Gutiérrez, A. (2006): La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. En Flores, P.; Ruiz, F.; De la Fuente, M. (eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 13-58). Badajoz, España: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría

Ángel Gutiérrez Rodríguez

Dpto. de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia

Como su título indica, este capítulo está dedicado a revisar la situación actual de la investigación en didáctica de las matemáticas que tiene que ver con la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. El capítulo está dividido en varias secciones dedicadas a temas importantes en los que se investiga actualmente, resultados destacados de las investigaciones, los marcos teóricos más utilizados y problemas de investigación abiertos. La primera sección describe el modelo de razonamiento matemático de Van Hiele, sin duda el marco teórico más usado actualmente para organizar la enseñanza de la geometría. La segunda sección aborda la enseñanza de la geometría con la ayuda de ordenadores y software específico, que han supuesto en los últimos años la aparición de nuevas estrategias de enseñanza y organización de las clases. La tercera sección está dedicada a uno de los temas clave en las matemáticas de Secundaria, el aprendizaje del razonamiento abstracto y las demostraciones matemáticas; veremos que no es posible simplificar el problema fijándonos sólo en las demostraciones formales, sino que hay otras formas de justificación usadas por los estudiantes que los profesores deben tener en cuenta. La cuarta sección tiene como fin reflexionar sobre las estrechas relaciones entre el uso de la visualización (o imaginación) espacial y el aprendizaje de la geometría. Por último, la quinta sección describe los resultados de algunas investigaciones relacionadas con el aprendizaje de conceptos geométricos elementales estudiados en Primaria y Secundaria.

Sin abandonar el objetivo de describir resultados de investigaciones didácticas, este capítulo es lo menos abstracto o teórico posible, dedicando a las metodologías de investigación y a información técnica de estudios específicos sólo el espacio imprescindible, y centrándome en aquella información que pueda resultar útil a esa mayoría de lectores que son profesores de los diferentes niveles educativos.

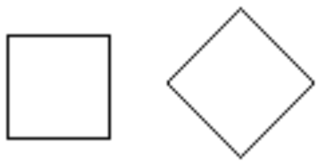
1. El modelo de razonamiento de Van Hiele

Hasta finales de los años 70 las teorías de Piaget constituían el marco teórico predominante en el mundo de la didáctica de las matemáticas. Sin embargo, a partir de la siguiente década han surgido, o se han popularizado, diversos marcos teóricos como el constructivismo (incluidos el constructivismo radical y el constructivismo social), la fenomenología didáctica, los modelos teóricos locales, la teoría de situaciones, las matemáticas realistas, el modelo de razonamiento matemático de Van Hiele, y otros. Todas estas teorías pueden ser aplicadas a la enseñanza y el aprendizaje de cualquier área de las matemáticas escolares, aunque realmente cada una de ellas está desarrollada sólo en algunas áreas concretas, a la espera de que los didactas investiguen la forma de aplicarlas a otras áreas. En lo referente a la geometría, en la actualidad el modelo de razonamiento matemático de Van Hiele es el marco teórico predominante y cuya aplicación al desarrollo curricular está dando mejores resultados. En esta sección comentaré las características centrales del modelo de Van Hiele y presentaré algunos ejemplos de aplicaciones a la enseñanza de temas concretos, procedentes de investigaciones recientes.

Los esposos holandeses Pierre Marie y Dina van Hiele, discípulos de Freudenthal en los años 50, eran profesores de matemáticas de Secundaria preocupados por el fracaso de sus alumnos a pesar de sus esfuerzos para lograr que comprendieran los contenidos geométricos que estudiaban. La observación de las formas de razonar de sus alumnos les llevó a identificar diversos estilos con características diferenciadas y que mostraban sucesivos momentos en el desarrollo de la capacidad de razonamiento matemático de los estudiantes. De esta forma, formularon las ideas básicas de un modelo que preconizaba la existencia de cinco *niveles de razonamiento* sucesivos (Van Hiele, 1957). Investigaciones posteriores, tanto de los propios Van Hiele como de otros investigadores han permitido desarrollar esta teoría. El modelo de Van Hiele considera que hay varios niveles de razonamiento matemático, que abarcan desde las formas más básicas propias de los estudiantes de Pre-escolar y primeros cursos de Primaria hasta las más sofisticadas propias de los matemáticos profesionales. Se pueden encontrar descripciones detalladas de los niveles en diversas publicaciones (Burger, Shaughnessy, 1986; Clements, Battista, 1992; Fuys, Geddes, Tischler, 1988; Gutiérrez, Jaime, Fortuny, 1991; Corberán, Gutiérrez y otros, 1994; Jaime, 1993; Jaime, Gutiérrez, 1990; Van Hiele, 1986). Las características principales de estos niveles son:

Nivel 1. Los estudiantes tienen una percepción global de las figuras geométricas, prestando atención casi exclusiva a sus propiedades visuales o físicas. Aunque identifican lados, ángulos y algunas propiedades básicas, el significado que dan a estos elementos es más físico que matemático. Los estudiantes también tienen una percepción individual de las figuras, de manera que las propiedades descubiertas en una figura no se generalizan a otras figuras de la misma familia.

Un niño de 2º de Primaria dice que el dibujo de la figura 1a sí es un cuadrado, pero el de la figura 1b no lo es "porque creía que estaba mal colocado". Otro compañero suyo da la misma respuesta y la justifica porque "como estaba así puesto ..." Como se ve, para los estudiantes en el nivel 1, la posición de las figuras es una propiedad fundamental para clasificarlas.



- a - - b -

Figura 1.

Nivel 2. Los estudiantes reconocen que las figuras geométricas están dotadas de elementos y propiedades matemáticos, si bien perciben unas propiedades como independientes de las otras. Las definiciones y clasificaciones se basan en estas propiedades matemáticas. Aparece la capacidad de generalización, de forma que los estudiantes consideran una propiedad observada en unos pocos ejemplos (muchas veces en un solo ejemplo) como verdadera para toda la familia. Análogamente, la demostración de la veracidad de una conjetura se hace verificándola en casos concretos. Se empieza a comprender y utilizar las partículas lógicas sencillas ("y", "no", "siempre", etc.), pero hay dificultad con las más complejas ("o", "a veces", "por lo menos", etc.).

Al pedirle a un estudiante de ESO que demuestre que la suma de los ángulos de un triángulo es 180°, contestó que esto "se debe a que el valor de dichos ángulos es 60°, porque 60 + 60 + 60 = 180." Este ejemplo muestra que, cuando la adquisición del razonamiento de nivel 2 todavía es baja, los estudiantes se conforman con verificar un solo caso, incluso tan particular como un triángulo equilátero. Esto cambia cuando los estudiantes afianzan esta forma de razonamiento. Por ejemplo, para demostrar que cualquier punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del segmento, un estudiante de 3º de Magisterio seleccionó 4 puntos de la mediatriz para comparar sus distancias a los extremos del segmento.

Nivel 3. Los estudiantes perciben las relaciones de implicación que ligan las propiedades de las figuras geométricas. También son capaces de usar correctamente las diferentes partículas lógicas y de realizar implicaciones sencillas en un contexto abstracto. En consecuencia, pueden realizar tanto clasificaciones inclusivas como exclusivas de familias, dependiendo de las definiciones usadas y basadas en el análisis de éstas. Sus demostraciones consisten en argumentos deductivos abstractos, aunque no formales, que pueden estar basados en la observación de ejemplos concretos. Son capaces de comprender demostraciones formales sencillas explicadas por el profesor y de reproducirlas con pequeñas variaciones, pero no pueden realizar demostraciones formales de manera autónoma.

Es habitual estudiar en ESO las sumas de los ángulos interiores de los polígonos. Planteado el caso general de un polígono de n lados, un estudiante dibujó un cuadrado, un pentágono y un hexágono. En cada caso, trazó todas las diagonales desde un vértice y contó la cantidad de triángulos que aparecen. Entonces escribió: "Vemos que en todos los casos se puede dividir un polígono en triángulos trazando diagonales. Si continuásemos con más polígonos veríamos que siempre el número mínimo de triángulos que podemos conseguir es el número de lados del polígono menos dos. Por tanto, para saber la suma de los ángulos de un polígono multiplicaremos 180° (los grados que suman los ángulos de un triángulo) por el número de triángulos => (n-2)x180°." Parte de los estudiantes del nivel 2 no son capaces de responder a esta pregunta salvo para polígonos con números de lados concretos, y los que obtienen una fórmula general es porque descubren el patrón en la sucesión de sumas de ángulos del triángulo (180°), cuadrilátero (360°), pentágono (540°), ... Sin embargo, la respuesta anterior es de nivel 3 porque explica el origen del patrón que da lugar a la fórmula y, a continuación, la escribe.

Nivel 4. Los estudiantes son capaces de usar el razonamiento matemático formal y, por tanto, de realizar y comprender demostraciones formales de manera autónoma. Admiten la existencia de definiciones equivalentes de un concepto y de distintas demostraciones del mismo teorema. También pueden manejar adecuadamente los diferentes elementos de un sistema axiomático (axiomas, definiciones, teoremas, etc.).

Como ejemplo de una respuesta de razonamiento del nivel 4 sirve cualquier demostración de un teorema o resolución de un problema de manera deductiva formal, siempre que el estudiante sepa lo que hace, entienda el proceso deductivo que está elaborando y no se limite a repetir algo previamente memorizado.

Nivel 5. En las publicaciones primitivas sobre el modelo de Van Hiele se describe el quinto nivel de razonamiento caracterizándolo por la capacidad para trabajar con diferentes sistemas axiomáticos (por ejemplo con dos geometrías, la euclídea y una no euclídea) y la capacidad para comparar o relacionar axiomas, definiciones o teoremas de ambos sistemas axiomáticos (por ejemplo, ¿suman 180° los ángulos de un triángulo esférico?). Hasta hace un año no había investigaciones que mostraran resultados experimentales en los que se pueda observar claramente el quinto nivel. Por este motivo, los investigadores han tendido a rechazar la existencia de este nivel o, como mínimo, a ignorarlo. Sin embargo, Blair (2004) describe un curso experimental en el que estudiantes universitarios de matemáticas trabajan con las geometrías euclídea, esférica y del taxista relacionando elementos de estas geometrías, demostrando conjeturas en cada una de ellas y analizando si una conjetura es cierta o no en varias geometrías.

El primer nivel de Van Hiele es típico de la enseñanza Primaria. En los últimos cursos de Primaria los estudiantes deberían iniciar el paso al segundo nivel, para completar la transición durante los primeros cursos de la ESO, aunque las investigaciones indican que un número significativo de estudiantes de ESO siguen operando, al menos parcialmente, con razonamiento del primer nivel (Jaime, 1993). Un rasgo típico de estos estudiantes es que suelen emplear abundantes términos matemáticos, aprendidos durante sus años de escolarización, pero los usan en contextos de carácter físico y con significados no matemáticos, sino asociados a posiciones, formas, etc. Así, un estudiante de 3º de ESO explicaba que, en un conjunto de cuadriláteros, había seleccionado los rombos fijándose "en sus 4 lados, dos paralelos inclinados y dos paralelos rectos" y que determinada figura es un cuadrado "por los 4 lados paralelos, y forma ancha y baja".

Al terminar la ESO los estudiantes deberían haber iniciado la transición al tercer nivel, especialmente en lo referente a su comprensión de la demostración en matemáticas como un argumento deductivo abstracto (dedico la tercera sección del capítulo a este tema). Por último, durante el bachillerato los estudiantes de las especialidades científicas deberían completar el proceso de adquisición del tercer nivel de razonamiento e iniciar su acceso al cuarto nivel (por lo menos los estudiantes mejor dotados).

Como resultado de diversos estudios experimentales (resumidos en Clements, Battista, 1992) sabemos que los niveles de razonamiento son secuenciales, es decir que el desarrollo de un estudiante debe pasar por lo sucesivos niveles, desde el primero, sin posibilidad de saltar ninguno de ellos. Además, cada nivel tiene un lenguaje propio, en el que determinados términos tienen significados diferentes de los que tienen en otros niveles. Por este motivo, si un profesor y sus alumnos se sitúan en niveles diferentes, surgirán problemas de comunicación entre ellos. Un ejemplo típico es el de un profesor de Secundaria que plantea problemas de demostración esperando que sus alumnos den justificaciones abstractas de la veracidad de la hipótesis (nivel 3 ó 4), mientras que éstos se limitan a verificarla en algunos ejemplos (nivel 2). El profesor rechaza las respuestas de los estudiantes por insuficientes, mientras que éstos no comprenden el motivo del rechazo ya que para ellos esas respuestas son válidas. Por tanto, el componente epistemológico del lenguaje juega un papel muy importante en la adquisición de los niveles de razonamiento, pues ésta no es posible sin el aprendizaje de su lenguaje específico (Van Hiele, 1986).

El modelo de Van Hiele plantea que el paso a un nivel superior de razonamiento se logra adquiriendo experiencia en el uso de esa forma de pensamiento, dentro de un contexto adecuado de enseñanza que proporcione a los estudiantes la posibilidad de adquirir esa experiencia. Para ayudar a los profesores a crear estos contextos, el modelo de Van Hiele propone organizar la actividad de los estudiantes en cinco *fases de aprendizaje* :

Fase 1 (información): Los estudiantes toman contacto con el nuevo tema que van a empezar a estudiar, y los profesores averiguan qué conocimientos previos tienen sus alumnos de este tema y en qué nivel de razonamiento se desenvuelven.

Fase 2 (orientación dirigida): Los estudiantes resuelven actividades y problemas para aprender los contenidos básicos del nuevo tema. Las actividades deben estar enfocadas a objetivos concretos. El papel del profesor es ayudar a sus alumnos a superar las dificultades y dirigir su trabajo hacia el objetivo buscado cuando se desvíen demasiado del mismo.

Fase 3 (explicitación): Durante su trabajo, los estudiantes deben expresar verbalmente o por escrito sus ideas y sus formas de resolver los problemas, debatir, preguntar, etc. De esta manera, practicarán los nuevos términos matemáticos que están aprendiendo. Al principio los estudiantes tienen la tendencia a usar sus propios términos extraescolares, pero poco a poco deben abandonarlos para sustituirlos, con la ayuda del profesor, por los términos matemáticos correctos. En todo caso, el uso de vocabulario matemático nunca debe convertirse en un obstáculo para el aprendizaje y la comprensión de los conceptos.

Fase 4 (orientación libre): Los estudiantes resuelven actividades y problemas para profundizar en su conocimiento del nuevo tema y en el uso del nuevo tipo de razonamiento aprendiendo contenidos más complejos. Las actividades deben ser variadas y requerir la combinación de los conocimientos de formas nuevas, evitando la simple aplicación de una fórmula, algoritmo, etc. Por otra parte, es interesante que las actividades sean abiertas, admitan varias vías de resolución y, a veces, tengan varias soluciones o ninguna. Ahora el profesor debe dejar a los estudiantes que exploren sus propias ideas y formas de resolución, pues generalmente lo importante no sólo es llegar a *la* solución correcta, sino trabajar en la resolución de los problemas.

Fase 5 (integración): El profesor y sus alumnos realizan un repaso global de todo lo aprendido en el tema que han estado estudiando y, si es procedente, lo conectan con conocimientos anteriores del mismo tema u otros relacionados.

No se debe interpretar la fase 3 como un tiempo entre las fases 2 y 4 dedicado al diálogo, sino como una actitud permanente, es decir, superpuesta a las otras cuatro fases. Su objetivo es fomentar, siempre que sea oportuno, el diálogo y que los estudiantes expresen sus ideas utilizando la terminología adecuada.

