

# ALGUNOS MATERIALES QUE PUEDEN SER PUNTO DE PARTIDA PARA INVESTIGAR EN EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

José M<sup>a</sup> Chamoso Sánchez  
Facultad de Educación. Universidad de Salamanca  
jchamoso@usal.es

Resumen:

*Se presentan algunos materiales de diversos tipos relacionados con Geometría. El primero es en soporte papel y los segundos en formato electrónico. Todos ellos son diferentes a los que se han utilizado tradicionalmente para la enseñanza. Por ejemplo, en el de soporte papel los contenidos surgen del diálogo de dos personas que pasean por la calle y está acompañado de gran cantidad de fotos. Los segundos son algunas de las escasas producciones hipermedia en español. Por ello se considera que pueden ser instrumentos que se pueden utilizar para realizar investigaciones para su posible aplicación en las aulas de Matemáticas.*

## **1. Material de texto: Contando la Geometría**

Se presenta el diálogo entre dos profesores de Matemáticas mientras callejean por la ciudad. Se observa como un apacible paseo y un poco de conversación pueden ser un contexto donde las ideas matemáticas y las diferentes argumentaciones surgen entre las palabras que se intercambian.

El texto gira en torno a la construcción de una casa. Se abordan diversos aspectos como Geometría en una tarde de paseo, Desde distintos puntos de vista, El camino más corto no siempre es la línea recta, Aplastando caras, La orientación de la casa, Eligiendo azulejos, El alicatado, Replanteando el tejado, Levantando paredes, Las perdices de Paco, En el Oeste americano, La playa la Ñora, Eric el Belga, Punto a punto, La carta japonesa, Garabatos en la pared, La Catedral de Salamanca, Un vaso de agua al final del paseo (Chamoso y Rawson, 2004).

Pero ese ejemplo inocente de hacer Matemáticas entre dos profesionales de la enseñanza puede servir para reflexionar acerca de la posibilidad de llevar al aula un diálogo similar, ya sea entre estudiantes o entre éstos y el profesor, aunque con peculiaridades diferentes. Para ello habría que tener en cuenta tres aspectos: el papel de los estudiantes, el papel del profesor y cómo tiene que ser ese diálogo para que se pueda entender como un medio de enseñanza. Diversos autores apuntan ideas en ese sentido que no se limitan únicamente a contenidos geométricos (Chamoso, 2003).

## **2. Materiales en soporte hipermedia**

Los sistemas hipermedia son el resultado de la unión del hipertexto y la tecnología multimedia. Se caracterizan porque permiten la integración de texto, sonido, locución, imagen y vídeo en un mismo soporte. Esas posibilidades, consideradas de forma

conjunta, permiten una mayor motivación del usuario al facilitar un acercamiento a situaciones similares de la vida real. Además de ese aspecto, estos sistemas posibilitan otras características importantes como *Interactividad y retroalimentación, Multirrepresentación, Animación y simulación, Enlaces, Refuerzo y Ergonomía*. Esas propiedades permiten que el usuario controle el trabajo que quiera ejercer pudiendo insistir en los aspectos que le presenten dificultades, recordar o aprender conceptos que no tenga suficientemente asimilados o avanzar en aquéllos que domine con seguridad. Todo ello permite organizar el conocimiento de una forma diferente a la usual del libro de texto. A continuación se presentan algunos ejemplos de instrumentos implementados en ese soporte.

## **2.1. Resolución de problemas**

Se trata de un CD-ROM para la Resolución de Problemas en Matemáticas. Uno de los objetivos más importantes en la elaboración de esta herramienta está dirigido a considerar cómo resolvería el problema un estudiante. Se pretende conseguir que distinga la información relevante de la que no lo es, así como qué es lo que realmente se quiere resolver. De esa forma se quiere organizar una estructura mental que el alumno pueda aplicar cuando se enfrenta a cualquier tipo de situación problemática. Presenta dos posibilidades de trabajo: una específica para el alumno y otra dirigida al profesor (Chamoso Sánchez, Hernández Encinas, López Fernández y Rodríguez Sánchez, 2004).

La opción del profesor pretende recopilar aquellos contenidos, teóricos y prácticos, que están relacionados con Resolución de Problemas, ya sea para informar de aspectos generales, resolver dudas concretas, o incluso, si se desea, continuar investigando sobre el tema para complementar la información que se posee. Por ello, por ejemplo, en ella se desarrollan los fundamentos de la teoría de Resolución de Problemas, los principios en los que se basa, algunos de los principales modelos de resolución según diferentes autores y las estrategias más comúnmente utilizadas. Además, se ofrece una colección de enunciados de problemas y bibliografía específica sobre los diferentes aspectos tratados.

