LOS PATRONES GEOMÉTRICOS COMO CONTEXTO PARA INTRODUCIR A UN ESTUDIANTE DE EDUCACIÓN PRIMARIA CON ALTAS CAPACIDADES MATEMÁTICAS EN EL ÁLGEBRA[i]

Geometric pattern problems as a context to introduce a mathematically talented primary school student into algebra

Arbona, E., Beltrán-Meneu, M. J., Gutiérrez, Á., Jaime, A.

Dpto. de Didáctica de la Matemática. Universitat de València

Resumen

En este capítulo presentamos los resultados obtenidos en una investigación de diseño en la que hemos diseñado y puesto en práctica una secuencia de enseñanza para iniciar en álgebra, mediante problemas de patrones geométricos, a estudiantes con altas capacidades matemáticas. Hemos experimentado la secuencia diseñada con un estudiante superdotado de 9 años de edad y, a partir de sus respuestas, hemos analizado los procesos de aprendizaje involucrados y las características surgidas propias de estudiantes con altas capacidades matemáticas. El estudiante ha manifestado preferencia por la estrategia funcional de cálculo de términos de la secuencia y las generalizaciones factual y contextual. También ha mostrado buena capacidad de generalización y gran rapidez de aprendizaje, comprendiendo el álgebra con facilidad y siendo capaz, además, de aplicar lo aprendido a otros contextos de ecuaciones lineales.

Palabras clave: *pre-álgebra, ecuaciones lineales, patrones geométricos, altas capacidades matemáticas, educación primaria*

Abstract

The aim of this paper is to present the findings of a research, based on the design research methodology, in which we have designed and experimented a teaching sequence that allows to introduce algebra, through geometric pattern problems, to mathematically talented students. The teaching unit has been implemented with a 9-years-old gifted student, whose answers have been used as data to analyse the learning processes involved and the characteristics of the mathematically talented students showed. This student preferred functional strategies to calculate terms of the sequence and factual and contextual algebraic generalizations. The student has also shown a good capability of generalization and quick learning, being able to understand algebraic concepts with little difficulty and being able to apply the new knowledge to other contexts of linear equations.

Keywords: *pre-algebra, lineal equations, geometric patterns, mathematical giftedness, primary school*

INTRODUCCIÓN

> La sociedad no se puede permitir el lujo de que en este siglo se nos sigan quedando niños sin atender, por la injusticia social que supone y por el "despilfarro" que significa no disponer de los alumnos de alta capacidad intelectual con una buena formación, cuando nuestro futuro como sociedad, como grupo, va a depender de los avances en el saber (Torrego, 2011, p. 9).

Arbona, E., Beltrán, M. J., Gutiérrez, Á., y Jaime, A. (2017). Los patrones geométricos como contexto para introducir a un estudiante de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas en el álgebra. En Codina, A. (Coord.), Puig, L. (Coord.), Arnau, D., Sánchez, M. T., Montoro, A. B., Claros, J., Arnal, M., y Baeza, M. A. (Eds.), *Investigación en pensamiento numérico y algebraico: 2017* (pp. 38-47). Madrid: Universidad Rey Juan Carlos y SEIEM.

El inicio al estudio del álgebra puede servir como contexto para potenciar a los estudiantes con altas capacidades matemáticas, así como para llevar a cabo una intervención educativa en Educación Primaria, pues el álgebra es una parte fundamental del currículum de matemáticas en la E.S.O. Concretamente, el estudio del álgebra en Educación Primaria puede ser abordado desde la perspectiva del pensamiento algebraico, el cual permite a los estudiantes trabajar y operar con cantidades desconocidas e indeterminadas sin necesidad de usar notaciones simbólicas alfanuméricas (Radford, 2011b).

Los problemas de generalización son un entorno de trabajo que permite desarrollar y promover el pensamiento algebraico. Los problemas de *patrones geométricos* muestran representaciones geométricas de los primeros términos de una sucesión numérica (generalmente una progresión aritmética) y piden calcular varios términos de la sucesión, con dificultad de cálculo gradual. Este tipo de problemas permite el desarrollo de las habilidades de abstracción y generalización de los estudiantes con altas capacidades matemáticas y son considerados actividades matemáticas ricas (Jaime y Gutiérrez, 2014).