La utilidad del modelo de Van Hiele para los profesores es doble. Por una parte, los niveles de razonamiento sirven de guía para valorar el progreso de los alumnos en sus estrategias de pensamiento. Por otra parte, los niveles y las fases constituyen un marco de referencia para la organización de las clases de geometría (y de cualquier otro tema de matemáticas). Hay numerosos ejemplos interesantes de implementaciones curriculares basadas en el modelo de Van Hiele abarcando pequeñas unidades de enseñanza para un tema concreto (Grupo Construir las Matemáticas, 2001), otras de mayor extensión para temas que pueden llegar a abarcar varios cursos (Corberán, Gutiérrez y otros 1994; Jaime, Gutiérrez, 1996; Guillén, 1997), y la organización de un currículum completo de la enseñanza no universitaria (NCTM, 2000). En las secciones siguientes describiré algunos de estos ejemplos, pero ahora me referiré a una propuesta, muy reciente, que está llamada a marcar la enseñanza de las matemáticas en los próximos años en el contexto internacional.

Con la publicación de los "estándares curriculares para las matemáticas escolares" (NCTM, 1989), el National Council of Teachers of Mathematics (asociación de profesores de matemáticas de EE.UU.) marcó unas directrices para la enseñanza de las matemáticas en los niveles no universitarios de su país, documento que ha tenido desde entonces una amplia repercusión internacional, incluida España. Recientemente, el NCTM ha revisado y actualizado dicho documento, ajustándolo a la situación actual y corrigiendo algunos aspectos del documento anterior. Al igual que ocurría en los estándares curriculares, los nuevos "principios y estándares" (NCTM, 2000) dedicados a la geometría están organizados basándose en los niveles de Van Hiele:

- Para el periodo de pre-escolar a 2º grado (equivalente a 2º de Primaria) se indica que estos cursos "son un momento ideal para ayudar a los niños a perfeccionar y ampliar su comprensión" de los conceptos relacionados con la forma. "La geometría de estos cursos empieza describiendo y dando nombres a las figuras. Los estudiantes describen los objetos hablando de ellos e indicando sus semejanzas y diferencias. Los profesores deben ayudarles a incorporar gradualmente en sus descripciones los términos convencionales."

- En el periodo de los grados 3º a 5º los estudiantes "deben desarrollar formas más precisas de describir figuras, centrándose en identificar y describir sus propiedades ... " Además, para afianzar sus conocimientos sobre las figuras geométricas, los estudiantes deben "comparar y discutir sobre sus propiedades, clasificarlas y formular o analizar definiciones basadas en las propiedades de una figura." Además, "a medida que las ideas de los estudiantes evolucionan, deben formular conjeturas sobre propiedades y relaciones geométricas. Usando dibujos, materiales concretos o software para formular y verificar sus conjeturas, los estudiantes pueden articular argumentos matemáticos sobre por qué las relaciones geométricas son ciertas."

- En los grado 6º a 8º, "los estudiantes deben examinar cuidadosamente las características de las figuras para definirlas con precisión ... Las investigaciones sobre las propiedades y relaciones entre figuras semejantes pueden proporcionar a los estudiantes muchas oportunidades para formular y evaluar conjeturas inductiva y deductivamente ... Los estudiantes pueden usar software de geometría dinámica para comprobar las conjeturas con otros ejemplos. Pueden formular argumentos deductivos sobre sus conjeturas. Comunicar con claridad y exactitud tales razonamientos prepara a los estudiantes para crear y comprender demostraciones más formales en los cursos siguientes."

- Finalmente, en los grados 9º a 12º, "los estudiantes deben ser cada vez más capaces de usar razonamiento deductivo para establecer o rechazar conjeturas, y usar conocimientos ya establecidos para deducir información sobre otras situaciones ... Los estudiantes deben empezar a organizar su conocimiento sobre familias de objetos más formalmente. Un primer paso importante es saber encontrar descripciones precisas de las condiciones que caracterizan una clase de objetos", es decir definiciones matemáticamente correctas.

Como se ve en los párrafos anteriores, el NCTM propone una organización de la enseñanza de la geometría de Primaria y Secundaria que fomente el progreso de los estudiantes por los tres primeros niveles de Van Hiele, pudiendo los estudiantes más hábiles iniciar la entrada al cuarto nivel de razonamiento en los últimos cursos de

Secundaria. Además de las anteriores prescripciones teóricas sobre cómo debe ser la enseñanza de la geometría en los sucesivos cursos, el documento incluye numerosos ejemplos específicos, que se complementan con otros ejemplos interactivos presentados en su página web.

2. La enseñanza de geometría en micromundos informáticos

Cuando en los años 80 se empezó a popularizar el uso de ordenadores en los centros docentes, se inició una agenda de investigación, que sigue activa en la actualidad, para explorar los beneficios que se pueden obtener usando medios informáticos para la enseñanza de la geometría. Desde entonces, la cantidad de libros y artículos publicados dedicados a informar sobre resultados de investigaciones y experimentaciones es enorme. Hay revistas especializadas como *Micromath,* dirigida a profesores y que presenta numerosas experiencias de clase, e *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* dedicada a presentar resultados de investigaciones. También hay congresos cuyo objetivo es el aprendizaje de las matemáticas con tecnología y otros más especializados dedicados a programas como Cabri o Derive. Y, naturalmente, internet está repleta de páginas web dedicadas a este tema (ver Piñeiro, 2001). En esta sección comentaré las tendencias actuales de la investigación sobre enseñanza de la geometría con la ayuda de medios informáticos. Además, en las siguientes secciones incluiré algunas referencias a investigaciones de este tipo, presentada cada una con detalle en su contexto específico.

Uno de los avances más importantes en la informática educativa fue el Logo, potente lenguaje de programación con prestaciones similares a las de otros lenguajes de uso profesional como Basic, Fortran, Pascal, etc., pero con una forma de uso muy sencilla y una estructura de comandos basada en términos del lenguaje ordinario que lo hacen apto incluso para niños de Primaria, como *Avanza, Giraderecha, Repite, Sinlapiz,* etc. La mayoría de programas informáticos de geometría potencian la representación visual y ocultan (o reducen al mínimo) la representación simbólica algebraica o numérica. Por el contrario, Logo utiliza ambas pues, al tratarse de un lenguaje de programación, la forma normal de usarlo es dando instrucciones textuales, en modo directo o en forma de programas.

Aunque parece que el Logo haya pasado de moda y haya sido sustituido por otro tipo de programas, como los de geometría dinámica, en la actualidad son numerosos los profesores de todo el mundo que siguen usándolo y diversas las versiones de este programa disponibles, tanto comerciales como de dominio público[1]. Por otra parte, los

1 Hay varias páginas de internet útiles para conectar con usuarios de Logo: <roble.pntic.mec.es/~apantoja/index.html> incluye la última versión de MSWLogo en español, una

avances en capacidad y rapidez de los ordenadores también han influido en el desarrollo del Logo, habiendo actualmente versiones muy sofisticadas que incluyen habilidades especiales, como MicroWorlds (LCSI, 1998), que permite crear micromundos complejos que pueden servir como unidades de enseñanza de numerosos conceptos matemáticos, y Turtle Math (Clements, Meredith, 1994), en el que además de moverse la tortuga como respuesta a los comandos, como en todas las versiones de Logo, es posible mover la tortuga con el cursor para realizar un recorrido por la pantalla y el ordenador genera automáticamente el programa con la lista de comandos correspondiente.

Existen numerosas unidades didácticas de enseñanza de geometría basadas en Logo fruto de investigaciones y experimentaciones didácticas. Un ejemplo es el conjunto de unidades de enseñanza para Pre-escolar y Primaria presentadas en Clements, Battista, Sarama (2001), resultado de más de una década de investigación y experimentaciones. Las primeras actividades sirven para introducir a los estudiantes en el lenguaje Logo y sus primitivas básicas, conectando los movimientos en Logo con movimientos reales, para lo cual los estudiantes realizan recorridos por la clase que después reproducen en la pantalla del ordenador. A continuación se presenta un bloque de actividades de estudio de algunos polígonos, sus propiedades básicas y la clasificación de los cuadriláteros. La última parte está dedicada a estudiar los movimientos (isometrías) del plano, las características visuales de cada movimiento, su utilización para resolver problemas y las relaciones entre traslaciones, giros y simetrías.

Otro ejemplo es la unidad de enseñanza para estudiantes de Magisterio presentada en Barroso (2000). La primera parte está formada por información introductoria sobre las características de Logo y sus conjuntos de primitivas básicas, seguida por numerosas actividades de afianzamiento en las que se pide dibujar diversas figuras.

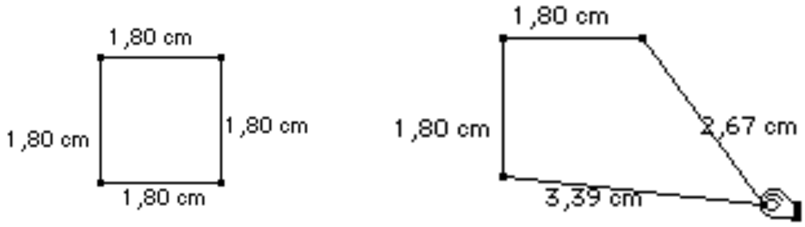
Podemos considerar los programas de geometría dinámica (PGD) como los sucesores del Logo en popularidad e interés despertado tanto entre profesores como investigadores didactas. Existen numerosos PGD, entre ellos Cabri-Géomètre, Cinderella, Geometer's Sketchpad y Geup (Alvarez, 2001)[2]. Salvando las diferencias visuales entre ellos en cuanto a su estilo de presentación en la pantalla, y unas pocas

revista electrónica, información sobre versiones disponibles en la actualidad, experiencias de aula, etc. <www.xtec.es/logo/index.htm> es la página de usuarios de Logo de Cataluña. <www.uam.es/servicios/apoyodocencia/ice/logo/index.htm> es la página del Grupo Logo de Madrid. <www.eurologo.org> es la página del congreso europeo de usuarios de Logo.

2 Es posible obtener versiones demo de todos estos programas en sus respectivas páginas web: <www.cabri.net>, <www.cinderella.de/en/index.html>, <www.keypress.com/sketchpad> y <www.geup.net>.

diferencias importantes por algunas habilidades presentes en un programa y no en los otros, todos ellos tienen una base común, que es la capacidad de realizar construcciones geométricas a partir de objetos elementales (punto, segmento, recta, circunferencia, polígono, etc.) y acciones matemáticas (dibujar una recta perpendicular o paralela, el punto medio, la bisectriz, el objeto simétrico, etc.) y de transformar esas construcciones en tiempo real mediante arrastre con el cursor de alguno de los elementos de la construcción, de manera que las propiedades matemáticas usadas para realizar la construcción se mantienen; por ejemplo, si creamos una recta y construimos una segunda recta como paralela a la primera, cada vez que giremos la primera recta la segunda realizará el giro correspondiente para mantenerse paralela a la primera aunque, probablemente, a diferente distancia de ella. Esta habilidad de transformación continua de los PGD es lo que les proporciona su gran potencial didáctico, pues permiten a los estudiantes ver una gran variedad de ejemplos o casos diferentes en pocos segundos, algo que en un contexto de pizarra, papel y lápiz es imposible.

Esta manera de actuar de los PGD (realizar construcciones mediante propiedades matemáticas que las caracterizan y que permanecen invariantes ante transformaciones de arrastre) ha dado lugar a la distinción entre los conceptos de *figura* y *dibujo,* que es fundamental para entender y usar adecuadamente estos programas. Siguiendo a Laborde, Capponi (1994), una *figura* es un objeto matemático creado por el ordenador que está caracterizado por las propiedades matemáticas (pero no visuales) usadas en su construcción, y un *dibujo* es una representación particular de una figura en la pantalla del ordenador, es decir un ejemplo de esa figura. Por ejemplo, es típico que los estudiantes que inician el aprendizaje de un PGD construyan un cuadrado trazando cuatro segmentos verticales y horizontales de la misma longitud (figura 2a). En este caso, la perpendicularidad de los lados no se obtiene por medios matemáticos (por ejemplo mediante el comando “recta perpendicular”), sino visuales. Además, la igualdad de los lados se obtiene midiendo sus longitudes y alargando los lados más cortos hasta ver las cuatro medidas iguales, lo cual también es un procedimiento visual. El resultado es que, cuando los estudiantes seleccionan un vértice de su cuadrado y lo arrastran, el polígono construido se deforma, pues los otros tres vértices se quedan fijos (figura 2b). Por lo tanto, la *figura* construida no es un cuadrado sino un cuadrilátero general, ya que la única propiedad matemática que la caracteriza es la de ser un polígono con cuatro lados, representada a veces por un *dibujo* con forma de cuadrado.



- a - - b -

Figura 2.

Es interesante observar que Logo y los PGD requieren análisis diferentes de las figuras geométricas para su construcción. La diferencia más evidente es que en Logo se deben considerar los ángulos exteriores de los polígonos, mientras que en los PGD se utilizan los ángulos interiores. Otra diferencia notable es que en Logo la igualdad de longitudes se garantiza avanzando el mismo número de pasos, mientras que en los PGD se hace dibujando circunferencias (Balacheff, Kaput, 1996; Barroso, 2000).

Hay infinidad de publicaciones que dan cuenta de resultados de investigaciones basadas en PGD, en las cuales se ha trabajado con estudiantes desde los primeros cursos de Primaria hasta la universidad. No obstante, Secundaria es el segmento educativo al que más atención están prestando los investigadores, pues es en el que se puede sacar más provecho de estos programas. Un estudio de este tipo es Marrades (1996), en el cual su autor trató de identificar y analizar algunas variables presentes en los procesos de resolución de problemas de geometría con PGD en los que los estudiantes deben elaborar y justificar conjeturas. Para ello, trabajando con Cabri versión 1.7, se preparó una secuencia de actividades, basada en contenidos de geometría usualmente estudiados en ESO[3], con el doble objetivo de enseñar a los estudiantes contenidos geométricos y de iniciarles en el razonamiento deductivo matemático, pidiéndoles elaborar conjeturas y justificarlas. Las actividades elaboradas son:

1) Propiedades de los ángulos formados por dos rectas paralelas y una transversal.

2) Suma de los ángulos interiores de un triángulo.

3) Propiedades de los ángulos exteriores de un triángulo: Relaciones con los ángulos interiores.

4) Propiedades de los triángulos isósceles: Elementos iguales, formas de construcción, relaciones entre alturas, bisectrices, mediatrices y medianas.

3 La experimentación tuvo lugar antes de implantarse la ESO, con estudiantes de 2º de BUP que no habían estudiado estos contenidos de geometría desde 7º de EGB.

5) Teorema de Varignon: Propiedades del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos medios de los lados de otro cuadrilátero.

6) Relación entre los ángulos central e inscrito de una circunferencia.

7) Construcción de un cometa[4]. Conjeturas sobre igualdades de ángulos.

8) Construcción de un triángulo inscrito en una circunferencia y la tangente por uno de los vértices. Conjeturas sobre igualdades de ángulos.

Como puede observarse, hay una progresión en las actividades en cuanto a los conocimientos previos necesarios y a la dificultad de las conjeturas que los estudiantes deben descubrir y justificar. También quedó patente en esta investigación la necesidad de que los estudiantes sepan usar correctamente el PGD antes de empezar a hacer matemáticas con él, por lo que es necesario un periodo introductorio para estudiantes sin experiencia previa. En esta introducción, es fundamental definir claramente el contrato didáctico relativo a la diferencia entre figura y dibujo y a cómo validar la corrección de una construcción. En los PGD esta validación se basa en el arrastre con el cursor de los elementos libres de la figura construida: Una figura está bien construida si, al arrastrar cualquiera de sus elementos, ésta "no se deshace", es decir, conserva las características matemáticas que la definen. La figura 2 muestra un caso de figura de cuadrado mal construida, porque al arrastrar un vértice deja de ser un cuadrado.

