EL USO DE LOS PROBLEMAS DE PATRONES GEOMÉTRICOS PARA LA INTRODUCCIÓN DEL ÁLGEBRA EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA[1]

Eva Arbona - Mª José Beltrán-Meneu
earpi@alumni.uv.es - maria.jose.beltran@uv.es
Ángel Gutiérrez - Adela Jaime
angel.gutierrez@uv.es - adela.jaime@uv.es
Departamento de Didáctica de la Matemática. Universitat de València - València

Modalidad: Comunicación
Nivel educativo: Primaria
Palabras clave: Pre-álgebra, Ecuaciones lineales, Patrones geométricos, Altas capacidades matemáticas, Educación Primaria

RESUMEN

El objetivo de esta comunicación es presentar la secuencia de actividades empleada con un estudiante superdotado de 9 años, que había finalizado 4º de Educación Primaria, con el fin de explorar los problemas de patrones geométricos como una posible forma de introducir y trabajar el pre-álgebra con estudiantes de Educación Primaria con alta capacidad matemática. Esta secuencia ha sido dividida en tres etapas diferenciadas (iniciación a la generalización, introducción de conceptos algebraicos y aplicación) y ha permitido al estudiante realizar la transición de la aritmética al álgebra con facilidad y, además, ser capaz de aplicar los conceptos adquiridos a otros contextos.

DESCRIPCIÓN DETALLADA DEL CONTENIDO DEL TRABAJO

Las aulas escolares del siglo XXI se caracterizan, principalmente, por la gran diversidad de estudiantes que albergan en ellas. Por este motivo, la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de Calidad Educativa (LOMCE), en su modificación de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE), establece que los centros escolares realizarán las adaptaciones curriculares necesarias para asegurar que el alumnado que requiera una atención educativa diferente a la ordinaria –entendiendo como tal a aquellos que presentan necesidades educativas especiales, dificultades específicas de aprendizaje, TDAH, altas capacidades, incorporación tardía al sistema educativo o condiciones personales o de historia escolar– pueda alcanzar el máximo desarrollo posible de sus capacidades personales.

Sin embargo, esta diversidad propicia que los profesores, en general, tiendan a atender y ayudar a los alumnos que presentan alguna dificultad de aprendizaje, dejando olvidados a aquellos que sobresalen de la media y que, por desgracia, reciben escasa atención. Esto supone una gran problemática, pues

> La sociedad no se puede permitir el lujo de que en este siglo se nos sigan quedando niños sin atender, por la injusticia social que supone y por el "despilfarro" que significa no disponer de los alumnos de alta capacidad

[1] Esta investigación forma parte de los proyectos EDU2012-37259 (MINECO) y EDU2015-69731-R (MINECO/FEDER) y ha sido realizada con una *Ayuda de Iniciación a la Investigación* de la Universitat de València.

> intelectual con una buena formación, cuando nuestro futuro como sociedad, como grupo, va a depender de los avances en el saber (Torrego, 2011, p. 9).

En consecuencia, es conveniente y necesario que, una vez detectados, se lleve a cabo un conjunto de acciones relacionadas, “fundamentalmente, en el contexto escolar y junto a otros/as agentes educativos, con el objetivo de potenciar todas las capacidades del alumnado” (Aretxaga, 2013, p. 46).

El estudio del álgebra puede servir como contexto para realizar una intervención educativa extracurricular en estudiantes de altas capacidades matemáticas de Educación Primaria. El álgebra es uno de los contenidos clave del currículum de matemáticas de la E.S.O., que, en Educación Primaria, puede ser abordado desde la perspectiva del pensamiento algebraico, el cual permite a los estudiantes operar con cantidades desconocidas sin necesidad de usar notaciones simbólicas alfanuméricas (Radford, 2011b).

Investigaciones recientes han mostrado que estudiantes de Educación Primaria, incluso de los primeros cursos, son capaces de iniciarse en el aprendizaje del pre-álgebra con la ayuda de los *problemas de patrones geométricos* (Cooper y Warren, 2011; Radford, 2011a; Rivera y Becker, 2011). Benedicto, Jaime y Gutiérrez (2015) definen los problemas de patrones geométricos como aquellos que

> presentan los primeros términos de una secuencia y piden calcular, por este orden, el término *inmediato* (el que sigue a los dados), un término *próximo* a los conocidos (de manera que se puedan utilizar tanto la representación geométrica como la aritmética para el cálculo de valores), un término *lejano* tal que, aunque esté asociado a un valor numérico, su representación gráfica sea costosa de llevar a cabo y sea más conveniente poner en marcha un proceso de generalización y, finalmente, formular una expresión (que se espera sea algebraica) para el término *general* de la secuencia. (p. 154)