Investigaciones didácticas recientes han mostrado que estudiantes de Primaria, incluso de los primeros cursos, son capaces de iniciarse en el aprendizaje del pre-álgebra con la ayuda de los problemas de patrones geométricos (Cooper y Warren, 2011; Radford, 2011a). Amit y Neria (2008) realizaron un análisis detallado de las estrategias empleadas por estudiantes de 11 a 13 años con altas capacidades matemáticas para resolver problemas de patrones que dirigen a la generalización. Fritzlar y Karpinski-Siebold (2012) analizaron las diferencias existentes entre los modos de pensamiento de estudiantes de 4º curso de Educación Primaria, entre los que se incluían estudiantes con altas capacidades, y diferenciaron 5 componentes del pensamiento algebraico.

Esta investigación tiene como objetivo describir y analizar formas de trabajo pre-algebraico que permitan llevar a cabo intervenciones educativas con estudiantes de Educación Primaria de altas capacidades matemáticas. Este objetivo general se desglosa en los tres objetivos específicos siguientes, referidos a estudiantes de Primaria con altas capacidades matemáticas:

- Diseñar y experimentar una secuencia de enseñanza-aprendizaje que permita la iniciación al álgebra.
- Analizar los procesos de aprendizaje empleados por los estudiantes durante la implementación de la secuencia.
- Identificar las características de alta capacidad matemática manifestadas por los estudiantes en el contexto de los problemas de patrones geométricos.

MARCO TEÓRICO

Los problemas de patrones geométricos, generalmente,

> presentan los primeros términos de una secuencia [numérica] y piden calcular, por este orden, el término *inmediato* (el que sigue a los dados), un término *próximo* a los conocidos (de manera que se puedan utilizar tanto la representación geométrica como la aritmética para el cálculo de valores), un término *lejano* tal que, aunque esté asociado a un valor numérico, su representación gráfica sea costosa de llevar a cabo y sea más conveniente poner en marcha un proceso de generalización y, finalmente, formular una expresión (que se espera sea algebraica) para el término *general* de la secuencia (Benedicto, Jaime y Gutiérrez, 2015, p. 154).

Además de estas cuestiones, denominadas de *relación directa*, se pueden plantear cuestiones de *relación inversa* (Rivera, 2013), que piden calcular la posición en la secuencia del término representado por una cantidad dada de objetos. Las cuestiones de relación directa sirven como contexto idóneo para introducir a los estudiantes en la generalización de relaciones numéricas y las cuestiones de relación inversa sirven para iniciarles en el planteamiento y la resolución de ecuaciones.

Para la resolución de estas cuestiones, los estudiantes emplean distintas estrategias. Por una parte, Rivera y Becker (2005) distinguen entre estrategias visuales y numéricas en función del uso que hacen los estudiantes de la información gráfica representada en los patrones. Las *estrategias visuales* son aquellas en las que los estudiantes analizan y descomponen la información gráfica representada en los términos. Las *estrategias numéricas* son aquellas en las que los estudiantes usan los valores numéricos de los términos sin prestar atención a su representación gráfica.

Por otra parte, García-Reche, Callejo y Fernández (2015) describen cuatros tipos de estrategias para calcular el valor numérico de los términos en las cuestiones de relación directa: *conteo*, *recursiva*, *funcional* y *proporcional*. La estrategia de *conteo*, también denominada representación gráfica, consiste en dibujar la representación gráfica del término demandado y contar la cantidad de objetos que tiene. La estrategia *recursiva* se basa en realizar sumas sucesivas de la diferencia entre los valores de dos términos consecutivos de la secuencia, hasta llegar al término demandado. La estrategia *funcional* consiste en aplicar, implícita o explícitamente, una relación funcional general que permite el cálculo de la cantidad de objetos de cualquier término conociendo su posición en la secuencia. La estrategia *proporcional*, que generalmente es errónea, permite calcular el valor de un término de la secuencia estableciendo una proporción entre las posiciones de dos términos de la secuencia (generalmente uno de los dados y el término solicitado) y sus cantidades de objetos.