Aunque hay autores que previenen contra la posibilidad de que el uso de PGD obstaculice el aprendizaje de las demostraciones deductivas, porque la información proporcionada por la acción de arrastre en la pantalla es tan convincente que los alumnos no sienten la necesidad de otro tipo de demostración (Chazan, 1993; Healy, 2000), diversas investigaciones están poniendo en evidencia lo beneficioso que puede ser usar un PGD para ayudar a los estudiantes a entrar en el terreno del razonamiento geométrico abstracto (Jones, Gutiérrez, Mariotti, 2001).

Haciendo uso de las posibilidades actuales de las redes informáticas basadas en internet, la enseñanza a distancia adquiere nuevos significados, pues es posible minimizar el principal inconveniente de la enseñanza a distancia tradicional, la falta de relación interactiva entre profesor y alumnos y entre los alumnos. Murillo (2001) ha diseñado un entorno de enseñanza a distancia de la geometría de ESO basado en Cabri. La relación entre profesor y estudiantes y entre éstos se basa en diversos medios de comunicación electrónica de uso común en la actualidad, como páginas web, correo

4 Un *cometa* es un cuadrilátero con dos pares de lados consecutivos iguales (a veces se exije también que sea convexo).

electrónico y foro de discusión. La página web se usa principalmente para plantear los problemas que deben resolver los alumnos. El correo electrónico es el medio para que alumnos y profesor intercambien información, preguntas y respuestas, archivos de Cabri con construcciones, etc. El foro de discusión es el lugar donde los estudiantes pueden plantear públicamente dudas, pedir ayuda, responder a sus compañeros, etc. y donde tienen lugar discusiones sobre determinados conceptos o problemas planteados tanto por el profesor como por estudiantes. Entre los objetivos de esta investigación están el de diseñar un entorno interactivo y colaborativo de enseñanza en el que los estudiantes tengan libertad para trabajar a su ritmo y de manera autónoma, y el de analizar los distintos tipos de interacciones que se producen en este entorno y evaluar su influencia en el aprendizaje de los alumnos.

En cuanto a las actividades planteadas, están divididas en varios bloques: Medida, estimación y cálculo de longitudes y superficies; elementos geométricos básicos del plano; semejanzas y el teorema de Thales; transformaciones isométricas. En todos los casos se trata de actividades abiertas que admiten variedad de respuesta o enfoques.

Otro reciente tipo de software muy interesante son los programas de representación dinámica de sólidos, que nos permiten mover y transformar los sólidos de manera interactiva y en tiempo real, siendo Cabri 3D el de aparición más reciente. La cantidad de cálculos necesarios para representar un sólido en perspectiva y la velocidad con que deben hacerse para que la pantalla dé sensación de movimiento continuo hacen que hasta hace pocos años los ordenadores personales no tuvieran potencia suficiente para ello.

Los actuales programas de geometría espacial pueden convertirse en un excelente complemento (pero nunca sustituto) de las tradicionales cajas de sólidos geométricos de madera o cartulina. Una imagen dinámica de un sólido en la pantalla de un ordenador nunca podrá mejorar la calidad de una imagen real de ese sólido en las manos de los estudiantes, pero los ordenadores nos permiten hacer actividades mucho más variadas que los sólidos reales, como el paso de una forma de representación a otra (opaca o transparente, en perspectiva o en proyecciones ortogonales, etc.) el truncamiento, la superposición de sólidos, la transformación en desarrollos planos, etc. En la sección de este capítulo dedicada a la visualización en geometría presento ejemplos de este tipo de programas y resultados de investigaciones basadas en ellos.

3. Pruebas, justificaciones, demostraciones, ...

La demostración es uno de los pilares en los que se apoyan las matemáticas actuales. Los investigadores matemáticos están de acuerdo en que una demostración formal es el único medio válido para aceptar la veracidad de un nuevo teorema. Esta unanimidad se rompe cuando se trata de decidir qué es aceptable como demostración y qué no lo es, pues hay entre los matemáticos orientaciones epistemológicas divergentes, como los intuicionistas, que rechazan la demostración por reducción al absurdo y los formalistas, que la aceptan (Sáenz, 2001). Recientemente ha habido propuestas de nuevos tipos de demostración diferentes de la tradicional demostración deductiva lógico-formal. Así, se han propuesto las demostraciones "de conocimiento cero", en las que se proporciona evidencia de que existe una demostración válida pero no se da información sobre cómo es esa demostración, y las "demostraciones holográficas", consistentes en re-escribir con gran detalle una demostración y verificar la validez de fragmentos elegidos al azar de la nueva demostración (con frecuencia con ayuda de un ordenador para incrementar el número de fragmentos verificados); este procedimiento no da una certeza absoluta de que la demostración sea correcta, sino un grado de certeza que puede calcularse probabilísticamente (Hanna, 1996).

Sin llegar a tipos de demostración como los anteriores, tan alejados de las prácticas de demostración formal habituales, recientemente han surgido también demostraciones apoyadas en cálculos realizados por ordenador, la más famosa de las cuales es la demostración del teorema de los cuatro colores por Apple y Haken. Los detractores de esta forma de demostración argumentan que los programas pueden tener fallos y que los ordenadores pueden cometer errores de cálculo.

Otro caso que ha generado polémica es la reciente demostración del teorema de Fermat. Su autor, Andrew Wiles, hizo pública en 1993 una demostración que, al ser analizada por expertos, resultó inválida. Tras varios meses de trabajo intensivo con la ayuda de Richard Taylor, Wiles presentó en 1995 una nueva demostración que ha sido analizada con todo detalle por el reducidísimo grupo de expertos capaces de comprenderla, los cuales han llegado a la conclusión de que esta demostración sí es correcta. La polémica ha surgido por el hecho de que esta demostración es tan larga y compleja que sólo unas pocas personas en el mundo están en condiciones de leerla, comprenderla y analizarla, lo cual plantea la cuestión de si es razonable tener que aceptar la validez de una demostración basándonos sólo en la confianza que nos ofrece la opinión de otras personas.

También en el mundo de las matemáticas escolares hay opiniones dispares sobre cómo pueden o deben ser las demostraciones admisibles de los estudiantes, si bien aquí el motivo de discrepancia no tiene que ver con las prácticas de los matemáticos profesionales sino con las creencias de los estudiantes y con el desarrollo de su capacidad de razonamiento deductivo. Superadas la época de las "matemáticas modernas", en la que se intentaba que todos los estudiantes de Secundaria aprendieran a hacer demostraciones formales, y las décadas siguientes, en las que pocas veces se mencionaban las demostraciones y muchas menos se enseñaban, en la actualidad nos encontramos en un momento en el que profesores, didactas y matemáticos preocupados por la problemática de la enseñanza están bastante de acuerdo en que es necesario que los estudiantes de Secundaria inicien el contacto con las demostraciones y en que aprender a demostrar es un largo camino, que generalmente dura varios años, en el que las demostraciones formales sólo son el último paso.

En el contexto de la enseñanza no universitaria, es necesario dar a la palabra "demostración" un significado amplio que integre diversos tipos de justificaciones, verificaciones o demostraciones informales y formales admitidas por los estudiantes, en coherencia con los niveles 2º a 4º de Van Hiele (ver la primera sección de este capítulo). En esta línea, el estudio realizado por Martínez (1999) presenta un análisis epistemológico de la demostración matemática en el que identifica una serie de conceptos relacionados con el de demostración formal, como son explicación, justificación, argumentación, etc. que tienen significados y utilidades próximas, pero diferentes, a los de demostración y que son utilizados por profesores y estudiantes en las clases de matemáticas. Se trata de una red de términos con significados diferentes que, además, pueden variar según sea un profesor o un estudiante quien los ponga en juego.

Lo que un profesor nunca debe hacer es empeñarse en que sus alumnos realicen un tipo de demostraciones para las que todavía no están preparados y cuya estructura y finalidad no entienden. La parte más difícil del trabajo de un profesor en este terreno es la que tiene que ver con hacer progresar la habilidad de sus alumnos para hacer demostraciones. Los resultados de diversas investigaciones indican que, al organizar las clases, es necesario tener en cuenta tres facetas estrechamente relacionadas: Las funciones de las demostraciones, las concepciones de los estudiantes sobre demostración y los tipos de demostraciones producidas por los estudiantes.

1) <u>Las funciones de las demostraciones</u> en matemáticas. Bell (1976) y De Villiers (1993) han identificado diversas funciones que ejercen las demostraciones:

Explicación: Con frecuencia se pide a los estudiantes demostrar resultados de cuya veracidad ya están convencidos porque ya los habían estudiado en otros cursos o porque han experimentado con ellos, por ejemplo con Cabri. En este caso, la demostración no debe pretender convencer ni verificar que esa afirmación es cierta, sino explicar por qué lo es.

Descubrimiento: En ocasiones los matemáticos plantean una conjetura correcta pero, tras demostrarla, un análisis cuidadoso de la demostración les permite descubrir que no han usado alguna de las hipótesis, por lo que su conjetura no es más que un caso particular de otro teorema más general e interesante. Así pues, esta demostración les ha permitido encontrar otro teorema que previamente no sospechaban.

Convicción o verificación: Esta es la función más "popular" de las demostraciones, y la que una mayoría de profesores de Secundaria y universidad se afanan por transmitir: Es necesaria una demostración para convencernos de que una afirmación o conjetura es cierta, porque nos proporciona la certeza absoluta de dicha veracidad. Sin embargo esto es parcialmente falso pues, en el mundo de los investigadores matemáticos, esta función apenas se encuentra, ya que generalmente los matemáticos sólo intentan hacer una demostración formal cuando están razonablemente convencidos de que su resultado es cierto.

Reto intelectual: Resolver un problema, demostrar una conjetura o encontrar una nueva demostración de un teorema ya conocido son para la mayoría de los matemáticos actividades tan atractivas y absorbentes como para otras personas resolver rompecabezas, hacer crucigramas o llegar al último nivel de un video-juego. En este caso, la demostración no tiene un objetivo científico o educativo, sino lúdico.

Sistematización: Cuando nos encontramos ante una variedad de axiomas, definiciones y teoremas relacionados, es necesario organizar esta información de una manera coherente y sistemática. En este caso, las demostraciones nos permiten sacar a la luz las relaciones deductivas entre axiomas o definiciones y teoremas y entre unos y otros teoremas, y adquirir una visión global de todos ellos. Con frecuencia es posible organizar de diferentes maneras un conjunto de teoremas, que nos darán distintos puntos de vista sobre la estructura de este campo matemático.

Comunicación: En el mundo de las matemáticas, como en muchas otras profesiones o especialidades, hay determinados códigos, lenguajes y convenciones que se usan para compartir información entre los miembros del grupo. En este sentido, una demostración formal de un teorema es el medio aceptado por los matemáticos profesionales para comunicarse entre ellos e informar de la validez de los resultados obtenidos.

De Villiers (1999) propone que los profesores planteen a sus alumnos problemas que les permitan notar las diferentes funciones de las demostraciones, y que lo hagan en el orden en que están descritas en los párrafos anteriores. Por ejemplo, veamos los siguientes problemas:

P_1) Una parcela con forma de triángulo equilátero está limitada por una cerca eléctrica. Cada lado de la parcela necesita su propia conexión al generador eléctrico, que está dentro de la parcela. ¿Dónde debe poner el propietario el generador para emplear la menor cantidad de cable posible en las conexiones con la cerca?

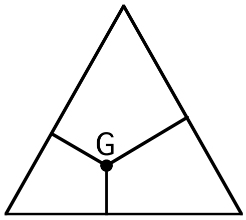


Figura 3.

En términos geométricos, P_1 consiste en encontrar un punto G interior al triángulo tal que la suma de sus distancias a los tres lados sea mínima (figura 3). Realizando la construcción con Cabri (G es un punto libre dentro del triángulo) y calculando la suma de las distancias de G a los lados del triángulo, todos los estudiantes se convencen del sorprendente resultado: La suma de distancias es la misma para todos los puntos interiores al triángulo, luego G puede ser cualquiera de ellos. Al hacer la demostración[5], se comprende por qué es cierto este resultado, luego esta demostración muestra su función de explicación.

P_2) Dibujemos un cometa y los puntos medios de sus lados. Si unimos ordenadamente los puntos medios, obtenemos un cuadrilátero. ¿Qué tipo de cuadrilátero es? ¿Puede ser alguna vez un cuadrado?

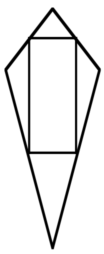


Figura 4.

Al realizar el dibujo (figura 4), descubrimos que el cuadrilátero interior es siempre un rectángulo y, en particular, es un cuadrado cuando el cometa es un rombo. Una vez completada la demostración[6], si la analizamos detenidamente podemos observar que la

5 Únase G con los vértices del triángulo y súmense las áreas de los tres triángulos creados.

6 Basada en relacionar mediante el teorema de Tales los lados del rectángulo con las diagonales del cometa.

única propiedad de los cometas que se utiliza es que sus diagonales son perpendiculares (e iguales para obtener un cuadrado). Por tanto, realmente hemos demostrado un resultado más general, concretamente que el cuadrilátero interior es un rectángulo siempre que el cuadrilátero exterior (que también puede ser cóncavo ¡e incluso cruzado!) tenga sus diagonales perpendiculares y es un cuadrado si, además, las diagonales tienen la misma longitud. Por otra parte, si en el enunciado del problema sustituimos el cometa por un cuadrilátero general, se elimina la hipótesis de la perpendicularidad de las diagonales, luego el cuadrilátero interior ya no tiene por qué ser un rectángulo, pero sigue siendo un paralelogramo. Esta demostración nos muestra su faceta de descubrimiento, pues nos ha permitido encontrar otros resultados desconocidos previamente.

2) Las concepciones usuales de los estudiantes de la demostración matemática. De Villiers (1991) da cuenta de una investigación en la que se presentaron a 519 estudiantes de Secundaria diversos enunciados de propiedades geométricas estudiadas usualmente en cursos anteriores y se les pidió que dijeran, para cada uno, si creían que esa propiedad es cierta o falsa y por qué lo creían. Aproximadamente el 65% de los estudiantes de todos los cursos contestaron que creían que las propiedades son ciertas porque están en el libro de texto o porque un profesor se lo había dicho. Sowder y Harel (1998) encontraron que este tipo de justificación es frecuente incluso en estudiantes universitarios. Se trata, por tanto, de estudiantes que aceptan la veracidad de una afirmación a partir de una fuente de *convicción externa* (porque así lo dice un profesor, libro de texto, compañero más avanzado, etc.).

La función de las demostraciones de convicción o verificación está estrechamente relacionada con esta concepción de los estudiantes, pues ambas están presentes en las clases en que los profesores presentan a sus alumnos los teoremas que hay que estudiar como resultados ya establecidos y sus demostraciones ya elaboradas en los libros de texto. Pero, al mismo tiempo, otros estudiantes rechazan este papel de las demostraciones pues, después de habérseles presentado una demostración de un enunciado, y aceptar que se trata de una demostración correcta, afirman que necesitan comprobar algunos ejemplos para estar completamente seguros de la veracidad del enunciado.

En la investigación de De Villiers mencionada antes, casi el 25% de los estudiantes contestaron que creían que las propiedades enunciadas son ciertas porque se habían convencido de ello a partir de su propia experiencia. Por tanto, estos estudiantes habían realizado algún tipo de verificación o demostración que les ayudara a decidir si el enunciado es cierto o no, es decir que necesitan una fuente de *convicción personal* basada en su propia experiencia.