En este contexto, hemos elaborado una secuencia de enseñanza-aprendizaje que permite la iniciación al álgebra de estudiantes con altas capacidades matemáticas mediante la resolución de problemas de patrones geométricos y, a través de la cual, hemos podido analizar los procesos de aprendizaje utilizados por un estudiante superdotado de 9 años. La secuencia está formada por un total de 40 problemas y ha sido dividida en tres etapas diferenciadas para favorecer el aprendizaje de los estudiantes, así como la consecución de los objetivos didácticos, que han sido establecidos de un modo gradual y que presentamos a continuación:

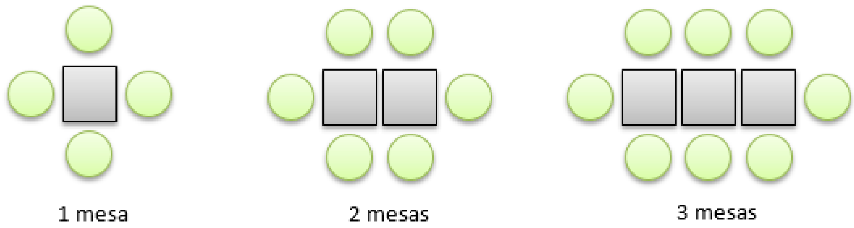
1) Realizar generalizaciones a través de problemas con patrones geométricos.
    - Generalizar relaciones directas.
    - Resolver relaciones inversas.
2) Adquirir y asimilar conceptos algebraicos básicos.
    - Comprender el significado de las letras en expresiones algebraicas, así como el significado de la terminología algebraica básica.
    - Transformar expresiones verbales en expresiones algebraicas.
    - Conocer y aplicar la jerarquía de las operaciones, así como el uso del paréntesis.
    - Resolver ecuaciones de primer grado de la forma $ax \pm b = c$.

3) Aplicar el álgebra en diversos contextos.
   - Transformar expresiones algebraicas mediante el uso de las operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división).
   - Resolver ecuaciones de primer grado de la forma $ax \pm b = cx \pm d$.
   - Resolver problemas de ecuaciones lineales con enunciado verbal.

La primera etapa está destinada al inicio del estudiante en la generalización mediante problemas de patrones geométricos, a través de la generalización de relaciones directas y la resolución de relaciones inversas. Para ello, diseñamos una secuencia de 20 problemas (figura 1), formados por los tres primeros términos de la secuencia del patrón geométrico y cinco tipos de cuestiones:

- Tres cuestiones de generalización directa, que permiten iniciar a los estudiantes en la formulación de expresiones generales mediante la identificación de patrones y relaciones. Estas cuestiones están ordenadas en función de la demanda cognitiva requerida y son las siguientes:
  - Una cuestión de generalización inmediata, que pide obtener un término inmediato de la figura.
  - Una cuestión de generalización cercana, que implica una mayor comprensión del patrón.
  - Una cuestión de generalización lejana, que implica una comprensión en profundidad del patrón.
- Dos cuestiones de relación inversa, que permiten introducir al estudiante en la inversión de operaciones y contextualizar su introducción en el mundo del álgebra. Diferenciamos dos tipos de cuestiones:
  - Una cuestión de relación inversa exacta, cuya solución numérica es un número natural que corresponde a un término de la secuencia.
  - Una cuestión de relación inversa inexacta, cuya solución numérica no es un número natural y, por tanto, no corresponde a ningún término de la secuencia.

Este sábado, María va a realizar una comida con sus amigos y familiares para celebrar que ha cumplido 12 años. Para ello, quiere calcular cuántas mesas y sillas le harán falta. Quiere sentarlos del siguiente modo:



Pero María tiene un problema: no sabe cuántos invitados acudirán a su fiesta. ¿Podrías ayudarle a calcular cuántos invitados cabrán en función de cuántas mesas coloque?

a) ¿Cuántos invitados cabrán con 6 mesas? ¿Cómo lo sabes?

b) ¿Cuántos invitados cabrán con 15 mesas? ¿Cómo lo sabes?

c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos invitados cabrán con 50 mesas? ¿Cómo lo sabes?

d) Si hay 22 invitados, ¿cuántas mesas habrá? ¿Cómo lo sabes?

e) Si hay 35 invitados, ¿cuántas mesas habrá? ¿Cómo lo sabes?

