de la definición.¹¹ Otro hecho general que se sigue de la expresión trigonométrica y que se constata en la gráfica es que la función zeta es par, es decir, que $\theta(-z, q) = \theta(z, q)$.

Llamemos $H = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im } \tau > 0\}$ y consideremos $q : H \rightarrow D(0, 1) \setminus \{0\}$ dada por

$$q(\tau) = e^{\pi i \tau} = e^{-v}(\cos \pi u + i \operatorname{sen} \pi u).$$

Con ella podemos definir la función holomorfa $\theta : \mathbb{C} \times H \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\theta(z, \tau) = \theta(z, q(\tau)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i(n^2 \tau + 2nz)}.$$

Nota Ahora una expresión como $\theta(5, 0.5i)$ es ambigua, pues no queda claro si es $q = 0.5i$ o bien $\tau = 0.5i$. Para evitar esta ambigüedad convenimos en que consideraremos siempre a θ como función de (z, τ) salvo que expresamente se indique lo contrario, de modo que q no representará una variable independiente, sino a la función $q(\tau)$. ■

El interés de expresar el parámetro en términos de τ en lugar de q es que así la función zeta cumple una relación adicional:

$$\begin{aligned} \theta(z + \tau, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i(n^2 \tau + 2nz + 2n\tau)} = e^{-\pi i \tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i((n+1)^2 \tau + 2nz)} \\ &= q^{-1} e^{-2\pi iz} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i(n^2 \tau + 2nz)} = q^{-1} e^{-2\pi iz} \theta(z, \tau). \end{aligned}$$

Así pues, τ es lo que se llama un *cuasiperíodo* de θ (como función de z), en el sentido de que al sumar τ a su variable no se obtiene exactamente $\theta(z, \tau)$, en cuyo caso tendríamos un período, sino $\theta(z, \tau)$ multiplicada por una función holomorfa de z y τ que no se anula en ningún punto.

Nota Esta relación es similar a la relación (5.5) que satisface la función sigma de Weierstrass. Existe una definición abstracta de “función zeta” que hace que tanto θ como σ sean funciones zeta precisamente por satisfacer relaciones de este tipo. ■

¹¹Jacobi no incluyó la constante π en la definición de la función θ , por lo que la que él consideró tenía en realidad período π . Algunos autores siguen ese mismo criterio, por lo que hay que prestar atención a la hora de comparar fórmulas de textos diferentes.

Ahora obtendremos otras funciones zeta a partir de la que hemos definido de forma similar a como hemos definido las funciones σ_i a partir de σ . Para entender la situación realizamos algunos cálculos¹²:

$$\begin{aligned}
\theta\left(z + \frac{1}{2}, \tau\right) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos(2n\pi z + n\pi) \\
&= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2n\pi z, \\
\theta\left(z + \frac{\tau}{2}, \tau\right) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i(n^2\tau + 2nz + n\tau)} = e^{-i\pi\tau/4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i((n+1/2)^2\tau + 2nz)} \\
&= e^{-i\pi(\tau/4+z)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i((n+1/2)^2\tau + (2n+1)z)} \\
&= q^{-1/4} e^{-\pi iz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{\pi i((n+1/2)^2\tau + (2n+1)z)} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{\pi i((-n+1/2)^2\tau + (-2n+1)z)} \right) \\
&= q^{-1/4} e^{-\pi iz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{\pi i((n+1/2)^2\tau + (2n+1)z)} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{\pi i((-n-1/2)^2\tau + (-2n-1)z)} \right) \\
&= q^{-1/4} e^{-\pi iz} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} (e^{\pi i(2n+1)z} + e^{-\pi i(2n+1)z}) \\
&= q^{-1/4} e^{-\pi iz} \sum_{n=0}^{\infty} 2q^{(n+1/2)^2} \cos((2n+1)\pi z), \\
\theta\left(z + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}, \tau\right) &= 2q^{-1/4} e^{-\pi iz - \pi i/2} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} \cos((2n+1)\pi z + (2n+1)\pi/2) \\
&= -q^{-1/4} e^{-\pi iz - \pi i/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2q^{(n+1/2)^2} \operatorname{sen}((2n+1)\pi z) \\
&= -q^{-1/4} e^{-\pi i(z+1/2)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2q^{(n+1/2)^2} \operatorname{sen}((2n+1)\pi z).
\end{aligned}$$

Vemos así que al hacer estos cambios de variable obtenemos series trigonométricas similares a la que define a θ , multiplicadas por exponenciales. Eliminando las exponenciales obtenemos las tres funciones zeta adicionales que vamos a considerar.

¹²En los cálculos usamos la notación $q^{-1/4}$. Las expresiones de este tipo serían ambiguas si se aplicaran a un $q \in \mathbb{C}$ arbitrario, pero debemos recordar que $q = e^{\pi i\tau}$, por lo que, en general, q^α debe entenderse como $e^{\pi i\tau\alpha}$.

Definición 5.43 Las funciones zeta de Jacobi son las funciones

$$\begin{aligned}\theta_1(z, \tau) &= -q^{1/4} e^{i\pi(z+1/2)} \theta(z + \frac{1+\tau}{2}, \tau) = q^{1/4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2q^{n(n+1)} \operatorname{sen}((2n+1)\pi z), \\ \theta_2(z, \tau) &= q^{1/4} e^{i\pi z} \theta(z + \frac{\tau}{2}, \tau) = q^{1/4} \sum_{n=0}^{\infty} 2q^{n(n+1)} \cos((2n+1)\pi z), \\ \theta_3(z, \tau) &= \theta(z, \tau) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2q^{n^2} \cos 2n\pi z, \\ \theta_4(z, \tau) &= \theta(z + \frac{1}{2}, \tau) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2q^{n^2} \cos 2n\pi z.\end{aligned}$$

Por su definición a partir de θ es inmediato que las cuatro funciones son holomorfas en $\mathbb{C} \times H$, así como que las series que las definen convergen absoluta y casi uniformemente.

También es interesante observar que las cuatro admiten definiciones alternativas mediante series de exponenciales:

$$\begin{aligned}\theta_1(z, \tau) &= q^{1/4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n(n+1)} e^{(2n+1)\pi iz}, \\ \theta_2(z, \tau) &= q^{1/4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n(n+1)} e^{(2n+1)\pi iz}, \\ \theta_3(z, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2n\pi iz}, \\ \theta_4(z, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2n\pi iz}.\end{aligned}$$

Un cálculo rutinario muestra que si sumamos 1 o τ al primer argumento de cualquiera de las funciones zeta, la función se multiplica por el factor que indica la tabla siguiente:

$$\begin{array}{c|cccc} & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ \tau & -N & N & N & -N \end{array} \quad N = q^{-1} e^{-2\pi iz}.$$

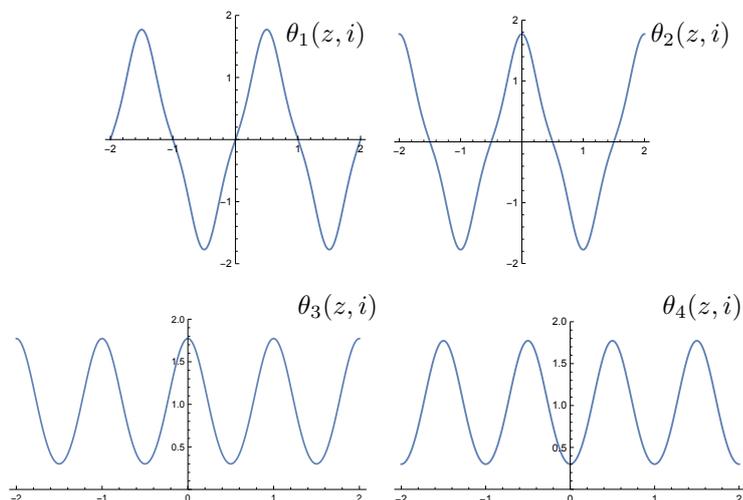
De las primeras igualdades de cada fila de la definición 5.43 se siguen inmediatamente las relaciones

$$\begin{aligned}\theta_1(z + \frac{1}{2}, \tau) &= \theta_2(z, \tau), & \theta_2(z + \frac{1}{2}, \tau) &= -\theta_1(z, \tau), \\ \theta_3(z + \frac{1}{2}, \tau) &= \theta_4(z, \tau), & \theta_4(z + \frac{1}{2}, \tau) &= \theta_3(z, \tau).\end{aligned}$$

Un poco más laborioso es comprobar que

$$\begin{aligned}\theta_1(z + \frac{\tau}{2}, \tau) &= iq^{-1/4} e^{-\pi iz} \theta_4(z, \tau), & \theta_2(z + \frac{\tau}{2}, \tau) &= q^{-1/4} e^{-\pi iz} \theta_3(z, \tau), \\ \theta_3(z + \frac{\tau}{2}, \tau) &= q^{-1/4} e^{-\pi iz} \theta_2(z, \tau), & \theta_4(z + \frac{\tau}{2}, \tau) &= iq^{-1/4} e^{-\pi iz} \theta_1(z, \tau).\end{aligned}$$

Las series trigonométricas muestran que θ_1 es impar y las otras tres son pares (como funciones de z). También es claro que cuando τ es imaginario puro, las cuatro funciones toman valores reales sobre los números reales. He aquí sus gráficas para $\tau = i$:



Observamos la paridad, la periodicidad y el hecho de que θ_1 y θ_2 , al igual que θ_3 y θ_4 , tienen un desfase de $1/2$.

Podemos considerar que las expresiones (tanto con exponenciales como con funciones trigonométricas) que determinan las funciones zeta en términos de z y q definen, de hecho, funciones en $\mathbb{C} \times D(0, 1)$, salvo por el hecho de que $q^{1/4}$ no está entonces bien definido. No obstante, para todo par $(z, q) \in \mathbb{C} \times D(0, 1)$, podemos definir las funciones

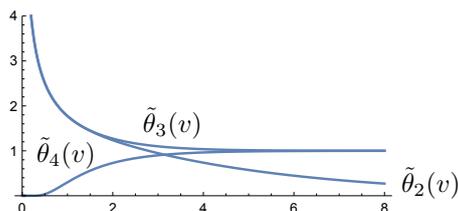
$$\begin{aligned} \theta_1(z, q)q^{-1/4} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n(n+1)} e^{(2n+1)\pi iz} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2q^{n(n+1)} \operatorname{sen}((2n+1)\pi z), \\ \theta_2(z, q)q^{-1/4} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n(n+1)} e^{(2n+1)\pi iz} = \sum_{n=0}^{\infty} 2q^{n(n+1)} \cos((2n+1)\pi z), \\ \theta_3(z, q) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2n\pi iz} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2n\pi z, \\ \theta_4(z, q) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2n\pi iz} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2n\pi z. \end{aligned}$$

Aquí hay que entender que, por ejemplo, $\theta_1(z, q)q^{-1/4}$ es el nombre que estamos dando a una función, no el producto de dos funciones. La convergencia absoluta y casi uniforme de estas series se prueba análogamente a como hemos probado la de $\theta_3(z, q)$. Mantenemos el convenio de entender que las variables de las funciones de Jacobi serán siempre (z, τ) salvo que se indique lo contrario, pero el poder considerarlas como funciones de q tiene la ventaja de que permiten calcular su valor cuando $q = 0$, mientras que este valor del parámetro no se corresponde con ningún valor de τ . Concretamente, para $q = 0$, las cuatro

funciones se reducen, respectivamente, a

$$2 \operatorname{sen}(\pi z), \quad 2 \operatorname{cos}(\pi z), \quad 1, \quad 1. \quad (5.9)$$

Por ejemplo, esto es relevante si consideramos las funciones $\theta_j(\tau) = \theta_j(0, \tau)$. Si $\tau = iv$ es imaginario puro, entonces $q(\tau) = e^{-\pi v}$ es real, luego las funciones $\tilde{\theta}_j(v) = \theta_j(iv)$ toman valores reales en $]0, +\infty[$. La figura siguiente muestra las gráficas de las funciones $\tilde{\theta}_j(v)$ (notemos que $\tilde{\theta}_1(v)$ es idénticamente nula):



El hecho de que, como se aprecia en la gráfica, $\tilde{\theta}_3(v)$ y $\tilde{\theta}_4(v)$ tiendan a 1 cuando $v \rightarrow +\infty$ (con lo que $q \rightarrow 0$) es un reflejo de que $\theta_3(0, 0) = \theta_4(0, 0) = 1$, mientras que

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \theta_2(0, iv) e^{\pi v/4} = 2,$$

luego

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \theta_2(0, iv) = 2 \lim_{v \rightarrow +\infty} e^{-\pi v/4} = 0,$$

como también se aprecia en la gráfica.

Una ecuación en derivadas parciales Observemos que

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} \operatorname{sen}(2n\pi z) 2n\pi, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = -8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} \operatorname{cos}(2n\pi z) n^2,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} \pi i n^2 \operatorname{cos} 2n\pi z.$$

luego

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{4i}{\pi} \frac{\partial \theta}{\partial \tau}.$$

Igualmente se comprueba que las cuatro funciones θ_j cumplen esta misma ecuación en derivadas parciales. ■

Los ceros de las funciones zeta Una primera muestra elemental del interés de haber introducido los cambios de variable que dan lugar a las funciones zeta a partir de θ_3 es que, por ejemplo, la expresión trigonométrica de θ_1 muestra claramente que $\theta_1(0, \tau) = 0$, y a partir de ahí encontramos ceros para las demás funciones zeta. Concretamente:

$$\theta_1(0) = \theta_2(1/2, 0) = \theta_3\left(\frac{\tau+1}{2}, \tau\right) = \theta_4(\tau/2, \tau) = 0.$$

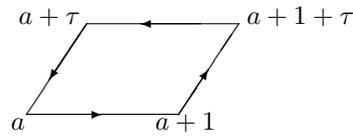
El hecho de que $\theta(z, \tau)$ tenga periodo 1 y cuasiperiodo τ implica claramente que si $\theta(\alpha, \tau) = 0$, también $\theta(\alpha + m + n\tau, \tau) = 0$, para todo $m, n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, todas las funciones θ tienen infinitos ceros. Ahora vamos a probar que no tienen más que los que ya conocemos.

Teorema 5.44 *Los ceros de las funciones zeta de Jacobi son exactamente los de la forma $\alpha + m + n\tau$, para $m, n \in \mathbb{Z}$, donde α es el dado por la tabla siguiente:*

θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1+\tau}{2}$

Todos ellos son ceros simples.

DEMOSTRACIÓN: Sea $a \in \mathbb{C}$ y consideremos el arco cerrado γ_a que se indica en la figura. Elegimos a de modo que el arco no pase por ningún cero de θ . Por el teorema 3.10, la función $\theta'(z, \tau)/\theta(z, \tau)$ tiene polos simples en los ceros de θ , con residuo igual a la multiplicidad del cero. Calculamos



$$\int_{\gamma_a} \frac{\theta'(\zeta, \tau)}{\theta(\zeta, \tau)} d\zeta = -\tau \int_0^1 \frac{\theta'(a+t\tau, \tau)}{\theta(a+t\tau, \tau)} dt + \tau \int_0^1 \frac{\theta'(a+1+t\tau, \tau)}{\theta(a+1+t\tau, \tau)} dt + \int_0^1 \frac{\theta'(a+t, \tau)}{\theta(a+t, \tau)} dt - \int_0^1 \frac{\theta'(a+\tau+t, \tau)}{\theta(a+\tau+t, \tau)} dt.$$

Derivando la relación $\theta(z+1, \tau) = \theta(z, \tau)$ vemos que $\theta'(z+1, \tau) = \theta'(z, \tau)$, por lo que las dos primeras integrales se cancelan. Derivando la relación

$$\theta(z+\tau, \tau) = e^{-\pi i(\tau+2z)}\theta(z, \tau)$$

obtenemos que

$$\frac{\theta'(z+\tau, \tau)}{\theta(z+\tau, \tau)} = -2\pi i + \frac{\theta'(z, \tau)}{\theta(z, \tau)},$$

por lo que

$$\int_{\gamma_a} \frac{\theta'(\zeta, \tau)}{\theta(\zeta, \tau)} d\zeta = \int_0^1 2\pi i dt = 2\pi i.$$

Por el teorema de los residuos, esta integral es también $2\pi i$ por la suma de los órdenes de todos los ceros de θ contenidos en el paralelogramo rodeado por γ_a . Concluimos, pues, que hay un único cero simple en dicho paralelogramo.

Ahora podemos probar que los únicos ceros de la función θ son los de la forma $\frac{\tau+1}{2} + m + n\tau$, y que todos son simples.

En efecto, consideramos el arco γ_0 , que tiene en su interior al cero $(\tau+1)/2$. Si θ tuviera otro cero que no fuera de esta forma, podríamos expresarlo como $\alpha = u + v\tau$, y tomando las partes fraccionarias de u y v podríamos pasar a otro cero con $0 \leq u, v < 1$, pero distinto de $(\tau+1)/2$. Si fuera $u = 0$ o $v = 0$,

podríamos tomar un a próximo a 0 tal que tanto α como $(\tau + 1)/2$ estuvieran en el interior de γ_a y éste no pasara por ningún cero de θ , en contradicción con lo que hemos probado.

Además, cada cero de θ está en el interior de un arco γ_a , por lo que todos son simples. Esto prueba el teorema para θ_3 , y ahora, de la propia definición de las demás funciones zeta, se obtiene que es válido para todas ellas. ■

Tenemos así otro punto en común entre las funciones zeta y las funciones σ, σ_i del retículo $R = \langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}}$: tanto θ_1 como σ tienen sus ceros en los puntos de R , y todos ellos son simples. Lo mismo puede decirse de θ_2 y $\sigma(z - 1/2)$, etc.

Ahora que conocemos los ceros de las funciones zeta podemos usarlas para construir funciones elípticas igual que con la función σ , es decir, formando cocientes para que los cuasiperiodos se vuelvan periodos al cancelarse los factores que introducen. El teorema siguiente muestra algunos ejemplos de esta técnica:

Teorema 5.45 *Las funciones zeta de Jacobi satisfacen las relaciones*

$$\begin{aligned}\theta_3^2(\tau)\theta_2^2(z, \tau) + \theta_4^2(\tau)\theta_1^2(z, \tau) &= \theta_2^2(\tau)\theta_3^2(z, \tau), \\ \theta_3^2(\tau)\theta_1^2(z, \tau) + \theta_4^2(\tau)\theta_2^2(z, \tau) &= \theta_2^2(\tau)\theta_4^2(z, \tau), \\ \theta_2^2(\tau)\theta_2^2(z, \tau) + \theta_4^2(\tau)\theta_4^2(z, \tau) &= \theta_3^2(\tau)\theta_3^2(z, \tau), \\ \theta_2^2(\tau)\theta_1^2(z, \tau) + \theta_4^2(\tau)\theta_3^2(z, \tau) &= \theta_3^2(\tau)\theta_4^2(z, \tau),\end{aligned}$$

donde $\theta_j(\tau) = \theta_j(0, \tau)$. En particular, la tercera ecuación para $z = 0$ se reduce a

$$\theta_2^4(\tau) + \theta_4^4(\tau) = \theta_3^4(\tau).$$

DEMOSTRACIÓN: La función

$$f(z) = \frac{\theta_2^2(\tau)\theta_3^2(z, \tau) - \theta_3^2(\tau)\theta_2^2(z, \tau)}{\theta_4^2(\tau)\theta_1^2(z, \tau)}$$

es claramente elíptica sobre $R = \langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}}$ (porque 1 y τ son cuasiperiodos de todas las funciones, con factor ± 1 y $\pm N$, respectivamente, luego los cambios $z \mapsto z + 1$ y $z \mapsto z + \tau$ multiplican numerador y denominador por 1 o N^2 , respectivamente). El numerador es entero, luego f sólo puede tener polos donde se anula el denominador, es decir, en los puntos de R , donde los ceros son dobles, pero también es inmediato que el numerador se anula en dichos puntos, luego los polos son a lo sumo simples, y como no hay funciones elípticas de orden 1, la función f tiene que ser constante. Ahora bien, es inmediato que $f(1/2) = 1$, lo que prueba la primera igualdad del enunciado.

Sustituyendo $z \mapsto z + 1/2$ en la primera igualdad obtenemos la segunda, y si en las dos primeras igualdades sustituimos $z \mapsto z + \tau/2$ obtenemos las dos siguientes. ■

Desarrollos en producto infinito Las funciones zeta son funciones enteras de las que conocemos sus ceros, lo que nos permite a su vez determinar sus desarrollos en producto infinito.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} q^{2n-1} e^{\pm 2\pi iz}$ converge absoluta y casi uniformemente en \mathbb{C} , pues en un compacto $|q^{2n-1} e^{\pm 2\pi iz}| \leq K q^{2n-1}$, y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} q^{2n-1}$ converge absolutamente por ser una subserie de una serie geométrica. Según el teorema 4.3,

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1} e^{2\pi iz}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1} e^{-2\pi iz}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n-1} \cos 2\pi z + q^{4n-2})$$

es una función entera, cuyos ceros (todos simples) son los puntos que cumplen

$$e^{(2n-1)\pi i\tau \pm 2\pi iz} = 1,$$

lo que equivale a que $(2n-1)\pi i\tau \pm 2\pi iz = 2m\pi i$, o también a que

$$z = \tau/2 + m + n\tau$$

con $m, n \in \mathbb{Z}$.

Así pues, los ceros de f son los mismos que los de θ_4 . La segunda expresión de f muestra que $f(z+1) = f(z)$, mientras que

$$\begin{aligned} f(z+\tau) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1} e^{2\pi i\tau} e^{2\pi iz}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1} e^{-2\pi i\tau} e^{-2\pi iz}) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n+1} e^{2\pi iz}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-3} e^{-2\pi iz}) \\ &= \prod_{n=2}^{\infty} (1 - q^{2n-1} e^{2\pi iz}) \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{2n-1} e^{-2\pi iz}) \\ &= f(z) \frac{1 - q^{-1} e^{-2\pi iz}}{1 - q e^{2\pi iz}} = -q^{-1} e^{-2\pi iz} f(z), \end{aligned}$$

y vemos que el factor que aparece es el mismo que para θ_4 . Por consiguiente, el cociente $f(z)/\theta_4(z, \tau)$ es una función elíptica sin ceros, luego es constante. Así pues, existe una constante $G \in \mathbb{C}$ tal que

$$\theta_4(z, \tau) = G \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n-1} \cos 2\pi z + q^{4n-2}).$$

Sustituyendo z por $z + 1/2$ queda

$$\begin{aligned} \theta_3(z, \tau) &= G \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n-1} \cos 2\pi z + q^{4n-2}) \\ &= G \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1} e^{2\pi iz})(1 + q^{2n-1} e^{-2\pi iz}). \end{aligned}$$

A su vez

$$\theta_2(z, \tau) = G q^{1/4} e^{i\pi z} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1} e^{2\pi iz + \pi i\tau})(1 + q^{2n-1} e^{-2\pi iz - \pi i\tau})$$

$$\begin{aligned}
&= Gq^{1/4}e^{i\pi z} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n}e^{2\pi iz}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-2}e^{-2\pi iz}) \\
&= Gq^{1/4}e^{i\pi z} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n}e^{2\pi iz}) \prod_{n=0}^{\infty} (1 + q^{2n}e^{-2\pi iz}) \\
&= Gq^{1/4}(1 + e^{-2\pi iz})e^{i\pi z} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n}e^{2\pi iz}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n}e^{-2\pi iz}) \\
&= Gq^{1/4}(e^{i\pi z} + e^{-\pi iz}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n} \cos 2\pi z + q^{4n}) \\
&= G2q^{1/4} \cos \pi z \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2q^{2n} \cos 2\pi z + q^{4n}).
\end{aligned}$$

Por último

$$\theta_1(z, \tau) = -\theta_2(z + 1/2, \tau) = G2q^{1/4} \sin \pi z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n} \cos 2\pi z + q^{4n}).$$

Nos falta calcular la constante, para lo cual necesitamos un resultado de interés en sí mismo, que podemos probar a partir de los desarrollos en producto, a pesar de que todavía no conocemos la constante:

Teorema 5.46 *Se cumple que*

$$\theta'_1(\tau) = \pi\theta_2(\tau)\theta_3(\tau)\theta_4(\tau).$$

DEMOSTRACIÓN: Un logaritmo de θ (en el abierto donde no se anula) viene dado por

$$\log \theta = \log G + \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + q^{2n-1}e^{2\pi iz}) + \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + q^{2n-1}e^{-2\pi iz}),$$

luego

$$\frac{\theta'(z, \tau)}{\theta(z, \tau)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi iq^{2n-1}e^{2\pi iz}}{1 + q^{2n-1}e^{2\pi iz}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi iq^{2n-1}e^{-2\pi iz}}{1 + q^{2n-1}e^{-2\pi iz}}.$$

De aquí se sigue que $\theta'(0, \tau) = 0$. Volviendo a derivar:

$$\begin{aligned}
\theta''(z, \tau) &= \theta'(z, \tau) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi iq^{2n-1}e^{2\pi iz}}{1 + q^{2n-1}e^{2\pi iz}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi iq^{2n-1}e^{-2\pi iz}}{1 + q^{2n-1}e^{-2\pi iz}} \right) \\
&+ \theta(z, \tau) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi i)^2 q^{2n-1}e^{2\pi iz}}{(1 + q^{2n-1}e^{2\pi iz})^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi i)^2 q^{2n-1}e^{-2\pi iz}}{(1 + q^{2n-1}e^{-2\pi iz})^2} \right)
\end{aligned}$$

y haciendo $z = 0$ queda

$$\theta''_3(0, \tau) = -8\pi^2\theta_3(0, \tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}}{(1 + q^{2n-1})^2}.$$

Igualmente se obtiene:

$$\begin{aligned}\theta'_4(0, \tau) &= 0, & \theta''_4(0, \tau) &= 8\pi^2\theta_4(0, \tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2} \\ \theta'_2(0, \tau) &= 0, & \theta''_2(0, \tau) &= \theta_2(0, \tau) \left(-\pi^2 - 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1+q^{2n}} \right).\end{aligned}$$

Con θ_1 debemos tener presente que $\theta_1(0, \tau) = 0$, pero podemos aplicar el mismo razonamiento a

$$\phi(z, \tau) = \frac{\theta_1(z, \tau)}{\operatorname{sen} \pi z} = G2q^{1/4} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}e^{2\pi zi})(1 - q^{2n}e^{-2\pi zi}),$$

con lo que obtenemos que

$$\phi'(0, \tau) = 0, \quad \phi''(0, \tau) = -8\pi^2\phi(0, \tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}.$$

Por otra parte, derivando la igualdad $\theta_1(z, \tau) = \operatorname{sen} \pi z \phi(z, \tau)$ obtenemos:

$$\theta'_1(0, \tau) = \pi\phi(0, \tau),$$

y derivando tres veces: $\theta'''_1(0, \tau) = -\pi^3\phi(0, \tau) + 3\pi\phi''(0, \tau)$. Por lo tanto

$$\frac{\theta'''_1(0, \tau)}{\theta'_1(0, \tau)} = -\pi^2 + 24\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}.$$

Ahora calculamos:

$$\begin{aligned}& \pi^2 + \frac{\theta''_2(0, \tau)}{\theta_2(0, \tau)} + \frac{\theta''_3(0, \tau)}{\theta_3(0, \tau)} + \frac{\theta''_4(0, \tau)}{\theta_4(0, \tau)} \\ &= -8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2} + 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2} - 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2} \\ &= -8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{(1+q^n)^2} + 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2} \\ &= -8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{(1+q^n)^2} + 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{(1-q^n)^2} - 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2} \\ &= 32\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2} - 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2} = 24\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2} \\ &= \pi^2 + \frac{\theta'''_1(0, \tau)}{\theta'_1(0, \tau)}.\end{aligned}$$

Así pues:

$$\frac{\theta_2''(0, \tau)}{\theta_2(0, \tau)} + \frac{\theta_3''(0, \tau)}{\theta_3(0, \tau)} + \frac{\theta_4''(0, \tau)}{\theta_4(0, \tau)} = \frac{\theta_1'''(0, \tau)}{\theta_1'(0, \tau)}.$$

Ahora usamos la ecuación en derivadas parciales que cumplen las funciones zeta:

$$\frac{1}{\theta_1'(0, \tau)} \frac{\partial \theta_1'(0, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\theta_2(0, \tau)} \frac{\partial \theta_2(0, \tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{\theta_3(0, \tau)} \frac{\partial \theta_3(0, \tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{\theta_4(0, \tau)} \frac{\partial \theta_4(0, \tau)}{\partial \tau}.$$

Tomando logaritmos de las funciones zeta (definidos en el abierto en el que no se anulan) tenemos que

$$\log \theta_1'(0, \tau) = k + \log \theta_2(\tau) + \log \theta_3(\tau) + \log \theta_4(\tau),$$

para cierta constante k (independiente de τ), pues la diferencia entre los dos miembros tiene derivada nula, luego es constante. Componiendo con la exponencial llegamos a que

$$\theta_1'(0, \tau) = C \theta_2(\tau) \theta_3(\tau) \theta_4(\tau).$$

Para calcular la constante, multiplicamos

$$q^{-1/4} \theta_1'(0, \tau) = C q^{-1/4} \theta_2(\tau) \theta_3(\tau) \theta_4(\tau).$$

Haciendo $\tau = iv$, hemos visto que el miembro derecho tiende a 2 cuando v tiende a $+\infty$. Si probamos que el miembro izquierdo tiende a 2π , concluiremos que $C = \pi$ y el teorema quedará probado.

Para ello consideramos a $q^{-1/4} \theta_1(z, q)$ como función de (z, q) y la derivamos respecto de z . El resultado es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2q^{n(n+1)} \cos((2n+1)\pi z) (2n+1)\pi.$$

Al sustituir en $z = 0$ queda

$$2\pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n(n+1)} (2n+1).$$

La serie converge en $D(0, 1)$, y en 0 vale 2π , luego, haciendo $q = e^{i\pi\tau} = e^{-v}$, también

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} e^{-v} \theta_1(iv) = 2\pi. \quad \blacksquare$$

Ahora ya podemos calcular la constante G :

$$\begin{aligned} \theta_1'(\tau) &= \pi \phi(0, \tau) = 2\pi G q^{1/4} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^2, \\ \theta_2(\tau) &= G 2q^{1/4} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n})^2, \quad \theta_3(\tau) = G \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1})^2, \\ \theta_4(\tau) &= G \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1})^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^2 &= G^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n})^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1})^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1})^2 \\ &= G^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n)^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1})^2 = \\ \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^4 &= G^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n)^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^2 = G^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^2,\end{aligned}$$

luego

$$G = \pm \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}).$$

Sustituyendo en el desarrollo en producto de θ_3 tenemos que

$$\theta_3(\tau) = \pm \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1})^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}).$$

Sabemos que el miembro izquierdo tiende a 1 cuando $\tau = iv$ tiende a infinito, pero $1 - q^n = 1 - (e^{-\pi v})^n > 0$, luego todos los factores del miembro derecho son positivos, luego el signo tiene que ser positivo. En suma:

$$G = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}).$$

Con esto hemos probado el teorema siguiente:

Teorema 5.47 *Se cumple:*

$$\begin{aligned}\theta_1(z, \tau) &= 2q^{1/4} \operatorname{sen} \pi z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - 2q^{2n} \cos 2\pi z + q^{4n}), \\ \theta_2(z, \tau) &= 2q^{1/4} \operatorname{cos} \pi z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + 2q^{2n} \cos 2\pi z + q^{4n}), \\ \theta_3(z, \tau) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + 2q^{2n-1} \cos 2\pi z + q^{4n-2}), \\ \theta_4(z, \tau) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - 2q^{2n-1} \cos 2\pi z + q^{4n-2}).\end{aligned}$$

Como aplicación de los resultados que hemos obtenido en este apartado demostramos un hecho que necesitaremos más adelante:

Teorema 5.48 *La aplicación $]0, +\infty[\rightarrow]0, 1[$ dada por $v \mapsto \theta_2(iv)/\theta_3(iv)$ es biyectiva (y decreciente).*

DEMOSTRACIÓN: Por las propias definiciones de las funciones zeta (por ejemplo, en forma trigonométrica), es claro que tanto el numerador como el denominador son números reales positivos. Por consiguiente, es equivalente

probar que $v \mapsto \theta_2^4(iv)/\theta_3^4(iv)$ es decreciente y biyectiva, o también, por el teorema 5.45, que la función

$$v \mapsto 1 - \frac{\theta_2^4(iv)}{\theta_3^4(iv)} = \frac{\theta_4^4(iv)}{\theta_3^4(iv)} = \left(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - q^{2n-1}}{1 + q^{2n-1}} \right)^8,$$

es creciente y biyectiva. A su vez, como $q = e^{-v}$ es una biyección decreciente $]0, +\infty[\rightarrow]0, 1[$, basta probar que

$$f(q) = \left(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - q^{2n-1}}{1 + q^{2n-1}} \right)^8,$$

es una biyección $]0, 1[\rightarrow]0, 1[$ decreciente. Por una parte, el teorema 4.1 nos da una expresión para la derivada del producto. Teniendo en cuenta que $f(q) > 0$ y que la derivada de cada factor es negativa, vemos que la derivada del producto es negativa, luego es una función positiva decreciente, y al elevarla a la octava potencia sigue siendo positiva y decreciente. Sabemos que

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{\theta_4(iv)}{\theta_3(iv)} = 1,$$

luego el límite cuando $q \rightarrow 0$ también es igual a 1, lo que prueba que la imagen de f está en $]0, 1[$. Por último, observamos que $f(q) \leq \frac{1-q}{1+q} \leq 1 - q$, por lo que $\lim_{q \rightarrow 1} f(q) = 0$ y la conclusión es inmediata. ■

La ecuación funcional He aquí otra propiedad notable de las funciones zeta:

Teorema 5.49 *Las funciones zeta de Jacobi satisfacen las ecuaciones funcionales siguientes:*

$$\begin{aligned} \theta_1(z/\tau, -1/\tau) &= -i\sqrt{-i\tau} e^{\pi iz^2/\tau} \theta_1(z, \tau), \\ \theta_2(z/\tau, -1/\tau) &= \sqrt{-i\tau} e^{\pi iz^2/\tau} \theta_4(z, \tau), \\ \theta_3(z/\tau, -1/\tau) &= \sqrt{-i\tau} e^{\pi iz^2/\tau} \theta_3(z, \tau), \\ \theta_4(z/\tau, -1/\tau) &= \sqrt{-i\tau} e^{\pi iz^2/\tau} \theta_2(z, \tau), \end{aligned}$$

donde $\sqrt{-i\tau}$ es la única raíz cuadrada que cumple $|\arg \sqrt{-i\tau}| < \pi/4$. En particular,

$$\theta(-1/\tau) = \sqrt{-i\tau} \theta(\tau)$$

y la función $\tilde{\theta}(v) = \theta(iv)$ cumple

$$\tilde{\theta}(1/v) = \sqrt{v} \tilde{\theta}(v).$$

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $\tau' = -1/\tau$ y consideremos la función

$$\psi(z) = \frac{e^{-\pi iz^2/\tau} \theta(z/\tau, \tau')}{\theta(z, \tau)}.$$

Un cálculo rutinario muestra que $\psi(z + \tau)/\psi(z) = 1$, es decir, que ψ es elíptica. Ahora bien, no tiene ceros, pues si z anula al numerador, entonces

$$\frac{z}{\tau} = \frac{1 + \tau'}{2} + m + n\tau',$$

luego

$$z = \frac{\tau - 1}{2} + m\tau - n = \frac{\tau + 1}{2} + m\tau - n - 1,$$

luego z es un cero del denominador y, como ambos son simples, ψ no se anula. Concluimos que ψ es constante, de modo que

$$A\theta_3(z, \tau) = e^{i\tau'\pi z^2}\theta_3(z\tau', \tau').$$

Aplicando las definiciones de las funciones zeta obtenemos a su vez que

$$A\theta_4(z, \tau) = e^{i\tau'\pi z^2}\theta_2(z\tau', \tau'),$$

$$A\theta_2(z, \tau) = e^{i\tau'\pi z^2}\theta_4(z\tau', \tau'),$$

$$A\theta_1(z, \tau) = -ie^{i\tau'\pi z^2}\theta_1(z\tau', \tau').$$

Derivando la última ecuación y sustituyendo $z = 0$ queda

$$A\theta_1'(0, \tau) = -i\tau'\theta_1'(0, \tau').$$

Aplicando dos veces la fórmula del teorema 5.46 obtenemos $-A = -iA^3/\tau$, o también, $A^2 = -i\tau$, luego $A = \pm\sqrt{-i\tau}$.

Para determinar el signo observamos que $A\theta(0, \tau) = \theta(0, -1/\tau)$, por lo que A es una función continua de τ , que tiene que coincidir con una de las dos ramas holomorfas de la raíz cuadrada de $-i\tau$. La que hemos llamado $\sqrt{-i\tau}$ es la que sobre $\tau = iv$ (luego $-i\tau = v$) toma el valor positivo, y la otra rama es la que toma valores negativos sobre el eje imaginario. Basta, pues, determinar el signo de A en dicho eje. Ahora bien, $A\theta(0, iv) = \theta(0, i/v)$ y $\theta(0, i/v) > 0$, luego $A(iv) > 0$. ■

Relación con las funciones σ_i Ya hemos señalado la analogía entre las funciones zeta y sigma. Ahora podemos precisarla:

Teorema 5.50 Sea $R = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ un retículo completo, con la base orientada de modo que $\tau = \omega_2/\omega_1$ cumpla $\text{Im } \tau > 0$. Entonces

$$\sigma(z) = \frac{\omega_1 e^{\eta_1 z^2/\omega_1}}{\pi \theta_2(\tau) \theta_3(\tau) \theta_4(\tau)} \theta_1(z/\omega_1, \tau), \quad \sigma_1(z) = \frac{e^{\eta_1 z^2/\omega_1}}{\theta_2(\tau)} \theta_2(z/\omega_1, \tau),$$

$$\sigma_2(z) = \frac{e^{\eta_1 z^2/\omega_1}}{\theta_4(\tau)} \theta_4(z/\omega_1, \tau), \quad \sigma_3(z) = \frac{e^{\eta_1 z^2/\omega_1}}{\theta_3(\tau)} \theta_3(z/\omega_1, \tau).$$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la función

$$f(z) = \frac{e^{-\eta_1 z^2 / \omega_1} \sigma(z)}{\theta_1(z/\omega_1, \tau)}.$$

Observemos que $\theta_1(z, \tau)$ se anula en los puntos de la forma $m + n\omega_2/\omega_1$, luego $\theta_1(z/\omega_1, \tau)$ se anula en los de la forma $m\omega_1 + n\omega_2$, es decir, en los de R , donde se anula σ , y ambas tienen ceros simples, luego f es una función entera. Vamos a ver que es elíptica en R :

$$\begin{aligned} f(z + \omega_1) &= e^{-\eta_1(z+\omega_1)^2/\omega_1} \frac{\sigma(z + \omega_1)}{\theta_1(z/\omega_1 + 1, \tau)} \\ &= e^{-\eta_1 z^2/\omega_1} e^{-\eta_1(2z+\omega_1)} \frac{-e^{\eta_1(2z+\omega_1)} \sigma(z)}{-\theta_1(z/\omega_1, \tau)} = f(z), \\ f(z + \omega_2) &= e^{-\eta_1(z+\omega_2)^2/\omega_1} \frac{\sigma(z + \omega_2)}{\theta_1(z/\omega_1 + \tau)} \\ &= e^{-\eta_1 z^2/\omega_1} e^{-\eta_1 \tau(2z+\omega_2)} \frac{-e^{\eta_2(2z+\omega_2)} \sigma(z)}{-e^{-\pi i \tau - 2\pi i z/\omega_1} \theta_1(z/\omega_1, \tau)} \\ &= e^{(-\eta_1 \tau + \eta_2 + \pi i/\omega_1)(2z+\omega_2)} f(z) = f(z), \end{aligned}$$

donde hemos usado que 5.41 implica que $-\eta_1 \tau + \eta_2 + \pi i/\omega_1 = 0$.

Así pues, f es elíptica de grado 0, luego es constante. Equivalentemente:

$$\sigma(z) = C e^{\eta_1 z^2 / \omega_1} \theta_1(z/\omega_1, \tau).$$

Para calcular la constante derivamos:

$$\sigma'(z) = C e^{\eta_1 z^2 / \omega_1} \frac{2\eta_1 z}{\omega_1} \theta_1(z/\omega_1, \tau) + C e^{\eta_1 z^2 / \omega_1} \theta_1'(z/\omega_1, \tau) / \omega_1$$

y evaluamos en $z = 0$:

$$1 = C \theta_1'(\tau) / \omega_1,$$

lo que nos da la primera fórmula del enunciado. Las restantes se obtienen a partir de la definición de las funciones σ_i junto con las fórmulas que determinan $\sigma(z/\omega_1 + \omega_i/2)$ y $\theta_i(z/\omega_1 + \tau/2)$ y la relación de Legendre. ■

5.6 Las funciones elípticas de Jacobi

Ya hemos visto que es fácil construir funciones elípticas como cocientes de funciones zeta. Una de las más simples que podemos formar (que no sea constante) es $\xi(z, \tau) = \theta_1(z, \tau)/\theta_4(z, \tau)$. Se comprueba inmediatamente que $\xi(z + 1, \tau) = -\xi(z, \tau)$ y $\xi(z + \tau, \tau) = \xi(z, \tau)$, por lo que ξ es elíptica en $\langle 2, \tau \rangle_{\mathbb{Z}}$. Vamos a caracterizarla mediante una ecuación diferencial. Para ello observamos que la derivada

$$\xi'(z, \tau) = \frac{\theta_1'(z, \tau)\theta_4(z, \tau) - \theta_1(z, \tau)\theta_4'(z, \tau)}{\theta_4^2(z, \tau)}$$

también cumple que $\xi'(z+1, \tau) = -\xi'(z, \tau)$, $\xi'(z+\tau, \tau) = \xi'(z, \tau)$, así como que el cociente $\theta_2(z, \tau)\theta_3(z, \tau)/\theta_4^2(z, \tau)$ cumple lo mismo, por lo que

$$\phi(z, \tau) = \frac{\xi'(z, \tau)}{\theta_2(z, \tau)\theta_3(z, \tau)/\theta_4^2(z, \tau)} = \frac{\theta_1'(z, \tau)\theta_4(z, \tau) - \theta_1(z, \tau)\theta_4'(z, \tau)}{\theta_2(z, \tau)\theta_3(z, \tau)}$$

es una función elíptica en $\mathbb{R} = \langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}}$ con a lo sumo polos simples en dos puntos de \mathbb{C}/R , a saber, en $1/2$ y $(\tau+1)/2$. Ahora bien, una comprobación rutinaria muestra que $\phi(z+\tau/2, \tau) = \phi(z, \tau)$, luego ϕ es elíptica en $\langle 1, \tau/2 \rangle$ y tiene a lo sumo un polo simple en $1/2$ módulo este retículo, luego ϕ es constante. Concretamente, por 5.46:

$$\phi(0, z) = \frac{\theta_1'(\tau)\theta_4(\tau)}{\theta_2(\tau)\theta_3(\tau)} = \pi\theta_4^2(\tau).$$

Con esto hemos probado que

$$\xi'(z, \tau) = \pi\theta_4^2(\tau) \frac{\theta_2(z, \tau)\theta_3(z, \tau)}{\theta_4(z, \tau)\theta_4(z, \tau)}. \quad (5.10)$$

La ecuación se simplifica si la elevamos al cuadrado:

$$\theta_4^4(z, \tau)\xi'^2(z, \tau) = \pi^2(\theta_4^2(\tau)\theta_2^2(z, \tau))(\theta_4^2(\tau)\theta_3^2(z, \tau)).$$

Así podemos aplicar las relaciones del teorema 5.45, que nos dan:

$$\theta_4^4(z, \tau)\xi'^2(z, \tau) = \pi^2(\theta_2^2(\tau)\theta_4^2(z, \tau) - \theta_3^2(\tau)\theta_1^2(z, \tau))(\theta_3^2(\tau)\theta_4^2(z, \tau) - \theta_2^2(\tau)\theta_1^2(z, \tau)),$$

o también (omitiendo las variables, teniendo en cuenta que sólo la función ξ depende de z):

$$\left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2 = \pi^2(\theta_2^2 - \theta_3^2\xi^2)(\theta_3^2 - \theta_2^2\xi^2).$$

Tenemos así una ecuación diferencial que puede simplificarse aún más si efectuamos unos cambios de variable. En efecto, si llamamos $u = \pi\theta_3^2 z$, entonces

$$\left(\frac{d\xi}{du}\right)^2 = \left(\frac{\theta_2^2}{\theta_3^2} - \xi^2\right)\left(1 - \frac{\theta_2^2}{\theta_3^2}\xi^2\right),$$

y si ahora llamamos

$$y(u, \tau) = \frac{\theta_3(\tau)}{\theta_2(\tau)}\xi(u, \tau),$$

la ecuación se convierte en

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2),$$

donde $k(\tau) = \theta_2^2(\tau)/\theta_3^2(\tau)$. Explícitamente:

$$y(u, \tau) = \frac{\theta_3(\tau)}{\theta_2(\tau)}\xi\left(\frac{u}{\pi\theta_3^2(\tau)}\right).$$

Como ξ tiene periodos 2 y τ , manteniendo la notación de Jacobi, vemos que y tiene periodos $2\pi\theta_3^2(\tau)$ y $\pi\tau\theta_3^2(\tau)$. Introducimos ahora la notación de Jacobi:

Definición 5.51 Para cada $\tau \in \mathbb{C}$ con $\text{Im } \tau > 0$, definimos los *periodos*

$$K(\tau) = \frac{\pi}{2} \theta_3^2(\tau), \quad K'(\tau) = -\frac{i\pi}{2} \theta_3^2(\tau) \tau = -iK(\tau) \tau.$$

Notemos que $K(\tau) \neq 0$ (porque $\theta_3(z, \tau)$ no se anula en $z = 0$).

Las *funciones elípticas de Jacobi*, definidas para $(u, \tau) \in \mathbb{C} \times H$, son las funciones

$$\begin{aligned} \text{sn}(u, \tau) &= \frac{\theta_3(\tau)}{\theta_2(\tau)} \frac{\theta_1(u/2K(\tau), \tau)}{\theta_4(u/2K(\tau), \tau)}, \\ \text{cn}(u, \tau) &= \frac{\theta_4(\tau)}{\theta_2(\tau)} \frac{\theta_2(u/2K(\tau), \tau)}{\theta_4(u/2K(\tau), \tau)}, \\ \text{dn}(u, \tau) &= \frac{\theta_4(\tau)}{\theta_3(\tau)} \frac{\theta_3(u/2K(\tau), \tau)}{\theta_4(u/2K(\tau), \tau)}. \end{aligned}$$

Conviene definir también el *módulo* y el *módulo complementario* de las funciones elípticas de Jacobi como

$$k(\tau) = \theta_2^2(\tau)/\theta_3^2(\tau), \quad k'(\tau) = \theta_4^2(\tau)/\theta_3^2(\tau),$$

respectivamente. En lo sucesivo, para aligerar la notación, omitiremos la dependencia de τ .

El teorema 5.45 nos da que $k^2 + k'^2 = 1$. Teniendo en cuenta que, claramente, $k^2, k'^2 \neq 0$, concluimos también que $k^2, k'^2 \neq 1$.

La función $\text{sn } u$ es precisamente la función y a la que hemos llegado en la discusión previa a esta definición. La tabla siguiente recoge las características principales de las funciones de Jacobi, que discutimos seguidamente:

	sn	cn	dn
Periodos	$4K, 2K'i$	$4K, 2K + 2K'i$	$2K, 4K'i$
Ceros	$2mK + 2nK'i$	$(2m+1)K + 2nK'i$	$(2m+1)K + (2n+1)K'i$
Polos	$2mK + (2n+1)K'i$	$2mK + (2n+1)K'i$	$2mK + (2n+1)K'i$
Paridad	impar	par	par
Valor en 0	0	1	1
Valor en K	1	0	k'
Derivadas	$\text{cn } u \text{ dn } u$	$-\text{sn } u \text{ dn } u$	$-k^2 \text{sn } u \text{ dn } u$
Residuos	$1/k$	$-i/k$	$-i$

Periodos Tenemos las relaciones

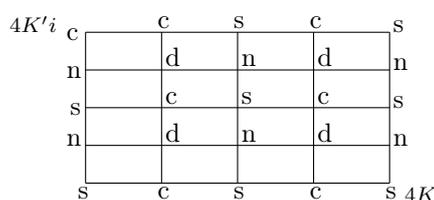
$$\begin{aligned} \text{sn}(u + 2K) &= -\text{sn } u, & \text{sn}(u + 2K'i) &= \text{sn } u, \\ \text{cn}(u + 2K) &= -\text{cn } u, & \text{cn}(u + 2K'i) &= -\text{cn } u, \\ \text{dn}(u + 2K) &= \text{dn } u, & \text{dn}(u + 2K'i) &= -\text{dn } u. \end{aligned}$$

Es claro que $K, iK' = K\tau$ son linealmente independientes sobre \mathbb{R} , luego concluimos que las funciones de Jacobi son elípticas sobre los retículos que indica la tabla. Notemos que, tal y como se indica, $\text{cn } u$ es elíptica sobre el retículo $\langle 4K, 2K + 2K'i \rangle_{\mathbb{Z}}$, que es mayor que el obvio $\langle 4K, 4K'i \rangle_{\mathbb{Z}}$.

Ceros y polos De los ceros y polos de las funciones zeta se deducen inmediatamente los ceros y polos de las funciones de Jacobi (todos los cuales son simples). Por ejemplo, u es un polo de cualquiera de ellas si y sólo si $u/2K$ es un cero de θ_4 , es decir, si $u/2K = \tau/2 + m + n\tau$, lo que equivale a que

$$u = 2mK + (2n + 1)K\tau = 2mK + (2n + 1)K'i.$$

Similarmente se calculan los ceros. La figura siguiente representa el paralelogramo de lados $4K$ y $4K'i$. Las tres funciones tienen sus polos en los vértices marcados con la letra n , mientras que los ceros están en los vértices marcados con la inicial de cada función.



Paridad Teniendo en cuenta que θ_1 es impar y las otras tres funciones zeta son pares, concluimos que sn es impar, mientras que cn , dn son pares.

Valores notables Los valores en 0 se calculan trivialmente teniendo en cuenta que $\theta_1(0) = 0$ y que $\theta_i(\tau) = \theta_i(0, \tau)$. Los valores en K se obtienen inmediatamente a partir de los valores de $\theta_i(1/2)$. A partir de aquí, conociendo los ceros y los polos y las relaciones de cuasiperiodicidad, podemos calcular fácilmente los valores en todos los números de la forma $mK + nK'i$.

Relaciones El teorema 5.45 nos da las relaciones

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u &= 1, \\ k^2 \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{dn}^2 u &= 1. \end{aligned}$$

Derivadas Aplicando a la relación (5.10) los cambios de variable que transforman ξ en $\operatorname{sn} u$ obtenemos

$$\frac{d \operatorname{sn} u}{du} = \frac{\theta_4^2}{\theta_2 \theta_3} \frac{\theta_2(u/2K) \theta_3(u/2K)}{\theta_4^2(u/2K)} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u.$$

Derivando las relaciones del apartado precedente obtenemos las derivadas de las otras dos funciones. Estas derivadas determinan a su vez los coeficientes de las series de Taylor en 0 de las tres funciones de Jacobi, así como los de las series de Laurent alrededor de sus polos, todos los cuales son claramente polinomios en k^2 (aunque no es fácil dar una expresión explícita o recurrente para el término general).

Residuos El teorema [An 10.27] nos permite calcular los residuos en los polos. Por ejemplo,

$$\operatorname{Res}(\operatorname{sn} u, K'i) = \frac{\theta_3(\tau)}{\theta_2(\tau)} \frac{\theta_1(\tau/2, \tau)}{\theta_4'(\tau/2, \tau)/2K} = \frac{\theta_3(\tau)\pi\theta_3^2(\tau)}{\theta_2(\tau)} \frac{iq^{-1/4}\theta_4(\tau)}{i\pi q^{-1/4}\theta_1'(\tau)} = \frac{1}{k},$$

donde $\theta_4'(\tau/2, \tau)$ se calcula derivando la expresión para $\theta_4(z + \tau/2)$ y evaluando en $z = 0$.

Relación con las funciones trigonométricas Es evidente la similitud entre las propiedades de las funciones elípticas de Jacobi y las funciones trigonométricas. Esto se debe a que las funciones trigonométricas pueden verse como el caso límite de las funciones de Jacobi cuando $\tau \rightarrow \infty$.

En efecto, sabemos que, cuando $\tau \rightarrow \infty$, las funciones

$$\theta_1(z, \tau)e^{\pi i\tau/4}, \quad \theta_2(z, \tau)e^{\pi i\tau/4}, \quad \theta_2(z, \tau), \quad \theta_4(z, \tau),$$

tienden, respectivamente, a las indicadas en (5.9). De ahí se desprende a su vez que

$$\begin{aligned} K(\tau) &\rightarrow \pi/2, & K'(\tau) &\rightarrow 0, & k(\tau) &\rightarrow 0, & k'(\tau) &\rightarrow 1, \\ \operatorname{sn}(u, \tau) &\rightarrow \operatorname{sen} u, & \operatorname{cn}(u, \tau) &\rightarrow \operatorname{cos} u, & \operatorname{dn}(u, \tau) &\rightarrow 1. \end{aligned}$$

Generación de funciones elípticas Observemos que la función $\operatorname{sn}^2 u$ es elíptica en el retículo $R = \langle 2K, 2K'i \rangle_{\mathbb{Z}}$, luego también lo es $\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$ (la mitad de su derivada). Veamos ahora que estas funciones pueden usarse en lugar de las funciones de Weierstrass \wp y \wp' para generar todas las funciones elípticas en R :

Teorema 5.52 *Dado $\tau \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Im} \tau > 0$, toda función elíptica par sobre el retículo $R = \langle 2K, 2K'i \rangle_{\mathbb{Z}}$ es de la forma $P(\operatorname{sn}^2 u)$, donde $P(X) \in \mathbb{C}(X)$ es una función racional. Toda función elíptica en R se expresa en la forma*

$$P(\operatorname{sn}^2 u) + Q(\operatorname{sn}^2 u) \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

para ciertas funciones racionales $P(X), Q(X) \in \mathbb{C}(X)$.

DEMOSTRACIÓN: La función $p(u) = \operatorname{sn}^2(u + K'i)$ es par y tiene polos dobles en los puntos de R . Esto basta para que la prueba del teorema 5.27 valga igualmente cambiando \wp por p . La única pequeña variante es que el desarrollo en serie de Laurent de p no empieza por $1/u^2$, sino por $1/k^2 u^2$, pero esto no afecta a la prueba. De hecho, ni siquiera importa cuál es exactamente el valor del coeficiente de $1/u^2$. Basta con saber que no es nulo.

A su vez, la prueba del teorema 5.28 se adapta sin cambio alguno para probar que toda función par elíptica sobre R es una función racional de p . Ahora bien, si $f(u)$ es par, también lo es $f(u + K'i)$, luego $f(u + K'i) = P(\operatorname{sn}^2(u + K'i))$, luego $f(u) = P(\operatorname{sn}^2 u)$.

Así pues, toda función par elíptica en R es de la forma $P(\operatorname{sn}^2 u)$, y la prueba de 5.29 vale sin cambio alguno para obtener el caso general. ■

La diferencia esencial entre el enfoque de Weierstrass y el de Jacobi es que Weierstrass construyó una función elíptica sobre un retículo arbitrario, mientras que las funciones de Jacobi dependen de τ y no es cierto que los retículos $\langle 2K(\tau), 2K'(\tau)i \rangle_{\mathbb{Z}}$ recorran todos los retículos completos posibles en \mathbb{C} . De momento observemos que $K'(\tau)i/K(\tau) = \tau$, por lo que, de los infinitos pares de números complejos ω_1, ω_2 tales que $\omega_2/\omega_1 = \tau$, sólo uno de ellos es concretamente $2K(\tau), 2K'(\tau)i$. Volveremos sobre esto en el capítulo siguiente (véase la nota de la página 208).

Fórmulas de adición Las funciones elípticas de Jacobi satisfacen fórmulas análogas a las del seno o el coseno de una suma, aunque un poco más sofisticadas:

Teorema 5.53 *Se cumplen las identidades siguientes:*

$$\begin{aligned}\operatorname{sn}(u+v) &= \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \\ \operatorname{cn}(u+v) &= \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, \\ \operatorname{dn}(u+v) &= \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN: Fijemos un $\alpha \in \mathbb{C}$ arbitrario y consideremos las funciones $s_1(u) = \operatorname{sn} u$, $s_2(u) = \operatorname{sn}(\alpha - u)$. Entonces

$$s_1'^2 = (1 - s_1^2)(1 - k^2 s_1^2), \quad s_2'^2 = (1 - s_2^2)(1 - k^2 s_2^2).$$

Volviendo a derivar:

$$2s_1' s_2'' = -2s_1 s_1'(1 - k^2 s_1^2) - (1 - s_1^2)2k^2 s_1 s_1',$$

luego

$$s_2'' = -(1 + k^2)s_1 + 2k^2 s_1^3.$$

Igualmente llegamos a que

$$s_2'' = -(1 + k^2)s_2 + 2k^2 s_2^3.$$

Operando obtenemos

$$\frac{s_1'' s_2 - s_2'' s_1}{s_1'^2 s_2^2 - s_2'^2 s_1^2} = \frac{2k^2 s_1 s_2 (s_1^2 - s_2^2)}{(s_2^2 - s_1^2)(1 - k^2 s_1^2 s_2^2)} = -\frac{2k^2 s_1 s_2}{1 - k^2 s_1^2 s_2^2},$$

luego¹³

$$\frac{1}{s_1' s_2 - s_2' s_1} (s_1' s_2 - s_2' s_1)' = \frac{1}{1 - k^2 s_1^2 s_2^2} (1 - k^2 s_1^2 s_2^2)'$$

¹³Esta igualdad requiere que los denominadores no sean idénticamente nulos, pero es fácil ver que el primero sólo puede ser nulo si $\alpha \in \langle 2K, 2K'i \rangle_{\mathbb{Z}}$ o bien $\alpha \in K'i + \langle 2K, 2K'i \rangle_{\mathbb{Z}}$ (pues en tal caso $\log' s_1 = \pm \log' s_2$, luego $s_1 = cs_2^{\pm 1}$), y el segundo sólo si $\alpha \in K'i + \langle 2K, 2K'i \rangle_{\mathbb{Z}}$. En lo sucesivo excluimos esos valores de α .

Integrando obtenemos que

$$\frac{s'_1 s_2 - s'_2 s_1}{1 - k^2 s_1^2 s_2^2} = C(\alpha).$$

Explícitamente, llamando $v = \alpha - u$ tenemos la igualdad¹⁴

$$\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v + \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \operatorname{sn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} = C(u + v).$$

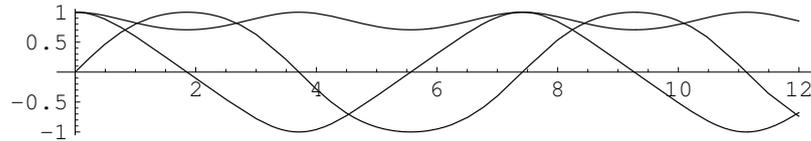
En particular, para $v = 0$ queda $C(u) = \operatorname{sn} u$, luego tenemos la primera igualdad del enunciado.

Un cálculo rutinario muestra que si elevamos al cuadrado y sumamos los miembros derechos de las dos primeras fórmulas del enunciado el resultado es 1. Esto implica que la segunda fórmula se cumple salvo tal vez un signo, pero evaluándola en $u = 0$ se ve que el signo tiene que ser el positivo.

La tercera fórmula se prueba igualmente, ahora multiplicando por k^2 el cuadrado del miembro izquierdo de la primera igualdad. ■

El caso $\tau = iv$ La notación de Jacobi para los periodos de sus funciones elípticas está pensada para que resulte natural cuando τ es imaginario puro, en cuyo caso las funciones $\theta_i(iv)$ toman valores en $]0, +\infty[$ y, más aún, según el teorema 5.48 la función $v \mapsto \sqrt{k(iv)}$ biyecta el intervalo $]0, +\infty[$ con $]0, 1[$. En particular, el módulo k^2 toma una vez cada valor en este intervalo.¹⁵ Por ello es habitual escribir $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$, $\operatorname{dn}(u, k)$ tomando a k , o incluso a k^2 , como variable independiente.

En esta caso es claro que $K, K' > 0$, así como que las funciones de Jacobi toman valores reales sobre los números reales, por lo que (a partir de las series de Taylor) podemos calcular sus gráficas. La figura muestra las correspondientes a $k^2 = 1/2$:



Como es fácil justificar a partir de las relaciones fundamentales, vemos que $\operatorname{sn} u$ y $\operatorname{cn} u$ oscilan entre -1 y 1 , mientras que dn oscila entre k' y 1 .

La función $x = \operatorname{sn} t$ es biyectiva en $[0, K]$, luego podemos usarla como cambio de variable en la integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^K \frac{\operatorname{cn} t \operatorname{dn} t dt}{\sqrt{(1-\operatorname{sn}^2 t)(1-k^2 \operatorname{sn}^2 t)}} = \int_0^K dt = K.$$

¹⁴Válida cuando (u, v) varía en el abierto de \mathbb{C}^2 que resulta de excluir los pares donde $\alpha = u + v$ toma alguno de los valores descartados (que forman un cerrado en \mathbb{C}).

¹⁵En el capítulo siguiente generalizaremos parcialmente este resultado. Véanse las observaciones tras 6.18.

Por otra parte, el teorema 5.49 implica las relaciones

$$K'(vi) = K(i/v), \quad k'(vi) = k(i/v),$$

luego aplicando a i/v la fórmula que hemos obtenido para K obtenemos la relación análoga para K' , es decir:

Teorema 5.54 *Los valores K e iK' asociados a las funciones de Jacobi de módulo $0 < k^2 < 1$ vienen dados por*

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}.$$

Se suele representar por $K(m)$ la función

$$K(m) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-mx^2)}}, \quad 0 \leq m < 1,$$

que nos da los periodos de las funciones de Jacobi de parámetro $m = k^2$. Así $K'(m) = K(1-m)$. El cambio de variable $x = \text{sen } \theta$ nos da una expresión alternativa:

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-m\text{sen}^2\theta}}.$$

Más en general, podemos definir la función

$$F(\phi | m) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1-m\text{sen}^2\theta}} = \int_0^{\text{sen } \phi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-mx^2)}},$$

que, como función de ϕ , está definida sobre toda la recta real, y es creciente. La función F se llama *integral elíptica de primera clase*. Su inversa $\text{Am}(u | m)$ se llama *amplitud*. El cambio de variable $x = \text{sn } u$ nos da que

$$F(\text{arcsen sn } u, m) = \int_0^{\text{sn } u} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-mx^2)}} = u,$$

luego $\text{arcsen sn}(u) = \text{Am}(u)$ y $\text{sn } u = \text{sen Am}(u)$, para todo $u \in \mathbb{R}$. De aquí se deduce fácilmente que $\text{cn } u = \cos \text{Am}(u)$.

Ahora es evidente que las funciones $\text{sn } u$, $\text{cn } u$, $\text{dn } u$ son las mismas que estudiamos en la sección [IC 6.4], pero ahora sabemos que se extienden a funciones meromorfas doblemente periódicas en \mathbb{C} .

Relación con las funciones de Weierstrass Vamos a relacionar ahora las funciones de Weierstrass asociadas a un retículo $R = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ con la base ordenada de modo que $\tau = \omega_2/\omega_1$ cumpla $\text{Im } \tau > 0$ y las funciones de Jacobi asociadas a τ . Para ello empezamos considerando las funciones

$$\lambda(z) = \frac{\sigma(z)}{\sigma_2(z)}, \quad \lambda_1(z) = \frac{\sigma_1(z)}{\sigma_2(z)}, \quad \lambda_3(z) = \frac{\sigma_3(z)}{\sigma_2(z)}.$$

La relación (5.7) nos permite expresarlas en términos de la función de Weierstrass:

$$\lambda(z) = \frac{1}{\sqrt{\wp(z) - e_2}}, \quad \lambda_1(z) = \frac{\sqrt{\wp(z) - e_1}}{\sqrt{\wp(z) - e_2}}, \quad \lambda_3(z) = \frac{\sqrt{\wp(z) - e_3}}{\sqrt{\wp(z) - e_2}},$$

mientras que el teorema 5.50 nos da las definiciones equivalentes en términos de funciones zeta:

$$\lambda(z) = \frac{\omega_1}{\pi\theta_2\theta_3} \frac{\theta_1(z/\omega_1, \tau)}{\theta_4(z/\omega_1, \tau)}, \quad \lambda_1(z) = \frac{\theta_4}{\theta_2} \frac{\theta_2(z/\omega_1, \tau)}{\theta_4(z/\omega_1, \tau)}, \quad \lambda_3(z) = \frac{\theta_4}{\theta_3} \frac{\theta_3(z/\omega_1, \tau)}{\theta_4(z/\omega_1, \tau)}.$$

En particular

$$\sqrt{e_1 - e_2} = \lambda(\omega_1/2)^{-1} = \frac{\pi\theta_2\theta_3}{\omega_1} \frac{\theta_4(1/2, \tau)}{\theta_1(1/2, \tau)} = \frac{\pi\theta_3^2}{\omega_1},$$

luego

$$2K = \pi\theta_3^2 = \omega_1\sqrt{e_1 - e_2}, \quad 2K'i = 2K\tau = \omega_2\sqrt{e_1 - e_2}.$$

Igualmente

$$\sqrt{\frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2}} = \frac{\sigma(\omega_1/2)\sigma_2(\omega_3/2)}{\sigma_2(\omega_1/2)\sigma(\omega_3/2)} = \frac{\lambda(\omega_1/2)}{\lambda(\omega_3/2)} = \frac{\theta_2^2}{\theta_3^2} = k, \quad (5.11)$$

y del mismo modo se comprueba que

$$\sqrt{\frac{e_3 - e_1}{e_2 - e_1}} = k'.$$

Ahora es fácil ver que

$$\begin{aligned} \operatorname{sn} u &= \sqrt{e_1 - e_2} \lambda\left(\frac{u}{\sqrt{e_1 - e_2}}\right) = \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{\wp(z) - e_2}}, \\ \operatorname{cn} u &= \lambda_1\left(\frac{u}{\sqrt{e_1 - e_2}}\right) = \frac{\sqrt{\wp(z) - e_1}}{\sqrt{\wp(z) - e_2}}, \\ \operatorname{dn} u &= \lambda_3\left(\frac{u}{\sqrt{e_1 - e_2}}\right) = \frac{\sqrt{\wp(z) - e_3}}{\sqrt{\wp(z) - e_2}}, \end{aligned}$$

donde $z = u/\sqrt{e_1 - e_2}$.

Capítulo VI

Funciones modulares

Como ya hemos observado en el capítulo anterior, si ω_1, ω_2 son dos números complejos no nulos, toda función meromorfa f con periodo ω_1 puede transformarse en una función meromorfa con periodo ω_2 sin más que hacer el cambio de variable lineal $\tilde{f}(z) = f(\omega_1\omega_2^{-1}z)$ y, como consecuencia, es irrelevante considerar funciones con un periodo u otro. Sin embargo, esto ya no es así cuando consideramos funciones doblemente periódicas (funciones elípticas), y la consecuencia correspondiente es que el comportamiento algebraico de las funciones elípticas sí que depende hasta cierto punto de cuál sea concretamente su retículo de periodos. En este capítulo vamos a estudiar esto con más detalle.

6.1 El grupo modular

La observación precedente sobre cambios de variables lineales en funciones periódicas puede expresarse alternativamente en los términos siguientes: si una función meromorfa f admite como periodos los elementos de un retículo no nulo R y $\alpha \in \mathbb{C}$ es no nulo, entonces el cambio de variable lineal $\tilde{f}(z) = f(\alpha^{-1}z)$ da lugar a una función meromorfa que admite como periodos a los elementos del retículo

$$\alpha R = \{\alpha\omega \mid \omega \in R\}.$$

Esto nos lleva a la definición siguiente:

Definición 6.1 Dos retículos R y S en \mathbb{C} son *linealmente equivalentes* si existe un $\alpha \in \mathbb{C}$ no nulo tal que $S = \alpha R$.

Obviamente se trata de una relación de equivalencia en el conjunto de todos los retículos en \mathbb{C} . Lo que hemos probado es que los retículos de periodos de dos funciones meromorfas relacionadas por un cambio de variables lineal son linealmente equivalentes y, recíprocamente, que si dos retículos son linealmente equivalentes, toda función meromorfa que tenga por periodos a los elementos de uno, puede transformarse mediante un cambio de variable lineal en otra que tenga por periodos a los elementos de otro.

Lo que distingue en este sentido a las funciones simple y doblemente periódicas es que todos los retículos de rango 1 son linealmente equivalentes, pues

$$\langle \omega_2 \rangle_{\mathbb{Z}} = \omega_2 \omega_1^{-1} \langle \omega_1 \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

En cambio, como veremos enseguida, no todos los retículos de rango 2 —es decir, los retículos completos— son linealmente equivalentes entre sí, por lo que no es cierto que toda función elíptica pueda transformarse en otra con un retículo de periodos prefijado mediante un cambio de variable lineal.

Si dos retículos $S = \alpha R$ son linealmente equivalentes, entonces la aplicación

$$\phi : \mathbb{C}/R \longrightarrow \mathbb{C}/S$$

dada por $\phi([z]) = [\alpha z]$ es un isomorfismo de grupos.¹

Esto nos lleva al problema de determinar cuándo dos retículos completos son linealmente equivalentes y, más precisamente, a encontrar representantes de las distintas clases de equivalencia lineal de retículos. Lo primero que podemos observar es que

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle_{\mathbb{Z}} = \omega_1 \langle 1, \omega_2/\omega_1 \rangle_{\mathbb{Z}} = \omega_2 \langle 1, \omega_1/\omega_2 \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

El hecho de que ω_1 y ω_2 sean linealmente independientes sobre \mathbb{R} equivale a que $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$, es decir, a que $\text{Im}(\omega_1/\omega_2) \neq 0$, y es claro entonces que $\text{Im}(\omega_1/\omega_2)$ y $\text{Im}(\omega_2/\omega_1)$ tienen signos opuestos. Como conclusión:

Teorema 6.2 *Todo retículo completo en \mathbb{C} es linealmente equivalente a uno de la forma $\langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}}$, con $\text{Im } \tau > 0$.*

Esto implica que, a la hora de estudiar funciones elípticas, no perdemos generalidad si suponemos que tienen a 1 entre sus periodos, así como que basta estudiar la equivalencia lineal sobre retículos de la forma indicada en el teorema anterior.

Como ya señalamos en el capítulo anterior, si $R = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ y $\tau = \omega_2/\omega_1$, la condición $\text{Im } \tau > 0$ equivale a que la base ω_1, ω_2 esté orientada, y cualquier base ordenada de un retículo completo puede orientarse sin más que permutar sus elementos o cambiar el signo a uno de ellos.

Ahora probamos el resultado básico sobre equivalencia lineal de retículos:

¹Más aún, si consideramos en los cocientes la estructura analítica dada por A.29, la aplicación ϕ es claramente biholomorfa y, recíprocamente, —y esto ya no es inmediato— dos variedades \mathbb{C}/R y \mathbb{C}/S son biholomorfas si y sólo si los retículos R y S son linealmente equivalentes. Esto está probado en A.35 para el caso de los retículos completos, pero el caso de los retículos de rango 1 es trivial, pues todos son linealmente equivalentes, luego las variedades cociente son todas biholomorfas entre sí, como, por otra parte, ya sabíamos, ya que todas son biholomorfas a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Esto significa en el fondo que hay tantas clases de funciones elípticas diferentes desde un punto de vista analítico como clases de equivalencia de retículos completos respecto de la equivalencia lineal.

Teorema 6.3 Sean $R = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ y $S = \langle \omega'_1, \omega'_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ dos retículos en \mathbb{C} con bases elegidas de modo que $\tau = \omega_2/\omega_1$ y $\tau' = \omega'_2/\omega'_1$ tengan parte imaginaria positiva. Entonces R y S son linealmente equivalentes si y sólo si existen números enteros a, b, c, d tales que

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad ad - bc = 1.$$

DEMOSTRACIÓN: Según acabamos de señalar, la condición sobre las bases equivale a que estén orientadas. También hemos visto que R y S son linealmente equivalentes a $\langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}}$ y $\langle 1, \tau' \rangle_{\mathbb{Z}}$, respectivamente, luego serán linealmente equivalentes si y sólo si lo son estos dos retículos. Esto sucede si y sólo si existe un $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tal que $\langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle \alpha, \alpha\tau' \rangle_{\mathbb{Z}}$, lo cual a su vez equivale a que existan números enteros a, b, c, d tales que

$$\alpha = d + c\tau, \quad \alpha\tau' = b + a\tau, \quad ad - bc = \pm 1,$$

o también a que

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad ad - bc = \pm 1.$$

Ahora observamos que

$$\operatorname{Im} \tau' = \frac{\operatorname{Im}((a\tau + b)(c\bar{\tau} + d))}{|c\tau + d|^2} = \frac{bc \operatorname{Im} \bar{\tau} + ad \operatorname{Im} \tau}{|c\tau + d|^2} = \frac{ad - bc}{|c\tau + d|^2} \operatorname{Im} \tau,$$

y por la hipótesis de orientación tiene que ser $ad - bc = 1$. ■

Ahora es inmediato que existen infinitas clases de equivalencia lineal de retículos completos, ya que cada clase sólo contiene una cantidad numerable de retículos de la forma $\langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}}$, y hay una cantidad no numerable de retículos de esta forma. Enseguida precisaremos mucho más la situación.