La otra opción es la dedicada al alumno, aquél a quien primordialmente se dirige la aplicación. Para ello se desarrollan diversos problemas, los cuales se han seleccionado de manera que requieran diferentes estrategias heurísticas. El marco general del proceso de resolución de cada uno de ellos sigue las etapas de resolución de Polya (Comprensión, Estrategia, Resolución y Comprobación, 1973), las cuales están reflejadas en la barra superior de cada una de las pantallas de forma que, cuando se esté ejecutando cada una de las fases, ésta aparece señalada en vídeo inverso. Además, en esta misma barra, aparecen los menús Archivo y Ayuda. Este último, por ejemplo, ofrece la posibilidad de utilizar una calculadora así como tener acceso a consultar un glosario de los términos matemáticos utilizados en los distintos problemas tratados.

Detallemos alguna de las fases. Por ejemplo, en la comprensión se pretende organizar y codificar el conjunto de informaciones existentes en el enunciado con el fin de obtener una representación mental de cada una de ellas. Por ello, a través de diferentes pantallas se van planteando diversas preguntas claves como: ¿Qué tenemos?, ¿Qué queremos hacer?, ¿Qué podemos utilizar?, Hay que buscar.... Este marco se define de forma similar en cada problema según las características de cada uno de ellos. De esa forma se intentan establecer, pantalla a pantalla, los elementos básicos que permitan la

comprensión. Ante la respuesta inadecuada en alguna de ellas, se enlaza con el enunciado donde se remarca en color diferente la parte que hace referencia al error cometido.

Algunos problemas permiten la posibilidad de continuar investigando dejando un campo abierto a posibles generalizaciones del mismo, ya sea cambiando los datos o alternando las condiciones iniciales. De esa forma se trata de situar al usuario en un marco más amplio que posibilite distintas actuaciones. Según lo expuesto, el propio proceso de implementación conlleva la evaluación permanente de las acciones del alumno, puesto que el avance en la navegación asegura que el camino seguido es correcto. Además, las simulaciones y multirrepresentaciones permiten reforzar el aprendizaje y hacer más atractivo el problema (más detalle, Chamoso Sánchez, Hernández Encinas, López Fernández y Rodríguez Sánchez, 2002).

## **2.2. Pitágoras y los pitagóricos**

Se presenta otra alternativa al uso de las herramientas hipermedia en Matemáticas que no se limita al desarrollo de un contenido matemático específico ni al trabajo con procedimientos. En este caso, se aborda a Pitágoras desde dos puntos de vista: uno de ellos referido a Pitágoras y los pitagóricos de forma genérica de modo que es entendido como eje fundamental sobre el que pivotan diferentes aspectos matemáticos y otro, más clásico, relacionado con los contenidos del propio teorema y algunas de sus demostraciones, con aplicaciones diversas, juegos, etc. aunque desde un punto diferente al tradicional pues se incorporan simulaciones, multirrepresentaciones y posibilidad de retroalimentación (más detalle, Chamoso y Rodríguez, 2004).

Centrándose en la herramienta, en la pantalla de presentación hay dos entradas dependiendo de la forma de acceso a las partes del CD-ROM: La primera por medio de la parte relativa a Pitágoras y los pitagóricos y la otra a partir de los contenidos del Teorema de Pitágoras. La primera de ellas conduce a una sucinta presentación de Pitágoras y su escuela. Permite tres enlaces que son los puntos clave de esta parte de la aplicación. Dos de ellos son explicativos y de profundización de aspectos concretos: la biografía de Pitágoras (con acceso, por ejemplo, a mapas de la Grecia clásica) y el de la Escuela Pitagórica (su filosofía, significado, trascendencia futura, simbología, etc.), aunque avanzando en ellos también permiten acceder a los descubrimientos y avances matemáticos relacionados con Pitágoras y los pitagóricos. El tercero permite la entrada directa a esos trabajos que abarcan muchas partes de las Matemáticas, al menos tantas como las ramas en que dividieron a las mismas y que fue origen del posterior *Quadrivium* de las ciencias. Cada uno de ellos es motivo de nuevos enlaces que profundizan en esos apartados como, por ejemplo, los siguientes:

- a) Aritmética: Aparecen los números poligonales, números poligonales centrados, números perfectos y amigos, el misticismo asociado a los números, la presunta aparición de los números irracionales a partir de los pitagóricos, etc.
- b) Geometría: Se explica la influencia de los tres problemas clásicos en los posteriores avances de los pitagóricos, los cinco poliedros regulares, el estudio de proporciones, etc.

