Citar como: Gutiérrez, A. (2005): Los cubrimientos de Escher en la enseñanza de las isometrías del plano, Integra+, 9, 15-28.

Los cubrimientos de Escher en la enseñanza de las isometrías del plano

Angel Gutiérrez
Dpto. de Didáctica de la Matemática
Universidad de Valencia, Valencia (España)
angel.gutierrez@uv.es
http://www.uv.es/Angel.Gutierrez

Introducción.

La obra gráfica de Mauritius Cornelius Escher (1898-1971) es de sobra conocida por todos los matemáticos del mundo, que saben apreciar mejor que nadie la genialidad de su autor. Al innegable atractivo matemático de obras como los cubrimientos regulares, las figuras imposibles, las repeticiones límite, etc. hay que añadir un atractivo estético que puede usarse como elemento motivador en las clases de matemáticas, en áreas como la geometría o el álgebra. En este artículo quiero destacar, entre las múltiples facetas interesantes de la obra gráfica de M.C. Escher, la componente didáctica, centrándome en las posibilidades que brindan los cubrimientos del plano de Escher para su utilización en la enseñanza de los movimientos del plano como parte de la asignatura de Geometría. Mi objetivo es realizar algunas propuestas para mostrar cómo se pueden organizar actividades basadas en el uso de los cubrimientos de Escher para estudiar las isometrías del plano. Haré propuestas con diferentes niveles de complejidad, que serán aptas para estudiantes de distintos cursos y para diversos grados de profundización en el estudio del tema. Por otra parte, habrá algunas actividades cuyo material serán los propios cubrimientos del plano dibujados por Escher, mientras que otras utilizarán otros materiales directamente relacionados con sus trabajos e inspirados en ellos.

La utilización de la obra gráfica de Escher en Matemáticas se puede mirar desde dos perspectivas: Una, que podemos llamar gráfica o manipulativa, se refiere a la construcción de sus cubrimientos o de otros análogos. La otra es la perspectiva formal, en la cual se hace un énfasis mayor en la estructura algebraica subyacente en esos cubrimientos. Las propuestas que presentaré pueden servir en uno u otro sentido, dependiendo de dónde se quiera hacer énfasis en las clases: Se puede hacer un trabajo práctico, mecánico, que es muy importante en las primeras etapas del aprendizaje de las isometrías, porque este aprendizaje hay que iniciarlo jugando con materiales, moviéndolos, mirando con espejos, dándole la vuelta a las figuras, etc. Después, en una etapa posterior, se puede volver sobre ese mismo tipo de actividades pero desde una perspectiva más formal, haciendo un análisis matemático de cómo están construidos los cubrimientos, qué elementos hay que utilizar, qué movimientos intervienen, etc.

Las actividades que propongo están pensadas para realizarlas con materiales manipulativos, pero también es posible hacer adaptaciones de las mismas para trabajar con ordenadores, aprovechando el innegable atractivo que sienten los estudiantes hacia ellos como un estímulo para facilitar el aprendizaje de las matemáticas. Hay cierto número de programas que sirven para construir cubrimientos planos. Parte de ellos son programas de uso general o profesional, no específicos para el aprendizaje de las isometrías, como los de tipo draw/paint o los programas de dibujo técnico (CAD). En realidad, cualquier programa gráfico que permita hacer simetrías y giros de cualquier número de grados es útil. Por otra parte, hay programas específicos creados para ayudar a enseñar y aprender geometría, denominados "software de geometría dinámica", cuya principal característica es que permiten a los estudiantes modificar de manera dinámica y en tiempo real la construcción presente en la pantalla del ordenador; los ejemplos más conocidos y potentes de software de geometría dinámica son Cabri-Geómetra (Laborde, Bellemain, 2005), Geometer's Sketchpad (Jackiw, 2003) y Cinderella (Richter-Gebert, Kortenkamp, 2003), aunque también hay programas de geometría dinámica gratuitos, como Regla y Compás (Grothmann, 2005). En tercer lugar, hay programas de ordenador creados específicamente para trabajar con los cubrimientos planos (rosetones, frisos y mosaicos), como Kaleidomania (Lee, 2005), Kali (Weeks, 1995), Tess (Pedagogueri Software, 2000) o Tesselmania (Lee, 1995).

Organización didáctica de la enseñanza.