Recordemos de A.3 (y las observaciones posteriores) que las transformaciones de Möbius que fijan al semiplano

$$H = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \tau > 0\}$$

son las asociadas a matrices del grupo $\operatorname{LE}(2, \mathbb{R})$. El teorema anterior nos lleva a considerar el subgrupo siguiente:

Definición 6.4 Llamaremos *grupo modular* al grupo $\Gamma = \operatorname{LE}(2, \mathbb{Z})$ formado por las matrices 2×2 con coeficientes enteros y determinante 1.

Cada elemento de Γ determina una transformación de Möbius que, a su vez, por el teorema A.3, se restringe a una aplicación biholomorfa del semiplano H en sí mismo. A dichas transformaciones de Möbius las llamaremos *transformaciones modulares*.

Más precisamente, la aplicación que a cada matriz de Γ le asigna su transformación de Möbius asociada es un homomorfismo de grupos cuyo núcleo es $\{\pm I\}$. Así, cada transformación modular tiene asociado un par de matrices $\pm M$ en el grupo modular.

Diremos que dos puntos $\tau, \tau' \in H$ son *equivalentes* respecto del grupo modular si existe una transformación modular f tal que $\tau' = f(\tau)$.

Obviamente esta equivalencia es una relación de equivalencia y, en estos términos, el teorema 6.3 afirma que dos retículos $\langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}}$ y $\langle 1, \tau' \rangle_{\mathbb{Z}}$ con $\tau, \tau' \in H$ son linealmente equivalentes si y sólo τ y τ' son equivalentes respecto del grupo modular.

Nota Si $R = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ es un retículo completo en \mathbb{C} y llamamos $\tau = \omega_2/\omega_1$, para cualquier $\tau' \in H$ de la forma $\tau' = (a\tau + b)/(c\tau + d)$, podemos considerar $\omega'_1 = d\omega_1 + c\omega_2$, $\omega'_2 = b\omega_1 + a\omega_2$, que forman también una base del mismo retículo R y $\omega'_2/\omega'_1 = \tau'$.

Por lo tanto, aunque existe una cantidad no numerable de retículos linealmente equivalentes a R , si tomamos cualquier base (orientada) de cualquiera de ellos, el cociente $\tau = \omega_2/\omega_1$ sólo puede recorrer una cantidad numerable de elementos de H (una clase de equivalencia respecto del grupo modular). Cada uno de estos elementos determina un retículo de la forma $\langle 2K(\tau), 2K'(\tau)i \rangle_{\mathbb{Z}}$ que constituyen los periodos de las funciones de Jacobi $\text{sn}(u; \tau)$, $\text{cn}(u; \tau)$, $\text{dn}(u; \tau)$.

Así pues, de entre la cantidad no numerable de cuerpos de funciones elípticas con retículo de periodos linealmente equivalente a R , sólo una cantidad numerable de ellos puede estudiarse (directamente) a través de las funciones de Jacobi. Indirectamente pueden estudiarse todos, ya que las funciones de cualquiera de ellos se transforman en la de cualquier otro mediante un cambio de variable lineal. ■

Notemos que, para transformaciones de determinante 1, como son las del grupo modular, la fórmula que hemos considerado al final de la prueba del teorema 6.3 se reduce a:

$$\text{Im} \frac{a\tau + b}{c\tau + d} = \frac{1}{|c\tau + d|^2} \text{Im} \tau. \quad (6.1)$$

El teorema siguiente nos proporciona una representación geométrica del cociente de H sobre la equivalencia respecto del grupo modular:

Teorema 6.5 *Todo $\tau \in H$ es equivalente respecto del grupo modular Γ a un punto del conjunto*

$$D = \{\tau \in H \mid |\text{Re} \tau| \leq 1/2, \quad |\tau| \geq 1\},$$

y dos puntos $\tau, \tau' \in D$ no son equivalentes entre sí excepto si están en la frontera y cumplen $\text{Re} \tau = \pm \text{Re} \tau'$, $\text{Im} \tau = \text{Im} \tau'$. Además, el grupo modular está generado por las matrices

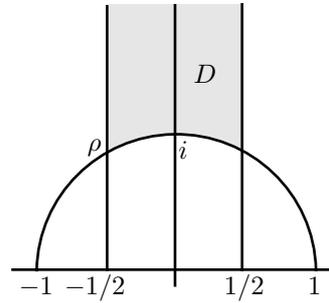
$$t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(cuyas transformaciones asociadas son $t(\tau) = \tau + 1$ y $s(\tau) = -1/\tau$).

DEMOSTRACIÓN: El dominio D es la parte sombreada en la figura, donde ρ es la raíz cúbica de la unidad

$$\rho = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}.$$

Llamemos Γ' al subgrupo de Γ generado por s y t . Notemos que $-1 = s^2 \in \Gamma'$. Fijado $\tau \in \mathbb{C}$, los números $c\tau + d$ con $c, d \in \mathbb{Z}$ forman un retículo complejo, luego según [TA1 3.6], es un subconjunto cerrado y discreto de \mathbb{C} . Por lo tanto el conjunto



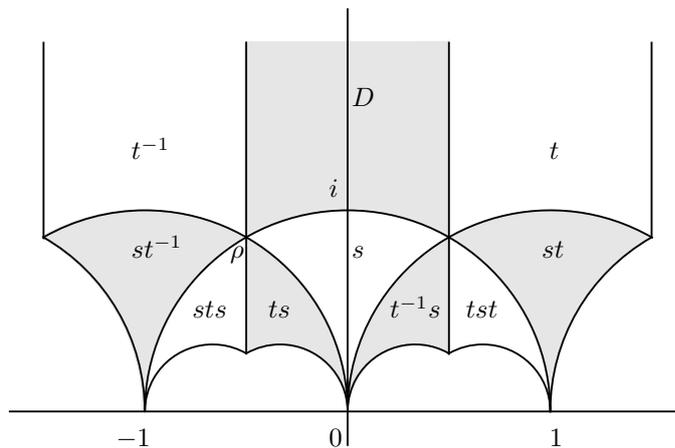
$$\{|c\tau + d| \mid (c, d) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$$

tiene un mínimo elemento.

La fórmula (6.1) muestra entonces que podemos tomar $z \in H$ equivalente a τ respecto a Γ' con parte imaginaria maximal. Aplicando varias veces la traslación t o bien t^{-1} no alteramos la parte imaginaria (y pasamos a puntos equivalentes respecto a Γ'), luego podemos suponer que z cumple $|\operatorname{Re} z| \leq 1/2$. Si fuera $|z| < 1$ entonces $s(z)$ tendría parte imaginaria mayor, luego ha de ser $|z| \geq 1$.

Con esto hemos probado que todo punto de H es equivalente a uno de D respecto a Γ' . Ahora probaremos que dos $z, z' \in D$ no son equivalentes respecto de Γ salvo que estén en la frontera y sean simétricos respecto al eje imaginario. Ciertamente, un par de puntos simétricos en estas condiciones son equivalentes (a través de t si $\operatorname{Re} z = \pm 1/2$ o a través de s si $|z| = 1$).

Más precisamente, vamos a probar que si $z, z' \in D$ y $g \in \Gamma$ cumplen que $g(z) = z', g \neq \pm I$, entonces z y z' están en la frontera de D , son iguales o simétricos respecto al eje imaginario y, salvo signo, g es una de las nueve matrices que se indican en la figura siguiente:



Explícitamente, las matrices (más la identidad) son:

$$\begin{aligned} t^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, & I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & t &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ st^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & s &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & st &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ sts &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & ts &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, & t^{-1}s &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, & tst &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pongamos que

$$g(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Cambiando los signos podemos suponer que $c \geq 0$. Intercambiando z y z' podemos suponer que $\operatorname{Im} z \leq \operatorname{Im} z'$. Con tal intercambio estamos cambiando g por g^{-1} , pero no perdemos generalidad porque la inversa de cualquiera de las 10 matrices anteriores es una de ellas (o la opuesta de una de ellas). La fórmula (6.1) nos da entonces que $|cz + d| \leq 1$, pero $\operatorname{Im} z \geq \sqrt{3}/2$, luego ha de ser $c \leq 2/\sqrt{3}$, luego $c = 0, 1$.

Si $c = 0$ entonces $ad = 1$. Podemos suponer $a = d = 1$ y así $g(\tau) = \tau + b$. Esto ya implica que $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z'$, y además $|\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} z'| = |b|$, lo cual sólo es posible si $b = \pm 1$ y z, z' tienen partes reales $\pm 1/2$. En particular, g es una de las dos matrices distintas de la identidad de la primera fila de la enumeración anterior.

Supongamos a partir de aquí que $c = 1$. La relación $|z + d| \leq 1$ con $|z| \geq 1$ sólo puede darse si $d = -1, 0, 1$.

Si $d = 0$ entonces $|z| = 1$ y la condición $ad - bc = 1$ se reduce a $b = -1$, luego $g(\tau) = a - 1/\tau$. Como $-1/z$ también tiene módulo 1, para que $z' = a - 1/z$ esté en D , las únicas posibilidades son que $a = 0$ (y entonces z y z' son simétricos respecto al eje imaginario) o bien que $a = \pm 1$ (y entonces z y z' han de ser ρ y $s(\rho)$). En cualquiera de los dos casos se cumple lo que queremos probar, y además g es necesariamente una de las tres matrices de la segunda fila de la enumeración.

A partir de aquí suponemos que $d = \pm 1$. Entonces $|z + d| \leq 1$ con $z \in D$ sólo puede darse si $z = \rho$ y $d = 1$ o bien $z = 1 + \rho$ y $d = -1$. Vamos a estudiar el primer caso, pues el segundo es análogo. Tenemos que

$$g(\tau) = \frac{a\tau + a - 1}{\tau + 1} = a - \frac{1}{\tau + 1}.$$

Teniendo en cuenta que $\rho^2 + \rho + 1 = 0$, vemos que

$$z' = g(z) = g(\rho) = a + \rho = a + z,$$

lo cual sólo deja dos opciones: o bien $a = 0$ y $z = z' = \rho$, o bien $a = 1$ y $z = \rho, z' = 1 + \rho$. Estas dos posibilidades corresponden a dos de las matrices de la tercera fila de la enumeración. Las otras dos aparecen en el caso análogo $z = 1 + \rho, z' = \rho$.

Sólo falta probar que $\Gamma = \Gamma'$. En efecto, si $g \in \Gamma$, para cada z en el interior de D , acabamos de probar que $g(z)$ es equivalente a un $z' \in D$ respecto a Γ' , luego existe $g' \in \Gamma'$ tal que $g'(g(z)) = z'$. Como z no está en la frontera de D , también hemos visto que esto sólo puede ocurrir si $g'(g(z)) = z$. Como Γ' es numerable, tiene que haber un mismo g' que cumpla esta relación para una cantidad no numerable de puntos z en el interior de D , luego por el principio de prolongación analítica ha de ser $g \circ g' = 1$, luego $g = g'^{-1} \in \Gamma'$. (Notemos que, viendo a g y g' como matrices, lo que hemos probado es que $g = \pm g'^{-1}$ pero, como $-1 \in \Gamma'$, la conclusión es correcta.) ■

Así pues, podemos ver a los puntos de D menos los puntos de su frontera con parte real negativa (o, alternativamente, positiva) como representantes de las clases de equivalencia de retículos respecto del grupo modular.

De este teorema vamos a extraer muchas consecuencias. Pero antes conviene observar lo siguiente:

Interpretación en términos del semiplano de Poincaré Los resultados de esta sección tienen una interpretación geométrica muy natural, pero no en términos de la geometría euclídea. Recordemos que si definimos las rectas de H como las rectas verticales y las semicircunferencias de centro en el eje real, entonces H se convierte en un modelo de la geometría hiperbólica plana (el modelo de Poincaré) [G 11.13]. Las isometrías hiperbólicas son las transformaciones de Möbius (generales, no necesariamente directas) que fijan a H . En particular, los movimientos hiperbólicos (las isometrías que conservan la orientación) son las transformaciones de Möbius (directas) que fijan a H , es decir, las transformaciones asociadas a las matrices del grupo $\text{LG}(2, \mathbb{R})$. En particular, todos los elementos de Γ son movimientos hiperbólicos.

En estos términos, la frontera de D está formada por dos semirrectas hiperbólicas y un segmento de recta que une sus orígenes. Es un “triángulo con un vértice infinito” y, al aplicarle los movimientos de Γ (que transforman rectas en rectas), las figuras resultantes son también triángulos con un vértice infinito (sólo que el vértice infinito no tiene por qué ser el punto ∞ , sino un punto del eje real). Las diferencias de aspecto entre las distintas imágenes de D que vemos en la figura anterior son aparentes, es decir, son “euclídeas”, pues en términos de la geometría hiperbólica todas las imágenes son “iguales” en el sentido de que son congruentes. El teorema anterior puede enunciarse como que

$$H = \bigcup_{g \in \Gamma} g[D],$$

y que dos conjuntos $g_1[D]$ y $g_2[D]$ son disjuntos o tienen a lo sumo puntos de su frontera en común. El hecho de que todos los trasladados de D por las transformaciones de Γ sean “iguales” respecto a la geometría hiperbólica puede enunciarse diciendo que dichos trasladados forman una teselación del plano hiperbólico (un cubrimiento sin solapamientos —no triviales— por piezas congruentes entre sí).

De acuerdo con la sección [G 11.5], existen tres clases de movimientos hiperbólicos: giros, giros infinitos y traslaciones. A continuación vamos a llegar a este mismo resultado de forma más directa. ■

Si $g \in \text{LE}(2, \mathbb{R})$, sus puntos fijos en \mathbb{C}^∞ (es decir, los de su transformación de Möbius asociada) son sus vectores propios (los vectores propios de g como matriz) interpretados como coordenadas homogéneas de la recta proyectiva. Si g tiene un espacio de vectores propios de dimensión 2, entonces $g = \pm I$ y su transformación de Möbius asociada es la identidad. Descartando este caso, las posibilidades son que g tenga uno o dos espacios de vectores propios de dimensión 1 (según si su polinomio característico tiene una raíz doble o simple). Por consiguiente, g tiene uno o dos puntos fijos en \mathbb{C}^∞ . El hecho de que los coeficientes de g sean reales implica que si $z \in \mathbb{C}$ es un punto fijo, también lo es su conjugado \bar{z} . Con esto llegamos a la clasificación siguiente:

Definición 6.6 Sea $g \in \text{LE}(2, \mathbb{R})$ una transformación $g \neq \pm I$.

1. Diremos que g es *parabólica* si tiene un único punto fijo en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (que será, de hecho, su único punto fijo en \mathbb{C}^∞).
2. Diremos que g es *elíptica* si no tiene puntos fijos en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (en cuyo caso tendrá dos puntos fijos, un $z \in H$ y su conjugado $\bar{z} \notin H$).
3. Diremos que g es *hiperbólica* si tiene dos puntos fijos en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (que serán, de hecho, todos sus puntos fijos en \mathbb{C}^∞).

La discusión precedente muestra que cada transformación $g \in \text{LE}(2, \mathbb{R})$ distinta de $\pm I$ es de uno de estos tres tipos. En términos de la geometría hiperbólica las transformaciones parabólicas, elípticas e hiperbólicas se corresponden, respectivamente, con los giros infinitos, los giros y las traslaciones. El teorema siguiente permite determinar fácilmente el carácter de una matriz:

Teorema 6.7 Si $g \in \text{LE}(1, \mathbb{R})$, $g \neq \pm 1$, entonces

1. g es parabólica si y sólo si $|\text{Tr}(g)| = 2$,
2. g es elíptica si y sólo si $|\text{Tr}(g)| < 2$,
3. g es hiperbólica si y sólo si $|\text{Tr}(g)| > 2$.

DEMOSTRACIÓN: El polinomio característico de g es $x^2 - \text{Tr}(g)x + 1$, cuyo discriminante es $\text{Tr}(g)^2 - 4$. Es claro que g es parabólica si y sólo si tiene un único valor propio, lo cual equivale a que $\text{Tr}(g) = \pm 2$. Si $|\text{Tr}(g)| > 2$ entonces g tiene dos valores propios reales distintos, luego tiene dos subespacios de vectores propios reales y, por consiguiente, es hiperbólica. Igualmente se tiene el recíproco. Por exclusión tenemos también la caracterización de las matrices elípticas. ■

Por ejemplo, la transformación $t(z) = z + 1$ es una traslación euclídea, pero desde el punto de vista de la geometría hiperbólica es un giro alrededor de ∞

(tiene traza 2 y fija a ∞). En cambio, la transformación $s(z) = -1/z$ es un giro de 180° alrededor de i . (Es un giro porque tiene traza 0, su centro es i porque $s(i) = i$ y es un giro de 180° porque tiene orden 2.)

Definición 6.8 Diremos que $z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es un punto *parabólico* respecto del grupo modular Γ si existe un elemento parabólico $g \in \Gamma$ tal que $g(z) = z$. Diremos que $z \in H$ es *elíptico* respecto del grupo modular si existe un elemento elíptico $g \in \Gamma$ tal que $g(z) = z$.

Equivalentemente, si, para cada $z \in H$, consideramos el *estabilizador*

$$\Gamma_z = \{g \in \Gamma \mid zg = z\},$$

tenemos que Γ_z contiene siempre las matrices $\pm I$, y que z es elíptico si tiene más de dos elementos.

Notemos que si $z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es parabólico para Γ y $g \in \Gamma$, entonces $g(z)$ también lo es, pues si $f \in \Gamma$ es parabólica y $f(z) = z$, tenemos que $f^g \in \Gamma$ también es parabólica (por ejemplo, porque tiene la misma traza) y claramente $f^g(g(z)) = g(z)$. Igualmente, la imagen de un punto elíptico $z \in H$ por un elemento de Γ es de nuevo un punto elíptico.

Teorema 6.9 *Los puntos parabólicos del grupo modular son ∞ y los números racionales. Todos ellos constituyen una única clase de equivalencia. Los puntos elípticos son los equivalentes a i y a $\rho = (1 + \sqrt{-3})/2$.*

DEMOSTRACIÓN: Claramente ∞ queda fijo por la transformación parabólica $t(z) = z + 1$. Si $r = p/q$ es un número racional (con p y q primos entre sí), tomamos enteros u y v tales que $up + vq = 1$. Sea

$$g = \begin{pmatrix} p & q \\ u & v \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

Así $g(\infty) = r$, luego r es un punto parabólico equivalente a ∞ . Supongamos ahora que $z \in \mathbb{R}$ es parabólico y veamos que es un número racional. Sea

$$g = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \Gamma$$

una transformación parabólica tal que $g(z) = z$.

Esto significa que $cz^2 + (d - a)z - b = 0$ (con $c \neq 0$, o si no $g = \pm I$), y además z es la única solución de esta ecuación. Por consiguiente el polinomio es reducible en $\mathbb{Q}[x]$ y su raíz z ha de ser racional.

Pasemos ahora a estudiar los puntos elípticos. Si $\tau \in D$ cumple que existe un $g \in \Gamma$ distinto de $\pm I$ tal que $g(\tau) = \tau$, en la prueba del teorema 6.5 hemos visto que necesariamente τ está en la frontera de D , y que g es, salvo signo, una de las cinco matrices que elípticas que aparecen en el listado incluido en la prueba. Es fácil ver que estas cinco matrices se distribuyen así:

$$\Gamma_i = \{\pm I, \pm s\}, \quad \Gamma_\rho = \{\pm I, \pm st^{-1}, \pm ts\}, \quad \Gamma_{1+\rho} = \{\pm I, \pm t^{-1}s, \pm st\}.$$

Sucede que ρ y $1 + \rho$ son equivalentes, pero las clases de equivalencia ρ e i son distintas porque no son simétricos respecto del eje imaginario. Como toda clase de equivalencia elíptica debe tener un representante en D , concluimos que sólo existen estas dos. ■

También podemos considerar los estabilizadores en Γ de los puntos de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, y es inmediato que

$$\Gamma_\infty = \{\pm t^m \mid m \in \mathbb{Z}\},$$

pues $g \in \Gamma$ fija a ∞ si y sólo si $c = 0$, lo cual lleva a que $g(\tau) = \tau + b$.

Es claro que si $\tau, \tau' \in \mathbb{C}$ cumplen $\tau' = g(\tau)$, con $g \in \Gamma$, entonces los estabilizadores son conjugados: $\Gamma_{\tau'} = \Gamma_\tau^g$, luego, si son finitos, ambos tienen el mismo orden. En particular, si $\tau \in H$ es cualquier punto elíptico, tenemos que el estabilizador Γ_τ es finito, y su orden es 4 o 6 según si τ es equivalente a i o a ρ .

Desde un punto de vista geométrico, son más ilustrativas las imágenes $\bar{\Gamma}_\tau$ de los estabilizadores Γ_τ en el grupo de las transformaciones modulares, de modo que $\bar{\Gamma}_\tau \cong \Gamma_\tau / \{\pm I\}$. Así, $\bar{\Gamma}_i = \langle s \rangle$ tiene orden 2 y $\bar{\Gamma}_\rho = \langle ts \rangle$ tiene orden 3 (por lo que ts es un giro de -120°). Además, $\bar{\Gamma}_\infty = \langle t \rangle$ es cíclico infinito.

6.2 Ejemplos de funciones modulares

En la sección siguiente introduciremos las funciones modulares, que son una familia de funciones meromorfas, pero antes vamos a presentar aquí los principales ejemplos de tales funciones. La idea fundamental es que en el capítulo anterior hemos asignado varios números complejos y funciones a cada retículo completo R en \mathbb{C} , y ahora sabemos que no perdemos generalidad si nos limitamos a estudiar los retículos de la forma $\langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}}$ con $\tau \in H$. La ventaja es que así podemos tomar τ en lugar de R como variable, con lo que en lugar de tener funciones definidas sobre algo tan abstracto como el conjunto de todos los retículos completos en \mathbb{C} , pasamos a tener funciones de variable compleja definidas sobre el semiplano abierto H . Concretamente, definimos:

$$G_n(\tau) = G_n(\langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}}), \quad g_2(\tau) = g_2(\langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}}), \quad g_3(\tau) = g_3(\langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}}),$$

$$\Delta(\tau) = \Delta(\langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}}).$$

Más aún, podemos definir $\wp : \mathbb{C} \times H \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ de modo que $\wp(z; \tau)$ sea la función de Weierstrass del retículo $\langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}}$ actuando sobre z . Vamos a probar que todas estas funciones son holomorfas. El punto de partida es el teorema siguiente:

Teorema 6.10 *Para cada $\alpha > 2$, la función $f_\alpha : H \rightarrow \mathbb{C}$ dada por*

$$f_\alpha(\tau) = \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(m + n\tau)^\alpha}$$

es holomorfa en H .

DEMOSTRACIÓN: Observemos que $f_\alpha(\tau)$ es la serie asignada por el teorema 5.10 al retículo $\langle 1, \tau \rangle$. Basta ver que converge absoluta y uniformemente en cada conjunto de la forma

$$S = \{x + yi \mid |x| \leq A, \quad y \geq \delta\}, \quad A > 0, \quad \delta > 0.$$

Por el criterio de mayoración de Weierstrass y teniendo en cuenta 5.10, basta ver que existe una constante $M > 0$ tal que

$$\frac{1}{|m + n\tau|^\alpha} \leq \frac{M}{|m + ni|^\alpha},$$

para todo $\tau \in S$ y todo $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. A su vez, basta ver que existe una constante K tal que $|m + n\tau|^2 > K|m + ni|^2$ para todo $\tau \in S$. (Si $T^2 > K$, entonces $T^\alpha > K^{\alpha/2}$.) Si $\tau = x + iy$, esto equivale a

$$(m + nx)^2 + (ny)^2 > K(m^2 + n^2).$$

Si $n = 0$ esto se cumple siempre que $0 < K < 1$. Si $n \neq 0$ llamamos $q = m/n$, con lo que la desigualdad equivale a

$$\frac{(q + x)^2 + y^2}{1 + q^2} > K.$$

Veamos que esto se cumple para todo q con

$$K = \frac{\delta^2}{1 + (A + \delta)^2}.$$

Si $|q| \leq A + \delta$ es trivial, pues $(q + x)^2 \geq 0$ e $y^2 \geq \delta^2$. Si $|q| > A + \delta$, entonces $|x/q| < |x|/(A + \delta) \leq A/(A + \delta) < 1$, luego

$$\left|1 + \frac{x}{q}\right| \geq 1 - \left|\frac{x}{q}\right| > 1 - \frac{A}{A + \delta} = \frac{\delta}{A + \delta}.$$

Por consiguiente, $|q + x| \geq \frac{q\delta}{A + \delta}$ y

$$\frac{(q + x)^2 + y^2}{1 + q^2} > \frac{\delta^2}{(A + \delta)^2} \frac{q^2}{1 + q^2} \geq \frac{\delta^2}{(A + \delta)^2} \frac{(A + \delta)^2}{1 + (A + \delta)^2} = K,$$

donde hemos usado que la función $t/(1 + t)$ es creciente. ■

Así pues:

Teorema 6.11 *Las funciones $G_{2k}(\tau)$ (para $k \geq 2$), $g_2(\tau)$, $g_3(\tau)$ y $\Delta(\tau)$ son holomorfas en el semiplano $\text{Im } \tau > 0$.*

Aquí nos hemos restringido a las funciones $G_{2k}(\tau)$ porque ya hemos observado que las funciones para índice impar son nulas.

Seguidamente probaremos que la función $\wp(z; \tau)$ es holomorfa como función de dos variables. Para ello necesitamos algunos cálculos previos. Partimos de la factorización del seno dada por el teorema [ITAn 8.11] (demostrada también en la página 135):

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{m}\right) \left(1 + \frac{z}{m}\right).$$

Tomando la derivada logarítmica de ambos miembros obtenemos que

$$\pi \frac{\cos \pi z}{\operatorname{sen} \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-m} + \frac{1}{z+m} \right).$$

De la relación entre las funciones trigonométricas y la exponencial se sigue que

$$\cos \pi z = \frac{1}{2} e^{-i\pi z} (e^{2\pi iz} + 1), \quad \operatorname{sen} \pi z = \frac{1}{2i} e^{-i\pi z} (e^{2\pi iz} - 1).$$

Por consiguiente,

$$\pi \frac{\cos \pi z}{\operatorname{sen} \pi z} = \pi i \frac{e^{2\pi iz} + 1}{e^{2\pi iz} - 1} = \pi i + \frac{2\pi i}{e^{2\pi iz} - 1} = \pi i - 2\pi i \sum_{m=0}^{\infty} e^{2m\pi iz},$$

donde la última serie geométrica converge cuando $|e^{2\pi iz}| < 1$, es decir, cuando $\operatorname{Im} z > 0$. Así pues,

$$\frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-m} + \frac{1}{z+m} \right) = \pi i - 2\pi i \sum_{m=0}^{\infty} e^{2m\pi iz}. \quad (6.2)$$

Derivando $k-1$ veces:

$$\begin{aligned} & (-1)^{k-1} (k-1)! \left(\frac{1}{z^k} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z-m)^k} + \frac{1}{(z+m)^k} \right) \right) \\ &= -(2\pi i)^k \sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} e^{2m\pi iz}. \end{aligned}$$

Hay que señalar que la serie del miembro izquierdo de (6.2) converge absolutamente con los sumandos emparejados como están (porque así sucede con el producto infinito de partida), pero no podríamos descomponerla en suma de dos series. Sin embargo, para $k \geq 2$, las series

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(z \pm m)^k}$$

convergen absolutamente en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, por ejemplo, porque

$$\lim_m \frac{|z \pm m|^k}{m^k} = 1,$$

lo que permite acotar una cola de la serie por $2\zeta(k)$. Por consiguiente, podemos agrupar los términos y escribir, para $k \geq 2$ y $z \in H$,

$$(-1)^k \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z+m)^k} = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} e^{2m\pi iz}. \quad (6.3)$$

Más adelante necesitaremos esta fórmula en toda su generalidad, pero de momento nos basta el caso $k = 2$. Pasamos ya a considerar la función de Weierstrass:

$$\wp(z; \tau) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}} \left(\frac{1}{(z - m\tau - n)^2} - \frac{1}{(m\tau + n)^2} \right),$$

Usando (6.3) para $k = 2$ vemos que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z+n)^2} = (2\pi i)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n e^{2n\pi iz} = (2\pi i)^2 \frac{e^{2\pi iz}}{(1 - e^{2\pi iz})^2}. \quad (6.4)$$

En la expresión de $\wp(z; \tau)$ separamos la suma para $m = 0$ de la suma para $m \neq 0$ y queda

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z+n)^2} - 2\zeta(2) + \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{(z+m\tau+n)^2} + \frac{1}{(-z+m\tau+n)^2} \right) \right. \\ \left. - 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m\tau+n)^2} \right). \end{aligned}$$

Aplicamos (6.4) a z , $z + m\tau$ y $-z + m\tau$:

$$\begin{aligned} \wp(z; \tau) &= (2\pi i)^2 \frac{e^{2\pi iz}}{(1 - e^{2\pi iz})^2} - \frac{\pi^2}{3} \\ &+ (2\pi i)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n e^{2n\pi i(z+m\tau)} + n e^{2n\pi i(-z+m\tau)} - 2n e^{2nm\pi i\tau} \right). \end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \wp(z; \tau) = \frac{1}{12} + \frac{e^{2\pi iz}}{(1 - e^{2\pi iz})^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{2\pi i n m \tau} (e^{2n\pi iz} + e^{-2n\pi iz} - 2).$$

De aquí es fácil deducir que la función $\wp(z; \tau)$ es holomorfa como función de dos variables, pero enseguida encontraremos una expresión para \wp con la que esto será inmediato. Antes usamos la fórmula anterior para probar lo siguiente:

Teorema 6.12 *Las funciones*

$$e_1(\tau) = \wp(1/2; \tau), \quad e_2(\tau) = \wp(\tau/2; \tau), \quad e_3(\tau) = \wp((1 + \tau)/2; \tau)$$

son holomorfas en H .

DEMOSTRACIÓN: Si hacemos $z = \tau/2$ en la fórmula que acabamos de obtener, podemos agrupar los sumatorios como una serie de Laurent $f(w)$, donde $w = e^{i\pi\tau}$, y sabemos que $f(w)$ es convergente si $\tau \in H$, es decir, si $w \in D(0, 1) \setminus \{0\}$. Puesto que una serie de Laurent convergente determina siempre una función holomorfa, concluimos que $e_2(\tau) = \wp(\tau/2; \tau)$ es holomorfa en H . El mismo argumento vale para e_3 , pero no para e_1 , porque no podemos sustituir $z = 1/2$, ya que $1/2 \notin H$, pero como $e_1(\tau) = -e_2(\tau) - e_3(\tau)$, también ésta es holomorfa. ■

De la relación (5.7) obtenemos que

$$\wp(z; \tau) = e_2(\tau) + \frac{\sigma_2^2(z; \tau)}{\sigma^2(z; \tau)},$$

y el teorema 5.50 nos da a su vez la relación:

$$\wp(z; \tau) = \pi^2 \theta_2^2(\tau) \theta_3^2(\tau) \frac{\theta_4^2(z, \tau)}{\theta_1^2(z, \tau)} + e_2(\tau),$$

y así es inmediato el teorema siguiente:

Teorema 6.13 *La función $\wp : \mathbb{C} \times H \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ es holomorfa en el abierto de $\mathbb{C} \times H$ donde toma valores finitos, es decir, cuando $z \notin \langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}}$.*

Observemos cómo se comportan las funciones que estamos estudiando respecto de la equivalencia de retículos. En principio consideramos de nuevo las funciones definidas sobre retículos en general. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ es no nulo, es inmediato que

$$G_{2k}(\alpha R) = \alpha^{-2k} G_{2k}(R), \quad (6.5)$$

luego, teniendo en cuenta que $g_2 = 60G_4$ y $g_3 = 140G_6$, tenemos también que

$$g_2(\alpha R) = \alpha^{-4} g_2(R), \quad g_3(\alpha R) = \alpha^{-6} g_3(R),$$

y a su vez $\Delta(R) = g_2^3 - 27g_3^2$ cumple que

$$\Delta(\alpha R) = \alpha^{-12} \Delta(R).$$

Todas estas relaciones muestran que los números G_n , g_2 , g_3 , Δ asociados a los retículos no son invariantes respecto de la equivalencia lineal, es decir, que las funciones correspondientes asignan en general números distintos a retículos linealmente equivalentes. Sin embargo, estas mismas relaciones prueban que la función

$$J(R) = \frac{g_2^3(R)}{\Delta(R)}$$

sí que es invariante respecto de la equivalencia lineal. Sucede que también se cumple el recíproco, de modo que dos retículos completos son linealmente equivalentes si y sólo si tienen el mismo invariante J , y ésta es una de las muchas razones por las que tiene interés esta función. Una forma rápida de probarlo es a través del teorema siguiente:

Teorema 6.14 Sean R y R' dos retículos completos en \mathbb{C} y sean V y V' las curvas elípticas asociadas según el teorema 5.31. Si $J(R) = J(R')$, entonces existe un $\alpha \in \mathbb{C}$ no nulo tal que la homografía $H : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dada por $H([x, y, z]) = [\alpha^2 x, \alpha^3 y, z]$ cumple $H[V] = V'$.

DEMOSTRACIÓN: Observemos que una homografía del tipo indicado en el enunciado fija obviamente a la recta infinita, por lo que se restringe a la biyección afín $h : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ dada por $h(x, y) = (\alpha^2 x, \alpha^3 y)$. También es claro que $H([0, 1, 0]) = [0, 1, 0]$, por lo que basta probar que $h[V_0] = V'_0$, donde V_0 y V'_0 son las partes finitas de V y V' . Pongamos que éstas vienen dadas, respectivamente, por las ecuaciones

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3, \quad y'^2 = 4x^3 - g'_2x - g'_3.$$

La hipótesis es que

$$\frac{g_2^3}{g_3^3 - 27g_3^2} = J(R) = J(R') = \frac{g'^3_2}{g'^3_3 - 27g'^2_3}.$$

Distinguiremos tres casos:

Si $J(R) = J(R') = 0$, entonces $g_2 = g'_2 = 0$, luego $g_3 \neq 0 \neq g'_3$ (porque $\Delta \neq 0 \neq \Delta'$). Tomamos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha^6 = g'_3/g_3$. Así, un punto $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ está en V_0 si y sólo si $y^2 = 4x^3 - g_3$, si y sólo si $(\alpha^3 y)^2 = 4(\alpha^2 x)^3 - \alpha^6 g_3$, si y sólo si $h(x, y) \in V'_0$.

Si $J(R) = J(R') = 1$, entonces $g_3 = g'_3 = 0$, luego $g_2 \neq 0 \neq g'_2$. Tomamos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha^4 = g'_2/g_2$. Así, un punto $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ está en V_0 si y sólo si cumple la ecuación $y^2 = 4x^3 - g_2x$, si y sólo si $(\alpha^3 x)^2 = 4(\alpha^2 x)^3 - \alpha^4 g_2(\alpha^2 x)$, si y sólo si $h(x, y) \in V'$.

Supongamos, por último, que $J(R) = J(R') \neq 0, 1$, lo que se traduce en que las cuatro cantidades g_2, g_3, g'_2, g'_3 son no nulas. Desarrollando la igualdad $J(R) = J(R')$ llegamos a que $(g'_2/g_2)^3 = (g'_3/g_3)^2$. Tomamos $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha^4 = g'_2/g_2$. Entonces $\alpha^{12} = (g'_2/g_2)^3 = (g'_3/g_3)^2$, luego $\alpha^6 = \pm g'_3/g_3$. Si se da el signo negativo, cambiamos α por $i\alpha$, con lo que sigue cumpliéndose que $\alpha^4 = g'_2/g_2$, pero además $\alpha^6 = g'_3/g_3$. Así, un punto $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ está en V_0 si y sólo si $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$, si y sólo si $(\alpha^3 y)^2 = 4(\alpha^2 x)^3 - \alpha^4 g_2(\alpha^2 x) - \alpha^6 g_3$, si y sólo si $h(x, y) \in V'$. ■

En las condiciones del teorema anterior, es claro que H es una aplicación biholomorfa, luego se restringe a una aplicación holomorfa $H : V \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, que a su vez puede verse como una aplicación holomorfa $H : V \rightarrow V'$ (por el teorema A.45). Similarmente se razona que H^{-1} es holomorfa, luego concluimos

que V y V' son variedades analíticas biholomorfas, luego por el teorema A.55 vemos que los toros complejos \mathbb{C}/R y \mathbb{C}/R' también son biholomorfos, y por A.35 los retículos R y R' son linealmente equivalentes.

Nota Acabamos de probar que, tal y cómo afirmábamos, dos retículos completos en \mathbb{C} son linealmente equivalentes si y sólo si tienen el mismo invariante.

A su vez, si definimos el invariante de un toro complejo como el del retículo que lo define, podemos afirmar igualmente que dos toros complejos son analíticamente isomorfos si y sólo si tienen el mismo invariante. No obstante, en lo sucesivo no vamos a usar estos hechos, y más adelante obtendremos una prueba alternativa (teorema 6.30) que no requiere considerar las estructuras analíticas de las curvas elípticas o de los toros complejos. ■

Pasemos a considerar de nuevo las funciones holomorfas definidas sobre H a través de los retículos de la forma $\langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}}$. Ahora tenemos una más:

Definición 6.15 La *función modular de Klein* es la función $J : H \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$J(\tau) = J(\langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}}) = \frac{g_2^3(\tau)}{\Delta(\tau)}.$$

Es claro que J es holomorfa en H . Según el teorema 6.3, el hecho de que retículos linealmente equivalentes tengan el mismo invariante J se traduce en la relación

$$J\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = J(\tau),$$

para todos los números enteros a, b, c, d tales que $ad - bc = 1$. Las demás funciones que estamos considerando cumplen relaciones un poco más sofisticadas:

$$\begin{aligned} G_{2k}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) &= G_{2k}\left(\left\langle 1, \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \right\rangle_{\mathbb{Z}}\right) = (c\tau + d)^{2k} G_{2k}(\langle c\tau + d, a\tau + b \rangle_{\mathbb{Z}}) \\ &= (c\tau + d)^{2k} G_{2k}(\langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}}) = (c\tau + d)^{2k} G_{2k}(\tau), \end{aligned} \quad (6.6)$$

y a su vez

$$g_2\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^4 g_2(\tau), \quad g_3\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^6 g_3(\tau),$$

$$\Delta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^{12} \Delta(\tau),$$

siempre bajo el supuesto de que $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $ad - bc = 1$. En particular, tomando $c = 0$, $a = b = d = 1$, vemos que todas las funciones que estamos considerando tienen periodo 1. De aquí deducimos:

Teorema 6.16 Para todo $k \geq 2$, se cumple que

$$\lim_{\text{Im } \tau \rightarrow +\infty} G_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k), \quad \lim_{\text{Im } \tau \rightarrow +\infty} \Delta(\tau) = 0, \quad \lim_{\text{Im } \tau \rightarrow +\infty} J(\tau) = \infty.$$

Todos los límites son uniformes en $\text{Re } \tau$.

DEMOSTRACIÓN: Como G_{2k} tiene periodo 1, no perdemos generalidad si suponemos que $|\operatorname{Re} \tau| \leq 1/2$, $\operatorname{Im} \tau \geq 1$. En la prueba del teorema 6.10 hemos visto que la serie que define a G_{2k} converge uniformemente en el conjunto de los puntos τ en estas condiciones, luego podemos intercambiar el límite con la suma:

$$\begin{aligned} \lim_{\operatorname{Im} \tau \rightarrow +\infty} \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(m+n\tau)^{2k}} &= \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}} \lim_{\operatorname{Im} \tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^{2k}} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{m^{2k}} = 2\zeta(2k). \end{aligned}$$

En particular,

$$\lim_{\operatorname{Im} \tau \rightarrow +\infty} g_2(\tau) = 120\zeta(4) = \frac{4\pi^4}{3}, \quad \lim_{\operatorname{Im} \tau \rightarrow +\infty} g_3(\tau) = 280\zeta(6) = \frac{8\pi^6}{27},$$

luego

$$\lim_{\operatorname{Im} \tau \rightarrow +\infty} \Delta(\tau) = \lim_{\operatorname{Im} \tau \rightarrow +\infty} g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau) = 0,$$

y a su vez

$$\lim_{\operatorname{Im} \tau \rightarrow +\infty} J(\tau) = \lim_{\operatorname{Im} \tau \rightarrow +\infty} \frac{g_2^3(\tau)}{\Delta(\tau)} = \infty. \quad \blacksquare$$

Con esto ya podemos probar un resultado fundamental:

Teorema 6.17 *La función modular de Klein $J : H \rightarrow \mathbb{C}$ es suprayectiva.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema de la aplicación abierta $J[H]$ es abierto en \mathbb{C} . Basta probar que también es cerrado. Para ello consideramos una sucesión $\{\tau_n\}_{n=0}^\infty$ en H tal que $J(\tau_n)$ converja a un cierto $b \in \mathbb{C}$. Tenemos que probar que $b \in J[H]$. Si D es el dominio fundamental considerado en el teorema 6.5, No perdemos generalidad si suponemos que $\tau_n \in D$ para todo n . Si la sucesión está acotada, tomando una subsucesión podemos suponer que converge a un cierto $a \in \mathbb{C}$, con lo que $b = J(a)$.

Si la sucesión no está acotada, también tomando una subsucesión podemos suponer que tiende a ∞ , pero entonces el teorema anterior nos da que $J(\tau_n)$ también tiende a ∞ , cuando estábamos suponiendo que tendía a b , contradicción. \blacksquare

En otras palabras: todo número complejo es el invariante de un retículo completo. Más aún, el teorema siguiente, junto con 5.31, implica que toda curva elíptica puede parametrizarse por un toro complejo mediante las funciones de Weierstrass:

Teorema 6.18 *Si g_2, g_3 son números complejos tales que $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$, entonces existe un retículo completo $R \subset \mathbb{C}$ tal que $g_2(R)$ y $g_3(R)$ sean los números dados.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior existe un τ tal que

$$J(\tau) = \frac{g_2^3}{\Delta}.$$

Para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ no nulo tenemos que

$$\frac{g_2^3(\langle \alpha, \alpha\tau \rangle_{\mathbb{Z}})}{\alpha^{-12} \Delta(\langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}})} = J(\langle \alpha, \alpha\tau \rangle_{\mathbb{Z}}) = J(\tau) = \frac{g_2^3}{\Delta}.$$

Ahora elegimos α para que los denominadores sean iguales, con lo que también lo serán los numeradores. Si llamamos $R = \langle \alpha, \alpha\tau \rangle_{\mathbb{Z}}$, tenemos que $g_2^3(R) = g_2^3$, y por la igualdad de los denominadores $g_3^2(R) = g_3^2$. Así pues, $g_3^2(R) = \pm g_3$. Si se diera el signo negativo usamos que

$$g_3(iR) = i^{-6} g_3(R) = -g_3(R), \quad g_2(iR) = i^4 g_2(R) = g_2(R),$$

luego cambiando R por iR resulta que $g_3(R) = g_3$ y $g_2(R) = \zeta g_2$, donde ζ es una raíz cúbica de la unidad.

Finalmente tomamos una raíz sexta de la unidad ζ_0 y usamos que

$$g_3(\zeta_0 R) = \zeta_0^6 g_3(R) = g_3, \quad g_2(\zeta_0 R) = \zeta_0^{-4} g_2(R) = \zeta_0^2 \zeta g_2.$$

Ahora bien, si ζ_0 recorre las raíces sextas de la unidad, entonces ζ_0^2 recorre las raíces cúbicas, luego eligiendo adecuadamente ζ_0 y cambiando R por $\zeta_0 R$ obtenemos un retículo completo que cumple lo requerido. ■

Algunas consecuencias Dados tres números complejos distintos dos a dos e_1, e_2, e_3 tales que $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, existe un retículo R para el que los números dados son los definidos en 5.22 (para una base adecuada). En efecto, basta considerar g_2 y g_3 dados por

$$4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3) = 4x^3 - g_2x - g_3,$$

que cumplen $\Delta = 0$, porque los e_i son distintos dos a dos, y a su vez el retículo R dado por el teorema anterior. Por 5.26 los e_i definidos en 5.22 son las raíces de este polinomio, luego son los e_i de partida. Eligiendo la base de R respecto a la cual los calculamos podemos exigir que los índices coincidan.

A su vez, esto implica que, eligiendo el retículo completo R , podemos hacer que la expresión

$$\frac{e_3 - e_1}{e_2 - e_1}$$

tome cualquier valor complejo prefijado distinto de 0, 1. En efecto, fijamos, por ejemplo, $e_1 = 1$, tomamos $e_3 = z$ arbitrario y $e_2 = -z - 1$, con lo que la expresión se convierte en

$$-\frac{z - 1}{z + 2},$$

con lo que tenemos una transformación de Möbius que toma todos los valores complejos, si bien tenemos que exceptuar el valor 0 porque no podemos hacer $z = 1$ (ya que entonces sería $e_1 = e_3$) y el valor 1, porque no podemos hacer $z = -1/2$ (ya que entonces sería $e_2 = e_3$). El caso $e_1 = e_2$ no afecta porque corresponde a $z = -2$, que hace que la función tome el valor ∞ .

Finalmente, en virtud de la relación (5.11), concluimos que siempre es posible elegir $\tau \in H$ para que el módulo k^2 de las funciones de Jacobi correspondientes tome cualquier valor prefijado distinto de 0, 1 (y estos dos valores son claramente imposibles). ■

Antes de pasar al estudio general de las funciones modulares calculamos un par de valores de la función J :

Teorema 6.19 Si $\rho = e^{2\pi i/3}$, la función modular de Klein cumple $J(\rho) = 0$ y $J(i) = 1$.

DEMOSTRACIÓN: Empecemos con $J(i)$. Para ello llamamos $R = \langle 1, i \rangle_{\mathbb{Z}}$ y observamos que cuando (m, n) recorre $\mathbb{Z}^2 \setminus (0, 0)$, entonces tanto $m + ni$ como $i(m + ni) = -n + mi$ recorren $R \setminus \{0\}$. Por lo tanto,

$$G_6(i) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(i(m+ni))^6} = - \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(m+ni)^6} = -G_6(i),$$

luego $G_6(i) = 0$ y $g_3(i) = 140G_6(i) = 0$. Esto ya implica que $J(i) = 0$. No obstante, observamos también que

$$\begin{aligned} G_4(i) &= \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{m^4} + \sum_{n > 0} \left(\frac{1}{(m+ni)^4} + \frac{1}{(m-ni)^4} \right) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{m^4} + \sum_{n > 0} \frac{(m-ni)^4 + (m+ni)^4}{(m^2+n^2)^4}. \end{aligned}$$

Desarrollando el numerador concluimos fácilmente que $G_4(i) > 0$, luego también $g_2(i) = 60G_4(i) > 0$. Aproximando numéricamente la expresión precedente se puede comprobar que

$$g_2(i) = 0.738565313004819736 \dots$$

Consideremos ahora $R = \langle 1, \rho \rangle_{\mathbb{Z}}$. Teniendo en cuenta que $\rho^2 + \rho + 1 = 0$, calculamos

$$\begin{aligned} G_4(\rho) &= \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(m+n\rho)^4} = \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(m\rho^3+n\rho)^4} \\ &= \frac{1}{\rho^4} \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(m\rho^2+n)^4} = \frac{1}{\rho} \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{((n-m)-m\rho)^4} \\ &= \frac{1}{\rho} \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(m+n\rho)^4} = \frac{1}{\rho} G_4(\rho), \end{aligned}$$

de donde se sigue que $G_4(\rho) = 0$, e igualmente $g_2(\rho) = 60G_4(\rho) = 0$. Por consiguiente el invariante es $J(\rho) = 0$. ■

6.3 Funciones y formas modulares

Pasamos ya a introducir una definición general de función modular que abarque los ejemplos que hemos estudiado en la sección anterior. Conviene comparar el caso que nos ocupa con el de las funciones elípticas, que pueden verse como funciones meromorfas invariantes por un cierto grupo de aplicaciones biholomorfas de \mathbb{C} en sí mismo (las traslaciones $z \mapsto z + \omega$ asociadas a los elementos ω de un retículo completo R).

El hecho de que una función meromorfa sea invariante por un grupo de tales características le confiere unas propiedades muy peculiares (las propiedades que hemos probado para las funciones elípticas). Nuestro propósito ahora es estudiar de forma análoga las funciones meromorfas en H que son invariantes respecto del grupo modular, pero aquí hay que señalar dos diferencias importantes respecto del caso de las funciones elípticas:

Por una parte, si nos restringimos estrictamente a funciones invariantes respecto del grupo modular, estamos excluyendo las funciones G_{2k} y Δ , cuando hemos visto que el estudio de funciones estrictamente invariantes como J pasa por estudiar previamente estas otras funciones, así que relajaremos la definición para que incluya a estas funciones “próximas” a las funciones invariantes.

Por otra parte, un hecho fundamental en la teoría de las funciones elípticas es que los paralelogramos fundamentales son compactos, mientras que el dominio D equivalente para el grupo modular no lo es. Por ello, para que las funciones meromorfas que vamos a considerar se comporten adecuadamente vamos a tener que exigir que sean también meromorfas “en infinito”, en un sentido que pasamos a precisar, de modo que la consideración del infinito equivale a “compactificar” el dominio D , en el mismo sentido en que \mathbb{C}^∞ compactifica a \mathbb{C} .

La meromorfa de una función modular en infinito la definiremos a través de un desarrollo en serie de Fourier:

Desarrollos en serie de Fourier Sea $f : H \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función meromorfa con periodo 1. Supongamos que existe un $c > 0$ tal que f es holomorfa en el semiplano $\text{Im } \tau > c$ (lo cual se interpreta como que ∞ es una singularidad aislada de f). En 5.5 hemos probado que toda función entera en \mathbb{C} con periodo 1 admite una expresión de la forma

$$f(\tau) = f^*(e^{2\pi i \tau}),$$

para cierta función holomorfa f^* en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, y ahora observamos que el argumento vale igualmente para funciones holomorfas en el semiplano $\text{Im } \tau > c$, con el único cambio de que entonces f^* es holomorfa en $D(0, e^{-2\pi c}) \setminus \{0\}$. Igualmente podemos considerar el desarrollo en serie de Laurent de f^* en 0, que a su vez da lugar a un desarrollo en serie de Fourier de f .

$$f(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2n\pi i \tau}, \quad a_n \in \mathbb{C}, \quad \text{Im } \tau > c,$$

donde la convergencia es casi uniforme en H . ■

Definición 6.20 Diremos que una función meromorfa $f : H \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ es una *función modular* de grado $k \in \mathbb{Z}$ si cumple las propiedades siguientes:

1. Para todo $\tau \in H$ y toda matriz

$$g = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \Gamma,$$

se cumple que $f(\tau g) = (c\tau + d)^k f(\tau)$. En particular $f(\tau + 1) = f(\tau)$.

2. Existe un $c > 0$ tal que f es holomorfa en el semiplano $\text{Im } \tau > c$.

3. El desarrollo en serie de Fourier de f es de la forma

$$f(\tau) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n e^{2n\pi i\tau},$$

para cierto $n_0 \in \mathbb{Z}$.

Las condiciones 2 y 3 afirman que la función f es, en cierto sentido, “meromorfa en ∞ ”. Si f no es idénticamente nula, entonces hay un mínimo n_0 que cumple la propiedad 3 con $a_{n_0} \neq 0$, y a dicho entero lo representaremos por $o(f, \infty)$.

Equivalentemente, si $f(\tau) = f^*(e^{2\pi i\tau})$, estamos definiendo $o(f, \infty) = o(f^*, 0)$.

Del mismo modo, diremos que f tiene un polo (resp. cero) de orden r en ∞ si f^* tiene un polo (resp. cero) de orden r en 0, lo cual equivale a su vez a que $o(f, \infty) = -r < 0$ (resp. $o(f, \infty) = r > 0$). Si $o(f, \infty) \geq 0$, podemos definir

$$f(\infty) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x + iy) = a_0 = f^*(0).$$

En este caso diremos también que f es holomorfa en ∞ .

La propiedad 1 aplicada a $g = -I$ nos da que $f(\tau) = (-1)^k f(\tau)$, de donde se sigue que no hay funciones modulares no nulas de grado impar.

Llamaremos *formas modulares* a las funciones modulares holomorfas (tanto en H como en ∞).

Teorema 6.21 Si $k > 1$ es un número natural, la serie de Eisenstein

$$G_{2k}(\tau) = \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(m + n\tau)^{2k}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \ast \frac{1}{(m + n\tau)^{2k}}$$

(donde el asterisco en el sumatorio indica que $m \neq 0$ si $n = 0$) admite el desarrollo en serie de Fourier

$$G_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k) + 2 \frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) e^{2n\pi i\tau}, \quad \text{donde } \sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k.$$

De hecho, la última igualdad vale incluso para $k = 1$ si tomamos la segunda expresión como definición de $G_2(\tau)$.

Por consiguiente, ya podemos afirmar que G_{2k} (para $k \geq 2$) es una forma modular de grado $2k$.

DEMOSTRACIÓN: En la fórmula (6.3) cambiamos k por $2k$ y z por $n\tau$, con $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, con lo que obtenemos, para $k \geq 1$ y $\tau \in H$,

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^{2k}} = \frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} m^{2k-1} e^{2mn\pi i\tau}.$$

Por lo tanto, para $k \geq 2$ y $\tau \in H$, tenemos que

$$\begin{aligned} G_{2k}(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^{2k}} \\ &= 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^{2k}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^{2k}} \\ &= 2\zeta(2k) + 2 \frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m^{2k-1} e^{2mn\pi i\tau} \\ &= 2\zeta(2k) + 2 \frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) e^{2n\pi i\tau}. \end{aligned}$$

Ahora observamos que todas las igualdades anteriores valen para $k = 1$ excepto la primera. En efecto, la única que no es inmediata es la última, pero, llamando $z = e^{2\pi i\tau}$, se trata de probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m^{2k-1} z^{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} d^{2k-1} z^n \quad (6.7)$$

para $|z| < 1$. Ahora bien,

$$\sum_{d|n} |d^{2k-1} z^n| \leq nn^{2k-1} |z|^n = n^{2k} |z|^n$$

y la serie $\sum_n n^{2k} z^n$ converge para $|z| < 1$ (por ejemplo, por [An 3.60]), luego la serie de la derecha en (6.7) es absolutamente convergente, luego por [An 2.88] también lo es la serie

$$\sum_{(d,n) \in I} d^{2k-1} z^n,$$

donde $I = \{(d, n) \mid d \mid n\}$, y ambos miembros de (6.7) coinciden con esta serie precisamente por [An 2.88]. ■

En particular, teniendo en cuenta que

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945},$$

vemos que

$$\begin{aligned} g_2(\tau) &= 60G_4(\tau) = \frac{(2\pi)^4}{2^2 \cdot 3} \left(1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) e^{2n\pi i\tau} \right), \\ g_3(\tau) &= 140G_6(\tau) = \frac{(2\pi)^6}{2^3 \cdot 3^3} \left(1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) e^{2n\pi i\tau} \right), \end{aligned}$$

luego g_2 y g_3 son formas modulares de grados 4 y 6, respectivamente. De aquí deducimos a su vez:

Teorema 6.22 *La función $\Delta(\tau)$ tiene un desarrollo en serie de Fourier en el semiplano H de la forma*

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{2n\pi i\tau},$$

donde la función $\tau(n)$ (que no hay que confundir con la variable τ) toma valores enteros y $\tau(1) = 1$.

DEMOSTRACIÓN: Llamemos

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) e^{2n\pi i\tau}, \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) e^{2n\pi i\tau}.$$

Entonces

$$\Delta(\tau) = g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau) = \frac{64\pi^{12}}{27} ((1 + 240A)^3 - (1 - 504B)^2).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} (1 + 240A)^3 - (1 - 504B)^2 &= 1 + 720A + 3 \cdot 240^2 A^2 + 240^3 A^3 - 1 + 1008B - 504^2 B^2 \\ &= 12^2(5A + 7B) + 12^3(100A^2 - 147B^2 + 8000A^3). \end{aligned}$$

Además, para todo entero d se cumple que

$$5d^3 + 7d^5 = d^3(5 + 7d^2) \equiv \begin{cases} d^3(d^2 - 1) \equiv 0 \pmod{3}, \\ d^3(1 - d^2) \equiv 0 \pmod{4}, \end{cases}$$

y al sumar sobre todos los divisores de $n \in \mathbb{Z}$ obtenemos que $12 \mid 5\sigma_3(n) + 7\sigma_5(n)$, por lo que 12 divide a todos los coeficientes de la serie $5A + 7B$ y 12^3 divide a todos los coeficientes de $(1 + 240A)^3 - (1 - 504B)^2$. Así pues,

$$\Delta(\tau) = \frac{64\pi^{12}}{27} 12^3 \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{2n\pi i\tau} = (2\pi)^{12} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{2n\pi i\tau},$$

donde los coeficientes $\tau(n)$ son enteros.

El coeficiente de $e^{2\pi i\tau}$ tanto en A como en B es $\sigma_3(1) = \sigma_5(1) = 1$, con lo que el coeficiente de $e^{2\pi i\tau}$ en $(1 + 240A)^3 - (1 - 504B)^2$ es $12^2(5 + 7) = 12^3$. Concluimos que $\tau(1) = 1$. ■

En particular, Δ es una forma modular de grado 12, y se cumple que $o(\Delta, \infty) = 1$, es decir, que Δ tiene un cero simple en ∞ .

La función $\tau(n)$ se conoce como *función tau de Ramanujan*. Al final de la sección siguiente obtendremos una fórmula recurrente para calcularla. Sus primeros valores son

$$\begin{aligned}\tau(1) &= 1, & \tau(2) &= -24, & \tau(3) &= 252, & \tau(4) &= -1472, & \tau(5) &= 4.830, \\ \tau(6) &= 6\,048, & \tau(7) &= -16\,744, & \tau(8) &= 84\,480, & \tau(9) &= -113\,643, \\ \tau(10) &= -115\,920.\end{aligned}$$

La función τ tiene muchas propiedades aritméticas que no son fáciles de probar, muchas de las cuales fueron conjeturadas por Ramanujan, como, por ejemplo, que es multiplicativa. No vamos a entrar en ello aquí. Ahora pasamos a la función de Klein:

Teorema 6.23 *La función de Klein J tiene un desarrollo en serie de Fourier en el semiplano H de la forma*

$$12^3 J(\tau) = e^{-2\pi i\tau} + \sum_{n=0}^{\infty} c(n)e^{2n\pi i\tau},$$

donde los coeficientes $c(n)$ son enteros.

DEMOSTRACIÓN: Convenimos que $E, E',$ etc. representan series de Fourier

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi n i\tau}$$

con coeficientes enteros. Entonces

$$\begin{aligned}g_2^3(\tau) &= \frac{64}{27}\pi^{12}(1+E)^3 = \frac{64}{27}\pi^{12}(1+E'), \\ \Delta(\tau) &= \frac{64}{27}\pi^{12} 12^3 e^{2\pi i\tau}(1+E'').\end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$12^3 J(\tau) = \frac{12^3 g_2^3(\tau)}{\Delta(\tau)} = \frac{1+E'}{e^{2\pi i\tau}(1+E'')}.$$

Ahora bien, si $E'' = 1 + a_1 e^{2\pi i\tau} + a_2 e^{4\pi i\tau} + \dots$, entonces la serie de potencias $1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ converge en un entorno de 0 a una función holomorfa f tal que $f(0) = 1$, luego $1/f$ es holomorfa en un entorno de 0 y su desarrollo en serie de potencias $1/f = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$ satisface la identidad

$$(1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots)(1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots) = 1.$$

Esto nos da las igualdades $a_1 + b_1 = 0, a_2 + a_1 b_1 + b_2 = 0, \dots$ de las que se sigue que los coeficientes b_n son enteros, con lo que

$$\frac{1}{1+E''} = 1 + E''',$$

para cierta serie de Fourier E''' con coeficientes enteros. En definitiva,

$$12^3 J(\tau) = \frac{(1+E')(1+E''')}{e^{2\pi i\tau}} = e^{-2\pi i\tau} + \sum_{n=0}^{\infty} c(n)e^{2n\pi i\tau}. \quad \blacksquare$$

Por lo tanto, J es una función modular con un único polo simple en ∞ .

Al final de la sección siguiente obtendremos una fórmula para el cálculo recurrente de $c(n)$, cuyos primeros valores son:

$$\begin{aligned} c(0) &= 744, & c(1) &= 196\,884, & c(2) &= 21\,493\,760, & c(3) &= 864\,299\,970, \\ c(4) &= 20\,245\,856\,256, & c(5) &= 333\,202\,640\,600, & c(6) &= 4\,252\,023\,300\,096. \end{aligned}$$

La serie de Eisenstein G_2 Antes de continuar con el estudio de las funciones modulares vamos a analizar con algo más de detalle la serie de Eisenstein G_2 que nos ha aparecido de pasada al probar el teorema 6.21. El teorema 5.10 prueba que la serie

$$\sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(m+n\tau)^2}$$

no converge absolutamente, por lo que tal expresión no define un número complejo para ningún valor de τ . Sin embargo, lo que hemos probado es que la serie

$$G_2(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^2} = 2\zeta(2) + 2(2\pi i)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) e^{2n\pi i \tau}$$

sí que converge con esta ordenación en particular de sus términos. La serie de Fourier muestra que $G_2(\tau)$ es holomorfa en H , pues con el cambio $z = e^{2\pi i \tau}$ se convierte en una serie de potencias convergente en $D(0,1)$, y también es claro que $G_2(\tau+1) = G_2(\tau)$. Sin embargo, vamos a ver que G_2 no es una función modular, porque no cumple la relación $G_2(-1/\tau) = \tau^2 G_2(\tau)$.

Las funciones G_{2k} con $k \geq 2$ cumplen esta relación como consecuencia inmediata de (6.5), que a su vez resulta de una manipulación trivial de la serie que define a G_{2k} . Sin embargo, como la serie G_2 no es absolutamente convergente, tenemos que ir con más cuidado. En principio:

$$G_2(-1/\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m-n/\tau)^2} = \tau^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m\tau-n)^2}.$$

Puesto que las sumas sobre m sí que son absolutamente convergentes, podemos reemplazar m por $-m$ sin alterar el resultado, y así, teniendo en cuenta que $(-m\tau-n)^2 = (m\tau+n)^2$:

$$G_2(-1/\tau) = \tau^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n+m\tau)^2} = \tau^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^2}.$$

Si llamamos

$$G_2^*(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^2},$$

hemos probado que

$$G_2(-1/\tau) = \tau^2 G_2^*(\tau). \quad (6.8)$$

Notemos que $G_2^*(\tau)$ es la serie que resulta de cambiar el orden de los sumatorios en la definición de $G_2(\tau)$. Para las series G_{2k} con $k \geq 2$, como la convergencia es absoluta, esto puede hacerse sin alterar la suma, pero en el caso $k = 1$ ya no podemos asegurarlo. De hecho, vamos a ver que no es cierto. Concretamente, vamos a probar que

$$G_2^*(\tau) = G_2(\tau) - \frac{2\pi i}{\tau}. \quad (6.9)$$

Por consiguiente:

Teorema 6.24 *Se cumple la relación $G_2(-1/\tau) = \tau^2 G_2(\tau) - 2\pi i \tau$.*

DEMOSTRACIÓN: Teniendo en cuenta (6.8), basta probar (6.9). Para ello definimos:

$$H(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0,1 \text{ si } n=0}}^{+\infty} \frac{1}{(n\tau + m)(n\tau + m - 1)},$$

$$H^*(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0 \text{ si } m=0,1}}^{+\infty} \frac{1}{(n\tau + m)(n\tau + m - 1)}.$$

Veamos en primer lugar que $H(\tau)$ converge en el semiplano H . Para ello observamos que

$$\frac{1}{(n\tau + m)(n\tau + m - 1)} - \frac{1}{(n\tau + m)^2} = \frac{1}{(n\tau + m)^2(n\tau + m - 1)},$$

y que

$$\frac{\frac{1}{(n\tau + m)^2(n\tau + m - 1)}}{\frac{1}{(n\tau + m)^3}} = \frac{n\tau + m}{n\tau + m - 1} = 1 + \frac{1}{n\tau + m - 1}$$

y sólo hay un número finito de pares (m, n) para los que $|n\tau + m - 1| \leq 1$ (porque los retículos son discretos), luego, salvo para un número finito de pares, la última expresión tiene módulo ≤ 2 , luego

$$\left| \frac{1}{(n\tau + m)^2(n\tau + m - 1)} \right| \leq 2 \left| \frac{1}{(n\tau + m)^3} \right|.$$

El teorema 5.10 prueba que la serie

$$\sum_{(n,m) \neq (0,0)} \frac{1}{(n\tau + m)^3}$$

es (absolutamente) convergente, luego lo mismo vale para la serie

$$F(\tau) = \sum_{(n,m) \neq (0,0), (0,1)} \left(\frac{1}{(n\tau + m)(n\tau + m - 1)} - \frac{1}{(n\tau + m)^2} \right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0,1 \text{ si } n=0}}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n\tau + m)(n\tau + m - 1)} - \frac{1}{(n\tau + m)^2} \right).$$

Ahora bien, es claro que

$$H(\tau) = F(\tau) + G_2(\tau) - 1$$

(pues en $G_s(\tau)$ está el término correspondiente a $(n, m) = (0, 1)$, que vale 1 y no está en F), luego $H(\tau)$ es convergente.

Más aún, como F es absolutamente convergente, podemos invertir el orden de los sumatorios, y entonces resulta que

$$H^*(\tau) = F(\tau) + G_2^*(\tau) - 1,$$

luego también $H^*(\tau)$ es convergente, y además

$$G_2(\tau) - G_2^*(\tau) = H(\tau) - H^*(\tau).$$

El teorema quedará probado si demostramos que

$$H(\tau) = 2, \quad H^*(\tau) = 2 - 2\pi i/\tau.$$

Para el cálculo de $H(\tau)$ observamos que

$$\frac{1}{(n\tau + m)(n\tau + m - 1)} = \frac{1}{n\tau + m - 1} - \frac{1}{n\tau + m},$$

luego

$$\sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0, 1 \text{ si } n=0}}^{+\infty} \frac{1}{(n\tau + m)(n\tau + m - 1)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0, \\ 2 & \text{si } n = 0, \end{cases}$$

pues si $n \neq 0$ todos los términos de la descomposición anterior se cancelan, mientras que si $n = 0$ quedan sin cancelar dos términos iguales a 1. Para $H^*(\tau)$ tenemos:

$$\begin{aligned} H^*(\tau) &= \sum_{m=-\infty}^{-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{n\tau + m - 1} - \frac{1}{n\tau + m} \right) \\ &+ \sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{n\tau + m - 1} - \frac{1}{n\tau + m} \right) \\ &+ \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \left(\frac{1}{n\tau - 1} - \frac{1}{n\tau} \right) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \left(\frac{1}{n\tau} - \frac{1}{n\tau + 1} \right). \end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} &\sum_{m=-\infty}^{-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{n\tau + m - 1} - \frac{1}{n\tau + m} \right) = \\ &\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=-M+1}^{-1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{n\tau + m - 1} - \frac{1}{n\tau + m} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-M+1}^{-1} \left(\frac{1}{n\tau + m - 1} - \frac{1}{n\tau + m} \right) = \\
& \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{n\tau - M} - \frac{1}{n\tau - 1} \right), \\
& \sum_{m=2}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{n\tau + m - 1} - \frac{1}{n\tau + m} \right) = \\
& \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=2}^M \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{n\tau + m - 1} - \frac{1}{n\tau + m} \right) = \\
& \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=2}^M \left(\frac{1}{n\tau + m - 1} - \frac{1}{n\tau + m} \right) = \\
& \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{n\tau + 1} - \frac{1}{n\tau + M} \right), \\
& \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \left(\frac{1}{n\tau - 1} - \frac{1}{n\tau} \right) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \left(\frac{1}{n\tau} - \frac{1}{n\tau + 1} \right) = \\
& \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \left(\frac{1}{n\tau - 1} - \frac{1}{n\tau + 1} \right) = 2 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{n\tau - 1} - \frac{1}{n\tau + 1} \right),
\end{aligned}$$

luego

$$H^*(\tau) = 2 + \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{n\tau - M} - \frac{1}{n\tau + M} \right) = 2 + \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2M}{n^2\tau^2 - M^2}.$$

La serie podemos sumarla con el teorema [An 10.29] aplicado a la función

$$f(z) = \frac{2M}{z^2\tau^2 - M^2}.$$

Cuyos únicos polos son $\pm M/\tau$ y, como

$$f(z) = \frac{1/\tau}{z - M/\tau} + \frac{-1/\tau}{z + M/\tau},$$

es inmediato que $\text{Res}(f, \pm M/\tau) = \pm 1/\tau$, luego

$$\text{Res} \left(\frac{\pi f(z)}{\tan \pi z}, \pm \frac{M}{\tau} \right) = \frac{\pi/\tau}{\tan(\pi M/\tau)}$$

y concluimos que

$$\begin{aligned} H^*(\tau) &= 2 - \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{\tau \tan(\pi M/\tau)} = 2 - \frac{2\pi i}{\tau} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{e^{i\pi M/\tau} + e^{-i\pi M/\tau}}{e^{i\pi M/\tau} - e^{-i\pi M/\tau}} \\ &= 2 - \frac{2\pi i}{\tau} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{-2\pi i M/\tau}}{1 - e^{-2\pi i M/\tau}} = 2 - \frac{2\pi i}{\tau}, \end{aligned}$$

donde usamos que

$$|e^{-2\pi i M/\tau}| = |e^{-2\pi i M\bar{\tau}/|\tau|^2}| = e^{-2\pi \operatorname{Im} \tau / |\tau|^2}$$

que tiende a 0, porque $\operatorname{Im} \tau > 0$. ■

6.4 Propiedades de las funciones modulares

Según el teorema 6.5, sabemos que el grupo modular Γ está generado por las transformaciones $t(\tau) = \tau + 1$ y $s(\tau) = -1/\tau$. En primer lugar demostraremos que para que una función f cumpla la propiedad 1 de la definición 6.20 basta con que la cumpla para las transformaciones s y t . Esto puede comprobarse con un cálculo rutinario, pero vamos a dar una prueba más conceptual.

Definición 6.25 Llamamos $\operatorname{LG}_+(2, \mathbb{R})$ al subgrupo de $\operatorname{LG}(2, \mathbb{R})$ formado por las matrices de determinante positivo. Dada

$$g = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \operatorname{LG}_+(2, \mathbb{R}),$$

definimos

$$j_g(\tau) = \frac{dg}{d\tau} = (\det g)(c\tau + d)^{-2}.$$

Aplicando la regla de la cadena vemos que si $g, h \in \operatorname{LG}_+(2, \mathbb{R})$, entonces

$$j_{gh}(\tau) = \frac{dgh}{d\tau} = \frac{dh}{d\tau}(\tau g) \cdot \frac{dg}{d\tau} = j_h(\tau g)j_g(\tau). \quad (6.10)$$

Notemos también que si

$$g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

entonces

$$j_g(\tau) = a^2 a^{-2} = 1.$$

Vemos así que j_g no se altera si multiplicamos g por un número real o, equivalentemente, que j_g depende únicamente de la transformación de Möbius inducida por g (como, por otra parte, es obvio de la propia definición, ya que se trata de la derivada de dicha transformación).

Si $f \in \mathcal{M}(H)$, definimos

$$(g|_{2k}f)(\tau) = j_g(\tau)^k f(\tau g) = (\det g)^k (c\tau + d)^{-2k} f(\tau g).$$

Así, la primera propiedad de la definición de forma modular es que $g|_{2k}f = f$ para todo $g \in \Gamma$ (observemos que en este caso $\det g = 1$).

Usando (6.10) vemos que

$$\begin{aligned}(g|_{2k}(h|_{2k}f))(\tau) &= (h|_{2k}f)(\tau g)j_g(\tau)^k = f(\tau gh)j_h(\tau g)^k j_g(\tau)^k \\ &= f(\tau gh)j_{gh}(\tau)^k = ((gh)|_{2k}f)(\tau),\end{aligned}$$

de modo que

$$g|_{2k}(h|_{2k}f) = (gh)|_{2k}f.$$

Por consiguiente, si $g, h \in \Gamma$ cumplen la primera condición de la definición de función modular, también la cumple gh , pues

$$(gh)|_{2k}f = g|_{2k}(h|_{2k}(f)) = g|_{2k}(f) = f,$$

y también la cumple g^{-1} , pues

$$g^{-1}|_{2k}(f) = g^{-1}|_{2k}(g|_{2k}(f)) = I|_{2k}(f) = f.$$

Ahora ya es inmediato que basta comprobar la condición 1 de la definición de función modular para las transformaciones t y s , es decir:

Teorema 6.26 *La primera condición de la definición de función modular de grado $2k$ equivale a que*

$$f(\tau + 1) = f(\tau), \quad f(-1/\tau) = \tau^{2k} f(\tau).$$

Consideramos ahora los espacios de funciones modulares:

Definición 6.27 Llamaremos $\mathcal{M}_{2k}(\Gamma)$ al conjunto de todas las funciones modulares de grado $2k$. Es inmediato que se trata de un subespacio vectorial del espacio $\mathcal{M}(H)$ de todas las funciones meromorfas en H .

