ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA A ESTUDIANTES CON TALENTO MATEMÁTICO: TEORÍA Y PRÁCTICA

Ángel Gutiérrez
Dpto. de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia. Valencia (España)
angel.gutierrez@uv.es

Resumen: La enseñanza a estudiantes con talento matemático en los grupos ordinarios de clase presenta varios retos para los profesores, tanto en Educación Primaria como en Educación Secundaria. El principal de ellos es cómo organizar la enseñanza para atender las necesidades específicas de estos estudiantes. Las diversas áreas de las matemáticas escolares (aritmética, geometría, álgebra, etc.) son contextos en los que los estudiantes pueden desarrollar diferentes capacidades matemáticas. La geometría es adecuada para desarrollar las capacidades de generalización y visualización, entre otras. En este contexto, presento resultados de investigaciones llevadas a cabo para diseñar, experimentar y evaluar problemas de geometría que ayuden a descubrir y entender contenidos geométricos o a desarrollar las capacidades mencionadas antes y que sean adecuados para todos los estudiantes de la clase pero que sean también cognitivamente exigentes para los estudiantes con talento matemático. Describiré los marcos teóricos que nos permiten evaluar las respuestas de los estudiantes, las estrategias de diseño de este tipo particular de problemas y algunos resultados de investigaciones experimentales que estamos desarrollando en mi grupo de investigación.

Palabras clave: actividades matemáticas ricas, demanda cognitiva, generalización en geometría, talento matemático, visualización.

Introducción

Los sistemas educativos de numerosos países, entre ellos España, identifican a un estudiante como *superdotado* cuando obtiene al menos 130 puntos en un test estandarizado de cociente intelectual (CI). Pero también hay estudiantes que no llegan a obtener un CI de 130 puntos pero destacan en un área específica, por ejemplo las matemáticas. En español, se les suele denominar estudiantes con *altas capacidades matemáticas* o con *talento matemático*. Voy a utilizar ambos términos como equivalentes para referirme, en el contexto escolar, a los estudiantes que poseen un razonamiento matemático claramente superior al de los estudiantes ordinarios de su edad o grado escolar. En relación con el término *talento matemático*, quiero resaltar que todos los estudiantes tienen talento matemático, mayor o menor, si bien lo utilizaré, como se hace en la literatura de didáctica de las matemáticas, para referirme a los estudiantes cuyo talento matemático es notablemente elevado en relación con el de sus compañeros.

La investigación didáctica nos ofrece descripciones de características diferenciadoras de los estudiantes con talento matemático respecto de sus compañeros (Greenes, 1981; Krutetskii, 1976; Miller, 1990; Ramírez, 2012). Algunas de estas características, relacionadas con los objetivos de este texto, son la facilidad para identificar patrones y relaciones matemáticas, la capacidad de generalización y de transferencia de conocimientos, la habilidad para desarrollar razonamiento abstracto, la habilidad para resolver problemas de manera flexible, creativa y original y, por supuesto, el gusto por resolver problemas que les supongan un reto.

La enseñanza de la geometría tiene algunas características diferenciadoras respecto de otras áreas de las matemáticas. Una de ellas está relacionada con el uso de representaciones visuales de los conceptos, propiedades y relaciones geométricos, en forma de objetos manipulables, figuras impresas o representaciones en ordenadores; esto hace que la capacidad de visualización sea una herramienta necesaria para la comprensión y el aprendizaje de conceptos y relaciones así como para la resolución de problemas geométricos. Otra característica diferenciadora es que la geometría sigue siendo el principal contexto matemático escolar para aprender a generalizar y demostrar.

La investigación didáctica ha prestado también atención a la relación entre capacidad de visualización y talento matemático, pudiendo observarse que diferentes autores han presentado resultados discrepantes. Krutetskii (1976), al describir los estilos de pensamiento matemático *analítico*, *visual* o *geométrico* y *armónico* y observar los estilos preferidos por los estudiantes con talento matemático, llegó a la conclusión de que estos estudiantes eran mayoritariamente de los tipos analítico y armónico. Presmeg (1986a) analizó los datos de Krutetskii y los resultados de sus propios experimentos (estudiantes de últimos grados de Educación Secundaria) para explicar por qué los estudiantes con talento matemático casi nunca eran visualizadores.