En primer lugar, conviene hacer unas reflexiones de tipo didáctico sobre las distintas fases de utilización de los cubrimientos del plano de Escher para estudiar las isometrías del plano. Si un profesor va a organizar actividades para sus alumnos basadas en estos cubrimientos, debe tener en cuenta las particularidades de cada cubrimiento, pues no todos ofrecen el mismo grado de facilidad. Generalmente, la enseñanza de las isometrías del plano basada en los cubrimientos empieza presentando a los estudiantes algunos cubrimientos regulares de Escher y haciendo una descripción gráfica de su estructura (figuras empleadas, isometrías presentes, posiciones, colores, etc.). Una vez superada la fase inicial de toma de contacto con los cubrimientos, que suele ser rápida pero no por ello menos importante, se puede pasar a un trabajo más sistemático, observando los cubrimientos desde el punto de vista matemático y preguntándose qué motivo mínimo tienen, qué isometrías, cuáles habría que usar para reconstruirlos, etc.; el proceso de estudio debe ir primero a encontrar el motivo mínimo del cubrimiento, después sus isometrías y en tercer lugar cuáles son los sistemas generadores del cubrimiento. El recorrido por la obra de Escher termina proponiendo a los estudiantes que construyan sus propios cubrimientos, diseñando el motivo mínimo, definiendo las isometrías y realizando el cubrimiento de una hoja de papel.

No en todos los cubrimientos es igual de evidente cuál es el motivo mínimo (por motivo mínimo no me refiero a la celda poligonal de la trama subyacente al cubrimiento desde el punto de vista matemático, sino a la figura mínima de la obra de arte). Hay algunos casos en los que el motivo mínimo es una única figura entera; en la figura 1 es muy fácil para un niño de cualquier edad, darse cuenta de que hay un pájaro que se repite muchas veces. En otros casos, el motivo mínimo son dos figuras (figura 2) o más.

Figura 1. Figura 2.

Conviene evitar algunos cubrimientos de Escher en los que las dificultades no vienen de las isometrías sino del reconocimiento del motivo mínimo que hay que manejar; el más típico de éstos casos es el cubrimiento de las estrellas de mar, las caracolas y las conchas. Por otra parte, para alcanzar los objetivos de tipo matemático de estas actividades, es conveniente presentar pronto la idea de que el motivo mínimo no tiene por qué ser una figura completa, sino que puede ser media figura (figura 3) o varias medias figuras (figura 4).

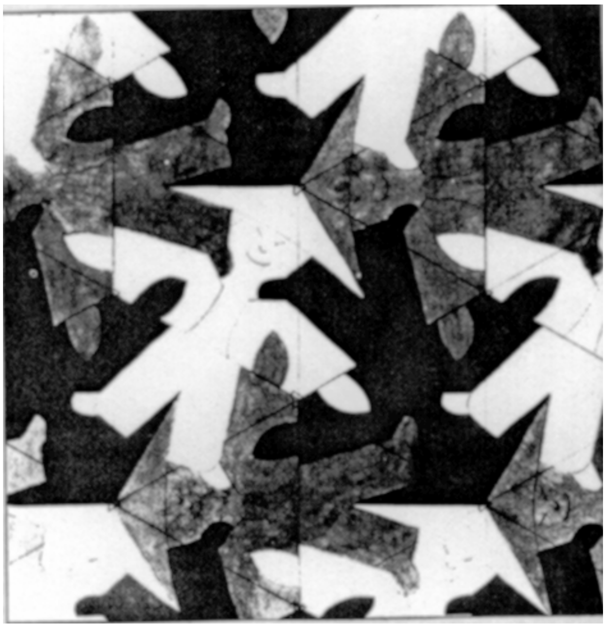


Figura 3. Figura 4.

Al pedir a los estudiantes que busquen las isometrías de un cubrimiento, nos encontraremos con la dificultad implícita que tiene cada isometría, que se traslada a este contexto. Hay diversas investigaciones clásicas sobre las dificultades de aprendizaje de las tres isometrías básicas (Grenier 1988; Hart, 1981; Jaime, 1993; Jaime, Gutiérrez, 1996; Küchemann, 1980) que ponen de relieve la influencia de algunas variables directamente relacionadas con el tipo de isometría o con la posición en el plano de sus elementos característicos (vector de traslación, centro de giro, eje de simetría). La conclusión global es que las traslaciones son las más fáciles de reconocer y las simetrías en deslizamiento las más difíciles; en cuanto a las simetrías y los giros, su grado de dificultad es mayor o menor dependiendo de factores como el ángulo de giro y la posición del centro o del eje.