Veamos que estos subespacios tienen suma directa, de modo que podemos definir

$$\mathcal{M}(\Gamma) = \bigoplus_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{M}_{2k}(\Gamma).$$

En efecto, supongamos que

$$f_m + f_{m+1} + \cdots + f_n = 0, \quad f_k \in \mathcal{M}_{2k}(\Gamma),$$

y vamos a probar que todas las f_k son nulas.

En caso contrario, supongamos que i es el menor índice tal que $f_i \neq 0$. Tenemos entonces que

$$f_i = -f_{i+1} - \cdots - f_n.$$

Por consiguiente, aplicando esta igualdad a $s^r(\tau)$,

$$\tau^{2ri} f_i(\tau) = -\tau^{2r(i+1)} f_{i+1}(\tau) - \cdots - \tau^{2rn} f_n(\tau),$$

de donde

$$f_i(\tau) = -\tau^{2r} f_{i+1}(\tau) - \cdots - \tau^{2r(n-i)} f_n(\tau).$$

Haciendo $r \rightarrow \infty$ queda que $f_i(\tau) = 0$ para todo $\tau \in H$ con $|\tau| < 1$. Por consiguiente $f_i = 0$, contradicción. ■

Es fácil ver que si $f_1 \in \mathcal{M}_{2k}(\Gamma)$ y $f_2 \in \mathcal{M}_{2r}(\Gamma)$, entonces $f_1 f_2 \in \mathcal{M}_{2(k+r)}(\Gamma)$.

En efecto, respecto de la tercera propiedad de la definición de función modular tenemos que es equivalente a que $f_1(\tau) = f_1^*(e^{2\pi i\tau})$, $f_2(\tau) = f_2^*(e^{2\pi i\tau})$, para ciertas funciones f_1^* , f_2^* meromorfas en un entorno de 0, y entonces se cumple que $f_1(\tau)f_2(\tau) = (f_1^*f_2^*)(e^{2\pi i\tau})$, donde $f_1^*f_2^*$ también es meromorfa en un entorno de 0.

Equivalentemente, podemos expresar esto en la forma

$$\mathcal{M}_{2k}(\Gamma)\mathcal{M}_{2r}(\Gamma) \subset \mathcal{M}_{2(k+r)}(\Gamma),$$

de donde se sigue a su vez que $\mathcal{M}(\Gamma)$ es un subanillo² de $\mathcal{M}(H)$.

Más aún, si $f \in \mathcal{M}_{2k}(\Gamma)$ no es idénticamente nula, entonces $1/f \in \mathcal{M}_{-2k}(\Gamma)$.

En efecto, sabemos que, para $\text{Im } \tau > c$, se cumple que $f(\tau) = f^*(e^{2\pi i\tau})$, para cierta función f^* holomorfa en $D(0, e^{-2\pi c}) \setminus \{0\}$ con a lo sumo un polo en 0 (pero no una singularidad esencial). Notemos que tiene que haber un $r > 0$ tal que f^* no se anule en $D(0, r) \setminus \{0\}$, ya que en caso contrario existiría una sucesión de ceros de f^* convergente a 0, luego f^* sería idénticamente nula y f también.

Por lo tanto, $1/f(\tau) = (1/f^*)(e^{2\pi i\tau})$, donde la función $1/f^*$ es holomorfa en $D(0, r) \setminus \{0\}$ y tiene a lo sumo un polo en 0, pero no una singularidad esencial. A su vez, esto hace que $1/f$ sea holomorfa en el semiplano $\text{Im } \tau > -\frac{1}{2\pi} \log r$, con lo que cumple la segunda propiedad de la definición de función modular, y también la tercera. La primera se comprueba sin dificultad. ■

En particular el conjunto $\mathcal{M}_0(\Gamma)$ de las funciones modulares de grado 0 es un subcuerpo de $\mathcal{M}(H)$.

Del mismo modo que las funciones elípticas pueden verse como funciones sobre un toro complejo \mathbb{C}/R (e incluso como funciones holomorfas, si consideramos en éste su estructura analítica), las funciones modulares de grado 0 pueden verse como funciones sobre el cociente H/Γ determinado por la equivalencia respecto al grupo modular. No podemos decir lo mismo de las funciones modulares de grado arbitrario $2k$, pues en general toman valores distintos sobre puntos equivalentes respecto de Γ . Sin embargo, se cumple lo siguiente:

Teorema 6.28 *Si $f : H \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ es una función modular, se cumple que el orden $o(f, \tau)$ no varía dentro de una misma clase de equivalencia respecto del grupo modular Γ . Además, el número de ceros y polos de f en el dominio fundamental D considerado en 6.5 es finito.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\tau, \tau' \in H$ cumplen que $\tau' = \tau g$, para cierta $g \in \Gamma$, tenemos que probar que $o(f, \tau) = o(f, \tau')$, para lo cual podemos suponer que $\tau \neq \tau'$, así como que f no es idénticamente nula. Entonces, si $o(f, \tau) = r$,

²Más precisamente, es lo que se conoce como un álgebra graduada

tenemos que $f(z) = h(z)(z - \tau)^r$, donde h es holomorfa en un entorno de τ , luego

$$f(z) = f(zg^{-1}g) = (czg^{-1} + d)^{2k} f(zg^{-1}) = (czg^{-1} + d)^{2k} h(zg^{-1})(zg^{-1} - \tau)^r.$$

Teniendo en cuenta que $c, d \in \mathbb{Z}$, es claro que $(czg^{-1} + d)^{2k}$ es holomorfa sin ceros o polos en H , mientras que $h(zg^{-1})$ es holomorfa en un entorno de τ' . Por último, $zg^{-1} - \tau$ tiene un cero simple en τ' (porque g^{-1} es biholomorfa, luego su derivada no se anula), luego $o(f, \tau') = r$.

Por definición de función modular, los polos de f están contenidos en una región de la forma $0 < \text{Im } \tau \leq c$, y lo mismo puede decirse de sus ceros (si f no es idénticamente nula), porque $1/f$ también es modular.

Como el conjunto $\{\tau \in D \mid \text{Im } \tau \leq c\} \subset H$ es compacto, no puede contener más que un número finito de ceros y polos de f , ya que de lo contrario existiría en H un punto de acumulación de ceros o polos, lo cual es imposible (de ceros porque f es meromorfa y de polos porque $1/f$ lo es). ■

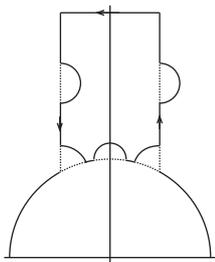
Ahora podemos probar un resultado fundamental del que extraeremos numerosas consecuencias:

Teorema 6.29 *Sea f una función modular no nula de grado $2k$. Entonces*

$$o(f, \infty) + \frac{1}{3}o(f, \rho) + \frac{1}{2}o(f, i) + \sum_{z \neq i, \rho} o(f, z) = \frac{k}{6},$$

donde la suma recorre los puntos $z \in H$ módulo Γ no equivalentes a ρ ni a i .

DEMOSTRACIÓN: Vamos a considerar la integral de la función meromorfa f'/f sobre el ciclo γ indicado en la figura:



donde los arcos se introducen para bordear posibles polos de f en la frontera del dominio fundamental y el segmento horizontal se toma suficientemente alto como para rodear todos los polos de f . (Si hubiera un polo sobre un punto no elíptico la circunferencia unidad estaría repetido simétricamente respecto al eje imaginario, y lo bordearíamos por arriba en un caso y por abajo en otro, de modo que γ sólo encerraría uno de los dos). Por simplicidad supondremos que no hay polos salvo a lo sumo en los puntos i y ρ , que son los casos más

delicados. La prueba se modifica fácilmente para tratar otros polos. El teorema de los residuos nos da que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \sum_{z \neq i, \rho} o(f, z).$$

Calculamos en primer lugar la integral sobre el segmento vertical, para lo cual hacemos el cambio de variable $z = e^{2\pi i \zeta}$, con lo que la integral se convierte en

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f^*(z)}{f^*(z)} dz = -o(f, \infty),$$

donde f^* es la función que cumple $f(z) = f^*(e^{2\pi i z})$. Las integrales sobre los segmentos verticales se cancelan porque f tiene periodo 1 y los segmentos se recorren en sentidos opuestos (esto sigue siendo cierto si hemos tenido que sortear polos).

Consideremos ahora la integral alrededor de ρ y su simétrico. Si f tiene orden m en ρ , entonces

$$\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \frac{m}{\zeta - \rho} + h(\zeta),$$

donde h es holomorfa en ρ . Llamemos c_r al arco alrededor de ρ correspondiente a un radio r . Como h está acotada en un entorno de ρ , es claro que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{c_r} h(\zeta) = 0.$$

Por otra parte,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{m}{2\pi i} \int_{c_r} \frac{d\zeta}{\zeta - \rho} = \frac{m}{2\pi i} \lim_{r \rightarrow 0} (\log c_r(1) - \log c_r(0)) = -\frac{m}{2\pi i} \frac{\pi i}{3} = -\frac{m}{6}.$$

El mismo resultado se obtiene sobre el punto simétrico de ρ respecto al eje imaginario, luego, en total, el límite cuando $r \rightarrow 0$ de la integral sobre los dos arcos es $-o(f, \rho)/3$.

El mismo argumento prueba que si hacemos tender a 0 el radio del arco alrededor de i la integral tiende a $-o(f, i)/2$.

Nos falta estudiar la integral sobre los dos arcos simétricos situados sobre la circunferencia unidad. Llamémoslos AB y $A'B'$. La aplicación $s(\tau) = -1/\tau$ transforma uno en el otro invirtiendo la orientación (y esto sigue siendo cierto si hemos tenido que sortear más polos con arcos intermedios). Por consiguiente, el cambio $\zeta = s(\xi)$ nos da que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_A^B \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int_{A'}^{B'} \frac{f'(s(\xi))}{\xi^2 f(s(\xi))} d\xi.$$

El hecho de que f sea modular se traduce en que $f(s(\xi)) = \xi^{2k} f(\xi)$, luego

$$\frac{df(s(\xi))}{d\xi} = \frac{f'(s(\xi))}{\xi^2} = \xi^{2k} f'(\xi) + 2k\xi^{2k-1} f(\xi).$$

Por lo tanto,

$$\frac{f'(s(\xi))}{\xi^2 f(s(\xi))} = \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{2k}{\xi}.$$

Concluimos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_A^B \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int_{A'}^{B'} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi - \frac{2k}{2\pi i} \int_{A'}^{B'} \frac{d\xi}{\xi},$$

con lo que la suma de las integrales sobre los dos arcos considerados resulta ser

$$\frac{2k}{2\pi i} \int_{B'}^{A'} \frac{d\xi}{\xi}.$$

(Notemos que hemos invertido los extremos, de modo que ahora el arco se recorre en sentido positivo).

Si hubiéramos rodeado otros polos situados sobre el arco, es claro que la integral sobre el arco modificado coincide con la integral sobre el arco de circunferencia sin modificar (porque ahora el integrando $1/\xi$ no tiene polos sobre la circunferencia), y la integral es simplemente k/π por la longitud del arco $A'B'$. Cuando hacemos tender a 0 los radios de los arcos alrededor de los puntos elípticos, dicha longitud tiende a $2\pi/12$, luego la integral tiende a $k/6$.

En definitiva, si llamamos γ_r al ciclo formado con arcos de radio r alrededor de los polos, hemos probado que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \frac{k}{6} - \frac{1}{3}o(f, \rho) - \frac{1}{2}o(f, i).$$

La conclusión es ahora inmediata. ■

Como primera aplicación obtenemos un resultado que ya habíamos probado antes (tras el teorema 6.14) considerando la estructura analítica de las curvas elípticas y los toros complejos.

Teorema 6.30 *La función modular de Klein induce una aplicación biyectiva $J: H/\Gamma \rightarrow \mathbb{C}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sabemos que J es suprayectiva por el teorema 6.17, pero el argumento que presentamos a continuación nos da una prueba alternativa de la suprayectividad a la vez que prueba la inyectividad. En efecto, si $\alpha \in \mathbb{C}$, consideramos la función $f = J - \alpha$, que es una función modular de grado 0 con un polo simple en ∞ , luego el teorema anterior nos da que

$$\frac{1}{3}o(f, \rho) + \frac{1}{2}o(f, i) + \sum_{z \neq i, \rho} o(f, z) = 1.$$

Todos los órdenes son números naturales, luego existe un único punto $z \in H$ módulo Γ tal que $o(f, z) > 0$, es decir, un único z tal que $J(z) = \alpha$. ■

Del teorema 6.29 se desprenden también numerosas consecuencias sobre los espacios $M_{2k}(\Gamma)$ de formas modulares de grado $2k$:

- Si $k < 0$, entonces $M_{2k}(\Gamma) = 0$, es decir, no existen formas modulares no nulas de grado negativo.

En efecto, el miembro izquierdo de la ecuación dada por 6.29 tiene que ser mayor o igual que 0 y el miembro derecho es negativo.

- $M_0(\Gamma) = \mathbb{C}$, es decir, las únicas formas modulares de grado 0 son las constantes.

Una forma modular no nula f de grado 0 no puede tener ceros ni polos, pero $f - f(i)$ es también una forma modular de grado 0 con un cero en i , luego tiene que ser idénticamente nula, luego f es la constante $f(i)$.

- $M_2(\Gamma) = 0$.

Es claro que el miembro izquierdo de la fórmula de 6.29 no puede ser igual a $1/6$.

- $M_4(\Gamma) = \langle g_2 \rangle$.

Si $f \in M_4(\Gamma)$, la fórmula del teorema 6.29 sólo puede cumplirse con el miembro derecho igual a $1/3$ si f tiene un único cero simple en ρ . Esto nos da una prueba alternativa a la dada en 6.19 de que $g_2(\rho) = 0$. Además, f/g_2 es una forma modular de grado 0, luego es constante, luego $f \in \langle g_2 \rangle$.

- $M_6(\Gamma) = \langle g_3 \rangle$.

La prueba es análoga a la anterior.

- $M_8(\Gamma) = \langle g_2^2 \rangle$.

La fórmula del teorema 6.29 con $2/3$ en el miembro derecho sólo puede darse si f tiene un cero doble en ρ , con lo que f/g_2^2 es una forma modular de grado 0, luego es constante.

- $M_{10}(\Gamma) = \langle g_2 g_3 \rangle$.

Igualmente, la fórmula del teorema 6.29 con $5/6$ en el miembro derecho sólo puede darse si f tiene ceros simples en ρ y en i , igual que $g_2 g_3$, luego el cociente es constante.

A partir de estos casos particulares podemos obtener la estructura general del álgebra de formas modulares

$$M(\Gamma) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} M_{2k}(\Gamma)(\Gamma).$$

Teorema 6.31 La aplicación $\mathbb{C}[x, y] \rightarrow M(\Gamma)$ dada por $P(x, y) \mapsto P(g_2, g_3)$ es un isomorfismo de anillos. En particular, $M(\Gamma) = \mathbb{C}[g_2, g_3]$.

DEMOSTRACIÓN: Claramente se trata de un homomorfismo de anillos. Veamos que es inyectivo, lo cual equivale a decir que g_2 y g_3 son algebraicamente independientes sobre \mathbb{C} , es decir, que si $P(g_2, g_3) = 0$, entonces $P(x, y) = 0$.

Si llamamos $P_k(x, y)$ a la suma de los monomios $\alpha x^u y^v$ de P tales que $4u + 6v = 2k$, tenemos que $P(g_2, g_3) = P_0(g_2, g_3) + \cdots + P_r(g_2, g_3)$, donde cada sumando es una forma modular de grado $2k$, para un k distinto en cada caso. Como la suma es directa, concluimos que cada $P_k(g_2, g_3) = 0$.

Basta probar que cada $P_k(x, y) = 0$ o, equivalentemente, podemos suponer que los monomios de P son todos de la forma $\alpha x^u y^v$ con $4u + 6v = 2k$, para un k fijo, que podemos tomar mínimo. Pongamos que $P(x, y) = \alpha x^u + yQ(x, y)$. Entonces $\alpha g_2^u + g_3 Q(g_2, g_3) = 0$, pero evaluando en i queda $\alpha g_2(i) = 0$, luego $\alpha = 0$, luego $Q(g_2, g_3) = 0$ y, si no es nulo, Q cumple las hipótesis de P con $k-3$ en vez de k , luego tiene que ser $Q = 0$ por la minimalidad de k .

Para probar la suprayectividad basta probar que toda forma modular f de grado $2k$ tiene antiimagen. Razonamos por inducción sobre k . Los casos particulares analizados antes del teorema nos permiten restringirnos al caso en que $k \geq 6$. Pongamos que $k = 2r$ o bien $k = 2r + 1$. Así, g_2^r o bien $g_2^{r-1} g_3$ es una forma modular de grado $2k$ que no se anula en ∞ . Por lo tanto, existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $f - \alpha g_2^r$ o bien $f - \alpha g_2^{r-1} g_3$ se anula en ∞ . Equivalentemente, podemos suponer que f se anula en ∞ .

Entonces $f/\Delta \in M_{2(k-6)}(\Gamma)$. Por hipótesis de inducción $f/\Delta = P(g_2, g_3)$, luego $f = (g_2^3 - 27g_3^2)P(g_2, g_3)$ también está en la imagen del homomorfismo. ■

Equivalentemente, el teorema anterior equivale a que cada espacio vectorial $M_{2k}(\Gamma)$ tiene dimensión finita, y una base es

$$\{g_2^u g_3^v \mid 2u + 3v = k\}.$$

En particular:

Teorema 6.32 *Para todo número natural k se cumple que*

$$\dim M_{2k}(\Gamma) = \begin{cases} E[k/6] & \text{si } k \equiv 1 \pmod{6}, \\ E[k/6] + 1 & \text{si } k \not\equiv 1 \pmod{6}. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: Por la observación precedente, la dimensión de $M_{2k}(\Gamma)$ es el número de números naturales v tales que $k - 3v \geq 0$ es par, pues cada uno de ellos determina un elemento de la base. Si k es par, entonces v también tiene que ser par, digamos $v = 2r$, con lo que la dimensión es el número de valores posibles para r tales que $6r \leq k$, luego es $E[k/6] + 1$.

Si k es impar, también v es impar, digamos $v = 2r + 1$, y la condición es que $6r + 3 \leq k$. Si $k = 6n + m$, con $m = 1, 3, 5$, entonces $n = E[k/6]$ y tiene que ser $0 \leq r \leq n + (m - 3)/6$, lo cual se cumple para $r = 0, \dots, n$ salvo si $m = 1$, en cuyo caso hay una posibilidad menos, ya que no sirve $r = n$. ■

También podemos determinar la estructura de $\mathcal{M}_0(\Gamma)$:

Teorema 6.33 *Toda función modular de grado 0 es una función racional en J , es decir, $\mathcal{M}_0(\Gamma) = \mathbb{C}(J)$.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos en primer lugar que toda función modular f de grado 0 holomorfa en H es un polinomio en J . En primer lugar observamos que, una vez más por el teorema 6.29, no puede ser $\text{ord}(f, \infty) > 0$ salvo que f sea idénticamente nula. Razonamos por inducción sobre $-\text{ord}(f, \infty)$. Si es 0 tenemos que f es una forma modular de grado 0, luego es constante.

Supongamos ahora que f tiene un polo en ∞ y que el resultado es cierto para funciones con polos de orden menor. Por el teorema 6.29 existe un $\tau \in H$ tal que $f(\tau) = 0$. El teorema 6.30 implica que $g(z) = (J(z) - J(\tau))^{-1}$ tiene polos simples únicamente en los puntos equivalentes a τ módulo Γ , y tiene un 0 en ∞ . Por lo tanto, fg es holomorfa en H (porque los polos simples de g se cancelan con los ceros de f) y su orden en infinito (en valor absoluto) es menor que el de f , luego por hipótesis de inducción $fg \in \mathbb{C}[J]$, luego también $f \in \mathbb{C}[J]$.

Tomemos ahora cualquier $f \in \mathcal{M}_0(\Gamma)$ y sean τ_1, \dots, τ_n representantes de sus polos en H/Γ repetidos según sus multiplicidades. Entonces

$$f(z) \prod_{u=1}^n (J(z) - J(\tau_u)) \in \mathbb{C}[J]$$

porque es una función modular de grado 0 holomorfa en H , luego $f \in \mathbb{C}(J)$. ■

La superficie modular Si $(H/\Gamma)^\infty$ es el espacio que resulta de añadir un punto ∞ al cociente H/Γ , tenemos una biyección $J : (H/\Gamma)^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ a través de la cual podemos dotar a $(H/\Gamma)^\infty$ de la única estructura analítica respecto de la cual J es biholomorfa

Teniendo en cuenta que $\mathcal{M}(\mathbb{C}^\infty) = \mathbb{C}(z)$ y que, a través de la biyección la identidad $z : \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ se corresponde con J , el teorema anterior se interpreta como que $\mathcal{M}((H/\Gamma)^\infty) = \mathcal{M}_0(J)$.

En otras palabras, las funciones modulares de grado 0 pueden verse como las funciones meromorfas en la variedad analítica $(H/\Gamma)^\infty$. De este modo, la superficie modular $(H/\Gamma)^\infty$ es el análogo para el grupo modular Γ del toro complejo \mathbb{C}/R para el grupo de las traslaciones asociadas al retículo R .

Notemos que la proyección $p : H \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{C}^\infty)$ es holomorfa, porque compuesta con J es la función $J : H \rightarrow \mathbb{C}$. ■

Terminamos la sección encontrando fórmulas para las funciones $\tau(n)$ y $c(n)$ que aparecen en los desarrollos en serie de Fourier de las funciones modulares Δ y J . En primer lugar, conviene normalizar las series de Eisenstein:

Definición 6.34 Las *funciones de Eisenstein normalizadas* son las funciones

$$E_{2k}(\tau) = \frac{G_{2k}(\tau)}{2\zeta(2k)}.$$

Teniendo en cuenta 6.21 y la fórmula para $\zeta(2k)$ probada en [ITAn 6.17], tenemos que

$$E_{2k}(\tau) = 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) e^{2n\pi i \tau}.$$

Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned} E_4(\tau) &= 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) e^{2n\pi i\tau}, \\ E_6(\tau) &= 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) e^{2n\pi i\tau}, \\ E_8(\tau) &= 1 + 480 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_7(n) e^{2n\pi i\tau}, \\ E_{12}(\tau) &= 1 + \frac{65520}{691} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{11}(n) e^{2n\pi i\tau}. \end{aligned}$$

Igualmente, la función discriminante normalizada es

$$\frac{\Delta(\tau)}{(2\pi)^{12}} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{2\pi in}.$$

Al conocer la dimensión de los espacios $M_{2k}(\Gamma)$ podemos establecer muchas relaciones entre estas funciones y, por consiguiente, entre sus coeficientes de Fourier. Por ejemplo, tenemos que $\dim M_8(\Gamma) = 1$, luego la función $f \mapsto f(\infty)$ es un isomorfismo y, en particular, $E_8 = E_4^2$, pues ambas formas toman el valor 1 en ∞ . Al igualar los coeficientes de Fourier obtenemos la relación

$$\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m) \sigma_3(n-m).$$

Un caso más notable se obtiene al considerar el espacio $M_{12}(\Gamma)$, que tiene dimensión 2. Tenemos que $E_{12}, E_6^2, \Delta/(2\pi)^{12} \in M_{12}$, luego tienen que ser linealmente dependientes. Más concretamente, viendo la serie de Fourier

$$E_6^2(\tau) = 1 - 1008 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) e^{2n\pi i\tau} + 254016 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=2}^{n-1} \sigma_5(m) \sigma_5(n-m) e^{2n\pi i\tau},$$

es claro que E_{12} y E_6^2 son linealmente independientes, luego ha de ser

$$\Delta/(2\pi)^{12} = \lambda E_{12} + \mu E_6^2,$$

para ciertos escalares $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Igualando los coeficientes para $n = 1$ y $n = 2$ obtenemos las ecuaciones

$$\lambda + \mu = 0, \quad \frac{65520}{691} \lambda - 1008\mu = 1,$$

de donde obtenemos $\lambda = -\mu = \frac{691}{762048}$. Igualando los coeficientes n -simos resulta

$$\tau(n) = \frac{65}{756} \sigma_{11}(n) - \frac{691}{756} \sigma_5(n) - \frac{691}{3} \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_5(m) \sigma_5(n-m). \quad (6.11)$$

Tenemos así una fórmula explícita para calcular la función de Ramanujan $\tau(n)$. En particular, $756 \cdot 3 \cdot \tau(n) \equiv 3 \cdot 65\sigma_{11}(n)$ (mód 691) o, lo que es lo mismo:

$$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691}, \quad (6.12)$$

que es una de las congruencias de Ramanujan sobre la función $\tau(n)$.

Ahora vamos a encontrar una fórmula para calcular los coeficientes de Fourier de la función modular

$$12^3 J(\tau) = e^{-2\pi i\tau} + \sum_{n=0}^{\infty} c(n)e^{2\pi in\tau}.$$

Para ello consideramos las funciones E_6^2 , $\Delta/(2\pi)^{12}$, $J\Delta/(2\pi)^{12} \in M_{12}(\Gamma)$. La dimensión del espacio es 2 y las series de Fourier

$$E_6^2(\tau) = 1 - 1008 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n)e^{2\pi in\tau} + 504^2 \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_5(k)\sigma_5(n-k)e^{2\pi in\tau},$$

$$12^3 J(\tau)\Delta(\tau)/(2\pi)^{12} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n+1)e^{2\pi in\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} c(k)\tau(n-k)e^{2\pi in\tau},$$

muestran que $\Delta/(2\pi)^{12}$ y $12^3 J\Delta/(2\pi)^{12}$ son linealmente independientes.

Por consiguiente ha de ser $E_6^2 = \lambda 12^3 J\Delta/(2\pi)^{12} + \mu\Delta$. Igualando coeficientes para $n = 0$ obtenemos que $\lambda = 1$, mientras que para $n = 1$ resulta:

$$-1008 = \lambda(\tau(2) + c(0)\tau(1)) + \mu\tau(1).$$

Necesitamos los valores $\tau(2) = -24$, que se calcula con (6.11), y $c(0) = 744$, que puede calcularse refinando la prueba de 6.23. Con esto obtenemos $\mu = -12^3$. Así pues, hemos probado que

$$E_6^2 = 12^3(J-1)\Delta/(2\pi)^{12}.$$

Al igualar los coeficientes n -simos obtenemos la relación

$$-1008\sigma_5(n) + 504^2 \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_5(k)\sigma_5(n-k) = \tau(n+1) + \sum_{k=0}^{n-1} c(k)\tau(n-k) - 12^3\tau(n).$$

La expresión se simplifica si en (6.11) despejamos

$$-1008\sigma_5(n) + 504^2 \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_5(k)\sigma_5(n-k) = \frac{65520}{691}\sigma_{11}(\tau) - \frac{762048}{691}\tau(n).$$

Al igualar las dos fórmulas (y usando de nuevo que $c(0) = 744$) obtenemos

$$\tau(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} c(k)\tau(n-k) - 984\tau(n) = \frac{65520}{691}(\sigma_{11}(\tau) - \tau(n)),$$

o también

$$\sum_{k=1}^{n-1} c(k)\tau(n-k) + \tau(n+1) + 24\tau(n) = \frac{65520}{691}(\sigma_{11}(\tau) - \tau(n)).$$

Esta fórmula permite calcular recurrentemente los coeficientes $c(n)$. Notemos que, como el miembro izquierdo es entero y el primo 691 no divide a 65520, esta fórmula implica también la congruencia (6.12).

6.5 La función eta de Dedekind

Vamos a estudiar ahora una función introducida por Dedekind en 1877 y que, aunque no es modular, está estrechamente relacionada con las funciones modulares, especialmente con la función Δ . Con su ayuda demostraremos, entre otras cosas, una fórmula debida a Jacobi, según la cual

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} e^{2\pi i\tau} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2n\pi i\tau})^{24}.$$

Precisamente, la función eta es la que se obtiene al eliminar el exponente 24 en el miembro derecho (y la constante):

Definición 6.35 La *función eta de Dedekind* es la función

$$\eta(\tau) = e^{\pi i\tau/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2n\pi i\tau}),$$

definida en el semiplano H .

Observemos que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^n)$ es absolutamente convergente para $|z| < 1$, luego ciertamente $\eta(\tau)$ es una función holomorfa en H que no se anula en ningún punto. En términos de la función η , la fórmula de Jacobi es

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \eta^{24}(\tau).$$

Esencialmente, el problema es demostrar que η^{24} es una forma modular de grado 12. En primer lugar notamos que

$$\eta(\tau + 1) = e^{\pi i(\tau+1)/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2n\pi i(\tau+1)}) = e^{\pi i/12} \eta(\tau),$$

luego $\eta^{24}(\tau + 1) = \eta^{24}(\tau)$.

El punto más delicado es determinar el comportamiento de η bajo la transformación $\tau \mapsto -1/\tau$. La prueba clásica utiliza funciones elípticas, pero aquí daremos una prueba corta debida a Siegel.

Teorema 6.36 Para todo $\tau \in H$ se cumple

$$\eta(-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2} \eta(\tau),$$

donde la raíz cuadrada es la rama uniforme que es positiva sobre el semieje real positivo.

DEMOSTRACIÓN: Basta probar la relación cuando $\tau = yi$, con $y > 0$, pues el caso general se sigue entonces por prolongación analítica. Hemos de ver, pues, que $\eta(i/y) = y^{1/2} \eta(iy)$. Es inmediato que tanto $\eta(i/y)$ como $\eta(iy)$ son números reales positivos. Por lo tanto, esta relación equivale a

$$\log \eta(i/y) - \log \eta(iy) = \frac{1}{2} \log y.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}\log \eta(iy) &= -\frac{\pi y}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - e^{-2ny}) = -\frac{\pi y}{12} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi mny}}{m} \\ &= -\frac{\pi y}{12} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{e^{-2\pi my}}{1 - e^{-2\pi my}} = -\frac{\pi y}{12} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(1 - e^{2\pi my})}.\end{aligned}$$

Por consiguiente, hemos de probar que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(1 - e^{2\pi my})} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(1 - e^{2\pi m/y})} - \frac{\pi}{12} \left(y - \frac{1}{y} \right) = -\frac{1}{2} \log y. \quad (6.13)$$

Definimos

$$F_n(z) = -\frac{1}{8z} \cot(\pi iNz) \cot \frac{\pi Nz}{y}, \quad N = n + 1/2.$$

Sea C el paralelogramo de vértices $\pm y$, $\pm i$ recorrido en sentido positivo. Dentro de C , la función F_n tiene polos simples en los puntos $z = im/N$ y $z = my/N$, para $m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$, así como un polo triple en $z = 0$.

Teniendo en cuenta que $\cot z = 1/z - z/3 + \dots$ es fácil ver que el residuo de $F_n(z)$ en 0 es $i(y - y^{-1})/24$.

El residuo en $z = im/N$ es

$$\frac{1}{8\pi m} \cot \frac{\pi im}{y}.$$

Como esta expresión en par en m , vemos que

$$\sum_{\substack{m=-n \\ m \neq 0}}^n \operatorname{Res}_{z=im/N} F_n(z) = 2 \sum_{m=1}^n \frac{1}{8\pi m} \cot \frac{\pi im}{y}.$$

Pero

$$\cot i\theta = \frac{\cos i\theta}{\operatorname{sen} i\theta} = i \frac{e^{-\theta} + e^{\theta}}{e^{-\theta} - e^{\theta}} = -i \frac{e^{2\theta} + 1}{e^{2\theta} - 1} = \frac{1}{i} \left(1 - \frac{2}{1 - e^{2\theta}} \right).$$

Tomando $\theta = \pi m/y$ queda

$$\sum_{\substack{m=-n \\ m \neq 0}}^n \operatorname{Res}_{z=im/N} F_n(z) = \frac{1}{4\pi i} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m(1 - e^{2\pi m/y})}.$$

Similarmente,

$$\sum_{\substack{m=-n \\ m \neq 0}}^n \operatorname{Res}_{z=my/N} F_n(z) = \frac{i}{4\pi} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \frac{i}{2\pi} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m(1 - e^{2\pi my})}.$$

Resulta, pues, que la suma de los residuos de F_n dentro de C multiplicados por $2\pi i$ es precisamente el miembro izquierdo de (6.13). El teorema quedará probado si vemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_C F_n(z) dz = -\frac{1}{2} \log y.$$

De la definición de cotangente se sigue fácilmente que

$$\cot \pi i N z = i \frac{(e^{-\pi z})^{2n+1} + 1}{(e^{-\pi z})^{2n+1} - 1}.$$

De aquí se sigue que

$$\lim_n \cot \pi i N z = \begin{cases} i & \text{si } \operatorname{Re} z > 0, \\ -i & \text{si } \operatorname{Re} z < 0. \end{cases}$$

Similarmente,

$$\cot \frac{\pi N z}{y} = i \frac{(e^{i\pi z/y})^{2n+1} + 1}{(e^{i\pi z/y})^{2n+1} - 1},$$

de donde

$$\lim_n \frac{\pi N z}{y} = \begin{cases} i & \text{si } \operatorname{Im} z < 0, \\ -i & \text{si } \operatorname{Im} z > 0. \end{cases}$$

Esto implica que $\lim_n z F_n(z) = \pm 1/8$ cuando z está sobre el paralelogramo C salvo quizá en sus vértices. El signo es positivo en los lados que unen y con i y $-y$ con $-i$, mientras que es negativo en los otros dos.

Las expresiones anteriores muestran también que las funciones $z F_n(z)$ están uniformemente acotadas en C . Por ejemplo, si $\operatorname{Re} z > 0$ tenemos que $|e^{-\pi z}| < 1$ y, como z varía en un compacto (uno de los lados de C) existe, de hecho, un $\epsilon > 0$ tal que $|e^{-\pi z}| < 1 - \epsilon$, luego también $|(e^{-\pi z})^{2n+1}| < 1 - \epsilon$, luego $|(e^{-\pi z})^{2n+1} - 1| \geq \epsilon$ y así obtenemos una cota de $\cot \pi i N z$ independiente de n .

Puesto que la función $1/z$ está acotada en C , concluimos que las funciones $F_n(z)$ están uniformemente acotadas en C y podemos aplicar el teorema de la convergencia acotada de Lebesgue:

$$\begin{aligned} \lim_n \int_C F_n(z) dz &= \int_C \lim_n F_n(z) dz = \\ \frac{1}{8} \left(- \int_{-i}^y \frac{dz}{z} + \int_y^i \frac{dz}{z} - \int_i^{-i} \frac{dz}{z} + \int_{-y}^{-i} \frac{dz}{z} \right) &= \frac{1}{4} \left(- \int_{-i}^y \frac{dz}{z} + \int_y^i \frac{dz}{z} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(- \left(\log y + \frac{\pi i}{2} \right) + \left(\frac{\pi i}{2} - \log y \right) \right) = -\frac{1}{2} \log y. \end{aligned}$$

■

Como consecuencia tenemos que $\eta^{24}(-1/\tau) = \tau^{12} \eta^{24}(\tau)$. Antes hemos visto que η^{24} es invariante por $\tau \mapsto \tau + 1$. Como la función Δ cumple también estos dos hechos, vemos que la función $f(\tau) = \Delta(\tau)/\eta^{24}(\tau)$ es invariante por los dos

generadores del grupo modular, luego es, de hecho, invariante por todo el grupo. Claramente es holomorfa en H y no se anula. Veamos su comportamiento en el punto ∞ . En primer lugar:

$$\eta^{24}(\tau) = e^{2\pi i\tau} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2n\pi i\tau})^{24} = g^*(e^{2\pi i\tau}),$$

donde $g^*(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{24}$ es holomorfa con un cero simple en $z = 0$. Además $g^*(z)/z$ toma el valor 1 en 0

Teniendo en cuenta la serie de Fourier de Δ , es claro que f es holomorfa en ∞ y $f(\infty) = (2\pi)^{12}$. En definitiva, f es una función modular de grado 0 sin ceros. Esto sólo puede ser si f es constante. Concretamente, ha de ser $f = (2\pi)^{12}$. Con esto queda probada la fórmula de Jacobi:

Teorema 6.37 *Para todo $\tau \in H$ se cumple*

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} e^{2\pi i\tau} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2n\pi i\tau})^{24}.$$

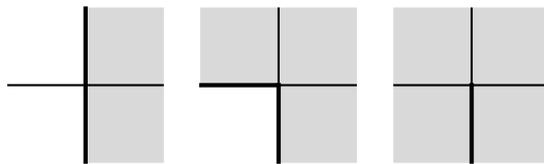
Capítulo VII

Funciones multiformes

Al estudiar las funciones de variable compleja aparecen de forma natural las funciones multiformes. El ejemplo más importante es sin duda la función logaritmo, que a cada número complejo z le asigna el conjunto $\text{Log } z$ de todos sus logaritmos. Otras muy relacionadas con ésta son las funciones raíz cuadrada, raíz cúbica, etc. Hasta aquí hemos eludido el estudio de las funciones multiformes trabajando siempre con ramas uniformes adecuadamente elegidas según las necesidades de cada momento. Ahora ha llegado el momento de investigar las funciones multiformes en general y tratar de comprender su comportamiento. Para empezar desarrollamos la teoría que permite relacionar las distintas ramas uniformes de una misma función multiforme.

7.1 Prolongación analítica

Sabemos que la función $\log x$ definida sobre el semieje real positivo se puede extender a una función holomorfa sobre, digamos, el semiplano $\text{Re } z > 0$, donde toma valores con parte imaginaria en $]-\pi/2, \pi/2[$. Pero no tenemos necesidad de limitarnos a este dominio. Es cierto que no podemos extenderla a $z = 0$, pero podemos “atravesar” todo el semieje imaginario positivo y extenderla a todos los números complejos con argumento en $]-\pi/2, \pi[$, y podemos seguir avanzando hasta tenerla definida sobre todos los números complejos con argumento en $]-\pi/2, 3\pi/2[$, es decir, en todo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ menos el semieje imaginario negativo.



A partir de ahí no podemos seguir. No es posible extender el logaritmo a dicho semieje de forma que la extensión sea continua, ya que si $a > 0$, el límite de la extensión que hemos obtenido cuando z tiende a $-ai$ desde el semiplano

$\operatorname{Re} z > 0$ es el logaritmo de $-ai$ con parte imaginaria $-\pi/2$, mientras que el límite desde el semiplano $\operatorname{Re} z < 0$ es el logaritmo de $-ai$ con parte imaginaria $3\pi/2$.

Sin embargo, esto no significa que los puntos del semieje imaginario negativo ofrezcan ningún impedimento a la prolongación analítica del logaritmo. Esto se ve más claramente si, en lugar de prolongar en sentido estricto las funciones, hacemos avanzar sus dominios en el sentido siguiente: Partiendo de la rama del logaritmo en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$, con partes imaginarias en $]-\pi/2, \pi/2[$, pasamos a la rama en el semiplano superior, con partes imaginarias en $]-\pi, \pi[$. Esto no es exactamente una prolongación de la función, pues hemos perdido parte del dominio que ya teníamos, pero ciertamente la nueva función “continúa” de forma natural a la anterior.



Igualmente podemos pasar a la rama del logaritmo en el semiplano izquierdo que prolonga a la anterior y de ésta a su vez a otra en el semiplano inferior. Así cada “extensión parcial” coincide con la precedente en la parte común de sus dominios y podríamos continuar dando vueltas al 0 de este modo con prolongaciones sucesivas sin encontrar ningún obstáculo. Eso sí, la cuarta rama que hemos obtenido de este modo, coincide con la tercera en su dominio común, pero no coincide con la primera sobre el cuadrante inferior derecho. Si damos un paso más y consideramos la rama uniforme del logaritmo sobre el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$ y que coincide con la cuarta en su dominio común, el resultado no es la rama de partida, con partes imaginarias en $]-\pi/2, \pi/2[$, sino una nueva rama con partes imaginarias en $]3\pi/2, 5\pi/2[$.

Así pues, si vamos “olvidando la retaguardia”, no encontramos ningún obstáculo al avance (con tal de que no intentemos pasar sobre el 0, naturalmente). Lo único que sucede es que, al volver a pasar por una misma zona, lo hacemos con una función que no es la que teníamos al principio.

Este fenómeno está en la base de la comprensión de las funciones multiformes, y nos lleva a considerar prolongaciones analíticas en un sentido local, es decir, no en el de obtener funciones con un dominio mayor, sino en el de funciones que “continúan” a una función dada en una dirección, aunque la contradigan en otra. La forma más cómoda de hacerlo es introducir el concepto de función holomorfa (o meromorfa) sobre un arco que marque el “camino” de la prolongación.

Definición 7.1 Consideremos un arco (regular a trozos) $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^\infty$. Diremos que una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ es *holomorfa* (o *meromorfa*) sobre γ si para todo $t \in [a, b]$ existen números reales $r_t, \epsilon_t > 0$ y una función holomorfa (meromorfa) $g_t : D(\gamma(t), r_t) \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ de modo que para todo $t' \in [a, b]$ tal que $|t - t'| < \epsilon_t$ se cumple $\gamma(t') \in D(\gamma(t), r)$ y $f(t') = g_t(\gamma(t'))$.

Aquí hay que entender que $D(\infty, r) = \mathbb{C}^\infty \setminus D(0, 1/r)$. En otras palabras, f es holomorfa (o meromorfa) sobre γ si es localmente la composición de γ con una función holomorfa (o meromorfa). En particular esto implica que f es continua.

Con más detalle, si f es una función meromorfa sobre un arco γ , tenemos una familia de funciones meromorfas g_t cuyos dominios van avanzando con γ y determinan a f . Es fácil ver que cada g_t debe coincidir en su dominio común con las funciones $g_{t'}$, para parámetros t' cercanos a t , por lo que cada una puede considerarse una “continuación” de las anteriores, pero si γ pasa dos veces por el mismo punto, las funciones g_t correspondientes a distintos valores del parámetro pueden ser completamente distintas, de modo que las funciones meromorfas en este sentido “olvidan” los valores que han tomado tiempo atrás, por lo que una contradicción con valores “antiguos” no impide el avance y no señala falsos puntos singulares.

Por ejemplo, es fácil ver que toda determinación continua del logaritmo sobre un arco es una función holomorfa en el sentido que acabamos de definir. Sabemos que todo arco que no pase por 0 admite una determinación continua del logaritmo que parta de cualquier valor predeterminado. Esto se traducirá en que 0 es la única singularidad de la función logaritmo, en el sentido de que es el único obstáculo real para prolongar un logaritmo.

Para precisar estas ideas necesitamos la siguiente versión del principio de prolongación analítica para funciones definidas sobre arcos:

Teorema 7.2 *Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ un arco¹ y sean f, g dos funciones meromorfas sobre γ que coincidan en un intervalo $[a, a + \delta[$. Entonces f y g coinciden en $[a, b]$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea s el supremo del conjunto de los números $x \in [a, b]$ tales que f y g coinciden en el intervalo $[a, x[$. Por hipótesis $s > a$. Vamos a probar que $s = b$. Por continuidad f y g coinciden en $[a, s]$.

Por la definición anterior existen números r y ϵ y funciones holomorfas h y h^* sobre el disco $D(\gamma(s), r)$ tales que si $t \in [a, b]$ y $|s - t| < \epsilon$ entonces $\gamma(t) \in D(\gamma(s), r)$ y $f(t) = h(\gamma(t))$, $g(t) = h^*(\gamma(t))$.

En particular esto implica que h y h^* coinciden en el conjunto $\gamma][s - \epsilon, s]$, luego por el principio de prolongación analítica han de coincidir² en todo el disco $D(\gamma(s), r)$. De aquí se sigue que si $t \in [a, b]$ y $|s - t| < \epsilon$ entonces $f(t) = g(t)$.

Por la definición de s esto sólo puede ocurrir si $s = b$ (o de lo contrario f y g coincidirían en un intervalo mayor que $[a, s]$). Así pues f y g coinciden en todo el intervalo $[a, b]$. ■

¹Siempre que hablemos de arcos se entenderá que son regulares a trozos. En particular, esto garantiza que si $a \leq u < v \leq b$, la imagen $\gamma][u, v]$ no se reduce a un punto, sino que es un compacto con puntos de acumulación, por lo que una función holomorfa (o meromorfa) definida en un entorno está completamente determinada por los valores que toma sobre esta imagen.

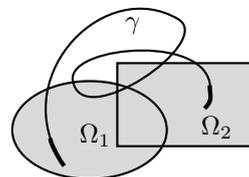
²Notemos que no importa que h y h^* puedan tener polos, pues en cualquier caso el conjunto de polos es discreto, por lo que ambas coinciden en un conjunto con acumulación donde son holomorfas, sus restricciones al conjunto donde toman valores finitos son iguales y por continuidad lo son en todo el disco.

Ejercicio: Probar que en las condiciones del teorema anterior basta con que f y g coincidan en un conjunto con acumulación en $[a, b]$.

Definición 7.3 Sea f una función meromorfa en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}^\infty$ y consideremos un arco $\gamma[a, b] \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ tal que $\gamma(a) \in \Omega$. Una *prolongación analítica* de f a lo largo de γ es una función g meromorfa sobre γ tal que $g(t) = f(\gamma(t))$ para todo t en un intervalo $[a, a + \delta[$.

El teorema anterior implica que si f admite una prolongación analítica a lo largo de γ entonces tal prolongación es única. Si $\gamma^* \subset \Omega$ entonces f admite claramente prolongación analítica a lo largo de γ : ésta viene dada por $g(t) = f(\gamma(t))$. Esta noción de prolongación lo largo de arcos nos lleva a una generalización de la prolongación analítica de funciones.

Sean f y g funciones meromorfas en los abiertos conexos Ω_1 y Ω_2 respectivamente y sea $\gamma[a, b] \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ un arco con extremos $\gamma(a) \in \Omega_1$ y $\gamma(b) \in \Omega_2$. Diremos que g es una *prolongación analítica* de f lo largo de γ si existe una función h meromorfa sobre γ tal que $h(t) = f(\gamma(t))$ en un intervalo $[a, a + \delta[$ y $h(t) = g(\gamma(t))$ en un intervalo $]b - \delta, b]$.



Es claro que entonces g está determinada por f y por γ , pues la función h es una prolongación analítica de f a lo largo de γ (luego es única) y dos funciones meromorfas en Ω_2 que prolonguen a f por γ han de coincidir en un entorno de $\gamma(b)$ sobre γ^* , luego han de ser la misma función.

La prolongación analítica así definida es transitiva, pues si un arco γ prolonga una función f definida en un dominio Ω_1 hasta una función g definida en un abierto conexo $\Omega_2 \subset \mathbb{C}^\infty$ y un arco ϕ prolonga a g hasta una función h definida en un abierto conexo $\Omega_3 \subset \mathbb{C}^\infty$, entonces existe un arco ψ contenido en Ω_2 que une el extremo final de γ con el extremo inicial de ϕ , y es obvio que g se prolonga a sí misma a lo largo de ψ . Entonces $\gamma \cup \psi \cup \phi$ prolonga f hasta h .

Puede ocurrir que una prolongación analítica de una función f tenga una parte de (o incluso todo) su dominio en común con f y que, sin embargo, no coincida con f . Por ejemplo, la función $h(t) = it$ para $t \in [0, 2\pi]$ es holomorfa sobre la circunferencia $\gamma(t) = e^{it}$ y prolonga analíticamente la rama uniforme del logaritmo en $D(1, 1)$ que cumple $\log 1 = 0$ hasta la rama uniforme en el mismo disco que cumple $\log 0 = 2\pi i$. Cambiando los dominios a $[0, 4\pi]$ obtenemos otra rama distinta, y es fácil ver que de este modo (e invirtiendo el sentido del arco) podemos obtener cualquier rama del logaritmo en el disco por prolongación de la primera.

Así, una función meromorfa en un abierto conexo en \mathbb{C}^∞ puede prolongarse analíticamente hasta varias funciones meromorfas distintas en otro dominio. Conviene saber que a lo sumo podemos obtener una cantidad numerable. Para ello conviene probar antes la caracterización siguiente de la prolongación analítica por arcos:

Teorema 7.4 Sean f y g dos funciones meromorfas definidas sobre discos abiertos en \mathbb{C}^∞ . Entonces g es prolongación analítica de f a lo largo de un arco γ si y sólo si existe una sucesión de funciones $f_i : D_i \rightarrow \mathbb{C}^\infty$, para $i = 1, \dots, n$, meromorfas en discos y de modo que $f_1 = f$, $f_n = g$ y cada f_i coincide con f_{i+1} en su dominio común (que es no vacío). Además en tal caso f puede prolongarse hasta g a lo largo de una poligonal cuyos vértices son números complejos con parte real e imaginaria racionales.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que f se prolonga hasta g a lo largo de un arco $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ y sea $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ la prolongación a lo largo de γ .

Por definición de función meromorfa sobre un arco, para cada $t \in [a, b]$ existe un intervalo $[u_t, v_t]$ cuyo interior en $[a, b]$ contiene a t y de modo que para todo $s \in [u_t, v_t]$ se cumple $h(s) = g_t(\gamma(s))$, donde g_t es una función meromorfa en un disco $D(\gamma(t), r_t)$.

Por compacidad, $[a, b]$ puede cubrirse por los interiores de un número finito de intervalos $[u_t, v_t]$. Fijemos un cubrimiento finito y tomemos uno de sus miembros que contenga a a . Será de la forma $[a, v_{t_1}]$. El punto v_{t_1} ha de pertenecer al interior de otro de los intervalos, que será de la forma $[u_{t_2}, v_{t_2}]$, con $a < v_{t_1} < v_{t_2}$. Continuando de este modo, puesto que sólo hay un número finito de intervalos, llegamos a una sucesión de intervalos

$$[a, v_{t_1}], [u_{t_2}, v_{t_2}], \dots, [u_{t_n}, b],$$

de modo que cada uno corta al siguiente en un intervalo.

Esto hace que $f(\gamma(t)) = h(\gamma(t)) = g_{t_1}(\gamma(t))$ para puntos próximos a a (con lo que f coincide con g_{t_1} en su dominio común), $g_{t_i}(\gamma(t)) = h(\gamma(t)) = g_{t_{i+1}}(\gamma(t))$ para puntos próximos a v_{t_i} (con lo que g_{t_i} coincide con $g_{t_{i+1}}$ en su dominio común), y $g_{t_n}(\gamma(t)) = h(\gamma(t)) = g(\gamma(t))$ para puntos cercanos a b (luego g_{t_n} coincide con g en su dominio común). Aquí usamos que la intersección de dos discos es conexa. Esto prueba una implicación.

Supongamos ahora que tenemos las funciones $f_i : D_i \rightarrow \mathbb{C}^\infty$. Tomemos puntos $z_i \in D_i \cap D_{i+1}$ con coordenadas racionales y sea $P : [1, n-1] \rightarrow \mathbb{C}$ la poligonal que los une, de modo que $P(i) = z_i$. Notemos que $[z_i, z_{i+1}]^* \subset D_{i+1}$.

Para $i < t < i+1$, definimos $h(t) = f_{i+1}(P(t))$. Es claro que la función h así definida es meromorfa y prolonga $f = f_1$ hasta $g = f_n$. ■

De este modo, si una función meromorfa puede prolongarse hasta otra, puede prolongarse a lo largo de una poligonal con vértices racionales. Puesto que la cantidad de tales poligonales es numerable, el número de prolongaciones hasta un dominio fijo es a lo sumo numerable. Es decir, se cumple el teorema siguiente:

Teorema 7.5 (Poincaré-Volterra) El conjunto de funciones meromorfas en un abierto conexo dado en \mathbb{C}^∞ que pueden obtenerse por prolongación analítica a partir de una función dada es a lo sumo numerable.

7.2 Funciones multiformes meromorfas

Ahora estamos en condiciones de definir la holomorfa de funciones multiformes. Si $\Omega \subset \mathbb{C}^\infty$ y $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ es una función multiforme, es decir, una función que a cada $z \in \Omega$ le asigna un subconjunto $F(z) \subset \mathbb{C}^\infty$ no vacío, llamaremos *rama uniforme* de F a cualquier función uniforme meromorfa f definida en un abierto $V \subset \Omega$ con la propiedad de que $f(z) \in F(z)$ para todo $z \in V$. Una función analítica h sobre un arco $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ es una *determinación* de F si cumple $h(t) \in F(\gamma(t))$ para todo $t \in [a, b]$.

Definición 7.6 Sea Ω un abierto conexo en \mathbb{C}^∞ y $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función multiforme. Diremos que F es *meromorfa* en Ω si cumple

1. Para cada $z \in \Omega$ y cada $w \in F(z)$ existe una rama uniforme f de F definida en un entorno de z tal que $f(z) = w$.
2. Cualquier rama uniforme de F definida en un abierto conexo contenido en Ω se prolonga analíticamente a cualquier otra a lo largo de una determinación meromorfa de F contenida en Ω .

Si F no toma nunca el valor ∞ se dice que es *holomorfa*.

La segunda condición excluye casos como el de la función F que a cada número complejo $z \neq 0$ le asigna todas sus raíces cuadradas y cúbicas. Es más natural considerar que en F hay dos funciones holomorfas distintas y no una. Así, mientras \sqrt{z} es una función holomorfa multiforme en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (pronto lo justificaremos), no lo es en el disco $D(1, 1)$, pues en él las dos ramas uniformes constituyen dos funciones holomorfas independientes (diremos que en este abierto las dos ramas se separan). Conviene observar que la determinación de F que conecta dos ramas uniformes según la propiedad 2) puede tomarse siempre holomorfa, pues si pasa por un polo siempre podemos “sortearlo” modificando el arco.

Diremos que una función multiforme meromorfa $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ es *completa* si cuando una función $f : A \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ meromorfa en un abierto conexo $A \subset \Omega$ puede obtenerse como prolongación analítica de una rama uniforme de F , entonces f es una rama uniforme de F .

Toda función multiforme meromorfa $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ se “extiende” a una función completa del modo siguiente: Para cada $z \in \Omega$ llamamos $\overline{F}(z)$ al conjunto de todos los valores que toman en z las funciones meromorfas definidas en un entorno de z y que se obtienen por prolongación analítica a partir de las ramas uniformes de F a lo largo de arcos contenidos en Ω . Es fácil ver que \overline{F} es una función multiforme meromorfa en Ω y completa, con la propiedad de que todas las ramas uniformes de F lo son también de \overline{F} . Además \overline{F} es la única función en estas condiciones. La llamaremos *compleción* de F . La posibilidad de completar las funciones hace que no perdamos generalidad si trabajamos únicamente con funciones completas.

Con la definición que hemos dado resulta que no es evidente que funciones multiformes tales como el logaritmo sean holomorfas, pues falta comprobar que satisfacen la condición 2) de la definición. Lo probaremos en un contexto mucho más general.

Teorema 7.7 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^\infty$ un abierto conexo y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función meromorfa localmente inyectiva.³ Entonces f^{-1} es una función meromorfa multiforme en el dominio $G = f[\Omega]$.*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos $z \in f[\Omega]$ y $w \in f^{-1}(z)$, es decir, $f(w) = z$. Por hipótesis existe un entorno V de w donde f es inyectiva. El teorema 1.12 implica que $g = (f|_V)^{-1}$ es una rama uniforme de f^{-1} tal que $g(z) = w$. Más aún, vamos a ver que dos ramas uniformes g_1 y g_2 que asignen a z el mismo valor w coinciden en un entorno de z . En efecto, podemos suponer que están definidas en un mismo entorno de z conexo D . Entonces $V = g_1[D] \cap g_2[D]$ es un entorno de w y $f[V]$ es un entorno de z donde g_1 y g_2 coinciden, pues si $z^* \in f[V]$, entonces $z^* = f(v)$, para un $v \in V$, que a su vez es $v = g_1(u_1) = g_2(u_2)$, con $u_1, u_2 \in D$. Por lo tanto $z^* = f(v) = u_1 = u_2$ y $g_1(z^*) = g_2(z^*) = v$.

Ahora hemos de probar toda rama uniforme de f^{-1} puede prolongarse hasta cualquier otra. Sean, pues, $g_i : A_i \rightarrow \Omega$ dos ramas uniformes de f^{-1} definidas sobre dos abiertos conexos A_i , para $i = 1, 2$. Tomemos puntos $z_i \in A_i$ y sean $w_i = g_i(z_i) \in \Omega$. Existe un arco $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ tal que $\gamma(a) = w_1$, $\gamma(b) = w_2$.

Definimos $\phi = f[\gamma] = \gamma \circ f$. Vamos a probar que g_1 se prolonga hasta g_2 a lo largo de ϕ . La función sobre ϕ que las conecta es $h(t) = \gamma(t)$. Veamos que h es meromorfa sobre ϕ . Para ello tomamos $t \in [a, b]$, con lo que $h(t) = \gamma(t) \in \Omega$, luego existe un disco D_t de centro $\gamma(t)$ donde f es inyectiva. Sea U_t un disco de centro $\phi(t) = f(\gamma(t))$ tal que $U_t \subset f[D_t]$. Sobre U_t está definida la función meromorfa $g_t = (f|_{D_t})^{-1}|_{U_t}$. Si probamos que extiende a h en un entorno de t tendremos que h es meromorfa sobre ϕ . (Más aún, será una determinación meromorfa de f^{-1} , como exige la definición de función multiforme meromorfa.)

Ahora bien, tenemos que $\phi(t) = f(\gamma(t)) \in U_t$, luego $\gamma(t) \in f^{-1}[U_t]$, luego si t' está en un cierto entorno de t se cumple $\gamma(t') \in f^{-1}[U_t] \subset D_t$ y $\phi(t') = f(\gamma(t')) \in U_t$. Así, por definición de g_t resulta $h(t') = \gamma(t') = g_t(\phi(t'))$, como queríamos probar.

Ahora falta ver que h coincide con las dos ramas dadas en un entorno de cada extremo. Si nos fijamos —por ejemplo— en el extremo inicial, basta ver que g_a coincide con g_1 en un entorno de z_1 , pero $g_1(z_1) = w_1 = \gamma(a) = g_a(\phi(a)) = g_a(z_1)$, y hemos visto que si dos ramas uniformes coinciden en z_1 coinciden en un entorno. ■

Esto prueba en particular que la función logaritmo y las funciones $\sqrt[n]{z}$ son holomorfas en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, y no es difícil probar que son completas, pero esto no es inmediato, pues en general no es cierto que la inversa de una función holomorfa localmente inyectiva sea completa. Por ejemplo, la restricción de la función

³Por la observación tras el teorema 1.37, si $\Omega \subset \mathbb{C}$ y f no tiene polos, la hipótesis equivale a exigir que la derivada no se anule. Por otra parte, es fácil ver que una función meromorfa es inyectiva alrededor de un polo si y sólo si éste es simple.

exponencial a la banda $0 < \operatorname{Im} z < 4\pi$ es localmente inyectiva y su inversa es la función definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ que a cada número complejo le asigna sus logaritmos en la banda indicada. Es fácil ver que dicha función no es completa. De hecho, su completación es la función logaritmo. Para justificarlo basta ver que ésta es completa. Vamos a probar más que eso.

Definición 7.8 Una función meromorfa (holomorfa) $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ es *arbitrariamente prolongable* (por funciones holomorfas) en Ω si cualquiera de sus ramas uniformes se prolonga analíticamente a lo largo de cualquier arco contenido en Ω que parta de su dominio.

Teorema 7.9 Las funciones multiformes $\operatorname{Log}(z)$ y $\sqrt[n]{z}$ son completas y arbitrariamente prolongables en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos un arco arbitrario $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y una rama uniforme del logaritmo en un entorno de $\gamma(a)$. Sea t_0 el supremo de los puntos $t \in [a, b]$ tales que dicha rama admita una prolongación analítica holomorfa a lo largo de la restricción de γ a $[a, t]$ que sea una determinación holomorfa del logaritmo. Basta probar que $t_0 = b$ y que la rama se prolonga hasta b mediante una determinación holomorfa del logaritmo.

Por la unicidad de las prolongaciones analíticas, tenemos definida una única determinación holomorfa del logaritmo $h : [a, t_0[\rightarrow \mathbb{C}$ que prolonga a la rama dada. Ahora observamos que en un entorno conexo de $\gamma(t_0)$ existe una rama uniforme del logaritmo L . Sea $\epsilon > 0$ tal que $\gamma(t_0 - \epsilon)$ esté en su dominio. Por definición de prolongación a lo largo de un arco existe un entorno conexo de este punto (contenido en el dominio de L) donde hay definida una función holomorfa g cuya restricción a γ es h . Sumando a L una constante podemos suponer que extiende a g . Es claro que L permite ahora extender la determinación del logaritmo h hasta un intervalo $[a, t_0 + \epsilon]$, lo cual es absurdo, a no ser que $t_0 = b$ y, en tal caso, tenemos una determinación holomorfa del logaritmo en $[a, b]$.

Esto prueba que Log es arbitrariamente prolongable en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y, teniendo en cuenta que no existen ramas uniformes holomorfas del logaritmo en entornos de 0, esto implica que también es completa.

Con la raíz n -sima se razona análogamente, usando ahora que dos ramas uniformes de la raíz n -sima en un entorno conexo de un mismo punto de diferencian en un factor constante (una raíz n -sima de la unidad). ■

Ejemplo En la práctica, la función logaritmo es muy sencilla: fijado un número complejo $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y un logaritmo $w_0 \in \operatorname{Log}(z_0)$, existe una única rama uniforme del logaritmo en un disco de centro z_0 al cual asigne la imagen w_0 , y si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es un arco que parte de z_0 , su única prolongación analítica a lo largo de γ es la única determinación continua $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ del logaritmo sobre γ que cumple $\phi(a) = w_0$ (por lo que ahora podemos hablar de determinaciones analíticas del logaritmo a lo largo de un arco). Concretamente,

$$f(t) = \log |\gamma(t)| + i\theta(t)$$

donde $\theta(t)$ es una determinación continua del argumento a lo largo de γ (la única que cumple que $\theta(a) = \text{Im } w_0$). Si γ es un arco cerrado, entonces

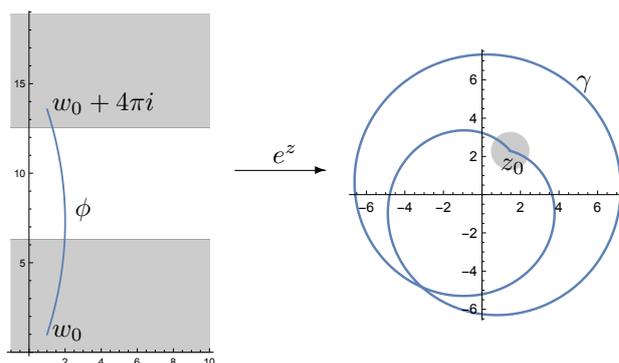
$$\theta(b) - \theta(a) = 2\pi I(\gamma, 0),$$

luego

$$\phi(b) - \phi(a) = 2\pi i I(\gamma, 0).$$

Esto significa que la rama uniforme del logaritmo alrededor de z_0 a la que se llega por prolongación analítica a lo largo de γ es la que resulta de sumar $2\pi i I(\gamma, 0)$ a la rama de partida.

La función exponencial transforma cada banda de amplitud $2\pi i$ en todo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Las rectas $\text{Im } w = 2k\pi$ se corresponden con el eje real. En el caso de la figura, la rama uniforme inicial del logaritmo en el disco señalado alrededor de z_0 es la que asigna imágenes en \mathbb{C} alrededor de w_0 , mientras que la rama final que se obtiene por prolongación a través de γ es la que toma valores alrededor de $w_0 + 4\pi i$. Para pasar a cualquier otra rama deseada sólo tenemos que tomar un arco cerrado que dé el número de vueltas adecuado alrededor de 0.



El caso de la función $\sqrt[n]{z}$ es similar, pero cada vuelta de un arco alrededor de 0 hace que la rama uniforme de partida se multiplique por $\omega = e^{2\pi i/n}$, con lo que tras n vueltas volvemos a la rama inicial. ■

Las funciones trigonométricas inversas Vamos a estudiar ahora las funciones trigonométricas

$$\text{Arcsen } z, \quad \text{Arccos } z, \quad \text{Arctan } z.$$

Definimos el *arco seno* $\text{Arcsen } z$ como el conjunto de todos los números complejos w tales que $\text{sen } w = z$. Similarmente se definen el *arco coseno* y el *arco tangente*. Se trata, pues, de funciones multiformes, y vamos a estudiar la existencia de ramas uniformes continuas. Ante todo, observamos que la relación $\text{sen}(w + \pi/2) = \text{cos } w$ hace que $\text{Arcsen } z = \text{Arccos } z + \pi/2$, en el sentido de que cualquier arco coseno de z se convierte en un arco seno sumándole $\pi/2$ y

cualquier arco seno se convierte en un arco coseno restándole $\pi/2$. Esto permite traducir todas las propiedades del arco coseno a propiedades del arco seno, por lo que sólo nos ocuparemos de las funciones $\text{Arccos } z$ y $\text{Arctan } z$.

Recordando que

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

resulta útil empezar estudiando la función racional

$$w = \lambda(z) = \frac{z + z^{-1}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}.$$

Observemos que λ toma el valor ∞ exactamente en los puntos 0 e ∞ . Dado $w \in \mathbb{C}$, un número z cumplirá $w = \lambda(z)$ si y sólo si $z^2 - 2wz + 1 = 0$, lo que a su vez equivale a que $z = w + \sqrt{w^2 - 1}$, donde $\sqrt{w^2 - 1}$ es cualquiera de las raíces cuadradas de $w^2 - 1$.

Así, si $w \neq \pm 1, \infty$ entonces $w^2 - 1$ es un número complejo no nulo y tiene dos raíces cuadradas distintas, con lo que w tiene exactamente dos antiimágenes por λ (aunque esto último también vale para $w = \infty$). Los números complejos $w = \pm 1$ son los únicos que tienen una única antiimagen por λ , a saber, $\lambda(1) = 1$, $\lambda(-1) = -1$.

Para comprender con más detalle el comportamiento de λ estudiaremos en primer lugar cómo transforma las circunferencias de centro 0 . La circunferencia unitaria $|z| = 1$ es un caso especial. Sus puntos son de la forma $z = e^{it}$, con $t \in \mathbb{R}$, y se transforman en

$$\lambda(z) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos t.$$

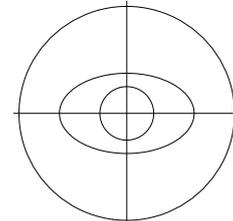
Por consiguiente la circunferencia unitaria se transforma en el segmento $[-1, 1]$. Geométricamente, λ “aplasta” la circunferencia sobre el segmento, de modo que todos los puntos de éste salvo sus extremos tienen dos antiimágenes por λ , una en el semiplano superior y otra en el inferior.

Consideremos ahora una circunferencia de radio $r > 0$, $r \neq 1$. Sus puntos son de la forma $z = re^{it}$, con $t \in \mathbb{R}$. Al aplicar λ obtenemos

$$w = \lambda(z) = \frac{re^{it} + r^{-1}e^{-it}}{2} = \frac{r^{-1} + r}{2} \cos t - i \frac{r^{-1} - r}{2} \sin t. \quad (7.1)$$

Por lo tanto, la circunferencia de radio r se transforma en la elipse cuyos ejes son el eje real y el eje imaginario y cuyos semiejes miden

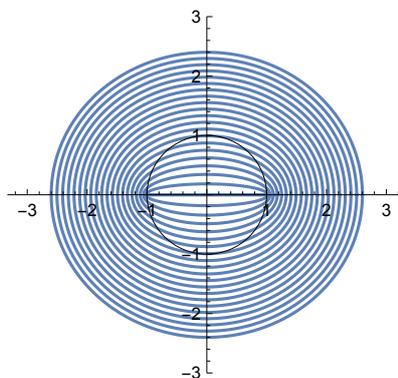
$$a = \frac{r^{-1} + r}{2} \quad \text{y} \quad b = \frac{r^{-1} - r}{2}.$$



La distancia focal c está determinada por la relación $a^2 = b^2 + c^2$, luego es $c = 1$, es decir, los focos son ± 1 . En realidad, son dos las circunferencias cuya imagen por λ es dicha elipse, las de radios r y r^{-1} .

Cada punto de la elipse tiene exactamente una imagen en cada una de las circunferencias. Es fácil ver que las elipses de focos ± 1 cubren todo el plano complejo menos el intervalo $[-1, 1]$. Por consiguiente λ biyecta tanto el disco abierto $D(0, 1)$ como el complementario del disco cerrado $\overline{D}(0, 1)$ con $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

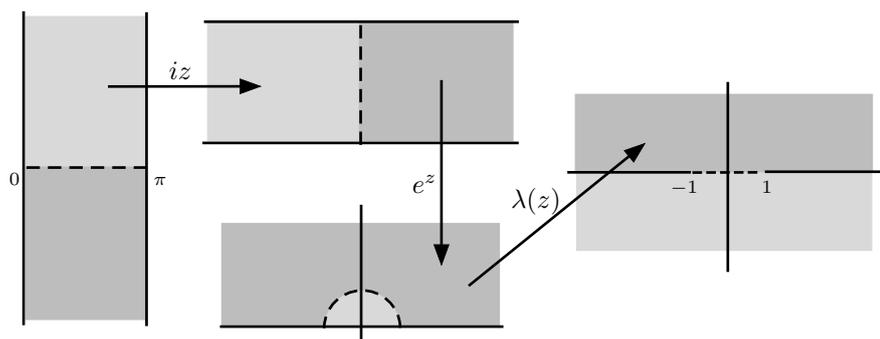
Así, la figura siguiente puede obtenerse calculando la imagen por λ de varias circunferencias de radio $r < 1$ o, alternatively, calculando las imágenes de los círculos con los radios inversos $r > 1$. Cuanto más se parece r a 1 la elipse correspondiente se acerca más al segmento $[-1, 1]$, mientras que cuando r tiende a 0 o a $+\infty$, los semiejes de la elipse tienden a $+\infty$.



La observación siguiente tendrá importancia un poco más abajo: Si $r > 1$ entonces $-(r^{-1} - r)/2 > 0$, luego la fórmula (7.1) muestra que z y $\lambda(z)$ están en el mismo semiplano respecto al eje real. Así, la semicircunferencia $\text{Im } z > 0$ se transforma en la semielipse $\text{Im } z > 0$. Por el contrario, si $r < 1$ entonces la semicircunferencia $\text{Im } z > 0$ se transforma en la semielipse $\text{Im } z < 0$. Como consecuencia, el semicírculo $|z| < 1, \text{Im } z > 0$ se transforma en el semiplano $\text{Im } z < 0$, mientras que el semicírculo $|z| > 1, \text{Im } z > 0$ se transforma en el semiplano $\text{Im } z > 0$.

Si tenemos en cuenta también el caso $r = 1$, concluimos que λ biyecta el semiplano $\text{Im } z > 0$ en todo el plano complejo menos las semirrectas $]-\infty, -1[$, $]1, +\infty[$. Concretamente, los puntos con $|z| = 1$ se corresponden con los del segmento $[-1, 1]$, los puntos con $|z| > 1$ se corresponden con los del semiplano $\text{Im } z > 0$ y los puntos con $|z| < 1$ con los del semiplano $\text{Im } z < 0$.

Ahora aplicamos esto a la función coseno $\cos z$, que se obtiene componiendo la función $z \mapsto iz$, con la función $z \mapsto e^z$ y luego con la función λ .



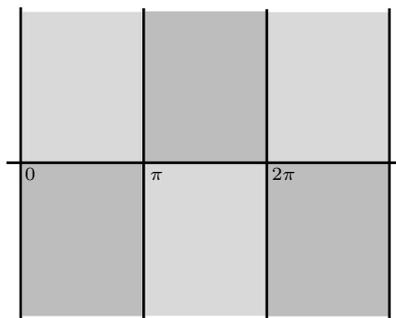
Consideremos la banda vertical $0 < \text{Re } z < \pi$. La función iz la transforma en la banda horizontal $0 < \text{Im } z < \pi$, la función exponencial la transforma en el semiplano $\text{Im } z > 0$ y por último la función λ transforma el semiplano en todo

el plano complejo menos las semirrectas $]-\infty, -1]$ y $[1, +\infty[$. Si llamamos G a este abierto, tenemos que el coseno biyecta la banda $0 < \operatorname{Re} z < \pi$ con G .

Si precisamos el argumento veremos que la parte de la banda contenida en el semiplano $\operatorname{Im} z > 0$, se transforma en el semiplano superior y la parte inferior $\operatorname{Im} z < 0$ en el semiplano inferior, mientras que el segmento $]0, \pi[$ se transforma en $] -1, 1[$. Más aún, las rectas $\operatorname{Re} z = 0$ y $\operatorname{Re} z = \pi$ se transforman sucesivamente en las rectas $\operatorname{Im} z = 0$, $\operatorname{Im} z = \pi$, luego en los semiejes $]0, +\infty[$, $]-\infty, 0[$ y λ los transforma en las semirrectas $]1, +\infty[$, $]-\infty, -1[$.

El comportamiento de la función coseno en la banda $-\pi < \operatorname{Re} z < 0$ se sigue fácilmente de la relación $\cos(-z) = \cos z$. La semibanda superior se transforma ahora en el semiplano superior y la inferior en el semiplano inferior. Como el coseno tiene periodo 2π , ya sabemos su comportamiento sobre las bandas $k\pi < \operatorname{Re} z < (k+1)\pi$, para todo entero k .