Otros estudios han obtenido resultados contrarios: Van Garderen (2006) observó (en estudiantes de 6.º grado y de Educación Secundaria elemental) que los estudiantes con talento matemático utilizaban la visualización con más frecuencia, y en formas más sofisticadas, que los otros estudiantes al resolver problemas, si bien las diferencias con los estudiantes medios no resultaron estadísticamente significativas. Análogamente, Escrivá (2016) planteó a estudiantes de 6.º grado de Primaria problemas que requieren el uso intensivo de la visualización y observó que todos los estudiantes cuyos resultados en la resolución de estos problemas mostraban su alta capacidad de visualización se encontraban entre los que obtenían mejores calificaciones en matemáticas, si bien otros estudiantes que también obtenían las mejores calificaciones mostraron una capacidad media en el uso de la visualización y dificultades para resolver algunos problemas. Diezmann y Watters (2000) afirmaron que existen muchos ejemplos de matemáticos destacados que poseen una alta capacidad de visualización y que han logrado avances importantes en las matemáticas gracias a esta capacidad. Por lo tanto, una buena capacidad de visualización puede ser un rasgo del talento matemático.

Presmeg (1986a) señaló que un objetivo importante de investigación didáctica debía ser el diseño de instrumentos adecuados para evaluar la capacidad de visualización de los estudiantes. En esta línea, el estudio de Webb, Lubinski y Benbow (2007) llegó a la conclusión de que es necesario incluir el uso de visualización entre los criterios para identificar a estudiantes con talento matemático, cosa que hicieron Rojas, Jiménez y

Mora (2009) y Escrivá (2016) al tratar de identificar características del talento matemático observando las respuestas de estudiantes a problemas de visualización.

El análisis de las publicaciones que tratan la relación entre visualización y talento matemático parece mostrar que la cantidad de estudiantes con talento matemático que prefieren usar el razonamiento analítico aumenta al pasar de Primaria a Secundaria elemental, a Secundaria superior y a la universidad. Un motivo sugerido por estas publicaciones es la creciente exigencia por los profesores de respuestas abstractas y formales (por tanto, de tipo analítico), si bien Stylianou (2001) sugirió que esta tendencia a rechazar el razonamiento visual estaba modificándose, incluso en la universidad.

En este texto me centraré en presentar investigaciones[1] que estamos desarrollando en la Universidad de Valencia sobre el aprendizaje por estudiantes con talento matemático de Primaria y ESO de contenidos geométricos escolares y de las capacidades de generalización y visualización. Presentaré casos de diseño de actividades escolares adecuadas para la enseñanza a grupos completos de clase, que incluyen tanto a estudiantes ordinarios como a estudiantes con talento matemático, y de respuestas a dichas actividades de estudiantes con talento matemático. También presentaré los marcos teóricos utilizados en esas investigaciones.

Marcos teóricos

Es muy frecuente que los estudiantes con talento matemático tengan dificultades en las clases ordinarias de matemáticas porque les resultan repetitivas (ellos no necesitan practicar tanto como sus compañeros para entender un concepto o aprender un algoritmo) y sin interés (los problemas que los profesores plantean al grupo les resultan muy fáciles). Una metodología de enseñanza adecuada para el conjunto de estudiantes de una clase ordinaria, en la que hay estudiantes con dificultades de aprendizaje, medios y con talento matemático, se basa en las *actividades matemáticas ricas* (Piggott, 2011). Se trata de actividades que plantean una secuencia de cuestiones o problemas relacionados con determinados contenidos matemáticos (conceptos, propiedades, relaciones, etc.) objeto de estudio, de manera que las primeras cuestiones son muy sencillas, para que todos los estudiantes de la clase puedan resolverlas, y las siguientes cuestiones van aumentando su complejidad y profundizando en los contenidos que se están estudiando. Este aumento en la complejidad permite que los estudiantes con diferentes grados de talento matemático avancen en la resolución de las cuestiones y encuentren otras cuya resolución les resulte interesante y motivadora.

Un problema al que se enfrentan los profesores de matemáticas y los investigadores en didáctica de las matemáticas es valorar correctamente la complejidad de las cuestiones o problemas que forman una actividad matemática rica. Esta complejidad se puede hacer operativa mediante el concepto de *demanda cognitiva*, definido como “el tipo y nivel de pensamiento requerido de los estudiantes para poder abordar la tarea y resolverla con éxito” (Stein, Smith, Henningsen, Silver, 2009, p. 1). Smith y Stein (1998) caracterizaron cuatro *niveles de demanda cognitiva* que permiten categorizar la complejidad del razonamiento matemático necesario para que un estudiante resuelva correctamente un problema. Las características de las respuestas correspondientes a los

[1] Las investigaciones presentadas son parte de las actividades de los proyectos de investigación I+D+i EDU2015-69731-R (MINECO/FEDER) y GVPROMETEO2016-143 (Generalitat Valenciana).

niveles de demanda cognitiva son las siguientes:

Memorización: solo necesitan repetir unos datos, fórmulas o definiciones memorizados o tomados directamente del enunciado del problema.