Según el tipo de estrategia empleada en la resolución de los problemas, Radford (2006) distingue entre *inducción ingenua* (resolución mediante ensayo y error) y *generalización* (búsqueda de similitudes entre términos). También distingue distintos niveles de generalización: *aritmética* (mediante el uso de la estrategia recursiva), *algebraica factual* (mediante el uso de una relación funcional descrita con números concretos), *algebraica contextual* (mediante el uso de una relación funcional descrita verbalmente) y *algebraica simbólica* (mediante el uso de una relación funcional expresada mediante símbolos alfanuméricos).

Küchemann (1981) analizó los significados que atribuyen los estudiantes a las letras en función del uso que les dan e identificó seis formas diferenciadas de interpretarlas y usarlas: *letra evaluada*, *letra no usada*, *letra usada como objeto*, *letra usada como incógnita*, *letra usada como número generalizado* y *letra usada como variable*.

Autores como Krutetskii (1976), Greenes (1981), Miller (1990), Tourón y otros (1998) y Freiman (2006) han identificado diversas características que presentan los estudiantes de altas capacidades matemáticas. Las más relevantes en el contexto de nuestra investigación son la identificación de patrones y relaciones entre diferentes elementos, la generalización y transferencia de ideas o conocimientos matemáticos de un contexto a otro y la inversión de procesos mentales de razonamiento matemático.

METODOLOGÍA

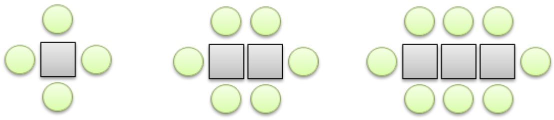
Para dar respuesta a los objetivos específicos planteados en la investigación, empleamos una metodología cualitativa basada en la investigación de diseño y enfocada hacia una intervención educativa extracurricular para estudiantes de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas. Para ello, diseñamos una secuencia de enseñanza de pre-álgebra basada en problemas de patrones geométricos, con tres etapas diferenciadas.

Los experimentos de diseño pueden ser muy variados en cuanto a su tipología y alcance. En esta investigación, escogimos el experimento de diseño uno a uno (Cobb y otros, 2003), para el cual seleccionamos una muestra de conveniencia formada por un único estudiante, identificado como superdotado y especialmente destacado en el área de matemáticas. Implementamos la secuencia de enseñanza en formato de entrevista clínica a través de videoconferencia. Este estudiante, en el momento de iniciar la experimentación, tenía 9 años y había finalizado 4º de Educación Primaria.

La secuencia de enseñanza

La secuencia fue dividida en tres etapas, de modo que los contenidos y la consecución de los objetivos didácticos tuviesen una evolución gradual. La primera etapa estaba destinada al inicio del estudiante en la generalización matemática mediante problemas de patrones geométricos y la resolución de relaciones inversas. En esta etapa, elaboramos problemas con cuestiones de generalización inmediata, próxima y lejana y una cuestión de relación inversa (Figura 1). Además, estos problemas de patrones geométricos correspondían a distintos tipos de ecuaciones, tanto lineales ($y=ax\pm b$; $y=ax\pm b(x\pm c)\pm d$) como cuadráticas ($y=x^2$; $y=(x\pm a)(x\pm b)$).

Este sábado, María va a realizar una comida con sus amigos y familiares para celebrar que ha cumplido 12 años. Para ello, quiere calcular cuántas mesas y sillas le harán falta. Quiere sentarlos del siguiente modo:



1 mesa 2 mesas 3 mesas

Pero María tiene un problema: no sabe cuántos invitados acudirán a su fiesta. ¿Podrías ayudarle a calcular cuántos invitados cabrán en función de cuántas mesas coloque?

a) ¿Cuántos invitados cabrán con 6 mesas? ¿Cómo lo sabes?

b) ¿Cuántos invitados cabrán con 15 mesas? ¿Cómo lo sabes?

c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos invitados cabrán con 50 mesas? ¿Cómo lo sabes?

d) Si hay 22 invitados, ¿cuántas mesas habrá? ¿Cómo lo sabes?