Sobre el eje real, el coseno se comporta como es conocido, y toma imágenes en el intervalo $[-1, 1]$. Las zonas sombreadas en claro (abiertas) se transforman biyectivamente en el semiplano superior y las zonas oscuras en el inferior. Las semirrectas verticales que separan las bandas se transforman unas en la semirrecta $]1 + \infty[$ y otras en $]-\infty, -1[$.



Esto muestra la existencia de ramas uniformes sencillas de la función arco coseno. Por ejemplo, la inversa de $\cos z$ restringida a la banda $0 < \operatorname{Re} z < \pi$ es una rama uniforme de la función arco coseno definida sobre el abierto G , pero hay otras posibilidades, como restringir $\cos z$ a la semibanda $0 < \operatorname{Re} z < 2\pi$, $\operatorname{Im} z > 0$, y entonces obtenemos una rama uniforme del arco coseno definida sobre \mathbb{C} menos la semirrecta $[-1, +\infty[$. Similarmente podemos definir una rama uniforme del arco coseno sobre \mathbb{C} menos la semirrecta $]-\infty, 1]$. Estos tres casos prueban la existencia de ramas uniformes (necesariamente holomorfas, por el teorema de la función inversa) de la función arco coseno en un entorno de cualquier número complejo distinto de ± 1 .

Por otra parte, la derivada de $\cos z$ es $\sin z$, que se anula en los múltiplos de π , luego $\cos z$ no es localmente inyectiva alrededor de ninguno de ellos, lo que se traduce a su vez en que el arco coseno no tiene ramas uniformes continuas alrededor de ± 1 .

Vamos a encontrar expresiones explícitas para las ramas uniformes del arco coseno. Notemos que si

$$w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

despejando resulta que $(e^{iz})^2 - 2we^{iz} + 1 = 0$, luego

$$e^{iz} = w + \sqrt{w^2 - 1},$$

y en conclusión

$$z = \frac{1}{i} \log(w + \sqrt{w^2 - 1}), \quad (7.2)$$

donde hay que entender que elegimos una raíz cuadrada y un logaritmo. Recíprocamente, cualquier número de la forma (7.2) es un arco coseno de w . Si partimos de un número complejo $w \neq \pm 1$ entonces $w^2 - 1 \neq 0$, luego podemos tomar una rama uniforme continua de la raíz cuadrada en un entorno, y $w + \sqrt{w^2 - 1} \neq 0$ (pues en caso contrario elevaríamos al cuadrado y resultaría $1 = 0$), con lo que podemos tomar una rama uniforme continua del logaritmo en un entorno. En definitiva, todo $w \neq \pm 1$ tiene en un entorno una rama uniforme continua del arco coseno dada por (7.2), donde el logaritmo y la raíz cuadrada son ahora ramas uniformes continuas de estas funciones, elegidas adecuadamente.

Más aún, localmente toda rama uniforme continua del arco coseno es de esta forma. En efecto, si $f(w)$ es una rama uniforme continua del arco coseno definida alrededor de un punto $w_0 \neq \pm 1$, entonces podemos tomar otra de la forma (7.2) definida en un entorno conexo Ω de w_0 contenido en el dominio de f . Entonces

$$f(w) = \frac{1}{i} \log(w + \epsilon_w \sqrt{w^2 - 1}) + 2k_w \pi,$$

donde $\epsilon_w = \pm 1$ y $k_w \in \mathbb{Z}$. La función

$$e^{if(w)} = w + \epsilon_w \sqrt{w^2 - 1}$$

es continua, lo que obliga a que ϵ_w sea continua —luego constante— en Ω . De aquí se sigue que k_w también es continua y también es constante. Cambiando $\sqrt{w^2 - 1}$ por $\epsilon_w \sqrt{w^2 - 1}$ obtenemos otra rama uniforme continua de la raíz cuadrada y cambiando $\log(w + \epsilon_w \sqrt{w^2 - 1})$ por $\log(w + \epsilon_w \sqrt{w^2 - 1}) + 2k_w \pi$ obtenemos otra rama uniforme continua del logaritmo con las cuales f tiene la forma (7.2).

Más sencillo es el caso del arco tangente. Si

$$w = \tan z = \frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = \frac{1}{i} \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1},$$

entonces

$$z = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iw}{1 - iw},$$

para una elección adecuada del logaritmo. Recíprocamente, esta expresión determina un arco tangente de w para cualquier elección del logaritmo. Puesto que la expresión dentro del logaritmo es una transformación de Möbius M , concluimos que la función multiforme Arctan tiene las mismas propiedades que la función logaritmo con las variaciones obvias que exige M . Así, al igual que el logaritmo tiene ramas uniformes continuas en un entorno de cada punto distinto de 0 (y de ∞), la función arco tangente tiene ramas uniformes continuas en un entorno de cada punto distinto de $\pm i$. Al igual que el logaritmo tiene ramas uniformes continuas en \mathbb{C}^∞ menos las semirrectas que conectan 0 e ∞ , la función arco tangente tiene ramas uniformes continuas menos en los arcos de circunferencia que conectan a i con $-i$, incluyendo el segmento de extremos $\pm i$ y las dos semirrectas verticales de extremos $\pm i$.

Usando las expresiones en función de logaritmos y raíces cuadradas, es inmediato comprobar que Arcsen y Arccos son funciones multiformes holomorfas completas y arbitrariamente prolongables en $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$, mientras que Arctan lo es en $\mathbb{C}^\infty \setminus \{\pm i\}$. ■

7.3 Singularidades aisladas

Al igual que ocurre con las funciones uniformes, tiene interés estudiar el comportamiento de las funciones multiformes alrededor de las singularidades aisladas. Ahora nos encontramos con nuevos tipos de singularidades que no tienen un análogo en el caso uniforme. Por ejemplo, de acuerdo con la definición que daremos a continuación, el 0 es una singularidad aislada de la función logaritmo, pero no lo es de ninguna de sus ramas uniformes (en el sentido que conocemos) puesto que no existen ramas uniformes del logaritmo definidas en un entorno reducido de 0. Por otra parte hemos de tener en cuenta nuevos fenómenos. Tomemos por caso la función

$$F(z) = e^{1/(\sqrt{z+1})},$$

definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Cada número complejo no nulo tiene dos imágenes, excepto el 1, que sólo tiene la imagen $e^{1/2}$. A partir de una rama uniforme de la raíz cuadrada en $D(1, 1)$ que cumpla $\sqrt{1} = 1$ obtenemos una rama uniforme de F respecto a la cual 1 es un punto regular, pero a partir de la rama que cumple $\sqrt{1} = -1$ obtenemos una rama uniforme de F en $D'(1, 1)$ respecto a la cual 1 es una singularidad esencial.

Así pues, un mismo punto puede ser regular o singular para distintas ramas uniformes de una misma función.

Empezaremos por dar una definición de singularidad aislada que generalice al concepto que ya conocemos y recoja los nuevos casos que pueden presentarse en funciones multiformes.

Definición 7.10 Sea $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función multiforme meromorfa y completa en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}^\infty$. Un punto $z_0 \in \Omega$ es *regular* si existe un disco $D = D(z_0, r)$ tal que todas las ramas uniformes de F con dominio contenido en D son holomorfas y arbitrariamente prolongables en D con prolongaciones holomorfas.

Un punto z_0 es una *singularidad aislada* de F si tiene un entorno reducido $D'(z_0, r) \subset \Omega$ formado por puntos regulares.

Obviamente, si F es holomorfa y arbitrariamente prolongable en Ω (lo cual ocurre, por ejemplo, cuando F es uniforme y holomorfa) entonces todos los puntos de Ω son regulares para F y un punto z_0 es una singularidad aislada si y sólo si tiene un entorno reducido $D'(z_0, r) \subset \Omega$.

En particular vemos que las singularidades aisladas de las funciones uniformes holomorfas en el sentido que acabamos de definir coinciden con las que ya

teníamos definidas. Sin embargo esta definición incluye a 0 e ∞ como singularidades aisladas de las funciones logaritmo y $\sqrt[n]{z}$, así como a ± 1 e ∞ para el arco seno y arco coseno y $\pm i$ para el arco tangente.

A la hora de estudiar una singularidad aislada z_0 de una función multiforme F meromorfa y completa hemos de tener presente la posibilidad siguiente: Sea $D'(z_0, r)$ un entorno reducido de z_0 que satisfaga la definición de singularidad aislada y sea G la restricción de F a dicho entorno. Entonces G no cumple necesariamente la definición de función multiforme meromorfa, pues dadas dos ramas uniformes de G , aunque son ramas de F y por lo tanto una se prolonga hasta la otra a lo largo de un arco adecuado, no es necesario que puedan prolongarse a lo largo de un arco contenido en $D'(z_0, r)$. Es el caso de $z_0 = 1$ para la función $e^{1/(\sqrt{z}+1)}$, que poníamos antes como ejemplo. En $D'(1, 1)$ tiene dos ramas uniformes que no pueden prolongarse mutuamente en dicho abierto pues, al estar definidas en todo él, cada rama se prolonga a sí misma a lo largo de cualquier arco.

Volviendo a la función G en el caso general, podemos establecer una relación de equivalencia entre sus ramas uniformes holomorfas (observemos que la definición de singularidad aislada implica que sus ramas no tienen polos), de modo que dos ramas están relacionadas si una se prolonga hasta la otra a lo largo de un arco contenido en $D'(z_0, r)$. Si C es una clase de equivalencia, la función G_C que a cada $z \in D'(z_0, r)$ le asigna los valores que en z toman las ramas de G que pertenecen a C es una función multiforme holomorfa completa y arbitrariamente prolongable en $D'(z_0, r)$ (notemos que, como las ramas de G son arbitrariamente prolongables en $D'(z_0, r)$, el dominio de G_C es todo el entorno reducido).

Definición 7.11 Sea $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función multiforme meromorfa en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}^\infty$ y sea $A \subset \Omega$ un abierto conexo menor. Una *rama* de F en A es una función multiforme meromorfa $G : A \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ tal que toda rama uniforme de G lo es también de F .

Notemos que una rama de F —en este sentido— que además sea uniforme es precisamente lo que venimos llamando una rama uniforme de F . Acabamos de probar que cada función multiforme meromorfa completa se descompone en una o varias ramas holomorfas completas arbitrariamente prolongables en un entorno reducido de cada singularidad aislada. Cada una de estas ramas puede presentar un comportamiento distinto alrededor de la singularidad.

Ejemplos La función logaritmo tiene una singularidad aislada en $z_0 = 0$, y en cualquier entorno reducido $D'(0, r)$ tiene una única rama, pues antes hemos visto que para pasar de una rama uniforme a otra basta prolongar analíticamente la primera a lo largo de un arco que dé el número adecuado de vueltas alrededor de 0 , y siempre podemos tomar un arco así contenido en $D'(0, r)$ (basta tomar una circunferencia de centro 0 parametrizada adecuadamente).

Lo mismo sucede con la singularidad $z_0 = \infty$, es decir, que el logaritmo tiene una única rama en cualquier entorno reducido $D'(\infty, r)$, pues para pasar de una

rama a otra basta tomar arcos de índice adecuado respecto al 0. La situación es similar para $\sqrt[k]{z}$. ■

Estos ejemplos son representativos de la situación general. Para verlo demostraremos primero algunos resultados:

Teorema 7.12 (Principio de monodromía) *Sea Ω un abierto simplemente conexo y f una función meromorfa (holomorfa) uniforme en un abierto conexo contenido en Ω . Si f se prolonga analíticamente (mediante funciones holomorfas) a lo largo de todo arco contenido en Ω , entonces f se extiende a una función uniforme meromorfa (holomorfa) en Ω .*

DEMOSTRACIÓN: Distingamos tres casos, según si Ω es todo \mathbb{C}^∞ , es \mathbb{C}^∞ menos un punto o bien es de cualquier otro tipo. Tomando una transformación de Möbius en los dos primeros casos o aplicando el teorema de Riemann en el tercero, podemos encontrar una aplicación biholomorfa u de Ω en uno de los abiertos \mathbb{C}^∞ , \mathbb{C} o $D(0, 1)$, a la que podemos pedir además que $u^{-1}(0)$ esté en el dominio de f . Es claro que u traslada las hipótesis del teorema, luego podemos restringirnos a los casos en que $\Omega = \mathbb{C}^\infty$, $\Omega = \mathbb{C}$ y $\Omega = D(0, 1)$ y admitir además que 0 está en el dominio de f .

Sea r el supremo de los números $\rho > 0$ tales que f admite una prolongación meromorfa (holomorfa) a $D(0, \rho)$. Es claro entonces que f admite una prolongación meromorfa (holomorfa) a $D(0, r)$. Vamos a probar que $r = \infty$ en los dos primeros casos y $r = 1$ en el tercero. De lo contrario, r sería finito y $\overline{D(0, r)} \subset \Omega$.

Tiene que existir un $z \in \partial D(0, r)$ tal que f no admita prolongación analítica meromorfa (holomorfa) a un entorno de z , pues, en caso contrario, podríamos cubrir la circunferencia con un número finito de discos D_1, \dots, D_k con centro en ella en los que f admitiría una prolongación, luego existiría un $r' > r$ tal que

$$D(0, r') \subset D(0, r) \cup \bigcup_{j=1}^k D_k.$$

Como tres discos con intersección no vacía tienen intersección convexa (luego conexa), tenemos que las prolongaciones de f a $D(0, r) \cup D_i$ y $D(0, r) \cup D_j$ coinciden en su dominio común, luego en total tenemos una única prolongación de f a $D(0, r')$, contradicción.

Ahora bien, si f no admite prolongación meromorfa (holomorfa) hasta $z \in \partial D(0, r)$, entonces $\gamma = [0, z]$ es un arco contenido en Ω a lo largo del cual f no admite prolongación analítica, en contra de la hipótesis.

Con esto tenemos probado el teorema excepto en el caso en que $\Omega = \mathbb{C}^\infty$. Para él tenemos una extensión de f hasta \mathbb{C} (que seguiremos llamando f) y nos falta probar que se extiende a \mathbb{C}^∞ , pero basta aplicar el segundo caso a la restricción de f a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, tomando $\Omega = \mathbb{C}^\infty \setminus \{0\}$. ■

El nombre de “principio de monodromía” se debe a que si $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ es un arco que une un punto del dominio de f con otro punto $z \in \Omega$ y h es una prolongación analítica de f a lo largo de γ , entonces por la unicidad ha de ser $h = \gamma \circ g$, donde g es la extensión de f a Ω . En particular $h(b) = g(z)$, lo que

significa que el valor que se obtiene en z al prolongar f a través de un arco es independiente del camino escogido.

Veamos una primera consecuencia:

Teorema 7.13 *Sea $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función multiforme, meromorfa, completa y arbitrariamente prolongable en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}^\infty$. Supongamos que F tiene exactamente n ramas uniformes en un disco $D \subset \Omega$. Entonces F tiene exactamente n ramas uniformes en cada disco $D \subset \Omega$.*

DEMOSTRACIÓN: Observemos en general que si $D \subset D^* \subset \Omega$ son dos discos, no necesariamente del mismo centro, entonces F tiene el mismo número de ramas uniformes en ambos. En efecto, por el principio de prolongación analítica las ramas uniformes de F en D^* se restringen a ramas distintas en D y por el principio de monodromía toda rama uniforme de F en D se extiende a una rama uniforme de F en D^* (la extensión es una rama de F porque F es completa).

Sea Ω_0 el conjunto de los puntos $z \in \Omega$ tales que F tiene exactamente n ramas uniformes en un disco $D(z, r) \subset \Omega$. Hay que probar que $\Omega = \Omega_0$. Por hipótesis $\Omega_0 \neq \emptyset$, con lo que basta probar que Ω_0 es abierto y cerrado en Ω .

La observación con que hemos empezado la prueba implica que Ω_0 es abierto. Sea $z_0 \in \overline{\Omega_0} \cap \Omega$ y sea $D(z_0, r) \subset \Omega$ un disco donde F tenga una rama uniforme. Sea $w \in \Omega_0 \cap D(z_0, r)$. Por definición de Ω_0 existe un disco D de centro w donde F tiene exactamente n ramas uniformes. Según hemos visto, podemos exigir que esté contenido en $D(z_0, r)$, y a su vez esto implica que F tiene exactamente n ramas uniformes en $D(z_0, r)$. Por consiguiente $z_0 \in \Omega_0$ y Ω_0 es cerrado en Ω . ■

En las condiciones del teorema anterior diremos que F tiene *multiplicidad n* en Ω o que es *n -forme*. Ahora podemos definir:

Definición 7.14 *Sea $F : D'(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ una función multiforme holomorfa completa y arbitrariamente prolongable. Diremos que z_0 es un punto de ramificación de orden n si F tiene multiplicidad $n + 1$ en $D'(z_0, r)$. Si F tiene multiplicidad infinita diremos que z_0 es un punto de ramificación de orden infinito o un punto *logarítmico*.*

Observemos que el hecho de que F sea holomorfa presupone que todas sus ramas uniformes están conectadas entre sí. Por ejemplo, 0 e ∞ son puntos de ramificación logarítmicos para la función logaritmo y puntos de ramificación de orden $n - 1$ para la función $\sqrt[n]{z}$, las funciones uniformes tienen puntos de ramificación de orden 0 en sus singularidades aisladas y la función $e^{1/(\sqrt{z}+1)}$ tiene puntos de ramificación simple en 0 e ∞ y se descompone en dos ramas uniformes (no ramificadas a su vez) alrededor de 1 .

Ejemplo: la función arco coseno Consideremos la función arco coseno

$$\operatorname{Arccos} w = \frac{1}{i} \operatorname{Log} (w + \sqrt{w^2 - 1}).$$

Sabemos que tiene tres singularidades aisladas en los puntos ± 1 e ∞ . Vamos a estudiarlas. Ante todo, sabemos que todo punto regular tiene un entorno D (podemos suponer que es un disco) en el que las ramas uniformes del arco coseno tienen la forma

$$f(w) = \frac{1}{i} \log(w + \sqrt{w^2 - 1}),$$

donde la raíz cuadrada representa una rama uniforme de la misma en la imagen de D por la función $w^2 - 1$ y el logaritmo es una rama uniforme del mismo en la imagen de D por $w + \sqrt{w^2 - 1}$.

Fijemos ahora un entorno reducido $D'(1, r)$, con $0 < r < 1$, de modo que si $|w - 1| < r$ entonces $|w^2 - 1| < 1/4$, con lo que $|\sqrt{w^2 - 1}| < 1/2$, sea cual sea la raíz elegida. Por consiguiente $w + \sqrt{w^2 - 1} \in D(1, 1)$. Esto significa que para calcular una rama f del arco coseno en un entorno D de un punto de $D'(1, r)$ podemos usar una rama del logaritmo definida en $D(1, 1)$.

Así, si γ es un arco cerrado contenido en $D'(1, r)$ y que parta de un punto de D , entonces $\gamma^2 - 1$ es un arco cerrado en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, a lo largo del cual podemos prolongar la rama uniforme de la raíz cuadrada que define a f . El resultado será la misma rama o su opuesta según si $I(\gamma^2 - 1, 0)$ es par o impar. Es fácil ver que

$$I(\gamma^2 - 1, 0) = I(\gamma + 1, 0) + I(\gamma - 1, 0) = I(\gamma, 1).$$

Una prolongación analítica de la raíz cuadrada a lo largo de $\gamma^2 - 1$ es una prolongación analítica de $\sqrt{w^2 - 1}$ a lo largo de γ , que acaba en la rama uniforme $\pm\sqrt{w^2 - 1}$, donde el signo depende únicamente de $I(\gamma, 1)$. De ésta obtenemos una prolongación de $w + \sqrt{w^2 - 1}$ que toma imágenes en $D(1, 1)$, luego podemos componerla con la rama del logaritmo que hemos fijado en $D(1, 1)$ y obtener una prolongación analítica de f que acaba en

$$g(z) = \frac{1}{i} \log(w \pm \sqrt{w^2 - 1}),$$

donde el signo es positivo si $I(\gamma, 1)$ es par y negativo en caso contrario.

Así pues, desde una de las infinitas ramas del arco coseno en D sólo podemos pasar a otra concreta mediante arcos contenidos en $D'(1, r)$, la que se obtiene al cambiar de raíz cuadrada pero no de logaritmo. Esto significa que el arco coseno tiene infinitas ramas en $D'(1, r)$, todas ellas bifurcadas (el 1 es un punto de ramificación simple para cada una de ellas). Lo mismo vale para el -1 .

La situación en ∞ es distinta. Tomemos $r > 2$ y consideremos un disco $D \subset D'(\infty, r)$. Sea γ un arco cerrado que parta de un punto de D . Es fácil ver que

$$I(\gamma^2 - 1, 0) = I(\gamma, 1) + I(\gamma, -1) = 2I(\gamma, 0),$$

donde usamos que 0 y ± 1 están en la misma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Esto implica que al prolongar a lo largo de $\gamma^2 - 1$ una rama uniforme de la raíz cuadrada llegamos a la misma rama de partida (porque el índice respecto a 0 es par). Equivalentemente, al prolongar a lo largo de γ una rama uniforme

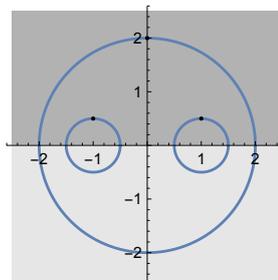
de $\sqrt{w^2 - 1}$ llegamos a la misma rama. En particular la prolongación es un arco cerrado en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y se comprueba sin dificultad que

$$I(\sqrt{\gamma^2 - 1}, 0) = (1/2)I(\gamma^2 - 1, 0) = I(\gamma, 0).$$

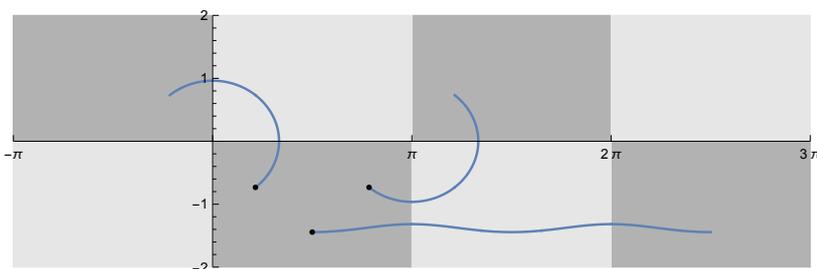
Tomando r suficientemente grande podemos garantizar que se cumple la desigualdad $|\gamma(t)| < |\gamma(t) + \sqrt{\gamma(t)^2 - 1}|$, de donde el teorema 3.12 nos permite concluir que $I(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}, 0) = I(\sqrt{\gamma^2 - 1}, 0) = I(\gamma, 0)$. Esto implica que si L es una determinación continua del logaritmo de $\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}$, el valor final de L es el inicial más $2\pi i I(\gamma, 0)$, luego la prolongación analítica de una rama uniforme f del arco coseno en D acaba en la rama $f + 2\pi I(\gamma, 0)$.

Por consiguiente, los arcos contenidos en $D'(\infty, r)$ conectan las ramas del arco coseno que se diferencian en la elección del logaritmo, pero no en la raíz cuadrada, lo que se traduce en que el arco coseno tiene dos ramas multiformes en $D'(\infty, r)$, cada una de las cuales tiene un punto de ramificación logarítmico en ∞ .

Estos hechos tienen una interpretación geométrica muy simple. Si D es un disco contenido en $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ y suponemos por simplicidad que no corta al eje real, entonces las ramas uniformes del arco coseno sobre D toman valores en cada una de las semibandas sombreadas igualmente en la figura inferior



Las ramas que se obtienen cambiando de rama del logaritmo se diferencian en un múltiplo de 2π , luego se corresponden con el cambio de una banda por otra paralela. Por el contrario, cambiar de rama de la raíz cuadrada significa cambiar de semiplano. Con más detalle, si partimos de una rama del arco coseno que toma imágenes en la semibanda $0 < \text{Re } z < \pi$, $\text{Im } z < 0$ y la prolongamos a lo largo de un arco γ que rodea al 1 (en sentido positivo), la prolongación analítica es un arco que parte de dicha semibanda, pasa al semiplano superior en el momento en que γ cruza el intervalo $] -1, 1[$ y pasa a la semibanda adyacente por la izquierda cuando γ cruza el intervalo $] 1, +\infty[$. Si diéramos otra vuelta pasaríamos al semiplano inferior y luego a la semibanda contigua por la derecha, con lo que volveríamos a la rama de partida.



Al girar alrededor del -1 se pasa a la semibanda contigua por la derecha y luego al semiplano superior. Por otra parte, si partimos de una rama y giramos

alrededor de infinito (equivalentemente, alrededor de 1 y -1 a la vez) pasamos dos semibandas hacia la derecha al cruzar los intervalos $]-\infty, -1[$ y $]1, +\infty[$. ■

Volviendo a la situación general, vamos a ver que toda función alrededor de un punto de ramificación puede expresarse en términos de logaritmos y, si el punto tiene orden de ramificación finito, en términos de radicales.

Teorema 7.15 *Sea $F : D'(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ una función multiforme holomorfa, completa y arbitrariamente prolongable. Entonces existe una función uniforme h definida en el semiplano $\operatorname{Re} z < \log r$ tal que*

$$F(z) = h(\operatorname{Log}(z - z_0)).$$

Si $z_0 = \infty$ es $F(z) = h(\operatorname{Log}(1/z))$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ una rama uniforme de f en un disco D . Tomemos una rama uniforme del logaritmo $\log(z - z_0)$ en D . (Si $z_0 = \infty$ tomamos $\log(1/z)$. Dejamos al lector las restantes modificaciones obvias para este caso.) El logaritmo transforma D en un abierto C contenido en el semiplano $\operatorname{Re} z < \log r$. Sobre C podemos definir la función holomorfa $h(z) = f(z_0 + e^z)$. Esta función es arbitrariamente prolongable en el semiplano, pues dado un arco $\gamma(t)$ que parta de C , el arco $z_0 + e^{\gamma(t)}$ está contenido en $D'(z_0, r)$ y parte de D , y una prolongación analítica de f a lo largo de él es también una prolongación analítica de h a lo largo de γ .

Por el principio de monodromía h se extiende a una función holomorfa en todo el semiplano, a la que seguiremos llamando h . La rama uniforme de $h(\operatorname{Log}(z - z_0))$ que se obtiene sobre D al tomar como rama uniforme del logaritmo la función con que hemos definido h es precisamente f , y es claro que dos funciones multiformes completas con una rama uniforme en común son de hecho la misma función. ■

Observemos que las distintas ramas uniformes de la función F del teorema anterior en un disco D se obtienen tomando distintas ramas uniformes de la función $\operatorname{Log}(z - z_0)$ en D . Supongamos que dos ramas uniformes distintas entre sí de la función $\operatorname{Log}(z - z_0)$ dieran lugar a la misma rama uniforme de F sobre un disco D . Pongamos que una de ellas transforma D en el recinto C . Entonces la otra lo transforma en el recinto $C + 2k\pi i$, para un cierto entero no nulo k , con lo que $h(z) = h(z + 2k\pi i)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, de donde se sigue que h tiene periodo $2k\pi i$. Si n es el mínimo natural no nulo k tal que h tiene periodo $2k\pi i$, entonces z_0 es un punto de ramificación de orden $n - 1$. Por consiguiente, si la singularidad z_0 es logarítmica, la función h no puede tener periodo $2k\pi i$ para ningún natural no nulo k , y entonces las ramas uniformes de F en cada disco D se corresponden biunívocamente con las ramas uniformes de la función $\operatorname{Log}(z - z_0)$. Más aún, ahora es claro que cuando prolongamos una rama uniforme de F a lo largo de un arco cerrado, la rama de llegada depende únicamente del índice del arco alrededor de z_0 .

Veamos ahora que si la singularidad tiene orden de ramificación finito podemos expresarla en términos de radicales:

Teorema 7.16 Sea $F : D'(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ una función multiforme holomorfa, completa y arbitrariamente prolongable de modo que z_0 sea un punto de ramificación de orden $n - 1$. Entonces existe una función uniforme holomorfa $g : D'(0, \sqrt[n]{r}) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $F(z) = g(\sqrt[n]{z - z_0})$. Si $z_0 = \infty$ es $F(z) = g(1/\sqrt[n]{z})$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $F(z) = h(\text{Log}(z - z_0))$, según el teorema anterior. Las observaciones que acabamos de hacer muestran que h tiene periodo $2n\pi i$. Podemos definir entonces $g(z) = h(n \text{Log } z)$, donde no importa la rama del logaritmo que escojamos para calcularla, pues el resultado será el mismo. Claramente g es una función uniforme holomorfa en $D'(0, \sqrt[n]{r})$ y

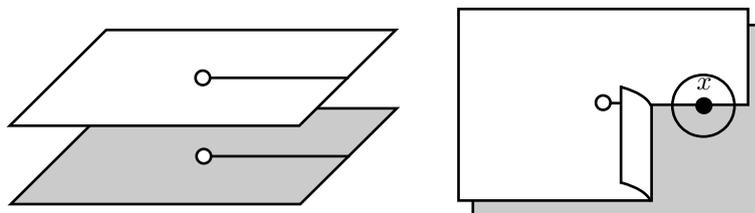
$$g(\sqrt[n]{z - z_0}) = g(e^{\frac{1}{n} \text{Log}(z - z_0)}) = h(\text{Log}(z - z_0)) = F(z).$$

Los cambios para $z_0 = \infty$ son claros. ■

Nota Es obvio que en las condiciones del teorema anterior las ramas uniformes de F se corresponden biunívocamente con las de $\sqrt[n]{z - z_0}$ (y por lo tanto la prolongación analítica de una rama uniforme a lo largo de un arco cerrado depende únicamente de su índice alrededor de z_0), pero en general no es cierto que toda función de la forma $g(\sqrt[n]{z - z_0})$ tenga un punto de ramificación de orden $n - 1$ en z_0 . Basta pensar en la función $\cos \sqrt{z}$, que es entera. ■

7.4 Superficies de gérmenes

Vamos a ver que una función multiforme meromorfa puede convertirse en una función uniforme añadiendo puntos a su dominio o, más exactamente, multiplicando los puntos de su dominio. Veamos un ejemplo de lo que pretendemos conseguir. Tomemos una de las funciones multiformes más sencillas: la raíz cuadrada. El problema que presenta es que a cada punto de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tenemos que asignarle dos imágenes, y no podemos elegir una sin perder la continuidad en algún sitio. Para resolver el problema tomamos dos copias de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, llámémoslas C_1 y C_2 . Asignemos a cada punto $z = re^{i\theta}$ (con $0 \leq \theta < 2\pi$) de la primera copia su raíz cuadrada $\sqrt{r} e^{i\theta/2}$ y a cada punto del segundo su otra raíz cuadrada $\sqrt{r} e^{i(\theta/2 + \pi)}$. Entonces ambas funciones son discontinuas en el semieje real positivo. Por ejemplo, si z tiende a 1 desde el semiplano inferior de C_1 entonces \sqrt{z} tiende a -1 , que es precisamente la imagen del 1 de C_2 . Arreglamos esto “cortando” ambas copias por el semieje real positivo y “pegando” el semiplano superior de C_1 con el semiplano inferior de C_2 y viceversa.



Topológicamente esto significa considerar como entornos básicos de cada número $x > 0$ en C_1 a los “discos” formados por un semicírculo del semiplano superior de C_1 (que contenga a los números reales) y el semicírculo del semiplano inferior de C_2 con el mismo radio pero sin los números reales, y similarmente para los puntos de C_2 . Así, cuando z tiende a 1 desde el semiplano inferior de C_1 ya no tiende al punto 1 de C_1 , sino al de C_2 , y el límite -1 de \sqrt{z} coincide con la imagen del límite 1. Con este proceso obtenemos una variedad analítica. Más concretamente:

Definición 7.17 Una *superficie de Riemann* es una variedad analítica conexa de dimensión 1.

Veamos un resultado general que nos permite dotar de estructura de superficie de Riemann a un espacio topológico de forma sencilla:

Teorema 7.18 Sea S un espacio topológico y $p : S \rightarrow T$ una aplicación continua, abierta, suprayectiva y localmente inyectiva en una superficie de Riemann T . Entonces S admite una única estructura analítica que le induce su propia topología y para la cual p es holomorfa.

DEMOSTRACIÓN: La unicidad equivale a que la identidad es una aplicación biholomorfa entre cualquier par de estructuras analíticas que cumplan el teorema.

Tomemos como cartas de S las aplicaciones $p|_A \circ u$, donde $u : U \rightarrow \mathbb{C}$ es una carta de T y $A \subset u^{-1}[U]$ es un abierto en S en el que p es inyectiva.

Dado $x \in S$, podemos tomar una carta $u : U \rightarrow \mathbb{C}$ en T tal que $p(x) \in U$ y por hipótesis existe un abierto A en S tal que $x \in A \subset u^{-1}[U]$ y donde p es inyectiva. Por consiguiente existe una carta definida alrededor de x .

Si $p|_A \circ u$ y $p|_B \circ v$ son dos cartas de S , entonces, donde está definida, se cumple

$$(p|_A \circ u)^{-1} \circ p|_B \circ v = u^{-1} \circ v,$$

que es una aplicación holomorfa. Esto prueba que las cartas determinan una estructura analítica en S .

Una carta $p|_A \circ u$ es un homeomorfismo de A en un abierto de \mathbb{C} tanto para la topología dada en S como para la que le induce la estructura analítica. Además A es abierto para ambas. Esto implica que todo punto tiene una misma base de entornos para ambas topologías, luego de hecho son la misma.

Es claro que p es holomorfa, pues en un entorno de cada punto x podemos tomar una carta u alrededor de $p(x)$ y una carta $p|_A \circ u$ alrededor de x , con lo que la composición $(p|_A \circ u)^{-1} \circ p \circ u$ da la identidad, que es holomorfa.

Es claro que cualquier estructura analítica que cumpla el teorema admite como cartas las aplicaciones $p|_A \circ u$ que hemos considerado, lo que hace que la identidad sea holomorfa. ■

Pasamos ya a construir las superficies de Riemann que vuelven uniformes las funciones meromorfas multiformes. La idea básica es multiplicar cada punto de \mathbb{C}^∞ de modo que haya una copia por cada valor que tome en él cada función multiforme. Para ello sustituiremos los puntos por los gérmenes de funciones meromorfas, que definimos a continuación.

Definición 7.19 Sea $z \in \mathbb{C}^\infty$. Llamaremos \mathcal{F}_z al conjunto de todas las funciones meromorfas definidas en un disco de centro z . Consideramos en \mathcal{F}_z la relación de equivalencia según la cual dos funciones están relacionadas si coinciden en su dominio común. A las clases de equivalencia las llamaremos *gérmenes* de funciones meromorfas con soporte en z .

En la práctica identificaremos un germen g con cualquiera de sus elementos. Si g es un germen con soporte en z podemos tratarlo como una función meromorfa en un disco de centro z . La única diferencia es que si cambiamos de función aumentando o reduciendo el disco seguimos teniendo el mismo germen. Diremos que un disco D es un *dominio* de g si g tiene un elemento con dominio D . Llamaremos $\pi(g) = z$. Notemos que z está determinado por el germen (es la intersección de los dominios de las funciones que lo componen). La idea es que los distintos gérmenes de soporte z representen distintas copias del mismo punto z . Por eso vamos a definir superficies de Riemann que tengan por puntos a los gérmenes.

Llamaremos \mathcal{M} al conjunto de todos los gérmenes de funciones meromorfas. Sobre \mathcal{M} tenemos definida la función $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ que a cada germen le asigna su soporte y la función $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ dada por $\Phi(g) = g(\pi(g))$.

Sea g un germen y D un dominio de g . Para cada $z \in D$ definimos g_z como el germen de soporte z determinado por la restricción de g a cualquier disco de centro z contenido en D . Sea $D_g = \{g_z \mid z \in D\} \subset \mathcal{M}$. Es claro que $\pi|_{D_g} : D_g \rightarrow D$ es biyectiva, pues $\pi(g_z) = z$. Observemos que $\Phi|_{D_g} = \pi|_{D_g} \circ g$.

Los conjuntos D_g son la base de una topología en \mathcal{M} . En efecto, se cumple que $g \in D_g$ y si $t \in D_g \cap E_h$, entonces $z = \pi(t) \in D \cap E$ y $t = g_z = h_z$. Tomamos un dominio A de t tal que $A \subset D \cap E$ y entonces es claro que $t \in A_t \subset D_g \cap E_h$.

Notemos además que \mathcal{M} es un espacio de Hausdorff con esta topología. En efecto, si $g \neq h$ son dos puntos de \mathcal{M} y $\pi(g) \neq \pi(h)$, entonces g y h tienen dominios disjuntos, digamos D y E , y los abiertos D_g y E_h son entornos disjuntos de g y h . Si por el contrario $\pi(g) = \pi(h)$ y D es un dominio común, entonces $D_g \cap D_h = \emptyset$, pues si existiera un germen $t \in D_g \cap D_h$, entonces g y h coincidirían en un dominio de t , luego coincidirían en D y sería $g = h$.

Podemos aplicar el teorema 7.18 a la aplicación $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}^\infty$. En efecto, es continua, porque si D es un disco abierto en \mathbb{C}^∞ su antiimagen es la unión de todos los abiertos E_g , donde g es un germen con dominio $E \subset D$; es abierta, pues $\pi[D_g] = D$; es obviamente suprayectiva, pues todo punto soporta un germen, y es localmente inyectiva, pues lo es en cada abierto D_g .

Así pues, podemos considerar la única estructura analítica sobre \mathcal{M} que induce la topología que acabamos de definir y que hace holomorfa a la función π . Claramente, si $\pi(g) \neq \infty$ y D es un dominio de g , una carta alrededor de g es la restricción de π a D_g . Si $\pi(g) = \infty$ hemos de componer dicha restricción con la función $1/z$.

Según la definición que hemos dado, \mathcal{M} no es una superficie de Riemann con esta estructura analítica, porque no es un espacio conexo. Sin embargo,

las componentes conexas de \mathcal{M} sí son superficies de Riemann. Las llamaremos *superficies de gérmenes*.

Es claro que si S es una superficie de gérmenes, entonces las restricciones $\pi : S \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ y $\Phi : S \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ son funciones holomorfas. La conexión en las superficies de gérmenes tiene una interpretación muy importante:

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ un arco. Sean g y h gérmenes tales que $\pi(g) = \gamma(a)$ y $\pi(h) = \gamma(b)$. Diremos que g se *prolonga analíticamente* hasta h a lo largo de γ si un elemento de g se prolonga analíticamente a lo largo de γ hasta un elemento de h . Obviamente no importa la elección de los elementos.

Ahora podemos probar:

Teorema 7.20 *Sean g y h dos gérmenes de funciones meromorfas. Si Γ es un arco en \mathcal{M} que conecta g con h entonces $\gamma = \Gamma \circ \pi$ es un arco en \mathbb{C}^∞ que conecta $\pi(g)$ con $\pi(h)$ y $f = \Gamma \circ \Phi$ es una función meromorfa sobre γ que prolonga g hasta h . Recíprocamente, si g se prolonga hasta h a lo largo de un arco γ mediante una función f entonces $\gamma = \Gamma \circ \pi$ y $f = \Gamma \circ \Phi$ para un cierto arco Γ en \mathcal{M} que conecta g con h .*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$. Fijemos $t \in [a, b]$ y sea D un dominio de $u = \Gamma(t)$. Entonces, para valores de s cercanos a t tenemos que $\Gamma(s) \in D_u$, luego $f(s) = u(\gamma(s))$. Así pues, f es meromorfa sobre γ . Similarmente se prueba que f prolonga g hasta h .

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ un arco que conecte $\pi(g)$ con $\pi(h)$ y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función que prolongue g hasta h a lo largo de γ . Por definición de función meromorfa sobre un arco, para cada $t \in [a, b]$ existe una función g_t meromorfa en un disco de centro $\gamma(t)$ de modo que para puntos s cercanos a t se cumple $f(s) = g_t(\gamma(s))$. Llamemos $\Gamma(t)$ al germen en $\gamma(t)$ determinado por g_t . Así tenemos una función $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$. Veamos que Γ es continua.

Si $t \in [a, b]$, entonces $\Gamma \circ \pi = \gamma$ es continua, y como π es un homeomorfismo en un entorno de $\Gamma(t)$, componiendo con su inversa obtenemos que Γ es continua en t .

Por otra parte, $\Gamma(a)$ coincide con g sobre los puntos de γ^* cercanos a $\gamma(a)$, luego $\Gamma(a) = g$ e igualmente concluimos que $\Gamma(b) = h$. También es claro que $\Gamma \circ \Phi = f$. ■

De este modo, las superficies de gérmenes son simplemente las clases de equivalencia de gérmenes prolongables entre sí.

Observemos que a cada abierto conexo V en una superficie de gérmenes S podemos asociarle una función multiforme meromorfa $F : \pi[V] \rightarrow \mathbb{C}^\infty$, dada por $F(z) = \Phi[\pi|_V^{-1}[z]]$.

En efecto, si $w \in F(z)$, entonces existe un $g \in V$ tal que $\pi(g) = z$ y $\Phi(g) = w$. Sea D un dominio de g . Entonces $f = (\pi|_D)^{-1} \circ \Phi$ es una rama uniforme meromorfa de F tal que $f(z) = w$.

Falta probar que cualquier rama uniforme de F se prolonga analíticamente hasta cualquier otra. Fijemos un germen $h \in V$. Basta probar que h se prolonga

analíticamente hasta cualquier rama uniforme de F . Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ una de estas ramas.

Por definición de F , para cada $z \in A$, existe un germen $g_z \in V$ tal que $\pi(g_z) = z$ y $f(z) = g_z(z)$. Sea D_z un dominio de g_z . Puesto que V es arcoconexo, existe un arco que conecta h con g_z , es decir, g_z es prolongación analítica de h y, según el teorema 7.4, lo es a lo largo de una poligonal P_z con vértices de coordenadas racionales.

Puesto que la cantidad de puntos $z \in A$ no es numerable, ha de haber una cantidad no numerable de puntos para los que la poligonal P_z es una misma poligonal P . Así, si z_1 y z_2 son dos de estos puntos, g_{z_1} y g_{z_2} coinciden en $D_{z_1} \cap D_{z_2}$, pues lo hacen sobre el extremo de P . Esto permite extender las funciones g_z a la unión de los discos D_z . El resultado es una función meromorfa que es prolongación analítica de h a lo largo de P y coincide con f en una cantidad no numerable de puntos. Como un conjunto no numerable no puede ser discreto, coincide con f , luego f es prolongación analítica de h .

Más aún, ahora es claro que los gérmenes determinados f están en V (pues son prolongaciones analíticas de h , luego están conectados con h por un arco). Si llamamos $A_f \subset V$ al conjunto de estos gérmenes, es claro que A_f es abierto en V , así como que $\pi|_{A_f} : A_f \rightarrow A$ es biyectiva y $f = (\pi|_{A_f})^{-1} \circ \Phi$.

Con esto hemos probado que las ramas uniformes de F son todas de la forma $(\pi|_A)^{-1} \circ \Phi$, para los abiertos A de V donde π es inyectiva.

Recíprocamente, si F es una función multiforme meromorfa en un abierto conexo Ω , es fácil ver que el conjunto A de todos los gérmenes de las ramas uniformes de F constituye un abierto conexo de una superficie de gérmenes para la cual la función que acabamos de construir es la F dada. Diremos que A es la *superficie de gérmenes* de F . El teorema siguiente la caracteriza:

Teorema 7.21 *Sea $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función multiforme meromorfa en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}^\infty$. Entonces existe una única superficie de Riemann A tal que existen aplicaciones holomorfas $\pi : A \rightarrow \Omega$ y $\Phi : A \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ de modo que*

1. π es localmente inyectiva.
2. Si π es biholomorfa en un dominio X entonces $(\pi|_X)^{-1} \circ \Phi$ es una rama uniforme de F en $\pi[X]$. Toda rama uniforme de F es de esta forma.
3. Dos puntos $x, y \in A$ son iguales si y sólo si $\pi(x) = \pi(y)$ y tienen entornos X e Y donde π es biholomorfa y las funciones $(\pi|_X)^{-1} \circ \Phi$ y $(\pi|_Y)^{-1} \circ \Phi$ coinciden en $\pi[X] \cap \pi[Y]$.

La unicidad ha de entenderse como que si (A', π', Φ') cumple estas mismas condiciones entonces existe una aplicación biholomorfa $u : A \rightarrow A'$ tal que $\pi = u \circ \pi'$, $\Phi = u \circ \Phi'$.

DEMOSTRACIÓN: Es claro que la superficie de gérmenes de F , llamémosla S , cumple las propiedades indicadas. Para probar la unicidad observamos que la

aplicación que a cada $x \in A$ le asigna el germen determinado por $(\pi|_X)^{-1} \circ \Phi$, donde X es un entorno de x en el que π es biholomorfa, es una aplicación biholomorfa $u : A \rightarrow S$ que relaciona las aplicaciones respectivas π y Φ como indica el enunciado. ■

En general, a cualquier superficie de Riemann en las condiciones del teorema anterior la llamaremos *superficie de Riemann* de la función F . Tenemos que la superficie de gérmenes es una realización concreta de la superficie de Riemann de una función y que cualquier otra es biholomorfa a ésta. No obstante en muchos casos existen otras realizaciones distintas de interés. Por ejemplo, ahora es inmediato que la superficie de Riemann de la raíz cuadrada puede identificarse con la construida al principio de esta sección, “pegando” dos copias de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. En efecto, si el espacio es, por concretar,

$$S = ((\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \{0\}) \cup ((\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \{1\}),$$

sobre S tenemos definida la proyección π que a cada punto le asocia su primera componente. De acuerdo con la identificación que hemos hecho, S es un espacio de Hausdorff conexo y π es continua, abierta y localmente inyectiva, con lo que S se convierte en superficie de Riemann al exigir que π sea holomorfa. La aplicación Φ es la que a cada punto le asocia la raíz cuadrada de su primera componente según el criterio que habíamos establecido. Es fácil ver que Φ es holomorfa y se verifican todas las propiedades del teorema anterior. ■

Esta representación de la superficie de Riemann de la raíz cuadrada es la que permite comprender mejor el comportamiento de dicha función. En efecto, según lo dicho, para trabajar con la raíz cuadrada debemos concebir $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ como “dos hojas superpuestas”, de modo que cuando, por ejemplo, prolongamos una rama uniforme a lo largo de una circunferencia γ de centro 0, no volvemos al punto de partida, sino que en realidad estamos moviéndonos por un arco abierto Γ que nos lleva de un punto al punto de la otra hoja superpuesto a él, donde la raíz cuadrada toma otros valores.

No obstante, desde un punto de vista teórico podemos decir que la superficie de Riemann de la raíz cuadrada es simplemente $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. En efecto, más en general tenemos lo siguiente (consecuencia inmediata del teorema anterior):

Teorema 7.22 *Sea $f : S \rightarrow \Omega$ una función meromorfa uniforme suprayectiva y localmente inyectiva entre dos dominios de \mathbb{C}^∞ . Entonces la superficie de Riemann de $F = f^{-1}$ puede identificarse con S , tomando $\pi = f$ y Φ igual a la identidad en S .*

Así, la superficie de Riemann de la raíz cuadrada puede identificarse con $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tomando $\pi(z) = z^2$, de modo que, por ejemplo, 1 y -1 se corresponden ambos con $z = 1$. Una semicircunferencia Γ de centro 0 que una 1 y -1 se transforma mediante π en la circunferencia γ de centro 0 con ambos extremos iguales a 1, de modo que al prolongar una rama uniforme de la raíz cuadrada a lo largo de γ , lo que hacemos en S es pasar de la identidad alrededor de 1 hasta la identidad alrededor de -1 a lo largo del arco Γ .

Similarmente, la superficie de Riemann del logaritmo puede identificarse con \mathbb{C} , la del arco coseno es \mathbb{C} menos los múltiplos enteros de π , etc.

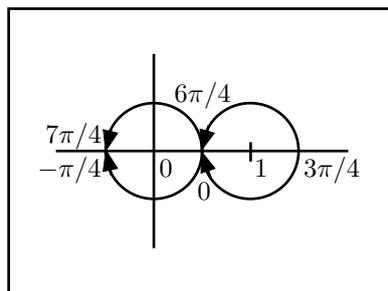
Ejemplo Vamos a estudiar la función multiforme $\sqrt[4]{z(1-z)^3}$.

Partamos de una rama uniforme cualquiera, por ejemplo

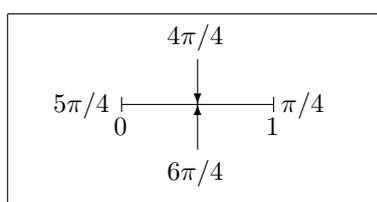
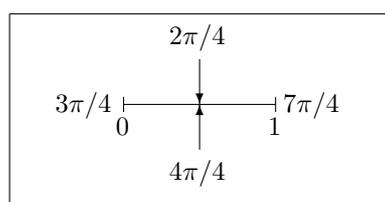
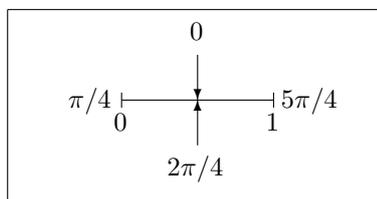
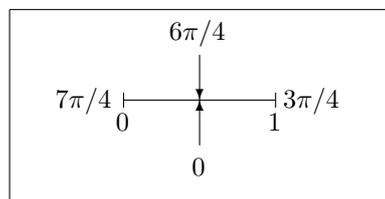
$$\sqrt[4]{z(1-z)^3} = e^{(\log_{-\pi} z + 3 \log_0(1-z))/4}.$$

Notemos que $\log_0 z$ no está definido en $[0, +\infty[$, luego $\log_0(1-z)$ no está definido en $]-\infty, 1]$ y, como $\log_{-\pi} z$ no está definido en $]-\infty, 0]$, la rama anterior está definida y es holomorfa en el plano complejo menos el intervalo $]-\infty, 1]$.

La figura muestra la parte imaginaria de la función $\log_{-\pi} z + 3 \log_0(1-z)$, incluyendo los límites en el intervalo donde no está definida. Esta parte imaginaria es el argumento de la rama uniforme que hemos tomado, y como $7\pi/4$ y $-\pi/4$ se diferencian en 2π , resulta que dicha rama se extiende continuamente al intervalo $]-\infty, 0[$. Podemos construir otra rama de forma análoga sobre el plano menos el intervalo $[0, +\infty[$ y ajustarla para que en $]-\infty, 0[$ tome argumento $7\pi/4$. Esto prueba que la rama original es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$.



Si multiplicamos esta rama por las constantes $\pm 1, \pm i$ obtenemos cuatro ramas distintas en este abierto que toman los argumentos siguientes:



Las cuatro ramas son discontinuas en el intervalo $]0, 1[$, pero se conserva la continuidad si suponemos que un arco que cruce este segmento desde el semiplano inferior de la primera rama aparece en el semiplano superior de la segunda, etc. Con más precisión, podemos tomar cuatro copias de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ sobre las que definimos las cuatro ramas uniformes anteriores, entendiendo que a los puntos del segmento $]0, 1[$ les asignamos el valor del límite desde el semiplano superior.

A continuación las “pegamos” a través del segmento $]0, 1[$, en el sentido de que, por ejemplo, los entornos básicos de un punto en el segmento de la tercera copia es medio disco en el semiplano superior de dicha copia y el otro medio en el semiplano inferior de la segunda. Así obtenemos una superficie de Riemann S que resulta ser la superficie de Riemann de la función multiforme $\sqrt[4]{z(1-z)^3}$. La comprobación se reduce a ver que la función que hemos definido es holomorfa en los puntos de las cuatro copias de $]0, 1[$ y que en un entorno de cada número complejo $z \neq 0, 1$ hay exactamente cuatro ramas uniformes de esta función. ■

7.5 Singularidades algebraicas

Consideremos la función multiforme \sqrt{z} , que está definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ con puntos de ramificación simples en 0 e ∞ . Sabemos que su superficie de Riemann puede identificarse con $S = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tomando como proyección $\pi(z) = z^2$, y entonces la función \sqrt{z} se corresponde con la función $\Phi(z) = z$ sobre S . Según las definiciones que hemos dado, los puntos 0 e ∞ no se corresponden con puntos de S , pero en este ejemplo en concreto vemos que resulta natural añadir dos puntos a S , el 0 e ∞ , y extender $\pi : \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$, de modo que ahora los puntos de ramificación están representados sobre la superficie de Riemann. Más aún, observamos que, mientras 0 e ∞ son singularidades no evitables de \sqrt{z} , en el sentido de que la función no tiene ramas uniformes sobre ellos, sus puntos asociados en S son singularidades evitables de la función Φ , ya que ésta puede extenderse a la identidad en \mathbb{C}^∞ . Tenemos así un ejemplo de cómo una singularidad puede evitarse trabajando sobre la superficie de Riemann de la función.

En general, vamos a probar que los puntos de ramificación de orden finito de una función multiforme F pueden interpretarse como singularidades aisladas de la correspondiente función Φ sobre la superficie de Riemann de F (completada adecuadamente). Con esto transformamos una singularidad con ramificación en una singularidad sin ramificación. Cuando además la singularidad uniforme resulta ser evitable, el punto de ramificación se llama algebraico. Es el caso de 0 e ∞ para la función \sqrt{z} . Así pues, las singularidades algebraicas de una función son las singularidades que pueden evitarse en términos de superficies de Riemann.

Conviene adoptar algunos convenios de notación que nos permitan manejar más cómodamente las singularidades aisladas. En primer lugar, cuando digamos que $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ es una función meromorfa multiforme completa en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}^\infty$, sobrentenderemos que existe un conjunto E discreto y cerrado en Ω tal que F es holomorfa, completa y arbitrariamente prolongable en $\Omega \setminus E$. En los puntos de E la función F puede o no estar definida. De todos modos, entenderemos que la completitud de F vale sobre todo Ω , en el sentido de que cualquier prolongación analítica de una rama uniforme meromorfa de F con dominio contenido en Ω y a lo largo de un arco contenido en Ω es también una rama uniforme de F .

Es claro que si llamamos E_0 al conjunto de los puntos de Ω que no son regulares para F , entonces $E_0 \subset E$ es también un subconjunto discreto y cerrado en Ω , y F es holomorfa, completa y arbitrariamente prolongable en $\Omega \setminus E_0$, de modo que podemos reducir E al conjunto de los puntos no regulares para F . Nos referiremos a ellos como los *puntos singulares*. Ciertamente, los puntos de E son singularidades aisladas de F .

Según el teorema 7.13, la función F tiene el mismo número de ramas uniformes holomorfas en un entorno de cada uno de sus puntos regulares. Si este número es finito igual a n diremos que F es n -forme o que tiene multiplicidad n (aunque F pueda tener menos de n ramas en un entorno de un punto singular). Por ejemplo, la función $e^{1/(\sqrt{z}+1)}$ es biforme en \mathbb{C}^∞ .

La relación de las singularidades aisladas con las superficies de gérmenes viene determinada por el teorema siguiente:

Teorema 7.23 *Sea $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función meromorfa completa en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}^\infty$. Sea $u : D'(a, r) \rightarrow \mathbb{C}$ una rama holomorfa que tenga en a un punto de ramificación de orden finito (tal vez nulo) $n - 1$. Sea $g : D'(0, \sqrt[n]{r}) \rightarrow \mathbb{C}$ la función (uniforme) holomorfa tal que $u(z) = g(\sqrt[n]{z-a})$. Sea $V'_{u,r}$ el conjunto de todos los gérmenes de ramas uniformes de u con dominio en $D'(a, r)$ (que es un abierto en la superficie de gérmenes de F). Entonces existe una aplicación biholomorfa $h_{u,r} : V'_{u,r} \rightarrow D'(0, \sqrt[n]{r})$ tal que $\Phi = h_{u,r} \circ g$ y $\pi = h_{u,r} \circ e^n + a$, donde $e^n(z) = z^n$.*

DEMOSTRACIÓN: Un germen $v \in V'_{u,r}$ será de la forma $f \circ g$, donde f es una rama uniforme de $\sqrt[n]{z-a}$, unívocamente determinada por u . Definimos $h_{u,r}(v) = f(\pi(v))$.

La aplicación $h_{u,r}$ así definida es suprayectiva, pues si $w \in D'(0, \sqrt[n]{r})$ existe una rama uniforme f de $\sqrt[n]{z-a}$ tal que $f(a+w^n) = w$, luego $h_{u,r}(f \circ g) = w$.

También es inyectiva, pues v es necesariamente el germen con soporte en $z_0 = h_{u,r}(v)^n + a$ determinado por la única rama uniforme de $\sqrt[n]{z-a}$ que asigna a z_0 el valor $h_{u,r}(v)$.

Además es holomorfa, pues si componemos $h_{u,r}$ con una inversa local de π obtenemos una rama uniforme holomorfa de $\sqrt[n]{z-a}$.

Las relaciones entre g y Φ y entre π y e^n son inmediatas. ■

En el teorema anterior hemos supuesto tácitamente que el punto a era finito, pero el resultado es válido en ∞ con las modificaciones obvias: en tal caso $u(z) = g(1/\sqrt[n]{z})$ y obtenemos una aplicación biholomorfa $h_{u,r} : V'_{u,r} \rightarrow D'(0, 1/\sqrt[n]{r})$ que verifica $\Phi = h_{u,r} \circ g$ y $\pi = u \circ e^n$, con $e^n(z) = 1/z^n$.

En cualquier caso lo que sucede es que la superficie de gérmenes de F tiene “un agujero” en correspondencia con cada singularidad con índice de ramificación finito. Podemos llenar este agujero si admitimos gérmenes de funciones en entornos reducidos, tal vez multiformes. Veámoslo:

Sea $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función meromorfa cuyos puntos singulares sean todos puntos de ramificación de orden finito (tal vez nulo). Para cada $z \in \Omega$

sea \mathcal{F}_z el conjunto de todas las ramas holomorfas de F (no necesariamente uniformes) definidas en un entorno reducido de z que no contenga puntos singulares de F . Consideramos la relación de equivalencia según la cual dos ramas están relacionadas si tienen una rama uniforme holomorfa en común. A las clases de equivalencia las llamaremos *gérmenes generalizados* con soporte en z .

Llamemos \tilde{S} al conjunto de todos los gérmenes generalizados de F con soporte en Ω . Diremos que un germen generalizado con soporte z es *regular* si sus representantes se extienden a funciones meromorfas (uniformes) en discos de centro z (basta con que un representante cumpla esto para que todos lo cumplan).

Es claro que los gérmenes regulares pueden identificarse con los gérmenes usuales que ya teníamos definidos, con lo que el conjunto de los gérmenes regulares puede identificarse con la superficie de gérmenes S de F en el sentido usual. De este modo $S \subset \tilde{S}$. La aplicación $\tilde{\pi} : \tilde{S} \rightarrow \Omega$ que a cada germen le asigna su soporte es suprayectiva y extiende a π .

Vamos a extender a \tilde{S} la topología de S . Dado un germen $u \in \tilde{S}$ y $D'(a, r)$ uno de sus dominios, consideramos el conjunto $V_{u,r}$ formado por todos los gérmenes de ramas holomorfas de u que tienen un dominio contenido en $D'(a, r)$ (se entiende que los dominios son siempre entornos reducidos, es decir, discos sin su centro). Claramente u es el único germen de $V_{u,r}$ con soporte en a y, puesto que $D'(a, r)$ no contiene puntos singulares de F , el conjunto $V_{u,r} \setminus \{u\}$ es precisamente el conjunto $V'_{u,r}$ considerado en el teorema 7.23.

Es fácil ver que los conjuntos $V_{u,r}$ son la base de una topología de Hausdorff en \tilde{S} (la prueba es idéntica al caso de las superficies de gérmenes), así como que ésta induce en S la topología que ya teníamos definida.

Teniendo en cuenta que, si $u \in \tilde{S} \setminus S$, se cumple $V_{u,r} \cap (\tilde{S} \setminus S) = \{u\}$, es claro que S es denso en \tilde{S} y que $\tilde{S} \setminus S$ es discreto y cerrado en \tilde{S} .

El teorema 7.23 nos da homeomorfismos $h_{u,r} : V_{u,r} \setminus \{u\} \rightarrow D'(0, \sqrt[r]{r})$, donde $n-1$ es la multiplicidad de u . (Para $\pi(u) = \infty$ el radio del disco es $1/\sqrt[r]{r}$). Es claro que $h_{u,r}$ se extiende a un homeomorfismo $h_{u,r} : V_{u,r} \rightarrow D(0, \sqrt[r]{r})$ haciendo $h_{u,r}(u) = 0$ (notemos que h biyecta los entornos básicos de u de la forma $V_{u,s}$ con $0 < s < r$ con los entornos básicos de 0 de la forma $D(0, s)$).

Esto nos permite extender a \tilde{S} la estructura analítica de S tomando como cartas de \tilde{S} las aplicaciones $h_{u,r}$. La composición de una carta con la inversa de otra es un homeomorfismo entre dos abiertos de \mathbb{C} y es holomorfa salvo a lo sumo en un punto aislado, pues el teorema 7.23 implica que la restricción de $h_{u,r}$ a $V_{u,r} \setminus \{u\}$ es holomorfa para la estructura de S , de donde se sigue que dicha composición es holomorfa en todo su dominio.

Es claro que la estructura analítica de \tilde{S} induce en \tilde{S} la topología que acabamos de definir e induce en S la estructura analítica que ya teníamos definida. También es claro que \tilde{S} es conexo, luego es una superficie de Riemann.

El teorema 7.23 nos da que en un entorno de cada punto de \tilde{S} la proyección $\tilde{\pi}$ se expresa como $\tilde{\pi} = h_{u,r} \circ e^n + \tilde{\pi}(u)$ (en principio esto vale para los puntos distintos de u , pero para éste es trivial). Si $\tilde{\pi}(u) = \infty$ la fórmula es distinta,

pero en cualquier caso concluimos que $\tilde{\pi}$ es holomorfa en \tilde{S} . En general no es localmente inyectiva.

Respecto a la función Φ , la tenemos definida sobre los puntos de S y en general no puede extenderse a los puntos restantes. Más concretamente, sea $u \in \tilde{S} \setminus S$ y sea $D'(a, r)$ un dominio de u . Supongamos que $a \neq \infty$ y sea $n-1$ la multiplicidad de u . Según el teorema 7.16, existe una función holomorfa (uniforme) $g : D'(0, \sqrt[n]{r}) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$u(z) = g(\sqrt[n]{z-a})$$

Sabemos que el entorno $V_{u,r}$ de u puede identificarse con el disco $D(0, \sqrt[n]{r})$, y según el teorema 7.23 la función Φ , restringida a $V_{u,r} \setminus \{u\}$, se corresponde con g . La función Φ admitirá una extensión holomorfa a u si y sólo si g admite una extensión meromorfa a 0. Esto nos lleva a la definición de singularidad algebraica:

Definición 7.24 Sea $u : D'(a, r) \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función holomorfa completa arbitrariamente prolongable. Diremos que a es una singularidad *algebraica* de u si

$$u(z) = g(\sqrt[n]{z-a}) \quad \text{o bien} \quad u(z) = g\left(\frac{1}{\sqrt[n]{z}}\right) \quad \text{si } a = \infty,$$

donde g es una función meromorfa en un entorno de 0. En caso contrario la singularidad se llama *trascendente*.

Notemos que, por definición, las singularidades algebraicas son puntos de ramificación de orden finito. Si a es una singularidad algebraica de una función u en las condiciones del teorema anterior, podemos definir $u(a) = g(0)$. Si u es una función uniforme, entonces $u(z) = g(z-a)$ (o bien $u(z) = g(1/z)$, si $a = \infty$), por lo que a será una singularidad algebraica si y sólo si es una singularidad evitable o un polo de u . En tal caso, el valor $u(a)$ que acabamos de definir coincide con la única extensión que hace a u meromorfa en $D(a, r)$, es decir, que evita la singularidad.

Definición 7.25 Una función meromorfa completa $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ es *algebraica* de grado n si es n -forme y todas sus singularidades son algebraicas.

Notemos que, por ejemplo, la función arco coseno definida sobre $\Omega = \mathbb{C}$ tiene todas sus singularidades algebraicas, pero no es algebraica porque no tiene orden de ramificación finito.

Si a es una singularidad de F , podemos definir $F(a)$ como el conjunto de valores que toman en a las ramas holomorfas de F definidas (en principio) en los entornos reducidos de a .

Según hemos visto, podemos extender la función $\Phi : S \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ a una función meromorfa $\tilde{\Phi} : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{C}^\infty$, con lo que hemos evitado las singularidades de Φ . Observemos que $F = \tilde{\pi}^{-1} \circ \tilde{\Phi}$.

Una caracterización de la superficie de gérmenes \tilde{S} similar a la que el teorema 7.21 proporciona para S sería un tanto engorrosa, mientras que si nos restringimos al caso de funciones algebraicas, la caracterización resulta muy elegante y útil. Nos ocupamos de ello a continuación.

Definición 7.26 Sea $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función algebraica, sea E el conjunto de sus puntos singulares y sea S^* el conjunto de los gérmenes de F cuyo soporte es un punto regular (claramente S^* es un abierto conexo en la superficie de Riemann S de F). Una *configuración analítica* de F es un par (X, π) , donde X es una superficie de Riemann y $\pi : X \rightarrow \Omega$ es una aplicación holomorfa propia (definición A.19) tal que existe una aplicación biholomorfa $\phi : X \setminus \pi^{-1}[E] \rightarrow S^*$ que cumple $\phi \circ \pi = \pi$ (donde la primera π es la proyección definida en S^*).

Vamos a probar que $(\tilde{S}, \tilde{\pi})$ es, salvo aplicaciones biholomorfas, la única configuración analítica de F . La idea básica es que si F es una función algebraica de grado n y tomamos un disco cerrado con centro en una de sus singularidades (y que no contenga a ninguna otra), su antiimagen por π en S será una unión de n cerrados disjuntos, cada uno de ellos homeomorfo a un disco cerrado o bien a un disco cerrado menos su centro (pero siempre habrá alguno de este segundo tipo), y los discos sin su centro no son compactos, luego π no es propia. En cambio, su antiimagen por $\tilde{\pi}$ en \tilde{S} es una unión de n cerrados homeomorfos a discos cerrados, pues en \tilde{S} “hemos tapado los agujeros de S ”, lo que hace que $\tilde{\pi}$ sí sea una aplicación propia.

Teorema 7.27 Si F es una función algebraica, entonces su superficie de gérmenes generalizados \tilde{S} junto con la proyección $\tilde{\pi}$ es una configuración analítica de F .

DEMOSTRACIÓN: Sólo hay que probar que la aplicación $\tilde{\pi}$ es propia, pues como ϕ sirve la identidad en S^* . Tomemos $K \subset \Omega$ un conjunto compacto y consideremos un cubrimiento abierto de $\tilde{\pi}^{-1}[K]$. Cada $a \in K$ tiene un número finito de antiimágenes (igual a n si el punto es regular o menor si es singular, pero nunca nulo). Cada una de ellas, digamos u , es un germen generalizado al que podemos asignarle un dominio $D'(a, r)$ tal que $V_{u,r}$ esté contenido en un abierto del cubrimiento dado. Restringiendo r si es necesario podemos suponer que vale el mismo para todas las antiimágenes de a . Llamemos r_a a este radio común. Notemos que, por definición de dominio de un germen, todos los puntos de $D(a, r_a)$ son regulares para F salvo a lo sumo su centro.

Los discos $D(a, r_a)$ constituyen un cubrimiento abierto de K , luego podemos extraer un subcubrimiento finito $K \subset D(a_1, r_{a_1}) \cup \cdots \cup D(a_m, r_{a_m})$. Entonces

$$\tilde{\pi}^{-1}[K] \subset \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{u \in \tilde{\pi}^{-1}[a_i]} V_{u, r_{a_i}}, \quad (7.3)$$

pues si $v \in \tilde{\pi}^{-1}[K]$ entonces $\tilde{\pi}(v) \in D(a_i, r_{a_i})$ para algún i , luego v tiene un dominio contenido en este disco y es arbitrariamente prolongable en $D'(a_i, r_{a_i})$, luego se prolonga a una rama meromorfa (tal vez multiforme) u de F definida

en $D'(a_i, r_{a_i})$, la cual a su vez determina un germen con $\tilde{\pi}(u) = a_i$. Entonces $v \in V_{u, r_{a_i}}$ y por consiguiente está en el miembro derecho de (7.3).

Puesto que cada abierto $V_{u, r_{a_i}}$ está contenido en un abierto del cubrimiento dado, concluimos que éste admite un subcubrimiento finito. ■

Ahora probamos la unicidad de la configuración analítica. Para ello usaremos los resultados sobre aplicaciones holomorfas propias entre superficies de Riemann expuestos en la sección A.3.

Teorema 7.28 *Si (X_1, π_1) y (X_2, π_2) son dos configuraciones analíticas de una función algebraica F , entonces existe una función biholomorfa $\psi : X_1 \rightarrow X_2$ tal que $\psi \circ \pi_2 = \pi_1$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\phi_j : X_j \setminus \pi_j^{-1}[E] \rightarrow S^*$ según la definición de configuración analítica. El conjunto E es discreto y cerrado en Ω y, al ser π_j una aplicación propia, el conjunto $\pi_j^{-1}[E]$ es discreto y cerrado en X_j (pues si $K \subset \pi_j^{-1}[E]$ es compacto, $f[K]$ es finito y $K \subset f^{-1}[f[K]]$ también lo es).

Sea $\psi = \phi_1 \circ \phi_2^{-1} : X_1 \setminus \pi_1^{-1}[E] \rightarrow X_2 \setminus \pi_2^{-1}[E]$. Claramente ψ es biholomorfa. Veamos que se puede extender a una aplicación holomorfa $\psi : X_1 \rightarrow X_2$. Para ello fijemos un punto $b \in \pi_1^{-1}[E]$ y veamos que ψ se extiende a una función holomorfa en un entorno de b .

Sea $a = \pi_1(b)$. Puesto que π_2 es propia, el conjunto $\pi_2^{-1}[a]$ es finito. Digamos que $\pi_2^{-1}[a] = \{c_1, \dots, c_s\}$. Sea W_j el dominio de una carta en X_2 alrededor de cada c_j . Podemos exigir que los abiertos W_j sean disjuntos dos a dos. Puesto que $\pi_2^{-1}[a] \subset W_1 \cup \dots \cup W_s$, el teorema A.20 nos da un entorno abierto U de a tal que $U \cap E = \{a\}$ y $\pi_2^{-1}[U] \subset W_1 \cup \dots \cup W_s$.

Sea V el dominio (conexo) de una carta alrededor de b tal que $V \subset \pi_1^{-1}[U]$ y $V \cap \pi_1^{-1}[E] = \{b\}$. Claramente $V \setminus \{b\} \subset \pi_1^{-1}[U]$ es un abierto conexo de $X_1 \setminus \pi_1^{-1}[E]$, luego $\psi[V \setminus \{b\}]$ es un abierto conexo en $\pi_2^{-1}[U]$. Por lo tanto existe un índice k tal que $\psi[V \setminus \{b\}] \subset W_k$.

Sea g la carta definida sobre V y h la carta definida sobre W_k . Podemos suponer que sus rangos son ambos iguales a $D(0, r)$ y que $g(b) = h(c_k) = 0$. Entonces $u = g^{-1} \circ \psi \circ h : D'(0, r) \rightarrow D'(0, r)$ es holomorfa y tiene una singularidad evitable en 0. Definiendo $\psi(b) = h^{-1}(u(0))$ tenemos que $\psi|_V = g \circ u \circ h^{-1}$, luego hemos extendido ψ a una función holomorfa en b .

En general, ahora tenemos $\psi : X_1 \rightarrow X_2$. La igualdad $\psi \circ \pi_2 = \pi_1$ es válida sobre los puntos de $X_1 \setminus \pi_1^{-1}[E]$. Como este conjunto es denso y ambos miembros son continuos, de hecho es válida en todo X_1 . Falta ver que ψ es biyectiva. En principio vemos que es propia: si K es un compacto en X_2 , entonces $\psi^{-1}[K]$ es un cerrado en X_1 contenido en el compacto $\pi_1^{-1}[\pi_2[K]]$, luego es compacto. En particular tenemos que ψ es suprayectiva.

Como los conjuntos $\pi_i^{-1}[E]$ son numerables, existe un punto $y_0 \in X_2 \setminus \pi_2^{-1}[E]$ de escisión para ψ y $\psi^{-1}[y_0] \subset X_1 \setminus \pi_1^{-1}[E]$, pero esto implica que y_0 tiene una única antiimagen, luego ψ tiene grado 1, y por A.24 concluimos que ψ es inyectiva. ■

Ahora es relativamente fácil reconocer configuraciones analíticas. Por ejemplo, la de la función \sqrt{z} es \mathbb{C}^∞ con la proyección $\pi(z) = z^2$, pues sabemos que $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ es la superficie de Riemann de \sqrt{z} y, como \mathbb{C}^∞ es compacto, la aplicación π es propia.

Nota Observemos que si $\pi : X \rightarrow \Omega$ es la configuración analítica de una función algebraica F , entonces los puntos de escisión de π según A.21 coinciden con los puntos regulares de F en el sentido de 7.10.

En efecto, si F es n -forme y $b \in \Omega$ es regular, por 7.13 sabemos que tiene exactamente n antiimágenes, luego π tiene grado n en el sentido de A.23. Entonces, por A.24 tenemos que cada $x \in \pi^{-1}[b]$ cumple $e(\pi, x) = 1$, luego b es un punto de escisión de π .