En otras investigaciones, numerosos estudiantes que han verificado una conjetura en algunos ejemplos afirman que eso basta para convencerles de que la conjetura es cierta y no necesitan más demostración (están en el nivel 2 de Van Hiele), pero otros estudiantes afirman que, aunque los ejemplos les han convencido de la veracidad de la conjetura, quieren alguna explicación de por qué es cierta (están en el nivel 3 ó 4 de Van Hiele). Esta respuesta da a las demostraciones la función de explicación.

Para que los estudiantes empiecen a comprender la necesidad de las demostraciones deductivas, los profesores deben plantearles problemas que ellos vean como interesantes y conjeturas que resulten ser parcialmente falsas. Kline (1978, p. 186) ya nos advertía de que "las demostraciones tienen sentido cuando responden a las dudas de los estudiantes, cuando se demuestra algo que no es evidente" para ellos.

3) <u>Los tipos de demostraciones</u> que los estudiantes producen y aceptan como válidas. Balacheff (1988 a y b) realizó investigaciones en las que propuso a estudiantes de Secundaria resolver problemas en los que debían formular y demostrar conjeturas. El análisis de las respuestas dio lugar a dos grandes categorías de demostraciones, demostraciones empíricas y deductivas, cada una con varias subcategorías:

Demostraciones empíricas son las que justifican la veracidad de una conjetura mediante su comprobación en uno o varios ejemplos concretos. Corresponden al nivel 2 de razonamiento de Van Hiele. Balacheff distingue tres tipos de demostraciones empíricas:

* Empirismo naïf: Se trata de demostraciones en las que el estudiante elige uno o varios ejemplos de manera aleatoria.

Un caso típico es comprobar con Cabri la veracidad de una conjetura mediante arrastre, desplazando el cursor por la pantalla sin seguir ningún camino o estrategia predeterminados. En contextos de lápiz y papel, la forma más frecuente de empirismo naïf consiste en dibujar uno o varios ejemplos y realizar los recuentos o mediciones necesarios para verificar en ellos la conjetura.

* Experimento crucial: Se trata de demostraciones en las que el estudiante elige cuidadosamente un ejemplo, con el convencimiento de que si la conjetura es cierta en este ejemplo, será cierta siempre.

Esta forma de demostración se da, por ejemplo, cuando el problema se refiere a cuadriláteros y los estudiantes seleccionan figuras de un tipo particular, por ejemplo rectángulos, para verificar la conjetura.

* Ejemplo genérico: Se trata de demostraciones en las que el estudiante elige un ejemplo que actúa como representante de su familia, por lo que la demostración, aunque sea particular, pretende ser abstracta y tener validez para toda la familia representada.

La siguiente solución al problema de calcular el número de diagonales de un polígono de n lados (Balacheff, 1988 a) es un ejemplo genérico: Tras dibujar un polígono de 8 lados y sus diagonales (figura 5), dos estudiantes cuentan la cantidad de vértices unidos mediante diagonales con cada vértice, y explican: “A, son 5 puntos. B, son 5 puntos. C, son 5 puntos menos 1, porque CA ya está, luego son 4 puntos. D, son 3 puntos, porque ya están A y B. E, serán 3 puntos porque ya están A, B y C. F, son 2 puntos ... no, E son 2 puntos. Entonces, F es 1 punto y G no tendrá ninguno. Y H todavía menos.” Después, los estudiantes resumen su justificación: “Los dos primeros puntos que se toman tienen 5 [diagonales], y después cada vez que se toman 2 puntos, eso hace 1 [diagonal] menos porque cuanto más se sigue, más [diagonales] estarán duplicadas”.

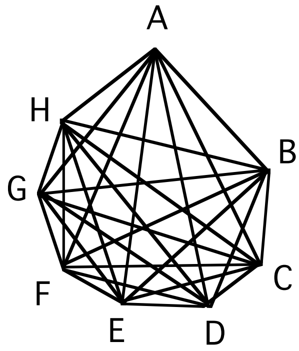


Figura 5.

Como se ve, la observación del ejemplo dibujado se ha convertido en la demostración, y los estudiantes no han sabido formular la relación general: La cantidad de diagonales de un polígono de n lados es la suma (n-3) + (n-3) + (n-4) + (n-5) + ... + 2 + 1. No obstante, este ejemplo tenía el papel de representante de la familia de los polígonos, pues esta pareja de estudiantes era capaz de calcular la cantidad de diagonales de cualquier polígono adaptando la relación que habían descubierto, aunque no eran capaces de formular la relación general.

Demostraciones deductivas son las que justifican la veracidad de una conjetura mediante argumentos deductivos basados en las hipótesis y otras propiedades previamente admitidas como ciertas. Corresponden a los niveles 3 y 4 de razonamiento de Van Hiele. Balacheff distingue dos tipos:

* Experimento mental: Son demostraciones en las que los estudiantes interiorizan las acciones realizadas previamente (generalmente manipulación de ejemplos), las disocian de esas acciones concretas y las convierten en argumentos abstractos deductivos basados en las propiedades observadas y no en las particularidades del ejemplo usado.

En el problema de cálculo de la cantidad de diagonales, un estudiante empezó dibujando algunos polígonos y contando la cantidad de diagonales que salían de cada vértice. Después escribió: "En un polígono de n lados, cada vértice tiene n-3 diagonales, porque no se puede unir con ese vértice ni con los dos que están junto a él. Como el polígono tiene n lados, salen n(n-3) diagonales. Pero cada diagonal se cuenta dos veces, luego queda n(n-3)/2". A diferencia del caso de demostración mediante ejemplo genérico, ahora el estudiante sí ha sido capaz de generalizar el resultado que ha observado en los ejemplos concretos que ha dibujado.

* Cálculo simbólico: Se trata de demostraciones que no tienen relación con experimantaciones con ejemplos, sino que están basadas en transformaciones más o menos formalizadas de expresiones simbólicas y de los enunciados.

Se puede observar que la clasificación hecha por Balacheff de las demostraciones deductivas es bastante simplista. Harel y Sowder (1998), a partir de experimentos con estudiantes universitarios, proponen una clasificación mucho más detallada de demostraciones deductivas, si bien analizarla se sale de mis objetivos en este capítulo.

Las clasificaciones de demostraciones planteadas por Balacheff y por Harel y Sowder son actualmente los principales modelos de referencia para los estudios sobre esta problemática. No obstante, ésta es una línea de investigación abierta en la que se sigue trabajando para mejorar las descripciones anteriores; no es infrecuente encontrar estudios experimentales en los que las categorías anteriores no se adecúan a las respuestas de los estudiantes, por lo que sus autores introducen modificaciones que adaptan y enriquecen dichas categorías (Ibáñes, 2001; Marrades, Gutiérrez, 2001).

Existen numerosas propuestas de enseñanza de la demostración basadas en contenidos geométricos. En Jones, Gutiérrez, Mariotti (2001) se presentan varias de ellas, todas aprovechando la potencialidad de los entornos de geometría dinámica, pero con objetivos y metodologías diferentes. Otra propuesta, interesante por lo inusual, es la que presentan Fuys, Geddes y Tischler (1988), que se basa en experimentos de enseñanza de la propia Dina Van Hiele. Está formada por 7 actividades, cada una con varias partes, cuyo objetivo de enseñanza es el aprendizaje de algunas propiedades básica de los triángulos, y cuyo objetivo respecto de la demostración es iniciar a los estudiantes en el uso de argumentos deductivos.

- La primera actividad, orientada a la detección de conocimientos o carencias previos, plantea manipulaciones de comparación y medición de ángulos y termina con una toma de contacto con la propiedad de la suma de los ángulos de un triángulo (figura 6).

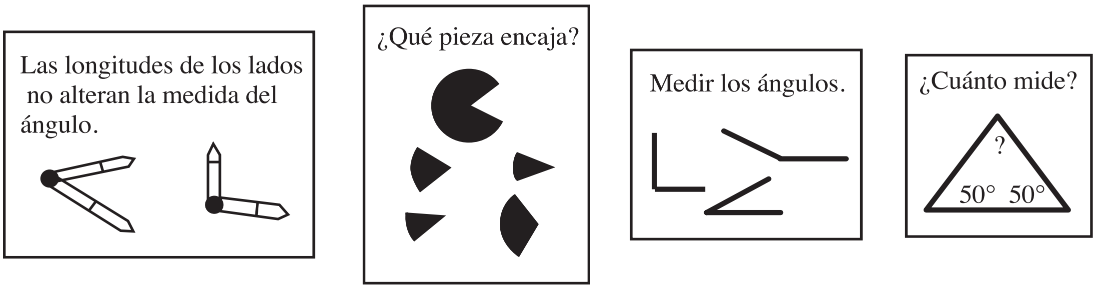


Figura 6.

- La segunda actividad establece el entorno de trabajo, formado por mallas de paralelogramos y triángulos. Se propone a los estudiantes construir diversos mosaicos con baldosas con forma de cuadrado, rectángulo y paralelogramo y dibujar las mallas correspondientes. También se les propone construir mallas con triángulos congruentes y dibujar estas mallas añadiendo diagonales a las mallas de paralelogramos (figura 7).

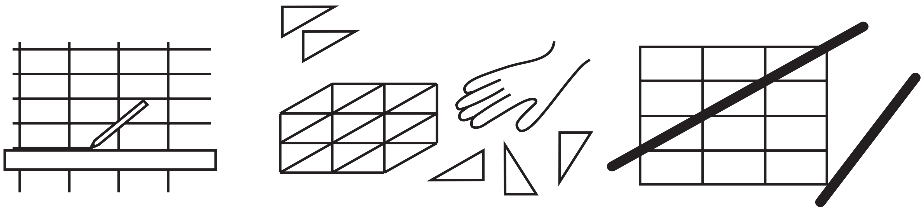


Figura 7.

- En la tercera actividad se introducen dos elementos que serán las piezas clave para facilitar los argumentos deductivos de los estudiantes. Se trata de las “escaleras” (formadas por una recta y un haz de segmentos paralelos, congruentes y con un extremo en la recta) y las “sierras” (haces de segmentos paralelos y congruentes formando una estructura con forma de sierra de cortar) (figura 8).

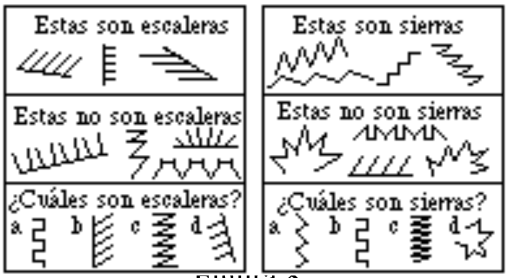


Figura 8.

- La cuarta actividad tiene dos partes diferenciadas. Comienza pidiendo a los estudiantes que dibujen sierras y escaleras en una malla triangular y observen sus propiedades matemáticas de paralelismo y congruencia de ángulos. También se enseña a los estudiantes dos formas de dibujar escaleras, dibujando segmentos paralelos y dibujando ángulos iguales (figura 9) y dos formas análogas de dibujar sierras. Esta actividad refuerza la idea de la dependencia entre la congruencia de los ángulos y el paralelismo de los segmentos.

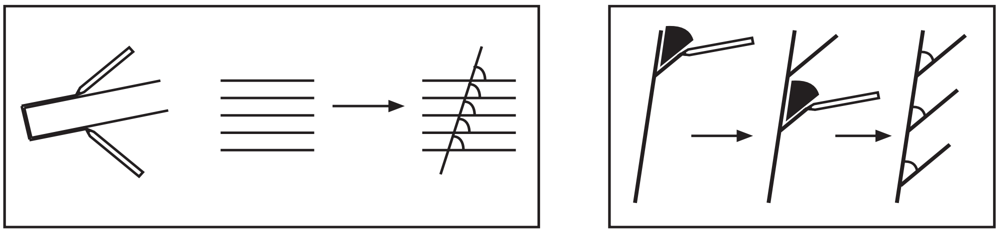


Figura 9. Dos formas de dibujar sierras.

La segunda parte de esta actividad pide a los estudiantes que justifiquen la congruencia de varios ángulos en una malla de paralelogramos (figura 10) utilizando sierras y escaleras (dos ángulos son congruentes porque pertenecen a la misma sierra o escalera). Por último, la actividad pide descubrir y justificar relaciones entre los ángulos de un paralelogramo.

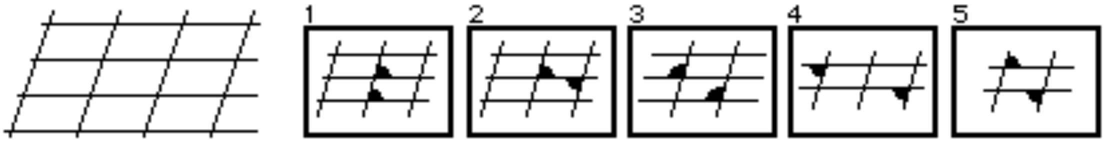


Figura 10

- En la quinta actividad se pide a los estudiantes que coloreen los ángulos de una malla de triángulos escalenos. La observación del resultado les llevará a enunciar la propiedad de que los ángulos de un triángulo suman 180° (figura 11). A continuación deben justificar esta afirmación usando sierras y escaleras para organizar un razonamiento deductivo. Después se hace un trabajo similar con mallas de diversos tipos de paralelogramos y de trapezoides para descubrir y demostrar que la suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360°.

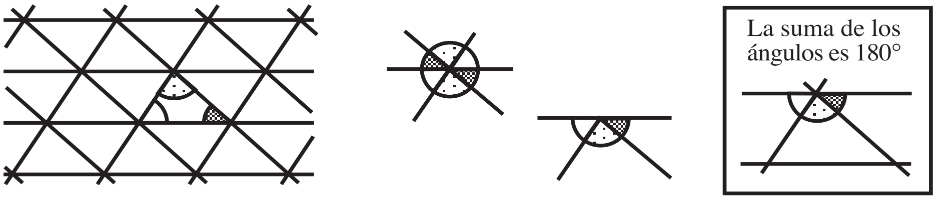


Figura 11

- La sexta actividad tiene como objetivo presentar a los estudiantes una forma gráfica de representar las demostraciones de las propiedades trabajadas en la actividad anterior. Se les dan fichas con diversos enunciados y flechas, y ellos tienen que organizarlas en un diagrama que represente los pasos de la demostración, en el que las flechas son las implicaciones lógicas. Los estudiantes continúan también el proceso deductivo incluyendo la propiedad de la suma de los ángulos de un pentágono, deducida de las anteriores dividiendo el pentágono mediante algunas diagonales. La figura 12 muestra un resultado de esta actividad.

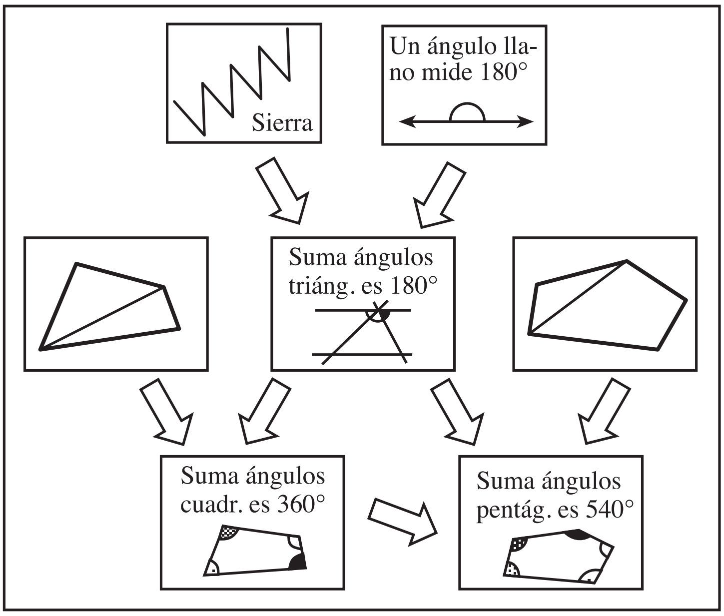


Figura 12

- En la última actividad se proponen problemas para cuya resolución es necesario utilizar los conocimientos adquiridos en las actividades anteriores. En concreto, se trabaja con la relación entre los ángulos interiores y exteriores de un triángulo ($\hat{\imath}_1 + \hat{\imath}_2 = \hat{e}_3$): Se presentan a los estudiantes un ejemplo, un caso particular y el caso general (figura 13), y se les piden que den una justificación deductiva mediante sierras y escaleras construyendo un diagrama.