Figura 1

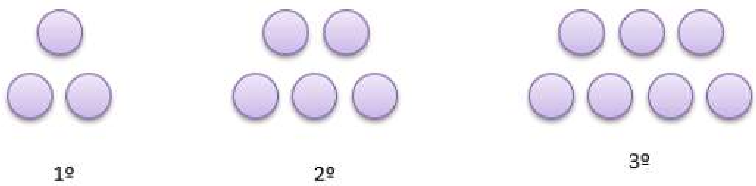
A partir de las estrategias de resolución descritas por García-Cruz y Martinón (1997) y García-Reche, Callejo y Fernández (2015), elaboramos una clasificación de las estrategias de resolución que podían surgir en la aplicación de los problemas de patrones geométricos diseñados. Para ello, diferenciamos entre las estrategias de las cuestiones de relación directa y las estrategias de las cuestiones de relación inversa:

- Estrategias en tareas de relación directa:
  - Según el procedimiento de resolución:
    - Visuales: mediante una descomposición geométrica del patrón.
    - Numéricas: transformando el patrón geométrico en un patrón numérico.
  - Según el procedimiento de cálculo:
    - Recuento: representando el patrón y contando los elementos que lo forman.
    - Recursiva: sumando sucesivamente la diferencia entre términos a un término conocido.
    - Funcional: formulando una expresión general.
    - Proporcional: identificando una proporcionalidad.
- Estrategias en tareas de relación inversa:
  - Ensayo y error con cálculos de relación directa: probando diferentes valores para el término.

- Inversión de las operaciones: aplicando la inversión de las operaciones aritméticas utilizadas en tareas de relación directa.
- Resolución de ecuaciones: planteando una ecuación.

En concreto, en las tareas de relación directa de esta etapa, el estudiante que participó en la investigación utilizó mayoritariamente estrategias visuales (figura 2) y funcionales (figura 3), como las que mostramos a continuación:

Un grupo de amigos hemos decidido jugar a los bolos. Pero como nos cuesta tirar al suelo varios bolos de una sola tirada, queremos que estos vayan aumentando poco a poco. Hemos decidido que aumenten del siguiente modo:



a) ¿Cuántos bolos habrá colocados la 5º vez que tiremos? ¿Qué haces para saberlo?

Estudiante: *La respuesta a es 11.*

Investigadora: *¿Por qué 11?*

Estudiante: *He descubierto, como en la otra, que, en la primera, hay una arriba y dos abajo. En la segunda, dos arriba y una más abajo, tres. Después, en la tercera, hay tres arriba y cuatro abajo. En la quinta son cinco arriba y seis abajo.*

Figura 2

Nuestro primo Nacho quiere organizar una comida familiar. El problema es que somos muchos primos y no sabe si acudirán todos. Además, hay primos de todas las edades y, por tanto, algunos acudirán con su pareja e hijos. Quiere distribuir las mesas del siguiente modo:

a) ¿Cuántos invitados cabrán en 6 mesas? ¿Cómo lo sabes?

Estudiante: *Haces 3 o el número que sea por 3 y le sumas 2.*

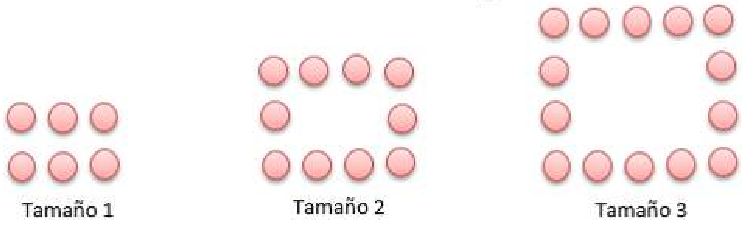
Investigadora: *¡Muy bien! ¿Cómo se te ha ocurrido eso?*

Estudiante: *He hecho, en una mesa, los números de arriba, el 1 y el 2, 1x3=3. Después, en dos mesas, 3 abajo y 3 arriba, 2x3=6 y 3+3=6 y le tenemos que sumar aún estos dos. En las tres mesas, 5+4=9 y 3x3=9.*

Figura 3

En cuanto a las estrategias utilizadas en las tareas de relación inversa de esta etapa, el estudiante empleó una estrategia u otra en función de la expresión general utilizada previamente en las cuestiones de relación directa. Cuando la generalización era del tipo $y = ax \pm b$, usó la inversión de las operaciones (figura 4), invirtiendo, además, las operaciones en el orden correcto. Sin embargo, cuando la generalización era más compleja, como $y = ax + b(x \pm c) \pm d$, no fue capaz de invertir el orden de las operaciones y utilizó estrategias de ensayo y error (figura 5).