Algoritmos sin conexiones: consisten en aplicar rutinariamente un algoritmo ya conocido o en seguir unas instrucciones sencillas presentadas en el enunciado del problema. Esta forma de resolución no necesita que los estudiantes comprendan los contenidos matemáticos objeto de estudio que están implícitos en el problema.

Algoritmos con conexiones: se basan en aplicar un algoritmo complejo, es decir que no se puede aplicar rutinariamente, sino que obliga a los estudiantes a decidir cómo avanzar, pues el proceso de resolución no es evidente y tiene momentos de ambigüedad. Para ello, es necesario que los estudiantes hayan descubierto y comprendido los contenidos matemáticos implícitos en el problema y que vean cómo utilizarlos durante la resolución.

Haciendo matemáticas: respuestas en las que los estudiantes realizan razonamiento complejo y creativo. Estos problemas no pueden resolverse mediante un algoritmo y requieren razonamiento abstracto; además, sus enunciados no dan pistas sobre cómo resolverlos. Los estudiantes deben tener una buena comprensión de los contenidos matemáticos implícitos en el problema para hacer un correcto uso de ellos y elegir estrategias de resolución útiles.

Los niveles de demanda cognitiva permiten analizar los enunciados de los problemas (en particular de las actividades matemáticas ricas) para decidir si están correctamente organizados y si son adecuados para los estudiantes que van a resolverlos. También son útiles para analizar respuestas reales de los estudiante a un problema, lo cual nos ayuda, en nuestras investigaciones, a diferenciar a estudiantes con más o menos talento matemático (Benedicto, 2013; Benedicto, Jaime, Gutiérrez, 2015).

De acuerdo con Gutiérrez (1996), podemos distinguir tres componentes de la actividad de visualización en matemáticas: Las *imágenes mentales*, que son el elemento básico alrededor del cual tiene lugar la actividad de visualización. Los *procesos* de creación de imágenes mentales y de análisis de esas imágenes para la generación de nuevas imágenes, de otro tipo de información (por ejemplo, representaciones externas) o para la toma de decisiones. Las *habilidades de visualización* necesarias para poder realizar con eficacia los procesos de visualización y resolver con éxito los problemas matemáticos planteados.

En nuestras investigaciones actuales, nos centramos en la identificación de las imágenes mentales y las habilidades de visualización empleadas por los estudiantes con talento matemático para resolver problemas con fuerte carga visual, en particular problemas de geometría 3d. Para el análisis de las imágenes mentales tomamos como referencia los tipos de imágenes descritos por Presmeg (1986b):

- Imágenes *pictóricas concretas*: son imágenes figurativas realistas, como fotografías en la mente.
- Imágenes de *patrones*: representan de una forma visual relaciones matemáticas abstractas.
- Imágenes de *fórmulas*: reproducen una definición, fórmula, enunciado de un teorema, etc. tal como aparece en un libro, en la pizarra, en las notas del estudiante, etc.
- Imágenes *cinéticas*: son imágenes mentales que van acompañadas por movimiento de partes del cuerpo (cabeza, manos, etc.) como ayuda para crearlas,

analizarlas o comunicarlas.

- Imágenes *dinámicas*: son imágenes en movimiento. A diferencia del tipo anterior, en estas el movimiento es mental, pues está en las propias imágenes.

Gutiérrez (1996) recogió descripciones de habilidades de visualización propuestas por varios autores y las sintetizó en las siguientes habilidades:

- La habilidad de *identificación visual* es necesaria para aislar una figura del fondo complejo en el que se encuentra.
- La habilidad de *conservación de la percepción* ayuda a reconocer que las características geométricas de un objeto (real o imagen mental) percibidas visualmente se mantienen inalteradas aunque ese objeto cambie de posición o se oculte.
- La habilidad de *rotación mental* es necesaria para visualizar configuraciones en movimiento o para generar y analizar imágenes dinámicas.
- La habilidad de *identificación de posiciones en el espacio* ayuda a reconocer características de un objeto en relación con su posición respecto del observador o de otro objeto fijo.
- La habilidad de *identificación de relaciones espaciales* es necesaria para identificar relaciones internas entre dos objetos, o entre dos partes del mismo objeto, que se mantienen invariantes aunque el observador cambie de posición.
- La habilidad de *discriminación visual* ayuda a identificar semejanzas y diferencias entre dos o más objetos.