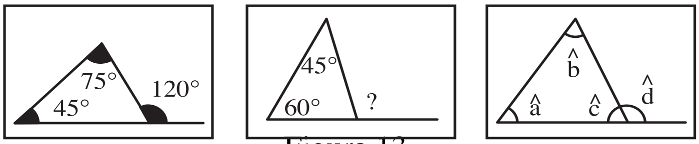


Figura 13.

Los párrafos anteriores son un resumen de esta unidad de enseñanza que es un excelente ejemplo de cómo se puede introducir a los estudiantes en el mundo de las deducciones lógicas y las justificaciones deductiva abstractas sin necesidad de llegar a utilizar el lenguaje matemático formal. En Jaime, Gutiérrez (1990) hacemos un análisis más detallado de esta propuesta de enseñanza a la luz de los niveles y fases de Van Hiele.

4. La visualización en geometría

El uso de objetos físicos, modelos y figuras es la principal arma de los profesores para ayudar a los estudiantes a comprender los conceptos matemáticos, de aquí que la capacidad de *visualización* (o imaginación espacial) sea imprescindible para aprender matemáticas. La visualización es muy útil en cualquier área de las matemáticas, pero en este capítulo me limito a reflexionar sobre su uso en geometría. La enseñanza de la geometría elemental se ha basado siempre en el uso intensivo de objetos, figuras, diagramas, esquemas, etc. que ayuden a comprender los conceptos, propiedades, relaciones o fórmulas estudiados. De esta manera, como indican Hershkowitz, Parzysz, Dormolen (1996), la geometría aparece ante los estudiantes como la ciencia que estudia el espacio físico y lo matematiza. La conveniencia de usar representaciones gráficas como ayuda para comprender los conceptos geométricos se extiende más allá de la geometría euclídea elemental. Por ejemplo, la geometría hiperbólica[7] se representa frecuentemente mediante el disco de Poincaré[8] (figura 14), si bien ésta no es la única representación posible de dicha geometría (Coxeter, 1971).

7 La geometría hiperbólica se obtiene sustituyendo el 5º axioma de la geometría euclidea (por un punto A exterior a una recta *r* es posible trazar sólo una paralela a dicha recta en el plano determinado por A y *r*) por el siguiente axioma: Por un punto A exterior a una recta *r* es posible trazar más de una paralela a dicha recta en el plano determinado por A y *r* (Coxeter, 1971).

8 El disco de Poincaré está formado por el interior de la circunferencia "horizonte". En él las "rectas" son los arcos de las circunferencias ortogonales al horizonte, por lo que las dos rectas que pasan por A son paralelas a la recta *r,* pues no la tocan.

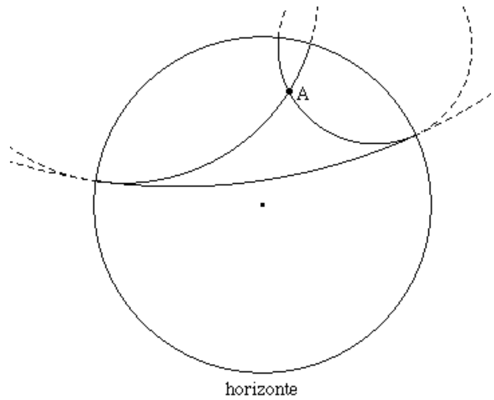


Figura 14. El disco de Poincaré.

En casos como éste, los estudiantes recorren el camino contrario al indicado antes, pues comienzan con una teoría (la geometría hiperbólica en este caso) y recurren a un modelo concreto (el disco de Poincaré) que les permita comprender mejor las características de los entes teóricos, llevándolos a un contexto en el que puedan representar gráficamente los conceptos y sus propiedades. Por ejemplo, es posible crear con Cabri II el disco de Poincaré y dibujar un triángulo hiperbólico que se pueda modificar interactivamente para observar propiedades como la medida de sus ángulos (figura 15).

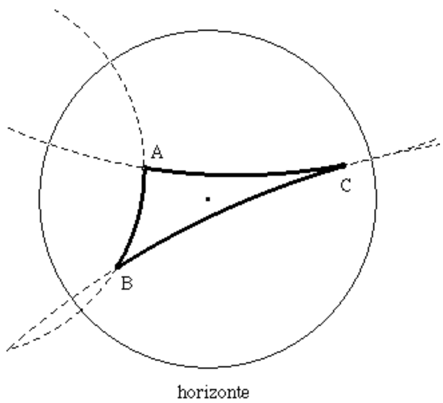


Figura 15. Un triángulo hiperbólico en el disco de Poincaré.

En este contexto, hay que entender la *visualización* como el conjunto de tipos de imágenes, procesos y habilidades necesarios para que los estudiantes de geometría puedan producir, analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos reales, modelos y conceptos geométricos. La información visual producida (*imágenes*) puede ser tanto física (figuras o diagramas) como mental (*imágenes mentales*). El análisis de información visual se refiere tanto a las imágenes producidas por el propio estudiante como a las recibidas desde el exterior (de estudiantes, profesor, texto, etc.). Las transformaciones pueden hacerse entre una imagen e información verbal (oral o escrita) o de una imagen en otra. La comunicación puede ser gráfica, verbal o mixta (Gutiérrez, 1998).

La unanimidad casi absoluta entre profesores de matemáticas y didactas en que una adecuada capacidad de visualización es una herramienta imprescindible para el aprendizaje de la geometría pocas veces va acompañada de una reflexión sobre los procesos de aprendizaje de la propia capacidad de visualización. Esta no es una capacidad innata que podemos dejar que se desarrolle de manera espontánea, sino que es necesario modelarla, ya que la visualización es una actividad compleja en la que intervienen varios elementos que es necesario comprender y aprender a usar.

El reconocimiento de la importancia de la visualización en el aprendizaje de la geometría tampoco suele ir acompañado de un análisis de las propias prácticas docentes para ver si favorecen o no el uso de estrategias visuales. El estudio llevado a cabo en Plasencia (2000) tiene como principales objetivos analizar el uso que hacen los estudiantes de imágenes mentales cuando resuelven problemas de matemáticas y determinar si la actuación del profesor influye en esta forma de actividad de los estudiantes. Para ello, en un estudio de casos, se explora la actividad del profesor, averiguando si es consciente de la existencia de alumnos visualizadores y otros que no lo son y observando si su forma de organizar la clase y las tareas que propone fomentan o no el uso de imágenes mentales. También se explora la actividad de los alumnos, analizando qué uso hacen de las imágenes mentales cuando resuelven problemas y estudiando la posible relación entre habilidad de visualización, competencia matemática y éxito escolar.

Entre las conclusiones de esta investigación relativas a los estudiantes, destaca la identificación de diversos grados de uso de la visualización coherentes con los tres tipos de estudiantes descritos por Kruteetskii (1976), analítico, visualizador y mixto. Además, se apunta a una relación positiva directa entre el uso de la visualización y el éxito al resolver problemas no rutinarios (competencia matemática). En cuanto a las conclusiones sobre la influencia del profesor, se observa que si la concepción del profesor de su papel es próxima a la tradicional de transmisor y organizador de conocimientos y algoritmos, valorará más los métodos de trabajo explicados en clase, en los cuales raramente se usa la visualización, que los generados autónomamente por los estudiantes, lo cual tiene una influencia negativa en la valoración académica de los estudiantes visualizadores (poco éxito escolar), ya que éstos suelen ser más independientes y creativos.

Las investigaciones de Presmeg (1986) permitieron identificar varios tipos de imágenes mentales usadas por los estudiantes al resolver problemas de matemáticas. Los tipos más utilizados en geometría son:

- *Imágenes concretas* (fotos en la mente): Se trata de imágenes mentales figurativas de objetos reales.

- *Imágenes cinéticas:* Se trata de imágenes mentales que llevan asociada una actividad muscular, como movimiento de una mano, la cabeza, etc. Por ejemplo, cuando un estudiante está describiendo una figura con segmentos paralelos, coloca las manos estiradas paralelas y las mueve de arriba a abajo.

- *Imágenes dinámicas:* Se trata de imágenes mentales en las que imaginamos el objeto visualizado (o alguno de sus elementos) moviéndose. A diferencia de las imágenes cinéticas, en estas imágenes no hay movimiento físico, sino sólo visualizado en la mente. Por ejemplo, podemos crear una imagen mental de una pirámide apoyada en su base y visualizarla girando hasta ponerse apoyada en el ápice.

Por su parte, Bishop (1989) describió dos procesos de visualización que tienen lugar al usar imágenes:

- *Interpretación de la información figurativa* (IFI): Es el proceso que tiene lugar al intentar leer, comprender e interpretar una imagen para extraer información de ella.

- *Procesamiento visual de la información* (VP): Es el proceso que tiene lugar al convertir información no visual en imágenes, o al transformar una imagen ya formada en otra.

Por último, Del Grande (1990) realizó una recopilación de habilidades psicológicas necesarias para realizar los procesos anteriores con las imágenes. Las más necesarias para el trabajo en geometría son:

- *Percepción de figura y contexto:* Es la habilidad de reconocer una figura aislándola de su contexto, en el que aparece camuflada o distorsionada por la superposición de otros elementos gráficos. Es imprescindible, por ejemplo, para identificar las caras de sólidos transparentes, en los que se ven todas las aristas. Otro ejemplo son las conocidas demostraciones visuales del teorema de Pitágoras (como la de figura 16), en las que los estudiantes deben aislar cada cuadrado y triángulo de uno de los diagramas y buscar un polígono congruente en otro diagrama.

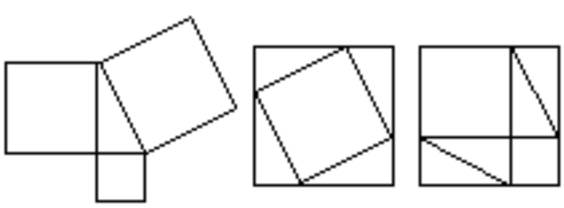


Figura 16. Demostración visual del teorema de Pitágoras.

- *Conservación de la percepción:* Es la habilidad de reconocer que un objeto mantiene determinadas propiedades (forma, tamaño, etc.) aunque cambie de posición y deje de verse por completo. Esta habilidad es imprescindible en geometría espacial para manejar sólidos opacos, ya que sólo vemos parte de su superficie. Con frecuencia los niños de Primaria son capaces de hacer descripciones de la parte visible de un poliedro opaco pero no saben describir esa misma región después de quedar oculta al girar el poliedro.

- *Reconocimiento de relaciones espaciales:* Es la habilidad de identificar correctamente las relaciones entre varios objetos situados simultáneamente en el espacio (equidistancia, simetría, perpendicularidad, posición relativa, etc.). Es necesaria, por ejemplo, para identificar los tipos de caras de un poliedro, su cantidad, su distribución alrededor de los vértices, etc.

- *Discriminación visual:* Es la habilidad de comparar dos imágenes (o dos objetos en la misma imagen) e identificar sus semejanzas y diferencias visuales.

La relación entre visualización y geometría es más estrecha cuando se trata de la geometría espacial, pues el manejo de representaciones planas de cuerpos espaciales es inevitable, por lo que las capacidades de creación de imágenes mentales dinámicas y de interpretación de representaciones planas de cuerpos espaciales son imprescindibles para progresar en el aprendizaje de la geometría espacial. Hay varias formas de representación plana de cuerpos geométricos espaciales usadas en los libros de textos. Las más frecuentes son la perspectiva y la proyección paralela, aunque es frecuente encontrar también representaciones mediante proyección isométrica y proyecciones ortogonales.

- La proyección en perspectiva (figura 17) es la única realista, pues corresponde a lo que vemos cuando miramos a ese objeto o cuando lo fotografiamos. Los objetos se representan más pequeños cuando están más lejos del observador y las líneas paralelas que se alejan se dibujan convergentes.

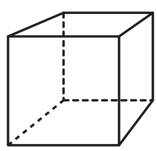


Figura 17. Dibujo de un cubo en perspectiva.

- En las representaciones mediante proyección paralela (figura 18) se mantiene el paralelismo en cualquier dirección y los objetos se ven con el mismo tamaño a cualquier distancia. Esta forma de representación es la más habitual en los temas de geometría espacial de los textos de Primaria y Secundaria.

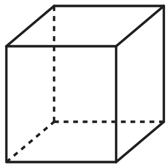


Figura 18. Dibujo de un cubo en proyección paralela.

- Las representaciones mediante proyección isométrica (figura 19) se basan en una trama de puntos que forma triángulos equiláteros y los vértices de los sólidos deben coincidir con puntos de la trama.

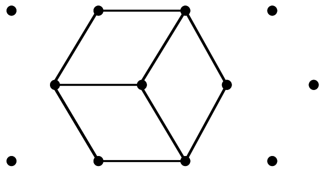


Figura 19. Dibujo de un cubo en proyección isométrica.

- Las representaciones mediante proyecciones ortogonales (figura 20) son útiles para representar sólidos sencillos o en problemas ambientados en contextos reales (planos de edificios, etc.). Pueden proporcionar toda la información técnica necesaria para reconstruir los sólidos, pero pierden la información asociada con la forma de los sólidos como unidades visuales.

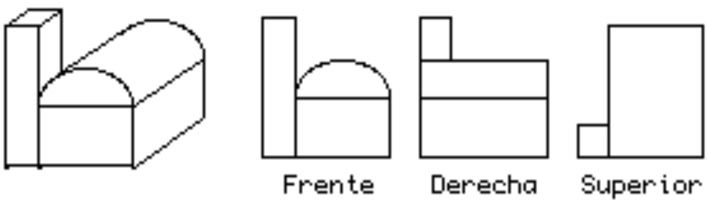


Figura 20. Dibujo de las proyecciones ortogonales de un edificio.

No es posible saber qué sólido está representado en la figura 21 si no conocemos el tipo de representación usada: Si es un dibujo en proyección paralela, lo identificaremos como un prisma recto, pero si es un dibujo en perspectiva, debe ser un tronco de pirámide pues en la realidad el rectángulo más alejado del observador es más grande que el del primer plano y las aristas que unen dichos rectángulos no son paralelas. Por lo tanto, cuando un individuo ve una representación plana y la interpreta para decidir qué cuerpo está representado, se hace imprescindible que el autor y el observador estén de acuerdo en usar las mismas reglas de codificación y decodificación, pues en caso contrario la reconstrucción del sólido puede ser errónea.

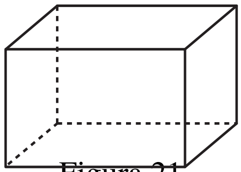


Figura 21

Por otra parte, siempre que se hace una representación plana de un cuerpo 3-dimensional, parte de la información sobre ese cuerpo pasa de estar explícita en el sólido a estar implícita en la representación o, en muchos casos, a perderse del todo (Parzysz, 1988). Por ejemplo, al dibujar un sólido opaco, dejamos de ver la parte “de detrás”, por lo que otro observador no tiene posibilidad de saber cómo es ese sólido por detrás salvo que le proporcionemos otra información, como su nombre o varios dibujos desde distintas posiciones. En la figura 22, el diagrama de la izquierda se interpreta generalmente como una pirámide, pero el diagrama de la derecha deja claro que se trata de un octaedro.