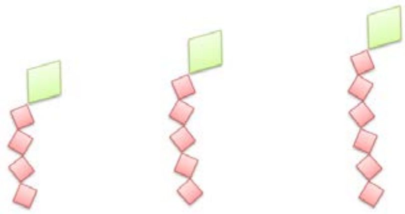
Figura 1. Problema de patrones geométricos de la etapa 1.

La segunda etapa tenía como finalidad iniciar la enseñanza de conceptos algebraicos como el significado de las letras y la transformación de expresiones verbales en algebraicas, e introducir la resolución de ecuaciones lineales. Para ello, en esta etapa, elaboramos problemas de patrones geométricos con cuestiones de generalización cercana, escritura de la fórmula general verbalizada y una cuestión de relación inversa (Figura 2).

Mediante la escritura de la fórmula verbalizada introdujimos al estudiante en la utilización de la simbología algebraica y la transformación de expresiones verbales en algebraicas. La introducción de la simbología algebraica se inició dotando a las letras de un significado propio de cada problema, para que emplease las letras como sustitutas de números desconocidos. Para ello, le propusimos usar la letra como objeto (Küchemann, 1981), haciendo uso de la inicial de la palabra que hace referencia a la incógnita del problema (Store, Richardson y Carter, 2016). Por ejemplo, en la Figura 2, el estudiante usaría *m* para referirse a *minuto*, su incógnita. Una vez introducidas las letras, también le propusimos que transformase las expresiones verbales en expresiones algebraicas manteniendo el orden sintáctico empleado en la verbalización. Además, le enseñamos la jerarquía de las operaciones y el uso del paréntesis para que pudiese escribir correctamente las expresiones generales verbalizadas.

Por último, la cuestión de relación inversa nos sirvió para introducir al estudiante en la resolución de ecuaciones lineales. Para ello, empleamos un modelo de balanza dinámica (NLVM, 2016) que nos permitía representar y operar las ecuaciones mediante procesos de compensación (Figura 3).

Alberto ha decidido salir hoy a volar su cometa. Como hay bastante viento para volarla alto, cada minuto añade piezas cuadradas a su cola, como ves:



Minuto 1 Minuto 2 Minuto 3

a) ¿Cuántas piezas cuadradas habrá en la cola en el minuto 10? ¿Cómo lo sabes?

b) Escribe la fórmula que has utilizado.

c) Si la cola tiene 45 piezas cuadradas, ¿cuántos minutos habrán pasado? ¿Cómo lo sabes?

Figura 2. Problema de patrones geométricos de la etapa 2.

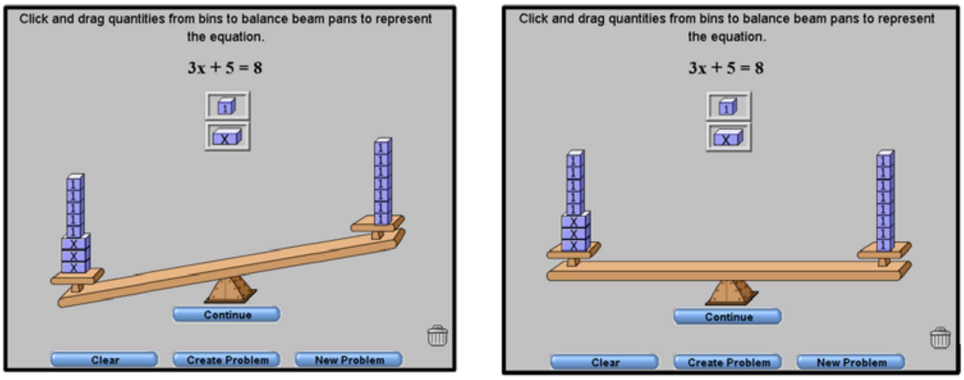


Figura 3. Modelo de balanza dinámica.