Otras dificultades de los alumnos tienen su origen en la forma como el profesor les ha presentado los conceptos de las isometrías. Si a un estudiante le enseñamos que “la traslación de vector $\vec{a}$ es una aplicación del plano en sí mismo que a cada punto p le hace corresponder el punto p' tal que $\overrightarrow{pp'} = \vec{a}$” o que “el giro de centro C y ángulo α es una aplicación …” y luego le proponemos que analice un cubrimiento de Escher, lo más probable es que no sepa ver traslaciones ni giros. La introducción de las isometrías debe hacerse de acuerdo con las características de los primeros niveles de Van Hiele de razonamiento (Jaime, 1993; Jaime, Gutiérrez 1990; Jaime, Gutiérrez 1996), esto es desde un punto de vista práctico, manipulativo y experimental. Por ejemplo, a los estudiantes que estén en el primer nivel de razonamiento, se les puede presentar la traslación como un movimiento en línea recta que deja las figuras con la misma orientación en la que estaban antes de moverse. Así, después de haber hecho físicamente algunas traslaciones, cualquier estudiante podrá reconocerlas en las figuras 2 y 5, porque verá infinidad de imágenes que están en la misma posición, aunque no sepa definir formalmente las traslaciones. Los estudiantes del primer nivel de razonamiento también reconocerán que en la figura 1 hay algunas imágenes relacionadas por traslaciones y otras que no están relacionadas por este movimiento, ya que no todas las imágenes están en la misma posición.

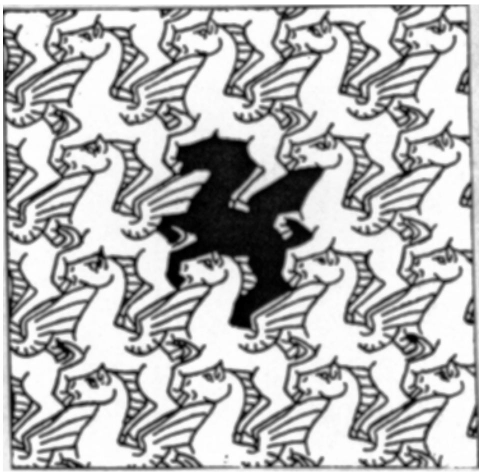


Figura 5.

Los estudiantes que ya hayan pasado al segundo nivel de razonamiento empezarán a ver las traslaciones como objetos matemáticos caracterizados por los tres componentes de un vector (longitud, dirección y sentido) y dotados de propiedades (por ejemplo, que los segmentos trasladados son paralelos entre sí).

El concepto de giro es, en cierta forma, complementario del de traslación: Un giro implica cambio de orientación. El giro de 180° tiene una caracterización visual (propia del primer nivel de Van Hiele) fácil, de la que hasta los niños de Primaria se dan cuenta, pues les “da la vuelta” a las figuras. En la figura 6 tenemos un ejemplo, con peces que miran hacia la izquierda y peces que se han dado la vuelta y miran hacia la derecha, a causa del giro de 180° que hay en el cubrimiento. Las figuras 1 y 6 son muy parecidas: En la figura 1 observamos pájaros mirando hacia la izquierda y pájaros mirando hacia la derecha; en la figura 6 observamos peces mirando hacia la izquierda y peces mirando hacia la derecha. La estructura visual de los dos cubrimientos es la misma, pero su estructura matemática es muy diferente, cosa que podrán analizar los estudiantes capaces de razonar en los niveles segundo o superiores: En el cubrimiento de la figura 6 hay giros de 180°, pero en el de la figura 1 hay simetrías en deslizamiento. Estas son pequeñas bromas que nos gasta Escher.

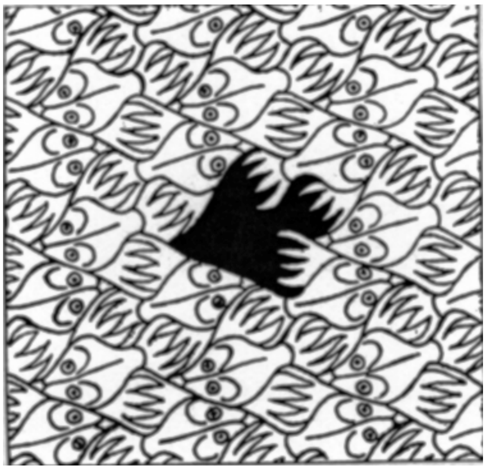


Figura 6.

