

## LA GESTIÓN DE LA CLASE DE GEOMETRÍA UTILIZANDO SISTEMAS DE GEOMETRÍA DINÁMICA

M. J. GONZÁLEZ-LÓPEZ<sup>1</sup>

glopez@matesco.unican.es

Universidad de Cantabria

*En este capítulo analizamos las modificaciones que conlleva la utilización de software de geometría dinámica en la enseñanza, desde la perspectiva de la actuación del profesor en el aula. Para ello clasificamos en cuatro bloques los factores que condicionan la gestión de la clase en ese contexto, dependiendo de que correspondan a cambios en las condiciones de trabajo, a las distintas formas de comunicación que el software favorece, a los diferentes modos de resolver las tareas propuestas y a los tipos de actividades que pueden proponerse. Esto nos permite especificar algunas pautas de actuación posibles para el profesor, que concretamos en: sugerir contraejemplos para modificar decisiones erróneas, fomentar la autonomía del alumno intentando que se corrija a sí mismo, situar información local en un ámbito geométrico global y descontextualizar el conocimiento adquirido en un entorno computacional.*

### INTRODUCCIÓN

Los Sistemas de Geometría Dinámica (Cabri-Géomètre, Geometer's Sketchpad, The Geometry Inventor, The Geometric Supposers, etc.), aparecidos durante los años 80 y propuestos como recursos útiles para la enseñanza de la Geometría, han tenido una gran difusión internacional, especialmente en los niveles de Primaria y Secundaria. Esta buena acogida ha hecho que se fueran desarrollando nuevas versiones, incluyendo cada vez más sofisticación en los contenidos, y ha propiciado la aparición de nuevos paquetes de software, con la promesa de superar los logros obtenidos por los anteriores -como el reciente Cinderella (Richter-Gebert y Kortenkamp 99)-. Algunos

---

1. Parcialmente subvencionado por ESPRIT/LTR 21.024 y por DGESIC PB98-0713-C02-02.

de ellos (por ejemplo, Cabri-Géomètre) han sido incorporados en algunas calculadoras gráficas de fácil manejo y precio asequible.

En España han proliferado los cursos de manejo de este tipo de software educativo para profesores, principalmente promovidos por los Centros de Profesores; también las asignaturas de formación inicial de profesores de Primaria sobre nuevas tecnologías, didáctica de la matemática o informática educativa han incorporado a sus programas apartados específicos de manejo de alguno de estos sistemas, que en lo sucesivo denominaremos por las siglas SGD.

Los SGD se caracterizan por poseer una pantalla gráfica sobre la que el usuario puede dibujar objetos geométricos primitivos (puntos, rectas, segmentos, etc.) y registrar relaciones geométricas entre ellos (perpendicularidad, paralelismo, etc.) a partir de un repertorio prefijado. Estas acciones producen construcciones geométricas más o menos complejas en las que algunos objetos pueden ser seleccionados por el usuario y “arrastrados” por la pantalla, manteniendo las relaciones geométricas establecidas en la construcción.

Consideramos los SGD enmarcados en el ámbito de los micro-mundos geométricos, uno de cuyos rasgos esenciales es que no hay objetivos didácticos predeterminados en el software, a diferencia de otro tipo de programas tipo “tutor” cuyo diseño incorpora de forma cerrada una intención didáctica clara (Balacheff y Kaput, 1996). Esto hace que su eficacia educativa dependa esencialmente del uso que se haga de ellos. Según esto, el profesor, como responsable de la organización del proceso de enseñanza, es el encargado de hacer una elección precisa de entre un amplio abanico de posibilidades.

Son varias las investigaciones que describen los cambios que sufre el proceso de enseñanza/aprendizaje por el uso de ordenadores, tanto desde planteamientos generales como desde particularizaciones a contenidos concretos, a contextos diferenciados, a tipos específicos de software, a los distintos papeles del profesor y los alumnos, etc. Por mencionar algunas de ellas: Artigue (1990-1991), Fraser et al. (1988), García et al. (1995), Gómez (1997), Hoyles y Noos (1992), Laborde (1992) y Monaghan (1998).

En este trabajo nos proponemos analizar las modificaciones que la utilización de un SGD introduce desde la perspectiva de la intervención del profesor en el aula. Para ello utilizaremos los trabajos publicados sobre el tema integrando nuestra reflexión personal, fruto de la experiencia de uso de uno de estos sistemas durante varios años, el Cabri-Géomètre, con alumnos de tercer curso de Magisterio de la Universidad de Cantabria.