En la tercera etapa buscábamos aplicar los conocimientos adquiridos. Para ello, la dividimos en dos subetapas: una para resolver problemas de patrones geométricos en los que, previamente, el alumno había mostrado dificultades en las cuestiones de relación inversa; la otra donde transferir esos conocimientos a otros contextos más dispares.

Para la subetapa de aplicación del álgebra en problemas de patrones geométricos, diseñamos tres nuevas cuestiones (Figura 4), que pedían: escribir la expresión algebraica para obtener cualquier término de la secuencia, simplificar la expresión proporcionada, para introducir el estudiante en la transformación de expresiones algebraicas a través del uso de operaciones aritméticas básicas, y una cuestión de relación inversa, para comprobar que el estudiante había comprendido el modelo de la balanza y lo aplicaba al resolver ecuaciones.

Para la subetapa de aplicación del álgebra en otros contextos, diseñamos 7 problemas algebraicos de ecuaciones lineales (Figura 5) con contextos diferentes al de los problemas de patrones geométricos y con un aumento gradual de dificultad. Entre ellos, había problemas que fomentan la transformación de expresiones verbales en expresiones algebraicas, problemas de edades y ecuaciones descontextualizadas.

Marc y su amigo quieren dibujar una urbanización con palillos. La dibujan del siguiente modo:

1 casa   2 casas   3 casas

a) Escribe la fórmula algebraica que utilizarías para calcular cuántos palillos necesitará en función del número de casas.

b) ¿Crees que podríamos escribir esta fórmula de un modo más simple? Escríbela.

c) Si hay 96 palillos, ¿cuántas casas dibujarán? ¿Cómo lo sabes?

Figura 4. Problema de patrones geométricos de la etapa 3.

Héctor y María han estado contando en clase cuántos lápices de colores tiene cada uno. Héctor tiene el doble de María más 7. Si Héctor tiene 33 lápices, ¿cuántos tiene María?

Figura 5. Problema verbal algebraico de la etapa 3.

ANÁLISIS

Hemos dividido el análisis de la experimentación en dos partes, correspondientes a los dos últimos objetivos específicos planteados: el análisis de los procesos de aprendizaje empleados por el estudiante y el análisis de las características propias de las altas capacidades matemáticas manifestadas por el estudiante.

En primer lugar, para analizar las respuestas del estudiante en cada etapa de la secuencia, hemos identificado las estrategias empleadas, a partir de la clasificación de estrategias que hemos descrito en el marco teórico, así como los niveles de las generalizaciones realizadas por el estudiante. Este análisis (Tabla 1) muestra que, para la resolución de cuestiones de relación directa en la primera etapa de la secuencia de enseñanza, el estudiante tenía preferencia por estrategias visuales y funcionales, aunque también utilizó en ocasiones las estrategias numérica y recursiva. Además, en estas cuestiones, empleó mayoritariamente generalizaciones algebraicas factuales y contextuales (Radford, 2006).

Tabla 1. Estrategias y generalizaciones en las cuestiones directas de la primera parte de la secuencia.

	Estrategias de relación directa				Niveles de generalización		
Cuest.	Visual	Numérica	Recursiva	Funcional	Aritmética	Factual	Contextual
a	12	8	5	15	5	8	7
b	14	5	1	18	1	12	6
c	14	5	0	19	0	12	7

En las cuestiones de relación inversa (Tabla 2), el estudiante empleó, casi siempre correctamente, la inversión de operaciones en generalizaciones del tipo $y=ax\pm b$, pero fue incapaz de hacerlo en otras más complejas, como $y=ax\pm b(x\pm c)\pm d$, $y=x^2$ e $y=(x\pm a)(x\pm b)$, ya que todavía no sabía resolver ecuaciones ni había estudiado raíces cuadradas. En estos casos, el estudiante resolvió las cuestiones mediante una estrategia de ensayo y error.