Recíprocamente, si b es un punto de escisión de π , entonces tiene n antiimágenes y π es inyectiva en un entorno de cada una de ellas, luego (identificando X con la superficie de gérmenes generalizados), la función $\pi^{-1} \circ \tilde{\Phi}$ determina n ramas uniformes de F (arbitrariamente prolongables) en un entorno de b , que tienen que ser distintas dos a dos (ya que determinan gérmenes distintos), luego son todas las ramas uniformes de F en b y así b es un punto regular de F . ■

7.6 Funciones algebraicas

En esta sección entenderemos por qué hemos llamado funciones algebraicas a las que cumplen la definición 7.25. Concretamente, vamos a ver que son las funciones que satisfacen una ecuación polinómica con coeficientes en el cuerpo $\mathcal{M}(\Omega)$ de las funciones (uniformes) meromorfas sobre un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}^\infty$, en el sentido que vamos a precisar a continuación:

Definición 7.29 Sea Ω un abierto conexo en \mathbb{C}^∞ , sea $\mathcal{M}(\Omega)$ el cuerpo de las funciones (uniformes) meromorfas en Ω y sea $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función meromorfa multiforme. Diremos que F es raíz del polinomio $P(z, w) \in \mathcal{M}(\Omega)[w]$,

$$P(z, w) = A_0(z)w^n + A_1(z)w^{n-1} + \dots + A_n(z)$$

si toda rama uniforme holomorfa $f : D \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ de F en un abierto que no contenga polos de las funciones $A_j(z)$ cumple

$$P(z, f(z)) = 0, \quad \text{para todo } z \in D.$$

Observemos que el conjunto de los polos de los coeficientes de un polinomio de $\mathcal{M}(\Omega)[w]$ es discreto y cerrado en Ω . También es claro que si $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ es una función no nula, entonces F es raíz de un polinomio P si y sólo si lo es de gF , luego en particular toda función que es raíz de un polinomio lo es de un polinomio mónico.

Conviene observar que basta con que una rama uniforme de F satisfaga un polinomio para que todas lo hagan:

Teorema 7.30 Sea Ω un abierto conexo en \mathbb{C}^∞ . Sean $f : D \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ y $g : E \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ dos funciones uniformes meromorfas cuyos dominios están contenidos en Ω y tales que una se prolonga hasta la otra a lo largo de un arco contenido en Ω . Si $P(z, w) \in \mathcal{M}(\Omega)[w]$ cumple que $P(z, f(z)) = 0$ para todo $z \in D$, entonces $P(z, g(z)) = 0$ para todo $z \in E$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ un arco y $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función meromorfa sobre γ que prolongue f hasta g . Entonces la función $u(t) = P(\gamma(t), h(t))$ es claramente meromorfa sobre γ (pues si $h_t : D_t \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ extiende a h alrededor de $\gamma(t)$, entonces $P(z, h_t(z))$ extiende a u alrededor de $\gamma(t)$). Por hipótesis u es nula en un entorno de a , luego es nula en todo su dominio, con lo que $P(z, g(z))$ es nula en el extremo final de γ , y por tanto en todo E . ■

Ahora veamos algunos resultados generales sobre los polinomios de $\mathcal{M}(\Omega)[w]$. Consideremos dos polinomios $T_1, T_2 \in \mathcal{M}(\Omega)[w]$ de grados $n \geq m > 0$ respectivamente. En todo anillo de polinomios sobre un cuerpo podemos dividir euclídeamente, luego podemos formar una sucesión de descomposiciones

$$\begin{aligned} T_1(z, w) &= Q_1(z, w)T_2(z, w) + T_3(z, w) \\ T_2(z, w) &= Q_2(z, w)T_3(z, w) + T_4(z, w) \\ &\vdots \\ T_{p-1}(z, w) &= Q_{p-2}(z, w)T_{p-1}(z, w) + T_p(z), \end{aligned}$$

donde el grado de cada resto T_i es estrictamente menor que el del anterior, hasta llegar a un resto $T_p \in \mathcal{M}(\Omega)$. Tomamos p como el menor natural para el que se cumple esto, es decir, suponemos que T_{p-1} tiene grado no nulo.

Llamamos E al conjunto de los polos de los coeficientes de los polinomios T_j y Q_j . Si $\infty \in \Omega$ lo incluimos también en E . Es claro que E es discreto y cerrado en Ω . Veamos algunos hechos sencillos:

1. Si $a \in \Omega \setminus E$, entonces a es un cero de T_p si y sólo si los polinomios $T_1(a, w)$ y $T_2(a, w)$ tienen una raíz común.

En efecto, si $T_p(a) = 0$, las relaciones recurrentes entre los T_i prueban que cualquier raíz de $T_{p-1}(a, w)$ lo es de todos los $T_i(a, w)$, en particular de los dos primeros. Recíprocamente, una raíz común de $T_1(a, w)$ y $T_2(a, w)$ lo es de $T_3(a, w)$ y por recurrencia lo es de $T_p(a)$, o sea, $T_p(a) = 0$.

2. $T_p \neq 0$ si y sólo si existe un conjunto $L \subset \Omega$ discreto y cerrado en Ω que contiene a E y tal que para todo $a \in \Omega \setminus L$ los polinomios $T_1(a, w)$ y $T_2(a, w)$ no tienen raíces comunes.

En efecto, si $T_p \neq 0$ tomamos L igual a E más los ceros de T_p , que es un conjunto discreto y cerrado en Ω . Si $a \in \Omega \setminus L$, entonces los polinomios $T_1(a, w)$ y $T_2(a, w)$ no tienen raíces comunes por el apartado anterior. Recíprocamente, si existe tal conjunto L , por el apartado anterior todo $a \in \Omega \setminus L$ cumple $T_p(a) \neq 0$, luego $T_p \neq 0$.

3. $T_p \neq 0$ si y sólo si los polinomios $T_1(z, w)$ y $T_2(z, w)$ son primos entre sí.

En efecto, si $T_p = 0$ las relaciones recurrentes entre los T_j prueban que T_{p-1} divide a todos los demás, luego T_1 y T_2 no son primos entre sí. Supongamos ahora que $T_1 = TP$ y $T_2 = TQ$, donde T tiene grado positivo. Sea D un disco abierto contenido en Ω disjunto con E y de forma que todos los coeficientes de los polinomios T , P y Q sean funciones holomorfas, y el coeficiente director de T no se anule en D . Si $a \in D$, cualquier raíz de $T(a, w)$ es una raíz común de $T_1(a, w)$ y $T_2(a, w)$, luego el apartado a) implica que $T_p(a) = 0$. Así pues, T_p es nula en D , luego en todo Ω .

Combinando los dos últimos apartados tenemos:

Teorema 7.31 Sean $T_1, T_2 \in \mathcal{M}(\Omega)[w]$ dos polinomios de grado no nulo primos entre sí. Entonces existe un conjunto L discreto y cerrado en Ω tal que si $a \in \Omega \setminus L$, $a \neq \infty$, los polinomios $T_1(a, w)$ y $T_2(a, w)$ no tienen raíces comunes.

Este teorema se aplica en particular a un polinomio irreducible

$$T(z, w) = A_0(z)w^n + A_1(z)w^{n-1} + \cdots + A_n(z)$$

y a su derivada formal

$$T_w(z, w) = nA_0(z)w^{n-1} + (n-1)A_1(z)w^{n-2} + \cdots + A_{n-1}(z).$$

Observemos que T y T_w son primos entre sí, pues un divisor común no unitario debería tener grado n por ser T irreducible y grado menor que n por dividir a T_w . Por otra parte, una raíz de $T(a, w)$ que no lo sea de $T_w(a, w)$ es una raíz simple. Esto prueba:

Teorema 7.32 Si $T \in \mathcal{M}(\Omega)[w]$ es un polinomio irreducible, entonces el conjunto de los $a \in \Omega$, $a \neq \infty$ tales que $T(a, w)$ tiene raíces múltiples es discreto y cerrado en Ω .

(Notemos que el razonamiento anterior no es aplicable si T tiene grado 1, pero este caso es trivial.)

Veamos ahora un primer resultado sobre existencia de funciones meromorfas que satisfacen un polinomio dado.

Teorema 7.33 Sea

$$T(z, w) = w^n + A_1(z)w^{n-1} + \cdots + A_{n-1}(z)w + A_n(z)$$

un polinomio cuyos coeficientes son funciones holomorfas en un disco $D(a, r)$ del plano complejo. Supongamos que $T(a, w)$ tiene n raíces simples w_1, \dots, w_n . Entonces existen n funciones holomorfas f_1, \dots, f_n en un disco $D(a, t)$, con $0 < t < r$ tales que:

1. $f_j(a) = w_j$, para $j = 1, \dots, n$.

2. Para cada $z \in D(a, t)$ los números $f_j(z)$ son distintos dos a dos.
3. $T(z, f_j(z)) = 0$ para todo $z \in D(a, t)$.
4. Si f es una función meromorfa en un entorno de a y para cada z en dicho entorno se cumple $T(z, f(z)) = 0$, entonces f coincide con una f_j en un entorno de a .

DEMOSTRACIÓN: Sea $\epsilon > 0$ tal que los discos $\overline{D(w_j, \epsilon)}$ sean disjuntos dos a dos. Así, el polinomio $T(a, w)$ tiene un único cero en cada disco, concretamente en su centro. Usando la continuidad de $T(z, w)$ en las dos variables y la compacidad de las circunferencias, es fácil encontrar un radio $t > 0$ de modo que si $z \in D(a, t)$ y $|w - w_j| = \epsilon$, entonces $T(z, w) \neq 0$. En $D(a, t)$ podemos definir las funciones

$$u_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-w_j|=\epsilon} \frac{T_w(z, w)}{T(z, w)} dw.$$

El teorema de los residuos y el teorema 3.10 implican que $u_j(z)$ es el número de ceros en $D(w_j, \epsilon)$ del polinomio $w \mapsto T(z, w)$ (contados con sus multiplicidades). En particular $u_j(z)$ es un número natural, pero por otra parte cada función u_j es continua, luego es constante en $D(a, t)$. Concretamente, $u_j(z) = u_j(a) = 1$ para todo i . En otras palabras, cada polinomio $T(z, w)$ tiene un único cero en $D(w_j, \epsilon)$, al que llamaremos $f_j(z)$. Ciertamente, fijado z , los números $f_j(z)$ son distintos dos a dos y se cumple $T(z, f_j(z)) = 0$.

Veamos que las funciones f_j son holomorfas. La función $w \mapsto 1/T(z, w)$, definida en $\overline{D(w_j, \epsilon)}$, tiene un polo simple en $f_j(z)$, luego la función

$$w \mapsto \frac{w - f_j(z)}{T(z, w)} T_w(z, w)$$

es holomorfa en $\overline{D(w_j, \epsilon)}$. Por el teorema de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-w_j|=\epsilon} (w - f_j(z)) \frac{T_w(z, w)}{T(z, w)} dw = 0,$$

luego

$$f_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-w_j|=\epsilon} w \frac{T_w(z, w)}{T(z, w)} dw,$$

lo que muestra la holomorfa de las funciones f_j .

Sólo falta probar que cualquier función meromorfa f en un entorno de a que cumpla $T(z, f(z)) = 0$ coincide con una de las f_j . Reduciendo t si es necesario podemos suponer que f está definida en $D(a, t)$. Sea L el conjunto de puntos de este disco que no son polos de f . Si $z \in L$, entonces $f(z)$ es una de las raíces del polinomio $T(z, w)$, pero éstas raíces son las $f_j(z)$, luego $f(z) = f_j(z)$ para algún índice j que depende de z . Ahora bien, ha de haber una cantidad no numerable de puntos $z \in L$ para los que el j correspondiente sea el mismo, con lo que f y f_j coinciden en un conjunto no numerable, luego coinciden en todo su dominio. ■

A las funciones f_j las llamaremos *raíces locales* de T en a . Con esto estamos en condiciones de probar que todo polinomio irreducible tiene una raíz, así como que ésta es una función algebraica.

Teorema 7.34 *Sea*

$$T(z, w) = w^n + A_1(z)w^{n-1} + \cdots + A_{n-1}(z)w + A_n(z)$$

un polinomio mónico irreducible en $\mathcal{M}(\Omega)[w]$. Sea E el conjunto de los puntos $a \in \Omega$ donde alguno de los coeficientes A_j tiene un polo o donde el polinomio $T(a, w)$ tenga raíces múltiples (claramente E es discreto y cerrado en Ω). Entonces existe una función algebraica $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ cuyos puntos singulares están contenidos en E y que es raíz del polinomio T .

DEMOSTRACIÓN: Tomemos un punto $a \in \Omega \setminus E$ y sea f una de las raíces locales de T en a proporcionadas por el teorema anterior. Sea F la función multiforme completa generada por f en Ω , es decir, la función cuyas ramas uniformes son las prolongaciones analíticas de f a lo largo de arcos contenidos en Ω . Por el teorema 7.30 tenemos que F es raíz de T . Falta probar que F es arbitrariamente prolongable en $\Omega \setminus E$. En efecto, si $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \setminus E$ es un arco y g es una rama uniforme de F en un entorno de $\gamma(a)$, sea t_0 el supremo de los puntos $t \in [a, b]$ tales que g se prolonga a lo largo de $\gamma|_{[a, t]}$. Tomemos un disco D de centro $\gamma(t_0)$ donde estén definidas las raíces locales de T según el teorema anterior. Sea $\epsilon > 0$ tal que $\gamma(t_0 - \epsilon) \in D$. La prolongación de g hasta $\gamma(t_0 - \epsilon)$ es una raíz local de T en $\gamma(t_0 - \epsilon)$, pero es claro que las raíces locales en este punto son las mismas que en $\gamma(t_0)$, luego la prolongación de g hasta $\gamma(t_0 - \epsilon)$ permite prolongar g hasta $\gamma(t_0)$ y aún más allá, salvo que $t_0 = b$, luego éste ha de ser el caso y tenemos que g se prolonga a lo largo de γ .

Veamos que la función F es algebraica. En primer lugar observamos que, en un entorno de un punto regular, las ramas uniformes holomorfas de F son raíces locales de T , luego su número es $p \leq n$, y por el teorema 7.13 concluimos que F tiene multiplicidad p .

Consideremos ahora un punto singular b de F . En particular $b \in E$. Tomamos un disco tal que $D(b, r) \cap E = \{b\}$ y sea F^* una rama holomorfa de F en $D'(b, r)$. Entonces F^* tiene en b un punto de ramificación de orden $m - 1 < p$ (tal vez $m = 1$). Por el teorema 7.16 existe una función uniforme holomorfa g definida en un entorno reducido de 0 tal que

$$F^*(z) = g(\sqrt[m]{z - b}) \quad \text{o bien} \quad F^*(z) = g\left(\frac{1}{\sqrt[m]{z}}\right) \quad \text{si } b = \infty.$$

Hemos de probar que g no tiene una singularidad esencial en 0. En general, si $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ y $a \in \Omega$, conviene introducir la notación

$$\mu(f, a) = \begin{cases} 0 & \text{si } o(f, a) \geq 0, \\ -o(f, a) & \text{si } o(f, a) < 0. \end{cases}$$

Supongamos $b \neq \infty$ (los cambios para $b = \infty$ son los obvios). Llamando $A_0 = 1$, sean

$$k = \max_{0 \leq j \leq n} \mu(A_j, b), \quad a_j = \lim_{z \rightarrow b} (z - b)^k A_j(z).$$

Entonces algún a_j es no nulo. Sea el polinomio $T_1(z, w) = (z - b)^k T(z, w)$. Claramente

$$T_1(b, w) = \lim_{z \rightarrow b} T_1(z, w) = a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \cdots + a_{n-1} w + a_n,$$

luego el polinomio $T_1(b, w)$ no es nulo.

Si 0 es una singularidad esencial de g , para cada $w \in \mathbb{C}$ existe una sucesión $\{\xi_s\}$ de números complejos no nulos que converge a 0 y tal que $\{g(\xi_s)\}$ converge a w . Así la sucesión $\{b + \xi_s^m\}$ converge a b y, para s suficientemente grande, está en $D'(b, r)$, luego $g(\xi_s) \in F^*(b + \xi_s^m) \subset F(b + \xi_s^m)$.

Como F es raíz de T , se cumple $T(b + \xi_s^m, g(\xi_s)) = 0$ y, en consecuencia, $T_1(b + \xi_s^m, g(\xi_s)) = 0$. Por continuidad

$$T_1(b, w) = \lim_s T_1(b + \xi_s^m, g(\xi_s)) = 0,$$

esto para todo $w \in \mathbb{C}$, lo que implica que $T_1(b, w)$ es nulo, en contradicción con lo anterior. ■

La prueba del teorema anterior muestra en realidad que cualquier función que sea raíz de un polinomio es algebraica (de grado menor o igual que el del polinomio). Ahora probaremos que toda función algebraica es raíz de un polinomio. Necesitamos recordar los resultados básicos sobre los polinomios simétricos elementales [Al 7.1]. El *polinomio simétrico elemental* de n variables y grado j se define como

$$S_j(x_1, \dots, x_n) = (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_j}.$$

Es obvio que S_j es simétrico, en el sentido de que si permutamos sus variables permanece inalterado. Lo único que vamos a necesitar [Al 7.4] es que si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, entonces

$$(x - a_1) \cdots (x - a_n) = w^n + S_1(a_1, \dots, a_n) w^{n-1} + \cdots + S_n(a_1, \dots, a_n).$$

Si $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{M}(\Omega)$, definimos

$$S_j(f_1(z), \dots, f_n(z)) = (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n} f_{i_1}(z) \cdots f_{i_j}(z).$$

Claramente $S_j(f_1(z), \dots, f_n(z))$ es una función meromorfa en Ω que no depende del orden de las funciones f_j . En los puntos $z \in \Omega$ que no son polos de ninguna f_j coincide con la composición de las f_j con el polinomio S_j .

Teorema 7.35 *Sea $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función algebraica de orden n . Entonces existe un único polinomio mónico irreducible $T(z, w) \in \mathcal{M}(\Omega)[w]$ que tiene a F por raíz. Además T tiene grado n .*

DEMOSTRACIÓN: La unicidad es consecuencia del teorema 7.31, pues dos polinomios mónicos irreducibles distintos T_1 y T_2 son primos entre sí. Si ambos tuvieran a F como raíz, en particular tendríamos una rama uniforme holomorfa f de F en un disco D tal que si $a \in D$ entonces $T_1(a, f(a)) = 0 = T_2(a, f(a))$, es decir, el conjunto de puntos a tales que $T_1(a, w)$ y $T_2(a, w)$ tienen raíces comunes no sería discreto.

Sea E el conjunto de los puntos singulares de F . Para cada $b \in \Omega \setminus E$, sean $f_{1,b}, \dots, f_{n,b}$ las ramas uniformes holomorfas de F . Si llamamos D_b al mayor disco de centro b contenido en $\Omega \setminus E$, el principio de monodromía nos permite extender las funciones $f_{i,b}$ a todo el disco D_b . Para $j = 1, \dots, n$ definimos $S_{j,b} = S_j(f_{1,b}, \dots, f_{n,b})$.

Veamos que si $b, c \in \Omega \setminus E$ y $D_b \cap D_c \neq \emptyset$, entonces $S_{j,b}$ y $S_{j,c}$ coinciden en su dominio común. En efecto, si $z \in D_b \cap D_c$, las restricciones de las funciones $f_{i,b}$ a $D_z \cap D_b \cap D_c$ son las n ramas uniformes de F en este abierto, al igual que las restricciones de las funciones $f_{i,c}$, tal vez en otro orden, pero en cualquier caso, sobre los puntos de este abierto que no son polos de ninguna de ellas, las funciones $S_{j,b}$ y $S_{j,c}$ coinciden con $S_{j,z}$, luego coinciden entre sí.

Consecuentemente, las funciones $S_{j,b}$ se extienden a una función holomorfa S_j definida en $\Omega \setminus E$. Si probamos que los puntos de E son singularidades evitables o polos de cada S_j entonces estas funciones se extenderán a funciones meromorfas en Ω , y la función F será raíz del polinomio

$$T(z, w) = w^n + S_1(z)w^{n-1} + \dots + S_n(z).$$

Sea, pues $a \in E$ y supongamos que $a \neq \infty$ (el caso $a = \infty$ es análogo). Consideremos un entorno reducido $D'(a, r)$ disjunto con E . Fijemos $b \in D'(a, r)$ y llamemos F_j a la rama holomorfa de F en $D'(a, r)$ que contiene a $f_{j,b}$. Sea $p_j \leq n$ la multiplicidad de F_j . Según la definición de punto crítico algebraico existe una función g_j meromorfa en 0 tal que $F_j(z) = g_j(\sqrt[p_j]{z-a})$.

Sea D un disco de centro 0 en el que estén definidas todas las funciones g_j y sea $k > \max_{1 \leq j \leq n} \mu(g_j, 0)$ (ver pág. 286). Así $w^k g_j(w)$ tiende a 0 en 0, luego existe una constante M y un radio $0 < r < 1$ tales que

$$|g_j(w)| \leq \frac{M}{|w|^k}, \quad \text{si } 0 < |w| < r, \quad j = 1, \dots, n.$$

Ahora llamamos $s = \min_{1 \leq j \leq n} r^{p_j}$, de modo que si $z \in D'(a, s)$ entonces

$$\begin{aligned} |S_j(z)| &\leq \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} |f_{i_1, z}(z)| \cdots |f_{i_j, z}(z)| \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} |g_{i_1}(\sqrt[p_{i_1}]{z-a})| \cdots |g_{i_j}(\sqrt[p_{i_j}]{z-a})| \\ &\leq \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} \frac{M^j}{|z-a|^{k/p_{i_1} + \dots + k/p_{i_j}}}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $|z - a| < 1$, una cota inferior de los denominadores de esta expresión es $|z - a|^m$, donde $m = jk$, con lo que en definitiva llegamos a una expresión de la forma

$$|S_j(z)| \leq \frac{K}{|z - a|^m}.$$

Esto implica que $(z - a)S_j(z)$ está acotada alrededor de a , luego S_j tiene una singularidad evitable o un polo en a , como queríamos probar.

Falta ver que el polinomio T es irreducible, pero esto es sencillo: si se pudiera descomponer en factores, es claro que F sería raíz de uno de ellos, digamos de un factor T^* de grado $p < n$, pero entonces las ramas uniformes de F (salvo en un conjunto discreto y cerrado) serían las raíces locales de T^* , que son p en un entorno de cada punto, luego F tendría a lo sumo multiplicidad p , cuando en realidad tiene multiplicidad n . ■

Con esto ya tenemos la caracterización que buscábamos de las funciones algebraicas:

Teorema 7.36 *Una función multiforme meromorfa completa $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ es algebraica si y sólo si es raíz de un polinomio de $\mathcal{M}(\Omega)[w]$.*

En realidad los teoremas anteriores contienen cierta información relevante sobre la relación entre una función algebraica y el único polinomio mónico irreducible del cual es raíz. Sólo falta dar unos pocos detalles:

Teorema 7.37 *Sea $T \in \mathcal{M}(\Omega)[w]$ un polinomio mónico irreducible de grado n y sea E el conjunto de puntos $a \in \Omega$ donde alguno de los coeficientes de E tiene un polo o donde $T(a, w)$ tiene raíces múltiples. Entonces existe una única función algebraica F en Ω que es raíz de T . Además F tiene multiplicidad n y sus puntos singulares están contenidos en E .*

DEMOSTRACIÓN: El teorema 7.34 nos da que existe una función F algebraica en Ω que es raíz de T y cuyos puntos singulares están contenidos en E . Por el teorema anterior F es raíz de un único polinomio mónico irreducible T^* cuyo grado es la multiplicidad de F , luego $T^* = T$ y F tiene multiplicidad n .

Esto implica que las n raíces locales de T en un entorno de cada punto de $\Omega \setminus E$ son ramas uniformes holomorfas de F . Puesto que toda raíz de T ha de tener como rama uniforme a alguna de estas raíces locales y todas forman parte de la misma función F , es claro que T sólo tiene una raíz. ■

Ejemplo Vamos a estudiar la función algebraica determinada por el polinomio $T(z, w) = w^3 - 3w - z \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^\infty)[w]$.

Ante todo, notemos que T es irreducible, pues si no lo fuera tendría un factor de la forma $w - h$, para una cierta función $h \in \mathcal{M}(\Omega)[w]$, que claramente cumpliría

$$h(z)^3 - 3h(z) - z = 0.$$

Entonces

$$-1 = o(z, \infty) = o(h^3 - 3h, \infty) = 3o(h, \infty),$$

lo cual es absurdo. Así pues, T determina una función algebraica triforme $T : \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$.

Si un punto w es raíz múltiple de $T(z, w)$, entonces es raíz de su derivada $3w^2 - 3 = 0$, luego $w = \pm 1$. Sustituyendo $w = \pm 1$ en $T(z, w) = 0$ resulta $z = \pm 2$. Por lo tanto, los casos en que T es reducible son únicamente

$$\begin{aligned} T(2, w) &= w^3 - 3w - 2 = (w + 1)^2(w - 2) \\ T(-2, w) &= w^3 - 3w + 2 = (w - 1)^2(w + 2). \end{aligned}$$

El único polo de los coeficientes de T es ∞ (en el coeficiente z), luego la función F es regular salvo a lo sumo en los puntos $2, -2$ e ∞ . Vamos a estudiar estas singularidades.

El mismo argumento con el que hemos probado que T es irreducible justifica de hecho que F no tiene ramas uniformes en un entorno de ∞ , luego ha de tener una única rama triforme (si tuviera una rama biforme, debería tener también una uniforme). Así pues, ∞ es un punto de ramificación doble.

Tomemos ahora un disco de centro 2 que no contenga a -2 y supongamos que F tiene una rama uniforme holomorfa f en D . La ecuación

$$f(z)^3 - 3f(z) - z = 0 \tag{7.4}$$

prueba que $f(2) = 2$ o bien $f(2) = -1$. Derivándola queda $3f'(z)(f(z)^2 - 1) = 1$, luego $f(2) = 2$ y $f'(2) \neq 0$. Por lo tanto f es inyectiva en un entorno V de 2 .

La propia ecuación (7.4) muestra que la inversa de f en $f[V]$ viene dada por $f^{-1}(w) = w^3 - 3w$.

De aquí ya podemos deducir que la función f existe realmente. En efecto, la función $h(w) = w^3 - 3w$ es inyectiva alrededor de 2 , luego su inversa f satisface (7.4). De hecho hemos probado que es la única rama uniforme de F en un entorno de 2 . Por consiguiente, F ha de tener otra rama biforme, para la cual 2 es un punto de ramificación simple.

El punto -2 se trata análogamente. Concluimos que F tiene también dos ramas holomorfas a su alrededor, una uniforme y otra biforme.

Para terminar de comprender cómo se articulan las distintas ramas uniformes de F conviene observar lo siguiente:

Si una rama uniforme holomorfa de F en $D(-2, 4) \cap D(2, 4)$ se prolonga a todo el disco $D(-2, 4)$, entonces no se prolonga a todo el disco $D(2, 4)$ y viceversa.

En efecto, si una misma rama se prolongara a $D(-2, 4) \cup D(2, 4)$, se prolongaría de hecho a todo \mathbb{C} , pero ya hemos visto que F no tiene ramas uniformes en un entorno de ∞ .

Por otra parte, si $b \in \mathbb{C}^\infty$ es un punto regular de F , es decir, si $b \neq \infty, 2, -2$, entonces el polinomio $w^3 - 3w - b$ tiene tres raíces distintas, digamos a_1, a_2, a_3 ,

que de hecho son distintas de ± 1 y ± 2 . La función $h(w) = w^2 - w$ cumple $h'(a_i) \neq 0$, luego h se restringe a una función inyectiva en un entorno U_i de cada a_i , luego las funciones $(h|_{U_i})^{-1}$ son las tres ramas uniformes de F alrededor del punto b .

Esto se traduce en que si llamamos $X = \mathbb{C}^\infty$ y definimos $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ mediante $\pi(w) = w^3 - 3w$, entendiendo que $\pi(\infty) = \infty$, y $\Phi : X \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ mediante $\Phi(w) = w$, entonces la restricción $\pi|_{X \setminus \pi^{-1}[E]} : X \setminus \pi^{-1}[E] \rightarrow \mathbb{C}^\infty \setminus E$, donde $E = \{\infty, 2, -2\}$, cumple las condiciones del teorema 7.21, por lo que $X \setminus \{\infty, 2, -2, -1, 1\}$ es la superficie de Riemann de F , y a su vez esto implica que (X, π) es la configuración analítica de F . ■

Las configuraciones analíticas (X, π) de las funciones algebraicas en \mathbb{C}^∞ son superficies de Riemann compactas, pues $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ es propia y \mathbb{C}^∞ es compacto. La fórmula de Hurwitz A.25 nos permite calcular fácilmente el género de la configuración analítica de una función algebraica a partir del polinomio que la define.

Ejercicio: Aplicar la fórmula de Hurwitz al ejemplo del teorema anterior.

El teorema siguiente muestra que existen superficies de Riemann de género arbitrario:

Teorema 7.38 *Sea $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio irreducible no constante de grado $2g + 1$ o $2g + 2$. Entonces la configuración analítica de la función algebraica determinada por el polinomio $T(z, w) = w^2 - p(z)$ tiene género g .*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ la configuración analítica de la función algebraica F determinada por T .

Si $b \in \mathbb{C}^\infty$, es claro que el polinomio $w^2 - p(b)$ es reducible si y sólo si $p(b) = 0$. Esto ya prueba que T es irreducible, pues de lo contrario $T(b, w)$ sería reducible para todo b . Por el teorema 7.37 sabemos que F es singular a lo sumo en ∞ y en las raíces de p . Además, F es una función biforme. Si $p(b) = 0$, no existen ramas uniformes de F alrededor de b . En efecto, si $f(z)$ fuera una rama uniforme, tendríamos que $f(z)^2 = p(z)$, luego, derivando, $2f(z)f'(z) = p'(z)$ y, en particular, $p'(b) = 0$, lo cual se traduciría en que b es una raíz múltiple de $p(z)$, pero los polinomios irreducibles (sobre cuerpos de característica 0) tienen sus raíces simples.

Por consiguiente, cada raíz de p es un punto de ramificación doble de F , luego tiene una única antiimagen a_b en X y $e(\pi, a_b) = 2$. Por otra parte, si $b = \infty$, tenemos dos posibilidades: o bien tiene dos antiimágenes $a_{\infty 1}$ y $a_{\infty 2}$ con $e(\pi, a_{\infty, i}) = 1$, o bien tiene una única antiimagen a_∞ con $e(\pi, a_\infty) = 2$.

Si llamamos g' al género de X , al aplicar a π la fórmula de Hurwitz obtenemos

$$2 - 2g' = 4 - (2g + i) - c,$$

donde $i = 1, 2$ y $c = 0, 1$, según si ∞ es un punto de escisión o de ramificación. La ecuación implica que $c + i$ tiene que ser par, luego tiene que ser $c + i = 2$ y queda $2 - 2g' = 2 - 2g$, luego $g' = g$. ■

Ejemplo La condición de que $p(z)$ tenga sus raíces simples es esencial. Por ejemplo, la configuración analítica del polinomio $w^2 - z^2(z+1)$ tiene género 0.

En efecto, el razonamiento precedente vale igualmente para concluir que los puntos singulares de F son a lo sumo ∞ , -1 , 0 , así como que -1 tiene una única antiimagen tal que $\pi(a_{-1}) = 2$ (porque -1 es raíz simple del polinomio $p(z) = z^2(z+1)$). En cambio, la función $z\sqrt{z+1}$ tiene claramente dos ramas uniformes en un entorno de 0 , las cuales son ramas uniformes de F . Por lo tanto, 0 es un punto regular de F y la fórmula de Hurwitz se reduce a

$$2 - 2g = 4 - 1 - c,$$

luego necesariamente $c = 1$ y $g = 0$. ■

7.7 Superficies de Riemann compactas

Como ya hemos señalado, las configuraciones analíticas (X, π) de las funciones algebraicas en \mathbb{C}^∞ son superficies de Riemann compactas. En esta sección probaremos que si X es cualquier superficie de Riemann compacta y $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ es cualquier función meromorfa no constante, entonces (X, π) es la configuración analítica de una cierta función algebraica F en \mathbb{C}^∞ . Más aún, toda función meromorfa $\Phi : X \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ determina una función algebraica mediante $F(z) = \Phi[\pi^{-1}[z]]$, aunque en general (X, π) no tiene por qué ser su configuración analítica.

Observemos que si $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ es una función meromorfa en una superficie de Riemann compacta, entonces es propia trivialmente.

Teorema 7.39 *Sea X una superficie de Riemann compacta y $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ una función meromorfa no constante de grado n (en el sentido de la definición A.23). Entonces para cada función meromorfa $\Phi : X \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ existe un polinomio mónico $T \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^\infty)[w]$ de grado n tal que $T(\pi(x), \Phi(x)) = 0$ para todo $x \in X$ donde no se hagan infinitos los coeficientes de T . Si T es irreducible, el par (X, π) es la configuración analítica de la función algebraica sobre \mathbb{C}^∞ determinada por T .*

DEMOSTRACIÓN: Sea A el conjunto formado por los polos de π y Φ más los puntos de X donde $o(\pi, x) > 1$. Claramente A es cerrado y discreto, luego es finito. Llamemos $E = \pi[A]$ y $B = \pi^{-1}[E]$. Claramente E y B son conjuntos finitos y $\pi[X \setminus B] = \mathbb{C}^\infty \setminus E$. Observemos también que $\infty \in E$.

Para cada $a \in \mathbb{C}^\infty \setminus E$ llamemos $x_{1,a}, \dots, x_{n,a}$ a los n puntos de $X \setminus B$ tales que $\pi(x_{1,a}) = \dots = \pi(x_{n,a}) = a$. Existen un disco D_a de centro a y entornos abiertos $V_{i,a}$ de cada $x_{i,a}$ de modo que $\pi|_{V_{i,a}} : V_{i,a} \rightarrow D_a$ es biyectiva. Llamaremos $\phi_{i,a} : D_a \rightarrow V_{i,a}$ a la función inversa. Definimos en D_a las funciones

$$A_{j,a}(z) = S_j(\Phi(\phi_{1,a}(z)), \dots, \Phi(\phi_{n,a}(z))),$$

donde S_j es el polinomio simétrico elemental de grado j .

Es inmediato comprobar que si $D_a \cap D_b \neq \emptyset$, entonces $A_{j,a}$ y $A_{j,b}$ coinciden en dicha intersección, luego todas estas funciones se extienden a una única función holomorfa $A_j : \mathbb{C}^\infty \setminus E \rightarrow \mathbb{C}$. Las propiedades de los polinomios simétricos elementales hacen que

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (w - \Phi(x_{i,a})) &= \prod_{i=1}^n (w - \Phi(\phi_{i,a}(a))) \\ &= w^n + A_{1,a}(a)w^{n-1} + \cdots + A_{n,a}(a) \\ &= w^n + A_1(a)w^{n-1} + \cdots + A_n(a). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Llamemos $T(z, w)$ al polinomio del último término. Hemos de probar que las funciones A_j tienen singularidades evitables o polos en los puntos de E , con lo que son meromorfas y $T \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^\infty)[w]$. Más aún, si $x \in X \setminus B$ y $a = \pi(x)$ entonces existe un i tal que $x = x_{i,a}$, y es claro que

$$T(\pi(x), \Phi(x)) = \prod_{i=1}^n (\Phi(x) - \Phi(x_{i,a})) = 0.$$

(Si $x \in B$ pero todas las funciones A_j son finitas en $\pi(b)$, la igualdad anterior vale igual para x por continuidad.)

Sea, pues, $c \in E$ y tomemos un disco abierto D en \mathbb{C}^∞ de centro c tal que $D \cap E = \{c\}$. Sea $h : D \rightarrow \mathbb{C}$ cualquier función holomorfa no constante tal que $h(c) = 0$. Sea $f = \pi \circ h$, que es una función holomorfa en $\pi^{-1}[D]$ y $f(x) = 0$ para todo $x \in \pi^{-1}[c]$.

Si m es un número natural mayor que el orden de cualquier polo que Φ pueda tener en $\pi^{-1}[c]$, entonces $g = f^m \Phi$ es holomorfa en $\pi^{-1}[D]$.

Sea $K \subset D$ un entorno compacto de c . Entonces $\pi^{-1}[K]$ es un entorno compacto de cada punto de $\pi^{-1}[c]$, y existe un número real $M > 0$ tal que $|g(x)| \leq M$ para todo $x \in \pi^{-1}[K]$.

Si $a \in K \setminus \{c\}$ tenemos que

$$\begin{aligned} A_j(a) &= (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n} \Phi(\phi_{i_1,a}(a)) \cdots \Phi(\phi_{i_j,a}(a)) \\ &= (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n} \Phi(x_{i_1,a}) \cdots \Phi(x_{i_j,a}). \end{aligned}$$

Puesto que cada $x_{i,a}$ está en $\pi^{-1}[K]$, tenemos la acotación

$$\begin{aligned} |h(a)^{mj} A_j(a)| &\leq \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n} |h(a)^m \Phi(x_{i_1,a})| \cdots |h(a)^m \Phi(x_{i_j,a})| \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n} |f(x_{i_1,a})^m \Phi(x_{i_1,a})| \cdots |f(x_{i_j,a})^m \Phi(x_{i_j,a})| \\ &\leq CM^j. \end{aligned}$$

Así pues, la función $h^{mj} A_j$ tiene una singularidad evitable en c , y la función A_j tiene una singularidad evitable o un polo en dicho punto. Por consiguiente $A_j \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^\infty)$.

Supongamos ahora que T es irreducible y sea F la función algebraica que determina. Sea A^* el conjunto de puntos de X donde π no es localmente inyectiva. Sea $E^* = \pi[A^*]$ y sea $B^* = \pi^{-1}[E^*]$. Todos estos conjuntos son finitos. Vamos a ver que E^* es el conjunto de puntos singulares de F .

En efecto, sea $z \in \mathbb{C}^\infty \setminus E^*$. Entonces z tiene n antiimágenes distintas, digamos $x_1, \dots, x_n \in X$. Existen un entorno V de z y entornos disjuntos V_i de cada x_i tales que las restricciones $\pi|_{V_i} : V_i \rightarrow V$ son homeomorfismos. Las aplicaciones $(\pi|_{V_i})^{-1} \circ \Phi$ son ramas uniformes de F , pues todo $a \in V \setminus E$ cumple

$$T(a, \Phi((\pi|_{V_i})^{-1}(a))) = T(\pi((\pi|_{V_i})^{-1}(a)), \Phi((\pi|_{V_i})^{-1}(a))) = 0.$$

Además son distintas. Para probarlo fijamos $a \in V \setminus E$. Podemos suponer que $D_a \subset V \setminus E$, y entonces las funciones $(\pi|_{V_i})^{-1}$ se restringen a las funciones $\phi_{i,a}$ (quizá en otro orden). Basta ver que las funciones $\phi_{i,a} \circ \Phi$ son distintas, pero si dos de ellas coincidieran, entonces (7.5), que es la definición de T , implicaría que $T(z, w)$ tiene raíces múltiples en todos los puntos $z \in D_a$, en contra de su irreducibilidad.

Así pues, F tiene n ramas uniformes en un entorno de cada punto de $\mathbb{C}^\infty \setminus E^*$, lo que prueba que tales puntos son regulares.

Recíprocamente, si $x \in A^*$, entonces $a = \pi(x)$ es un punto singular de F pues, fijado un entorno V de a , podemos tomar un entorno W de x tal que $W \cap B^* = \{a\}$ y $\pi[W] \subset V$. Como π no es inyectiva en W , existen dos puntos $u, v \in W$ con $\pi(u) = \pi(v) \in V$. Sea γ un arco que una u con v contenido en W y que no pase por x . Es fácil ver que $\gamma \circ \pi$ es un arco cerrado en V que prolonga una rama uniforme de F hasta otra distinta. Por consiguiente F tiene una rama con un punto de ramificación en a , que es, por tanto, un punto singular.

Sea $S^* = X \setminus B^*$. Si probamos que S^* con la restricción de π puede identificarse con la superficie de gérmenes de F con soporte regular, la unicidad de la configuración analítica implicará que (X, π) es la configuración analítica de F . Ahora bien, dicha superficie es simplemente la superficie de Riemann de la restricción de F a $\mathbb{C}^\infty \setminus E^*$, y el teorema 7.21 nos permite identificarla con S^* . ■

Ahora falta probar que si X es una superficie de Riemann compacta y π es cualquier función meromorfa no constante en X , entonces existe al menos una función meromorfa Φ sobre X para la cual el polinomio T del teorema anterior es irreducible, con lo que (X, π) será ciertamente la configuración analítica de una función algebraica. Esto es una consecuencia muy sencilla del teorema B.29.

En efecto, consideremos un par (X, π) , donde X es una superficie compacta y π una función meromorfa no constante. Consideremos el orden $n = o(\pi)$ y tomemos un punto $a \in \mathbb{C}^\infty$ con n antiimágenes distintas x_1, \dots, x_n . Por el teorema B.29 existe una función meromorfa Φ sobre X tal que los valores $\Phi(x_i)$ sean distintos dos a dos. Es fácil ver entonces que la función F del teorema anterior tiene n ramas uniformes distintas alrededor del punto a . Si T fuera reducible entonces F sería raíz de un polinomio de grado menor que n , pero eso es imposible. ■

Notemos que la aplicación Φ no es única en ningún caso. Por ejemplo, si $X = \mathbb{C}^\infty$ y $\pi(z) = z^2$, entonces (X, π) es la configuración analítica de la función \sqrt{z} , pero también de $\sqrt{z} + 1$, etc.

Apéndice A

Variedades analíticas

Presentamos en este apéndice la teoría básica sobre variedades analíticas, para que pueda ser consultado a medida que vaya siendo necesario.

A.1 Definición y ejemplos

La definición de variedad analítica es la adaptación obvia de la definición de variedad diferencial:

Definición A.1 Una *carta analítica* de dimensión n en un espacio topológico V es un homeomorfismo $z : U \rightarrow \tilde{U}$, donde $U \subset V$ y $\tilde{U} \subset \mathbb{C}^n$ son abiertos.

Dos cartas $z_1 : U_1 \rightarrow \tilde{U}_1$ y $z_2 : U_2 \rightarrow \tilde{U}_2$ en V son *compatibles* si la composición $z_1^{-1} \circ z_2 : z_1[U_1 \cap U_2] \rightarrow z_2[U_1 \cap U_2]$ es biholomorfa.

Un *atlas analítico* de dimensión n en un espacio topológico V es un conjunto de cartas analíticas compatibles dos a dos cuyos dominios cubran V .

Una *estructura analítica* de dimensión n en un espacio topológico V es un atlas analítico maximal respecto de la inclusión.

Una *variedad analítica* de dimensión n es un par (V, \mathcal{A}) , donde V es un espacio topológico de Hausdorff¹ y \mathcal{A} es una estructura analítica en V de dimensión n .

Exactamente igual que en el caso real (compárese con [GD 1.9]) se demuestra que todo atlas analítico en un espacio topológico se extiende de forma única a una estructura analítica, cuyas cartas son las compatibles con todas las cartas del atlas.

¹En [GD 1.10] exigimos a las variedades diferenciales que tengan una base numerable. Aquí no lo vamos a exigir porque así podremos demostrar (teorema B.42) que en el caso unidimensional toda variedad analítica conexa tiene una base numerable. Por consiguiente, para comparar ambas definiciones tendremos que restringirnos a variedades analíticas con esta condición adicional.

También es inmediato que, a través de la identificación $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, todo atlas analítico de dimensión n es también un atlas (en el sentido de la geometría diferencial real) de dimensión $2n$, por lo que toda estructura analítica de dimensión n es a su vez una estructura diferencial de dimensión $2n$ y toda variedad analítica de dimensión n (con una base numerable) es una variedad diferencial de dimensión $2n$.

Ejemplos 1) Consideraremos a \mathbb{C}^n como variedad analítica con la estructura determinada por el atlas analítico que tiene a la identidad como única carta.

2) Si V es un espacio vectorial de dimensión n sobre \mathbb{C} , lo consideraremos como variedad analítica con el atlas formado por un isomorfismo $z : V \rightarrow \mathbb{C}^n$. Es claro que todos determinan la misma estructura analítica, porque los isomorfismos de \mathbb{C}^n en sí mismo son claramente biholomorfos.

3) Si V es una variedad analítica y $U \subset V$ es un abierto, entonces U adquiere estructura de variedad analítica con el atlas determinado por las cartas de V cuyo dominio está contenido en U . En particular, todo abierto en \mathbb{C}^n es una variedad analítica con la estructura determinada por el atlas que tiene a la identidad como única carta.

4) Si V_1 y V_2 son variedades analíticas, también lo es $V_1 \times V_2$ con la estructura analítica determinada por las cartas $z_1 \times z_2 : U_1 \times U_2 \rightarrow \tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2$, donde $z_1 : U_1 \rightarrow \tilde{U}_1$ es una carta de V_1 y $z_2 : U_2 \rightarrow \tilde{U}_2$ es una carta de V_2 . La construcción se generaliza de forma obvia para un número finito de factores. ■

Una aplicación $f : V \rightarrow W$ entre dos variedades analíticas es *holomorfa* si para cada $p \in V$ existen cartas $z : U \rightarrow \tilde{U}$ alrededor de p y $z^* : U^* \rightarrow \tilde{U}^*$ alrededor de $f(p)$ tales que la lectura $z^{-1} \circ f \circ z^* : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}^*$ es holomorfa en p (en el sentido de ser diferenciable en p con diferencial \mathbb{C} -lineal).

Diremos que f es *biholomorfa* si es biyectiva, holomorfa y su inversa es holomorfa.

Veamos algunos hechos elementales:

1. Si $U \subset \mathbb{C}^n$ es un abierto, las aplicaciones holomorfas $f : U \rightarrow \mathbb{C}^m$ en el sentido que acabamos de definir coinciden con las que ya teníamos definidas.
2. La composición de aplicaciones holomorfas entre variedades analíticas es holomorfa.
3. Si U es un abierto en una variedad analítica V , la inclusión $i : U \rightarrow V$ es holomorfa.
4. Toda carta $z : U \rightarrow \tilde{U}$ en una variedad analítica V es biholomorfa. De hecho, las cartas de V son exactamente los biholomorfismos entre abiertos de V y abiertos de \mathbb{C}^n .

5. Si V_1, V_2 son variedades analíticas, las proyecciones $\pi_i : V_1 \times V_2 \rightarrow V_i$ son holomorfas, al igual que lo son las inclusiones $\iota_a : V_2 \rightarrow V_1 \times V_2$, $\iota_b : V_1 \rightarrow V_1 \times V_2$ dadas por $\iota_b(a) = (a, b)$ y $\iota_a(b) = (a, b)$.
6. Una aplicación $f : V \rightarrow W_1 \times W_2$ es holomorfa si y sólo si lo son sus composiciones con ambas proyecciones.

Las pruebas son idénticas a las análogas en el caso real.

Los espacios proyectivos Las variedades analíticas más simples después de los abiertos de \mathbb{C}^n son los espacios proyectivos complejos $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Recordemos de [G 8.15] que si V es un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión $n+1$, el espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ es el conjunto formado por todos los subespacios vectoriales de V de dimensión 1. En particular, llamamos $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$. Así, los puntos de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ son los subespacios vectoriales

$$[z_0, \dots, z_n] = \langle (z_0, \dots, z_n) \rangle.$$

Una homografía $h : \mathbb{P}(V_1) \rightarrow \mathbb{P}(V_2)$ entre dos espacios proyectivos es una biyección inducida por un isomorfismo $H : V_1 \rightarrow V_2$ mediante $h(\langle v \rangle) = \langle H(v) \rangle$.

Según [G 8.19] un sistema de referencia proyectivo en $\mathbb{P}^n(V)$ se corresponde esencialmente con una base de V , y por [G 8.21] con una homografía $h : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (la inducida por el isomorfismo que transforma la base de V en la base canónica de \mathbb{C}^{n+1}). Las $n+1$ -tuplas que componen $h(P)$ recibe el nombre de coordenadas homogéneas del punto P respecto del sistema de referencia dado.

Si llamamos H_0 al hiperplano de ecuación $Z_0 = 0$, podemos considerar a sus puntos como “puntos infinitos” y los restantes, es decir, los de $A_0 = \mathbb{P}(V) \setminus H_0$, forman un espacio afín, de modo que una asignación de coordenadas respecto de un cierto sistema de referencia afín es la aplicación $p_0 : A_0 \rightarrow \mathbb{C}^n$ que al punto P de coordenadas homogéneas $[z_0, \dots, z_n]$ le asigna las coordenadas afines

$$p_j(P) = (z_1/z_0, \dots, z_n/z_0).$$

Equivalentemente, cada punto de A_0 tiene unas únicas coordenadas homogéneas de la forma $(1, z_1, \dots, z_n)$ y sus coordenadas afines son las que resultan de eliminar el 1 inicial.

En realidad no hay nada que haga especial a la primera coordenada, sino que podemos tomar como hiperplano infinito cualquiera de los hiperplanos H_j de ecuación $Z_j = 0$, con lo que tenemos distintos espacios afines $A_j = \mathbb{P}(V) \setminus H_j$ con asignación de coordenadas $p_j : A_j \rightarrow \mathbb{C}^n$.

Teorema A.2 *Si V es un espacio vectorial complejo de dimensión $n+1$, existe una única estructura analítica sobre $\mathbb{P}(V)$ —en particular una única topología— tal que, para todo sistema de referencia proyectivo, los espacios afines coordenados A_j son abiertos y las asignaciones de coordenadas $p_j : A_j \rightarrow \mathbb{C}^n$ son biholomorfas.*

DEMOSTRACIÓN: Fijado un sistema de referencia proyectivo, observemos que, para $j \neq j'$, las imágenes $p_j[A_j \cap A_{j'}] \subset \mathbb{C}^n$ son abiertas, y que las aplicaciones

$$p_j^{-1} \circ p_{j'} : p_j[A_j \cap A_{j'}] \longrightarrow p_{j'}[A_j \cap A_{j'}]$$

son biholomorfas. Por simplificar la notación lo comprobamos para $j = 0$, $j' = 2$. Entonces

$$p_0[A_0 \cap A_2] = \{z \in \mathbb{C}^n \mid z_2 \neq 0\}, \quad p_2[A_0 \cap A_2] = \{z \in \mathbb{C}^n \mid z_1 \neq 0\},$$

que claramente son abiertos, y $p_0^{-1} \circ p_2$ se calcula partiendo de unas coordenadas afines (z_1, \dots, z_n) , completándolas con un 1 en la primera posición, para formar $(1, z_1, \dots, z_n)$, pasando a las coordenadas equivalentes con tercera componente igual a 1, que son $(1/z_2, z_1/z_2, 1, z_3/z_2, \dots, z_n/z_2)$, y eliminando el 1. En total:

$$(p_0^{-1} \circ p_2)(z_1, \dots, z_n) = (1/z_2, z_1/z_2, z_3/z_2, \dots, z_n/z_2),$$

que claramente es holomorfa en su dominio. Su inversa se calcula de forma análoga y también es holomorfa. La situación para otros índices es análoga.

Definimos en $P(V)$ la topología que tiene por abiertos a los conjuntos U tales que $p_j[U \cap A_j]$ es abierto en \mathbb{C}^n para todo j . Se comprueba sin dificultad que se trata de una topología en $P(V)$, así como que cada $p_j : A_j \longrightarrow \mathbb{C}^n$ es un homeomorfismo.

La topología es de Hausdorff, pues si $P, Q \in P(V)$ están en el mismo abierto afín A_j , entornos disjuntos de $p_j(P)$ y $p_j(Q)$ en \mathbb{C}^n se corresponden con entornos disjuntos de P y Q en A_j , luego en $P(V)$ y, si P, Q no están en ningún A_j común, digamos que $P \in A_0$, $Q \in A_1$, entonces sus coordenadas son

$$h(P) = [z_0, \dots, z_n], \quad h(Q) = [w_0, \dots, w_n]$$

con $z_0 \neq 0$, $z_1 = 0$, $w_0 = 0$, $w_1 \neq 0$, y podemos tomar como entornos disjuntos los abiertos

$$U = p_0^{-1}[\{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| < 1\}], \quad V = p_1^{-1}[\{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| < 1\}].$$

Equivalentemente, U está formado por los puntos cuyas coordenadas homogéneas son de la forma $[1, z_1, \dots, z_n]$ con $|z_1| < 1$ y V por los puntos con coordenadas homogéneas $[z_0, 1, z_2, \dots, z_n]$ con $|z_0| < 1$.

Así $P \in U \subset A_0$, $Q \in V \subset A_1$ y $U \cap V = \emptyset$, ya que un punto en la intersección tendría coordenadas homogéneas $[1, z_1, \dots, z_n] = [1/z_1, 1, z_3/z_1, \dots, z_n/z_1]$ con $|z_1| < 1$, $|1/z_1| < 1$, lo cual es imposible.

Ahora es obvio que las aplicaciones p_j forman un atlas analítico que determina una estructura de variedad analítica en $P(V)$ que cumple el enunciado para el sistema de referencia prefijado. Sólo falta probar que dicha estructura es la misma para todos los sistemas de referencia.

Supongamos que existe otra topología y otra estructura analítica que cumplen el enunciado para cierto sistema de referencia. Existe entonces una matriz

regular M (la matriz de cambio de base entre las bases correspondientes de V) tal que si Z es un vector de coordenadas homogéneas de un punto respecto a uno de los sistemas, entonces $Z' = ZM$ es un vector de coordenadas homogéneas respecto del otro.

El espacio afín A'_j está formado por los puntos de coordenadas homogéneas $Z'_j \neq 0$ o, equivalentemente,

$$m_{0j}z_0 + \cdots + m_{nj}z_n \neq 0.$$

Será abierto (respecto a la topología que hemos definido en $P^n(V)$) si y sólo si los conjuntos $p_{j'}[A'_j \cap A_{j'}]$ son abiertos en \mathbb{C}^n . Por simplificar la notación consideramos $j' = 0$, con lo que la imagen es

$$\{z \in \mathbb{C}^n \mid m_{0j} + m_{1j}z_1 + \cdots + m_{nj}z_n \neq 0\},$$

que claramente es abierto en \mathbb{C}^n .

Veamos ahora que la asignación de coordenadas $p'_j : A'_j \rightarrow \mathbb{C}^n$ es holomorfa. Para ello fijamos un punto $P \in A'_j$ y, por simplificar la notación, suponemos que $P \in A'_j \cap A_0$. Se trata de probar que $p_0^{-1} \circ p'_j$ es holomorfa en su dominio. Para calcular esta composición partimos de un punto (z_1, \dots, z_n) , lo transformamos en el punto de coordenadas homogéneas $(1, z_1, \dots, z_n)$, luego consideramos sus coordenadas respecto del segundo sistema de referencia, que son $(1, z_1, \dots, z_n)M$, y luego dividimos entre la j -ésima y eliminamos el 1 que resulta en esa posición. La aplicación resultante tiene como coordenadas cocientes de aplicaciones lineales, luego es holomorfa en su dominio. Igualmente se comprueba que la inversa es holomorfa.

Así pues, si U es abierto para la topología correspondiente al segundo sistema de referencia, tenemos que cada $p'_j[U \cap A'_j]$ es abierto en \mathbb{C}^n , pero como hemos probado que p'_j es biholomorfa respecto del primer sistema de referencia, resulta que $U \cap A'_j$ es abierto respecto a su topología, luego U , que es la unión de tales abiertos, también lo es. El recíproco se prueba igualmente, y concluimos que ambas topologías coinciden.

Por otra parte, hemos probado que las cartas p'_j son biholomorfas respecto del primer sistema de referencia, luego son cartas compatibles que determinan la misma estructura analítica. ■

En particular, fijado un sistema de referencia proyectivo en $P(V)$, la asignación de coordenadas homogéneas $h : P(V) \rightarrow P^n(\mathbb{C})$ es biholomorfa, pues considerando en $P^n(\mathbb{C})$ el sistema de referencia canónico (el asociado a la base canónica de \mathbb{C}^{n+1} , respecto al cual las coordenadas homogéneas de un punto son el propio punto) tenemos que, para cada $P \in P(V)$ existe un índice j tal que $P \in A_j \subset P(V)$, y entonces $h(P)$ está en el abierto afín correspondiente $A_j \subset P^n(\mathbb{C})$, y la lectura de h respecto de las cartas p_j de ambos espacios es la identidad en \mathbb{C}^n .

Por otra parte, dado cualquier hiperplano H en $P(V)$, siempre existe un sistema de referencia respecto del cual su ecuación es $Z_0 = 0$, luego tenemos que H es cerrado en $P(V)$ y que el abierto $P(V) \setminus H$ es biholomorfo a \mathbb{C}^n .

El hecho de que todos los espacios proyectivos de la misma dimensión sean biholomorfos a $P^n(\mathbb{C})$ implica que no perdemos generalidad si trabajamos exclusivamente con $P^n(\mathbb{C})$. Sin embargo, era importante verificar que su estructura analítica no está vinculada a ningún sistema de referencia en particular (especialmente al sistema de referencia canónico), sino que todas las asignaciones de coordenadas homogéneas y todas las asignaciones de coordenadas afines en los complementarios de los hiperplanos son biholomorfas.

Seguidamente observamos que la proyección $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow P^n(\mathbb{C})$ dada por $\pi(z_0, \dots, z_n) = [z_0, \dots, z_n]$ es claramente holomorfa. Como su restricción a la esfera unitaria de \mathbb{C}^{n+1} sigue siendo suprayectiva, concluimos que $P^n(\mathbb{C})$ es una variedad analítica compacta.

La esfera de Riemann Conviene estudiar con más detalle el caso de la recta proyectiva $P^1(\mathbb{C})$. El “hiperplano infinito” de ecuación $Z_0 = 0$ se reduce al punto $\infty = [0, 1]$ y la aplicación biholomorfa $p_0 : A_0 \rightarrow \mathbb{C}$ nos permite identificar cada $z \in \mathbb{C}$ con su antiimagen $[1, z] \in P^1(\mathbb{C})$, por lo que podemos considerar que $P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Por ello es habitual escribir también $\mathbb{C}^\infty = P^1(\mathbb{C})$. Una carta alrededor de ∞ es $p_1 : A_1 \rightarrow \mathbb{C}$, donde A_1 está formado por los puntos $[z_0, z_1]$ con $z_1 \neq 0$, lo cual incluye a $\infty = [0, 1]$ y a los puntos $[1, z_1]$, con $z_1 \neq 0$. A través de la identificación que hemos hecho es $A_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\} \cup \{\infty\}$, y p_1 viene dada por $p_1(\infty) = p_1([0, 1]) = 0$ y $p_1(z) = p_1([1, z]) = p_1([1/z, 1]) = 1/z$.

En suma, una carta alrededor de ∞ es la aplicación $p_1 : \mathbb{C}^\infty \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $p_1(z) = 1/z$, entendiendo que $1/\infty = 0$.

Es fácil ver entonces que una base de entornos de ∞ está formada por los complementarios de los discos $\overline{D}(0, r)$, por lo que \mathbb{C}^∞ no es sino la compactificación de Alexandroff de \mathbb{C} . En [An] vimos que es homeomorfo a una esfera, y por ello se conoce también como la *esfera de Riemann*. (Véase también [G 4.4].)

Homografías Representaremos por $\mathcal{M}(\mathbb{C}^\infty)$ al conjunto de todas las *homografías* de $P^1(\mathbb{C})$, es decir, las aplicaciones $M : P^1(\mathbb{C}) \rightarrow P^1(\mathbb{C})$ inducidas por automorfismos $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ mediante $M([z_0, z_1]) = [f(z_0, z_1)]$.

Si la matriz de f en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

con $ad - bc \neq 0$, entonces la homografía asociada es

$$M([z_1, z_2]) = [(z_1, z_2)A] = [z_1a + z_2b, z_1c + z_2d].$$

Con el convenio de identificar $z = [z, 1]$, esto equivale a

$$M(z) = [az + b, cz + d] = \left[\frac{az + b}{cz + d}, 1 \right] = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde hay que entender que si $c \neq 0$ entonces $M(-d/c) = \infty$ y que

$$M(\infty) = \begin{cases} a/c & \text{si } c \neq 0, \\ \infty & \text{si } c = 0. \end{cases}$$

Es evidente que las homografías son biyectivas y forman un grupo con la composición de aplicaciones. Esto se deduce inmediatamente de la expresión matricial en coordenadas homogéneas

$$M([z_1, z_2]) = [(z_1, z_2)A].$$

Más aun, es claro que la aplicación $\text{LG}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{C}^\infty)$ que a cada matriz A le asigna la homografía M de matriz A es un epimorfismo de grupos, cuyo núcleo está formado por las matrices escalares αI , donde $\alpha \in \mathbb{C}$ es no nulo (una matriz induce la homografía identidad si y sólo si todos los vectores de \mathbb{C}^2 son vectores propios, lo cual requiere que todos tengan el mismo valor propio).

Las homografías son biholomorfas, pues sus lecturas en las cuatro combinaciones posibles de cartas z y $1/z$ son cocientes de polinomios de grado 1, luego son holomorfas en sus dominios.

Esto implica que, en realidad, cualquier homografía que transforme ∞ en un punto finito sirve como carta de \mathbb{C}^∞ alrededor de ∞ . La carta $1/z$ es la más simple de todas.

Por otra parte, el teorema [G 8.20] implica que existe una homografía que transforma tres puntos distintos cualesquiera en otros tres puntos distintos cualesquiera (pues tres puntos distintos determinan un sistema de referencia en una recta proyectiva), y cualquier homografía está determinada por la imagen de tres puntos distintos. En particular, si fija a tres puntos, es que es la identidad.

Transformaciones esféricas En [G A.6] se definen las transformaciones esféricas de \mathbb{C}^∞ como los elementos del grupo $\tilde{\mathcal{M}}(\mathbb{C}^\infty)$ generado por las inversiones respecto de rectas y circunferencias (las inversiones respecto de rectas son las reflexiones, mientras que las inversiones respecto de circunferencias están definidas en [G A.5]).

Por ejemplo, la inversión respecto de la circunferencia unitaria es

$$J(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

En [G A.11] demostramos que las homografías de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ coinciden con las transformaciones de Möbius [G A.12], es decir, las transformaciones esféricas expresables como composición de un número par de inversiones. En [GD 4.41] demostramos que las inversiones invierten la orientación, por lo que las homografías son también las transformaciones esféricas que conservan la orientación.

Puesto que la conjugación compleja es la inversión respecto de eje real, si M es una transformación esférica inversa (expresable como producto de un número

impar de inversiones), entonces su conjugada $N = \bar{M}$ es una transformación esférica directa, luego es una homografía. Equivalentemente, $M = \bar{N}$ es la conjugada de una homografía.

En resumen, las transformaciones esféricas de \mathbb{C}^∞ son las homografías y sus conjugadas. Por lo tanto, las homografías son las transformaciones esféricas holomorfas (pues la conjugada de una aplicación holomorfa no constante nunca es una aplicación holomorfa, por ejemplo, porque no cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann).

Notemos que una diferencia fundamental entre las transformaciones esféricas directas e inversas es que las primeras no pueden fijar a más de tres puntos (salvo en el caso de la identidad), mientras que una inversión fija a una circunferencia (o una recta).

En [G A.7] se prueba que las transformaciones esféricas transforman rectas y circunferencias en rectas o circunferencias (o circunferencias en circunferencias, si convenimos en considerar a las rectas como circunferencias que pasan por ∞) y en [G A.14] se prueba que cualquier circunferencia (o recta) puede transformarse en cualquier otra mediante una transformación de Möbius.

Es fácil determinar las transformaciones de Möbius que fijan a la recta real:

Teorema A.3 *Las transformaciones de Möbius que fijan a la recta real son las de la forma*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Las que fijan al semiplano $\text{Im } z > 0$ son las que además cumplen $ad - bc > 0$, aunque no perdemos generalidad si exigimos que $ad - bc = 1$.

DEMOSTRACIÓN: Es obvio que una transformación de Möbius con coeficientes reales fija a la recta real. Recíprocamente, sea f una transformación de Möbius que fije a la recta real. Si $f(\infty) = r$ es finito, consideramos la transformación

$$g(z) = \frac{rz}{z + 1},$$

que fija la recta real y cumple $g(\infty) = r$, luego $h = f \circ g^{-1}$ fija la recta real y además $h(\infty) = \infty$. Esto implica que $h(z) = uz + v$, de donde $v = h(0) \in \mathbb{R}$ y $u = h(1) - v \in \mathbb{R}$. Como g y h tienen coeficientes reales, lo mismo vale para $f = h \circ g$.

Ahora, para una transformación de Möbius con coeficientes reales, se cumple que

$$\text{Im} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\text{Im}((az + b)(c\bar{z} + d))}{|cz + d|^2} = \frac{bc \text{Im } \bar{z} + ad \text{Im } z}{|cz + d|^2} = \frac{ad - bc}{|cz + d|^2} \text{Im } z.$$

Por lo tanto, la transformación fija a los semiplanos determinados por la recta real si y sólo si $ad - bc > 0$, y los intercambia si $ad - bc < 0$.

En el primer caso, puesto que la matriz de una transformación de Möbius está determinada salvo una matriz escalar, dividiendo sus coeficientes entre $\sqrt{ad - bc}$ podemos exigir que $ad - bc = 1$. ■

En general, si A es un anillo conmutativo y unitario, el *grupo lineal especial* $\text{LE}(n, A)$ es el subgrupo del *grupo lineal general* $\text{LG}(n, A)$ formado por las matrices $n \times n$ con coeficientes en A y determinante 1 (el núcleo del homomorfismo $\det : \text{LG}(n, A) \rightarrow A^*$). El teorema anterior afirma que el epimorfismo

$$\text{LG}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbb{C}^\infty)$$

se restringe a un monomorfismo $\text{LE}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}(H)$ cuyo núcleo es el grupo de orden 2 formado por $\{\pm I\}$ y cuya imagen son las transformaciones de Möbius que fijan a H .

Determinar las transformaciones de Möbius que fijan el disco unitario requiere algunos cálculos:

Teorema A.4 *Las transformaciones de Möbius que fijan al disco unitario son las de la forma*

$$M(z) = \frac{\zeta(z - a)}{\bar{a}z - 1},$$

donde $|a| < 1$ y $|\zeta| = 1$.

DEMOSTRACIÓN: Observemos que una transformación del tipo indicado fija a la circunferencia unidad, pues si $|z| = 1$, entonces

$$|M(z)| = \frac{|z - a|}{|\bar{a}z - z\bar{z}|} = \frac{|z - a|}{|\bar{a} - \bar{z}|} = 1.$$

Por lo tanto M hace corresponder las componentes conexas de $\mathbb{C}^\infty \setminus \partial D(0, 1)$, pero como $M(a) = 0$ y $a, 0 \in D(0, 1)$, tiene que ser $M[D(0, 1)] = D(0, 1)$.

Sea ahora N una transformación de Möbius arbitraria que fije al disco unidad. Sea $a = N(0)$ y

$$\zeta = \frac{N(1)(\bar{a} - 1)}{1 - a}.$$

Así, la transformación M del tipo del enunciado para estos valores de a y ζ cumple $M(0) = N(0)$ y $M(1) = N(1)$. Por consiguiente, $S = M \circ N^{-1}$ es una transformación de Möbius que fija al disco unidad y además cumple $S(0) = 0$, $S(1) = 1$. Basta probar que S es la identidad. En principio,

$$S(z) = \frac{pz + q}{rz + s}, \quad ps - qr \neq 0.$$

Como $S(0) = 0$, tiene que ser $q = 0$, luego $p, s \neq 0$, luego podemos expresar

$$S(z) = \frac{z}{uz + v}.$$

Entonces, si $|z| = 1$, también $|uz + v| = 1$. Ahora bien, si $u \neq 0$, entonces $z \mapsto uz + v$ transforma $\partial D(0, 1)$ en $\partial D(v, |u|)$, y sus puntos no tienen todos módulo 1. Así pues, $u = 0$ y, como $S(1) = 1$, llegamos a que $v = 1$ y $S(z) = z$. ■

Aplicaciones conformes Recordemos de [GD 4.37] que si Ω_1, Ω_2 son abiertos en \mathbb{C}^n , una aplicación conforme $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ es una aplicación diferenciable tal que, para cada $p \in \Omega_1$, la diferencial $df|_p : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ conserve los ángulos de los vectores, lo cual equivale a que exista un $\alpha > 0$ tal que $df|_p/\alpha$ sea una isometría.

Teorema A.5 *Una aplicación $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ entre dos abiertos de \mathbb{C} es conforme y conserva la orientación si y sólo si es holomorfa y su derivada no se anula en ningún punto.*

DEMOSTRACIÓN: Si f es holomorfa con derivada no nula, sabemos que conserva la orientación, y además $df|_p(v) = f'(p)v = \alpha uv$, donde $\alpha = |f'(p)| > 0$ y $u = f'(p)/|f'(p)|$, de modo que $|u| = 1$, con lo que $v \mapsto uv$ es claramente una isometría.

Recíprocamente, si f es conforme y conserva la orientación, $df|_p(v) = \alpha g(v)$, donde $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una isometría que conserva la orientación, luego es un giro (véase la sección 5.5 de [G]), luego la matriz de $df|_p$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha \cos \theta & \alpha \sin \theta \\ -\alpha \sin \theta & \alpha \cos \theta \end{pmatrix},$$

pero esto implica que f cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann, luego es holomorfa, y $f'(p) \neq 0$ porque $df|_p$ es un isomorfismo. ■

Si f es conforme, pero no conserva la orientación, como la conjugación compleja es una isometría, luego es conforme, tenemos que $g = \bar{f}$ también es conforme y conserva la orientación, luego es holomorfa, y así $f = \bar{g}$ es la conjugada de una aplicación holomorfa.

En definitiva, las aplicaciones conformes entre abiertos de \mathbb{C} son las aplicaciones holomorfas con derivada no nula y sus conjugadas. Las *transformaciones conformes* (aplicaciones conformes con inversa conforme) entre abiertos de \mathbb{C} son las aplicaciones biholomorfas y sus conjugadas.

Nota Esto hace que en algunos libros se llame transformaciones conformes a las aplicaciones biholomorfas entre abiertos de \mathbb{C} , pero el nombre no es exacto (porque también son conformes las conjugadas de las aplicaciones biholomorfas) y, sobre todo, no es generalizable a dimensiones superiores, ya que las aplicaciones biholomorfas entre abiertos de \mathbb{C}^n no son necesariamente conformes. ■

En la sección 4.6 de [GD] extendimos el concepto de aplicación conforme a las aplicaciones entre abiertos de \mathbb{C}^∞ , y en [GD 4.40] probamos que todas las transformaciones de Möbius generales son transformaciones conformes. Ahora podemos probar:

Teorema A.6 *Una aplicación $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ entre dos abiertos de \mathbb{C}^∞ es conforme y conserva la orientación si y sólo si es holomorfa y su diferencial no se anula en ningún punto.*

DEMOSTRACIÓN: El teorema anterior lo prueba para puntos finitos con imagen finita. Si $p \in \Omega_1$ es finito y $f(p) = \infty$, entonces f será conforme en p y conservará la orientación si y sólo si al componerla con la transformación conforme $1/z$ (que conserva la orientación) es conforme en p y conserva la orientación, pero esto significa que $1/f(z)$ (extendida a p con el valor 0) tiene que ser holomorfa en p con derivada no nula, lo cual equivale a que f sea holomorfa en p con diferencial no nula (pues $1/z$ es holomorfa en 0 con diferencial no nula).

Si $\infty \in \Omega_1$ y $f(\infty) = p \in \mathbb{C}$, tenemos que f será conforme en ∞ y conservará la orientación si y sólo si $f(1/z)$ (extendida a 0 con el valor p) es conforme en 0 y conserva la orientación, lo cual equivale a que $f(1/z)$ sea holomorfa en z con derivada no nula, y también a que f sea holomorfa en ∞ con diferencial no nula.

Si $f(\infty) = \infty$ razonamos análogamente con la función $1/f(1/z)$. ■

En general, las aplicaciones conformes entre abiertos de \mathbb{C}^∞ son las holomorfas con diferencial no nula y sus conjugadas.

A.2 Funciones holomorfas en variedades

En esta sección generalizamos a variedades analíticas algunos de los resultados que hemos obtenido en el capítulo II.

Teorema A.7 (Principio de prolongación analítica) *Si dos aplicaciones holomorfas $f, g : V \rightarrow W$ entre variedades analíticas con V conexa coinciden en un abierto no vacío, entonces son iguales.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $A \subset V$ la unión de todos los abiertos donde f y g coinciden. Claramente es un abierto no vacío en V . Tenemos que probar que $A = V$. En caso contrario, como V es conexa, A no puede ser cerrado en V , luego podemos tomar un punto $p \in \bar{A} \setminus A$. Por continuidad tiene que ser $f(p) = g(p)$. Sean $z : U \rightarrow \tilde{U}$ y $z^* : U^* \rightarrow \tilde{U}^*$ cartas alrededor de p y $f(p)$, respectivamente. Podemos suponer que $U \subset f^{-1}[U^*] \cap g^{-1}[U^*]$ es conexo.