Dado que la intervención del profesor está enmarcada en un contexto preciso de aprendizaje comenzamos estableciendo, en la primera sección, el marco aceptado para el aprendizaje con un SGD: se trata de un modelo de aprendizaje constructivista, basado en la resolución de problemas mediante exploración y conjetura. En este contexto el papel del profesor cambia, en la medida en que son diferentes:

- las condiciones de trabajo,
- las formas de comunicación que el software ofrece,
- los modos de proceder que se propician en la resolución de tareas, y

- los tipos de actividades matemáticas estándar que pueden proponerse.

Analizamos todos estos condicionantes en la segunda sección, con el fin de fundamentar y concretar algunas pautas de actuación del profesor que son distintas respecto de la enseñanza en un medio no informatizado; presentamos estas pautas en la última sección.

## MARCO GENERAL DE APRENDIZAJE CON SGD

El uso en la enseñanza de un SGD, como caso particular de entorno interactivo de aprendizaje por ordenador, se enmarca dentro de las teorías constructivistas del aprendizaje, tal como detallan, entre otros, Yábar (1995), y Bellemain y Capponi (1992). En este marco general la geometría no se concibe como un cuerpo codificado de conocimientos a transmitir, sino como el resultado de una actividad de los sujetos sobre determinados objetos de su entorno. En un SGD tales objetos son el resultado de una modelización computacional de determinados conceptos geométricos y las actividades a desarrollar están condicionadas por el tipo de comunicación que se establece con el sistema informático. La naturaleza del conocimiento matemático que se trabaja cambia respecto del contexto de lápiz y papel; ahora se centra en el estudio de las propiedades invariantes que posee una determinada construcción geométrica, propiedades que el usuario puede observar o predecir manipulando la construcción realizada.

El aprendizaje se enmarca así en una lógica de recreación o reconstrucción de conocimientos, que es impulsada por las interacciones del profesor con los alumnos. Algunos autores (Laborde, 1998; Noos y Hoyles, 1996; Hoyles, 1992) sugieren además la posibilidad de que se desarrollen resortes de aprendizaje nuevos, más allá de la aproximación constructivista, interpretando el papel del profesor y los alumnos como co-exploradores que adquieren conocimiento a partir de las relaciones alumno-profesor y alumno-alumno. Estas interacciones están influenciadas por las propuestas de Vygotsky sobre construcción social del conocimiento, y tratan de integrar los objetos matemáticos, el entorno material, social y cultural del alumno, y su experiencia personal.

En este contexto, el SGD no es un simple medio de interacción entre el alumno y los objetos matemáticos representados, sino que funciona modificando la forma en que se ejerce la actividad matemática respecto de la enseñanza geométrica tradicional con lápiz y papel; tiene unos condicionantes claros sobre las acciones de los alumnos y, en consecuencia, influye en la modificación de sus concepciones y en el aprendizaje que éstos realizan (Assude y Capponi, 1996).

En este marco de construcción del conocimiento, la enseñanza de la geometría utilizando un SGD está basada en la resolución de problemas, con una perspectiva en la que los alumnos tienen la posibilidad de explorar, descubrir, reformular, conjeturar, validar o refutar, sistematizar; en definitiva, ejercer el papel de investigadores sobre cada contenido que se pretende adquirir. El profesor cambia su papel de director y

experto por el de co-partícipe, apoyo y co-aprendiz (McLoughlin y Oliver, 1999; Fisher, 1993).

## **FACTORES QUE CONDICIONAN LA CLASE DE GEOMETRÍA DEBIDOS AL USO DE UN SGD**

Una vez establecido el nuevo marco de enseñanza-aprendizaje en el que integrar el uso de un SGD para la enseñanza de la geometría, detallaremos algunos factores que condicionan la gestión de la clase por parte del profesor, algunos de los cuales son distintos de los que surgen con una enseñanza de la geometría en un entorno no informatizado. Clasificamos dichos factores en cuatro bloques, dependiendo de que surjan por el cambio en las condiciones de trabajo, por el tipo de interacción que se produce con el software, por el estilo distinto de quehacer matemático que se propicia y por los tipos de actividades matemáticas estándar que pueden proponerse.

### **Factores debidos al cambio en las condiciones de trabajo**

El aula donde se desarrolla la enseñanza con ordenadores suele ser distinta de la usual y los alumnos trabajan habitualmente por parejas. En consecuencia, no hay un grupo compacto, con un progreso colectivo, que atiende sistemáticamente las explicaciones del profesor cuando éstas se producen, sino que cada pareja avanza individualmente, a su ritmo y por su propio camino.