Otra parte interesante al observar la actividad de los estudiantes es identificar sus estilos de pensamiento (analítico, visual y armónico). Eligiendo con cuidado los problemas que se plantean, es posible obtener respuestas de diferentes estudiantes al mismo problema que muestran los tipos analítico y visual. De acuerdo con Krutetskii (1976):

- El pensamiento *analítico* se caracteriza por tener muy desarrollado el razonamiento lógico-verbal y poco desarrollado el razonamiento pictórico-visual.
- El pensamiento *visual* o *geométrico* se caracteriza por tener más desarrollado el razonamiento pictórico-visual que el razonamiento lógico-verbal.
- El pensamiento *armónico* se caracteriza por tener bien desarrollados ambos tipos de razonamiento, usando uno u otro según el problema que se resuelva, pero con predominio del razonamiento lógico-verbal.

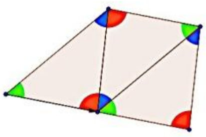
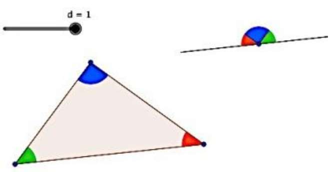
Investigación sobre aprendizaje de contenidos geométricos escolares

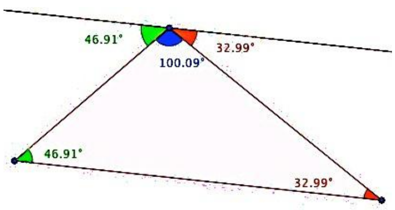
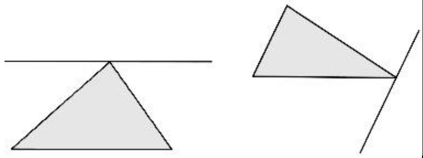
La enseñanza de la geometría en grupos que incluyen estudiantes con altas capacidades matemáticas puede hacerse en un contexto de aprendizaje por descubrimiento mediante el planteamiento de actividades matemáticas ricas. En nuestras investigaciones, nos centramos en diseñar y experimentar este tipo de actividades basadas en contenidos ordinarios, de manera que, además de enseñar los contenidos ordinarios de los libros de texto, permiten a los estudiantes con más talento matemático profundizar o ampliar el estudio del tema mientras los estudiantes medios trabajan en los contenidos curriculares ordinarios, los que tienen más talento matemático pueden lograr una comprensión más profunda. Analizaré una actividad diseñada para enseñar el valor de la suma de los ángulos de un polígono en 5.º de Primaria.

Los contenidos ordinarios del libro de texto que se usaba en el colegio donde hicimos este experimento presentan el concepto de ángulo interior de un polígono y calculan la *suma de los ángulos interiores* de triángulos y cuadriláteros. La actividad rica que diseñamos para enseñar estos contenidos incluyó, además, una aproximación a la demostración deductiva de la suma de los ángulos del triángulo, la enseñanza de la suma de los ángulos interiores de otros polígonos convexos con más lados y la obtención de la fórmula general de la suma de los ángulos interiores de un *n*-gono, mediante un proceso empírico de generalización. Las Tablas 1 y 2 presentan una síntesis de la actividad (que siempre pide justificar las respuestas) y el análisis de la demanda cognitiva requerida para la resolución de sus apartados. Benedicto (2013) ofrece una descripción más detallada de la actividad y un análisis completo.

La primera parte de esta actividad (Tabla 1) va presentando diferentes formas de verificar empíricamente que los ángulos de un triángulo suman 180º. El objetivo es acercar las formas de verificación empírica a la demostración deductiva típica (apartado 6), lo cual supone aumentar la complejidad del razonamiento que deben realizar los estudiantes para resolver correctamente la actividad, es decir, del nivel de demanda cognitiva de los apartados.