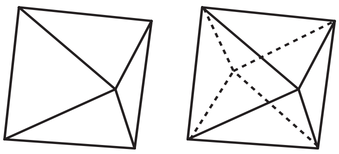


Figura 22. Representaciones opaca y transparente del mismo poliedro.

La posibilidad de usar diferentes formas de representación plana de sólidos plantea la cuestión de su facilidad de uso por estudiantes de diferentes niveles educativos, que ha sido objeto de varias investigaciones didácticas. Gutiérrez (1998) y Parzysz (1988) observaron la dificultad de uso de las formas de representación mencionadas más arriba por estudiantes de diversos cursos de Primaria y Secundaria. La conclusión general es que no se puede identificar uno de los anteriores tipos de representación como el más fácil para su uso por estudiantes de geometría espacial, pues mientras es más fácil interpretar las representaciones realistas que la de proyecciones ortogonales, es más fácil dibujar las proyecciones ortogonales que las realistas. En particular, el dibujo de representaciones isométricas y la reconstrucción de proyecciones ortogonales son especialmente difíciles si no hay una instrucción explícita organizada. Por otra parte, la proyección paralela aparece como la más adecuada para los estudiantes de Secundaria porque éstos consideran más importante la conservación en las representaciones planas de propiedades geométricas (paralelismo, igualdad de longitudes, etc.) que el realismo de la representación. En cuanto a la realización de dibujos en perspectiva a mano alzada, que es como los hacen habitualmente los estudiantes fuera de las asignaturas de dibujo técnico, Mitchelmore (1980) identificó cuatro etapas en el desarrollo de la habilidad de dibujo de este tipo de representación, resumidas en la figura 23 mediante un paralelepípedo, un cilindro, una pirámide de base cuadrada, un cubo y un prisma recto de base triángulo equilátero.

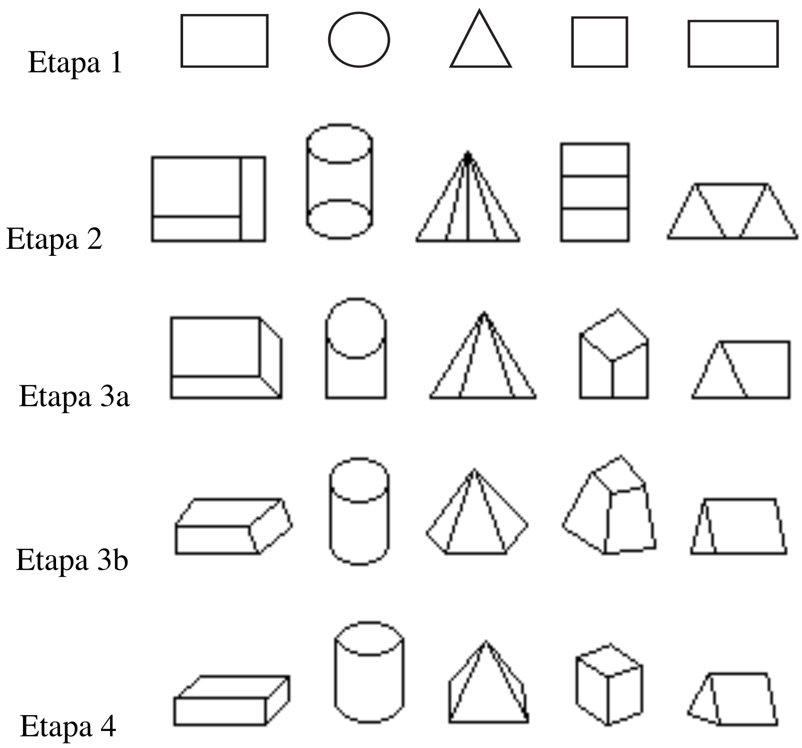


Figura 23. Etapas del aprendizaje del dibujo en perspectiva.

La primera etapa se caracteriza por centrar la atención en una cara representativa del sólido. En la segunda etapa se dibujan la mayoría de las caras, incluso algunas que no se pueden ver simultáneamente, en un esquema plano. En la tercera etapa, dividida en dos sub-etapas, los dibujos se hacen más realistas y empiezan a tener en cuenta la profundidad. La cuarta etapa corresponde a los dibujos suficientemente correctos. La figura 24 muestra ejemplos de dibujos de un cubo, una pirámide, un paralelepípedo y un octaedro regular hechos por estudiantes de diferentes cursos de EGB que participaron en la investigación descrita en Gutiérrez y otros (1992).

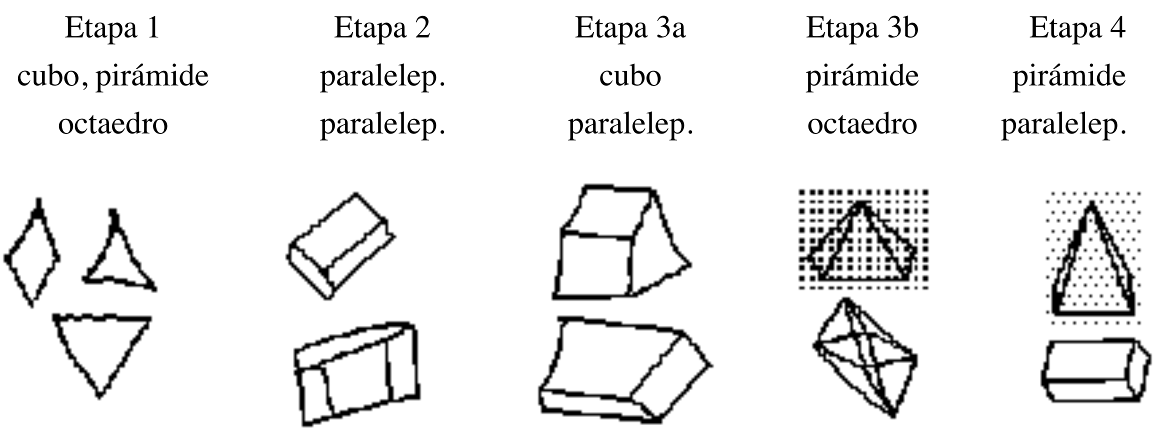


Figura 24

Otras investigaciones se han centrado en la enseñanza del uso de diversas representaciones planas (Burton, Cooper, Leder, 1986; Gutiérrez y otros, 1992; Gutiérrez, 1996; Winter y otros, 1986; Woodrow, 1991). Todas concluyen que las habilidades de uso de representaciones planas sí se pueden enseñar, mediante actividades en las que los estudiantes progresen poco a poco en la comprensión de las características de cada tipo de representación y practiquen para afianzar las destrezas de dibujo necesarias. En varios de los estudios anteriores se han utilizado sólidos formados por cubitos iguales pegados por sus caras (figura 25; los más conocidos son los cubos "multilink" y los "centicubos", pero existen otras marcas que comercializan cubitos encajables).

Figura 25. Sólido formado por cubos conectados.

Las ventajas de este tipo de material son que es fácilmente manipulable por los estudiantes, incluso de primeros cursos de Primaria, permite crear una gran variedad de formas diferentes y se adapta perfectamente a las diferentes formas de representación. Las actividades que se pueden plantear son de varios tipos: Dibujo de representaciones planas de sólidos reales, construcción de sólidos a partir de sus representaciones planas, comparación de sólidos y representaciones planas, y dibujo de una representación plana de un sólido a partir de otra representación plana del mismo sólido. En la figura 26 se plantea una de estas actividades.

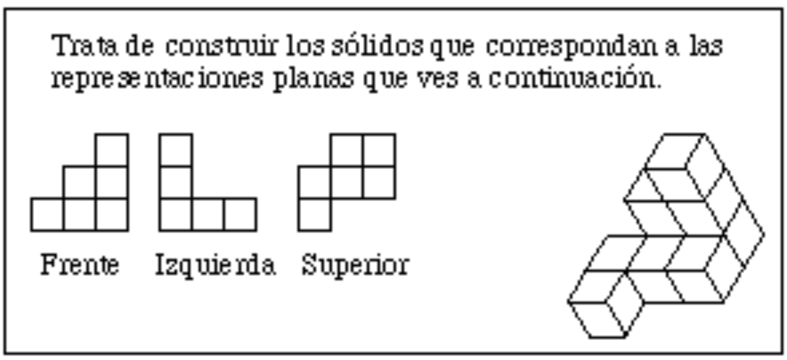
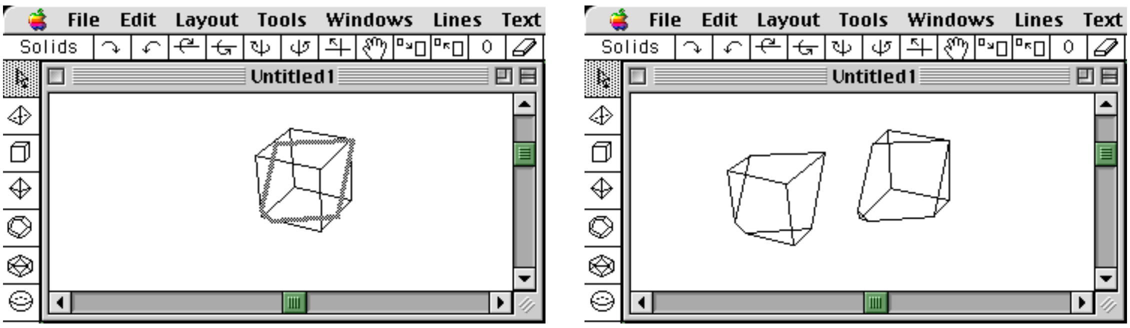


Figura 26

Una de las dificultades para implementar metodologías activas de enseñanza de la geometría espacial es no tener disponibles los sólidos necesarios, con la estructura física adecuada (opacos, transparentes, desmontables, etc.) y en número suficiente para la cantidad de estudiantes de la clase. Hay varias formas de construir sólidos de manera fácil y barata (Guillén, 1991). Cada una es una solución parcial útil para estudiar determinadas propiedades de los poliedros y cuerpos redondos pero no permite actividades de otros tipos. En la última década han aparecido varios programas de ordenador que permiten ver en la pantalla sólidos y manipularlos virtualmente[9]. Casi todos estos programas permiten girar los sólidos en el espacio, lo cual es una aproximación muy buena al manejo de modelos reales. Además, suelen disponer de opciones como representaciones en perspectiva, proyección paralela y proyecciones ortogonales, realización de cortes, superposición de sólidos, realización de desarrollos planos (que pueden imprimirse) o transformación continua de unos sólidos en otros. En la figura 27a vemos cómo el programa 3D Images (Hoffer, Koch, 1991) representa un cubo y una sección suya. Después, se puede cortar el cubo y separar sus dos partes (figura 27b). Una actividad interesante es estudiar los poliedros obtenidos por truncamiento de los poliedros regulares (Guillén, 1991).



- a - - b -

Figura 27. Un cubo cortado en dos partes en 3D Images.

Por otra parte, es posible graduar la dificultad del software para adecuarlo a los estudiantes. Por ejemplo, en Gutiérrez y otros (1992) se usaron tres programas diferentes, el más sencillo de los cuales sólo permite realizar giros de 90° con un cubo cuyas caras están decoradas con dibujos (figura 28), por lo que es adecuado para estudiantes de los primeros cursos de Primaria.

9 En la página web del Grupo de Trabajo de Aprendizaje de la Geometría de la SEIEM (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática) <www.uv.es/aprengeom/> hay referencias de varios programas de manipulación de sólidos, para Macintosh y Pc.

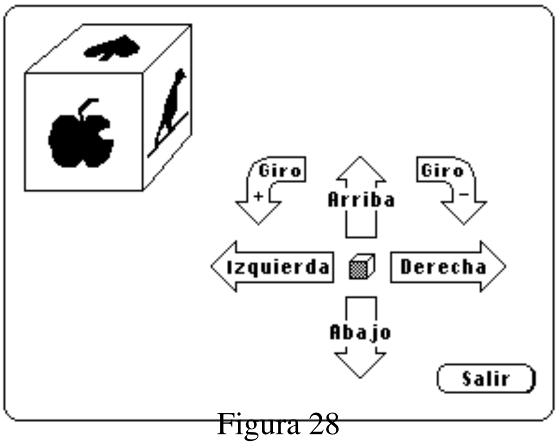


Figura 28

Existen bastantes publicaciones que dan cuenta de resultados de investigaciones sobre aprendizaje de la geometría espacial y presentan propuestas específicas de enseñanza. Las siguientes son algunas directamente enfocadas al trabajo en clase. En Gutiérrez y otros (1992), Gutiérrez (1998) y Gutiérrez, Jaime (1993) presentamos resultados de un estudio realizado con alumnos de 2º a 8º de EGB en el que experimentamos actividades de enseñanza integrada de geometría espacial en las que se incluyen, entre otras, actividades de manejo de diferentes formas de representación plana y uso de diferentes entornos de trabajo (sólidos reales de diversos tipos, representaciones en papel y sólidos en ordenadores). Una de las conclusiones de este estudio que tiene que ver con la visualización y el uso de ordenadores es que al manejar sólidos reales los estudiantes realizan diversas acciones de manera automática (por ejemplo el movimiento con las manos de un sólido para colocarlo en una posición concreta), sin prestar atención a su significado matemático, mientras que al realizar esas mismas acciones con el sólido virtual del ordenador deben reflexionar para decidir qué acción realizar o qué comando usar.

Por su parte, Guillén (2000) presenta los resultados de una investigación en la que elaboró una unidad de enseñanza de la geometría de los poliedros basada en los niveles y fases de Van Hiele. Las actividades planteadas a los estudiantes van mucho más allá de los habituales ejercicios de construcción, descripción y clasificación básica de prismas, pirámides y poliedros regulares, pues se refieren también a familias de antiprismas y bipirámides, lo cual permite una mayor riqueza de situaciones, análisis de numerosas propiedades diferentes y variedad de clasificaciones de familias basadas en las propiedades que cumple cada familia. La figura 29 muestra una de las actividades. Esta investigación ha permitido, además, identificar diversos tipos de errores cometidos por los estudiantes al resolver estas actividades.

De las propiedades que indicamos, seleccionad las que cumplen los prismas de caras regulares. Para cada propiedad, explicad vuestra respuesta.

a) Toda cara tiene otra cara, su opuesta, que es paralela a ella.

b) Todas sus caras son iguales.

c) Las aristas tienen como máximo dos medidas diferentes.

d) Los ángulos de los vértices tienen tantas medidas diferentes como ángulos diferentes tenga el polígono de las bases.

e) El número de diagonales de las caras es $n(n-3)$ y el de diagonales del espacio es $n(n-2)$, siendo n el número de lados del polígono de sus bases.

Figura 29

Winter y otros (1986) proponen unas unidades de enseñanza de representaciones planas de módulos de cubos para estudiantes de Secundaria centradas en las representaciones isométricas, las proyecciones ortogonales y una variante más simple de ésta, adecuada para estudiantes más pequeños o poco diestros, consistente en "mirar" al módulo de cubos desde arriba e indicar en cada columna de cubos la cantidad de ellos que tiene (figura 30). Esta forma de representación lleva implícita la condición de que las columnas de cubos están siempre apoyadas en el suelo y no tienen huecos. Las actividades de esta unidad de enseñanza consisten en construir sólidos a partir de las representaciones, dibujar representaciones de sólidos dados, dibujar unas representaciones a partir de otras representaciones, y emparejar diversas representaciones del mismo sólido.