Este hecho hace que las intervenciones generales del profesor sean, en general, poco útiles, salvo que se produzcan en momentos verdaderamente clave, por ejemplo, al inicio de una nueva actividad o en una fase final de cierre o institucionalización. El resto de las fases en el desarrollo de la actividad en las que se considere necesaria la intervención del profesor no pueden ser llevadas a cabo conjuntamente, ni con el mismo tipo de intervención para todos, ya que cada actividad evoluciona en un sentido distinto y en momentos diferentes, dependiendo del progreso y nivel de cada pareja de alumnos. La distribución del tiempo de clase no puede determinarse a priori de forma global. Así consideramos que esta forma de trabajo individualiza las relaciones del profesor con cada pareja de alumnos y requiere intervenciones específicas del profesor adaptadas a los diversos intereses y dificultades de cada pareja.

Este grupo de factores es compartido por cualquier otro método de enseñanza basado en la resolución de problemas, en grupos pequeños, y en el que la experimentación e investigación de los alumnos sea lo esencial en la ejecución de una actividad propuesta.

### **Factores debidos al tipo de interacción con el sistema**

El SGD interpreta las acciones del alumno, devolviéndole una información sobre su producción, información que el alumno puede utilizar a su vez para continuar progresando en la construcción de conocimientos. Este tipo de interacción en un SGD es llamada *retroacción* por Laborde (1998), quien comenta la importancia de que la información provenga de un dispositivo externo e independiente del profesor. La retroacción tiene las propiedades fundamentales de:

- producir información inmediata: se pueden hacer muchos dibujos en poco tiempo, con gran precisión;
- reproducir muchas posiciones distintas de una misma construcción geométrica, dada la posibilidad de arrastrar elementos constituyentes de la misma, y permitir el paso a casos límite.

Siendo la retroacción una cualidad esencial para hacer evolucionar a los alumnos, algunas investigaciones han constatado que ante una respuesta inesperada del sistema los alumnos tienden a volver a empezar la actividad, sin aprovechar realmente la información que el sistema ofrece (Bellemain y Capponi, 1992). En nuestra experiencia hemos observado que, a medida que los alumnos tienen más soltura en el manejo técnico de los botones del software, se lanzan con mayor premura a una actividad frenética de uso de los comandos, sin detenerse a reflexionar sobre las consecuencias de sus acciones; en estos casos es muy frecuente que ante una respuesta no esperada del sistema los alumnos vuelvan a comenzar la actividad.

Una segunda reacción frecuente en los alumnos es negar la posibilidad de que ocurra una determinada respuesta errónea a partir de sus acciones, atribuyendo el error al sistema (“quise hacer esto y lo hice, pero el sistema registró otra cosa distinta”); de manera similar, si el profesor indica un camino por el que no se produciría el error, afirman haber seguido ese camino, a pesar de la respuesta del sistema.

La posibilidad, antes comentada, de que una actividad progrese por un camino no previsto puede legitimar estas posturas de los alumnos, que no tendrían por qué tener los conocimientos geométricos necesarios para poder interpretar la información del sistema. Por ello, en estos casos el profesor tiene que evaluar *in situ* el alcance de la respuesta producida por el SGD y determinar si los conocimientos geométricos requeridos para interpretarla están o no al alcance del alumno en ese momento.

En general, la intervención del profesor podría estar encaminada a construir un sentido para cada acción ejercida por el alumno y dar a éste una visión global de su tarea, de forma que el alumno consiga ser consciente de las razones que le impulsan a actuar, antes de hacerlo.

### **Factores debidos a los modos de proceder en la resolución de las tareas propuestas**

En un SGD la comunicación con el usuario está basada en la *visualización* que, además, tiene la peculiaridad de ser *dinámica*. Así, una actividad imprescindible es relacionar información geométrica con información observada en un dibujo que se mueve, en un dibujo en el que se pueden desplazar ciertos elementos para obtener nuevos dibujos con las mismas propiedades geométricas que el de partida. Este aspecto dinámico es fundamental y novedoso en la visualización e incide en la generalización y en la abstracción, en la detección de propiedades invariantes y en la posibilidad de conjeturar y experimentar el cumplimiento de propiedades geométricas que no estaban previamente establecidas (Morrow, 1997).

Sin embargo, hay que tener en cuenta que adquirir determinados conocimientos geométricos a partir de un dibujo no es un asunto inmediato ni espontáneo y no ocu-

re sin una intervención específica (Laborde,1992; Hillel et al.,1989). En este sentido, el uso de un SGD podría afianzar la idea errónea de que mostrar el dibujo de una construcción geométrica y “moverlo” es suficiente para que el alumno deduzca una determinada propiedad geométrica invariante por el movimiento, dado que el sistema sólo ofrece soporte gráfico. La simple sustitución de la regla y el compás tradicionales por botones en un sistema computacional, por más que este introduzca algunas variantes, no es razón suficiente para esperar mejoras en el aprendizaje de la geometría (Recio,1999). Debemos tener en cuenta estas circunstancias en la enseñanza, de forma que la intervención del profesor trate de fomentar en el alumno la reflexión encaminada a dar significado a las percepciones visuales móviles; se trata, en definitiva, de conseguir que el alumno establezca relaciones entre sistemas de representación distintos para un mismo concepto (Hitt,1998).