En la segunda etapa, destacó una comprensión dual del significado de las letras –como objeto y como número generalizado–, el uso correcto del paréntesis y de la jerarquía de las operaciones, al convertir sus generalizaciones verbales en expresiones algebraicas, y la resolución de ecuaciones lineales mediante el modelo de la balanza, que le permitió comprender el proceso de resolución mediante la compensación y progresar en el uso de la sintaxis algebraica mediante diagramas representativos de la balanza realizados con el procesador de textos (Figura 6; ver también la Figura 2).

Tabla 2. *Estrategias de resolución de las cuestiones inversas de la primera parte de la secuencia.*

Tipo de generalización	Ensayo y error	Inversión correcta	Inversión errónea
$y = ax \pm b$	1	6	1
$y = ax \pm b(x \pm c) \pm d$	7	- -	- -
$y = x^2$	2	- -	- -
$y = (x \pm a)(x \pm b)$	3	- -	- -

c) Si la cola tiene 45 piezas cuadradas, ¿cuántos minutos habrán pasado? ¿Cómo lo sabes?

m–1+4

m–1+4=45
10
1 10
1 -- 10
1 -- 10
m 5

m–1+4=45
9
9
-- 9
-- 10
m 5 m=42 minutos

Figura 6. Diagrama imitando la balanza realizado por el estudiante para resolver una ecuación.

La tercera etapa mostró un progreso en la adquisición de conocimientos y su asimilación significativa. El estudiante siguió haciendo uso de las estrategias visuales y funcionales, pero realizando únicamente generalizaciones algebraicas simbólicas (Tabla 3), pues los problemas pedían proporcionar expresiones algebraicas.

Tabla 3. *Estrategias y generalizaciones directas usadas en la tercera parte de la secuencia.*

	Estrategias de relación directa				Niveles de generalización		
Cuest.	Visual	Numérica	Recursiva	Funcional	Factual	Contextual	Simbólica
a	7	0	0	7	0	0	7

Además, era capaz de resolver cualquier cuestión de relación inversa mediante ecuaciones, haciendo uso de las letras como variables y sin referencias aparentes a la balanza. También aplicaba correctamente y sin grandes dificultades los conocimientos adquiridos a otros tipos de problemas verbales de ecuaciones lineales. En la Figura 7, vemos cómo primero resolvió el problema algebraicamente y después verificó que la solución que había obtenido era correcta.

Dentro de 10 años, Alberto tendrá el doble de la edad que tenía hace 4 años. ¿Cuántos años tiene ahora Alberto?

$$\begin{gathered}(A-4)\times 2=A+10\\ 2A-8=A+10\\ 2A=A+18\\ A=18\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(18-4)\times 2=18+10\\ 14\times 2=18+10\\ 28=28\end{gathered}$$

Figura 7. Resolución de un problema verbal realizada por el estudiante.

En cuanto a la identificación de características de altas capacidades matemáticas, hemos analizado la presencia o ausencia de las dificultades descritas por Banerjee y Subramaniam (2012) y Jupri, Drijvers y Van den Heuvel-Panhuizen (2015), así como la manifestación de distintas características propias de las altas capacidades matemáticas que han sido observadas en el estudiante durante la secuencia, tomando como referencia el listado realizado por Jaime y Gutiérrez (2014).

Este análisis indica que el estudiante mostró distintas características propias de las altas capacidades matemáticas, entre las que podemos destacar la identificación de patrones y relaciones, la capacidad de generalizar, la flexibilidad en el uso de estrategias –como se puede observar en el análisis que hemos realizado de la primera (Tablas 1 y 2) y la tercera etapas (Tabla 3) de la secuencia–, la localización de la clave en los problemas y, sobre todo, la rapidez de aprendizaje, ya que fue capaz de aprender a usar el álgebra en tan sólo 12 sesiones de 40 minutos cada una.

CONCLUSIONES

Hemos presentado los principales resultados de una investigación basada en el análisis del caso de un estudiante de 4º de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas que resolvió una secuencia de actividades de pre-álgebra. La secuencia estaba organizada con el objetivo de guiar al estudiante en el aprendizaje de los elementos básicos del sistema algebraico de signos, la representación algebraica de generalizaciones funcionales del término general de secuencias numéricas, la resolución de ecuaciones lineales y la resolución de problemas verbales de este tipo de ecuaciones. Hemos analizado las estrategias de resolución del estudiante y hemos identificado algunas características de alta capacidad matemática puestas de manifiesto durante la experimentación.