En los cubrimientos del plano de Escher aparecen también giro de 60°, 90° y 120°. Desde el punto de vista didáctico, estos giros son más interesantes que el de 180° porque dan una idea de movimiento mayor que éste: La figura 7 muestra lagartijas agrupadas de cuatro en cuatro, que parecen estar dando vueltas alrededor del punto en que se juntan sus patas. Esta visión intuitiva de los giros es importante para afianzar el razonamiento del primer nivel de Van Hiele y dar paso al concepto matemático, pues el movimiento de dar vueltas lleva implícitas las ideas de circunferencia, centro de giro y equidistancia al centro que son fundamentales para la formación del concepto matemático en los estudiantes que hayan alcanzado el segundo nivel de razonamiento.

Figura 7.

Las simetrías se reconocen en los cubrimientos por la presencia de figuras divididas en dos partes iguales (figura 8). Una vez más, los elementos visuales, dinámicos y manipulativos son los que permiten a los estudiantes reconocer las isometrías y construir sus primeras concepciones, a partir de las cuales se podrán derivar más adelante las definiciones y propiedades matemáticas. Por lo tanto, es importante hacer énfasis en esos elementos visuales y dinámicos típicos de cada isometría, pues una introducción gráfica intuitiva a las isometrías llevará después, con muy poco trabajo, a la idea matemática. Sin embargo, la introducción de las isometrías a partir de sus definiciones matemáticas abstractas difícilmente llevará a los estudiantes a formarse la idea gráfica de cómo es ese movimiento.

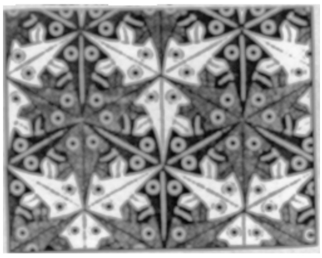


Figura 8.

Los cubrimientos cuya estructura es más difícil de reconocer son, sin lugar a duda, aquéllos con simetrías en deslizamiento (figuras 1 y 9). Desde un punto de vista didáctico, es conveniente empezar a trabajar con ellas sólo cuando los estudiantes hayan alcanzado el tercer nivel de razonamiento (Jaime, 1993; Jaime, Gutiérrez, 1996), tengan un buen dominio de las otras isometrías y se quiera completar el estudio de las isometrías del plano con la presentación de su estructura algebraica. Si estamos trabajando con estudiantes de los dos primeros niveles de razonamiento, por ejemplo en los cursos de Primaria en los que introducen las isometrías elementales, conviene dejar las simetrías en deslizamiento para más adelante.

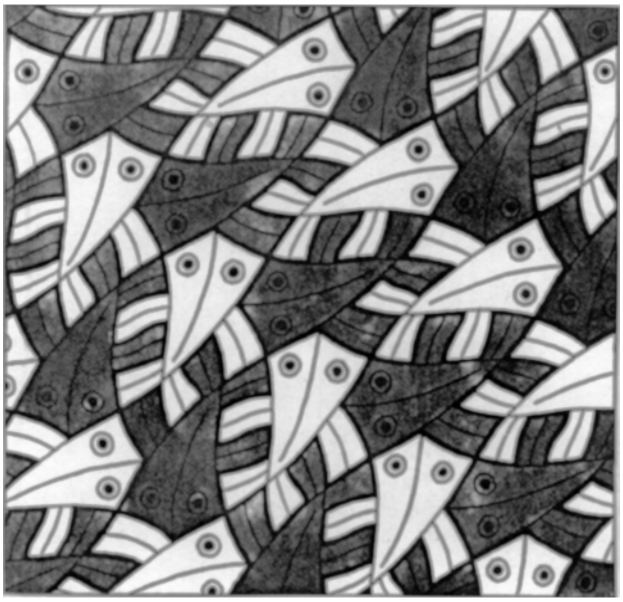


Figura 9.

Profundización en el estudio de los cubrimientos del plano.