Este tipo de interacción no sólo es considerada útil en el ámbito de la geometría, sino que algunos autores la declaran de interés en la formación de conceptos más abstractos como el de variable o el de función (Cuoco y Goldenberg,1997), o aspectos de teoría de grupos (Schattschneider,1997).

Otra característica a tener en cuenta es la necesidad de *verbalización*, en dos aspectos distintos:

- por un lado, verbalizar para eliminar posibles ambigüedades o equívocos que pueden percibirse en una imagen visual: en Laborde (1998, pp.36) se indica que “Es necesaria una descripción discursiva que caracterice al objeto geométrico para eliminar las ambigüedades inherentes al dibujo”;
- por otro lado, expresar en palabras una conclusión geométrica observada parece suponer un esfuerzo considerable y necesario para la adquisición de conocimientos geométricos (Murillo,1999).

Otra característica es que se requieren modos de proceder algorítmicos: en numerosas actividades propuestas para trabajar en los SGD los alumnos deben elaborar un proceso de construcción de una figura descrita a partir de sus propiedades geométricas y están obligados a distinguir entre trazado y procedimiento de trazado. Además está la posibilidad de realizar macro-construcciones, es decir, de definir primitivas propias que pueden ser incorporadas al sistema para ser usadas en contextos distintos de los que las han creado, lo que exige al usuario identificar separadamente los datos de partida, el proceso de construcción y el producto final. La presentación de un proceso de construcción geométrica como una sucesión de primitivas y de macro-construcciones lo identifica con un proceso algorítmico de atomización de un problema en subproblemas aislados y consecutivos, cuyo seguimiento conduce a una solución global. Nuevamente la intervención del profesor puede encaminarse a hacer reflexionar al alumno sobre la necesidad de ser consciente de los pasos que realiza al resolver una determinada tarea, pasos que tienden a clarificarse tras una actividad exploratoria inicial no controlada.

### **Factores debidos al tipo de actividades que se proponen**

En el contexto que estamos planteando, las actividades a desarrollar en un SGD tienen por objetivo general que el alumno investigue sobre un problema y así descubra determinadas propiedades geométricas. La variedad de contenidos geométricos que pueden ser tratados utilizando un SGD es amplia, así como las correspondientes listas de actividades (véase, por ejemplo, Carrillo-Llamas 99, Mora 00, Cuppens 99). Obviamente, la elección y diseño de actividades significativas por parte del profesor es esencial para el éxito de las mismas, por lo que es importante que el profesor analice las implicaciones que tiene cada tipo de actividad. Realizamos a continuación una clasificación de actividades estándar, comentando en cada caso las características que consideramos más relevantes para el aprendizaje y la gestión de la clase.

#### *Figuras geométricas: haciendo explícito el conocimiento geométrico*

Las actividades en las que se pide al alumno construir una determinada figura geométrica (por ejemplo, “dado un segmento, construye un cuadrado que lo tenga por lado”) exigen al alumno hacer explícitas un mínimo de propiedades geométricas necesarias para describir formalmente la figura (en el ejemplo del cuadrado anterior, por ejemplo “tener lados iguales y lados consecutivos perpendiculares”). Dichas propiedades son, sin duda, reconocidas en una inspección visual, y hartamente conocidas si el profesor las enuncia a priori; pero se trata de que el alumno deduzca que dichas propiedades del cuadrado son incumplidas por el resto de los cuadriláteros, es decir, de que defina formalmente la clase “cuadrado” por exclusión. Si la construcción no es correcta, bastará que el profesor mueva la construcción para indicar al alumno la propiedad incumplida.

#### *Propiedades geométricas: actividades para la exploración, la conjetura y la demostración experimental.*

Cuando nos planteamos explorar, conjeturar o comprobar determinadas propiedades geométricas sobre una construcción geométrica, realizar dicha construcción en un SGD corresponde a construir una imagen visual que verifica unas ciertas hipótesis que han quedado registradas de alguna forma en el sistema; la actividad exploratoria corresponde a arrastrar por la pantalla del sistema los elementos libres de la construcción geométrica y observar las invariancias que se producen. Así se constatan determinadas propiedades y se elaboran conjeturas. El SGD sirve para hacer una comprobación experimental que constituye una evidencia de falsedad si encontramos un contraejemplo; pero si la conjetura es cierta observaremos que se cumple para todas las posiciones que dibujemos de la figura, lo cual no constituye una prueba formal, ni tampoco podemos esperar que la simple constatación visual sea elemento motivador o inspirador de dicha prueba. Más bien, al contrario, puede constituir un obstáculo dado que los alumnos no perciben la necesidad de demostrar algo visualmente evidente. Es conveniente que el profesor tenga esto en cuenta y clarifique estos términos en los niveles en los que algún tipo de demostración sea necesaria.