Las funciones $z^{-1} \circ f \circ z_j^*$ y $z^{-1} \circ g \circ z_j^*$ son holomorfas en $z[U]$ y coinciden en el abierto no vacío $z[A]$ (en cuya clausura está $z(p)$), luego por el principio de prolongación analítica coinciden en $z[U]$, luego f y g coinciden en la componente U , luego $p \in A$, contradicción. ■

Nota En las condiciones del teorema anterior, si además V tiene dimensión 1, es suficiente con que el conjunto de los puntos de V donde f y g coinciden tenga un punto de acumulación, pues tomando una carta alrededor de dicho punto de acumulación y aplicando la versión correspondiente del principio de prolongación analítica para abiertos en \mathbb{C} concluimos que de hecho f y g coinciden en un abierto. ■

Teorema A.8 (Teorema de la aplicación abierta) *Si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación holomorfa no constante entre variedades analíticas con V conexa y W de dimensión 1, entonces f es abierta.*

DEMOSTRACIÓN: Es consecuencia inmediata del teorema 1.38: si $A \subset V$ es abierto y $p \in A$, tomamos cartas $z : U \rightarrow \tilde{U}$ y $z^* : U^* \rightarrow \tilde{U}^*$ alrededor de p y $f(p)$, de modo que $U \subset A \cap f^{-1}[U^*]$. Entonces $z^{-1} \circ f \circ z^* : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{C}$ es una aplicación holomorfa, luego abierta, luego $z^*[f[z^{-1}[\tilde{U}]]]$ es abierto en \tilde{U}^* , luego $f[U]$ es abierto en W y $f(p) \in f[U] \subset f[A]$, luego $f[A]$ es abierto. ■

Teorema A.9 (Principio del módulo máximo) *Si $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa en una variedad analítica conexa y $|f|$ alcanza en algún punto un máximo local, entonces f es constante.*

DEMOSTRACIÓN: Si $|f|$ alcanza un máximo local en un punto $p \in V$, tomando una carta $z : U \rightarrow \tilde{U}$ alrededor de p tenemos que $|z^{-1} \circ f|$ alcanza un máximo local en $z(p)$, luego por el principio del módulo máximo $z^{-1} \circ f$ es constante en \tilde{U} , luego f es constante en U y por el principio de prolongación analítica f es constante en V . ■

El álgebra de las funciones holomorfas Si V es una variedad analítica, definimos $\mathcal{H}(V)$ como el conjunto de todas las funciones holomorfas $V \rightarrow \mathbb{C}$. El hecho de que la suma y el producto sean funciones holomorfas $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se traduce en que $\mathcal{H}(V)$ tiene estructura de álgebra con la suma y el producto definidas puntualmente.

El mismo argumento empleado para funciones definidas en abiertos de \mathbb{C}^n (véanse las observaciones tras el teorema 2.19) prueba que si V es conexa entonces $\mathcal{H}(V)$ es un dominio íntegro.

He aquí una consecuencia notable del principio del módulo máximo:

Teorema A.10 *Si V es una variedad analítica compacta y conexa, entonces $\mathcal{H}(V) = \mathbb{C}$.*

En efecto, si f es holomorfa en V entonces $|f| : V \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y debe alcanzar un máximo global, luego por el principio del módulo máximo f es constante. ■

Si V tiene una base numerable, los teoremas [An 10.4] y siguientes son aplicables al álgebra \mathbb{C}^V y a su subálgebra $C(V, \mathbb{C})$. Concluimos que, considerando en ellas la topología de la convergencia casi uniforme, ambas son completamente metrizables, que $C(V, \mathbb{C})$ es cerrado en \mathbb{C}^V y que es un álgebra topológica con las operaciones definidas puntualmente. El teorema de Weierstrass se generaliza sin dificultad:

Teorema A.11 (Teorema de Weierstrass) *Si V es una variedad analítica con una base numerable y $\{f_m\}_{m=0}^\infty$ es una sucesión en $\mathcal{H}(V)$ que converge casi uniformemente a una función $f \in \mathbb{C}^V$, entonces $f \in \mathcal{H}(V)$, y si V puede cubrirse por una carta $z : V \rightarrow \tilde{U}$, entonces cada sucesión $\{\partial f_m / \partial z_j\}_{m=0}^\infty$ converge casi uniformemente a $\partial f / \partial z_j$.*

DEMOSTRACIÓN: Dado $a \in V$, podemos tomar una carta $z : U \rightarrow \tilde{U}$ alrededor de a , y es claro que la sucesión $\{f_m|_U\}_{m=0}^\infty$ converge casi uniformemente a $f|_U$. A su vez, por la propia definición de la topología de la convergencia casi uniforme, es inmediato que la sucesión $\{z^{-1} \circ f_m|_U\}_{m=0}^\infty$ converge casi uniformemente a $z^{-1} \circ f|_U$, luego $z^{-1} \circ f|_U \in \mathcal{H}(\tilde{U})$, lo que a su vez implica que $f|_U \in \mathcal{H}(U)$, así como que $f \in \mathcal{H}(V)$.

Similarmente, tenemos que

$$\frac{\partial f_m}{\partial z_j} = z \circ \frac{\partial(z^{-1} \circ f_m)}{\partial z_j},$$

y por el teorema de Weierstrass en \tilde{U} sabemos que la sucesión de derivadas en \tilde{U} converge casi uniformemente a $\partial_{z_j}(z^{-1} \circ f)$, de donde por la propia definición de convergencia casi uniforme se sigue que la composición con la carta converge casi uniformemente en U a $\partial f / \partial z_j$. ■

Desarrollos en serie Si V es una variedad analítica y $p \in V$, podemos tomar una carta $z : U \rightarrow \tilde{U}$ alrededor de p tal que $z(p) = 0$ y en la que $\tilde{U} = D(0; r_1, \dots, r_n)$ sea un polidisco. Así, si $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa, podemos considerar el desarrollo en serie de Taylor de $z^{-1} \circ f$, que a su vez da lugar a un desarrollo en serie de f alrededor de p :

$$f(q) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} z(q)^{\alpha},$$

para todo $q \in U$. No obstante, hay que tener presente que los coeficientes a_{α} dependen de la elección de la carta.

Definimos $\mathcal{H}_p(V)$ como el conjunto de las funciones holomorfas definidas en un entorno abierto de p . En este conjunto podemos establecer la relación de equivalencia que relaciona dos funciones si coinciden en un entorno de p . Llamaremos $\mathcal{G}_p(V)$ al conjunto cociente, cuyos elementos reciben el nombre de *gérmenes* de funciones holomorfas alrededor de a . Es claro que $\mathcal{G}_p(V)$ tiene estructura de \mathbb{C} -álgebra con las operaciones dadas por $[f] + [g] = [f + g]$ y $[f][g] = [fg]$.

El teorema 2.18 se generaliza inmediatamente a este contexto:

Teorema A.12 *Si V es una variedad analítica y $p \in V$, cada carta $z : U \rightarrow \tilde{U}$ tal que $z(p) = 0$ y en la que \tilde{U} es un polidisco determina un isomorfismo*

$$\mathbb{C}\{Z_1, \dots, Z_n\} \rightarrow \mathcal{G}_p(V)$$

que a cada serie formal $F(Z_1, \dots, Z_n)$ le asigna el germen de la función holomorfa $F_p(q) = F(z(q))$, definida en un entorno de p .

Variedades de dimensión 1 Estudiamos ahora con más detalle las aplicaciones holomorfas entre variedades analíticas de dimensión 1. El resultado fundamental es que su lectura respecto de cartas convenientemente elegidas es siempre muy simple:

Teorema A.13 Sea $f : S \rightarrow T$ una función holomorfa no constante entre variedades analíticas de dimensión 1 y sea $a \in S$. Entonces existen cartas $p : U \rightarrow \mathbb{C}$ con $a \in U$ y $q : V \rightarrow \mathbb{C}$ con $f(a) \in V$ de modo que $f[U] \subset V$, $p(a) = q(f(a)) = 0$ y para todo $z \in p[U]$ se cumple $(p^{-1} \circ f \circ q)(z) = z^k$, para cierto natural k .

DEMOSTRACIÓN: Componiendo dos cartas con traslaciones oportunas, podemos exigir que $p(a) = q(f(a)) = 0$. Restringiendo p podemos hacer que $f[U] \subset V$. Llamemos $F = p^{-1} \circ f \circ q$. Se trata de una función holomorfa no constante en $p[U]$ tal que $F(0) = 0$, luego existe un k tal que $F(z) = z^k g(z)$, donde g es una función holomorfa en 0 tal que $g(0) \neq 0$. Restringiendo p de nuevo podemos exigir que g no se anule en $p[U]$.

Tomando una rama uniforme de la raíz k -ésima en un entorno de $g(0)$ (y restringiendo aún más p si es necesario) construimos una función holomorfa $h : p[U] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $h(z)^k = g(z)$. Así pues, $F(z) = (z h(z))^k$.

La función $zh(z)$ tiene derivada no nula en 0, por lo que es inyectiva en un entorno de 0. Restringiendo p una vez más podemos suponer que es inyectiva en $p[U]$. Componiendo p con esta función obtenemos una nueva carta sobre U , digamos p_0 , de modo que si $x \in U$ y $w = p(x)h(p(x)) \in p_0[U]$,

$$(p_0^{-1} \circ f \circ q)(w) = q(f(x)) = F(p(x)) = (p(x)h(p(x)))^k = w^k.$$

Así pues, las cartas p_0 y q cumplen lo pedido. ■

El número k dado por este teorema puede caracterizarse con independencia de las cartas consideradas:

Para todo entorno U de a suficientemente pequeño existe un entorno V de $f(a)$ de modo que todo punto en V distinto de $f(a)$ tiene exactamente k antiimágenes en U .

Esto se sigue claramente de que la función z^k tiene esta propiedad en 0. Por lo tanto, k está completamente determinado por f y a .

Definición A.14 Sea $f : S \rightarrow T$ una función holomorfa no constante entre variedades analíticas de dimensión 1 y sea $a \in S$. Llamaremos *índice de ramificación* de f en a , y lo representaremos por $e(f, a)$, al número natural k que tiene la propiedad anterior.

Notemos que si f tiene imagen en \mathbb{C} se cumple que $e(f, a) = o(f - f(a), a)$.

Es fácil ver que el conjunto de puntos $z \in S$ tales que $e(f, z) > 1$ es cerrado y discreto en S (porque la función z^k tiene orden 1 en todos los puntos no nulos).

Ahora podemos generalizar a variedades el concepto de orden de una función holomorfa en una singularidad aislada:

Sea V una variedad analítica de dimensión 1, sea $p \in V$ y sea $z : U \rightarrow \tilde{U}$ una carta alrededor de p . Para cada función f holomorfa en un entorno reducido de p , definimos su *orden* en p como $o(f, p) = o(z^{-1} \circ f, z(p))$.

En principio, hemos definido el orden de f en p en términos del desarrollo en serie de Laurent de $z^{-1} \circ f$, y éste depende de la elección de z , pero ahora es fácil concluir que en realidad el orden es independiente de la carta.

En efecto, es claro que $o(f, p) \geq 0$ si y sólo si f se extiende a una función holomorfa en un entorno de p (lo cual no depende de la elección de la carta).

En tal caso, si f no es constante, tomando la identidad como carta de \mathbb{C} , en la prueba del teorema anterior se ve que $o(f, p) = e(f - f(p), p) > 0$ y, según se justifica a continuación, es independiente de las cartas.

Si f es constante, tendremos que $o(f, p) = +\infty$ o bien que $o(f, p) = 0$ según si f es o no idénticamente nula en un entorno de p , lo cual tampoco depende de la carta.

El teorema [An 10.19] se generaliza trivialmente para la definición de orden que acabamos de dar (admitiendo provisionalmente que pueda depender de la carta), de donde se sigue que $o(f, p) = -m < 0$ equivale a que $o(1/f, p) = m > 0$, y esto no depende de la elección de la carta.

Finalmente, $o(f, p) = -\infty$ equivale a que no se dé ninguno de los casos anteriores, luego tampoco depende de la elección de la carta.

En particular podemos hablar de singularidades aisladas en abiertos de una variedad analítica de dimensión 1, que se clasifican en evitables, polos y singularidades esenciales. Es inmediato que el teorema de clasificación de singularidades [An 10.23] y el teorema de Casorati-Weierstrass valen igualmente en este contexto más general.

Más aún, ahora los polos pueden verse igualmente como singularidades “evitables” en el sentido dado por el teorema siguiente:

Teorema A.15 *Sea Ω un abierto en una variedad analítica V de dimensión 1 y sea $p \in V$ una singularidad aislada de una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces f tiene un polo en p si y sólo si se extiende a una función holomorfa $f : \Omega \cup \{p\} \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ mediante $f(p) = \infty$.*

DEMOSTRACIÓN: Una implicación es consecuencia inmediata de la generalización del teorema [An10.23]. Para la contraria suponemos que f tiene un polo en p , con lo que sabemos que f se extiende a una función continua $f : \Omega \cup \{p\} \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ mediante $f(p) = \infty$. Se trata de probar que esta extensión es, de hecho, holomorfa.

En efecto, tomemos una carta z alrededor de p en V . Por simplicidad podemos suponer que $z(p) = 0$. Como carta alrededor de ∞ en \mathbb{C}^∞ tomamos la función $1/z$ (entendiendo que la imagen de ∞ es 0). La lectura de f en estas cartas es la función $1/(z^{-1} \circ f)$, entendiéndose que en 0 toma el valor 0. Ahora bien, el hecho de que f tenga un polo en p significa, por definición, que la función $z^{-1} \circ f$ tiene un polo en 0, luego $1/(z^{-1} \circ f)$ tiene orden positivo en 0, es decir, que su singularidad en 0 se evita asignándole precisamente a 0 la imagen 0. Esto prueba que la lectura de f es holomorfa en 0, luego f es holomorfa en p . ■

Por ejemplo, considerando a \mathbb{C} como abierto en \mathbb{C}^∞ resulta que toda función entera $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tiene una singularidad aislada en ∞ . El teorema de Liouville equivale a que ∞ es una singularidad evitable si y sólo si f es constante. Por otro lado:

Teorema A.16 *Una función entera $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tiene un polo de orden m en ∞ si y sólo si es un polinomio de grado m .*

DEMOSTRACIÓN: Sabemos que f admite un desarrollo en serie de Taylor $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, tomamos $1/z$ como carta alrededor de ∞ , de modo que la lectura de f en dicha carta es $f(1/z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}$. Que f tenga un polo de orden m en ∞ equivale, por definición, a que esta lectura tenga un polo de orden m en 0 , lo que a su vez equivale a que $a_k = 0$ para todo $k > m$, es decir, a que f sea un polinomio de grado m . ■

Funciones meromorfas El teorema A.15 implica que si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto no vacío, entonces las funciones meromorfas en Ω pueden identificarse con las funciones holomorfas $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ que no toman constantemente el valor ∞ en ninguna componente conexa de Ω . La identificación consiste en extender cada función meromorfa dándole el valor ∞ en sus polos. Esto nos permite extender a variedades analíticas de dimensión 1 el concepto de función meromorfa:

Definición A.17 Si V es una variedad analítica de dimensión 1, llamaremos funciones *meromorfas* en V a las funciones holomorfas $f : V \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ que no toman constantemente el valor ∞ en ninguna componente conexa de V . Representaremos por $\mathcal{M}(V)$ al conjunto de todas las funciones meromorfas en V .

Equivalentemente, una función $f : V \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ es meromorfa si al componerla con la inversa de cualquier carta de V (aunque basta considerar las cartas de un atlas) se obtiene una función meromorfa en el sentido que ya tenemos definido para abiertos en \mathbb{C} .

Claramente, si $f \in \mathcal{M}(V)$, se cumple que $f^{-1}[\infty]$ no tiene puntos de acumulación en V , y podemos definir la suma y el producto de funciones meromorfas exactamente igual que en el caso de funciones definidas sobre abiertos en \mathbb{C} : sumamos o multiplicamos dos funciones en los puntos donde ambas toman valores en \mathbb{C} y luego las extendemos a V tomando límites en los puntos restantes. El resultado es que $\mathcal{M}(V)$ adquiere estructura de álgebra sobre \mathbb{C} y, si V es conexa, entonces $\mathcal{M}(V)$ es un cuerpo.

Sin embargo, el teorema 4.10 no es cierto en general. Por ejemplo, no es cierto que $\mathcal{M}(\mathbb{C}^\infty)$ sea el cuerpo de cocientes de $\mathcal{H}(\mathbb{C}^\infty)$, ya que, según, A.10, tenemos que $\mathcal{H}(\mathbb{C}^\infty) = \mathbb{C}$, mientras que, como muestra el teorema siguiente, en \mathbb{C}^∞ hay funciones meromorfas no constantes:

Teorema A.18 *Las funciones meromorfas en \mathbb{C}^∞ son exactamente las funciones racionales (los cocientes de polinomios).*

DEMOSTRACIÓN: El teorema A.16 implica que todo polinomio es una función meromorfa en \mathbb{C}^∞ y, como $\mathcal{M}(\mathbb{C}^\infty)$ es un cuerpo, lo mismo vale para toda función racional.

Recíprocamente, si $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^\infty)$, entonces el conjunto de sus polos no tiene acumulación en \mathbb{C}^∞ , luego por compacidad ha de ser finito. Podemos construir un polinomio $q(z)$ cuyos ceros sean los polos de f (distintos de ∞) y con el mismo orden. Entonces la función $p(z) = q(z)f(z)$ es entera (todas sus singularidades son evitables) y, como el producto de funciones meromorfas es una función meromorfa, tenemos que $p(z)$ tiene un polo o una singularidad evitable en ∞ , con lo que según el teorema A.16 se trata de un polinomio y $f(z) = p(z)/q(z)$ es racional. ■

La palabra “meromorfa” significa “de forma racional”, porque las funciones meromorfas tienen un comportamiento similar al de las funciones racionales en el mismo sentido en que las funciones holomorfas se asemejan a los polinomios.

A.3 Superficies de Riemann

Las variedades analíticas conexas de dimensión 1 se llaman *superficies de Riemann*. De entre las superficies de Riemann, son especialmente relevantes las compactas, pero algunos resultados que vamos a probar sobre aplicaciones holomorfas entre superficies de Riemann valen igualmente bajo una hipótesis topológica más débil:

Definición A.19 Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos es *propia* si es continua y para todo compacto $K \subset Y$ se cumple que $f^{-1}[K]$ es compacto.

Observemos que toda aplicación continua definida en un espacio compacto es propia.

Teorema A.20 Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa no constante y propia entre superficies de Riemann. Entonces:

1. f es abierta, cerrada y suprayectiva.
2. Para cada $y \in Y$ el conjunto $f^{-1}[y]$ es finito.
3. Para cada $y \in Y$ y cada abierto V que contenga a $f^{-1}[y]$ existe un entorno abierto U de y tal que $f^{-1}[U] \subset V$.
4. Si f es localmente inyectiva, para cada $y \in Y$ existe un entorno abierto U de y tal que

$$f^{-1}[U] = \bigcup_{i=1}^n V_i,$$

donde los conjuntos V_i son abiertos disjuntos en X y todas las aplicaciones $f|_{V_i} : V_i \rightarrow U$ son homeomorfismos.

DEMOSTRACIÓN: 1) f es abierta por ser holomorfa no constante. Supongamos ahora que C es un cerrado en X y sea y un punto adherente a $f[C]$. Existe una sucesión $\{y_n\}_n$ de puntos de $f[C]$ que converge a y (aquí usamos que y tiene una base numerable de entornos, porque tiene un entorno homeomorfo a un abierto de \mathbb{C}). Sea $x_n \in C$ tal que $f(x_n) = y_n$. El conjunto $K = \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ es un compacto en Y , y $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ está contenido en $f^{-1}[K]$, que es un compacto en X . Por lo tanto existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_k$ convergente a un punto $x \in C$. La continuidad de f implica que $\{y_{n_k}\}_k$ converge a $f(x) = y$. Por lo tanto $y \in f[C]$. Esto prueba que f es cerrada.

Como f es abierta y cerrada, tenemos que $f[X]$ es abierto y cerrado en Y , luego por conexión $f[X] = Y$.

2) El conjunto $f^{-1}[y]$ es compacto. Si fuera infinito tendría un punto de acumulación, y el principio de prolongación analítica implicaría que f es constante.

3) El conjunto $X \setminus V$ es cerrado en X , luego $B = f[X \setminus V]$ es cerrado en Y y no contiene a y , luego $U = Y \setminus B$ es un entorno abierto de y que cumple lo pedido.

4) Sea $f^{-1}[y] = \{x_1, \dots, x_n\}$, donde $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$. Por hipótesis cada x_i tiene un entorno abierto W_i tal que $f|_{W_i}$ es inyectiva. Podemos suponer que los W_i son disjuntos dos a dos. Entonces $W = W_1 \cup \dots \cup W_n$ es un abierto que contiene a $f^{-1}[y]$, luego por el apartado anterior existe un entorno abierto U de y tal que $f^{-1}[U] \subset W$. Podemos suponer que $U \subset f[W_i]$ para todo i . Sea $V_i = W_i \cap f^{-1}[U]$. Es claro que los conjuntos V_i cumplen lo pedido. ■

En general una aplicación propia no tiene por qué ser localmente inyectiva, pero los puntos donde no lo es son pocos. Recordemos que si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann, el conjunto

$$A = \{x \in X \mid e(f, x) > 1\},$$

es decir, el conjunto de puntos donde f no es localmente inyectiva, es cerrado y discreto en X . (Véanse las observaciones tras la definición A.14). Si además f es propia, entonces $B = f[A]$ también es cerrado y discreto. (Es discreto porque sus subconjuntos compactos tienen antiimagen compacta, luego son finitos, y así B no contiene sucesiones convergentes.)

Definición A.21 Si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación holomorfa, no constante y propia entre superficies de Riemann, sea $A \subset X$ el conjunto (cerrado y discreto) de puntos donde f no es localmente inyectiva y sea $B = f[A]$ (también cerrado y discreto). Los elementos de B se llaman *puntos de ramificación* de f , mientras que los puntos de $Y' = Y \setminus B$ se llaman *puntos de escisión* de f .

Si definimos además $X' = X \setminus f^{-1}[B]$, es claro que $f|_{X'} : X' \rightarrow Y'$ es holomorfa, no constante, propia y localmente inyectiva, luego verifica la última propiedad del teorema anterior. Recogemos esto y un poco más en el teorema siguiente:

Teorema A.22 Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa, propia y no constante entre superficies de Riemann. Entonces existe un número natural n tal que cada punto de escisión $b \in Y'$ tiene exactamente n antiimágenes por f . Además, si $f^{-1}[b] = \{a_1, \dots, a_n\}$, existe un entorno abierto U de b en Y' y entornos abiertos disjuntos V_i en X' de cada a_i de modo que $f^{-1}[U] = V_1 \cup \dots \cup V_n$ y las restricciones $f|_{V_i} : V_i \rightarrow U$ son biholomorfas.

DEMOSTRACIÓN: Si llamamos $p(y)$ al número de antiimágenes de y , el último apartado del teorema A.20 prueba que p es localmente constante en Y' , y por conexión (es fácil ver que Y' es conexo) necesariamente p es constante en Y' . El resto del teorema es consecuencia inmediata de A.20. ■

Esto explica el nombre de “punto de escisión”. La antiimagen de un entorno suficientemente pequeño de un punto de escisión se escinde en n entornos disjuntos de cada una de las antiimágenes.

Definición A.23 Llamaremos *grado* de una aplicación $f : X \rightarrow Y$ holomorfa, propia y no constante entre superficies de Riemann al número de antiimágenes de cualquiera de los puntos regulares de Y . Lo representaremos por $n(f)$.

Notemos que un punto $y \in Y$ es de escisión si y sólo si todas sus antiimágenes cumplen $e(f, x) = 1$, por lo que el teorema siguiente generaliza al hecho de que los puntos de escisión tienen $n(f)$ antiimágenes:

Teorema A.24 Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa, propia y no constante entre superficies de Riemann. Para cada punto $y \in Y$ se cumple

$$n(f) = \sum_{x \in f^{-1}[y]} e(f, x).$$

DEMOSTRACIÓN: Por las propias definiciones el resultado es cierto si y es de escisión. Tomemos ahora un punto de ramificación $b \in B$ y supongamos que tiene s antiimágenes distintas a_1, \dots, a_s . Sea $n_j = e(f, a_j)$. Esto significa que existen entornos abiertos V_j de cada a_j disjuntos dos a dos y entornos U_j de b tales que cada $y \in U_j \setminus \{b\}$ tiene exactamente n_j antiimágenes en V_j . Por el teorema A.20 existe un entorno abierto U de b tal que $U \subset U_1 \cap \dots \cap U_s$ y $f^{-1}[U] \subset V_1 \cup \dots \cup V_s = V$. Entonces todo punto de escisión $y \in U$ tiene exactamente $n = n_1 + \dots + n_s$ antiimágenes, luego $n = n(f)$. ■

Superficies de Riemann compactas En [TA 3.20] probamos que toda superficie topológica compacta es homeomorfa a una de las superficies M_g o N_h definidas en [TA 3.18]. En [TA 10.13] calculamos los grupos de homología de estas superficies, que muestran que no son homeomorfas entre sí, así como que las superficies topológicas orientables son precisamente las superficies M_g (por [TA 10.52]).

Las superficies de Riemann son variedades diferenciales orientables (por [TA 10.42] y 1.11, que asegura que las funciones holomorfas tienen determinante jacobiano ≥ 0), luego toda superficie de Riemann compacta es homeomorfa a una de las superficies M_g . El invariante g se llama *género* de la superficie.

Equivalentemente, la topología de una superficie de Riemann compacta X está determinada por su característica de Euler $\chi(X) = 2 - 2g$ [TA 10.25], que puede calcularse a partir de cualquier triangulación de X mediante la fórmula $\chi(X) = V + C - A$ (vértices más caras menos aristas). Vamos a usar esta fórmula para obtener una expresión útil para el género de una superficie de Riemann compacta.

Teorema A.25 (Fórmula de Hurwitz) *Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas de géneros g y g' , respectivamente. Entonces*

$$2 - 2g = (2 - 2g')n(f) + \sum_a (1 - e(f, a)),$$

donde a recorre los puntos de X para los que $e(f, a) > 1$.

DEMOSTRACIÓN: Partamos de una triangulación de Y . Es claro que podemos subdividir los triángulos que la forman hasta que los puntos de ramificación de f formen parte de los vértices, así como que cada triángulo tenga a lo sumo un vértice que sea un punto de ramificación.

Para cada punto de ramificación $b \in Y$ con antiimágenes $a_1, \dots, a_m \in X$, tomamos un entorno abierto V_b y entornos U_i de cada a_i de modo que las lecturas de f respecto de cartas adecuadas en cada U_i y en V_b sean de la forma z^{k_i} , donde $k_i = e(z, a_i)$. Por A.20 podemos tomar $f^{-1}[V_b] \subset U_1 \cup \dots \cup U_m$. Es claro que subdividiendo la triangulación podemos exigir que cada triángulo con un vértice igual a b esté contenido en V_b .

La unión de los triángulos cuyos vértices son puntos de escisión es un conjunto compacto, que puede ser cubierto con un número finito de abiertos U en las condiciones de A.22 (abiertos tales que $f^{-1}[U] = V_1 \cup \dots \cup V_n$ y las restricciones $f|_{V_i} \rightarrow U$ son biholomorfas). Refinando la triangulación podemos exigir que todo triángulo cuyos vértices sean puntos de escisión esté contenido en uno de estos abiertos.²

Llamemos V , A y C al número de vértices, aristas y caras de la triangulación de Y así obtenida. Sabemos que $V - A + C = 2 - 2g'$.

La antiimagen por f de un triángulo cuyos vértices sean puntos de escisión es la unión de n triángulos disjuntos en X . Por otra parte, si un triángulo T tiene un vértice b que es un punto de ramificación, analizando el comportamiento de la función z^{k_i} vemos que (con la notación anterior) $f|_{U_i}^{-1}[T]$ es la unión de k_i triángulos con a_i como único punto en común. Por el teorema A.24 concluimos que $f^{-1}[T]$ es unión de n triángulos en X "arracimados" en m grupos de k_i triángulos unidos por un vértice. Es claro que los triángulos así obtenidos forman una triangulación de X , digamos con V' vértices, A' aristas y C' caras. Según hemos visto, $C' = nC$ y, claramente, $A' = nA$ (las aristas están formadas por

²Aquí usamos el teorema de Lebesgue [TA 1.1], en virtud del cual existe un $\epsilon > 0$ tal que todo conjunto de diámetro menor que ϵ está contenido en un abierto del cubrimiento, así como que todo triángulo puede subdividirse en triángulos de diámetro arbitrariamente pequeño. Las subdivisiones se hacen uniendo los vértices con un punto interior, de modo que se conservan las aristas exteriores.

puntos de escisión salvo quizá un vértice, luego cada una se descompone en n aristas).

Sea r el número de puntos de ramificación de f y, para cada uno de ellos $b \in Y$, sea m_b el número de antiimágenes. Así,

$$V' = n(V - r) + \sum_b m_b,$$

donde b recorre los puntos de ramificación. Equivalentemente:

$$\begin{aligned} V' &= nV - nr + \sum_b m_b = nV + \sum_b (m_b - n) \\ &= nV + \sum_b \sum_{a \in f^{-1}[b]} (1 - e(f, a)) \\ &= nV + \sum_a (1 - e(f, a)), \end{aligned}$$

donde en la última suma a recorre los puntos de V tales que $f(a)$ es un punto crítico o, equivalentemente, los puntos con $e(f, a) > 1$ (pues sus imágenes son puntos críticos y los sumandos con $e(f, a) = 1$ son nulos). La característica de Euler de la superficie X resulta ser

$$\begin{aligned} 2 - 2g &= V' - A' + C' = nV + \sum_a (1 - e(f, a)) - nA + nC \\ &= (2 - 2g')n + \sum_a (1 - e(f, a)). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

En particular, si aplicamos el teorema anterior a una aplicación holomorfa no constante $f : X \rightarrow \mathbb{C}^\infty$, obtenemos la fórmula

$$2 - 2g = 2o(f) + \sum_a (1 - e(f, a)),$$

que es útil para calcular el género de una superficie de Riemann compacta X .

Nota En [TA] vimos que la existencia de triangulaciones en una superficie topológica no es fácil de probar. Puesto que es fácil construir explícitamente una triangulación de \mathbb{C}^∞ , la prueba del teorema anterior muestra que toda superficie de Riemann compacta es triangulable, pero esto es bajo el supuesto de que existe una función holomorfa $f : X \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ no constante, lo cual tampoco es fácil de probar (teorema B.29). \blacksquare

A.4 Toros complejos

Otro ejemplo sencillo de variedades analíticas, después de \mathbb{C}^n y $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ lo constituyen los toros complejos que presentamos a continuación. Conviene introducir algunos conceptos generales sobre retículos.

Definición A.26 Si V es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} de dimensión n , un *retículo* en V es un subgrupo R generado por vectores v_1, \dots, v_r linealmente independientes. Obviamente entonces v_1, \dots, v_r forman una base de R como \mathbb{Z} -módulo. Si $r = n$ diremos que el retículo es *completo*.

Consideraremos a V como espacio topológico con la topología euclídea, es decir, la que convierte en homeomorfismos a todos los isomorfismos entre V y \mathbb{R}^n , y en el grupo cociente V/R consideraremos la topología cociente [TA 1.42] determinada por la proyección $p : V \rightarrow V/R$.

Teorema A.27 *Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} de dimensión n y R un retículo en V .*

1. R es un subespacio cerrado y discreto de V .
2. La proyección $p : V \rightarrow V/R$ es continua, abierta y suprayectiva.
3. La proyección $p : V \rightarrow V/R$ es un cubrimiento.
4. V/R es un espacio de Hausdorff.
5. V/R es compacto si y sólo si R es completo.

DEMOSTRACIÓN: Sea $R = \langle v_1, \dots, v_r \rangle_{\mathbb{Z}}$, donde v_1, \dots, v_r son linealmente independientes y completamos una base v_1, \dots, v_n de V .

1) Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ es el isomorfismo que transforma la base canónica en v_1, \dots, v_n , entonces $R = f[\mathbb{Z}^r \times \{0\}]$ y, como $\mathbb{Z}^r \times \{0\}$ es cerrado y discreto en \mathbb{R}^n , lo mismo vale para R en V .

2) Obviamente la proyección es continua y suprayectiva. Para probar que es abierta tomamos $U \subset V$ abierto y tenemos que ver que $p[U]$ es abierto, lo cual equivale a que $p^{-1}[p[U]]$ sea abierto. Ahora bien, $p^{-1}[p[U]]$ consta de todos los elementos de V congruentes módulo R con un elemento de U , es decir,

$$p^{-1}[p[U]] = \bigcup_{r \in R} (r + U),$$

pero las traslaciones $v \mapsto r + v$ son homeomorfismos, luego los conjuntos $r + U$ son abiertos y su unión también lo es.

3) Más precisamente, particularizamos el resultado anterior a una bola abierta $U = B_{\epsilon/2}(x)$, donde $\epsilon > 0$ lo elegimos de modo que $B_{\epsilon}(0) \cap (R \setminus \{0\}) = \emptyset$ (lo cual es posible en virtud de 1). Entonces $p[U]$ es un entorno fundamental de $p(x)$, pues los abiertos $r + U$ son conexos (son homeomorfos a U , que es homeomorfo a una bola en \mathbb{R}^n) y son disjuntos dos a dos, pues si $p \in (r_1 + U) \cap (r_2 + U)$, entonces $p - x - r_1 \in B_{\epsilon/2}(0) \cap B_{\epsilon/2}(r_2 - r_1)$, luego $d(r_2 - r_1, 0) < \epsilon$, luego tiene que ser $r_1 = r_2$.

4) Por [TA 1.43], basta probar que la congruencia módulo R , vista como subespacio de $V \times V$, es cerrada, pero se trata del conjunto

$$\{(v_1, v_2) \in V \times V \mid v_1 - v_2 \in R\},$$

que es la antiimagen de $R \subset V$ de la aplicación continua $V \times V \rightarrow V$ dada por $(v_1, v_2) \mapsto v_1 - v_2$.

5) Al componer el isomorfismo f considerado en 1) con la proyección p obtenemos un epimorfismo continuo $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow V/R$ cuyo núcleo es $\mathbb{Z}^r \times \{0\}$. Por el teorema de isomorfía tenemos un isomorfismo

$$\phi : \mathbb{R}^n / (\mathbb{Z}^r \times \{0\}) \rightarrow V/R,$$

y se trata de un homeomorfismo. (Notemos que ambos espacios son cocientes de retículos.) En efecto, $U \subset \mathbb{R}^n / (\mathbb{Z}^r \times \{0\})$ es abierto si y sólo si $p^{-1}[U] \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, si y sólo si $f[p^{-1}[U]] = p^{-1}[\phi[U]] \subset V$ es abierto, si y sólo si $\phi[U]$ es abierto.

Por otra parte, también tenemos un isomorfismo natural

$$\psi : \mathbb{R}^n / (\mathbb{Z}^r \times \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^r \times \mathbb{R}^{n-r},$$

que también es un homeomorfismo cuando consideramos en todos los grupos cociente las topologías cociente. En efecto, una base de \mathbb{R}^n la forman los abiertos $U_1 \times \dots \times U_n$, donde cada U_i es abierto en \mathbb{R} , y es claro entonces que una base de $\mathbb{R}^n / (\mathbb{Z}^r \times \{0\})$ la forman las proyecciones de estos abiertos básicos, que a través de ψ se transforman en abiertos de la forma $p[U_1] \times \dots \times p[U_r] \times U_{r+1} \times \dots \times U_n$, que son una base del segundo espacio.

Así pues, tenemos que V/R es homeomorfo a $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^r \times \mathbb{R}^{n-r}$ (y el homeomorfismo es un isomorfismo de grupos).

Por último observamos que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ es compacto. Es claro entonces que $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^r \times \mathbb{R}^{n-r}$ es compacto si y sólo si $r = n$, es decir, si y sólo si el retículo R es completo. ■

Ahora consideramos en V la estructura diferencial euclídea, es decir, la que convierte en difeomorfismos a todos los isomorfismos entre V y \mathbb{R}^n .

Teorema A.28 *Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} de dimensión n y R un retículo en V . Entonces existe una única estructura diferencial en V/R de dimensión n tal que la proyección $p : V \rightarrow V/R$ es un difeomorfismo local.*

DEMOSTRACIÓN: Observemos que en la prueba del teorema anterior hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} V/R & \xrightarrow{\tilde{f}} & (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^r \times \mathbb{R}^{n-r} \\ p \uparrow & & \uparrow p \\ V & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Esto nos permite probar fácilmente el hecho siguiente:

Todo $v \in V$ tiene un entorno abierto W tal que $p|_W : W \rightarrow V/R$ es inyectiva.

En efecto, a través del diagrama anterior basta probarlo para los espacios de la derecha, de modo que $v \in \mathbb{R}^n$ y basta tomar

$$W =]v_1 - \frac{1}{2}, v_1 + \frac{1}{2}[\times \cdots \times]v_r - \frac{1}{2}, v_r + \frac{1}{2}[\times \mathbb{R}^{n-r}.$$

Esto prueba que p es un homeomorfismo local. Fijemos un isomorfismo $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ y consideramos el atlas de V formado por las cartas $x : U \rightarrow U'$ tales que existe un abierto $W \subset V$ no vacío tal que $p|_W : W \rightarrow U \subset V/R$ es biyectiva, $U' = f[W]$ y $x = (p|_W)^{-1} \circ f$.

Ciertamente, estas cartas son homeomorfismos entre abiertos de V/R y abiertos de \mathbb{R}^n y hemos probado que sus dominios cubren V/R . Consideremos ahora dos cartas asociadas a dos abiertos W_1, W_2 tales que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Si $x \in x_1[U_1 \cap U_2]$, tenemos que $f^{-1}(x) \in W_1$ y $p(f^{-1}(x)) \in U_1 \cap U_2$, luego $(p|_{W_2})^{-1}(p(f^{-1}(x))) \in W_2$ tiene la misma imagen por p que $f^{-1}(x)$, luego $(p|_{W_2})^{-1}(p(f^{-1}(x))) - f^{-1}(x) \in R$.

Tenemos así una aplicación continua de $x_1[U_1 \cap U_2]$ en R . Como R es discreto, esta aplicación tiene que ser constante en un entorno conexo $A \subset x_1[U_1 \cap U_2]$ de x . Por lo tanto, existe un $r \in R$ tal que, para todo $y \in A$, se cumple que $(p|_{W_2})^{-1}(p(f^{-1}(x))) = f^{-1}(x) + r$, luego, aplicando f , resulta que $x_2(x_1^{-1}(x)) = x + f(r)$. Así pues, en un entorno de x , se cumple que $x_1^{-1} \circ x_2$ es una traslación, luego es diferenciable. Esto prueba que las cartas son compatibles.

Puesto que V/R tiene una base numerable (la imagen por p de una base numerable de V), concluimos que el atlas que hemos construido define en V/R una estructura de variedad diferencial, y es inmediato que las restricciones de la proyección $p|_W : W \rightarrow U$ a los abiertos W donde son biyectivas son difeomorfismos, pues la lectura respecto a la carta f de V y la carta x inducida por W en V/R es la identidad. Así pues, p es un difeomorfismo local.

Recíprocamente, si una estructura diferencial en V/R hace que p sea un difeomorfismo local, se comprueba sin dificultad que las cartas que hemos definido son difeomorfismos, luego también son cartas para dicha estructura, luego se trata de la misma estructura diferencial. ■

Notas Que la proyección sea un difeomorfismo local se traduce en que si tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{p} & V/R \\ & \searrow h & \downarrow g \\ & & V' \end{array}$$

entonces g es diferenciable si y sólo si lo es h , pues si $p|_W : W \rightarrow U$ es un difeomorfismo local, podemos expresar $g|_U = (p|_W)^{-1} \circ h$. Más aún, g es un difeomorfismo local si y sólo si lo es h .

Claramente, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} V/R \times V/R & \xrightarrow{+} & V/R \\ p \times p \uparrow & & \uparrow p \\ V \times V & \xrightarrow{+} & V \end{array}$$

Restringiendo las aplicaciones a abiertos en las que p sea un difeomorfismo se concluye que la suma en V/R es diferenciable, puesto que la suma en V lo es. Igualmente se prueba que la aplicación $[v] \mapsto [-v]$ es un difeomorfismo. Esto significa que V/R es (al igual que V) un grupo de Lie, es decir, una variedad diferencial con una estructura de grupo cuyas operaciones son diferenciables.

Similarmente, restringiendo las aplicaciones del diagrama

$$\begin{array}{ccc} V/R & \xrightarrow{\bar{f}} & (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^r \times \mathbb{R}^{n-r} \\ p \uparrow & & \uparrow p \\ V & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

a abiertos donde p sea un difeomorfismo concluimos que el isomorfismo \bar{f} es también un difeomorfismo, luego dos variedades de la forma V/R en las que el espacio V tenga la misma dimensión n y el retículo R tenga el mismo rango r son difeomorfas.

Conviene observar que la aplicación $h : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por $h(t) = e^{2\pi it}$ es un epimorfismo de grupos diferenciable, que claramente induce un isomorfismo-difeomorfismo $\bar{h} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1$, por lo que también tenemos isomorfismos-difeomorfismos $V/R \rightarrow (S^1)^r \times \mathbb{R}^{n-r}$. ■

A partir de aquí consideramos un espacio vectorial V sobre \mathbb{C} de dimensión n (con lo que también es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} de dimensión $2n$), que podemos ver como variedad analítica tomando como carta cualquier isomorfismo entre V y \mathbb{C}^n . Notemos que la topología que recibe V de este modo coincide con la topología euclídea cuando lo consideramos como \mathbb{R} -espacio vectorial.

Un *retículo* en V es un retículo como \mathbb{R} -espacio vectorial, es decir, un subgrupo R de V generado por r vectores linealmente independientes sobre \mathbb{R} .

Teorema A.29 *Si V es un espacio vectorial de dimensión n sobre \mathbb{C} y R es un retículo en V , existe una única estructura analítica en V/R de dimensión n para la que la proyección $p : V \rightarrow V/R$ es localmente biholomorfa.*

DEMOSTRACIÓN: La prueba del teorema anterior vale sin apenas cambio alguno. Notemos que sigue siendo cierto que p es un homeomorfismo local, pues esto sólo depende de la estructura de V como espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Ahora consideramos un isomorfismo $f : V \rightarrow \mathbb{C}^n$ (que en particular es un isomorfismo $f : V \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ de \mathbb{R} -espacios vectoriales) y consideramos exactamente las mismas cartas.

La única diferencia es que ahora sus imágenes son abiertos en \mathbb{C}^n , y sigue siendo cierto que las composiciones $x_1^{-1} \circ x_2$ son traslaciones en \mathbb{C}^n , luego son biholomorfas, y esto prueba que las cartas definen una estructura analítica. ■

Nota Las mismas consideraciones hechas en el caso real prueban que una aplicación $g : V/R \rightarrow V'$ es holomorfa si y sólo si lo es $p \circ g : V \rightarrow V'$. Igualmente, la suma y la operación $[v] \mapsto [-v]$ en el grupo V/R son holomorfas, por lo que V/R es lo que se conoce como un grupo de Lie analítico.

En cambio, no es cierto que todas las variedades de la forma V/R con V de la misma dimensión y R del mismo rango sean biholomorfas, y es fácil entender cuál es el problema: En el caso real, si tenemos dos retículos del mismo rango, digamos $R = \langle v_1, \dots, v_r \rangle_{\mathbb{Z}} \leq V$ y $S = \langle w_1, \dots, w_r \rangle_{\mathbb{Z}} \leq W$, podemos construir un isomorfismo $f : V \rightarrow W$ que cumpla $f(v_i) = w_i$, y es fácil ver que f induce un isomorfismo-difeomorfismo $\bar{f} : V/R \rightarrow W/S$.

Igualmente, en el caso complejo, si $R = \langle \omega \rangle_{\mathbb{Z}}$ y $S = \langle \eta \rangle_{\mathbb{Z}}$ son dos retículos de rango 1 en \mathbb{C} , podemos considerar igualmente un isomorfismo $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que cumpla $f(\omega) = \eta$, y es claro que f induce una aplicación biholomorfa $\mathbb{C}/R \rightarrow \mathbb{C}/S$, por lo que sí que es cierto que todas las variedades \mathbb{C}/R , donde R es un retículo de rango 1, son biholomorfas.

En cambio, si $R = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ y $S = \langle \eta_1, \eta_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ son dos retículos de rango 2 en \mathbb{C} , un isomorfismo $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que cumpla $f(\omega_1) = \eta_1$ determina ya el valor de $f(\omega_2)$, que no tiene por qué ser η_2 , por lo que no podemos afirmar que exista una aplicación biholomorfa $\mathbb{C}/R \rightarrow \mathbb{C}/S$. En realidad, esto no prueba que no exista, porque podría existir un isomorfismo que transformara ω_1, ω_2 en otra base de S , no necesariamente η_1, η_2 , pero la cuestión es que el argumento del caso real no es generalizable. ■

Definición A.30 Un *toro complejo* de dimensión n es una variedad analítica de la forma $T = V/R$, donde V es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} de dimensión n y $R \subset V$ es un retículo completo.

Hemos probado que los toros complejos son variedades analíticas compactas de dimensión n que, como variedades diferenciales, son difeomorfas a $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{2n}$ (y el difeomorfismo puede tomarse de forma que sea un isomorfismo de grupos). Sin embargo, según acabamos de señalar, no es obvio que dos toros complejos tengan que ser biholomorfos, y pronto veremos que, de hecho, no es así. Por simplicidad, de aquí en adelante nos restringiremos al caso $n = 1$.

Teorema A.31 Sean R y S dos retículos en \mathbb{C} y $\phi : \mathbb{C}/R \rightarrow \mathbb{C}/S$ una aplicación holomorfa. Entonces existen constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \mathbb{C} \\ p_R \downarrow & & \downarrow p_S \\ \mathbb{C}/R & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{C}/S \end{array}$$

donde $\tilde{\phi}$ viene dada por $\tilde{\phi}(z) = \alpha z + \beta$.

DEMOSTRACIÓN: Es fácil ver que la proyección $p_S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/S$ es un cubrimiento en el sentido de [TA 1.53], es decir, una aplicación continua y suprayectiva tal que cada punto $[z] \in \mathbb{C}/S$ tiene un entorno abierto V tal que p_S se restringe a un homeomorfismo $p_S|_U : U \rightarrow V$ sobre cada componente conexa U de $p_S^{-1}[V]$. En efecto, basta tomar un entorno conexo U de z donde $p_S|_U$ sea inyectiva y $V = p_S[U]$. Entonces $p_S^{-1}[V]$ es la unión disjunta de los trasladados $s + U$, para cada $s \in S$.

Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/S$ dada por $f = p_R \circ \phi$. Como el dominio \mathbb{C} de f es localmente arcoconexo y simplemente conexo, el criterio de elevación [TA 8.9] (véase la observación posterior) implica que f se eleva al cubrimiento p_S , es decir, que existe una aplicación continua $\tilde{\phi} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\tilde{\phi} \circ p_S = f$. Más concretamente, esto significa que $\phi([z]) = [\tilde{\phi}(z)]$.

El hecho de que p_R y p_S sean localmente biholomorfas implica que $\tilde{\phi}$ es holomorfa. Para cada $\omega \in R$, la aplicación $\tilde{\phi}(z + \omega) - \tilde{\phi}(z)$ toma valores en S . Como \mathbb{C} es conexo y S es discreto, ha de ser constante, y su derivada será nula. Así pues, $\tilde{\phi}'(z + \omega) = \tilde{\phi}'(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$ y todo $\omega \in R$.

Esto nos permite definir $g : \mathbb{C}/R \rightarrow \mathbb{C}$ mediante $g([z]) = \tilde{\phi}'(z)$ y de nuevo por la conformidad local de p_R tenemos que se trata de una aplicación holomorfa. El teorema A.10 nos da que g es constante, luego también lo es $\tilde{\phi}'$. Sea, pues, $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\tilde{\phi}'(z) = \alpha$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Obviamente entonces, existe $\beta \in \mathbb{C}$ tal que $\tilde{\phi}(z) = \alpha z + \beta$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ■

De aquí se deducen varias consecuencias, pero antes conviene introducir algunas definiciones.

Definición A.32 Un *homomorfismo analítico* $\phi : \mathbb{C}/R \rightarrow \mathbb{C}/S$ entre dos toros complejos es un homomorfismo de grupos que además es una aplicación holomorfa entre las dos superficies de Riemann. Un *isomorfismo analítico* es un homomorfismo analítico biyectivo.

Puesto que toda aplicación holomorfa y biyectiva entre dos abiertos de \mathbb{C} es biholomorfa (por la observación tras el teorema 1.37), los isomorfismos analíticos son biholomorfos, luego sus inversos son también isomorfismos analíticos.

Si en el teorema anterior suponemos que $\phi(0) = 0$, entonces se ha de cumplir que $\tilde{\phi}(\beta) \in S$, y en tal caso $\tilde{\phi}(z) = \alpha z$ induce también la aplicación ϕ , por lo que podemos suponer que $\beta = 0$, con lo que resulta que ϕ es un homomorfismo analítico:

Teorema A.33 Si $\phi : \mathbb{C}/R \rightarrow \mathbb{C}/S$ es una aplicación holomorfa entre dos toros complejos que cumple $\phi(0) = 0$, entonces ϕ es un homomorfismo analítico, inducido por la multiplicación por un cierto $\alpha \in \mathbb{C}$.

En particular, una aplicación biholomorfa $\phi : \mathbb{C}/R \rightarrow \mathbb{C}/S$ entre dos toros complejos que cumpla $\phi(0) = 0$ es un isomorfismo analítico. Ahora bien, si $\phi(0) = [\beta]$, podemos considerar la aplicación $\psi : \mathbb{C}/S \rightarrow \mathbb{C}/S$ dada por $\psi([z]) = [z - \beta]$. Es claro que está bien definida y es una aplicación biholomorfa del toro en sí mismo. Por consiguiente, $\phi \circ \psi$ es también biholomorfa y conserva el 0, luego es un isomorfismo analítico. Con esto hemos probado:

Teorema A.34 *Dos toros complejos son biholomorfos si y sólo si son analíticamente isomorfos.*

En particular, si $\phi : \mathbb{C}/R \rightarrow \mathbb{C}/S$ es un isomorfismo analítico entre dos toros complejos, el número α que lo representa en \mathbb{C} ha de cumplir $\alpha R = S$ y, recíprocamente, todo $\alpha \in \mathbb{C}$ que cumpla $\alpha R = S$ induce un isomorfismo analítico entre los toros. Por consiguiente:

Teorema A.35 *Si R y S son dos retículos completos en \mathbb{C} , los toros complejos \mathbb{C}/R y \mathbb{C}/S son biholomorfos (o analíticamente isomorfos) si y sólo si R y S son linealmente equivalentes en el sentido de la definición 6.1.*

Según la observación tras el teorema 6.3 existen infinitos retículos no equivalentes dos a dos, luego hay infinitos toros complejos —de dimensión 1— no biholomorfos dos a dos.

A.5 El espacio tangente holomorfo

En esta sección asociaremos a cada punto de variedad analítica un espacio tangente de forma análoga al caso real. De hecho, vamos a empezar considerando una variedad diferencial V de dimensión $2n$, sin suponer que se trate de una variedad analítica, y así veremos en qué punto preciso de la construcción se hace necesaria esta hipótesis.

Podemos considerar las cartas de V como aplicaciones $z : U \rightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{C}^n$, de modo que tenemos n funciones coordenadas z^1, \dots, z^n con valores complejos. Si $z^k = x^k + iy^k$, entonces las funciones coordenadas “usuales” de la carta son $x^1, y^1, \dots, x^n, y^n$.

Si $U \subset V$ es abierto, podemos considerar los anillos $C^\infty(U)$ y $C^\infty(U, \mathbb{C})$ de las funciones diferenciables de U en \mathbb{R} y \mathbb{C} , respectivamente. Toda función $f \in C^\infty(U, \mathbb{C})$ se expresa de forma única como $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$, para ciertas funciones $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in C^\infty(U)$.

Esto se traduce en el isomorfismo $C^\infty(U, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} C^\infty(U)$.

En efecto, es inmediato que la aplicación $\phi : \mathbb{C} \times C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U, \mathbb{C})$ dada por $\phi(\alpha, f)(p) = \alpha f(p)$ induce una aplicación lineal

$$\phi : \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U, \mathbb{C})$$

cuya inversa es la dada por $f + ig \mapsto 1 \otimes f + i \otimes g$, luego es un isomorfismo. De hecho, es un isomorfismo de \mathbb{R} -álgebras si consideramos en el producto tensorial el producto dado por $(\alpha \otimes f)(\beta \otimes g) = \alpha\beta \otimes fg$.

A través de este isomorfismo, la inclusión $C^\infty(U) \subset C^\infty(U, \mathbb{C})$ se corresponde con el monomorfismo $f \mapsto 1 \otimes f$.

En [GD 2.1] definimos, para cada $p \in V$, el conjunto $C_p^\infty(V)$ de todas las funciones diferenciables $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definidas en un entorno de p , así como

el espacio vectorial $G_p(V)$ de gérmenes de funciones diferenciables, que es el cociente de $C_p^\infty(V)$ respecto de la relación de equivalencia que hace equivalentes dos funciones si coinciden en un entorno de p .

Análogamente, podemos llamar $C_p^\infty(V, \mathbb{C})$ al conjunto de todas las funciones diferenciables $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ definidas en un entorno de p y considerar el correspondiente espacio de gérmenes $G_p(V, \mathbb{C})$. Éste resulta ser un espacio vectorial sobre \mathbb{C} con las operaciones definidas de forma natural.

La inclusión $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ nos da trivialmente que $C_p^\infty(V) \subset C_p^\infty(V, \mathbb{C})$, y esto nos da a su vez una aplicación inyectiva $G_p(V) \rightarrow G_p(V, \mathbb{C})$ dada por $[f] \mapsto [f]$, que nos permite identificar a $G_p(V)$ con un subespacio vectorial de $G_p(V, \mathbb{C})$ como espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Más aún, cada $f \in C_p^\infty(V, \mathbb{C})$ se expresa de forma única como $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$, para ciertas funciones $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in C_p^\infty(V)$, lo que a su vez implica que cada $\alpha \in G_p(V, \mathbb{C})$ se expresa de forma única como $\operatorname{Re} \alpha + i \operatorname{Im} \alpha$, para ciertos gérmenes $\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Im} \alpha \in G_p(V)$.

Desde un punto de vista algebraico, esto se traduce de nuevo en el isomorfismo $G_p(V, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} G_p(V)$.

El espacio tangente $T_p(V)$ está definido como el conjunto de todas las derivaciones de $C_p^\infty(V)$, aunque se prueba que éstas coinciden sobre las funciones que coinciden en un entorno de p , por lo que podemos verlas como aplicaciones lineales $v : G_p(V) \rightarrow \mathbb{R}$ con la propiedad de que

$$v(\alpha\beta) = \beta(p)v(\alpha) + \alpha(p)v(\beta).$$

Análogamente, definimos ahora $T_p(V, \mathbb{C})$ como el conjunto de las aplicaciones \mathbb{C} -lineales $v : G_p(V, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ que cumplen esta misma regla de derivación de productos.

Vamos a mostrar la relación entre $T_p(V, \mathbb{C})$ y $T_p(V)$. Para ello observamos los hechos siguientes:

1. Si $v \in T_p(V, \mathbb{C})$, entonces $\operatorname{Re} v, \operatorname{Im} v$, restringidas a $G_p(V)$, son elementos de $T_p(V)$.

En efecto, es claro que las restricciones son \mathbb{R} -lineales, y si separamos la parte real de la parte imaginaria en la fórmula del producto con factores $\alpha, \beta \in G_p(V)$, tenemos que

$$\operatorname{Re} v(\alpha\beta) = \beta(p) \operatorname{Re} v(\alpha) + \alpha(p) \operatorname{Re} v(\beta),$$

$$\operatorname{Im} v(\alpha\beta) = \beta(p) \operatorname{Im} v(\alpha) + \alpha(p) \operatorname{Im} v(\beta).$$

2. Si $v, w \in T_p(V, \mathbb{C})$ coinciden sobre las funciones coordenadas x^k, y^k , entonces son iguales.

En efecto, tenemos que $\operatorname{Re} v$ y $\operatorname{Re} w$ restringidas a $G_p(V)$ son elementos de $T_p(V)$ que coinciden sobre las funciones coordenadas, luego por [GD 2.6] tenemos que coinciden sobre $G_p(V)$, y lo mismo vale para $\operatorname{Im} v$ e $\operatorname{Im} w$,

luego v y w coinciden sobre $G_p(V)$. Como todo elemento de $G_p(V, \mathbb{C})$ es de la forma $\alpha + i\beta$, con $\alpha, \beta \in G_p(V)$ y v, w son \mathbb{C} -lineales, concluimos que coinciden sobre $G_p(V, \mathbb{C})$, luego son iguales.

3. Cada $v \in T_p(V)$ se extiende a una única derivación $\bar{v} \in T_p(V, \mathbb{C})$.

Basta definir $\bar{v}(\alpha + i\beta) = v(\alpha) + iv(\beta)$. Una comprobación rutinaria muestra que \bar{v} es \mathbb{C} -lineal y que cumple la regla del producto para gérmenes complejos. La unicidad se debe a que dos extensiones de v coinciden sobre las funciones coordenadas, luego son iguales.

4. Identificando cada $v \in T_p(V)$ con su única extensión a $T_p(V, \mathbb{C})$, podemos considerar que $T_p(V) \subset T_p(V, \mathbb{C})$, y se trata de un subespacio vectorial real. Más aún, toda $v \in T_p(V, \mathbb{C})$ se expresa de forma única como

$$v = \sum_{k=1}^n \left(v(x^k) \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p + v(y^k) \frac{\partial}{\partial y_k} \Big|_p \right),$$

puesto que ambos miembros coinciden sobre las funciones coordenadas.

5. Separando la parte real de la parte imaginaria en la expresión precedente, concluimos que toda derivación $v \in T_p(V, \mathbb{C})$ se expresa de forma única como $v = \operatorname{Re} v + i \operatorname{Im} v$, donde $\operatorname{Re} v, \operatorname{Im} v \in T_p(V)$.

Una vez más, esto se resume en el isomorfismo

$$T_p(V, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_p(V),$$

a través del cual $1 \otimes v$ se corresponde con la única extensión de v .

En particular, concluimos que $T_p(V, \mathbb{C})$ es un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión $2n$ y que cada carta alrededor de p determina una base, formada por las extensiones de las derivadas reales $\partial_{x_1}|_p, \partial_{y_1}|_p, \dots, \partial_{x_n}|_p, \partial_{y_n}|_p$, que en el producto tensorial se corresponden con los tensores

$$1 \otimes \partial_{x_1}|_p, 1 \otimes \partial_{y_1}|_p, \dots, 1 \otimes \partial_{x_n}|_p, 1 \otimes \partial_{y_n}|_p.$$

Ahora, cada $\omega \in T_p(V)^*$ se extiende de forma única a $\bar{\omega} \in T_p(V, \mathbb{C})^*$ mediante

$$\bar{\omega}(v + iw) = \omega(v) + i\omega(w).$$

Nuevamente, una comprobación rutinaria muestra que $\bar{\omega}$ es \mathbb{C} -lineal, y es la única extensión porque dos extensiones coincidirían sobre las derivaciones básicas $\partial_{x_k}|_p, \partial_{y_k}|_p$, luego serían iguales.

Esto nos permite considerar que $T_p(V)^* \subset T_p(V, \mathbb{C})^*$ y expresar toda forma $\omega \in T_p(V, \mathbb{C})^*$ como

$$\omega = \sum_{k=1}^n (\omega(\partial_{x_k}|_p) dx_k|_p + \omega(\partial_{y_k}|_p) dy_k|_p),$$

pues ambos miembros coinciden sobre la base $\partial_{x_k}|_p, \partial_{y_k}|_p$.

Algebraicamente tenemos un isomorfismo

$$T_p(V, \mathbb{C})^* \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_p(V)^*$$

a través del cual $1 \otimes \omega$ se corresponde con la única extensión de ω .

Definimos $d : C^\infty(V, \mathbb{C}) \rightarrow T_p(V, \mathbb{C})^*$ mediante

$$df|_p = d \operatorname{Re} f|_p + i d \operatorname{Im} f|_p.$$

En términos de los productos tensoriales tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(V, \mathbb{C}) & \xrightarrow{d} & T_p(V, \mathbb{C})^* \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} C^\infty(V) & \xrightarrow{1 \otimes d} & \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_p(V) \end{array}$$

Equivalentemente, si $v \in T_p(V, \mathbb{C})$, tenemos que

$$df|_p(v) = d \operatorname{Re} f|_p(v) + i d \operatorname{Im} f|_p(v) = v(\operatorname{Re} f) + iv(\operatorname{Im} f) = v(f).$$

Notemos que si $f \in C_p^\infty(V)$, entonces $df|_p$ así definida es la única extensión de $df|_p \in T_p(V)^*$ o, equivalentemente, con las identificaciones que hemos hecho, la diferencial que acabamos de definir extiende a la que ya teníamos definida.

En particular tenemos definidas las formas $dz^k|_p = dx^k|_p + i dy^k|_p$ y, si llamamos $\bar{z}^k = x^k - iy^k$ a las composiciones de las funciones coordenadas complejas con la conjugación, también tenemos $d\bar{z}^k|_p = dx^k|_p - i dy^k|_p$.

Del hecho de que $dx^k|_p, dy^k|_p$ formen una base de $T_p(V, \mathbb{C})^*$ como \mathbb{C} -espacio vectorial se sigue inmediatamente que las formas $dz^k|_p, d\bar{z}^k|_p$ también constituyen una base. Su base dual es claramente:

$$\left. \frac{\partial}{\partial z_k} \right|_p = \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_k} \right|_p - i \left. \frac{\partial}{\partial y_k} \right|_p \right), \quad \left. \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right|_p = \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_k} \right|_p + i \left. \frac{\partial}{\partial y_k} \right|_p \right).$$

De este modo, cada $v \in T_p(V, \mathbb{C})$ se expresa de la forma

$$v = \sum_{k=1}^n \left(v(z^k) \left. \frac{\partial}{\partial z_k} \right|_p + v(\bar{z}^k) \left. \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right|_p \right)$$

y para toda $f \in C_p^\infty(V, \mathbb{C})$ se cumple que

$$df|_p = \sum_{k=1}^n \left(\left. \frac{\partial f}{\partial z_k} \right|_p dz^k|_p + \left. \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} \right|_p d\bar{z}^k|_p \right).$$

Es inmediato a partir de la definición de estas derivadas parciales complejas que si $f \in C_p^\infty(V, \mathbb{C})$ y \bar{f} es la composición de f con la conjugación compleja, entonces

$$\left. \frac{\partial \bar{f}}{\partial z_k} \right|_p = \left. \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} \right|_p, \quad \left. \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}_k} \right|_p = \left. \frac{\partial f}{\partial z_k} \right|_p.$$

Por último, si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación diferenciable entre variedades diferenciales de dimensión $2n$ y $2m$, respectivamente, para cada $p \in V$ definimos $df|_p : T_p(V, \mathbb{C}) \rightarrow T_{f(p)}(W, \mathbb{C})$ mediante $df|_p(v)(g) = v(f \circ g)$.

Claramente $df|_p$ es una aplicación \mathbb{C} -lineal, y es la única extensión \mathbb{C} -lineal de la aplicación \mathbb{R} -lineal $df|_p : T_p(V) \rightarrow T_{f(p)}(W)$ que ya teníamos definida. En términos de productos tensoriales tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} T_p(V, \mathbb{C}) & \xrightarrow{df|_p} & T_{f(p)}(W, \mathbb{C}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_p(V) & \xrightarrow{1 \otimes df|_p} & \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_{f(p)}(W) \end{array}$$

Nota Observemos que el espacio $T_p(V, \mathbb{C})$ es “demasiado grande”, pues tiene dimensión $2n$ sobre \mathbb{C} , cuando lo que cabría esperar es que el espacio tangente complejo a una variedad V de dimensión compleja n en un punto p tuviera dimensión compleja n y no $2n$.

Por otra parte, la relación $\partial_{\bar{z}_k} f|_p = \partial_{z_k} \bar{f}|_p$ muestra que las derivadas $\partial_{\bar{z}_k}|_p$ son redundantes, en el sentido de que, aunque sean linealmente independientes de las derivadas $\partial_{z_k}|_p$, lo cierto es que pueden calcularse a partir de éstas, luego no aportan realmente ninguna información nueva.

Por ello nos gustaría definir el espacio tangente holomorfo a V en p como el subespacio de $T_p(V, \mathbb{C})$ generado por las derivadas $\partial_{z_k}|_p$, pero eso no sería una definición válida.

En efecto, observemos que todas las definiciones que hemos dado en esta sección son “canónicas”, en el sentido de que no dependen de la elección de una carta alrededor de p . Lo único que aporta la carta que hemos considerado es que ésta determina bases respectivas en los espacios que hemos definido, pero las definiciones de los espacios $C_p^\infty(V, \mathbb{C})$, $G_p(V, \mathbb{C})$, $T_p(V, \mathbb{C})$, $T_p(V, \mathbb{C})^*$, o de las aplicaciones que dan lugar a las identificaciones $G_p(V) \subset G_p(V, \mathbb{C})$, $T_p(V) \subset T_p(V, \mathbb{C})$, etc. no dependen de la elección de ninguna carta.

En cambio, si definiéramos el espacio tangente holomorfo como el generado por las derivadas $\partial_{z_k}|_p$, tendríamos en principio un subespacio distinto de $T_p(V, \mathbb{C})$ para cada carta que pudiéramos considerar, y no es cierto en general que todos tengan que ser el mismo.

Así hemos llegado al punto a partir del cual necesitamos exigir que V no sea una mera variedad diferencial de dimensión $2n$, sino una variedad analítica de dimensión n . ■

Teorema A.36 *Sea V una variedad analítica de dimensión n y consideremos un punto $p \in V$ y una función $f \in C_p^\infty(V, \mathbb{C})$. Sea z una carta analítica alrededor de p . Entonces f es holomorfa en p si y sólo si*

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} \right|_p = 0 \quad \text{para } k = 1, \dots, n$$

y en tal caso

$$\frac{\partial f}{\partial z_k} \Big|_p = \frac{\partial(z^{-1} \circ f)}{\partial z_k} \Big|_{z(p)}.$$

DEMOSTRACIÓN: En principio, no estamos suponiendo que V tenga una base numerable, en cuyo caso no sería una variedad diferencial, pero no perdemos generalidad si sustituimos V por el dominio de la carta dada, con lo que V pasa a ser homeomorfo a un abierto de \mathbb{C}^n y, en particular, tiene una base numerable.

Por definición f es holomorfa en p si y sólo si $z^{-1} \circ f$ es holomorfa en $z(p)$ (ahora en el sentido del cálculo diferencial en abiertos de \mathbb{C}^n). Puesto que estamos trabajando con funciones de clase C^∞ , la holomorfía equivale a que $z^{-1} \circ f$ satisfaga las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $z(p)$, es decir, a que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(z^{-1} \circ \operatorname{Re} f)}{\partial x_k} \Big|_{z(p)} &= \frac{\partial(z^{-1} \circ \operatorname{Im} f)}{\partial y_k} \Big|_{z(p)}, \\ \frac{\partial(z^{-1} \circ \operatorname{Im} f)}{\partial x_k} \Big|_{z(p)} &= - \frac{\partial(z^{-1} \circ \operatorname{Re} f)}{\partial y_k} \Big|_{z(p)}, \end{aligned}$$

lo cual a su vez, por la definición [GD 2.4] de derivada parcial en una variedad, equivale a que

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x_k} \Big|_p = \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y_k} \Big|_p, \quad \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x_k} \Big|_p = - \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y_k} \Big|_p.$$

Y a su vez es inmediato que esto equivale a que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} \Big|_p = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x_k} \Big|_p + i \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x_k} \Big|_p + i \left(\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y_k} \Big|_p + i \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y_k} \Big|_p \right) \right) = 0.$$

Además en tal caso

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z_k} \Big|_p &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x_k} \Big|_p + i \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x_k} \Big|_p - i \left(\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y_k} \Big|_p + i \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y_k} \Big|_p \right) \right) \\ &= \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x_k} \Big|_p + i \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x_k} \Big|_p = \frac{\partial(z^{-1} \circ f)}{\partial z_k} \Big|_p. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

En particular, en un abierto no vacío $U \subset \mathbb{C}^n$ tomando como carta la identidad, tenemos definidas las derivaciones $\partial_{z_k}|_p, \partial_{\bar{z}_k}|_p$, de modo que, sobre funciones holomorfas, las primeras son las derivadas parciales usuales.

Definición A.37 Si V es una variedad analítica, una función $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ es *antiholomorfa* en un punto $p \in V$ si su conjugada compleja \bar{f} es holomorfa.

En virtud del teorema anterior, fijada una carta analítica alrededor de p , las funciones antiholomorfas en p son las que cumplen $\partial_{z_k} f|_p = \partial_{\bar{z}_k} \bar{f} = 0$, para $k = 1, \dots, n$.

Las funciones coordenadas z_1, \dots, z_n son holomorfas, mientras que sus conjugadas $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ son antiholomorfas.

Definición A.38 Si V es una variedad analítica, definimos el *espacio tangente holomorfo* $T_p^h(V)$ y el *espacio tangente antiholomorfo* $T_p^a(V)$ como los subespacios de $T_p(V, \mathbb{C})$ formados por las derivaciones que se anulan sobre las funciones antiholomorfas y holomorfas, respectivamente.

Así, fijada cualquier carta analítica alrededor de p , vemos que

$$T_p^h(V) = \left\langle \frac{\partial}{\partial z_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \Big|_p \right\rangle, \quad T_p^a(V) = \left\langle \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \Big|_p \right\rangle,$$

pero aquí es crucial que, gracias a la estructura analítica de V , los miembros izquierdos están definidos independientemente de la carta que aparece en los miembros derechos.

Obviamente, $T_p(V, \mathbb{C}) = T_p^h(V) \oplus T_p^a(V)$. Más aún, $T_p^h(V)$ se identifica canónicamente con el espacio tangente real $T_p(V)$, en virtud del teorema siguiente:

Teorema A.39 Sea V una variedad analítica y $p \in V$. Entonces la composición

$$T_p(V) \longrightarrow T_p(V, \mathbb{C}) \longrightarrow T_p^h(V)$$

de la aplicación que a cada $v \in T_p(V)$ le asigna su única extensión en $T_p(V, \mathbb{C})$ seguida de la proyección en $T_p^h(V)$ asociada a la descomposición en suma directa $T_p(V, \mathbb{C}) = T_p^h(V) \oplus T_p^a(V)$ es un isomorfismo de \mathbb{R} -espacios vectoriales.

DEMOSTRACIÓN: Las dos aplicaciones son \mathbb{R} -lineales, luego su composición también lo es. Claramente, las extensiones de $\partial_{x_k}|_p, \partial_{y_k}|_p$ son:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p = \frac{\partial}{\partial z_k} \Big|_p + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \Big|_p, \quad \frac{\partial}{\partial y_k} \Big|_p = i \frac{\partial}{\partial z_k} \Big|_p + i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \Big|_p,$$

luego las proyecciones de las extensiones son $\partial_{z_k}|_p, i\partial_{z_k}|_p$, que forman una base de $T_p^h(V)$ como \mathbb{R} -espacio vectorial. Por lo tanto, la composición es un isomorfismo. ■

A partir de aquí identificaremos $T_p(V)$ con $T_p^h(V)$. Conviene recordar que, tal y como acabamos de ver, las derivaciones $\partial_{x_k}|_p, \partial_{y_k}|_p$ se corresponden a través de esta identificación con $\partial_{z_k}|_p, i\partial_{z_k}|_p$.

En particular, si V es un abierto en \mathbb{C}^n , la identificación canónica del espacio tangente real $T_p(V)$ con \mathbb{R}^{2n} puede verse ahora como una identificación del espacio tangente holomorfo con \mathbb{C}^n .

Explícitamente, si z es la carta identidad, cada $v \in T_p(V)$ se identifica con

$$(v(x^1), v(y^1), \dots, v(x^n), v(y^n)) \in \mathbb{R}^{2n},$$

que a su vez se identifica con $(v(x^1) + iv(y^1), \dots, v(x^n) + iv(y^n)) \in \mathbb{C}^n$, que a su vez no es sino $(v(z^1), \dots, v(z^n))$.

Si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación holomorfa entre variedades analíticas y $p \in V$, entonces la diferencial $df|_p$ se restringe a una aplicación \mathbb{C} -lineal $df|_p : T_p(V) \rightarrow T_{f(p)}(W)$, definida igualmente como $df|_p(v)(g) = v(f \circ g)$, que se corresponde con la diferencial real —que es \mathbb{C} -lineal por la holomorfía de f — a través de la identificación de los espacios tangentes holomorfos con los reales.

En efecto, si $v \in T_p(V)$ y $g \in C_{f(p)}^\infty(W)$ es antiholomorfa, es claro que $f \circ g$ también lo es, luego $df|_p(v)(g) = v(f \circ g) = 0$, y así $df|_p(v) \in T_p(W)$. Por otra parte, si g es holomorfa, entonces

$$df|_p(v)(g) = v(f \circ g) = v(f \circ \operatorname{Re} g) + iv(v \circ \operatorname{Im} g) = df|_p(\operatorname{Re} g) + i df|_p(\operatorname{Im} g),$$

que es la extensión a $T_p(V, \mathbb{C})$ de la diferencial $df|_p$ en el sentido real.