Los párrafos anteriores han sido un recorrido didáctico por la fase de reconocimiento de las isometrías: A la vista de un determinado cubrimiento, se buscan sus movimientos. Una posible continuación del proceso es estudiar los sistemas generadores, es decir los conjuntos mínimos de movimientos que permiten cubrir todo el plano a partir de una baldosa formada por el motivo mínimo. Los cubrimientos de traslaciones son los más adecuados para iniciar este trabajo y para introducir el concepto de sistema generador. Para saber qué traslaciones hay en la figura 10, podemos dibujar las que van desde un caballo hasta los otros que lo rodean. Al haber un solo tipo de movimiento (la traslación, que es el más fácil), quitamos dificultades añadidas (visuales y matemáticas) y podemos centrarnos en el problema de encontrar los generadores. Si le pedimos a nuestros alumnos que dibujen todas las traslaciones que vean en este cubrimiento, lo pueden llenar de flechas, pero ellos mismos pondrán de relieve que algunas se derivan de otras (son el doble, el triple, etc.). Así, surgen de forma natural las preguntas clave: ¿Cuántas traslaciones hacen falta para construir el cubrimiento? ¿Cuáles son? A partir de aquí el planteamiento del problema se convierte ya en un trabajo matemático: Hay traslaciones que son el resultado de productos de otras, por lo que se pueden ir descartando. Haciendo pruebas, pueden darse cuenta de que siempre basta con dos traslaciones y de que no sirven dos cualesquiera, pues si seleccionan las traslaciones A y B no se cubre todo el cubrimiento, pero con las traslaciones A y C sí se cubre.

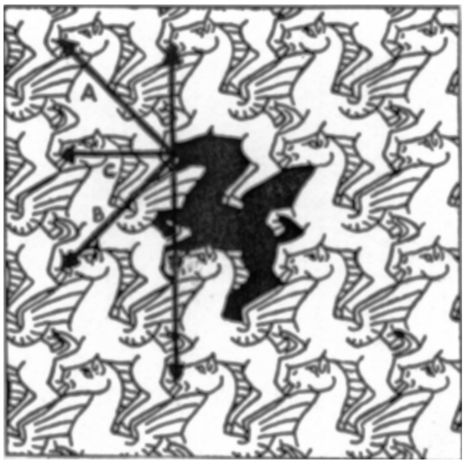


Figura 10.

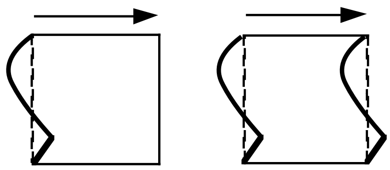
Otros cubrimientos que también son útiles para introducir el concepto de sistema generador son los formados por giros de 180°, como el de la figura 11. Si nos fijamos en una lagartija, vemos que tiene seis giros de 180°, de los cuales hay que elegir dos. No todos sirven, sino que hay que elegirlos con cuidado (en realidad el problema surge porque cuando seleccionamos una lagartija completa estamos manejando dos celdas de la malla).

Figura 11.

La técnica de creación de baldosas irregulares.

Otro posible camino para seguir trabajando después de la fase de reconocimiento de las isometrías es el de la construcción por los estudiantes de sus propios cubrimientos del tipo de Escher: Seleccionar los movimientos que van a generar el cubrimiento, diseñar el motivo mínimo y construir o dibujar el cubrimiento. La forma de plantear estas actividades será diferente, en cuanto a vocabulario y a rigor matemático, según que los estudiantes estén en un nivel de razonamiento u otro y que hayan aprendido a manejar los sistemas generadores o no. En todo caso, el tipo de actividades a plantear y el esquema básico de trabajo son los mismos (Ranucci, Teeters, 1977).

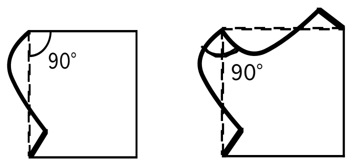
Los estudiantes se dan cuenta de que es menos bonito un cubrimiento en el que las celdas sean simples polígonos que otro en el cual las celdas se han deformado y pronto muestran su interés por saber cómo hay que hacerlas. Desde el punto de vista didáctico, no es provechoso ofrecerles directamente la respuesta, sino que es preferible plantearles preguntas que les marquen el camino de la solución y consigan que los propios alumnos la descubran: Si queremos hacer una traslación (figura 12-a), ¿dónde tiene que encajar el lado deformado? Con un par de hojas transparentes, puestas una encima de la otra, en las que están dibujados la celda con un único lado deformado y el vector de la traslación, es fácil hacer la traslación y descubrir el resultado (figura 12-b).



- a - - b -

Figura 12. Deformación por traslación.

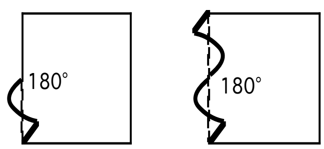
El descubrimiento de la deformación de los giros de 60°, 90° ó 120° es igual de sencillo (figura 13). En cuanto a la simetría, la posición fija de los puntos del eje de simetría hace que no se pueda deformar ese lado de las celdas.