En casos especiales los SGD aseguran (formalmente) la veracidad de ciertas propiedades: alineación de tres puntos, paralelismo y perpendicularidad de rectas, semirectas, segmentos o vectores; equidistancia de un punto a otros dos y pertenencia de

un punto a un objeto, etc. Algunos SGD incorporan un “chequeo aleatorio de teoremas” que genera y prueba ejemplos de una propiedad conjeturada, concluyendo la veracidad (con una determinada probabilidad) o la falsedad (caso de encontrar un contraejemplo).

En este mismo sentido señalamos que el sistema puede producir una “anticipación de respuesta” que el profesor debe tener en cuenta en el planteamiento y gestión de actividades, pues puede impedir precisamente las beneficiosas tareas de exploración y conjetura.

*Lugares geométricos: complemento visual para la información geométrica no trivial.*

La posibilidad de mover un punto de una construcción euclídea se complementa con la opción de que otros elementos dependientes de él dejen una “huella visual” en la pantalla del ordenador, lo que permite obtener una visualización del lugar geométrico de dichos elementos cuando el punto recorre una determinada trayectoria.

Los problemas geométricos que involucran el uso de lugares geométricos suelen plantear dificultades de visualización: por ejemplo, no es trivial poder dibujar sobre un papel, en un nivel de Secundaria, el lugar geométrico siguiente (tomado de Carrillo y Llamas (1999), p. 45) “Dada una circunferencia y un punto interior A, que no sea el centro, sea P un punto de la circunferencia y r la recta perpendicular al segmento PA por el punto P. Hallar el lugar geométrico que determina la recta r cuando el punto P recorre la circunferencia”; y sin embargo, se trata de (la envolvente de) una elipse. En estos casos, los SGD aportan un complemento visual nuevo, difícil de obtener por otros medios.

Otro ejemplo prototipo del uso de lugares geométricos es la construcción de cónicas. En este aspecto, las últimas versiones de los SGD más conocidos incorporan un paquete específico de tratamiento de cónicas también desde un punto de vista analítico (elipse, hipérbola o parábola en Cabri-Géomètre), permitiendo su definición a partir de cinco puntos que deben ser marcados con el ratón sobre la pantalla gráfica del programa. En particular, los programas ofrecen la posibilidad de mostrar la ecuación de dichas cónicas, integrando así en un mismo entorno el tratamiento geométrico y analítico de éstas.

*Simulación: combinando geometría y cinemática.*

La posibilidad de hacer animación y de arrastrar elementos básicos de las figuras geométricas manteniendo las reglas geométricas de construcción permite simular el funcionamiento de multitud de mecanismos físicos cotidianos, como poleas, bicicletas, manivelas, o cualquier otro tipo de mecanismo articulado (Mora, 2000). Este uso del software de geometría dinámica revela interesantes cuestiones sobre las implicaciones de *representar el movimiento* valiéndonos de reglas geométricas y dibujos sobre una pantalla de un ordenador (Laborde, 1999; Kortenkamp y Richter-Gebert, 1999).

El diseño geométrico de un mecanismo, es decir, el proceso necesario entre la descripción de su funcionamiento y su modelización mediante una sucesión ordenada de instrucciones geométricas (tomadas de un determinado repertorio), es un intere-



sante y complejo ejercicio algorítmico que pone en juego distintas habilidades en las que lo esencial es traducir a un lenguaje geométrico las restricciones de funcionamiento del mecanismo considerado.

También se pueden simular otro tipo de fenómenos físicos (no necesariamente mecánicos) como, por ejemplo, aspectos ópticos de reflexión o refracción de luz, movimiento de planetas, etc.

#### *Geometrías no euclídeas: más allá de la intuición.*

El software de Geometría Dinámica puede utilizarse para reproducir entornos de geometría no euclídea. Así, por ejemplo, tenemos el caso del entorno desarrollado por Laborde (1997), donde se describe una forma de organizar en Cabri-Géomètre el modelo de Poincaré usado para representar la geometría hiperbólica. En Cinderella tenemos la posibilidad de modelizar las geometrías hiperbólica y elíptica.