Finalmente, si $f \in C_p^\infty(V, \mathbb{C})$, la diferencial $df|_p : T_p(V, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ se restringe a una aplicación \mathbb{C} -lineal $df|_p : T_p(V) \rightarrow \mathbb{C}$ y, por otra parte tenemos definida $df|_p : T_p(V) \rightarrow T_{f(p)}(\mathbb{C})$. También se comprueba fácilmente que ambas aplicaciones se corresponden a través de la identificación entre \mathbb{C} y $T_{f(p)}(\mathbb{C})$.

Con esto tenemos probado que podemos manipular los espacios tangentes holomorfos con las mismas reglas formales válidas para los espacios tangentes de las variedades diferenciales.

A.6 Subvariedades analíticas

Aquí demostraremos que la teoría básica sobre subvariedades de una variedad diferencial se traduce formalmente a resultados análogos para variedades analíticas. El punto de partida es el teorema de la función inversa:

Teorema A.40 (Teorema de la función inversa) *Sea $\phi : V \rightarrow W$ una función holomorfa entre variedades analíticas y sea $p \in V$ un punto tal que la diferencial $d\phi_p : T_p(V) \rightarrow T_{\phi(p)}(W)$ es un isomorfismo. Entonces existe un entorno U de p en V tal que $\phi[U]$ es abierto en W y $\phi|_U : U \rightarrow \phi[U]$ es biholomorfa.*

DEMOSTRACIÓN: Notemos que ambas variedades han de tener la misma dimensión n . Sea $z : U' \rightarrow \tilde{U}'$ una carta alrededor de p y $w : U'' \rightarrow \tilde{U}''$ una carta alrededor de $\phi(p)$ de modo que $f[U'] \subset U''$. Entonces la lectura $z^{-1} \circ f \circ w : \tilde{U}' \rightarrow \tilde{U}''$ es una aplicación diferenciable entre dos abiertos de \mathbb{C}^n cuya diferencial en $z(p)$ es un isomorfismo.

Por el teorema 1.12 existe un entorno G de $z(p)$ tal que $(z^{-1} \circ f \circ w)[G]$ es abierto en \mathbb{C}^n y la restricción de $z^{-1} \circ f \circ w$ es biholomorfa. Basta tomar $U = z^{-1}[G]$. ■

Ahora trasladamos la definición [GD 2.11] de subvariedad en el caso real:

Definición A.41 Diremos que una variedad analítica W es una *subvariedad* de una variedad analítica V si $W \subset V$, la topología de W es la inducida desde V , la inclusión $i : W \rightarrow V$ es holomorfa y, para cada $p \in W$, la diferencial $di_p : T_p W \rightarrow T_p V$ es inyectiva.

En estas condiciones podemos identificar a $T_p W$ con un subespacio de $T_p V$. Es claro que un abierto U en una variedad analítica V es una subvariedad (con la estructura diferencial que resulta de restringir las cartas) pues la inclusión es holomorfa (su lectura en una carta de V y su restricción a U es la identidad) y la diferencial de la inclusión es inyectiva (su matriz jacobiana en las cartas indicadas es la identidad). De hecho, podemos identificar $T_p U = T_p V$.

Ahora vamos a relacionar la geometría de una variedad y la de sus subvariedades, para lo cual necesitamos algunos resultados algebraicos sobre diferenciales:

Definición A.42 Sea V una variedad analítica. Diremos que un conjunto de funciones $z^1, \dots, z^m \in \mathcal{H}_p(V)$ es *independiente* en p si $dz^1|_p, \dots, dz^m|_p$ son linealmente independientes en $T_p^*(V)$.

Obviamente, las funciones coordenadas de una carta son siempre funciones independientes. Recíprocamente tenemos el teorema siguiente:

Teorema A.43 Sea V una variedad analítica de dimensión n y w^1, \dots, w^n un conjunto de n funciones independientes en un punto $p \in V$. Entonces w^1, \dots, w^n forman un sistema de coordenadas alrededor de p .

DEMOSTRACIÓN: Sea U un entorno de p en el que estén definidas todas las funciones w^i . Definimos $w : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ mediante $w(q) = (w^1(q), \dots, w^n(q))$. Claramente w es holomorfa.

Llamemos z^1, \dots, z^n a las proyecciones en \mathbb{C}^n , es decir, a las funciones coordenadas correspondientes a la carta identidad. Consideremos la codiferencial $dw_p^* : T_{w(p)}^*(\mathbb{C}^n) \rightarrow T_p^*(V)$. Tenemos que

$$dw_p^*(dz^i|_{w(p)}) = dw|_p \circ dz^i|_{w(p)} = dw^i|_p.$$

Así pues, dw_p^* transforma la base $dz^i|_{w(p)}$ de $T_{w(p)}^*(\mathbb{C}^n)$ en la base $dw^i|_p$ de $T_p^*(V)$. Por consiguiente dw_p^* es un isomorfismo, luego también lo es dw_p . Por el teorema de la función inversa A.40, la función w se restringe a una aplicación biholomorfa en un entorno de p , es decir, a una carta. ■

Un poco más en general tenemos:

Teorema A.44 Sea V una variedad analítica de dimensión n y w^1, \dots, w^m un conjunto de $m \leq n$ funciones independientes en un punto $p \in V$. Entonces w^1, \dots, w^m forman parte de un sistema de coordenadas alrededor de p .

DEMOSTRACIÓN: Sea z una carta alrededor de p . Entonces $dw^1|_p, \dots, dw^m|_p$ puede completarse hasta una base de $T_p^*(V)$ mediante algunas de las diferenciales $dz^i|_p$. Digamos que $dw^1|_p, \dots, dw^m|_p, dz^{m+1}|_p, \dots, dz^n|_p$ forman dicha base. Por el teorema anterior $w^1, \dots, w^m, z^{m+1}, \dots, z^n$ forman un sistema de coordenadas alrededor de p . ■

Con esto podemos probar un resultado notable sobre subvariedades:

Teorema A.45 Sea $\phi : V \rightarrow W$ una aplicación entre variedades y supongamos que W es una subvariedad de X . Entonces ϕ es holomorfa si y sólo si lo es como aplicación $\phi : V \rightarrow X$.

DEMOSTRACIÓN: Una implicación es obvia. Supongamos que $\phi : V \rightarrow X$ es diferenciable y tomemos un punto $p \in V$. Sea $z : U \rightarrow \tilde{U}$ una carta en X alrededor de $\phi(p)$. Consideremos la inclusión $i : W \rightarrow X$. Como $di|_{\phi(p)}$ es inyectiva, tenemos que $di^*_{\phi(p)}$ es suprayectiva, luego las formas

$$di^*_{\phi(p)}(dz^i|_{\phi(p)}) = di|_{\phi(p)} \circ dz^i|_{\phi(p)} = d(z^i|_{U \cap W})|_{\phi(p)}$$

son un sistema generador de $T^*_{\phi(p)}(W)$. Eliminando algunos de ellos obtenemos una base. Si llamamos m a la dimensión de X y n a la de W , tenemos que n de las funciones $z^i|_{U \cap W}$ son independientes en $\phi(p)$, luego por A.43 forman un sistema de coordenadas (de W) alrededor de $\phi(p)$. En otras palabras, si llamamos $\pi : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ a una cierta proyección (es decir, una aplicación que elimina las componentes adecuadas), la composición $z \circ \pi$ se restringe a una carta en W alrededor de $\phi(p)$. La lectura de ϕ (como aplicación de V en W) respecto a una carta cualquiera w alrededor de p y la carta $z \circ \pi$ alrededor de $\phi(p)$ es $w^{-1} \circ \phi \circ z \circ \pi$. Las tres primeras funciones forman una función holomorfa, pues son una lectura de ϕ como aplicación en X , y al componer con π seguimos teniendo una función holomorfa. Así pues, ϕ es holomorfa en un entorno de p , y esto vale para todo $p \in V$. ■

De aquí se sigue a su vez otro hecho relevante:

Teorema A.46 Sea V una variedad analítica y $W \subset V$. Entonces W admite a lo sumo una estructura analítica que lo convierte en subvariedad de V .

DEMOSTRACIÓN: Sean W y W' el mismo conjunto W con dos estructuras diferenciales que lo conviertan en subvariedad de V . Entonces la identidad en W es holomorfa como aplicación $W \rightarrow V$, luego también lo es como aplicación $W \rightarrow W'$, e igualmente al revés, luego la identidad es biholomorfa, lo que significa que ambas estructuras analíticas son la misma. ■

Una prueba alternativa es la siguiente: si $W \subset V$ es una subvariedad, $p \in W$ y $z : U \rightarrow U' \subset \mathbb{C}^n$ es una carta en W alrededor de p , entonces $z^{-1} : U' \rightarrow V$ es un homeomorfismo en su imagen, es holomorfa como aplicación en U y, por consiguiente, también holomorfa como aplicación en V . Además, $dz^{-1}|_q$ ha de ser inyectiva, para todo punto $q \in U'$.

Recíprocamente, si U' es un abierto en \mathbb{C}^n y $\phi : U' \rightarrow W$ es un homeomorfismo en un abierto U de W , holomorfa como aplicación en V y $d\phi_q$ es inyectiva en todo punto, entonces también es holomorfa como aplicación en W y por el teorema de la función inversa es biholomorfa, luego ϕ^{-1} es una carta de W .

En resumen, si W es una subvariedad de V , entonces las cartas de W son necesariamente las inversas de los homeomorfismos entre abiertos de \mathbb{C}^n y abiertos de W que son holomorfos como aplicaciones en V y cuya diferencial tiene rango n en cada punto. Todo esto no depende de la estructura analítica de W , luego no hay más que una estructura analítica posible en W .

Definición A.47 Un subconjunto W de una variedad analítica V es *analítico* alrededor de un punto $p \in W$ (o que p es un *punto analítico* de W respecto de V) si p tiene un entorno en W que admite estructura de subvariedad de V .

Teorema A.48 *Un subconjunto W de una variedad analítica V es analítico alrededor de un punto p si y sólo si existe un homeomorfismo $z : U \rightarrow U'$ entre un abierto $U \subset W$, $p \in U$, y un abierto $U' \subset \mathbb{C}^n$ tal que $z^{-1} : U' \rightarrow V$ sea holomorfa y dz_q^{-1} sea inyectiva para todo $q \in U'$.*

DEMOSTRACIÓN: Una implicación ya está probada. Si existe z en estas condiciones, entonces U es una variedad analítica con z como única carta. Además es una subvariedad de V , pues la lectura de la inclusión $i : U \rightarrow V$ respecto a z y una carta w en V alrededor de un punto $q \in U$ es $z^{-1} \circ w$, que es composición de dos funciones holomorfas, luego i es holomorfa. Además di_q es composición del isomorfismo $dz_q : T_q U \rightarrow T_{z(q)} U'$ con el monomorfismo $dz_{z(q)}^{-1} : T_{z(q)} U' \rightarrow T_q V$, luego es inyectiva. ■

Así hemos reducido el problema de si un subconjunto W de una variedad V admite o no estructura de subvariedad a un problema local. El teorema siguiente muestra que el carácter analítico local en cada punto equivale al carácter analítico global del conjunto:

Teorema A.49 *Un subconjunto W de una variedad analítica V admite estructura de subvariedad de V si y sólo si es analítico alrededor de cada uno de sus puntos.*

DEMOSTRACIÓN: Una implicación es obvia. Si W es analítico alrededor de cada uno de sus puntos, entonces alrededor de cada punto $p \in W$ existe un abierto con una carta respecto a la única estructura analítica posible en el abierto. Basta ver que dos cartas cualesquiera son compatibles entre sí. Si $z_i : U_i \rightarrow U'_i$ son dos cartas de dos abiertos en W con $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, entonces las restricciones $z_i|_{U_1 \cap U_2}$ son dos cartas para las dos estructuras analíticas que hereda la intersección. Por la unicidad han de ser compatibles, pero esto implica que z_1 y z_2 son compatibles. ■

Veamos otra aplicación de A.43:

Teorema A.50 *Sea W una subvariedad de dimensión m una variedad analítica V de dimensión n y sea $z : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ una carta de V alrededor de un punto $p \in W$. Entonces, de entre las funciones coordenadas z^1, \dots, z^n , es posible seleccionar m de ellas cuyas restricciones a un entorno de p en W forman una carta de W alrededor de p .*

DEMOSTRACIÓN: Sea $i : W \rightarrow V$ la inclusión, de modo que la diferencial $di_p : T_p(W) \rightarrow T_p(V)$ es inyectiva. La aplicación dual $di_p^* : T_p^*(V) \rightarrow T_p^*(W)$ es suprayectiva y transforma cada $dz^i|_p$ en $d(z^i|_{U \cap W})_p$, luego m de estas diferenciales forman una base de $T_p^*(W)$, luego las correspondientes m funciones $z^i|_{U \cap W}$ son independientes, luego forman una carta de W en un entorno de p . ■

Las subvariedades de \mathbb{C}^n son los conjuntos que pueden expresarse localmente como gráficas de funciones holomorfas. Concretamente:

Teorema A.51 *Un conjunto no vacío $V \subset \mathbb{C}^n$ es una subvariedad de dimensión d si y sólo si para cada $p \in V$ existen abiertos $U \subset \mathbb{C}^n$, $U' \subset \mathbb{C}^d$ y una función holomorfa $h : U' \rightarrow \mathbb{C}^{n-d}$ de modo que*

$$V \cap U = \{(z_1, \dots, z_d, h(z_1, \dots, z_d)) \mid (z_1, \dots, z_d) \in U'\}$$

(donde las componentes de h deben ser intercaladas en posiciones adecuadas que dependen de p , no necesariamente al final).

DEMOSTRACIÓN: Si se cumple esta condición, consideramos la función $f : U' \rightarrow V \cap U$ dada por

$$f(z_1, \dots, z_d) = (z_1, \dots, z_d, h(z_1, \dots, z_d))$$

(con las componentes de h intercaladas adecuadamente). Claramente es una función holomorfa (considerada con imagen en \mathbb{C}^n), obviamente inyectiva, luego biyectiva, y su inversa es continua, pues es la proyección de d componentes adecuadas. Por lo tanto, es un homeomorfismo entre U' y $V \cap U$. Además, $df|_p$ es inyectiva, ya que su matriz contiene una submatriz identidad de orden d . El teorema A.48 aplicado a $z = f^{-1}$ implica que V es analítico alrededor de p , luego V es una subvariedad analítica de \mathbb{C}^n (de dimensión d).

Recíprocamente, si $V \subset \mathbb{C}^n$ es una subvariedad de dimensión d y $p \in V$, el teorema A.50 nos asegura que podemos elegir d funciones coordenadas (de la carta identidad en \mathbb{C}^n) y un abierto $U \subset \mathbb{C}^n$ tal que $z : U \cap W \rightarrow U' \subset \mathbb{C}^d$ dada por $z(p) = (z^{i_1}(p), \dots, z^{i_d}(p))$ es una carta de W . Su inversa será de la forma

$$(z_1, \dots, z_d) \mapsto (z_1, \dots, z_d, h(z_1, \dots, z_d)),$$

para cierta función holomorfa $h : U' \rightarrow \mathbb{C}^{n-d}$ (donde las componentes de h deben intercalarse adecuadamente). ■

Hipersuperficies en \mathbb{C}^n Como aplicación de los resultados anteriores presentamos una familia sencilla de subvariedades analíticas de \mathbb{C}^n :

Teorema A.52 *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$, con $n \geq 2$, y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una aplicación holomorfa. Sea $V = f^{-1}[0]$ y supongamos que, para todo $p \in V$ existe un índice k tal que $\partial_{z_k} f|_p \neq 0$. Entonces V es una subvariedad analítica de \mathbb{C}^n de dimensión $n - 1$. Además, podemos identificar $T_p(V)$ con el subconjunto de \mathbb{C}^n formado por los puntos que cumplen la ecuación*

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} \Big|_p (z_1 - p_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial z_n} \Big|_p (z_n - p_n) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Dado $p \in V$, supongamos, por concretar, que $\partial_{z_n} f|_p \neq 0$. El teorema de la función implícita 1.14 nos da que existen abiertos $p \in U_0 \subset U$ y $(p_1, \dots, p_{n-1}) \in W \subset \mathbb{C}^{n-1}$ y una función holomorfa $h : W \rightarrow \mathbb{C}$ de modo que

$$V \cap U_0 = \{(z, g(z)) \mid z \in W\}.$$

Por el teorema anterior, concluimos que V es una subvariedad analítica de \mathbb{C}^n de dimensión $n - 1$.

Sea $i : V \rightarrow \mathbb{C}^n$ la inclusión. Una carta alrededor de p es la proyección en las $n - 1$ primeras componentes, luego $T_p(V) = \langle \partial_{z_1}|_p, \dots, \partial_{z_{n-1}}|_p \rangle$, que se identifica con su imagen por $di|_p$. Ahora observamos que, si $1 \leq k, l \leq n - 1$,

$$di|_p(\partial_{z_k}|_p)(z^l) = \frac{\partial z^l}{\partial z_k} \Big|_p = \delta_k^l,$$

porque $i \circ z^l$ es la función coordenada z^l , pero z^n no es una coordenada de V . Como $f(z_1, \dots, z_n) = 0$ en V , derivando resulta que

$$\sum_{l=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_l} \Big|_p \frac{\partial z^l}{\partial z_k} \Big|_p = 0,$$

lo que se reduce a que

$$\frac{\partial f}{\partial z_k} \Big|_p + \frac{\partial f}{\partial z_n} \Big|_p \frac{\partial z^n}{\partial z_k} \Big|_p = 0,$$

donde z^n es $i \circ z^n$. Por lo tanto

$$di|_p(\partial_{z_k}|_p)(z^n) = -\frac{\partial_{z_k} f|_p}{\partial_{z_n} f|_p}.$$

Así pues, $di|_p(\partial_{z_k}|_p)$ se identifica con el vector

$$(0, \dots, 1, \dots, 0, -\partial_{z_k} f|_p / \partial_{z_n} f|_p) \in \mathbb{C}^n,$$

que satisface la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} \Big|_p z_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial z_n} \Big|_p z_n = 0.$$

Como esta ecuación determina un subespacio vectorial de dimensión $n - 1$ que contiene a $T_p(V)$, concluimos que se da la igualdad, y $T_p(V)$ está formado exactamente por los vectores que cumplen esta ecuación. La ecuación del enunciado es en realidad la de $p + T_p(V)$, que es otra forma natural de representar el espacio tangente abstracto. ■

Ejemplo Consideremos el conjunto

$$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1^2 + z_2^2 = 1\}.$$

Si en lugar de \mathbb{C}^2 hubiéramos escrito \mathbb{R}^2 , tendríamos una circunferencia, pero al considerar las soluciones complejas de la ecuación estamos añadiendo muchos más puntos. De hecho, el teorema anterior implica que se trata de una variedad analítica de dimensión 1, luego como variedad diferencial (real) es una superficie. En el ejemplo siguiente la describiremos geoméricamente. De momento señalemos como ilustración que, por ejemplo, su recta tangente en el punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ viene dada por la ecuación

$$\sqrt{2}(z_1 - \sqrt{2}/2) + \sqrt{2}(z_2 - \sqrt{2}/2) = 0,$$

que se simplifica hasta $z_1 + z_2 = \sqrt{2}$. ■

Hipersuperficies en $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ Veamos otro ejemplo de interés:

Teorema A.53 *Sea $F : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa homogénea de grado $m \in \mathbb{Z}$, es decir, tal que, para todo $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ y todo $\lambda \in \mathbb{C}$ no nulo, se cumpla la relación $F(\lambda z) = \lambda^m F(z)$. Sea $V = \{[z] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \mid F(z) = 0\}$ y supongamos que, para todo $p = [z] \in V$ existe un índice k tal que $\partial_{z_k} F|_z \neq 0$. Entonces V es una subvariedad analítica de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de dimensión $n - 1$.*

DEMOSTRACIÓN: Observemos que si $p = [z] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, cualquier otro sistema de coordenadas homogéneas para p es de la forma λz , con $\lambda \neq 0$, por lo que las condiciones $F(z) = 0$ y $F(\lambda z) = \lambda^m F(z) = 0$ son equivalentes, luego la pertenencia a V puede determinarse con cualquier elección de coordenadas homogéneas para un punto dado.

Antes de entrar en la prueba conviene hacer una observación general: si $[z] \in V$, consideramos la función

$$g(\lambda) = F(\lambda z) = \lambda^m F(z) = 0,$$

que es idénticamente nula, pero si la derivamos por la regla de la cadena resulta que

$$\frac{dg}{d\lambda} = \sum_{k=0}^n \frac{\partial F}{\partial z_k} \Big|_{\lambda z} z_k = 0,$$

y en particular, para $\lambda = 1$, resulta que

$$\sum_{k=0}^n \frac{\partial F}{\partial z_k} \Big|_z z_k = 0.$$

Pasamos ya a la demostración, para lo cual tomamos un punto $p \in V$. Por ejemplo, podemos suponer que está en el abierto coordenado A_0 formado por los puntos con primera coordenada homogénea no nula, sobre el cual está definida la carta $p_0 : A_0 \rightarrow \mathbb{C}^n$ dada por $p_0(z_0, \dots, z_n) = (z_1/z_0, \dots, z_n/z_0)$. Basta probar que $V \cap A_0$ es analítico alrededor de p , lo cual a su vez equivale a que $V_0 = p[V \cap A_0]$ sea analítico alrededor de $p_0(p)$. De hecho, vamos a probar que lo es alrededor de cualquiera de sus puntos.

Para ello observamos que $V_0 = \{z \in \mathbb{C}^n \mid f(z) = 0\}$, donde $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es la función holomorfa dada por $f(z) = F(1, z)$. Por el teorema A.52, basta probar que, para cada punto $z = (z_1, \dots, z_n) \in V_0$, existe un índice $k = 1, \dots, n$ tal que $\partial_{z_k} f|_z \neq 0$.

En caso contrario, llamando $\bar{z} = (1, z_1, \dots, z_n) \in V$, es claro que $\partial_{z_k} F|_{\bar{z}} = 0$ para $k = 1, \dots, n$ y, por la fórmula que hemos probado previamente, tendríamos también que $\partial_{z_0} F|_{\bar{z}} = 0$, en contradicción con la hipótesis del teorema. ■

En las condiciones del teorema anterior, si $p = [a] \in A_k$, podemos identificar el espacio tangente $T_p(V)$ con un hiperplano afín de \mathbb{C}^n , el cual, identificado con un subconjunto de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ a través de la carta p_k , se extiende a un único hiperplano proyectivo. Vamos a probar que su ecuación es

$$\sum_{k=0}^n \frac{\partial F}{\partial z_k} \Big|_a z_k = 0.$$

En efecto, si suponemos, por concretar, que $p \in A_0$, en las condiciones de la prueba del teorema anterior, el teorema A.52 nos da que $T_p(V)$ se identifica con la hipersuperficie formada por los puntos $z \in \mathbb{C}^n$ que cumplen la ecuación

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_k} \Big|_{(a_1/a_0, \dots, a_n/a_0)} (z_k - a_k) = 0,$$

que equivale a

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial z_k} \Big|_{(1, a_1/a_0, \dots, a_n/a_0)} z_k - \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial z_k} \Big|_{(1, a_1/a_0, \dots, a_n/a_0)} a_k = 0,$$

pero también hemos visto en la prueba que el último término del miembro izquierdo es $\partial_{z_0} F|_{(1, a_1/a_0, \dots, a_n/a_0)} a_0$, luego, llamando $z_0 = 1$, la ecuación equivale a

$$\sum_{k=0}^n \frac{\partial F}{\partial z_k} \Big|_{(1, a_1/a_0, \dots, a_n/a_0)} z_k = 0.$$

De la propia definición de derivada parcial se sigue que las derivadas de F son homogéneas (de grado $m - 1$), por lo que la ecuación anterior equivale a la ecuación anunciada. Si identificamos $z \in \mathbb{C}^n$ con el punto $[1, z_1, \dots, z_n] \in A_0$, la ecuación la cumple cualquier asignación de coordenadas homogéneas (entendiendo que sólo los puntos con $z_0 \neq 0$ pertenecen al espacio tangente en el sentido de la geometría diferencial).

Ejemplo: Circunferencias proyectivas Consideremos ahora

$$V = \{[z_0, z_1, z_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid z_1^2 + z_2^2 - z_0^2 = 0\}.$$

Por el teorema anterior es inmediato que se trata de una curva analítica (curva porque tiene dimensión 1 como subvariedad analítica de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, pero

topológicamente es una superficie). Además, $V_0 = V \cap A_0$ es la misma curva afín del ejemplo precedente. Los únicos puntos de V que no están en V_0 son los que cumplen $z_0 = 0$, es decir, los que cumplen

$$(z_1 + z_2i)(z_1 - z_2i) = 0,$$

y esta ecuación sólo tiene dos soluciones en $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, a saber, los puntos $[0, \pm i, 1]$.

Veamos un ejemplo del interés de añadir estos puntos a V_0 . Para ello consideremos la inversa de la proyección estereográfica, es decir, para cada punto $(w_1, 0) \in \mathbb{C}^2$ consideramos la recta que lo une con $(0, 1)$, formada por los puntos de la forma $(0, 1) + \lambda(w_1, -1) = (\lambda w_1, 1 - \lambda)$. Los puntos de esta recta que están sobre la circunferencia compleja cumplen $\lambda^2 w_1^2 + (1 - \lambda)^2 = 1$, o, equivalentemente,

$$(w_1^2 + 1)\lambda^2 - 2\lambda = 0.$$

La solución $\lambda = 0$ corresponde al punto $(0, 1)$, y la otra es $\lambda = 2/(w_1^2 + 1)$, que corresponde al punto

$$f(w_1) = \left(\frac{2w_1}{w_1^2 + 1}, \frac{w_1^2 - 1}{w_1^2 + 1} \right)$$

Ésta es la fórmula habitual para la inversa de la proyección estereográfica, que es correcta en el caso real, pero si w_1 varía en \mathbb{C} , vemos que no está definida en dos puntos, concretamente en $w_1 = \pm i$. Este inconveniente desaparece si consideramos la curva proyectiva V , pues entonces tenemos $f : \mathbb{C} \rightarrow V$ dada por

$$f(w_1) = [w_1^2 + 1, 2w_1, w_1^2 - 1].$$

Es claro que $f(w_1)$ cumple la ecuación $z_1^2 + z_2^2 - z_0^2 = 0$ que define a V , y ahora los puntos $\pm i$ no son problemáticos, pues $f(\pm i) = [0, \pm 2i, -2] = [0, \pm i, 1]$. Así, los dos puntos de \mathbb{C} que se quedaban sin imagen por f eran precisamente los puntos a los que les corresponden como imagen los dos puntos infinitos de V . Ahora, por construcción f biyecta \mathbb{C} con $V \setminus \{[1, 0, 1]\}$. Esta excepción desaparece si extendemos f a una aplicación $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow V$ mediante

$$f([w_0, w_1]) = [w_0^2 + w_1^2, 2w_0w_1, w_1^2 - w_0^2].$$

Así, la imagen de los puntos de la forma $[1, w_1]$ es la misma de antes, y el punto infinito cumple $f([0, 1]) = [1, 0, 1]$, es decir, el punto infinito se corresponde con el punto que hemos usado para definir la proyección.

Concluimos que f es biyectiva, y como $F : \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ dada por $F(w_0, w_1) = (w_0^2 + w_1^2, 2w_0w_1, w_1^2 - w_0^2)$ es obviamente holomorfa, usando que las proyecciones $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ y $\mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ son localmente biholomorfas, se concluye inmediatamente que $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ es holomorfa, y como V es una subvariedad, el teorema A.45 implica que también lo es $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow V$.

Ahora podemos razonar que una biyección holomorfa entre variedades analíticas de dimensión 1 es necesariamente biholomorfa, aunque también podemos construir explícitamente su inversa, que es simplemente

$$\pi(z_0, z_1, z_2) = [z_0 - z_2, z_1] = [-z_1, z_0 + z_2],$$

donde hemos usado que

$$[z_0 - z_2, z_1] = [(z_0 - z_2)(z_0 + z_2), z_1(z_0 + z_2)] = [-z_1^2, z_1(z_0 + z_2)] = [-z_1, z_0 + z_2].$$

Notemos que las dos definiciones de π son válidas sobre dos abiertos distintos de V (donde no se anulan simultáneamente las dos coordenadas homogéneas), los cuales cubren V y ambas coinciden en la intersección de sus dominios, por lo que π está bien definida.

Concluimos que la circunferencia proyectiva compleja es biholomorfa (en particular homeomorfa) a la recta proyectiva compleja (la esfera de Riemann \mathbb{C}^∞ , luego topológicamente es una esfera, y una aplicación biholomorfa entre ambas es la proyección estereográfica.

En particular, la circunferencia compleja afín es homeomorfa a una esfera menos dos puntos y biholomorfa, por ejemplo, a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

En [G 9.29] observamos que los puntos de una cónica proyectiva (no degenerada) pueden biyectarse de forma natural con los de una recta proyectiva. Este ejemplo puede generalizarse para probar que la biyección es biholomorfa. ■

Curvas elípticas En 5.30 definimos las curvas elípticas (complejas) como los conjuntos V de soluciones en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de ecuaciones de la forma

$$F(x, y, z) = 4x^3 - g_2xz^2 - g_3z^3 - zy^2 = 0,$$

donde $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ satisfacen que $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$. Allí hemos observado que, tomando como recta infinita la recta $z = 0$, una curva elíptica tiene únicamente un punto infinito, que es necesariamente $[0, 1, 0]$, y que la parte finita de la curva se identifica con la curva afín V_0 de ecuación

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3.$$

La condición $\Delta \neq 0$ equivale a que el polinomio $f(x) = 4x^3 - g_2x - g_3$ tiene tres raíces simples e_1, e_2, e_3 . A continuación demostramos dos resultados que hemos afirmado allí:

Teorema A.54 *Las curvas elípticas son subvariedades analíticas de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de dimensión 1.*

DEMOSTRACIÓN: En lugar de aplicar el teorema A.53, es más práctico aplicar A.52 a la parte afín V_0 , pues si la derivada respecto de y de la ecuación se anula en un punto, es que $y = 0$, pero entonces x es una de las raíces e_i del polinomio $f(x)$, luego $f'(e_i)$ no se anula, porque son raíces simples, y ésta es también la derivada de la ecuación en $(e_i, 0)$. Falta entonces estudiar el punto infinito p , para el cual sí que conviene usar A.53: como la ecuación homogénea cumple $\partial_z F|_p = 1$, ésta no se anula en un entorno de p , y podemos concluir que V es analítica en dicho entorno, luego, teniendo en cuenta el caso precedente, lo es en un entorno de todos sus puntos, luego es una subvariedad analítica de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. ■

Teorema A.55 *Si $R \subset \mathbb{C}$ es un retículo completo y V es la curva elíptica definida por la ecuación del teorema 5.25, la biyección $\pi : \mathbb{C}/R \rightarrow V$ dada por $\pi([z]) = (\wp(z), \wp'(z))$ (entendiendo que la clase $[0]$, que contiene los polos de \wp y \wp' , se corresponde con el punto infinito de V) es biholomorfa.*

DEMOSTRACIÓN: Por 5.31 sabemos que π es biyectiva. Obviamente se cumple que $\pi : \mathbb{C} \setminus R \rightarrow \mathbb{C}^2$ es holomorfa, porque lo son \wp y \wp' , luego por A.45 tenemos que también lo es $\pi : \mathbb{C} \setminus R \rightarrow V_0$, y a su vez lo es $\pi : \mathbb{C} \setminus R \rightarrow V$. Su expresión en coordenadas homogéneas es

$$\pi(z) = [\wp(z), \wp'(z), 1],$$

pero, en los puntos finitos donde \wp' no se anula (es decir, salvo en e_1, e_2, e_3), π admite la expresión alternativa

$$\pi(z) = [\wp(z)/\wp'(z), 1, 1/\wp'(z)].$$

Esta segunda definición es holomorfa incluso en los puntos de R , donde toma el valor $[0, 1, 0]$, porque los polos de \wp son triples y a la vez son polos dobles de \wp' , luego el cociente de la primera componente tiene un cero simple en cada punto de R . Esto prueba que $\pi : \mathbb{C} \rightarrow V$ es holomorfa, luego también lo es $\pi : \mathbb{C}/R \rightarrow V$.

Por el teorema de la función inversa (teniendo en cuenta la nota al pie que justifica que no es necesaria la hipótesis de que la derivada de f no se anule), concluimos que π es biholomorfa. ■

Apéndice B

Funciones armónicas

Las funciones armónicas, que estudiamos con detalle en la sección [An 8.5] están muy relacionadas con las funciones holomorfas. En este apéndice obtendremos algunos resultados adicionales sobre ellas que nos permitirán, en la última sección, demostrar un resultado nada trivial sobre existencia de funciones meromorfas en superficies de Riemann.

B.1 Propiedades básicas

Recordemos de [An 5.49] la definición de función armónica:

Definición B.1 Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto no vacío, una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es *armónica* si es de clase C^2 y cumple la *ecuación de Laplace*:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0.$$

Llamamos $H(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones armónicas en Ω .

Según observamos al principio de la sección [An 8.5], el conjunto $H(\Omega)$ tiene estructura natural de espacio vectorial, pero no es un álgebra, pues el producto de dos funciones armónicas no es necesariamente una función armónica.

Uno de los resultados fundamentales sobre funciones armónicas es que cumplen el teorema del valor medio de Gauss [An 8.12]:

Teorema B.2 (Teorema del valor medio de Gauss) Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, $f \in H(\Omega)$, $x \in \Omega$ y $r > 0$ cumple que $\bar{B}_r(x) \subset \Omega$, entonces

$$f(x) = \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x))} \int_{\partial B_r(x)} f \, d\sigma,$$

donde σ representa la medida de Lebesgue en la esfera.

El teorema [An 8.23] prueba que una función continua que cumpla este teorema del valor medio es necesariamente armónica, lo que en particular implica que es de clase C^2 , pero, de hecho, las funciones armónicas son funciones de clase C^∞ [An 8.22]. Más aún, enseguida demostraremos que las funciones armónicas son analíticas.

Para probarlo recordemos antes que el valor de una función armónica en una bola abierta puede reconstruirse a partir de los valores que toma en la esfera que la limita. Para ello se define el *núcleo de Poisson para esferas* como la función

$$P(x, y) = \frac{\|y\|^2 - \|x\|^2}{\|x - y\|^n},$$

y se demuestra [An 8.21] la generalización siguiente del teorema del valor medio de Gauss:

Teorema B.3 *Sea Ω un abierto en \mathbb{R}^n , sea $f \in H(\Omega)$, sea $x_0 \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $\bar{B}_r(x_0) \subset \Omega$. Entonces si $\|x\| < r$ se cumple*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x_0))} \int_{\|y-x_0\|=r} P(x-x_0, y-x_0) f(y) d\sigma(y).$$

Es esta fórmula la que permite probar que las funciones armónicas son de clase C^∞ , y ahora vamos a usarla para demostrar que son analíticas.

Teorema B.4 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío, sea $f \in H(\Omega)$ una función armónica y sea $a \in \Omega$. Entonces, para todo x en un entorno de a , se cumple que*

$$f(x) = \sum_{\alpha} \frac{D_{\alpha} f(a)}{\alpha!} (x-a)^{\alpha}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sólo hay que probar que f es la suma de una serie de potencias en un entorno de 0, pues por las observaciones tras la definición 2.8, una serie de potencias es necesariamente su propia serie de Taylor.

Aplicando una traslación no perdemos generalidad si suponemos que $a = 0$. Para todo $r > 0$, la función $f_r(x) = f(rx)$ es también armónica (por [An 8.16]), y es claro que si f_r admite un desarrollo en serie alrededor de 0, lo mismo es válido para f . Por lo tanto no perdemos generalidad si suponemos que f está definida en una bola abierta de radio mayor que 1.

Existe un $\delta > 0$ tal que si $z \in B_{\delta}(0) \subset \mathbb{C}^n$, $y \in \partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, entonces

$$\left| \sum_j (z_j - y_j)^2 - 1 \right| < 1.$$

En efecto, fijado $y^* \in \partial B_1(0)$, por la continuidad de la función que hay dentro del valor absoluto, existe un $\delta_{y^*} > 0$ tal que todo par $(z, y) \in B_{\delta_{y^*}}(0) \times B_{\delta_{y^*}}(y^*)$ cumple la desigualdad. Las bolas $B_{\delta_{y^*}}(y_0)$ cubren $\partial B_1(0)$, luego tomando un subcubrimiento finito y haciendo δ igual al mínimo de los δ_{y^*} correspondientes a las bolas del subcubrimiento, se cumple lo requerido.

Consideramos $P : B_\delta(0) \times \partial B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$P(z, y) = \frac{1 - \sum_j z_j^2}{\left(\sqrt{\sum_j (z_j - y_j)^2}\right)^n},$$

donde la raíz cuadrada es la rama uniforme definida en $D(1, 1) \subset \mathbb{C}$ que extiende a la raíz cuadrada real. Así P es continua y, para dada $y \in \partial B_1(0)$, la función $z \mapsto P(z, y)$ es holomorfa en $B_\delta(0)$. Por lo tanto, tenemos un desarrollo en serie

$$P(z, y) = \sum_\alpha c_\alpha(y) z^\alpha,$$

y una ligera modificación de la prueba del teorema 2.11 muestra que la serie converge absoluta y uniformemente en cada conjunto de la forma $K \times \partial B_1(0)$, con $K \subset B_\delta(0)$ compacto. Además, las funciones $c_\alpha(y) = D_\alpha P(0, y)/\alpha!$ son continuas en $\partial B_1(0)$. En particular, todo esto vale si restringimos z a la bola $B_\delta(0) \subset \mathbb{R}^n$. Notemos que entonces las funciones $c_\alpha(x)$ toman valores reales, pues se calculan a partir de las derivadas parciales (en sentido real) de

$$P(x, y) = \frac{1 - \|x\|^2}{(\sqrt{\|x - y\|^2})^n} = \frac{1 - \|x\|^2}{\|x - y\|^n}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sigma(\partial B_1(0))} \int_{\|y\|=1} P(x, y) f(y) d\sigma(y) = \\ &= \frac{1}{\sigma(\partial B_1(0))} \int_{\|y\|=1} \sum_\alpha c_\alpha(y) x^\alpha f(y) d\sigma(y) = \\ &= \sum_\alpha \frac{1}{\sigma(\partial B_1(0))} \int_{\|y\|=1} c_\alpha(y) f(y) d\sigma(y) x^\alpha, \end{aligned}$$

donde el intercambio del sumatorio y la integral se justifica por el teorema 1.18, igual que en la prueba de 2.11. ■

El teorema anterior afirma únicamente que la serie de Taylor de una función armónica f alrededor de un punto a converge a f en un entorno de a , pero no especifica cómo de grande es ese entorno. No es trivial, pero puede probarse que la serie converge en toda bola abierta de centro a contenida en el dominio de f .

Aparentemente nos encontramos con una asimetría al comparar los desarrollos en serie de potencias de las funciones holomorfas con los correspondientes a funciones armónicas, y es que las sumas parciales de una serie de potencias compleja son polinomios, luego son funciones holomorfas, mientras que, en principio las sumas parciales del desarrollo en serie de una función armónica son también polinomios, pero no necesariamente funciones armónicas. Vamos a ver que esto no es exactamente así.

Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica en un abierto tal que $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, definimos

$$P_f^m(x) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{D_\alpha f(0)}{\alpha!} X^\alpha \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n].$$

La convergencia absoluta de la serie de Taylor de f alrededor de 0 implica que podemos agrupar sus términos:

$$f(x) = \sum_{\alpha} \frac{D_\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha = \sum_{m=0}^{\infty} P_f^m(x),$$

de modo que la convergencia de la última serie es también absoluta y casi uniforme. Vamos a probar que los polinomios $P_f^m(x)$ son armónicos, pero antes conviene probar un resultado de unicidad.

Observemos que si $F = F_0 + \dots + F_m$ es la descomposición en formas de un polinomio F , entonces

$$\Delta F = \Delta F_0 + \dots + \Delta F_m,$$

donde cada ΔF_k es una forma de grado $k-2$ (o la forma nula), luego $\Delta F = 0$ si y sólo si $\Delta F_k = 0$ para todo k . Equivalentemente, un polinomio es armónico si y sólo si lo son las formas que lo componen. El teorema siguiente nos permitirá extender esta unicidad al caso de series infinitas:

Teorema B.5 Sean $\{P^m(X)\}_{m=0}^{\infty}$ y $\{Q^m(X)\}_{m=0}^{\infty}$ dos sucesiones de polinomios en $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ tales que P^m y Q^m sean formas de grado m (o la forma nula) y de modo que las series $\sum_m P^m(x)$ y $\sum_m Q^m(x)$ converjan en un entorno de 0. Si existe un $r > 0$ tal que ambas series coinciden en $B_r(0)$, entonces $P^m(X) = Q^m(X)$ para todo m .

DEMOSTRACIÓN: si $x \in \partial B_1(0)$, entonces ambas series coinciden en tx , para $|t| < r$, luego

$$\sum_m P^m(x)t^m = \sum_m Q^m(x)t^m.$$

Por la unicidad en los desarrollos en serie de Taylor de una variable, concluimos que $P^m(x) = Q^m(x)$ para todo $x \in \partial B_1(0)$, pero si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, entonces

$$P^m(x) = P^m(\|x\|(x/\|x\|)) = \|x\|^m P^m(x/\|x\|) = \|x\|^m Q^m(x/\|x\|) = Q^m(x),$$

y trivialmente también vale para $x = 0$, luego $P^m(X) = Q^m(X)$. ■

Ahora ya podemos probar:

Teorema B.6 Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto no vacío, $f \in H(\Omega)$ y $a \in \Omega$, entonces f se expresa en un entorno de a de forma única como suma

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_{f,a}^m(x-a),$$

donde cada $P_{f,a}^m(x) \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ es la forma nula o una forma armónica de grado m .

DEMOSTRACIÓN: La función $g(x) = f(x + a)$ es armónica alrededor de 0, y sabemos que admite una expresión de la forma

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_{f,a}^m(x).$$

Como la serie converge casi uniformemente, podemos derivarla término a término, luego

$$0 = \Delta g(x) = \sum_{m=2}^{\infty} \Delta P_{f,a}^m(x),$$

y cada $\Delta P_{f,a}^m$ es una forma de grado $m - 2$. Por el teorema anterior tiene que ser $\Delta P_{f,a}^m = 0$ para $m \geq 2$, y trivialmente para $m = 0, 1$. Por lo tanto, las formas $P_{f,a}^m$ son armónicas.

La unicidad de la serie es clara, pues $P_{f,a}^m(x - a)$ es necesariamente la suma de los monomios de grado m de la serie de Taylor de f alrededor de a . ■

El teorema [An 8.26] prueba que el espacio $H(\Omega)$ de las funciones armónicas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, considerado como subespacio de \mathbb{R}^Ω es cerrado respecto de la topología de la convergencia casi uniforme. En particular es cerrado en $C(\Omega)$, lo que a su vez implica que es completamente metrizable [An 10.5]. Además, las derivadas parciales son operadores continuos

$$\partial_{x_i} : H(\Omega) \longrightarrow H(\Omega).$$

Ahora probamos el análogo al teorema de Montel:

Teorema B.7 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío. Un subconjunto $A \subset H(\Omega)$ es relativamente compacto (es decir, tiene clausura compacta) si y sólo si está uniformemente acotado en todo subconjunto compacto de Ω .*

DEMOSTRACIÓN: La acotación uniforme significa que para todo $K \subset \Omega$ compacto existe un $M > 0$ tal que toda $f \in A$ cumple que $f|_K$ está acotada por M (es decir, que $|f(x)| < M$ para todo $x \in K$).

Bajo esta hipótesis basta probar que toda sucesión $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$ en A tiene una subsucesión convergente en $H(\Omega)$. En tal caso, lo mismo vale para \bar{A} , pues si $\{g_m\}_{m=0}^{\infty}$ es una sucesión en \bar{A} , podemos tomar $f_m \in A$ de manera que $d(f_m, g_m) < 1/(m + 1)$. Entonces existe $f = \lim_m f_m \in \bar{A}$, y es claro entonces que también $\lim_m g_m = f$, luego \bar{A} es compacto.

Para cada $x \in \Omega$ tomamos una bola $K = \bar{B}_r(x) \subset \Omega$ y vamos a probar que $\{f_m|_K\}_{m=0}^{\infty}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente. Por el teorema de Ascoli-Arzelà [An 3.61] basta probar que la sucesión es equicontinua.

Dados dos puntos $u, v \in \bar{B}_r(x)$, aplicando el teorema del valor medio a la función $f_m((1 - t)u + tv)$ obtenemos un punto $w \in \bar{B}_r(x)$ tal que

$$f_m(v) - f_m(u) = \nabla f_m(w) \cdot (v - u),$$

luego, por las desigualdades de Cauchy [An 8.24],

$$|f_m(v) - f_m(u)| \leq C\|v - u\|,$$

para cierta constante C que depende de r y de la cota uniforme de la sucesión en K , pero no de m . Esto implica la equicontinuidad.

Si $K \subset \Omega$ es un subconjunto compacto arbitrario, podemos cubrirlo por un número finito de bolas cerradas, $B_1, \dots, B_k \subset \Omega$, luego, tomando una subsucesión $\{f_{m_1}\}_{m_1}$ convergente en B_1 , y de ésta una subsucesión $\{f_{m_2}\}_{m_2}$ convergente en B_2 , y así sucesivamente, llegamos a una subsucesión que converge uniformemente en cada B_j luego en K .

Finalmente, consideramos la sucesión de compactos compactos

$$K_m = \{z \in \Omega \mid |z| \leq m, d(z, \partial\Omega) \geq 1/m + 1\} \subset \Omega,$$

que claramente es creciente y tiene la propiedad de que todo subconjunto compacto de Ω está contenido en uno de ellos. Sea $\{f_{m_1, k}\}_{k=0}^\infty$ una subsucesión de la sucesión dada que converja uniformemente en K_1 a una función $f^1 \in C(K_1)$, a su vez, sea $\{f_{m_2, k}\}_{k=0}^\infty$ una subsucesión de ésta que converja uniformemente en K_2 a una función $f^2 \in C(K_2)$, que necesariamente extiende a f^1 , y así sucesivamente. Entonces, la sucesión $\{f_{m_k, k}\}$ es una subsucesión de todas las anteriores, luego converge uniformemente en todo K_m a f^m , y, por consiguiente, converge casi uniformemente en Ω a una función f , que estará en $H(\Omega)$ por el teorema [An 8.26].

El recíproco es fácil de probar: si A es relativamente compacto y $K \subset \Omega$ es compacto, los abiertos básicos $\{V(0, K, m)\}_{m=1}^\infty$ para la topología de la convergencia uniforme cubren $H(\Omega)$, luego podemos tomar un subcubrimiento finito que cubra a A . El máximo m que aparezca en el subcubrimiento es una cota uniforme de A en K . ■

En particular, los subconjuntos compactos de $H(\Omega)$ son los subconjuntos cerrados y uniformemente acotados en cada compacto de Ω . Veamos una consecuencia que necesitaremos más adelante:

Teorema B.8 (Teorema de Harnack) *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto conexo no vacío y sea $\{f_m\}_{m=0}^\infty$ una sucesión monótona creciente de funciones armónicas en Ω . Entonces $\{f_m\}_{m=0}^\infty$ converge casi uniformemente en Ω a una función armónica o bien a $+\infty$.*

DEMOSTRACIÓN: La convergencia casi uniforme a $+\infty$ hay que entenderla como que, para todo compacto $K \subset \Omega$ y cada $M > 0$ existe un m_0 tal que si $m \geq m_0$ se cumple $|f_m(x)| \geq M$ para todo $x \in K$.

Podemos suponer que $f_0 \geq 0$, o de lo contrario razonamos con la sucesión $\{f_m - f_0\}_{m=0}^\infty$. Sea $f : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ la función dada por $f(x) = \sup_m f_m(x)$ y consideremos los conjuntos

$$A = \{x \in \Omega \mid f(x) = +\infty\}, \quad B = \{x \in \Omega \mid f(x) < +\infty\}.$$

Vamos a probar que ambos son abiertos, con lo que uno de ellos coincidirá con Ω . Sea $a \in \Omega$ y tomemos $R > 0$ tal que la bola cerrada $\bar{B}_R(a) \subset \Omega$. Si $\|x - a\| = r < R$, tenemos que

$$f_m(x) = \frac{1}{\sigma(\partial B_R(a))} \int_{\|y-a\|=R} \frac{R^2 - r^2}{\|x - y\|^n} f_m(y) d\sigma(y).$$

Claramente $R - r \leq \|x - y\| \leq R + r$, luego

$$\frac{R - r}{(R + r)^{n-1}} = \frac{R^2 - r^2}{(R + r)^n} \leq \frac{R^2 - r^2}{\|x - y\|^n} \leq \frac{R^2 - r^2}{(R - r)^n} = \frac{R + r}{(R - r)^{n-1}}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \frac{R - r}{\sigma(\partial B_R(a))(R + r)^{n-1}} \int_{\|y-a\|=R} f_m(y) d\sigma(y) \leq f_m(x) \\ & \leq \frac{R + r}{\sigma(\partial B_R(a))(R + r)^{n-1}} \int_{\|y-a\|=R} f_m(y) d\sigma(y), \end{aligned}$$

y por la propiedad del valor medio

$$\frac{R - r}{(R + r)^{n-1}} f_m(a) \leq f_m(x) \leq \frac{R + r}{(R - r)^{n-1}} f_m(a).$$

Por consiguiente, si $\{f_m(a)\}_{m=0}^\infty$ tiende a $+\infty$ o converge, lo mismo le sucede a $\{f_m(x)\}_{m=0}^\infty$, luego $B_R(a) \subset A$ o $B_R(a) \subset B$ según el caso.

Con esto hemos probado que $\Omega = A$ o bien $\Omega = B$. Supongamos en primer lugar que $\Omega = A$ y, con la misma notación precedente tomemos $0 < r < r' < R$, de modo que

$$C = \frac{R - r'}{(R + r')^{n-1}} \leq \frac{R - r}{(R + r)^{n-1}}$$

(porque la derivada de la función $h(t) = \frac{R-t}{(R+t)^{n-1}}$ es negativa en $]0, R[$, por lo que es decreciente), y así todo $x \in B_{r'}(a)$ cumple $Cf_m(a) \leq f_m(x)$, de donde se sigue que $\{f_m\}_{m=0}^\infty$ converge uniformemente a $+\infty$ en $B_{r'}(a)$. Como cada compacto $K \subset \Omega$ puede cubrirse con un número finito de discos $B_{r'}(a)$, concluimos que lo mismo vale para K , luego la sucesión converge casi uniformemente a $+\infty$.

En el caso $\Omega = B$ consideramos

$$\frac{R + r}{(R - r)^{n-1}} \leq \frac{R + r'}{(R - r')^{n-1}} = C$$

y deducimos $f_m(x) \leq Cf_m(a)$, por lo que $\{f_m\}_{m=0}^\infty$ está acotada en $B_{r'}(a)$. Como todo compacto $K \subset \Omega$ puede cubrirse por un número finito de discos de este tipo, resulta que la sucesión está uniformemente acotada en K , luego por el teorema anterior tiene una subsucesión que converge casi uniformemente a una función $f \in H(\Omega)$, pero la monotonía de $\{f_m\}_{m=0}^\infty$ implica que toda la sucesión converge. ■

Recordemos finalmente que [An 8.18] prueba que si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto distinto de \emptyset y de \mathbb{R}^n , cada función continua $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tiene a lo sumo una extensión continua a $\bar{\Omega}$ que sea armónica en Ω . El problema de si existe tal función es lo que se conoce como el problema de Dirichlet para Ω (y f).

El teorema [An 8.20] afirma que el problema de Dirichlet siempre tiene solución sobre una bola abierta, pero para demostrar el teorema de existencia de funciones meromorfas que nos proponemos demostrar necesitaremos resolver el problema de Dirichlet en abiertos más generales, y para ello necesitamos estudiar las funciones subarmónicas, a lo que dedicamos la sección siguiente.

B.2 Funciones subarmónicas

En la sección [An 8.5] vimos que las funciones armónicas en dimensión $n = 1$ no son sino las rectas, y que las propiedades básicas de las funciones armónicas en dimensión n pueden verse como generalizaciones de las propiedades elementales de las rectas. En esta misma línea, consideramos ahora el hecho de que una función de una variable es convexa (resp. cóncava) si en cualquier intervalo en el que está definida es menor (resp. mayor) que la recta que coincide con ella en los extremos. Si generalizamos estos conceptos al caso de funciones de varias variables usando igualmente el concepto de “recta”, obtenemos las definiciones usuales de concavidad y convexidad en varias variables, pero si sustituimos las rectas por funciones armónicas obtenemos las funciones subarmónicas y superarmónicas que definimos a continuación:

Definición B.9 Sea Ω un abierto en \mathbb{R}^n . Una función continua $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es *subarmónica* (*superarmónica*) si para toda bola cerrada $B \subset \Omega$ se cumple que $f|_B \leq h$ ($f|_B \geq h$), donde h es la solución del problema de Dirichlet para B que coincide con f en la frontera.

Es inmediato que una función es armónica si y sólo si es subarmónica y superarmónica al mismo tiempo, así como que una función f es subarmónica si y sólo si $-f$ es superarmónica, y viceversa. Esto hace que todo teorema sobre funciones subarmónicas se traduzca inmediatamente a otro análogo sobre funciones superarmónicas. Por lo tanto en lo sucesivo consideraremos únicamente funciones subarmónicas.

También es inmediato que una función de una variable es subarmónica (resp. superarmónica) si y sólo si es convexa (resp. cóncava).

No exigimos que las funciones subarmónicas y superarmónicas sean derivables, pero si son al menos de clase C^2 pueden ser caracterizadas en términos de su laplaciano (al igual que las funciones convexas pueden caracterizarse en términos de su segunda derivada):

Teorema B.10 Sea f una función real de clase C^2 en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Entonces f es subarmónica si y sólo si $\Delta f \geq 0$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\Delta f \geq 0$ y tomemos una bola cerrada B de centro x_0 contenida en Ω . Sea h la solución del problema de Dirichlet para B que coincide con f en ∂B . Hemos de probar que $f \leq h$, equivalentemente, que $f|_B - h \leq 0$. Por continuidad y compacidad $f|_B - h$ ha de tomar un valor máximo en la clausura de B . Si éste es positivo lo tomará en un punto $x_1 \in B$ (pues en la frontera f coincide con h). Tomando $c > 0$ suficientemente pequeño, la función

$$\phi(x) = c\|x - x_0\|^2 + f(x) - h(x)$$

cumple $\phi(x_1) > \phi(x)$ para todo $x \in \partial B$. En efecto, si $x \in \partial B$ se cumple $\phi(x) = cr^2$, luego basta tomar $c > 0$ de modo que $cr^2 < f(x_1) - h(x_1)$.

De nuevo por continuidad y compacidad, ϕ tomará su valor máximo en un punto de la clausura de B , pero según lo dicho ha de ser en realidad un punto interior $x_2 \in B$. La función que resulta de fijar todas las variables de ϕ menos la i -ésima tiene un máximo en $(x_2)_i$, luego¹

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2}(x_2) \leq 0.$$

Sumando las derivadas obtenemos que

$$0 \geq \Delta \phi(x_2) = 2nc + \Delta f(x_2) - \Delta h(x_2) = 2nc + \Delta f(x_2),$$

luego $\Delta f(x_2) \leq -2nc < 0$, en contra de lo supuesto. Por consiguiente el máximo de $f_B - h$ es menor o igual que 0 y así f es subharmónica.

Recíprocamente, si f es subharmónica en Ω pero $\Delta f < 0$ en algún punto, por continuidad existirá una bola abierta B en la cual $\Delta f < 0$, luego por la parte ya probada $-f$ será subharmónica en B , luego f será subharmónica y superharmónica en B , luego será armónica y en realidad cumplirá $\Delta f = 0$ en B , con lo que tenemos una contradicción. ■

Por ejemplo, ahora es inmediato que $f(x, y) = x^2 + y^2$ es una función subharmónica en \mathbb{R}^2 (pero no armónica).

La propiedad de ser subharmónica es local, es decir, una función es subharmónica si y sólo si lo es su restricción a un entorno de cada punto de su dominio. El teorema anterior lo prueba para funciones de clase C^2 , pero es cierto en general, como se desprende del resultado siguiente:²

Teorema B.11 *Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ subharmónica en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si $x_0 \in \Omega$ y $\bar{B}_r(x_0) \subset \Omega$, entonces*

$$f(x_0) \leq \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x_0))} \int_{\|x-x_0\|=r} f(x) d\sigma,$$

donde σ_{n-1} es la medida de Lebesgue de la esfera unitaria de dimensión $n - 1$.

¹Si una función real f de clase C^2 tiene un máximo en un punto x , entonces $f'(x) = 0$ y $f''(x) \leq 0$, pues si $f''(x) > 0$ tendríamos que f' sería positiva a la derecha de x , con lo que f sería creciente a la derecha de x y $f(x)$ no podría ser un máximo.

²Como en el caso de las funciones armónicas, si $n = 1$ hay que reinterpretar el valor medio como la media aritmética de los valores que toma f en los extremos del intervalo al que se reduce la esfera. En la práctica continuaremos con el hábito de suponer tácitamente que $n \geq 2$ en las demostraciones, pues es el único caso que nos va a interesar.

Recíprocamente, si f es continua y cumple la desigualdad anterior en cada punto x_0 para una sucesión de radios $r_n > 0$ convergente a 0, entonces f es subarmónica en Ω .

DEMOSTRACIÓN: Sea h la solución del problema de Dirichlet en $B_r(x_0)$ que coincide con f en la frontera. Entonces

$$f(x_0) \leq h(x_0) = \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x_0))} \int_{\|x-x_0\|=r} f(x) d\sigma.$$

Veamos el recíproco. Sea $x_0 \in \Omega$ y sea $R > 0$ tal que $\bar{B}_R(x_0) \subset \Omega$. Sea h la función continua en la bola y armónica en su interior que coincide con f en la frontera. Hemos de probar que $f \leq h$. Sea $g = f - h$ y m su supremo en la bola cerrada. Hemos de ver que es menor o igual que 0. Supongamos, por el contrario, que $m > 0$.

Como g es nula en la frontera de la bola, el conjunto

$$E = \{x \in \bar{B}_R(x_0) \mid g(x) = m\}$$

es un subconjunto compacto de $B_R(x_0)$. Sea $x_1 \in E$ tal que $\|x_1 - x_0\|$ sea máximo. De este modo, para todo r suficientemente pequeño, al menos media esfera de centro x_1 y radio r está fuera de E . Tomando como r uno de los valores para los que se cumple la desigualdad del enunciado obtenemos:

$$\begin{aligned} m &= g(x_1) = f(x_1) - h(x_1) \leq \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x_1))} \int_{\|x-x_1\|=r} (f(x) - h(x)) d\sigma \\ &< \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x_1))} \int_{\|x-x_1\|=r} m d\sigma = m, \end{aligned}$$

lo que prueba que $m = 0$, o sea, $f \leq h$ en la bola. Así pues, f es subarmónica. ■

Ejemplo La función $\|x\|$ es subarmónica en \mathbb{R}^n .

En efecto, lo es en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ porque su laplaciano es $(n-1)/\|x\| \geq 0$. Esto implica que la función $\|x\|$ cumple la caracterización del teorema anterior para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, pero también la cumple trivialmente en 0, pues se reduce a que $0 \leq r$. Sin embargo, no es armónica en 0, porque no es derivable, ni tampoco en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ salvo si $n = 1$. ■

El teorema siguiente proporciona otra conexión relevante con las funciones holomorfas:

Teorema B.12 Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ es abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa, entonces $|f|$ es una función subarmónica.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos primero que $n = 1$. Tomamos un disco $D(z_0, r) \subset \Omega$ y aplicamos la fórmula integral de Cauchy:

$$\begin{aligned} |f|(z_0) &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0} d\zeta \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

El teorema anterior garantiza que $|f|$ es subharmónica. En el caso general, consideremos primero un punto $z_0 \in \Omega$ donde $f(z_0) \neq 0$. Así $|f|$ es de clase C^∞ en z_0 y podemos calcular su laplaciano. Ahora bien, como la función que resulta de fijar todas las coordenadas de f menos la j -ésima es holomorfa, luego su módulo es una función armónica por la parte ya probada, tenemos que

$$\frac{\partial^2 |f|}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 |f|}{\partial y_j^2} \geq 0,$$

y al sumar para todo j obtenemos que $\Delta |f| \geq 0$, luego $|f|$ es subharmónica en un entorno de z_0 . Por último, en los puntos donde $f(z_0) = 0$ se cumple trivialmente el teorema anterior, luego $|f|$ es subharmónica en todo su dominio. ■

Así, el principio del módulo máximo para funciones holomorfas puede verse ahora como un caso particular del teorema siguiente sobre funciones subharmónicas:

Teorema B.13 (Principio del máximo) *Sea f una función subharmónica no constante en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Entonces*

1. *Para todo $x_0 \in \Omega$ se cumple $f(x_0) < \sup_{x \in \Omega} f(x)$.*
2. *Si Ω está acotado y f es continua en $\bar{\Omega}$, entonces para todo $x_0 \in \Omega$ se cumple*

$$f(x_0) < \max_{x \in \partial\Omega} f(x).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $m = \sup_{x \in \Omega} f(x)$ (quizá $m = +\infty$). Descomponemos Ω como unión de los conjuntos

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega \mid f(x) = m\}, \quad \Omega_2 = \{x \in \Omega \mid f(x) < m\}.$$

La continuidad de f implica que Ω_2 es abierto. Si probamos que Ω_1 también lo es, por conexión uno de los dos será vacío, pero como f no es constante tendrá que serlo Ω_1 y 1) quedará demostrado. Para probar que Ω_1 es abierto podemos suponer que es no vacío, lo que implica que m es finito.

Tomemos $x_0 \in \Omega_1$. Al ser f subharmónica, para r suficientemente pequeño se cumple

$$0 \leq \int_{\|x-x_0\|=r} f(x) d\sigma - \sigma(\partial B_r(x_0))f(x_0) = \int_{\|x-x_0\|=r} (f(x) - f(x_0)) d\sigma.$$

Como $f(x) - f(x_0) = f(x) - m \leq 0$, la desigualdad anterior es una igualdad, y $f(x) = m$ para todo x tal que $\|x - x_0\| = r$, para todo r suficientemente pequeño, es decir, hay un entorno de x_0 contenido en Ω_1 . Esto prueba 1). El apartado 2) es una consecuencia inmediata. ■

Obviamente, las funciones superharmónicas cumplen un “principio del mínimo” análogo.

Como primera aplicación generalizamos la propiedad que define a las funciones subharmónicas:

Teorema B.14 *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto acotado y sean $f, h : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas tales que f es subharmónica en Ω , h es armónica y $f \leq h$ en $\partial\Omega$. Entonces $f \leq h$ en Ω .*

DEMOSTRACIÓN: La función $f - h$ es subharmónica en Ω , luego, para todo $x_0 \in \Omega$, se cumple que

$$f(x_0) - h(x_0) \leq \max_{x \in \partial\Omega} (f(x) - h(x)) \leq 0,$$

luego $f \leq h$ en Ω . ■

Las funciones subharmónicas son necesariamente diferenciables ni cumplen un principio de prolongación analítica. Como contrapartida, esto las hace más “flexibles”, en el sentido de que hay más manipulaciones que conservan el carácter subharmónico, como muestran los dos teoremas siguientes:

Teorema B.15 *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto no vacío, f_1, f_2 son funciones subharmónicas en Ω y $\alpha, \beta \geq 0$, entonces $\alpha f_1 + \beta f_2$ y $\max\{f_1, f_2\}$ son también subharmónicas en Ω .*

DEMOSTRACIÓN: Dado un punto $x_0 \in \Omega$ y un $r > 0$ tal que $\bar{B}_r(x_0) \subset \Omega$, sean h_1, h_2 las soluciones del problema de Dirichlet en B determinado por f_1 y f_2 , respectivamente. Entonces $\alpha h_1 + \beta h_2$ es la solución al problema de Dirichlet determinado por $\alpha f_1 + \beta f_2$. Como f_1 y f_2 son subharmónicas sabemos que $f_1 \leq h_1$, $f_2 \leq h_2$ en toda la bola, luego $\alpha f_1 + \beta f_2 \leq \alpha h_1 + \beta h_2$, luego $\alpha f_1 + \beta f_2$ es subharmónica.

Similarmente, si h es la solución al problema de Dirichlet asociado a la función continua $\max\{f_1, f_2\}$, tenemos que $h - h_1, h - h_2 \leq 0$ en la frontera, luego, por el principio del máximo, las desigualdades se cumplen en toda la bola, es decir, que $f_1 \leq h_1 \leq h$, $f_2 \leq h_2 \leq h$, luego $\max\{f_1, f_2\} \leq h$, lo que prueba que $\max\{f_1, f_2\}$ es subharmónica. ■

Teorema B.16 *Sea Ω un abierto en \mathbb{R}^n y B una bola cerrada contenida en Ω . Sea f una función subharmónica en Ω y f^* la función continua que coincide con f en $\Omega \setminus B$ y es armónica en el interior de B . Entonces f^* es subharmónica en Ω .*

DEMOSTRACIÓN: Aplicaremos el teorema B.11. Basta considerar puntos $x_0 \in \partial B$. Notemos que $f \leq f^*$ en Ω . Entonces

$$f^*(x_0) = f(x_0) \leq \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x_0))} \int_{\|x-x_0\|=r} f(x) d\sigma \leq \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x_0))} \int_{\|x-x_0\|=r} f^*(x) d\sigma.$$

■

De aquí deducimos a su vez:

Teorema B.17 Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función subharmónica en un abierto de \mathbb{R}^n y $B_R(x_0) \subset \Omega$, entonces la función valor medio

$$M(f, x_0, r) = \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x_0))} \int_{\|x-x_0\|=r} f(x) d\sigma$$

es creciente en el intervalo $]0, R[$.

DEMOSTRACIÓN: Tomemos $0 < r_1 < r_2 < R$ y sea f^* la modificación de f dada por el teorema anterior aplicado a la bola $B(x_0, r_1)$. Entonces

$$M(f, x_0, r_1) = f^*(x_0) \leq M(f^*, x_0, r_2) = M(f, x_0, r_2).$$

■

Aproximación por funciones diferenciables Finalmente vamos a probar que toda función subharmónica se puede aproximar por una función subharmónica de clase C^∞ .

Partimos de una función subharmónica $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, fijado $\epsilon > 0$ llamamos $\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$, que es un subconjunto abierto de Ω (pues la distancia a un conjunto es una aplicación continua [An 2.59]), y es no vacío para todo ϵ suficientemente pequeño. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$ tomamos $\Omega_\epsilon = \Omega$. En cualquier caso, si $x \in \Omega_\epsilon$, tenemos que $\bar{B}_\epsilon(x) \subset \Omega$. Además, si $0 < \epsilon < \epsilon'$ se cumple que $\Omega_{\epsilon'} \subset \Omega_\epsilon$ y

$$\Omega = \bigcup_{\epsilon > 0} \Omega_\epsilon.$$

En [GD 1.25] construimos una función $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ estrictamente positiva en $B_1(0)$ y nula fuera de la bola abierta, con la propiedad adicional de que $\rho(x) = \rho(\|x\|)$. Multiplicándola por una constante podemos exigir que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx_1 \cdots dx_n = 1.$$

Llamamos $\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \rho(x/\epsilon)$. Esta función es de clase C^∞ , es estrictamente positiva en $B_\epsilon(0)$, nula fuera de esta bola, también es radial (es decir, que cumple $\rho_\epsilon(x) = \rho_\epsilon(\|x\|)$) y sigue teniendo integral igual a 1 (como se comprueba aplicando el teorema de cambio de variable).

Definimos $f_\epsilon : \Omega_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$f_\epsilon(y) = \int_{\Omega} f(x) \rho_\epsilon(y-x) dx_1 \cdots dx_n = \int_{B_\epsilon(y)} f(x) \rho_\epsilon(y-x) dx_1 \cdots dx_n.$$

La integral está bien definida, porque el integrando sólo es no nulo en $B_\epsilon(y)$, y es continuo en la bola cerrada. El teorema [An 5.27] nos da que $f_\epsilon(y)$ es de clase C^∞ en Ω_ϵ .

Teorema B.18 *Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función subarmónica en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y, para cada $\epsilon > 0$ tal que $\Omega_\epsilon \neq \emptyset$, sea $f_\epsilon : \Omega_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}$ la función que acabamos de definir. Entonces:*

1. f_ϵ es de clase C^∞ .
2. f_ϵ es subarmónica en Ω_ϵ .
3. Si $0 < \epsilon < \epsilon'$, entonces $f \leq f_\epsilon \leq f_{\epsilon'}$ en $\Omega_{\epsilon'}$.
4. Si $K \subset \Omega$ es compacto, para todo $\eta > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < \epsilon < \delta$ entonces $K \subset \Omega_\epsilon$ y $\|f_\epsilon|_K - f|_K\|_K < \eta$.

DEMOSTRACIÓN: Ya tenemos probado que f_ϵ es de clase C^∞ . Ahora observamos que el cambio de variable $x^* = y - x$ nos da la expresión alternativa

$$f_\epsilon(y) = \int_{B_\epsilon(0)} f(y-x) \rho_\epsilon(x) dx_1 \cdots dx_n.$$

Probamos que f_ϵ es subarmónica mediante el teorema B.11. Para ello tomamos $x_0 \in \Omega_\epsilon$ y $r > 0$ tal que $0 < r < d(x_0, \partial\Omega) - \epsilon$ (o $r > 0$ arbitrario si $\partial\Omega = 0$). Así

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x_0))} \int_{\|y-x_0\|=r} f_\epsilon(y) d\sigma = \\ & \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x_0))} \int_{\|y-x_0\|=r} \int_{B_\epsilon(0)} f(y-x) \rho_\epsilon(x) dx_1 \cdots dx_n d\sigma = \\ & \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x_0))} \int_{B_\epsilon(0)} \rho_\epsilon(x) \int_{\|y-x_0\|=r} f(y-x) d\sigma dx_1 \cdots dx_n = \\ & \int_{B_\epsilon(0)} \rho_\epsilon(x) \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x_0-x))} \int_{\|y-(x_0-x)\|=r} f(y) d\sigma dx_1 \cdots dx_n \geq \\ & \int_{B_\epsilon(0)} \rho_\epsilon(x) f(x_0-x) dx_1 \cdots dx_n = f_\epsilon(x_0). \end{aligned}$$

Para demostrar las propiedades siguientes usamos el cambio de variable descrito en el ejemplo final de la sección [GD 4.3], es decir, el cambio $]0, +\infty[\times$

$S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dado por $(r, x) \mapsto rx$. La relación entre los elementos de medida es $dm = r^{n-1} dr \wedge d\sigma$, luego:

$$\begin{aligned}
f_\epsilon(y) &= \int_{B_\epsilon(0)} f(y-x) \rho_\epsilon(x) dx_1 \cdots dx_n \\
&= \int_0^\epsilon \int_{\|z\|=1} r^{n-1} f(y-rz) \rho_\epsilon(rz) d\sigma dr \\
&= \int_0^\epsilon r^{n-1} \rho_\epsilon(r) \int_{\|z\|=1} f(y-rz) d\sigma dr \\
&= \int_0^1 r^{n-1} \epsilon^n \rho_\epsilon(r\epsilon) \int_{\|z\|=1} f(y-r\epsilon z) d\sigma dr \\
&= \int_0^1 \rho(r) \frac{1}{\epsilon^{n-1}} \int_{\|z-y\|=r\epsilon} f(z) d\sigma dr \\
&= \sigma(\partial B_1(0)) \int_0^1 \rho(r) r^{n-1} \frac{1}{\sigma(\partial B_{r\epsilon}(y))} \int_{\|z-y\|=r\epsilon} f(z) d\sigma dr \\
&= \sigma(\partial B_1(0)) \int_0^1 \rho(r) r^{n-1} M(f, y, r\epsilon) dr.
\end{aligned}$$

El teorema B.17 implica entonces que si $\epsilon < \epsilon'$ entonces $f_\epsilon \leq f_{\epsilon'}$. Además, como f es subharmónica, tenemos que

$$\begin{aligned}
f_\epsilon(y) &\geq \sigma(\partial B_1(0)) \int_0^1 \rho(r) r^{n-1} f(y) dr = f(y) \int_0^1 \int_{\|z\|=1} \rho(rz) r^{n-1} d\sigma dr \\
&= f(y) \int_{\|x\|\leq 1} \rho(x) dx_1 \cdots dx_n = f(y).
\end{aligned}$$

Esto completa la prueba de la tercera propiedad.