- a - - b -

Figura 13. Deformación por giro de 90°.

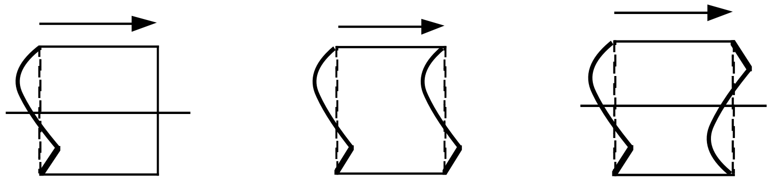
Si se utiliza un giro de 180°, hay dos casos: Cuando el centro de giro está en un vértice de la celda, el movimiento no deja ningún lado de la celda sobre otro de sus lados, por lo que este giro no impone ninguna restricción en la deformación. Por el contrario, cuando el centro de giro está en el punto medio de un lado (figura 14-a), al girar 180°, una mitad de ese lado va a parar sobre la otra mitad (figura 14-b).



- a - - b -

Figura 14. Deformación por giro de 180°.

Por último, veamos el movimiento más complicado: la simetría en deslizamiento. La forma de trabajo que lleva a descubrir la solución sigue siendo la misma, sólo que ahora hay que realizar dos movimientos consecutivos, traslación seguida de simetría o simetría seguida de traslación, antes de llegar a la posición final. En la figura 15 hemos optado por la primera posibilidad: La figura 15-b muestra el resultado de trasladar la arista deformada y la figura 15-c muestra el resultado final después de hacer la simetría de la arista de la derecha (si se hace esta manipulación con dos hojas de papel transparente, siempre hay que mover la misma hoja, primero para trasladarla y después para hacer la simetría).



- a - - b - - c -

Figura 15. Deformación por simetría en deslizamiento.

Hasta aquí, la técnica; ahora ya sólo queda ponerla en práctica y empezar a utilizar la imaginación para obtener unos resultados más o menos bonitos. Mi experiencia como profesor me ha enseñado que, aunque este trabajo se puede hacer sin recurrir a los cubrimientos de Escher como introducción al tema, los estudiantes se motivan mucho más cuando se utilizan y, además, los cubrimientos que producen ellos son de mucha más calidad artística cuando han visto antes los de Escher.

Actividades sobre cubrimientos para la enseñanza de las isometrías.

En la segunda parte de este artículo voy a presentar otros tipos de actividades que se pueden hacer en torno a las isometrías del plano y a la construcción de cubrimientos regulares (mosaicos regulares) y algunos materiales didácticos que se pueden utilizar para dichas actividades.

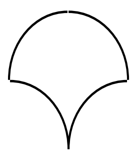
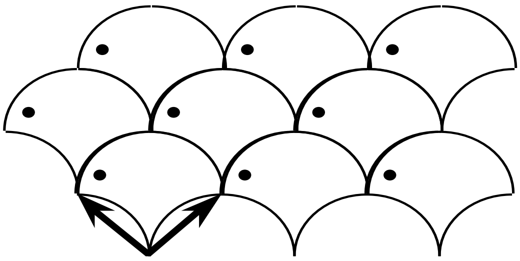


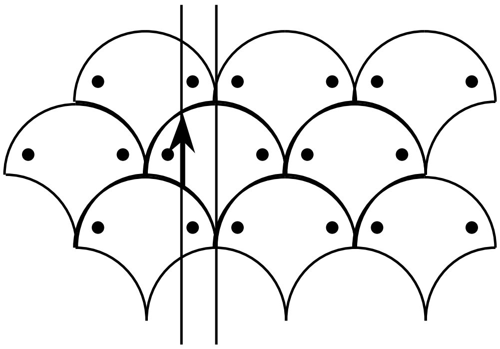
Figura 16.

La figura 16 muestra la silueta de una pieza de plástico que se usa para hacer cubrimientos; es un tipo de material fácil de encontrar en las tiendas especializadas y que, en este caso concreto, está formado por un conjunto de baldosas iguales unas negras y otras amarillas. Es muy fácil crear un cubrimiento con estas piezas, pero puede plantearse otra pregunta más interesante: Aquí tenemos estas baldosas; ¿cuáles de los 17 tipos de mosaicos se pueden crear con ellas? El problema tiene distintos grados de dificultad según que se tenga en cuenta el cambio de colores o no y tiene diferentes soluciones según que se usen las piezas como están (lisas) o con algún motivo decorativo dentro que rompa la simetría. En la figura