- c) Astronomía: Se reseña la descripción pitagórica del Universo en términos numéricos, su hipótesis del movimiento circular uniforme que aceptaría Copérnico casi 2000 años más tarde, etc.
- d) Música: Se establecen las bases de la actual escala musical.

Además de ello se utiliza su simbología, es decir, se presenta la estrella pentagonal como símbolo identificativo de los pitagóricos con el objetivo de analizar sus propiedades e introducir los conceptos relacionados con la proporcionalidad a partir de la sección áurea. También se introducen otras partes de las Matemáticas como, por ejemplo, las medidas estadísticas.

Por otro lado, la entrada a la parte del CD-ROM dedicada al Teorema de Pitágoras puede hacerse, bien desde algunos enlaces aparecidos en la primera entrada o bien desde la pantalla de presentación, del mismo modo que desde esta entrada se tiene acceso, mediante los oportunos enlaces, a todo el contenido de la sección dedicada a Pitágoras y los pitagóricos. En particular, en esta entrada se tiene acceso a las siguientes secciones:

- a) Enunciado del Teorema.
- b) Demostraciones del Teorema recogidas en Loomis (1972). Por ejemplo, la demostración de Euclides desde las páginas de los Elementos, una desarrollada en Java manipulable mediante un navegador; la de Chou Pei Suan Ching, Thabit ibn Qurra, Baskara, Leonardo da Vinci, etc.; también otra constructiva mediante el programa informático CABRI.
- c) Actividades diversas, entre las que se incluyen ejercicios, problemas, extensiones del Teorema y juegos. Los ejercicios son entendidos como aplicaciones directas de propiedades teóricas o de algoritmos previamente aprendidos. La aplicación presenta una lista de ejercicios a los que se puede solicitar su solución pero no cómo resolverlo. Los problemas ya no tienen una resolución inmediata por lo que se acompañan de una simulación; además de poder acceder al resultado de sus solución, también se posibilita pedir la sugerencia de una pista que visualice aquellos aspectos que facilitan la resolución del mismo. Las extensiones son problemas en los que se pide demostrar cuestiones que, basadas en el Teorema, van más allá del mismo. El juego está basado en el de Ericksen, Stasiuk and Frank (1995), aunque se han cambiado las preguntas y se han establecido dos niveles de complejidad: uno elemental, con actividades y ejercicios sencillos y otro, más elevado, con actividades más complicadas y algunos problemas.
- d) Curiosidades, entre las que destacan algunas fotos en las que aparece el Teorema de Pitágoras en fachadas de Universidades de Matemáticas, otras tomadas en la calle a partir de las cuales se puede demostrar el teorema de Pitágoras, aparecen los Versos de oro que se consideran una síntesis de las doctrinas pitagóricas, etc.

## Referencias:

Chamoso, J. M. (2003): Considering dialogue as a social instrument in the Mathematics class. *For the Learning of Mathematics* 23, 1, 30-40.

- Chamoso Sánchez, J. M<sup>a</sup>; Hernández Encinas, L., López Fernández, R. y Rodríguez Sánchez, M. (2002): Designing Hypermedia Tools for Solving Problems in Mathematics. *Computers & Education* 38, 303-317.
- Chamoso Sánchez, J. M<sup>a</sup>; Hernández Encinas, L.; López Fernández, R. y Rodríguez Sánchez, M. (2004): *CD-ROM para la Resolución de Problemas en Matemáticas*. Madrid: Nivola (Finalista V Premio Möbius Barcelona Multimedia 1999).
- Chamoso, J. y Rawson, W. (2004): *Contando la Geometría*. Colección Diálogos de Matemáticas. Madrid: Nivola.
- Chamoso Sánchez, J. M<sup>a</sup> y Rodríguez Sánchez, M. (2004): *CD-ROM de Pitágoras y los pitagóricos*. Madrid: Nivola.
- Ericksen, D.; Stasiuk, J. y Frank, M. (1995): Bringing Pythagoras to life. *The Mathematics Teacher* 88, 744-747.
- Loomis, E.S. (1972): *The Pythagorean Proposition*. Reston: NCTM.
- Polya, G. (1973): *How to solve it*. Princeton. NJ: Princeton University Press.