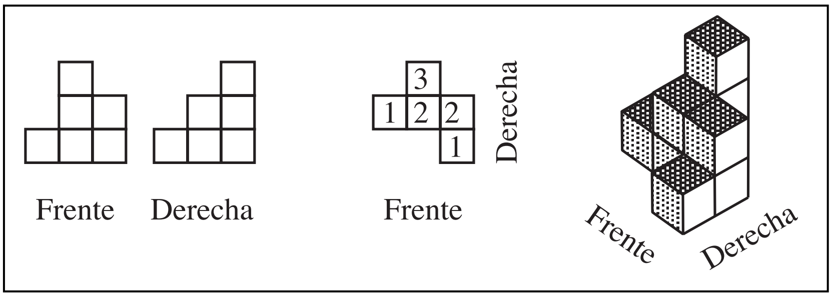


Figura 30

Mora (1995) se centra en el uso de materiales sencillos para construir figuras planas y cómo estos materiales, a pesar de su simplicidad, ayudan a plantear a los estudiantes una gran variedad de problemas que les hagan enfrentarse a los diversos conceptos y propiedades relacionados con los polígonos (figura 31). Este trabajo pone también de relieve que la visualización es necesaria siempre que se hace geometría, para poder comparar, predecir, analizar, etc. los resultados de las manipulaciones, especialmente cuando éstas se basan en materiales dinámicos que permiten la transformación de construcciones o figuras.

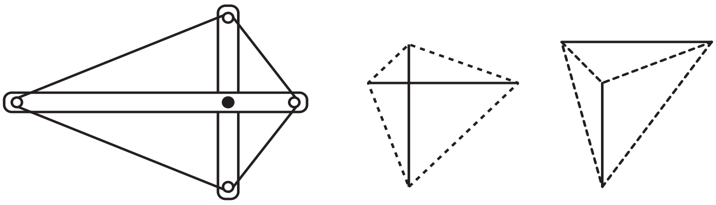


Figura 31. Clasificar los cuadriláteros según las longitudes y posiciones relativas de sus diagonales.

Mariotti (1989) y Stylianou, Leikin, Silver (1999) analizan las estrategias de visualización de estudiantes cuando resuelven el conocido problema de dibujar (o reconocer) todos los desarrollos planos de un cubo. Observaron dos formas bastante diferentes de resolver el problema. En un caso los estudiantes se fijaban en el cubo y utilizaban imágenes mentales cinéticas para imaginarse el cubo desplegándose de diferentes maneras o para imaginárselo "rodando" por encima de un desarrollo plano mientras llevaban la cuenta de las caras que habían tocado el desarrollo. En el otro caso, algunos estudiantes se fijaban en los desarrollos planos y crearon imágenes mentales dinámicas en las que visualizaban un desarrollo cerrándose para formar el cubo, mientras que otros recurrieron a recortar cuadraditos de papel, pegarlos como el desarrollo y plegarlos para tratar de formar el cubo.

Kwon, Kim, Kim (2001) presentan una unidad de enseñanza de representaciones planas de módulos de cubos con actividades similares a las utilizadas en investigaciones mencionadas en los párrafos anteriores, pero cuya originalidad consiste en el entorno creado, que aprovecha las posibilidades del software actual de realidad virtual y de la interactividad de las páginas web. Este tipo de entorno tiene las ventajas de que permite una mayor personalización y que puede ser utilizado en enseñanza a distancia.

5. Conceptos básicos de geometría elemental

La comprensión de los conceptos de geometría elemental, es decir los relacionados con la geometría de los polígonos y circunferencias, prismas, pirámides y cuerpos de revolución, es un permanente foco de interés entre los investigadores. A lo largo del tiempo ha habido numerosas aproximaciones a cuestiones como la enseñanza de los ángulos, la definición y clasificación de triángulos y cuadriláteros, propiedades internas de diversas familias de poliedros, los ángulos relacionados con una circunferencia, etc.

El enorme peso de las imágenes y elementos gráficos en el aprendizaje de la geometría es el principal factor que hace a esta parte de las matemáticas elementales mucho más intuitiva y fácil de entender que otras como aritmética, álgebra o cálculo, pero al mismo tiempo es también un importante obstáculo. Ocurre con frecuencia que una enseñanza poco cuidadosa hace excesivo énfasis en unas pocas figuras como ejemplos de un concepto, ignorando casi por completo otras. El resultado es que los estudiantes adquieren una comprensión parcial de ese concepto, asociada exclusivamente a esas figuras que han visto y usado con tanta frecuencia, ignorando o rechazando otras figuras diferentes, lo cual les lleva a incurrir en numerosos errores. Por ejemplo, veíamos en la primera sección que es frecuente encontrar estudiantes que sólo aceptan como ejemplos de cuadrado aquellas figuras que están apoyadas en un lado, y rechazan las que no tienen sus lados "suficientemente" verticales y horizontales para parecerse a los ejemplos que han visto en clase (figura 1).

Otra manifestación del mismo problema, también muy frecuente, surge cuando, para resolver un problema, los estudiantes realizan determinadas acciones (por ejemplo dibujo o selección de figuras) que, a continuación, justifican recitando la definición correspondiente, sin darse cuenta de que están incurriendo en una contradicción. En la figura 32 vemos la respuesta de un estudiante de Secundaria que primero ha marcado las figuras que creía que son rombos (B) y las que creía que son rectángulos (T) y después ha explicado por qué son rombos (o rectángulos) las figuras que ha marcado con una B (o T):

- Son rombos "porque sus lados son iguales".

- Son rectángulos "porque todos los ángulos de dichas figuras son rectos".

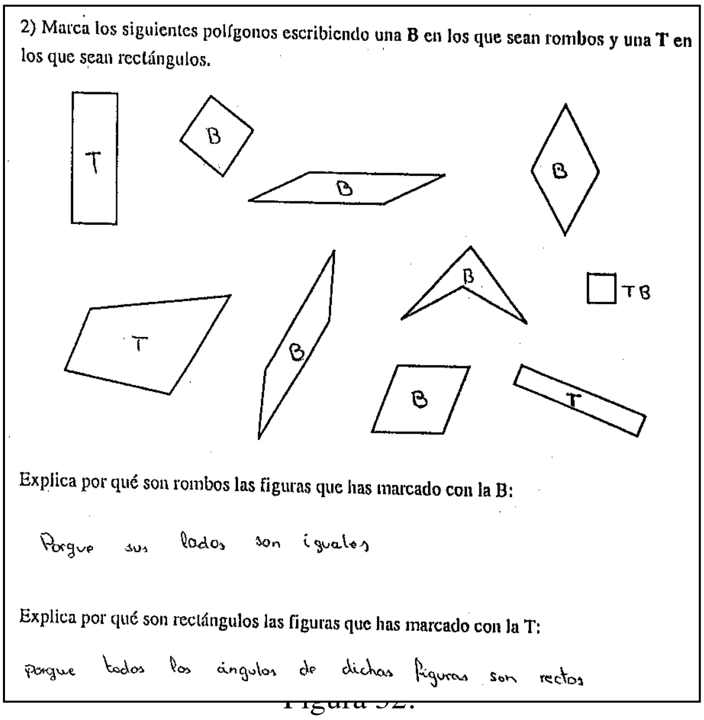


Figura 32.

Vinner (1991) explica este problema planteando la existencia de dos componentes en el aprendizaje de conceptos matemáticos:

- La *definición del concepto,* que consiste principalmente en la definición memorizada por un estudiante para dicho concepto, la cual puede coincidir o no con la definición correcta aceptada por el profesor o por la comunidad matemática. Se deben incluir aquí también las propiedades o fórmulas de cálculo relacionadas con el concepto que han sido aprendidas de memoria.

- La *imagen del concepto,* que consiste en el conjunto de experiencias, actividades, figuras, etc. que el estudiante ha percibido, tanto durante las clases de matemáticas como fuera de ellas. En el caso de conceptos geométricos, la imagen del concepto que se crea en la mente de los estudiantes está compuesta mayoritariamente por las diversas figuras, dibujos o representaciones que recuerdan como ejemplos de dicho concepto, junto al conjunto de las propiedades operativas que el estudiante asocia al concepto.

Una imagen de un concepto es correcta cuando permite al estudiante discriminar sin errores todos los ejemplos de ese concepto y utilizarlos adecuadamente para resolver problemas. Pero lo que ocurre con frecuencia es que los estudiantes, además de identificar propiedades características del concepto, perciben como propiedades necesarias suyas algunas que realmente no lo son (por ejemplo que los cuadrados deben estar apoyados en un lado), pues sólo son propiedades irrelevantes, de parte de las figuras que representan el concepto. Estas propiedades irrelevante son, en muchos casos, características físicas como posición, forma, etc.

Podemos decir, por tanto, que la *definición del concepto* contiene el aprendizaje derivado de la memorización, mientras que la *imagen del concepto* contiene el aprendizaje derivado de la experiencia. Según Vinner (1991), cuando un estudiante lee o escucha el nombre de un concepto conocido, estimula su memoria y evoca información relacionada con ese concepto. Dependiendo del contexto en el que ha surgido la referencia al concepto, la información evocada es la definición o la imagen del concepto. Generalmente la definición y la imagen de un concepto creadas por los estudiantes están disociadas, motivo por el cual éstos no aprecian las contradicciones que suele haber entre ellas.

Una enseñanza correcta es la que ayuda a formar definiciones e imágenes de conceptos correctas y completas y, además, enseña a relacionar con fluidez ambos compartimentos de la memoria para saber pasar de uno a otro según interese. Así, un estudiante de bachillerato puede empezar la resolución de un problema de geometría recordando los conceptos que aparecen en el enunciado y tratando de relacionarlos (def. del c.), a continuación ayudarse dibujando un ejemplo pertinente (im. del c.), analizar esa imagen tanto visual (im. del c.) como analíticamente (d. del c.) buscando una vía de solución, y terminar escribiendo la solución del problema y las justificaciones abstractas deductivas apropiadas (def. del c.).

La enseñanza de nuevos conceptos geométricos por medio de ejemplos y contraejemplos permite poner en práctica el modelo elaborado por Vinner. Consiste en presentar a los estudiantes varias figuras representando el concepto objeto de estudio y, al mismo tiempo, varias figuras que no son ejemplos de dicho concepto pero que podrían inducir a error a los estudiantes. La contraposición entre ejemplos y contraejemplos hará que surjan de manera explícita las diferentes propiedades características del concepto. Del mismo modo, la contraposición de diversos ejemplos hará que surjan de manera explícita esas propiedades irrelevantes que pueden inducir imágenes conceptuales erróneas (figura 33).

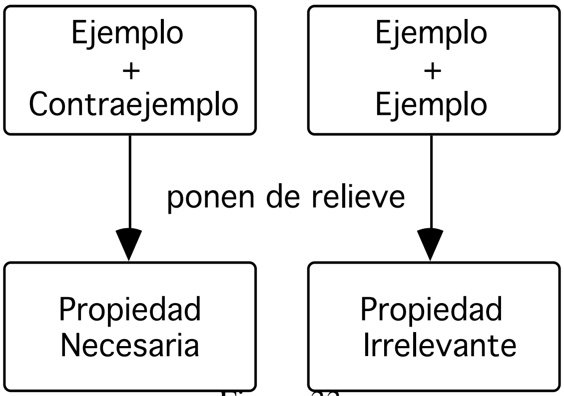


Figura 33

Este es un procedimiento que los autores de libros de texto usan con frecuencia en los temas de geometría de Primaria y Secundaria. Pero esta forma de enseñanza no consiste simplemente en escoger unos cuantos ejemplo y contraejemplos de manera más o menos aleatoria. Para seleccionarlos correctamente es necesario tener en cuenta varios aspectos:

- Los ejemplos y contraejemplos deben inducir a los estudiantes a formular una definición del concepto estudiado. Por tanto, el profesor debe empezar seleccionando la definición del concepto que desea que sus alumnos aprendan y después los ejemplos y contraejemplos. Esto es especialmente importante cuando hay varias definiciones usuales de un mismo concepto, como ocurre, por ejemplo, con los cuadriláteros. Sin embargo, nótese que, para los estudiantes, la definición debe ser resultado final del proceso de análisis de los ejemplos y contraejemplos presentados.

- El profesor debe ser consciente de qué características del concepto se pondrán en juego por medio de la definición, pues cada una de ellas debe ser hecha explícita por los estudiantes mediante la comparación de un ejemplo y un contraejemplo que no tenga esa propiedad.

- El profesor debe hacer un análisis didáctico del concepto y, ayudado por su propia experiencia previa, determinar qué atributos irrelevantes suelen provocar errores en los estudiantes. De esta manera, podrá proponer a sus alumnos pares de ejemplos seleccionados de manera que uno de los ejemplos no posea el atributo irrelevante (o lo posea con un valor específico, por ejemplo una posición) y el otro sí lo posea (o lo posea con otro valor específico diferente, por ejemplo otra posición).

- El profesor debe inducir, como parte de la actividad ordinaria en clase, discusiones entre los estudiantes sobre los motivos por los que una figura es un ejemplo o no lo es, para que ellos mismos enuncien las propiedades características y las irrelevantes.

En la figura 34 vemos una serie de ejemplos y contraejemplos para el concepto de prisma recto. Las propiedades necesarias de los prismas rectos que se deben destacar comparando pares de ejemplo y contraejemplo son:

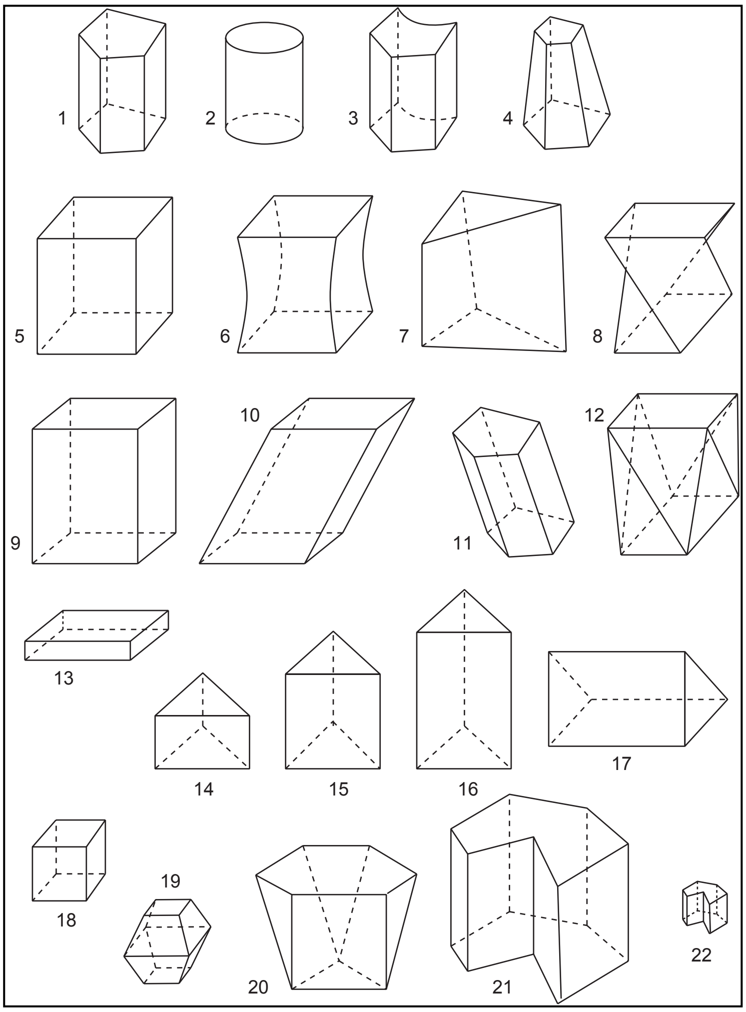


Figura 34

- Son poliedros (sólidos 1, 2 y 6).