#### *Combinación de aspectos geométricos y analíticos: interdisciplinariedad.*

Los SGD incorporan una serie de herramientas analíticas, como las siguientes:

- primitivas para definir vectores y representar operaciones aritméticas con ellos,
- primitivas de medición de magnitudes definidas gráficamente (longitudes, ángulos, razones trigonométricas, áreas, etc.),
- calculadora científica que opera con las medidas anteriores, actualizando los resultados al modificar la construcción,
- primitivas de cálculo de ecuaciones de rectas, pendientes de rectas, ecuaciones de cónicas, coordenadas de puntos, etc., que hayan sido definidas previamente con primitivas gráficas.

La utilización de estas herramientas permite combinar métodos geométricos y analíticos para obtener representaciones completas y novedosas sobre algunos aspectos, entre los que cabe destacar la resolución de problemas de máximos y mínimos, optimización, proporcionalidad, etc. (véase, por ejemplo, Cuoco y Goldenberg (1997) o Gorini (1997)).

## **ACTUACIÓN DEL PROFESOR**

Una vez establecido el marco metodológico y los factores a tener en cuenta, especificaremos algunas actuaciones posibles del profesor en la clase de geometría con un SGD. Así trataremos de enumerar algunas acciones en las que puede concretarse el papel del profesor como gestor de la cooperación entre los alumnos y el modelo geométrico implementado en el software.

- ‘conducir hacia la abstracción y la generalización,
- invitar a la predicción de resultados,

- provocar la reflexión sobre el tipo o tipos de representación que entran en juego,
- ayudar a la interpretación de relaciones entre lo visual y lo formal,
- introducir formalmente nuevas ideas matemáticas que surjan del entorno visual,
- ayudar a explorar las intuiciones personales.

Indicaremos a continuación una concreción de estas pautas generales al ámbito que nos ocupa de los SGD.

### **Intervenir para modificar una decisión errónea mediante contraejemplos**

En las actividades propuestas en un SGD es importante ser consciente del grado de iniciativa que se deja al alumno. Esta característica condiciona la intervención del profesor que no deberá actuar mientras el alumno progresa correctamente o tenga oportunidades de evolucionar por sí mismo.

Si éste no es el caso, el profesor podrá mostrar el carácter erróneo de una decisión tomada por el alumno, produciendo un contraejemplo adecuado que evidencie el error cometido. Este método de mostrar un contraejemplo está especialmente indicado en las actividades estándar que suelen proponerse en un SGD, ya que en ellas lo esencial es diseñar un *proceso de elaboración* de una determinada construcción geométrica (conducente a la resolución de un problema). La validez de dicho proceso se constata si, al modificar los elementos básicos constituyentes de la construcción, las propiedades geométricas objeto de estudio permanecen invariantes. Por tanto el carácter erróneo de una decisión tomada por el alumno y los contraejemplos correspondientes se muestran realizando un simple desplazamiento con el ratón en la pantalla.

Con este método se muestra al alumno que el objetivo no era producir (el dibujo de) una figura sino definir correctamente (mediante leyes geométricas) el proceso que conduce a la obtención de la misma. El SGD sirve así de apoyo al profesor para avalar su propia opinión frente al alumno: en Bellemain y Capponi (1992) se indica que en un contexto de lápiz y papel el profesor puede invalidar un proceso de construcción, pero no el dibujo construido, que puede ser correcto, lo que hace que el alumno no admita el carácter erróneo de su proceder y busque las razones de su fracaso en no haber satisfecho las expectativas del profesor. Sin embargo, usando un SGD el profesor obtiene contraejemplos a partir de la producción del alumno, lo que hace que éste reconozca y asuma de mejor grado el error cometido.

### **Animar al alumno a que se corrija a sí mismo**

En un SGD el alumno tiene acceso a un medio que le permite validar sus construcciones, sin embargo no es de esperar que el alumno asuma el papel de corrector de sus propias actividades. En el artículo de Bellemain y Capponi (1992) citado anteriormente se muestra un estudio con alumnos de 13-14 años para enseñar el concepto de simetría axial en Cabri-Géomètre, en el que se constata que los alumnos se resisten a

tomar decisiones para comprobar la validez de sus procedimientos y que este tipo de exigencia aumenta la incertidumbre del alumno, quien considera que estas tareas son propias del profesor.

Esta postura legítima del alumno está basada en que no tiene conocimientos teóricos suficientes para validar o refutar una construcción y en que, en una enseñanza tradicional, nunca ha tenido la responsabilidad de hacerlo. Es tarea del profesor hacer ver al alumno que, a diferencia de lo que ocurre en un contexto de lápiz y papel, con el uso de un SGD tiene a su alcance una herramienta –no conceptual– que le permite valorar por sí mismo la corrección de una decisión tomada. El profesor puede animar al alumno a usar esta capacidad del SGD como una continuación del resto de decisiones que ha venido tomando.