Las experimentaciones que hemos llevado a cabo en esta investigación han mostrado que los problemas de patrones geométricos son una buena herramienta para la introducción de estudiantes de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas en el mundo del álgebra a través de la generalización de relaciones funcionales y la posterior simbolización de las expresiones verbales que describen dichas generalizaciones. Aunque la información aquí presentada sólo representa el principio de nuestra investigación, esta servirá como punto de partida para profundizar en estas y otras cuestiones de investigación, a través del rediseño y mejora de la secuencia de enseñanza y así completar la metodología propia de la investigación de diseño mediante el desarrollo de nuevos macrociclos.

Referencias

Amit, M. y Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM, 40*, 111-129.

Banerjee, R. y Subramaniam, K. (2012). Evolution of a teaching approach for beginning algebra. *Educational Studies of Mathematics, 80*, 351-367.

Benedicto, C., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en educación matemática XIX* (pp. 153-162). Alicante: SEIEM.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Research, 32*(1), 9-13.

Cooper, T. J. y Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalize: Models, representations and theory for teaching and learning. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 187-214). Berlín: Springer.

Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A challenging situations approach. *The Montana Mathematics Enthusiast, 3*(1), 51-75.

Fritzlar, T. y Karpinski-Siebold, N. (2012). *Counting patterns as a component of algebraic thinking – An interview study with primary school students*. Texto presentado en el 12th International Congress on Mathematical Education (ICME12). Seúl, Corea del Sur.

García-Reche, A., Callejo, M. L. y Fernández, C. (2015). La aprehensión cognitiva en problemas de generalización de patrones lineales. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 279-288). Alicante: SEIEM.

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *The Arithmetic Teacher, 28*(6), 14-17.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de E. Primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). Valencia: PUV.

Jupri, A., Drijvers, P. y Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2015). Improving grade 7 students' achievement in initial algebra through a technology-based intervention. *Digital Experiences in Mathematics Education, 1*(1), 28-58.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: University of Chicago Press.

Küchemann, D. (1981). Algebra. En K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 102-119). Londres: John Murray.

Miller, R. C. (1990). *Discovering mathematical talent*. Washington, DC: Eric.

National Library of Virtual Manipulatives (NLVM) (2016). *Algebra balance scales*. Applet disponible en http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_201_g_3_t_2.html?open=instructions&from=category_g_3_t_2.html. Logan, USA: Utah State University.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz y A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th PME-NA* (vol. 1, pp. 2-21). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2011a). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 17-24). Ankara, Turquía: PME.

Radford, L. (2011b). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 303-322). Heidelberg, Alemania: Springer.

Rivera, F. D. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics*. Nueva York: Springer.

Rivera, F. D. y Becker, J. R. (2005). Figural and numerical modes of generalizing in algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School, 11*(4), 198-203.

Store, J. C., Richardson, K. D. y Carter, T. S. (2016). Fostering understanding of variable with patterns. *Teaching Children Mathematics, 22*(7), 420-427.

Torrego, J. C. (Coord.) (2011). *Alumnos con altas capacidades y aprendizaje cooperativo. Un modelo de respuesta educativa*. Madrid: Fundación SM.

Tourón, J., Repáraz, C., Peralta, F., Gaviria, J. L., Fernández, R., Ramos, J. M. y Reyero, M. (1998). Identificación del talento verbal y matemático: descripción de un proyecto de validación. En A. Sipán (Coord.), *Respuestas educativas para alumnos superdotados y talentosos: Actas del Congreso Internacional*. Zaragoza: Mira.

---

[i] Esta investigación es parte de los proyectos EDU2012-37259 (MINECO) y EDU2015-69731-R (MINECO/FEDER) y ha sido realizada con una *Ayuda de Iniciación a la Investigación* de la Universitat de València.