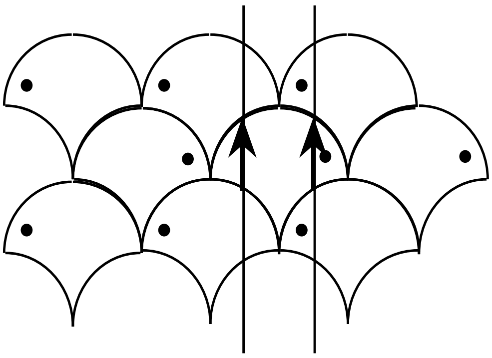
17 hay tres ejemplos: Usando baldosas con un motivo no simétrico y colocándolas siempre en la misma posición, tenemos un mosaico generado por dos traslaciones (figura 17-a), que es el más sencillo sin simetrías. Usando ahora baldosas con un motivo simétrico (el motivo mínimo será media baldosa) y colocándolas en la misma disposición del ejemplo anterior, obtenemos un mosaico generado por una simetría y una simetría en deslizamiento paralelas (figura 17-b). El tercer ejemplo muestra el mosaico obtenido con las mismas baldosas no simétricas del primer ejemplo, pero ahora colocadas alternando una fila de baldosas con una orientación y una fila de baldosas simétricas (con la orientación contraria), que está generado por dos simetrías en deslizamiento paralelas (figura 17-c).



- a -



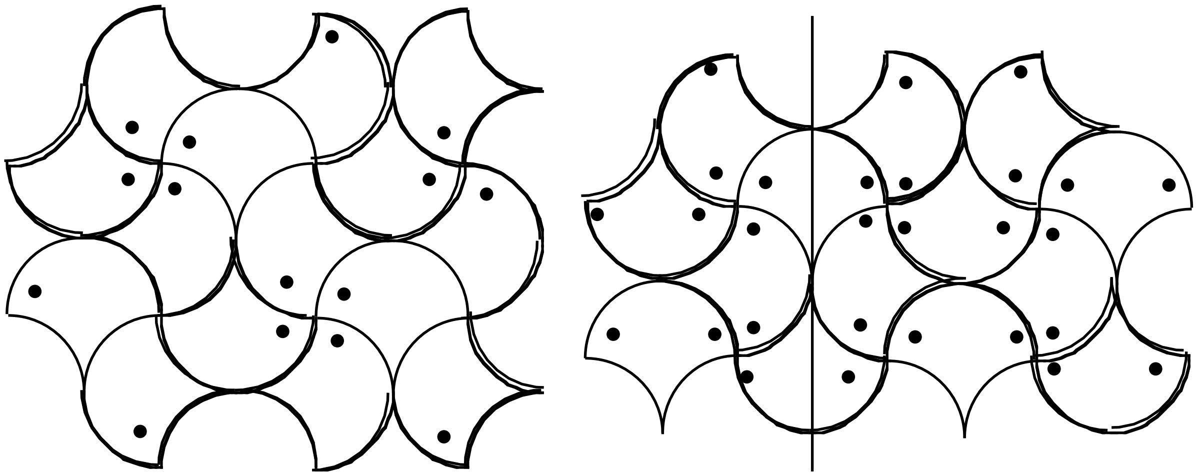
- b -



- c -

Figura 17.

Otra forma de crear mosaicos es colocando las baldosas con varias inclinaciones diferentes, en este caso girándolas 90°. La figura 18 muestra un mosaico formado por baldosas no simétricas generado por dos giros de 90° (figura 18-a) y otro mosaico formado por baldosas simétricas colocadas en la misma disposición del ejemplo anterior, generado por una simetría y un giro de 90° (figura 18-b).



- a - - b -

Figura 18.

Esta actividades se pueden hacer con piezas de otras formas, como las mostradas en la figura 19. Cada baldosa tiene sus peculiaridades y, por lo tanto, da lugar a diferentes soluciones que, aunque matemáticamente sean equivalentes, estéticamente son diferentes. Por ejemplo, una baldosa mostrada en la figura 19 es muy parecida a la que he estado utilizando antes, pero más alargada; ello hace que estas baldosas no admitan giros de 90° y sólo encajen en una posición, es decir que no son equivalentes a las usadas en los ejemplos anteriores. Otra de las piezas de la figura 19 admite giros de 120°, por lo que es completamente diferente de las demás. También hay una pieza con dos ejes de simetría, que admite varias posibilidades según que le pongamos un motivo interior que mantenga los dos, sólo uno o ninguno de los ejes. Las dos baldosas restantes de la figura 19 tienen una estructura sencilla, aunque los diseñadores muestran una constante preferencia por las figuras simétricas, pues es casi imposible encontrar en esta clase de materiales piezas no simétricas.