### **Globalizar**

El alumno recibe una transferencia de responsabilidad que tiene como objetivo que comprenda el alcance de sus decisiones en el contexto geométrico que se esté trabajando; queda así más claro que dichas decisiones son un apoyo a la construcción de conocimiento geométrico y no un aprendizaje técnico de uso de unos botones de un software. En Hoyles y Noos (1992) se indica que esta autonomía del alumno produce “comprensión matemática local”, por lo que la intervención del profesor debe orientarse a dar una visión global de las decisiones tomadas.

### **Transferir a otros contextos para institucionalizar los conocimientos**

Los aprendizajes realizados en un determinado contexto no tienen por qué transferirse automáticamente a otros distintos, aunque compartan determinadas características. En Noos y Hoyles (1992) se han estudiado este tipo de transferencias en el marco general de los micromundos geométricos, concluyendo que los estudiantes construyen y articulan relaciones matemáticas que son interpretables y tienen significado sólo si se refieren a las herramientas usadas. Así se habla de *abstracciones situadas* para referirse a actividades de las que se puede extraer una generalización, pero el conocimiento está definido por las acciones dentro de un contexto. También en el artículo de Bellemain y Capponi (1992) citado anteriormente se constata que ciertas concepciones erróneas (sobre la simetría axial) que no se ponen de manifiesto en el trabajo con el software reaparecen si a continuación se proponen las mismas actividades con papel y lápiz. También se indica que los procedimientos utilizados para realizar determinadas construcciones con lápiz y papel no se transfieren al entorno Cabri-Géomètre ni recíprocamente. Estas conclusiones nos indican la necesidad de que el profesor intervenga para institucionalizar los nuevos conocimientos adquiridos. Para ello la actuación del profesor puede basarse en la puesta en común de los nuevos conocimientos y en la propuesta de situaciones similares en otro tipo de entorno que exhiba explícitamente los conocimientos geométricos implicados en las tareas propuestas. Se pueden sugerir dos tipos de entornos con los que establecer similitudes y diferencias con el SGD: por un lado está el uso de las clásicas herramientas regla y compás para resolver la misma actividad; por otro lado se puede proponer el uso de un entorno computacional de dibujo, con su típica paleta gráfica. En ambos casos se

debe tratar de destacar la importancia del proceso de elaboración geométrica frente a la simple obtención de un dibujo.

## CONCLUSIONES

El marco de aprendizaje constructivista en el que se inserta el uso de un SGD requiere un cambio del papel del profesor desde la postura de director de la clase y dispensador de información que tiene en un ámbito tradicional, hacia un papel de co-partícipe, apoyo, co-aprendiz, facilitador y asesor en el progreso de los alumnos. Hemos identificado algunos factores que aparecen al usar un SGD para la enseñanza de la geometría, algunos de los cuales son compartidos por otros métodos de enseñanza. Cada uno de dichos factores condiciona el aprendizaje y, en consecuencia, la gestión de la clase por parte del profesor. Su actuación en el aula cuenta así con unas pautas generales en las que apoyarse: sugerir contraejemplos ante decisiones erróneas, animar al progreso y fomentar la autonomía del alumno, enmarcar las decisiones particulares en un ámbito geométrico global, institucionalizar y descontextualizar, son las directrices que se concretarán en cada actividad propuesta y sobre cada grupo particular de alumnos.

## BIBLIOGRAFÍA

- Artigue, M. (1990-91). Analyse de processus d'enseignement en environnement informatique. *Petit x*, 26, 5-27.
- Assude, T. y Capponi, B. (1996). De l'économie et de l'écologie du travail avec le logiciel Cabri-Géomètre. *Petit x*, 44, 53-79.
- Balacheff, N., & Kaput, J.J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 469-501). Dordrecht: Kluwer.
- Bellemain, F., & Capponi, B. (1992). Specificité de l'organisation d'une séquence d'enseignement lors de l'utilisation de l'ordinateur. *Educational Studies in Mathematics*, 23 (1), 59-97.
- Carrillo, A. y Llamas, I. (1999). *Cabri-Géomètre II para windows: construcciones y lugares geométricos*. Madrid: Ed. RA-MA.
- Cuoco, A. A. & Goldenberg, E. P. (1997). Dynamic geometry as a bridge from euclidean geometry to analysis. En J. King, D. Schattschneider (Eds.), *Geometry turned on: Dynamic software in learning, teaching and research. MAA notes*, 41 (pp. 33-44). Washington: Mathematical Association of America.
- Cuppens, R. (1999). Faire de la Géométrie supérieure en jouant avec Cabri-Géomètre II. Tome 1 & 2. *Brochure APMEP*, 124.
- Fisher, E. (1993). The teacher's role. En P. Scrimshaw (Ed.), *Language, classrooms and computers*. (pp. 57-74). London: Routledge.