Tabla 1. Suma de los ángulos interiores de un triángulo en 5.º de Primaria (Benedicto, 2013)

Enunciado	Demanda cognitiva
1. ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo? Compruébalo en varios triángulos. ¿Se cumple para todos los triángulos? Justifica tu respuesta.	*Memorización* si el estudiante conoce la respuesta. *Algoritmos sin conexiones* si el estudiante no conoce la respuesta: dibuja varios triángulos, mide los ángulos y los suma.
2. ¿Cuánto suman los ángulos del triángulo? ¿Se cumple para todos los triángulos? Prueba con diversos triángulos. 	*Algoritmos sin conexiones*: el estudiante arrastra los vértices y observa que la suma de los ángulos siempre vale 180º. No necesita ser consciente de las relaciones implícitas entre los ángulos.
3. Observa el punto donde se ven los tres ángulos interiores del triángulo juntos. ¿Cuánto suman los tres ángulos? 	*Algoritmos con conexiones*: el estudiante manipula el ordenador para relacionar la suma de los ángulos con el ángulo llano. En sus respuestas a ambos apartados, debe usar esa relación.
4. Copiamos los tres ángulos del triángulo, de manera que sean consecutivos. ¿Cuánto vale su suma? Prueba con distintos triángulos. 	

Enunciado	Demanda cognitiva
5. Trazamos una recta paralela a un lado. ¿Cuánto suman los tres ángulos que tienen el vértice común? ¿Cuánto suman los ángulos de un triángulo? 	*Algoritmos con conexiones*: el estudiante debe relacionar la suma de los ángulos con el ángulo llano y con los ángulos alternos internos. En su respuesta debe usar esas relaciones.
6. Explica, con la ayuda de las figuras y del apartado 5, pero sin usar el transportador, por qué la suma de los ángulos de un triángulo es 180°. 	*Algoritmos con conexiones*: el estudiante se basa en la respuesta 5, para generalizarla, para lo cual necesita entender las relaciones matemáticas descubiertas empíricamente.

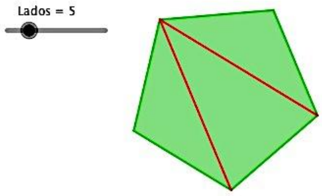
La segunda parte de la actividad (Tabla 2) plantea la extensión a la suma de los ángulos de cualquier polígono, basándose en la triangulación de los polígonos mediante sus diagonales desde un vértice. El objetivo es transformar los experimentos empíricos con polígonos de pocos lados en argumentos abstractos verbalizados para el polígono de 20 lados y algebrizados para el de *n* lados. Aquí también hay un aumento de la complejidad del razonamiento necesario para dar respuestas correctas al pasar al apartado 9b.

Tabla 2. Suma de los ángulos interiores de un polígono convexo en 5.º de Primaria (Benedicto, 2013)

Enunciado	Demanda cognitiva
7. Traza una diagonal en un cuadrilátero. ¿En cuántos triángulos queda dividido? ¿Cuánto suman los ángulos de un cuadrilátero?	*Algoritmos sin conexiones*: el estudiante sigue las instrucciones del enunciado y utiliza el resultado aprendido en la primera parte de la actividad. No necesita ser consciente de la relación implícita entre la suma de los ángulos y la cantidad de triángulos.
8. Traza las diagonales desde un solo vértice de un pentágono. ¿En cuántos triángulos queda dividido? ¿Cuánto vale la suma de los ángulos de un pentágono?	

<table>
<tr><th>Enunciado</th><th>Demanda cognitiva</th></tr>
<tr><td>

9. a) Observa los polígonos en el ordenador. Completa la tabla calculando la suma de los ángulos de cada polígono.



<table>
<tr><th>POLÍGONO</th><th>NÚMERO LADOS</th><th>NÚMERO TRIÁNGULOS</th><th>SUMA ÁNGULOS INTERIORES</th></tr>
<tr><td>TRIÁNGULO</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>CUADRILATERO</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>PENTÁGONO</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>HEXÁGONO</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>HEPTÁGONO</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>P. DE 20 LADOS</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>P. DE N LADOS</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

b) ¿En cuántos triángulos se puede dividir un polígono de 20 lados trazando las diagonales desde un vértice? ¿Cuánto vale la suma de sus ángulos interiores?
c) ¿En cuántos triángulos se puede dividir un polígono general de *n* lados trazando las diagonales desde un vértice? ¿Cuánto vale la suma de sus ángulos?