Si $K \subset \Omega$ es compacto, dado $\eta > 0$ podemos tomar $\delta > 0$ suficientemente pequeño para que si $0 < \epsilon < \delta$ entonces $K \subset \Omega_\epsilon$ y si $y \in K$ y $\|z-y\| \leq \epsilon$ entonces $|f(z) - f(y)| < \eta$. Esto implica que

$$\begin{aligned}
|M(f, y, r\epsilon) - f(y)| &= \left| \frac{1}{\sigma(\partial B_{r\epsilon}(y))} \int_{\|z-y\|=r\epsilon} (f(z) - f(y)) d\sigma \right| \leq \\
&\frac{1}{\sigma(\partial B_{r\epsilon}(y))} \int_{\|z-y\|=r\epsilon} |f(z) - f(y)| d\sigma \leq \eta.
\end{aligned}$$

De aquí se sigue a su vez que

$$\begin{aligned}
|f_\epsilon(y) - f(y)| &= \left| \sigma(\partial B_1(0)) \int_0^1 \rho(r) r^{n-1} M(f, y, r\epsilon) dr - f(y) \right| \\
&= \left| \sigma(\partial B_1(0)) \int_0^1 \rho(r) r^{n-1} M(f, y, r\epsilon) dr - \sigma(\partial B_1(0)) \int_0^1 \rho(r) r^{n-1} f(y) dr \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sigma(\partial B_1(0)) \int_0^1 \rho(r)r^{n-1} |M(f, y, r\epsilon) - f(y)| dr \leq \eta \sigma(\partial B_1(0)) \int_0^1 \rho(r)r^{n-1} dr \\ &= \eta \int_0^1 \int_{\|z\|=1} \rho(rz)r^{n-1} d\sigma dr = \eta \int_{\|x\|\leq 1} \rho(x) dx_1 \cdots dx_n = \eta. \end{aligned}$$

■

Como aplicación generalizamos el teorema 3.30 (y también B.12):

Teorema B.19 *Consideremos abiertos $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{C}$, una función holomorfa $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ y una función subarmónica (resp. superarmónica, armónica) $g : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces la composición $f \circ g$ es subarmónica (resp. superarmónica, armónica) en Ω_1 .*

DEMOSTRACIÓN: Basta probarlo para funciones subarmónicas, pues aplicando el resultado a $-f$ tenemos el correspondiente a funciones superarmónicas, y ambos implican el resultado para funciones armónicas.

Si $n = 1$ y f es de clase C^2 , la conclusión se sigue de un cálculo rutinario, usando la regla de la cadena, las ecuaciones de Cauchy-Riemann y el hecho de que $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ son armónicas, que nos da la relación

$$\Delta(f \circ g) = (f \circ \Delta g)|f'|^2.$$

Basta entonces aplicar el teorema B.10. Si $n > 1$, el laplaciano de $f \circ g$ es la suma de los laplacianos de las funciones que resultan de fijar todas las variables menos una en $f \circ g$ o, equivalentemente, en f . Como estos laplacianos parciales son ≥ 0 , el laplaciano total también lo es.

Pasamos ahora al caso general en el que g no es necesariamente de clase C^2 . Dado $z \in \Omega_1$, tomamos $\epsilon > 0$ tal que $f(z) \in \Omega_{2\epsilon}$ y consideramos la función g_ϵ dada por el teorema anterior. Por la parte ya probada, $f \circ g_\epsilon$ es subarmónica en $f^{-1}[\Omega_{2\epsilon}]$, luego, para r suficientemente pequeño,

$$g(f(z)) \leq g_\epsilon(f(z)) \leq \frac{1}{\sigma(\partial B_r(z))} \int_{\|w-z\|=r} g_\epsilon(f(w)) d\sigma.$$

Aplicando la última parte del teorema anterior a $K = f[\partial B_r(z)]$ obtenemos que el miembro derecho converge a la expresión análoga con g en lugar de g_ϵ cuando ϵ tiende a 0, luego concluimos que

$$g(f(z)) \leq g_\epsilon(f(z)) \leq \frac{1}{\sigma(\partial B_r(z))} \int_{\|w-z\|=r} g(f(w)) d\sigma,$$

y esto prueba que $f \circ g$ es subarmónica. ■

B.3 El problema de Dirichlet

Hemos probado que el problema de Dirichlet tiene a lo sumo una solución en cada abierto con frontera no vacía, pero sólo hemos probado que tiene solución en el caso de las bolas abiertas. En esta sección demostraremos que existe solución para una familia muy amplia de abiertos.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y sea $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Llamaremos *familia de Perron* de f al conjunto $P(f, \Omega)$ de todas las funciones continuas $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, subarmónicas en Ω y tales que $u|_{\partial\Omega} \leq f$. Si M es una cota de f , el principio del máximo prueba que toda función u en estas condiciones cumple $u \leq M$ en Ω . Por consiguiente podemos definir la *función de Perron* de f como

$$P_f(x) = \sup\{u(x) \mid u \in P(f, \Omega)\}, \quad \text{para } x \in \Omega.$$

Ahora observamos que si el problema de Dirichlet tiene solución para f en Ω , entonces la solución ha de ser P_f . En efecto, la solución g está obviamente en $P(f, \Omega)$, luego $g \leq P_f$. Por otra parte, si $u \in P(f, \Omega)$ la función $u - g$ es subarmónica y en $\partial\Omega$ es ≤ 0 , luego por el principio del máximo se cumple $u - g \leq 0$ en Ω , o sea, $u \leq g$, luego $P_f \leq g$.

Para probar que P_f es realmente solución del problema de Dirichlet hemos de ver dos cosas: que es armónica y que tiende a f en $\partial\Omega$. Lo primero podemos probarlo ya:

Teorema B.20 *Sea Ω un abierto acotado en \mathbb{R}^n y sea $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces P_f es armónica en Ω .*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos $x_0 \in \Omega$ y sea $r > 0$ tal que $\bar{B}_r(x_0) \subset \Omega$. Claramente, podemos tomar una sucesión de funciones $u_k \in P(f, \Omega)$ tales que $\lim_k u_k(x_0) = P_f(x_0)$. Sustituyendo cada u_n por el máximo de todas las precedentes podemos suponer que u_k es creciente.

El teorema B.16 nos da funciones $v_k \in P(f, \Omega)$ que son armónicas en $B_r(x_0)$. La sucesión v_k también es creciente y, como $u_k(x_0) \leq v_k(x_0) \leq P_f(x_0)$, la sucesión $v_k(x_0)$ también converge a $P_f(x_0)$.

El teorema de Harnack B.8 implica que $\{v_k|_{B_r(x_0)}\}$ converge casi uniformemente a una función armónica v . Sólo hay que probar que $v = P_f|_{B_r(x_0)}$, y así P_f será armónica en un entorno de cada uno de los puntos de su dominio.

Fijemos $x \in B_r(x_0)$ y tomemos una sucesión de funciones $w_k \in P(f, \Omega)$ tales que $\lim_k w_k(x) = P_f(x)$. Cambiando w_k por el máximo de las precedentes y de v_k podemos suponer que la sucesión es creciente y que $v_k \leq w_k$. Más aún, si cambiamos w_k por la modificación que resulta de aplicar el teorema B.16 a la bola $B_r(x_0)$ se conservan todas las propiedades indicadas y además cada w_k es armónica en la bola. Nuevamente, el teorema de Harnack nos da que la sucesión $w_k|_{B_r(x_0)}$ converge a una función armónica w .

Como $v_k(x_0) \leq w_k(x_0) \leq P_f(x_0)$, tenemos que $w(x_0) = v(x_0) = P_f(x_0)$, pero $v \leq w$, luego $v - w \leq 0$ es una función armónica en $B_r(x_0)$ que alcanza

su máximo en x_0 . Esto sólo es posible si es constante, es decir, si $v = w$, con lo que $v(x) = w(x) = P_f(x)$. ■

Ejemplo En general no es cierto que P_f coincida con f en $\partial\Omega$. Por ejemplo, tomemos $\Omega = B_1(0) \setminus \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ y sea f la función que vale 0 en $\partial B_1(0)$ y $f(0) = 1$.

Dado $u \in P(f, \Omega)$, por el principio del máximo se cumple que $\|u\| \leq 1$. Dado $0 < \epsilon < 1$, la función $h_\epsilon(x) = (\log \|x\|)/\log \epsilon$ es armónica en el anillo comprendido entre las circunferencias de centro 0 y radios ϵ y 1. Además h_ϵ vale 0 sobre la circunferencia exterior y 1 sobre la interior. En consecuencia $u \leq h_\epsilon$ en la frontera del anillo. Como $u - h_\epsilon$ es subarmónica, de hecho $u \leq h_\epsilon$ en todo el anillo (por el principio del máximo), es decir,

$$u(x) \leq \frac{\log \|x\|}{\log \epsilon},$$

para $0 < \epsilon \leq \|x\| < 1$. Si fijamos x y hacemos tender ϵ a 0 queda $u(x) \leq 0$ para todo $x \in B_1(0) \setminus \{0\}$ y toda $u \in P(f, \Omega)$. Por consiguiente $P_f = 0$ y no converge a f en 0. No existe ninguna función armónica en Ω continua en $\overline{B_1(0)}$ que tome el valor 0 para $\|x\| = 1$ y el valor 1 en $x = 0$. ■

Veamos una condición necesaria para que las funciones continuas en la frontera de un abierto acotado Ω se extiendan a funciones armónicas en Ω . Cuando Ω tiene esta propiedad se dice que es una *región de Dirichlet*. Dado un punto $a \in \partial\Omega$, podemos considerar la función

$$f(x) = \frac{\|x - a\|}{1 + \|x - a\|}.$$

Claramente se trata de una función continua y acotada en \mathbb{R}^n (toma valores en $[0, 1]$) y que se anula únicamente en a . Si Ω es una región de Dirichlet existe una función continua $h : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ armónica en Ω y que coincide con f en $\partial\Omega$. En particular $h(a) = 0$ y $h(x) > 0$ para todo $x \in \partial\Omega$, $x \neq a$. Vamos a probar que una condición más débil que ésta es también suficiente para que Ω sea una región de Dirichlet.

Definición B.21 Sea Ω un abierto en \mathbb{R}^n distinto de \emptyset y de \mathbb{R}^n . Para cada $\epsilon > 0$ y $a \in \partial\Omega$ sea $\Omega_\epsilon(a) = \Omega \cap B_\epsilon(a)$. Una *barrera* para Ω en a es una función continua $u : \overline{\Omega_\epsilon(a)} \rightarrow \mathbb{R}$ subarmónica en $\Omega_\epsilon(a)$ tal que $u(a) = 0$ y $u(x) < 0$ para todo $x \in \partial\Omega_\epsilon(a)$, $x \neq a$.

Es claro que si Ω es una región de Dirichlet entonces tiene una barrera en cada punto de su frontera (para cualquier $\epsilon > 0$, restringimos a $\overline{\Omega_\epsilon(a)}$ la función $-h$ que hemos construido en el párrafo anterior).

Las regiones de Dirichlet admiten la caracterización siguiente:

Teorema B.22 Un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es una región de Dirichlet si y sólo si tiene una barrera en cada punto de su frontera.

DEMOSTRACIÓN: Ya hemos visto que la condición es necesaria. Veamos que también es suficiente. Para ello tomamos una función continua $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Basta probar que P_f es continua en $\bar{\Omega}$ y que coincide con f en $\partial\Omega$.

Fijemos un punto $a \in \partial\Omega$ y sea $v : \bar{\Omega}_\epsilon(a) \rightarrow \mathbb{R}$ una barrera para Ω en a . Por el principio del máximo $v < 0$ en $\Omega_\epsilon(a)$. Tomando $0 < r < \epsilon$ tenemos que $v < 0$ en el compacto $\bar{\Omega}_\epsilon(a) \setminus B_r(a)$, luego existe un $\eta > 0$ tal que $v \leq -\eta$ en dicho compacto. Sea $w : \bar{\Omega}_\epsilon(a) \rightarrow \mathbb{R}$ el máximo entre $-\eta$ y v . Entonces w es también una barrera para Ω en a con la propiedad adicional de que vale $-\eta$ fuera de $B_r(a)$, luego se puede extender de forma constante a $w : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ y sigue cumpliendo las propiedades de una barrera (salvo que su dominio es mayor).

Concretamente, tenemos una función continua $w : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, subarmónica en Ω , tal que $w(x) < 0$ para todo $x \in \partial\Omega$, $x \neq a$ y $w(a) = 0$.

Como f es continua en a , dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon$$

para todo $x \in B_\delta(a) \cap \partial\Omega$. Como w tiene máximo $M < 0$ en $\partial\Omega \setminus B_\delta(a)$, tomando $K > 0$ suficientemente grande para que

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon - KM$$

para todo $x \in \partial\Omega \setminus B_\delta(a)$, tenemos que

$$f(a) - \epsilon + Kw(x) < f(x) < f(a) + \epsilon - Kw(x)$$

para todo $x \in \partial\Omega$. Vamos a probar que

$$f(a) - \epsilon + Kw(x) \leq P_f(x) \leq f(a) + \epsilon - Kw(x)$$

para todo $x \in \Omega$.

La primera desigualdad se cumple porque $f(a) - \epsilon + Kw \in P(f, \Omega)$. Para probar la segunda tomamos $u \in P(f, \Omega)$, con lo que $u|_{\partial\Omega} \leq f$, luego

$$u(x) + Kw(x) \leq f(x) + Kw(x) < f(a) + \epsilon$$

para todo $x \in \partial\Omega$. Como $u + Kw$ es subarmónica, tenemos

$$u(x) + Kw(x) \leq f(a) + \epsilon$$

para todo $x \in \Omega$, luego $u \leq f(a) + \epsilon - Kw$ y, como esto vale para toda función $u \in P(f, \Omega)$, vale también para P_f . Así pues:

$$|P_f(x) - f(a)| \leq -Kw(x) + \epsilon$$

para todo $x \in \Omega$ y, como vale para todo $\epsilon > 0$, de hecho tenemos la desigualdad $|P_f(x) - f(a)| \leq -Kw(x)$. Por último, como w es continua y $w(a) = 0$, esto implica que existe

$$\lim_{x \rightarrow a} P_f(x) = f(a). \quad \blacksquare$$

Observemos que la existencia de barreras es una condición que se cumple en una gran clase de abiertos. Por ejemplo, si $\Omega \setminus \{a\}$ está contenido en un semiespacio abierto determinado por un hiperplano H que pase por a , entonces una barrera en a es cualquier aplicación afín que se anule en el hiperplano y sea negativa en el semiespacio que contiene a $\Omega \setminus \{a\}$. A partir de aquí se puede probar que todo abierto convexo y acotado es una región de Dirichlet.

Más en general, si existe una bola cerrada B de manera que $B \cap \bar{\Omega} = \{a\}$ entonces Ω tiene una barrera en a . Concretamente, si $B = \bar{B}_r(x_0)$, una barrera es

$$u(x) = \begin{cases} \log r - \log \|x - x_0\| & \text{si } n = 2, \\ \|x - x_0\|^{2-n} - r^{2-n} & \text{si } n > 2. \end{cases}$$

B.4 La transformada de Kelvin

El teorema 3.30 implica en particular que si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces la función $f(1/z)$ también lo es. Como la conjugación compleja es una isometría de \mathbb{R}^2 , el teorema [An 8.16] nos da que $g(z) = f(1/\bar{z})$ también es armónica en su dominio. Ahora bien, la función

$$J(z) = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}$$

tiene una interpretación geométrica precisa: es la inversión respecto de la circunferencia unitaria en el sentido de [G A.5]. La inversión

$$J(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$$

está definida en cualquier espacio \mathbb{R}^n , por lo que cabe preguntarse si $f(J(x))$ es armónica siempre que f lo es en un abierto de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. La respuesta es negativa, pero se vuelve afirmativa con un ligero retoque:

Definición B.23 Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, definimos la *transformada de Kelvin* como el operador $K : C(\Omega) \rightarrow C(J[\Omega])$ dado por

$$K[f](x) = \|x\|^{2-n} f(x/\|x\|^2).$$

Notemos que para $n = 2$ es simplemente $K[f](x) = f(x/\|x\|^2)$ o, identificando $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, es $K[f](z) = f(1/\bar{z})$.

Es claro que K es un operador lineal, y que $K \circ K$ es la identidad (lo cual no significa exactamente que $K = K^{-1}$, pues en realidad se trata de dos funciones distintas con dominios distintos). También es fácil ver que K es continuo respecto de la topología de la convergencia casi uniforme.

Vamos a probar que la transformada de Kelvin de una función armónica es armónica. Para ello necesitamos algunos resultados previos. Los primeros son comprobaciones rutinarias que dejamos a cargo del lector:

- Si u, v son funciones de clase C^2 en un abierto de \mathbb{R}^n , entonces

$$\Delta(uv) = u\Delta v + 2\nabla u \nabla v + v\Delta u.$$

- $\nabla \|x\|^k = k\|x\|^{k-2}x$.
- $\Delta(\|x\|^k) = k(k+n-2)\|x\|^{k-2}$ (donde n es la dimensión del espacio).
- Si $p \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_m]$ es una forma de grado m , entonces $x \cdot \nabla p = mp$.
En efecto, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple que $p(\lambda x) = \lambda^m p(x)$, y al derivar respecto de λ queda $\nabla p(\lambda x)x = m\lambda^{m-1}p(x)$. Basta hacer $\lambda = 1$.

- Si $p \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_m]$ es una forma de grado m , entonces

$$\Delta(\|x\|^k p) = \|x\|^k \Delta p + k(2m+k+n-2)\|x\|^{k-2}p.$$

(Se obtiene fácilmente aplicando los resultados precedentes.)

- Si $p \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_m]$ es una forma de grado m , entonces

$$\Delta(\|x\|^{2-n-2m}p) = \|x\|^{2-n-2m} \Delta p.$$

- Si $p \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_m]$ es una forma de grado m , entonces

$$K[p](x) = \|x\|^{2-n-2m}p(x).$$

Con esto ya podemos calcular el laplaciano de la transformada de Kelvin:

Teorema B.24 Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es un abierto no vacío y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, entonces f es armónica en Ω si y sólo $K[f]$ lo es en $J[\Omega]$.

DEMOSTRACIÓN: Si p es una forma de grado m , entonces

$$\Delta K[p] = \Delta(\|x\|^{2-n-2m}p) = \|x\|^{2-n-2m} \Delta p = K[\|x\|^4 \Delta p].$$

En la última igualdad hemos usado la última propiedad precedente, teniendo en cuenta que $\|x\|^4 \Delta p$ es una forma de grado $m+2$.

Como todo polinomio se descompone en suma finita de formas, la linealidad de Δ y K implica que la igualdad precedente vale para polinomios cualesquiera. En particular, si p es un polinomio armónico, $K[p]$ es una función armónica.

Ahora, si f es armónica y $a \in \Omega$, el teorema B.6 nos da (en un entorno de a) el desarrollo en serie de Taylor $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} P_{f,a}^m(x-a)$, donde $P_{f,a}^m$ es una forma armónica de grado m (o la forma nula), luego $P_{f,a}^m(x-a)$ es un polinomio armónico.

Como la convergencia es casi uniforme, el teorema [An 8.26] nos da que f es armónica en un entorno de a , luego lo es en su dominio Ω .

Recíprocamente, si $K[f]$ es armónica, entonces $f = K[K[f]]$ también lo es, por la parte ya probada. ■

La transformada de Kelvin nos permite definir el concepto de función armónica en ∞ . Para ello consideramos a \mathbb{R}^n como subespacio topológico de su compactificación de Alexandroff \mathbb{R}_∞^n :

Definición B.25 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}_\infty^n$ un abierto tal que $\infty \in \Omega$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f es *armónica* en Ω si $f|_{\Omega \setminus \{\infty\}}$ es armónica y $K[f]$ se extiende a una función armónica en 0 .

Así, si extendemos $J : \mathbb{R}_\infty^n \rightarrow \mathbb{R}_\infty^n$ mediante $J(0) = \infty$, $J(\infty) = 0$, tenemos definido $K : H(\Omega) \rightarrow H(J[\Omega])$ para abiertos $\Omega \subset \mathbb{R}_\infty^n$. Si f es armónica en un entorno de ∞ tenemos que existe

$$\lim_{x \rightarrow 0} \|x\|^{2-n} f(x/\|x\|^2) = L.$$

Si $n = 2$ esto se reduce a que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, mientras que si $n > 2$ tenemos que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x/\|x\|) = 0$ y por consiguiente $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Vamos a probar que estas condiciones necesarias son, de hecho, suficientes:

Teorema B.26 Sea $n \geq 3$, sea $\Omega \subset \mathbb{R}_\infty^n$ un abierto tal que $\infty \in \Omega$ y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica en $\Omega \setminus \{\infty\}$. Entonces f es armónica en ∞ si y sólo si existe $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

DEMOSTRACIÓN: Ya hemos probado una implicación. Si existe el límite, entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(x/\|x\|^2) = 0$ (porque $J(\infty) = 0$ y es continua), luego

$$\lim_{x \rightarrow 0} \|x\|^{n-2} K[f](x) = 0.$$

El teorema [An 8.27] nos da que $K[f]$ se extiende a una función armónica en 0 , luego f es armónica en ∞ . ■

El caso $n = 2$ tiene que ser tratado aparte:

Teorema B.27 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}_\infty^2$ un abierto tal que $\infty \in \Omega$ y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica en $\Omega \setminus \{\infty\}$. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. f es armónica en ∞ .
2. Existe $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \in \mathbb{R}$.
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\log \|x\|} = 0$.
4. Existe $R > 0$ tal que f está acotada en $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \geq R\}$.

DEMOSTRACIÓN: Ya hemos visto que 1) \Rightarrow 2) y claramente 2) \Rightarrow 3). Si se cumple 3), tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{K[f](x)}{\log \|x\|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x/\|x\|^2)}{\log \|x\|} = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{f(x)}{\log \|x\|} = 0,$$

luego el teorema [An 8.27] implica que $K[f]$ se extiende a una función armónica en 0 , luego se cumple 1). También es obvio que 2) \Rightarrow 4) \Rightarrow 3). ■

A su vez esto nos permite resolver el problema de Dirichlet para el complementario de una bola. Por simplicidad nos restringimos a la bola unitaria, pero es fácil pasar de aquí al caso general:

Teorema B.28 Sea $B^* = \mathbb{R}_\infty^n \setminus \bar{B}_1(0)$ y sea $f : \partial B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe una única función continua $u_f : \bar{B}^* \rightarrow \mathbb{R}$, armónica en B^* que extiende a f .

DEMOSTRACIÓN: Si $v : \bar{B}_1(0) \rightarrow \mathbb{R}$ es la solución del problema de Dirichlet asociado a f en la bola unitaria y $u = K[v] : \bar{B}^* \rightarrow \mathbb{R}$, es obvio que u es una solución del problema de Dirichlet en B^* . Recíprocamente, si u^* es otra solución, entonces $K[u^*]$ resuelve el problema de Dirichlet de f en la bola unitaria, luego $K[u^*] = v$, luego $u^* = K[v] = u$. ■

Notemos que la unicidad del teorema anterior requiere que la función sea armónica en ∞ , pues si a una solución del problema de Dirichlet le sumamos $\|x\|^{2-n}$ (para $n > 2$) o bien $\log \|x\|$ (para $n = 2$) obtenemos otra solución distinta armónica en $B^* \setminus \infty$, pero no en ∞ .

Podemos encontrar una expresión integral explícita para la solución del problema de Dirichlet en el exterior de una bola. Nos apoyamos en la igualdad:

$$\left\| \frac{y}{\|y\|} - \|y\|x \right\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \|x\|y \right\|,$$

que se prueba sin más que elevar al cuadrado y desarrollar los productos escalares. En particular, si $\|y\| = 1$ se reduce a

$$\|x - y\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \|x\|y \right\|.$$

Ahora, con la notación de la prueba del teorema anterior:

$$\begin{aligned} u &= K[v] = \|x\|^{2-n} \frac{1}{\sigma(\partial B_1(0))} \int_{\|y\|=1} \frac{1 - \|x/\|x\|^2\|^2}{\|x/\|x\|^2 - y\|^n} f(y) d\sigma \\ &= \|x\|^{2-n} \frac{1}{\sigma(\partial B_1(0))} \int_{\|y\|=1} \frac{1 - 1/\|x\|^2}{\|x/\|x\| - \|x\|y\|^n/\|x\|^n} f(y) d\sigma \\ &= \frac{1}{\sigma(\partial B_1(0))} \int_{\|y\|=1} \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x/\|x\| - \|x\|y\|^n} f(y) d\sigma \\ &= \frac{1}{\sigma(\partial B_1(0))} \int_{\|y\|=1} \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x - y\|^n} f(y) d\sigma \\ &= \frac{1}{\sigma(\partial B_1(0))} \int_{\|y\|=1} P_e(x, y) f(y) d\sigma, \end{aligned}$$

donde el núcleo de Poisson para el exterior de una esfera es

$$P_e(x, y) = \frac{\|x\|^2 - \|y\|^2}{\|x - y\|^n} = -P(x, y).$$

B.5 Funciones armónicas en superficies de Riemann

Las variedades analíticas conexas de dimensión 1 se conocen como *superficies de Riemann*. El propósito de esta sección es demostrar el teorema siguiente:

Teorema B.29 *Si X es una superficie de Riemann y x_1, \dots, x_n son puntos distintos de X , existe una función meromorfa $f : X \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ tal que los valores $f(x_i)$ son distintos dos a dos.*

La mayoría de las demostraciones conocidas de este hecho usan conceptos más avanzados que los que hemos estudiado en este libro. Aquí daremos una prueba basada en las ideas originales de Riemann, para la cual necesitamos generalizar a superficies de Riemann los resultados elementales sobre funciones armónicas en abiertos de \mathbb{C} .

Definición B.30 Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre una superficie de Riemann es *armónica* (subarmónica, superarmónica) si para cada $x \in X$ existe una carta $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ alrededor de x tal que $\phi^{-1} \circ f$ es armónica (subarmónica, superarmónica) en $\phi[U]$.

El teorema B.19 se generaliza trivialmente a superficies de Riemann sin más que tener en cuenta que el carácter armónico, subarmónico o superarmónico de una aplicación es una propiedad local. Así pues, si f es armónica (subarmónica, superarmónica) en el sentido de la definición anterior, de hecho toda carta ϕ de f cumple que $\phi^{-1} \circ f$ es armónica (subarmónica, superarmónica).

Obviamente las funciones armónicas (subarmónicas, superarmónicas) son continuas. Una función f es subarmónica (superarmónica) si y sólo si $-f$ es superarmónica (subarmónica), y f es armónica si y sólo si es subarmónica y superarmónica a la vez. Esto se prueba sin más que componer con cartas y aplicar las propiedades correspondientes para funciones en abiertos de \mathbb{C} .

Igualmente, el teorema B.15 nos permite probar a su vez que si f y g son funciones subarmónicas en una superficie de Riemann X entonces las funciones $\max\{f, g\}$ y $\alpha f + \beta g$, donde $\alpha, \beta \geq 0$, son también subarmónicas. Veamos ahora otros hechos básicos de carácter global:

Teorema B.31 (Principio del máximo) *Sea $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función subarmónica. Si existe un punto $a \in X$ tal que $u(x) \leq u(a)$ para todo $x \in X$, entonces u es constante.*

DEMOSTRACIÓN: Consideramos el conjunto $A = \{x \in X \mid u(x) = u(a)\}$. Como u es continua A es cerrado en X . Basta probar que es abierto, pero si $x \in A$ tomamos una carta $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $x \in U$, con lo que $\phi^{-1} \circ u$ es una función subarmónica en $\phi[U]$ que alcanza un máximo en $\phi(a)$. El principio del máximo B.31 implica entonces que $\phi^{-1} \circ u$ es constante en $\phi[U]$, luego u es constante en U y por consiguiente $U \subset A$. Concluimos que $A = X$, lo que equivale a que u es constante. ■

En particular vemos que en una superficie de Riemann compacta las únicas funciones subarmónicas (superarmónicas, armónicas) son las constantes.

Teorema B.32 *Sea X una superficie de Riemann, sea Y un abierto conexo en X (distinto de X) tal que \bar{Y} sea compacto. Sean $u, v : \bar{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que u es subarmónica en Y , v es armónica en Y y $u \leq v$ en ∂Y . Entonces $u \leq v$ en Y .*

DEMOSTRACIÓN: La hipótesis $Y \neq X$ equivale a que $\partial Y \neq \emptyset$, que se requiere para que la relación entre u y v no sea vacía. Cambiando u por $u - v$ podemos suponer que v es la función nula. Por compacidad existe $a \in \bar{Y}$ donde u alcanza su máximo. Si $a \in Y$ entonces u es constante y la conclusión es obvia. Si $a \in \partial Y$, entonces todo $x \in A$ cumple $u(x) \leq u(a) \leq 0$. ■

Teorema B.33 (Principio de prolongación armónica) *Si dos funciones armónicas en una superficie de Riemann coinciden en un abierto, entonces son iguales.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que si una función armónica $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se anula en un abierto entonces es nula. Sea Ω la unión de todos los abiertos donde f se anula. Si $\Omega \neq X$ entonces existe un punto $x \in \partial\Omega$. Una carta alrededor de X transforma f en una función armónica en un abierto de \mathbb{C} que es nula en un abierto pero no es constante. Esto contradice al principio de prolongación analítica 2.19 (recordemos que, por B.4, toda función armónica es analítica). ■

El teorema siguiente es local, por lo que se sigue inmediatamente de su análogo B.16:

Teorema B.34 *Sea $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función subarmónica, $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ una carta de C y $\bar{D}(a, r)$ un disco cerrado contenido en $\phi[U]$. Sea $h : \bar{D}(a, r) \rightarrow \mathbb{R}$ la función continua que coincide con $\phi^{-1} \circ u$ en $\partial D(a, r)$ y es armónica en $D(a, r)$. Entonces la función $v : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$v(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in X \setminus \phi^{-1}[\bar{D}(a, r)] \\ h(\phi(x)) & \text{si } x \in \phi^{-1}[\bar{D}(a, r)] \end{cases}$$

es subarmónica. La llamaremos modificación de Poisson de u en $\phi^{-1}[\bar{D}(a, r)]$.

Definición B.35 Una familia \mathcal{P} de funciones subarmónicas en una superficie de Riemann X es una *familia de Perron* si cumple:

1. Si $u, v \in \mathcal{P}$, entonces $\max\{u, v\} \in \mathcal{P}$.
2. Las modificaciones de Poisson de las funciones de \mathcal{P} están en \mathcal{P} .

Se llama *envolvente superior* de \mathcal{P} a la función $M : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dada por

$$M(x) = \sup\{u(x) \mid u \in \mathcal{P}\}.$$

El teorema siguiente se prueba sin dificultad a partir de los resultados que ya tenemos.

Teorema B.36 *Sea $w : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función superarmónica en una superficie de Riemann X . Entonces el conjunto*

$$\mathcal{P} = \{u : X \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ es subarmónica y } u \leq w\}$$

es una familia de Perron en X .

Teorema B.37 *Sea \mathcal{P} una familia de Perron en una superficie de Riemann X y M su envolvente superior. Entonces M es constante igual a $+\infty$ o bien $M : X \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica en X .*

DEMOSTRACIÓN: Veamos que basta probar el teorema en el caso en que X es un abierto conexo en \mathbb{C} . Admitiendo que está probado en este caso, es fácil comprobar que si $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ es una carta de X , el conjunto

$$P_\phi = \{\phi^{-1} \circ u \mid u \in \mathcal{P}\}$$

es una familia de Perron en $\phi[U]$, así como que su envolvente superior M_ϕ verifica $M = \phi \circ M_\phi$. Por lo tanto, $M|_U$ es constante igual a $+\infty$ o bien armónica. Esto prueba que el conjunto de puntos donde M toma el valor $+\infty$ y el conjunto de puntos donde M es armónica (en un entorno) son dos abiertos disjuntos cuya unión es X . Por conexión uno de ellos ha de ser igual a X .

Supongamos, pues, que $X \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo. El argumento que vamos a dar es una ligera generalización del usado en B.20. Tomemos un punto $a \in X$ y sea $D(a, r)$ un disco cuya clausura esté contenida en X . Claramente, existe una sucesión $\{u_n\}$ de funciones en \mathcal{P} tales que $M(a) = \lim_n u_n(a)$ (tanto si $M(a)$ es finito como infinito). Sustituyendo u_n por el máximo de las funciones anteriores podemos suponer que la sucesión $\{u_n\}$ es monótona creciente. Sea v_n la modificación de Poisson de u_n en el disco $D(a, r)$. Las funciones v_n también están en \mathcal{P} , luego $u_n \leq v_n \leq M$. En particular $\lim_n v_n(a) = M(a)$. Además la sucesión $\{v_n\}$ es también creciente, pues trivialmente lo es fuera de $D(a, r)$ y, si $n < m$, tenemos que $v_m - v_n|_{\partial D(a, r)} = u_m - u_n|_{\partial D(a, r)} \geq 0$, y el mínimo de $v_m - v_n$ en $\overline{D(a, r)}$ tiene que alcanzarse en la frontera (pues la función es armónica en un entorno del disco cerrado), tiene que ser $v_m - v_n|_{D(a, r)} \geq 0$.

Por el teorema de Harnack B.8 tenemos que $\{v_n\}$ converge casi uniformemente en el disco a una función $v \leq M$ que o bien es armónica o bien es constantemente igual a $+\infty$. Basta probar que $v = M$ en todo $D(a, r)$, pues entonces tendremos que el conjunto de puntos donde M es finita es abierto, al igual que el conjunto de puntos donde es $+\infty$. Por conexión uno de los dos será vacío y si M es finita tenemos también que es armónica. Ciertamente, si $v = +\infty$, tenemos $v = M$, luego podemos suponer que v es finita.

Ahora bien, si $z \in D(a, r)$ podemos construir como antes una sucesión creciente $\{w_n\}$ de funciones de \mathcal{P} armónicas en $D(a, r)$ con $\lim_n w_n(z) = M(z)$.

Sustituyendo w_n por $\max\{w_n, v_n\}$ podemos exigir que $v_n \leq w_n$. El teorema de Harnack nos da que $\{w_n\}$ converge a una función $w \leq M$ armónica en $D(a, r)$ (no puede ser infinita porque $w(a) \leq M(a) < +\infty$).

Por otra parte $v \leq w \leq M$, luego la función $w - v$ es armónica en $D(a, r)$ y tiene un máximo en $w(a) - v(a) = 0$, lo que implica que es constante igual a 0, es decir, $w = v$, y en particular $v(z) = M(z)$. ■

Pasamos ahora a probar el resultado central, del cual deduciremos la existencia de funciones meromorfas no constantes en superficies de Riemann.

Teorema B.38 *Sea X una superficie de Riemann y $\psi^{-1} : U \rightarrow D(0, 2)$ una carta de X . Entonces existe una función armónica $u : X \setminus \{\psi(0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que si $z \in D'(0, 2)$ entonces*

$$u(\psi(z)) = c \log |z| + \operatorname{Re} f(z),$$

donde $c \in \mathbb{R}$ y $f : D'(0, 2) \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa con un polo simple en 0.

DEMOSTRACIÓN: Por simplificar la notación llamaremos $a = \psi(0)$ y, para cada $0 < r < 2$, llamaremos $D(a, r) = \psi[D(0, r)]$. Entonces $\overline{D(a, r)} = \psi[\overline{D(0, r)}]$ y $\partial D(a, r) = \psi[\partial D(0, r)]$. Definimos $\Omega_r = X \setminus \overline{D(a, r)}$, con lo que se cumple $\overline{\Omega_r} = X \setminus D(a, r)$ y $\partial \Omega_r = \partial D(a, r)$. Notemos que Ω_r es un abierto conexo en X . Distinguiamos dos casos:

CASO 1: Para algún número real $0 < r < 2$ existe $\omega : \overline{\Omega_r} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, acotada, armónica en $X \setminus \overline{D(a, r)}$ y tal que

$$\begin{aligned} \omega(x) &= 0 && \text{si } x \in \partial D(a, r), \\ \omega(x) &> 0 && \text{si } x \in \Omega_r. \end{aligned}$$

Para cada $c \in \mathbb{R}$ definimos $u_c : X \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$u_c(x) = \begin{cases} \operatorname{Re} \left(\frac{r}{z} - \frac{\bar{z}}{r} \right) & \text{si } x = \psi(x) \text{ con } 0 < |z| \leq r, \\ c\omega(x) & \text{si } x \in \Omega_r. \end{cases}$$

Vamos a probar que u_c y $-u_{-c}$ son subarmónicas cuando c es positivo y suficientemente grande.

En primer lugar observamos que la función $\operatorname{Re} \left(\frac{r}{z} - \frac{\bar{z}}{r} \right)$ es armónica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y se anula en la circunferencia $|z| = r$. Esto prueba que u_c es continua en $X \setminus \{a\}$ y armónica en $D(a, r)$. Obviamente es armónica en Ω_r . (Todo esto vale para cualquier $c \in \mathbb{R}$, en particular para u_c y para u_{-c} .)

Falta probar que u_c y $-u_{-c}$ son subarmónicas en los puntos de $\partial D(a, r)$. Equivalentemente, hemos de ver que $\tilde{u}_c = \psi \circ u_c$ y $-\tilde{u}_{-c}$ son subarmónicas en los puntos de $\partial D(0, r)$. Concretamente,

$$\tilde{u}_c(z) = \begin{cases} \operatorname{Re} \left(\frac{r}{z} - \frac{\bar{z}}{r} \right) & \text{si } 0 < |z| \leq r, \\ c\tilde{\omega}(z) & \text{si } r < |z| < 2, \end{cases}$$

donde $\tilde{\omega} = \psi \circ \omega$. Aplicaremos el teorema B.11.

Como $\tilde{\omega}$ no se anula en la circunferencia $|z| = (2+r)/2$, si $c > 0$ es suficientemente grande se cumple

$$\operatorname{Re} \left(\frac{r}{z} - \frac{z}{r} \right) \leq c\tilde{\omega}(z) = \tilde{u}_c(z),$$

para todo z tal que $|z| = (2+r)/2$ (y trivialmente si $|z| = r$). Ahora bien, en el anillo $A(0, r, (2+r)/2)$ los dos términos de esta desigualdad son funciones armónicas continuas en la clausura, luego por el principio del máximo podemos concluir que

$$\operatorname{Re} \left(\frac{r}{z} - \frac{z}{r} \right) \leq \tilde{u}_c(z), \quad \text{para } 0 < |z| \leq \frac{2+r}{2}.$$

(En principio para $|z| \geq r$, pero trivialmente en el caso contrario.)

Así, si $|z| = r$ entonces, si $\rho > 0$ es suficientemente pequeño

$$\begin{aligned} \tilde{u}_c(z) &= \operatorname{Re} \left(\frac{r}{z} - \frac{z}{r} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{r}{z + \rho e^{i\theta}} - \frac{z + \rho e^{i\theta}}{r} \right) d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}_c(z + \rho e^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

Esto prueba que \tilde{u}_c es subarmónica, y similarmente se razona con $-\tilde{u}_c$.

Fijemos, pues un $c > 0$ tal que u_c y $-u_{-c}$ sean subarmónicas en $X \setminus \{a\}$. Sea $d \in \mathbb{R}$ tal que

$$d \geq 2 \sup \{ c\omega(x) \mid x \in \bar{\Omega}_r \}$$

(recordemos que ω está acotada).

Sea \mathcal{P} el conjunto de las funciones subarmónicas v en $X \setminus \{a\}$ tales que

$$v(x) \leq u_{-c}(x) + d, \quad \text{para todo } x \in X \setminus \{a\}.$$

Puesto que $u_{-c} + d$ es una función superarmónica, \mathcal{P} es una familia de Perron. Se cumple que $u_c \in \mathcal{P}$, pues

$$u_c(x) = \begin{cases} u_{-c}(x) \leq u_{-c}(x) + d & \text{si } x = \psi(z), 0 < |z| \leq r, \\ 2x\omega(x) - u_{-c}(x) \leq d + u_{-c}(x) & \text{si } x \in \Omega_r. \end{cases}$$

Sea M la envolvente superior de \mathcal{P} . Entonces $u_c \leq M \leq u_{-c} + d$. Por consiguiente

$$0 \leq M(\psi(z)) - \operatorname{Re} \left(\frac{r}{z} - \frac{z}{r} \right) \leq d, \quad \text{para } 0 < |z| < r.$$

La función del miembro central es armónica en $D'(0, r)$ y está acotada. Según el teorema [An 8.27] (véase el comentario precedente) se extiende a una función armónica en $D(0, 2)$, la cual, según 3.29, será la parte real de una función holomorfa $g : D(0, 2) \rightarrow \mathbb{C}$. Así pues,

$$M(\psi(z)) = \operatorname{Re} \left(\frac{r}{z} - \frac{z}{r} + g(z) \right) = \operatorname{Re} f(z),$$

donde $f(z)$ tiene un polo simple en 0. La función M es, pues, la buscada.

CASO 2 Si $0 < r < 2$, no existe ninguna función $\omega : \bar{\Omega}_r \rightarrow \mathbb{R}$ continua, acotada, armónica en Ω_r y tal que

$$\begin{aligned}\omega(x) &= 0 & \text{si } x \in \partial D(a, r), \\ \omega(x) &> 0 & \text{si } x \in \Omega_r.\end{aligned}$$

Observemos que las funciones cuya existencia se postulaba en el caso 1 son funciones continuas y acotadas en $\bar{\Omega}_r$, armónicas en Ω_r pero que no tienen máximo. Recíprocamente, bajo las hipótesis del caso 2 vamos a probar que toda función en estas condiciones alcanza su máximo y su mínimo:

A) Si $0 < r < 2$ y $u : \bar{\Omega}_r \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, acotada y armónica en Ω_r , entonces u alcanza su máximo y su mínimo en $\partial D(a, r)$.

En efecto, sean

$$A = \inf\{u(x) \mid x \in \bar{\Omega}_r\}, \quad B = \sup\{u(x) \mid x \in \bar{\Omega}_r\}.$$

Sea h_1 la solución del problema de Dirichlet en el anillo $A(0, r, (r+2)/2)$ que sobre $|z| = r$ vale $u(\psi(z))$ y sobre $|z| = (r+2)/2$ vale A .

Sea $v_1 : \bar{\Omega}_r \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$v_1(x) = \begin{cases} h_1(z) & \text{si } x = \psi(z) \text{ y } r \leq |z| \leq (r+2)/2, \\ A & \text{si } x \in \Omega_{(r+2)/2}. \end{cases}$$

Claramente es continua y es fácil ver que es subarmónica en Ω_r . Los únicos puntos donde no es evidente son los de $\partial D(a, (r+2)/2)$. Para ellos hemos de probar que la función

$$\tilde{v}_1(z) = \begin{cases} h_1(z) & \text{si } r \leq |z| \leq (r+2)/2, \\ A & \text{si } (r+2)/2 < |z| < 2 \end{cases}$$

es subarmónica en $\partial D(0, (r+2)/2)$, pero esto es inmediato a partir del teorema B.11, teniendo en cuenta que $A \leq h_1$ en todo su dominio.

Definimos análogamente v_2 cambiando A por B y se prueba que v_2 es superarmónica en Ω_r .

Sea $\mu = \max\{u(\psi(x)) \mid |z| = r\}$. Sea \mathcal{P}_1 el conjunto de las funciones w subarmónicas en Ω_r tales que $w(x) \leq \min\{u(x), \mu\}$, para todo $x \in \Omega_r$. Sea \mathcal{P}_2 el conjunto de las funciones w subarmónicas en Ω_r tales que $w(x) \leq v_2(x)$ para todo $x \in \Omega_r$. Tanto \mathcal{P}_1 como \mathcal{P}_2 son familias de Perron. Sean M_1 y M_2 sus envolventes superiores.

Se cumple que $v_1|_{\Omega_r} \in \mathcal{P}_1$. En efecto, $h_1 \leq \psi \circ u$ sobre los puntos de $\partial A(0, r, (r+2)/2)$, luego lo mismo vale sobre todo el anillo. Por lo tanto $v_1 \leq u$ en $A(a, r, (r+2)/2)$. La desigualdad vale obviamente en $\Omega_{(r+2)/2}$. El mismo razonamiento prueba que $v_1 \leq \mu$.

Del mismo modo se concluye que $u|_{\Omega_r} \in \mathcal{P}_2$. Así pues,

$$A \leq v_1(x) \leq M_1(x) \leq u(x) \leq M_2(x) \leq v_2(x) \leq B, \quad \text{para todo } x \in \Omega_r.$$

Por lo tanto, $M_2 - M_1$ es una función armónica y acotada en Ω_r y

$$0 \leq M_2(\psi(z)) - M_1(\psi(z)) \leq v_2(\psi(z)) - v_1(\psi(z)), \quad \text{si } 0 < |z| < 2.$$

De aquí se sigue que, si $|a| = r$,

$$\lim_{z \rightarrow a} M_2(\psi(z)) - M_1(\psi(z)) = 0,$$

es decir, $M_2 - M_1$ se extiende a una función continua en $\overline{\Omega}_r$ que se anula en $\partial D(a, r)$. Por la hipótesis del caso 2 la función $M_2 - M_1$ ha de anularse en algún punto de Ω_r , pero por el principio del mínimo esto obliga a que $M_2 - M_1 = 0$. Por lo tanto $u(x) = M_1(x) \leq \mu$, que es lo que queríamos probar.

Ahora probaremos que el problema de Dirichlet tiene solución en cada Ω_r :

B) Sea $0 < r < 2$ y sea $f : \partial D(a, r) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f se extiende a una única función $u : \overline{\Omega}_r \rightarrow \mathbb{R}$ continua, acotada y armónica en Ω_r .

En efecto, la unicidad se sigue del resultado anterior. La existencia la obtendremos de una construcción similar a la que acabamos de hacer, que no requiere las hipótesis del caso 2. Sean

$$A = \inf\{f(x) \mid x \in \overline{\Omega}_r\}, \quad B = \sup\{f(x) \mid x \in \overline{\Omega}_r\}.$$

Sea h_1 la solución del problema de Dirichlet en el anillo $A(0, r, (r+2)/2)$ que sobre $|z| = r$ vale $f(\psi(z))$ y sobre $|z| = (r+2)/2$ vale A .

Sea $v_1 : \overline{\Omega}_r \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$v_1(x) = \begin{cases} h_1(z) & \text{si } x = \psi(z) \text{ y } r \leq |z| \leq (r+2)/2, \\ A & \text{si } x \in \Omega_{(r+2)/2}. \end{cases}$$

Definimos v_2 cambiando A por B . Se comprueba que v_1 es subarmónica y v_2 es superarmónica en Ω_r . El conjunto \mathcal{P} de las funciones subarmónicas w en Ω_r que cumplen $w(x) \leq v_2(x)$ para todo $x \in \Omega_r$ es una familia de Perron que contiene a $v_1|_{\Omega_r}$, luego su envolvente superior M es una función armónica en Ω_r que verifica

$$A \leq v_2(x) \leq M(x) \leq v_2(x) \leq B, \quad \text{para todo } x \in \Omega_r.$$

Es claro entonces que la función $u : \overline{\Omega}_r \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} M(x) & \text{su } x \in \Omega_r \\ f(x) & \text{si } x \in \partial D(a, r) \end{cases}$$

es acotada, continua y armónica en Ω_r .

Veamos un último resultado previo antes de probar el teorema:

C) Sea $0 < r < 2$ y $\{u_n\}$ una sucesión de funciones $u_n : \overline{\Omega}_r \rightarrow \mathbb{R}$ continuas, acotadas y armónicas en Ω_r que convergen uniformemente en $\partial D(a, r)$. Entonces la sucesión converge uniformemente en $\overline{\Omega}_r$ a una función u continua, acotada y armónica en Ω_r .

En efecto, por A) tenemos que, para todo par de naturales m y n se cumple

$$\begin{aligned} \sup\{u_m(x) - u_n(x) \mid x \in \overline{\Omega}_r\} &\leq \sup\{u_m(x) - u_n(x) \mid x \in \partial D(a, r)\}, \\ \inf\{u_m(x) - u_n(x) \mid x \in \overline{\Omega}_r\} &\geq \inf\{u_m(x) - u_n(x) \mid x \in \partial D(a, r)\}, \end{aligned}$$

de donde

$$\sup\{|u_m(x) - u_n(x)| \mid x \in \overline{\Omega}_r\} \leq \sup\{|u_m(x) - u_n(x)| \mid x \in \partial D(a, r)\},$$

de donde se sigue inmediatamente el resultado.

Finalmente, nos encaminamos a construir la función que pide el teorema. Para cada número real $0 < r < 1$, la propiedad B) nos proporciona una función $U_r : \overline{\Omega}_r \rightarrow \mathbb{R}$ continua, acotada y armónica en Ω_r que verifica

$$U_r(\psi(z)) = \operatorname{Re}(1/z), \quad \text{si } |z| = r.$$

El valor mínimo de U_r en $D(a, 1)$ ha de ser estrictamente menor que el máximo, pues de lo contrario A) implicaría que U_r sería constante en Ω_1 y, por prolongación armónica, en Ω_r , lo cual es imposible.

Definimos $V_r : \overline{\Omega}_r \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$V_r(x) = \alpha(r)U_r + \beta(r),$$

donde $\alpha(r)$ y $\beta(r)$ son números reales elegidos de manera que el mínimo y el máximo de V_r en $D(a, 1)$ sean 0 y 1 respectivamente. La propiedad A) implica que $0 \leq V_r \leq 1$ en $\overline{\Omega}_1$.

Sea v_r la restricción de V_r al anillo $A(a, 1, 2)$. Estas funciones forman un conjunto acotado en el espacio de funciones armónicas en dicho anillo, luego el teorema de Montel B.7 implica que es relativamente compacto (es claro que la versión del teorema para funciones en $A(0, 1, 2) \subset \mathbb{C}$ implica su validez en $A(a, 1, 2) \subset X$).

Por consiguiente, la sucesión $\{v_{1/n}\}_n$ tiene una subsucesión convergente, es decir, existe una sucesión $\{r_n\}_n$ decreciente y convergente a 0 tal que la sucesión $\{v_{r_n}\}_n$ converge uniformemente en los compactos de $A(a, 1, 2)$ a una función armónica.

En particular la sucesión $\{V_{r_n}\}_n$ converge uniformemente en cada circunferencia $D(a, s)$, para $1 < s < 2$, luego la propiedad C) implica que converge casi uniformemente en Ω_1 a una función armónica $V_0 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$. Obviamente $0 \leq V_0 \leq 1$. Hemos de probar que V_0 puede extenderse hasta $X \setminus \{a\}$.

Por el teorema 3.31 se cumple

$$V_r(\psi(z)) = c(r) \log |z| + \operatorname{Re} f_r(z),$$

para $r < |z| < 2$ (o bien $1 < |z| < 2$ si $r = 0$), donde $c(r) \in \mathbb{R}$ y la función

$$f_r(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(r)z^k \text{ es holomorfa en } A(0, r, 2) \text{ (o bien } A(0, 1, 2) \text{ si } r = 0).$$

Podemos suponer que $a_0(r) \in \mathbb{R}$.

Vamos a analizar el comportamiento de los coeficientes. Fijemos un número real $r < s < 2$ (o bien $1 < s < 2$ si $r = 0$). Entonces, según 2.35, (tomando partes reales cuando $k = 0$):

$$\begin{aligned} a_0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(f_r(se^{i\theta})) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (V_r(\psi(se^{i\theta})) - c(r) \log |s|) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_r(\psi(se^{i\theta})) d\theta - c(r) \log |s|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_k(r)s^k + \overline{a_{-k}(r)}s^{-k} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_r(se^{i\theta})e^{-ik\theta} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f_r(se^{i\theta})}e^{-ik\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(f_r(se^{i\theta}))e^{-ik\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V_r(\psi(se^{i\theta}))e^{-ik\theta} d\theta - \frac{c(r) \log |s|}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V_r(\psi(se^{i\theta}))e^{-ik\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{aligned} a_0(r) + c(r) \log |s| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_r(\psi(se^{i\theta})) d\theta, \\ a_k(r)s^k + \overline{a_{-k}(r)}s^{-k} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V_r(\psi(se^{i\theta}))e^{-ik\theta} d\theta, \quad k \geq 1. \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$

Si fijamos dos valores de s entre 1 y 2, cada una de las ecuaciones anteriores se convierte en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas ($a_0(r)$ y $c(r)$ en el primer caso, $a_k(r)$ y $\overline{a_{-k}(r)}$ en el segundo.) Despejándolas nos quedan las incógnitas en función de las integrales. Lo aplicamos a r_n y hacemos tender n a infinito. Los integrandos $V_{r_n}(\psi(se^{i\theta}))e^{-ik\theta}$ convergen puntualmente a $V_0(\psi(se^{i\theta}))e^{-ik\theta}$, y están acotados por 1, luego podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada y concluir que

$$a_k(0) = \lim_n a_k(r_n), \quad c(0) = \lim_n c(r_n).$$

Ahora probaremos que los coeficientes $a_k(0)$ son nulos para $k < -1$ estimando los $a_k(r_n)$. En primer lugar, la ecuación (B.1), que en principio está probada para $0 < r < s < 2$, también es válida si $s = r$. Puesto que los integrandos están acotados por 1, basta aplicar el teorema de la convergencia dominada. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} a_k(r)r^k + \overline{a_{-k}(r)}r^{-k} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V_r(\psi(re^{i\theta}))e^{-ik\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\alpha(r)U_r(\psi_r(re^{i\theta})) + \beta(r))e^{-ik\theta} d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\alpha(r)}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{r e^{i\theta}} \right) e^{-ik\theta} d\theta + \frac{\beta(r)}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} d\theta \\ &= \frac{\alpha(r)}{r\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} \cos \theta d\theta. \end{aligned}$$

Ahora un simple cálculo muestra que si $k \geq 2$ la integral es nula (por ejemplo, integrando por partes dos veces). En definitiva,

$$\overline{a_{-k}(r)} = -a_k(r) r^{2k}, \quad \text{para } k \geq 2. \quad (\text{B.2})$$

Por otro lado, si partimos de (B.1) con $s = 1 > r$ obtenemos

$$|a_k(r) + \overline{a_{-k}(r)}| = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} V_r(\psi(e^{i\theta})) e^{-ik\theta} \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = 2.$$

Sustituyendo (B.2) queda

$$\begin{aligned} |a_k(r)| &\leq \frac{2}{1-r^{2k}} \leq \frac{2}{1-r}, \\ |a_{-k}(r)| &= |a_k(r)| r^{2k} \leq \frac{2r^{2k}}{1-r}. \end{aligned}$$

Ahora es claro que si $k \geq 2$

$$a_{-k}(0) = \lim_n a_{-k}(r_n) = 0.$$

Por consiguiente podemos definir $u : X \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$u(x) = \begin{cases} c(0) \log |z| + \operatorname{Re} \left(\frac{a_{-1}(0)}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(0) z^k \right) & \text{si } x = \psi(z) \text{ y } 0 < |z| \leq 1, \\ V_0(x) & \text{si } x \in \Omega_1. \end{cases}$$

Obviamente es una función armónica en $X \setminus \{a\}$, pues la primera definición coincide con la segunda en $A(a, 1, 2)$. El teorema estará probado si justificamos que $a_{-1}(0) \neq 0$. Necesitamos algunos hechos previos.

Veamos que, fijado $r_1 < s < 1$, la sucesión $\{V_{r_n}\}$ converge uniformemente a u en $D(a, s)$. En efecto, si $|z| = s$, $r < s$ y $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} |V_r(\psi(z)) - u(\psi(z))| &\leq |c(r) - c(0)| \log \frac{1}{s} + \sum_{k=-\infty}^{-2} |a_k(r)| s^k \\ &\quad + \sum_{k=-1}^m |a_k(r) - a_k(0)| s^k + \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k(r) - a_k(0)| s^k \\ &\leq |c(r) - c(0)| \log \frac{1}{s} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2r^{2k}}{1-r} s^{-k} + \sum_{k=-1}^m |a_k(r) - a_k(0)| s^k + \frac{4}{1-r} \sum_{k=m+1}^{\infty} s^k \\ &\leq |c(r) - c(0)| \log \frac{1}{s} + \frac{2r^2}{(1-r)^2} + \sum_{k=-1}^m |a_k(r) - a_k(0)| s^k + \frac{4}{1-r} \frac{s^{m+1}}{1-s}. \end{aligned}$$

Notemos que antes de sumar la primera serie hemos acotado $(r^2/s) < r$.

Fijado $\epsilon > 0$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{4}{1-r} \frac{s^{m+1}}{1-s} < \frac{\epsilon}{4}, \quad \text{para todo } r < s.$$

Fijando $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$

$$|c(r_n) - c(0)| \log \frac{1}{s} < \frac{\epsilon}{4}, \quad \sum_{k=-1}^m |a_k(r) - a_k(0)| s^k < \frac{\epsilon}{4}, \quad \frac{2r_n^2}{(1-r_n)^2} < \frac{\epsilon}{4},$$

garantizamos que si $n \geq n_0$ entonces $|V_{r_n}(x) - u(x)| < \epsilon$ para todo $x \in D(a, s)$.

Ahora la propiedad C) implica que V_{r_n} converge uniformemente a u en $\overline{\Omega}_s$, y en particular en $\overline{\Omega}_1$. Puesto que las funciones V_{r_n} toman los valores 0 y 1 en $D(a, 1)$, es claro que el límite u no es constante en $D(a, 1)$.

Por último, veamos que $a_{-1}(0) \neq 0$. En caso contrario la función u tendría límite en a (finito o infinito). Supongamos que el límite es $L \neq \infty$. Dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $u[D(a, \delta)] \subset]L - \epsilon, L + \epsilon[$. Por la propiedad A) tenemos que $u[\overline{\Omega}_1] \subset u[\Omega_\delta] \subset]L - \epsilon, L + \epsilon[$, pero esto implica que u es constante en $\overline{\Omega}_1$, en contradicción con lo que hemos probado. Si $L = \infty$ el razonamiento es similar. ■

El teorema B.29, cuya prueba tenemos pendiente, afirma la existencia de funciones meromorfas, y lo que acabamos de probar es un resultado de existencia de funciones armónicas. Según 3.28, una función armónica en un abierto de \mathbb{C} determina una función holomorfa, la que hemos llamado su derivada. Sobre superficies de Riemann, las funciones armónicas no determinan funciones holomorfas, sino formas diferenciales holomorfas. En efecto:

Teorema B.39 *Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica en una superficie de Riemann X . Para cada punto $p \in X$, la aplicación lineal $df|_p : T_p(X) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por*

$$df|_p = \frac{\partial(z^{-1} \circ f)}{\partial z} \Big|_{z(p)} dz|_p,$$

donde z es una carta alrededor de p , es independiente de la elección de z , y la forma diferencial³ df es holomorfa en X . Es fácil ver que esto no depende de la elección de la carta (ni tampoco el orden del polo).

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que w es otra carta alrededor de p . Entonces, aplicando el teorema 3.30 (y la observación posterior):

$$\frac{\partial(w^{-1} \circ f)}{\partial w} \Big|_{w(p)} dw|_p = \frac{\partial((w^{-1} \circ z) \circ (z^{-1} \circ f))}{\partial w} \Big|_{w(p)} dw|_p$$

³Por definición, una forma diferencial (\mathbb{C} -lineal) ω en X es una aplicación que a cada $p \in X$ le asigna $\omega_p \in T_p^*(X)$. Es claro que, si $U \subset X$ es el dominio de una carta z , existe una función $a : U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\omega|_U = a dz$. La forma ω es *holomorfa* si las funciones coordenadas a son holomorfas, para toda carta z . Diremos que ω es una forma diferencial meromorfa en X si está definida salvo a lo sumo en un conjunto de puntos aislados y, si z es una carta de X alrededor de uno de estos puntos, la coordenada de ω respecto de z tiene un polo en a .

$$\begin{aligned}
 &= \left. \frac{\partial(z^{-1} \circ f)}{\partial z} \right|_{z(p)} (w^{-1} \circ z)'(w(p)) dw|_p \\
 &= \left. \frac{\partial(z^{-1} \circ f)}{\partial z} \right|_{z(p)} \left. \frac{dz}{dw} \right|_p dw|_p \\
 &= \left. \frac{\partial(z^{-1} \circ f)}{\partial z} \right|_{z(p)} dz|_p.
 \end{aligned}$$

La forma df es holomorfa porque lo son las funciones

$$z \circ \frac{\partial(z^{-1} \circ f)}{\partial z}. \quad \blacksquare$$

Dada una superficie de Riemann X y un punto $a \in X$, siempre podemos construir una carta ψ^{-1} en las condiciones del teorema B.38 tal que $\psi(0) = a$. Si la llamamos z , la conclusión del teorema es que existe una función armónica $u : X \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ que en un entorno de a es de la forma

$$u(x) = c \log |z(x)| + \operatorname{Re} f(z(x)),$$

donde f es una función meromorfa con un polo simple en 0. Por lo tanto

$$\frac{\partial z^{-1} \circ u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (c \log |z| + \operatorname{Re} f(z)) = \frac{c}{z} + f'(z)$$

tiene un polo doble en 0 y la forma du es meromorfa en X con un polo doble en a . Con esto hemos probado:

Teorema B.40 *Si X es una superficie de Riemann y $a \in X$, existe una forma diferencial meromorfa en X con un único polo en a .*

Ahora es fácil probar:

Teorema B.41 *Si x_1, x_2 son dos puntos distintos en una superficie de Riemann X , existe una función meromorfa $f : X \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea ω_i una forma diferencial meromorfa con un único polo en x_i . Es fácil ver que las formas diferenciales verifican el principio de prolongación analítica: si una forma se anula en un conjunto con acumulación entonces es idénticamente nula. En particular el conjunto $A \subset X$ donde se anula ω_2 es cerrado y discreto, al igual que $\tilde{A} = A \cup \{x_1, x_2\}$. Si $p \in X \setminus \tilde{A}$, la aplicación lineal $\omega_2|_p$ es una base de $T_p(X)^*$, luego existe un número complejo $f(p)$ tal que

$$\omega_1|_p = f(p) \omega_2|_p.$$

Así tenemos definida una aplicación $f : X \setminus \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}$. Vamos a ver que se extiende a una función meromorfa en X . Fijemos $p \in X$ y sea $z : U \rightarrow \mathbb{C}$ una carta alrededor de p tal que $U \cap \tilde{A} \subset \{p\}$. Existen funciones meromorfas g_i tales que $\omega_i|_U = g_i dz$, luego si $p \notin \tilde{A}$ se cumple

$$\omega_1|_U = \frac{g_1}{g_2} \omega_2|_U.$$

Esto prueba que $f|_U = g_1/g_2$ es holomorfa en p . Si $p \in \tilde{A}$, entonces la igualdad anterior vale en $U \setminus \{p\}$, y la función g_1/g_2 es una extensión meromorfa de f a p . Notemos por último que $f(x_1) = \infty$, $f(x_2) = 0$. ■

Para separar n puntos en vez de dos basta hacer una construcción elemental:

DEMOSTRACIÓN (de B.29): Aplicamos el teorema anterior a los puntos x_i y x_j , con lo que obtenemos una función meromorfa $g_{ij} : X \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ tal que $g_{ij}(x_i) \neq g_{ij}(x_j)$. Tomemos un punto $w \in \mathbb{C}^\infty$ distinto de todos los puntos $g_{ij}(x_k)$. Consideramos la transformación de Möbius M_{ij} que cumple

$$M_{ij}(g_{ij}(x_i)) = 1 \quad M_{ij}(g_{ij}(x_j)) = 0, \quad \text{y} \quad M_{ij}(w) = \infty.$$

La función $f_{ij} = g_{ij} \circ M_{ij}$ cumple

$$f_{ij}(x_i) = 1, \quad f_{ij}(x_j) = 0, \quad \text{y} \quad f_{ij}(x_k) \in \mathbb{C} \quad \text{para } k = 1, \dots, n.$$

Ahora definimos $f_i : X \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ mediante

$$f_i(x) = \prod_{j \neq i} f_{ij}(x),$$

que claramente es meromorfa y cumple

$$f_i(x_i) = 1, \quad f_i(x_j) = 0 \quad \text{si } j \neq i.$$

Por último, si c_1, \dots, c_n son números complejos, la función

$$f(x) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x)$$

cumple $f(x_i) = c_i$, luego si los c_i son distintos dos a dos, la función f cumple lo pedido. ■

Terminamos con una aplicación interesante del teorema anterior:

Teorema B.42 *Toda superficie de Riemann tiene una base numerable.*

DEMOSTRACIÓN: Sea S una superficie de Riemann. Por el teorema B.29 existe una función meromorfa no constante $f : S \rightarrow \mathbb{C}^\infty$. Fijemos una base numerable en \mathbb{C}^∞ . Probaremos que las componentes conexas de las antiimágenes por f de los abiertos básicos de \mathbb{C}^∞ forman una base de S , y después veremos que es numerable.

Sea $a \in S$ y sea U un abierto en S que contenga a a . Por el teorema A.13 existen cartas $p : U_0 \rightarrow D(0, r)$ alrededor de a y $q : f[U_0] \rightarrow D(0, r^k)$ alrededor de $f(a)$ de modo que $p(a) = q(f(a)) = 0$ y $(p^{-1} \circ f \circ q)(z) = z^k$. Podemos suponer que $a \in U_0 \subset U$.

Sean $V = p^{-1}[D(0, r/2)]$, $W = q^{-1}[D(0, (r/2)^k)]$. Así $f^{-1}[W] \cap U_0 = V$, $\bar{V} \subset U_0$, luego $\partial V \cap f^{-1}[W] = \emptyset$, es decir, V es abierto y cerrado en $f^{-1}[W]$.

Si G es un abierto básico de \mathbb{C}^∞ tal que $f(a) \in G \subset W$, entonces $f^{-1}[G] \cap V$ es abierto y cerrado en $f^{-1}[G]$, luego la componente conexa de $f^{-1}[G]$ que

contiene a a está contenida en $V \subset U$. Esto prueba que tales componentes conexas son una base de S .

Para probar que esta base es numerable basta ver que cada abierto de S tiene a lo sumo una cantidad numerable de componentes conexas. A su vez para ello basta ver que S tiene un subconjunto denso numerable. El conjunto de puntos donde f es localmente inyectiva es un abierto denso en S , y basta con que éste tenga un subconjunto denso numerable. Equivalentemente, podemos suponer que f es localmente inyectiva.

Fijemos un punto $p \in S$ tal que $\operatorname{Re} f(p), \operatorname{Im} f(p) \in \mathbb{Q}$. Veamos que si U es un abierto en S , existe un arco $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ tal que $\gamma(a) = p, \gamma(b) \in U$ y $\gamma \circ f$ es una poligonal con vértices de coordenadas racionales.

En efecto, existe un arco $\theta : [a, b] \rightarrow S$ que une p con un punto de U . Podemos suponer que $\theta \circ f$ no pasa por ∞ . Para cada $t \in [a, b]$ existe un abierto U_t en S tal que $\theta(t) \in U_t$, la función f es inyectiva en U_t y $f[U_t] = D(f(\theta(t)), r_t)$.

Por compacidad encontramos números reales $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de modo que cada U_{t_i} corte al abierto anterior y al siguiente.

Escogemos un punto $p_1 \in U_{t_0} \cap U_{t_1}$ tal que $f(p_1)$ tenga coordenadas racionales. La inversa de $f|_{U_{t_0}}$ transforma el segmento $[f(a), f(p_1)]$ en un arco γ_1 que une p con p_1 y tal que $\gamma_1 \circ f = [f(a), f(p_1)]$.

Similarmente, tomamos $p_2 \in U_{t_1} \cap U_{t_2}$ tal que $f(p_2)$ tenga coordenadas racionales y prolongamos γ_1 hasta un arco γ_2 . De este modo llegamos hasta el arco γ que buscábamos. Reparametrizando γ podemos exigir que si $\gamma \circ f$ tiene $n + 1$ vértices q_0, \dots, q_n , entonces su dominio es $[0, n]$ y $(\gamma \circ f)(k + t) = (1 - t)q_k + tq_{k+1}$, para $k = 0, \dots, n$ y $t \in [0, 1]$.

La inyectividad local de f implica que si $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow S$ son arcos tales que $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ y $\gamma_1 \circ f = \gamma_2 \circ f$ entonces $\gamma_1 = \gamma_2$.

Esto implica que sólo hay una cantidad numerable de arcos $\gamma : [0, n] \rightarrow S$ tales que $\gamma(0) = p$ y $\gamma \circ f$ es una poligonal cuyos vértices tienen coordenadas racionales y parametrizada como hemos indicado. Los extremos de tales arcos son un subconjunto denso numerable en S . ■

Tenemos, pues, que las superficies de Riemann son espacios topológicos localmente compactos y con una base numerable. Es conocido que esto implica que son espacios metrizable.⁴

⁴Todo espacio localmente compacto es completamente regular, y todo espacio completamente regular se sumerge en un producto de tantas copias del intervalo $[0, 1]$ como abiertos tiene una cualquiera de sus bases. El producto de una cantidad numerable de intervalos es un espacio metrizable.

Índice de Materias

- algebraica (función), 279
- amplitud, 203
- analítica (función), 49
- analítico (conjunto, punto), 334
- anillo, 68
- antiholomorfa (función), 329
- arbitrariamente prolongable (función), 256
- arco seno, coseno, tangente, 257
- argumento, 14
- atlas analítico, 297

- barrera, 360
- biholomorfa (aplicación), 9, 298

- carta analítica, 297
- Cauchy
 - desigualdades de, 32
 - fórmulas integrales, 80
- Cauchy-Riemann (ecuaciones de), 5
- ciclo, 77
- completa (función), 254
- configuración analítica, 280
- curva semiabierta, 105

- derivada
 - logarítmica, 83
 - parcial, 2
- derivada holomorfa, 96
- determinación
 - continua del argumento, 14
 - de una función multiforme, 254
- diferenciable (función), 3
- Dirichlet
 - región de, 360
- dominio
 - de convergencia, 44
 - de Reinhardt, 49
 - completo, 49
- duplicación (fórmula de), 173

- Eisenstein
 - funciones de, 241
 - serie de, 164
- elíptica
 - curva, 168
 - función, 155
- elíptico (punto), 213
- entera (función), 9
- envolvente superior, 367
- estructura analítica, 297
- exponente de convergencia, 131

- factores de Weierstrass, 123
- familia de Perron, 367
- forma, 43
- forma modular, 225
- fórmula
 - de duplicación, 142
- función
 - algebraica, 279
 - arbitrariamente prolongable, 256
 - elíptica
 - de Weierstrass, 158
 - factorial, 136
 - armónica, 366
 - holomorfa
 - multiforme, 254
 - sobre un arco, 250
 - meromorfa
 - multiforme, 254
 - sobre un arco, 250
 - modular, 225
 - de Klein, 220

- periódica, 149
- subarmónica/ superarmónica, 366
- zeta de Jacobi, 184
- germen, 53, 309
 - de función meromorfa, 271
 - generalizado, 278
 - regular, 278
- grado
 - de una aplicación propia, 315
- armónica (función), 343, 366
- holomorfa (aplicación), 298
- holomorfa (función), 9
 - sobre un arco, 250
- holomorfa (función) multiforme, 254
- homografía, 302
- homomorfismo analítico, 323
- Hurwitz (fórmula de), 316
- índice, 76
 - de un ciclo, 77
- índice de ramificación, 310
- integral
 - curvilínea, 20
 - de Poisson, 142
- integral elíptica, 203
- isomorfismo
 - analítico, 323
- Jacobi (funciones elípticas de), 198
- Jensen (fórmula de), 131
- Kelvin (transformada de), 362
- linealmente equivalentes (retículos), 205
- logaritmo, 14
- longitud (de un ciclo), 77
- meromorfa (función), 71, 312
 - multiforme, 254
 - sobre un arco, 250
- modificación de Poisson, 367
- modular
 - forma, 225
- función, 225
- grupo, 207
- transformación, 207
- multi-índice, 41
- multiplicidad (de una función multiforme), 265
- orden
 - de crecimiento, 127
- parabólico (punto), 213
- paralelogramo fundamental, 159
- periódica (función), 149
- periodo, 149
- Perron (familia de), 359
- Poisson (núcleo de), 344
- polianillo, 68
- polidisco, 45
- Principio
 - de monodromía, 264
 - de prolongación analítica, 55, 56, 307
 - de prolongación armónica, 367
 - del argumento, 84
 - del máximo, 353
 - del módulo máximo, 60, 308
 - del máximo, 366
- prolongación analítica, 252
 - por un arco, 252
- propia (aplicación), 313
- punto
 - analítico, 334
 - de escisión, 314
 - de ramificación, 265, 314
 - elíptico, 213
 - parabólico, 213
 - regular, 262
 - simple, 108
- rama, 263
 - uniforme del logaritmo, 14
- rango (de un ciclo), 77
- regular (punto), 262
- retículo, 317
- Riemann (esfera de), 302
- Schwarz (lema de), 61

- serie
 - de Fourier, 153
 - de potencias, 42
 - de Taylor, 47
- simple (punto), 108
- singularidad
 - aislada, 57, 262
 - algebraica, 279
- Stirling (fórmula de), 142, 147
- subharmónica (función), 350, 366
- subvariedad, 331
- superficie
 - de gérmenes, 272
 - de una función, 273
 - de Riemann
 - de una función, 274
- superficie de Riemann, 270, 313
- superharmónica (función), 350, 366

- Taylor (serie de), 47
- Teorema
 - de adición, 173
 - de Bloch, 88
 - de Borel, 135
 - de Cauchy, 34
 - para ciclos, 80
 - de Fatou, 65
 - de Hadamard, 133
 - de Harnack, 348
 - de Hurwitz, 89
 - de la aplicación abierta, 36, 307
 - de la función inversa, 11, 331
 - de las tres circunferencias, 65
 - de las tres rectas, 64
 - de Lindelöf, 110
 - de Liouville (1o), 160
 - de Liouville (2o), 160
 - de Liouville (3o), 162
 - de los residuos, 81
 - de Montel-Caratheodory, 94
 - de Osgood-Taylor-Carathéodory, 112
 - de Picard, 90, 92, 94, 130
 - de Poincaré-Volterra, 253
 - de Rouché, 86
 - de Runge, 115, 117
 - de Schoenflies, 113
 - de Schottky, 92
 - de Taylor, 48
 - de Weierstrass, 37, 125, 308
- toro complejo, 322
- transformación elíptica, hiperbólica, parabólica, 212

- Weierstrass (función de), 157