- Fraser, R., Burkhardt, H., Coupland, J., Phillips, R., Pimm, D., & Ridgway, J. (1988). Learning activities and classrooms roles with and without the microcomputer. En A. Jones, & P. Scrimshaw (Eds.), *Computers in education 5-13*. Milton Keynes: Open University Press.
- García, C., Martínez, A. y Miñano, R. (1995). *Nuevas tecnologías y enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Síntesis.
- Gómez, P. (1997). Tecnología y Educación Matemática. *Informática Educativa*, 10 (1), 93-111.
- Gorini, C. A. (1997). Dynamic visualization in calculus. En J. King, & D. Schattschneider (Eds.), *Geometry turned on! Dynamic software in learning, teaching and research. MAA notes*, 41 (pp. 89-94). Washington: Mathematical Association of America.
- Hillel, J., Kieran, C., Gurtner, J.-L. (1989). Solving structured geometric tasks on the computer: the role of feedback in generating strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 1-39.
- Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Educación Matemática*, 10 (2), 23-45.
- Hoyle, C. (1992). Computer-based microworlds: a radical vision or a trojan mouse? En C. Gaulin (Ed.), *ICME-7 Selected Lectures*. Quebec: Universidad de Laval.
- Hoyle, C., & Noos, R. (1992). A pedagogy for mathematical micro-worlds. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 31-57.
- Kortenkamp, U. H., & Richter-Gebert, J. (1999). Dynamic Geometry I: the problem of continuity. En H. Brönnimann (Ed.), *Proceedings 15th European Workshop on Computational Geometry* (pp. 51-53). Sophia Antipolis: INRIA.
- Laborde, C. (1992). Enseigner la géométrie: permanences et révolutions. En C. Gaulin (Ed.), *ICME-7 Selected Lectures* (pp. 47-75). Quebec: Universidad de Laval.
- Laborde, C. (1998). Cabri-geometra o una nueva relación con la geometría. En L. Puig (Ed.), *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática* (pp. 33-48). Bogotá: una empresa docente.
- Laborde, J. M. (1997). Exploring non-euclidean geometry in a dynamic geometry environment like Cabri-géomètre. En J. King, D. Schattschneider (Eds.), *Geometry turned on: Dynamic software in learning, teaching and research. MAA notes*, 41 (pp. 185-192). Washington: Mathematical Association of America.
- Laborde, J. M. (1999). Some issues raised by the development of implemented Dynamic Geometry as with Cabri-géomètre. En H. Brönnimann (Ed.), *Proceedings 15th European Workshop on Computational Geometry* (pp. 7-19). INRIA Sophia Antipolis.
- McLoughlin, C., & Oliver, R. (1999). *Pedagogic roles and dynamics in telematics environments*. En M. Selinger, & J. Pearson (Eds.), *Telematics and Education: Trends and Issues* (pp. 32-50). Oxford: Pergamon.
- Monaghan J. (1998). Les enseignants et la technologie. En D. Guin (Ed.), *Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques Actes du colloque franco-phone européen* (pp. 159-164). Montpellier: IREM de Montpellier.
- Mora, J. A. (2000). *Matemáticas con Cabri II. Cuadernos para el Aula de Matemáticas*. Granada: Proyecto Sur de Ediciones, S.L.

- Morrow, J. (1997). Dynamic visualization from middle school through college. En J. King, D. Schattschneider (Eds.), *Geometry turned on: Dynamic software in learning, teaching and research. MAA notes, 41* (pp. 47-54). Washington: Mathematical Association of America.
- Murillo, J. (1999). *Un entorno de aprendizaje interactivo para la enseñanza de la geometría en al ESO: actividades con Cabri*. Ponencia presentada en las III Jornadas de la SEIEM, Universidad de Valladolid.
- Noos, R., & Hoyles, C. (1992). Looking back and looking forward. En C. Hoyles & R. Noos (Eds.), *Learning mathematics and Logo* (pp. 431-468). Cambridge: MIT Press.
- Noos, R., Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings. Learning cultures and computers*. Kluwer Academic Press.
- Recio, T. (1999). Compass avoidance. *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, 53*, 59-66.
- Richter-Gebert, J., & Kortenkamp, U. (1999). *Cinderella – The interactive geometry software*. Berlin: Springer Verlag.
- Schattschneider, D. (1997). Visualization of group theory concepts with dynamic geometry software. En J. King, D. Schattschneider (Eds.), *Geometry turned on: Dynamic software in learning, teaching and research. MAA notes, 41* (pp. 121-128.). Washington: Mathematical Association of America.
- Yábar, J. M. (1995). El ordenador en la enseñanza secundaria dentro de un enfoque constructivista del aprendizaje. *Aula de Innovación Educativa, 40-41*, 33-37.