</td><td>

a) *Algoritmos sin conexiones*: hasta el heptágono, el estudiante sólo necesita contar los triángulos y usar el resultado aprendido en los apartados anteriores. No necesita ser consciente de la relación implícita entre la suma de ángulos y la cantidad de triángulos.
b) *Algoritmos con conexiones*: para generalizar la relación empírica anterior al caso 20, el estudiante necesita aplicar la relación entre el número de lados del polígono y la suma de sus ángulos, pero puede prescindir de la relación con el número de triángulos.
c) *Haciendo matemáticas*: el enunciado no sugiere cómo hacer la generalización algebraica ni cómo justificarla. El estudiante necesita entender la triple relación entre el número de lados del polígono, la cantidad de triángulos y la suma de los ángulos del polígono. El estudiante debe mostrar su creatividad y capacidad de abstracción.

</td></tr>
</table>

Algunos profesores españoles plantean en los primeros grados de ESO actividades similares a esta, cuando sus alumnos ya tienen capacidad de generalización y manejan el lenguaje algebraico. La particularidad de nuestro experimento es que la actividad se plantea en Primaria, cuando los estudiantes ordinarios todavía no pueden hacer más que verificaciones empíricas. En los últimos grados de Primaria, todos los estudiantes pueden responder correctamente los apartados 1, 2, 7 y 8; la mayoría de estudiantes pueden responder también los apartados 3, 4 y la primera parte de la tabla de 9a; sólo los estudiantes con talento matemático de estos cursos estarán en condiciones de abordar con éxito los apartados 5, 6. Por tanto, esta actividad permite a los estudiantes ordinarios aprender los contenidos estándar del grado y a los estudiantes con talento matemático, algunos de los cuales ya utilizan el lenguaje algebraico elemental, profundizar o ampliar sus conocimientos y empezar a tomar contacto con los argumentos lógicos y con la demostración matemática. Así, todo el grupo de estudiantes resuelve la misma tarea pero los estudiantes con altas capacidades matemáticas pueden llegar más lejos.

Investigación sobre desarrollo de la capacidad de visualización

La geometría 3d es el área de las matemáticas escolares que más necesita de la capacidad de visualización. Por el mismo motivo, es un contexto muy útil para plantear actividades que ayuden a los estudiantes a mejorar su uso de las diferentes habilidades de visualización mencionadas en la sección de Marcos Teóricos, como las usadas por Escrivá (2016) que, en estos momentos, estamos desarrollando para experimentar desde 1º hasta 6º de Primaria. El objetivo de nuestra investigación es recoger datos para definir una trayectoria hipotética de aprendizaje (Simon, 2004) durante Primaria que: i) muestre diferencias entre los sucesivos grados y ii) muestre diferencias entre estudiantes con talento matemático y sus compañeros ordinarios. Las actividades de estos experimentos se basan en cubos reales, dibujados en papel y en el ordenador, para realizar manipulaciones de desarrollos planos, giros y secciones (Figuras 1 a 3).

Los diferentes tipos de actividades inducen al uso de ciertas habilidades de visualización y también permiten aplicar los pensamientos analítico y visual. Así, para resolver correctamente la actividad de la Figura 1, es necesario coordinar las figuras colocadas en varios desarrollos. Un estudiante visualizador lo hace imaginando un desarrollo cerrado formando el cubo, viendo mentalmente las posiciones de figuras que están juntas (p. ej., al cerrar el segundo desarrollo, la ballena mira a la cabeza de gato) y llevando esa relación a otro desarrollo (el primero). Un estudiante analítico prefiere resolver la actividad buscando una relación interna entre dos figuras de un desarrollo (p. ej., la tortuga está sobre la ballena y miran hacia el mismo lado) para llevarla a otro desarrollo.

Los tres desarrollos son del mismo cubo. Coloca las figuras que faltan, prestando atención a la posición de cada figura en su cara.