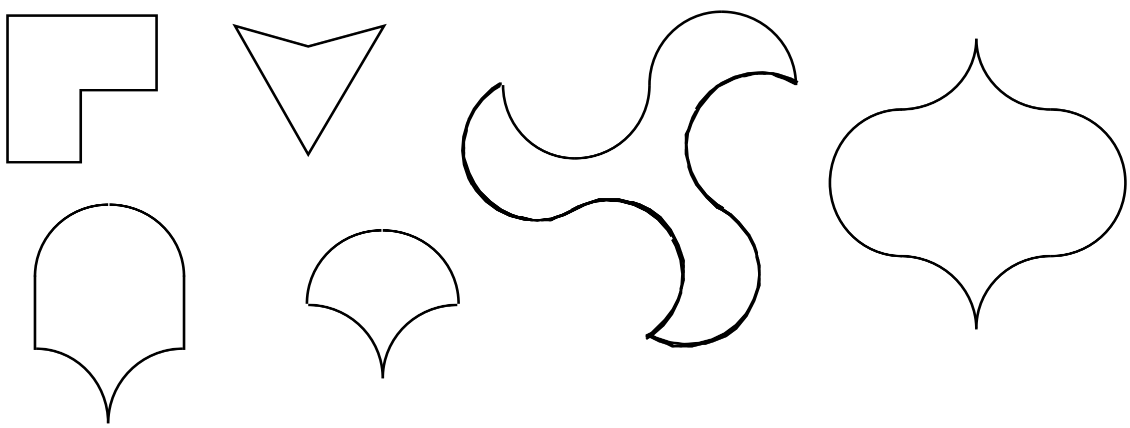


Figura 19.

Referencias.

Grenier, D. (1988): *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en* 6^e (tesis doctoral). (Universidad J. Fourier Grenoble I: Grenoble, Francia).

Grothmann, R. (2005): *Regla y Compás* (programa de ordenador). (El autor: Alemania). <http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/java/zirkel/doc_en/> o <http://matematicas.uis.edu.co/~marsan/geometria/RyC/home.htm>

Hart, K. (1981): *Children's understanding of mathematics: 11-16.* (John Murray: Londres, Reino Unido).

Jackiw, N. (2003): *The Geometers' Sketchpad* (programa de ordenador). (Key Curriculum Press: Emeryville, EE.UU.). <http://www.keypress.com/>

Jaime, A. (1993): *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento* (tesis doctoral). (Universidad de Valencia: Valencia, España). Disponible en versión electrónica en <www.uv.es/Angel.Gutierrez>

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1990): Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele, en Llinares, S.; Sánchez, M.V. (eds.), *Teoría y práctica en educación matemática.* (Alfar: Sevilla, España), 295-384. Disponible en versión electrónica en <www.uv.es/aprengeom>

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1996): *El grupo de las isometrías del plano* (colección "Educación matemática en secundaria" nº 13). (Síntesis: Madrid, España).

Küchemann, D. (1980): Children's difficulties with single reflections and rotations, *Mathematics in School* vol. 9.2, pp. 12-13.

Laborde, J.-M.; Bellemain, F. (2005): *Cabri-Géomètre II+* (programa de ordenador). (LSD2, Univ. Jacques Fourier: Francia). <http://www.cabri.com/v2/pages/es/index.php>

Lee, K.D. (1995): *Tesselmania* (programa de ordenador). (The Learning Company: EE.UU.). <http://forum.swarthmore.edu/software.demos.html>

Lee, K.D. (2005): *Kaleidomania* (programa de ordenador). (Key Curriculum Press: Emeryville, EE.UU.). <www.keypress.com>

Pedagogueri Software (2000): *Tess* (programa de ordenador). (Pedagogueri Software: Canadá). <www.peda.com/tess/Welcome.html>

Ranucci, E.R.; Teeters, J.L. (1977): *Creating Escher-type drawings.* (Creative Publications: Palo Alto, EE.UU.).

Richter-Gebert, J.; Kortenkamp, U.H. (2003): *Cinderella* (programa de ordenador). (Springer: Alemania). <http://www.cinderella.de>

Weeks, J. (1995): *Kali* (programa de ordenador). (The Geometry Center: Minnesota, EE.UU.). <http://www.geom.uiuc.edu/>