- Sus bases son dos polígonos congruentes (sólidos 1 y 4), en planos paralelos (sólidos 7 y 16) y colocados en la misma posición (sólidos 8, 9 y 12).

- Sus caras laterales son rectángulos (sólidos 9 y 10, 18 y 19).

- Sus aristas laterales son perpendiculares a las bases (sólidos 9 y 10).

Por otra parte, comparando pares de ejemplos, también hay que destacar algunos atributos irrelevantes que pueden llevar a confusión a los estudiantes:

- Las bases de un prisma pueden ser cualquier tipo de polígono (sólidos 1, 3 y 21) con cualquier número de lados (sólidos 1, 5, 15 y 21).

- No son importantes el tamaño (sólidos 21 y 22) ni la posición (sólidos 1 y 11, 16 y 17) de los prismas.

- Las aristas laterales pueden tener cualquier longitud (sólidos 9 y 13, 14, 15 y 16). En particular, los cubos son prismas rectos (sólido 18).

El modelo propuesto por Vinner es compatible con los niveles de razonamiento de Van Hiele: En el primer nivel de Van Hiele los estudiantes empiezan a construir imágenes de los conceptos que estudian, que suelen ser muy pobres y llenas de propiedades irrelevantes como posiciones, tamaños, formas, etc. En el nivel 2 los estudiantes aprenden experimentalmente diversas propiedades matemáticas relevantes de los conceptos, que deben entrar a formar parte de sus imágenes conceptuales, y rechazan las propiedades irrelevantes anteriores. Finalmente, los estudiantes que razonen en los niveles 3 y 4 deben tener un uso del concepto suficientemente variado como para terminar de formar una imagen del concepto correcta y saber relacionarla adecuadamente con la definición del concepto y sus propiedades abstractas formales.

En la tercera sección de este capítulo hemos visto cómo aplicaban Fuys, Geddes y Tischler (1988) la metodología de los ejemplos y contraejemplos para enseñar los conceptos de “sierra” y “escalera”. Esta metodología está también presente en Corberán, Gutiérrez y otros (1994), donde presentamos los resultados de un proyecto de investigación en el que elaboramos y experimentamos, en cursos equivalentes a 3º de ESO, unidades de enseñanza de polígonos en general, de triángulos y de cuadriláteros. Cada unidad está estructurada de acuerdo con los niveles 2 y 3 de Van Hiele y, para cada nivel, con las fases de aprendizaje. Además, la introducción de nuevos conceptos geométricos se hace teniendo en cuenta el modelo de Vinner y usando ejemplos y contraejemplos. A modo de ejemplo, la unidad de polígonos está organizada de la siguiente forma:

Nivel 2. *Fase de Información:* Identificación de polígonos entre varias figuras dadas y justificación de las elecciones hechas.

Fase de orientación dirigida: Identificación de propiedades de dos polígonos (cóncavo y convexo) dados. Concepto de diagonal mediante ejemplos y contraejemplos. Cálculo de la cantidad de diagonales. Medición de ángulos y cálculo de la suma de los ángulos de un polígono. Conceptos de polígonos equiláteros, equiangulares y regulares mediante ejemplos y contraejemplos.

Fase de orientación libre: Clasificación de polígonos según propiedades elegidas por los estudiantes. Dibujo de polígonos estrellados. Propiedades que diferencian polígonos cóncavos y convexos. Cubrimientos del plano. Cálculo de los ángulos y el número de diagonales de un polígono regular de 7740 lados.

Fase de integración: Emparejar tipos de polígonos y propiedades estudiadas.

Nivel 3. *Fase de Información:* No hace falta, pues es un curso continuo.

Fase de orientación dirigida: Enunciado de definiciones y propiedades de polígonos cóncavos y convexos. Mapa conceptual de los tipos de polígonos. Estudio de los ángulos entre dos paralelas y una transversal. Deducción y justificación de la suma de ángulos de un triángulo. Deducción de la fórmula para calcular el número de diagonales de un polígono.

Fase de orientación libre: Deducción y justificación de las sumas de los ángulos exteriores e interiores de un polígono. Diversas clasificaciones de polígonos. Justificar que no todos los polígonos cubren el plano.

Fase de integración: Resumir las propiedades de los polígonos aprendidas en las actividades de este nivel y relacionarlas con otras propiedades aprendidas con anterioridad. Resumir las familias de polígonos estudiadas y asociar las familias con sus propiedades.

Se observa que, aparentemente, algunos conceptos y propiedades se estudian dos veces a lo largo de la unidad de enseñanza. No se trata de una repetición, sino de un proceso de enseñanza cíclica, en el cual los temas se retoman periódicamente para abordarlos de manera diferente, aprendiendo nuevos contenidos o analizando con más profundidad los contenidos estudiados anteriormente.

Las unidades de triángulos y de cuadriláteros tienen una estructura similar y se centran en la enseñanza de dichas familias, las propiedades y clasificaciones de estos tipos de polígonos usualmente estudiadas en Primaria y ESO.

Referencias

Algunas de las referencias pueden descargarse de la página web del Grupo de Trabajo de Aprendizaje de la Geometría de la SEIEM <www.uv.es/aprengeom/> o de mi página web personal <www.uv.es/Angel.Gutierrez>.

Alvarez, R. (2001): *Geup* (software). (El autor: España). Se puede obtener una versión demo en <www.geup.net>.

Balacheff, N. (1988 a): *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège* (tesis doctoral). (Univ. J. Fourier - Grenoble: Grenoble, Francia).

Balacheff, N. (1988 b): Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics, en Pimm, D. (ed.), *Mathematics, teachers and children*. (Hodder & Stoughton: Londres), pp. 216-235.

Balacheff, N.; Kaput, J.J. (1996): Computer-based learning environments in mathematics, en Bishop, A. y otros (eds.), *International handbook of mathematics education* (Kluwer: Dordrecht, Holanda) vol. 1, pp. 469-501.

Barroso, R. (2000): *Win-Logo, un lenguaje para una innovación didáctica de la geometría* (texto electrónico).

Bell, A.W. (1976): A study of pupil's proof-explanations in mathematical situations, *Educational Studies in Mathematics* 7.1, pp. 23-40.

Bishop, A.J. (1989): Review of research on visualization in mathematics education, *Focus on Learning Problems in Mathematics* 11.1, pp. 7-16.

Blair, S. (2004): *Describing undergraduates' reasoning within and across Euclidean, Taxicab, and Spherical geometries* (tesis doctoral). (Portland State University: Portland, OR, EE.UU.).

Burger, W.F.; Shaughnessy, J.M. (1986): Characterizing the van Hiele levels of development in geometry, *Journal for Research in Mathematics Education* 17, pp. 31-48.

Burton, L.; Cooper, M.; Leder, G. (1986): Representations of three-dimensional figures by mathematics teachers-in-training, *Proceedings of the 10th PME Conference* vol. 1, pp. 81-86.

Chazan, D. (1993): High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof, *Educational Studies in Mathematics* 24, 359-387.

Clements, D.H.; Battista, M.T. (1992): Geometry and spatial reasoning, en Grouws, D.A. (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (MacMillan: N. York, EE.UU.), pp. 420-464.

Clements, D.H.; Battista, M.T.; Sarama, J. (2001): *Logo and geometry* (Journal for Research in Mathematics Education Monograph n° 10). (N.C.T.M.: Reston, VA, EE.UU.).

Clements, D.H.; Meredith, J.S. (1994): *Turtle Math* (software). (SUNY at Buffalo: Buffalo, NY, EE.UU.).

Corberán, R.; Gutiérrez, A. y otros (1994): *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele* (colección "investigación" nº 95). (C.I.D.E., M.E.C.: Madrid).

Coxeter, H.S.M. (1971): *Fundamentos de geometría*. (Limusa Wiley: México).

De Villiers, M. (1991): Pupils' needs for conviction and explanation within the context of geometry, *Pythagoras* 26, pp. 18-27.

De Villiers, M. (1993): El papel y la función de la demostración en matemáticas, *Epsilon* 26, pp. 15-29.

De Villiers, M. (1999): *Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad*. (Key Curriculum Press: Emeryville, EE.UU.).

Del Grande, J. (1990): Spatial sense, *Arithmetic Teacher* 37.6, pp. 14-20.

Fuys, D.; Geddes, D.; Tischler, R. (1988): *The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents* (Journal for Research in Mathematics Education Monograph n° 3). (N.C.T.M.: Reston, VA, EE.UU.).

Grupo Construir las Matemáticas (2001): Isoperímetros: Ficha didáctica en álgebra. Desigualdades, *Suma* 37, pp. 105-110.

Guillén, G. (1991): *El mundo de los poliedros* (colección Matemáticas: Cultura y Aprendizaje nº 15). (Síntesis: Madrid).

Guillén, G. (1997): *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje* (tesis doctoral). (Univ. de Valencia: Valencia).

Guillén, G. (2000): Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas, *Enseñanza de las Ciencias* 18.1, pp. 35-53.

Gutiérrez, A. (1996): Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework, *Proceedings of the 20th PME Conference* 1, pp. 3-19.

Gutiérrez, A. (1998): Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial, *Revista EMA* 3.3, pp. 193-220.

Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1993): An analysis of the students' use of mental images when making or imagining movements of polyhedra, *Proceedings of the 17th PME Conference* 2, pp. 153-160.

Gutiérrez, A.; Jaime, A.; Fortuny, J.M. (1991): An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels, *Journal for Research in Mathematics Education* 21.3, pp. 237-251.

Gutiérrez, A.; Jaime, A.; Guillén, G.; Cáceres, M. (1992): *La enseñanza de la geometría de sólidos en la E.G.B.* (memoria final del Proyecto de Investigación). (Institución Valenciana de Estudios e Investigación "Alfonso el Magnánimo": Valencia).

Hanna, G. (1996): The ongoing value of proof, *Proceedings of the 20th PME Conference* 1, pp. 21-34.

Harel, G.; Sowder, L. (1998): Students' proof schemes: Results from exploratory studies, en Schoenfeld, A.H. y otros (eds.), *Research in collegiate mathematics education, III.* (American Mathematical Society: Providence, EE.UU.), pp. 234-283.

Healy, L. (2000): Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions, *Proceedings of the 24th PME International Conference* 1, pp. 103-117.

Hershkowitz, R.; Parzysz, B.; Dormolen, J. van (1996): Space and shape, en Bishop, A. y otros (ed.), *International handbook of mathematics education*. (Kluwer: Dordrecht, Holanda) 1, pp. 161-204.

Hoffer, A.; Koch, R. (1991): *3D Images* (software). (Los autores: EE.UU.).

Ibáñes, M. (2001): *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato* (tesis doctoral). (Universidad de Valladolid: Valladolid).

Jaime, A. (1993): *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento* (tesis doctoral). (Univ. de Valencia: Valencia).

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1990): Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele, en Llinares, S.; Sánchez, M.V. (eds.): *Teoría y práctica en educación matemática*. (Alfar: Sevilla), pp. 295-384.

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1996): *El grupo de las isometrías del plano* (colección Educación Matemática en Secundaria nº 13). (Síntesis: Madrid).

Jones, K.; Gutiérrez, A.; Mariotti, M.A. (eds.) (2001): Proof in Dynamic Geometry Environments, *Educational Studies in Mathematics* 44.1/2.

Kline, M. (1978): *El fracaso de la matemática moderna (¿Porqué Juanito no sabe sumar?)*. (Siglo XXI: Madrid).

Kruteetskii, V.A. (1976): *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. (The Univ. of Chicago Press: Chicago, EE.UU.).

Kwon, O.N.; Kim, S.H.; Kim, Y. (2001): Enhancing spatial visualization through virtual reality on the web: software design and impact analysis, *Proceedings of the 25th PME Conference* 3, pp. 265-272. <www.webmath.org/svt/VRML2.html>

Laborde, C.; Capponi, B. (1994): Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14.1/2, pp. 165-209.

LCSI (1998): *MicroWorlds* (software). (Logo Computer System Inc.: Montreal, Canadá). Se puede obtener una versión demo en <www.microworlds.com>.

Mariotti M.A. (1989): Mental images: some problems related to the development of solids, *Proceedings of the 13th PME Conference* 2, pp. 258-265.

Marrades, R. (1996): *Anàlisi i avaluació de processos de prova en l'entorn informàtic Cabri-Géomètre*. (Univ. de Valencia: Valencia).

Marrades, R.; Gutiérrez, A. (2001): Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment, *Educational Studies in Mathematics* 44.1/2, pp. 87-125.

Martínez, A. (1999): *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática* (tesis doctoral). (Univ. de Granada: Granada).

Mitchelmore, M. (1980): Three-dimensional geometrical drawing in three cultures, *Educational Studies in Mathematics* 11, pp. 205-216.

Mora, J.A. (1995): Los recursos didácticos en el aprendizaje de la geometría, *Uno* 3, pp. 101-115.

Murillo, J. (2001): *Un entorno interactivo de aprendizaje con Cabri-actividades, aplicado a la enseñanza de la geometría en la E.S.O.* (tesis doctoral). (Univ. Autónoma de Barcelona: Bellaterra, Barcelona). Versión electrónica disponible en <http://blues.uab.es/~ipdmc/Murillo/presenta/Fortuny.html>.

NCTM (1989): *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. (N.C.T.M.: Reston, EE.UU.). (traducción al español: *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. 1991. SAEM Thales: Sevilla).

NCTM (2000): *Principles and standards for school mathematics*. (N.C.T.M.: Reston, EE.UU.). Versión electrónica disponible en <standards.nctm.org>. (traducción al español: *Principios y estándares para las matemáticas escolares*. 2004. SAEM Thales: Sevilla).

Parzysz, B. (1988): "Knowing" vs "seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures, *Educational Studies in Mathematics* 19, pp. 79-92.

Piñeiro, F. (2001): Matemáticas interactivas en internet, *Suma* 37, pp. 117-124.

Plasencia, I. (2000): *Análisis del papel de las imágenes en la actividad matemática. Un estudio de casos* (tesis doctoral). (Univ.de La Laguna: La Laguna, Tenerife).

Presmeg, N.C. (1986): Visualization in high school mathematics, *For the Learning of Mathematics* 6.3, pp. 42-46.

Sáenz, C. (2001): Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas, *Actas del 5º Simposio de la SEIEM,* pp. 47-62.

Sowder, L.; Harel, G. (1998): Types of students' justifications, *The Mathematics Teacher* 91.8, pp. 670-675.

Stylianou, D. A.; Leikin, R.; Silver, E. A. (1999): Exploring students' solution strategies in solving a spatial visualization problem involving nets, *Proceedings of the 23th PME Conference* 4, pp. 241-248.

Van Hiele, P.M. (1957): *El problema de la comprensión en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría* (tesis doctoral traducida al español). (Univ. de Utrecht: Utrecht, Holanda).

Van Hiele, P.M. (1986): *Structure and insight. A theory of mathematics education*. (Academic Press: Londres).

Vinner, S. (1991): The role of definitions in the teaching and learning of mathematics, en Tall, D. (ed.), *Advanced mathematical thinking*. (Kluwer: Dordrecht, Holanda), pp. 65-81.

Winter, M.J.; Lappan, G.; Phillips, E.; Fitzgerald, W. (1986): *Spatial visualization*. (Addison Wesley: Menlo Park, EE.UU.).

Woodrow, D. (1991): Children drawing cubes, *Mathematics Teaching* 136, pp. 30-33.

Ángel Gutiérrez
Dpto. de Didáctica de la Matemática
Universidad de Valencia
Apartado 22045
46071 Valencia
angel.gutierrez@uv.es
www.uv.es/Angel.Gutierrez