Queremos construir una piscina en el huerto de la abuela, pero no nos ponemos de acuerdo con sus medidas. Así pues, hemos realizado un esquema para contar cuántas baldosas necesitaremos en función del tamaño escogido:



e) Si hay 42 baldosas, ¿qué tamaño será? ¿Cómo lo sabes?

Estudiante: *Del número 10.*

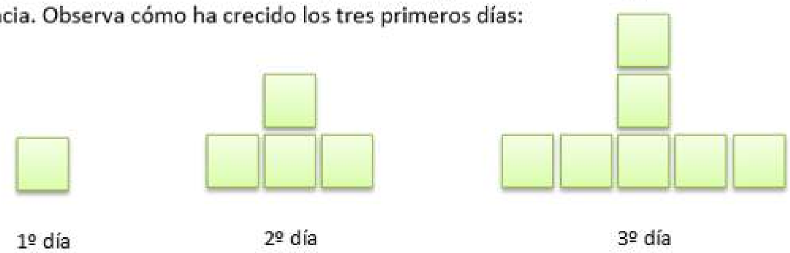
Investigadora: *Muy bien. ¿Cómo lo has hecho?*

Estudiante: *Le he restado 2 a 42, me ha salido 40 y lo he hecho entre 4.*

Investigadora: *Muy bien.*

Figura 4

Una amiga de mi madre se ha comprado una planta nueva de una especie un poco rara. La planta crece siempre de noche, de modo que a la mañana siguiente se nota la diferencia. Observa cómo ha crecido los tres primeros días:



d) Si hay 20 cuadrados, ¿cuántos días tendrá? ¿Cómo lo sabes?

Estudiante: *Es el séptimo día a medianoche.*

Investigadora: *Vale. ¿Y cómo lo has sacado?*

Estudiante: *Primero he probado con 8 y no me ha dado. Después, he probado con 7 y tampoco me ha dado, me ha dado uno menos. Entonces, tenía que estar entre 7 y 8.*

Figura 5

La segunda etapa tiene como finalidad la introducción de conceptos algebraicos, como el significado de las letras, la transformación de expresiones verbales en algebraicas y la resolución de ecuaciones lineales con ayuda de un software de balanzas (figura 6), a partir de problemas de patrones geométricos.

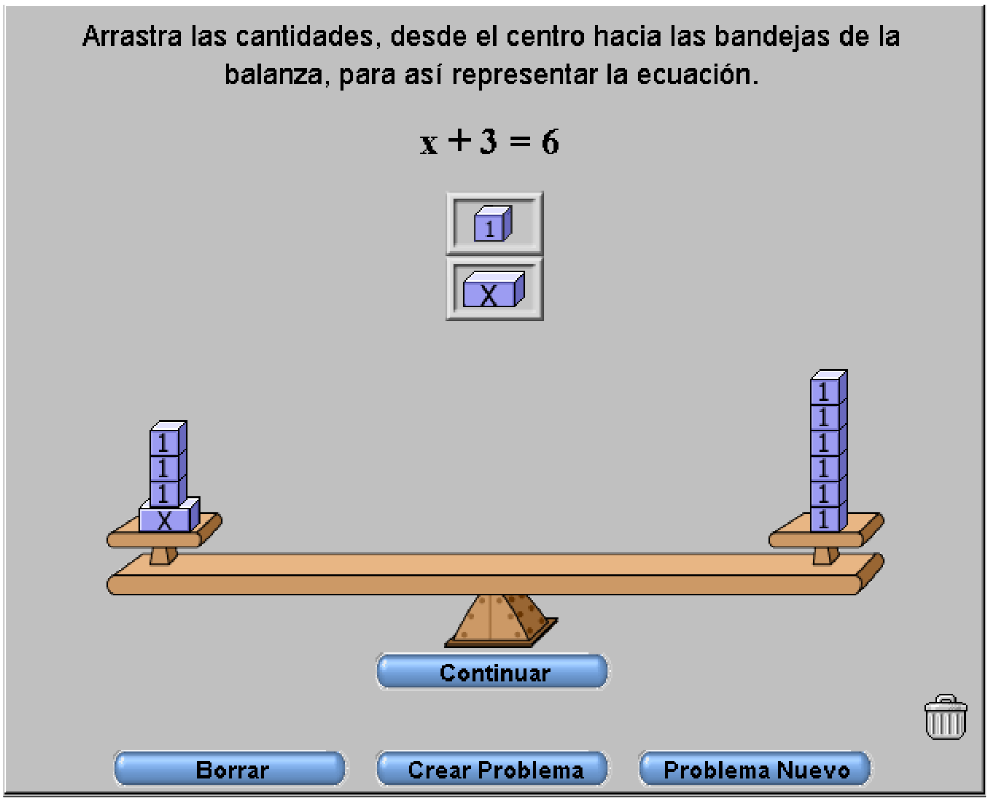
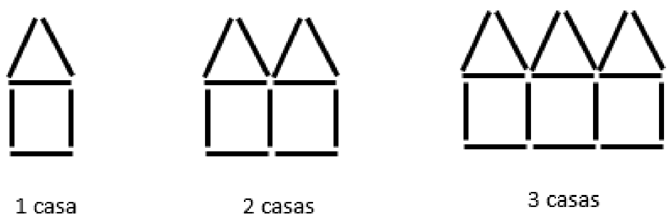


Figura 6

La tercera etapa pretende aplicar los conocimientos adquiridos y, por este motivo, ha sido dividida en dos subetapas: por una parte, una subetapa para la resolución de problemas de patrones geométricos en los que, previamente, el estudiante había presentado dificultades (figura 7), y, por otra parte, una subetapa donde transferir los conocimientos a otros contextos más dispares (figura 8).

Marc y su amigo quieren dibujar una urbanización con palillos. La dibujan del siguiente modo:



a) Escribe la fórmula algebraica que utilizarías para calcular cuántos palillos necesitará en función del número de casas.

b) ¿Crees que podríamos escribir esta fórmula de un modo más simple? Escríbela.

c) Si hay 96 palillos, ¿cuántas casas dibujarán? ¿Cómo lo sabes?

Figura 7

Héctor y María han estado contando en clase cuántos colores de madera tiene cada uno. Héctor tiene el doble de María más 7. Si Héctor tiene 33 colores de madera, ¿cuántos tiene María?

Figura 8

En conclusión, el análisis de la resolución de los problemas presentados y del proceso de aprendizaje seguido por el estudiante en la secuencia descrita ha demostrado que esta secuencia ha permitido al estudiante realizar la transición de la aritmética al álgebra con facilidad a través de los problemas de patrones geométricos y, además, desarrollar las habilidades necesarias para aplicar los conceptos y conocimientos pre-algebraicos adquiridos a otros problemas de ecuaciones en contextos más variados. Asimismo, podemos destacar la introducción del álgebra a través de los problemas de patrones geométricos como un contexto adecuado y pertinente para realizar intervenciones educativas en estudiantes de altas capacidades matemáticas de Educación Primaria, ya que les permite desarrollar habilidades matemáticas como la generalización, la identificación de patrones y relaciones y la flexibilidad en el uso de estrategias.

REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

Aretxaga, L. (coord.) (2013). *Orientaciones educativas. Alumnado con altas capacidades intelectuales.* Vitoria: Departamento de Educación, Universidades e Investigación del Gobierno Vasco. Recuperado de http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43573/es/contenidos/informacion/dig_publicaciones_innovacion/es_escu_inc/adjuntos/16_inklusibitatea_100/100012c_Pub_EJ_altas_capacidades_c.pdf

Benedicto, C., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 153-162). Alicante: SEIEM.

Cooper, T. J. y Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalize: Models, representations and theory for teaching and learning. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 187-214). Berlín: Springer-Verlag.

García-Cruz, J. A. y Martinón, A. (1997). Actions and invariant schemata in linear generalising problems. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 289-296). Helsinki, Finlandia: PME.

García-Reche, A., Callejo, M. L. y Fernández, C. (2015). La aprehensión cognitiva en problemas de generalización de patrones lineales. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 279-288). Alicante: SEIEM.

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, *BOE núm. 106*, de 4 de mayo de 2006.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa, *BOE núm. 295*, de 10 de diciembre de 2013.

Radford, L. (2011a). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En Ubuz, B. (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 17-24). Ankara, Turquía: PME.

Radford, L. (2011b). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 303-322). Heidelberg, Alemania: Springer.

Rivera, F. D. y Becker, J. S. (2011). Formation of pattern generalization involving linear figural patterns among middle school students: Results of a three-year study. En Cai, J. y Knuth, E. (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 323-366). Berlín: Springer.

Torrego, J. C. (Coord.) (2011). *Alumnos con altas capacidades y aprendizaje cooperativo. Un modelo de respuesta educativa.* Madrid: Fundación SM. Recuperado de http://www.fundacionpryconsa.es/pdf/Altas_capacidades_y_aprendizaje_cooperativo.pdf