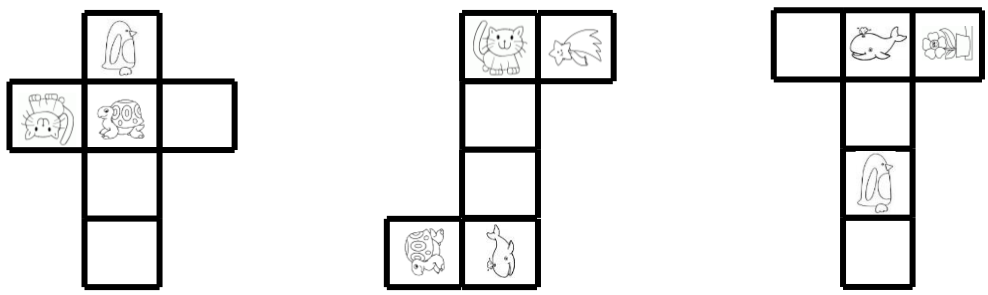


Figura 1. Actividad de desarrollos (Escrivà, 2016)

En cuanto a la actividad de la Figura 2, hemos identificado como más frecuentes una estrategia analítica consistente en emparejar dos caras (p. ej., el pato y la mariposa) y girarlas juntas y una estrategia visualizadora consistente en girar una cara (p. ej., el payaso del tercer cubo a la posición del payaso del cuarto cubo) y después hacer el mismo giro en otra cara (p. j., la rana; esto permite concluir que los cubos tercero y cuarto no son iguales).

Debajo ves fotos de varios cubos, pero se han mezclado. ¿Cuáles pertenecen al mismo cubo?

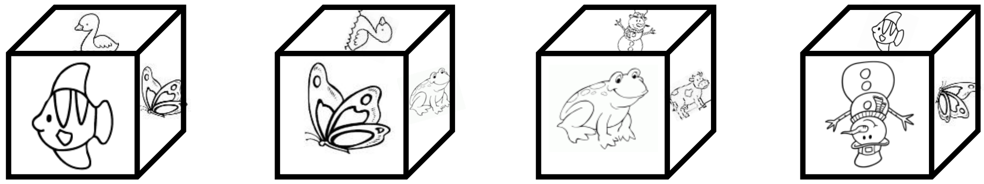


Figura 2. Actividad de giros (Escrivà, 2016)

Para resolver actividades de secciones como la de la Figura 3, es necesario poner en juego la habilidad de conservación de la percepción, ya que el cambio de posición del cubo hace que varíe la forma percibida de la sección. En estas actividades, los estudiantes también necesitan utilizar la habilidad de identificación visual, para poder aislar el polígono de la sección y para poder diferenciar, en los dibujos de cubos, entre las aristas del frente y las del fondo, pues con frecuencia los estudiantes con menos habilidad visual confunden unas con otras, lo cual les lleva a dar respuestas erróneas.

Un resultado de nuestros experimentos de enseñanza es que las habilidades de conservación de la percepción y de identificación visual parecen estar relacionadas ya que, cuando los estudiantes utilizaban eficazmente la habilidad de identificación visual (eran capaces de identificar sin error el polígono de la sección), también lo hacían con la habilidad de conservación de la percepción (eran conscientes de que el polígono de la sección no cambia de forma aunque se le vea variar al girar el cubo en la pantalla del ordenador). Sin embargo, la relación inversa no tiene por qué darse, pues había también estudiantes que mostraban un buen uso de la habilidad de conservación de la percepción pero tenían dificultades con la de identificación visual (no sabían identificar las aristas del cubo o de la sección).

Mira la sección marcada en el cubo. Dibújala en el cubo de la ficha. Después, dibuja la forma que puede tener la sección.

CUBO REAL **SECCIÓN** **FORMA DE LA SECCIÓN**

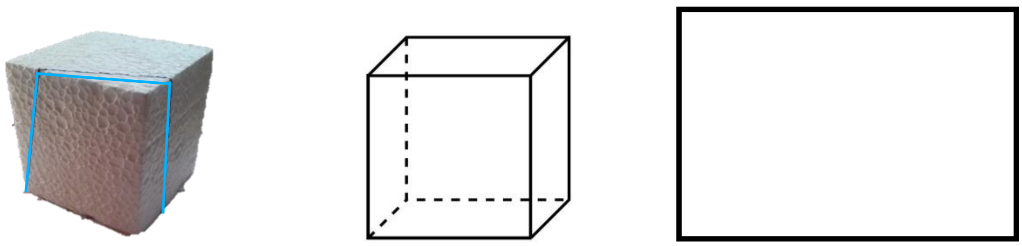


Figura 3. Actividad de secciones (Escrivà, 2016)

Para utilizar con éxito las diferentes estrategias de resolución de problemas vistas en los párrafos anteriores, es necesario emplear diversas habilidades de visualización. La Tabla 3 muestra que las habilidades más necesarias, por ser las usadas con más frecuencia en los tipos de actividades descritas en este texto, son las de identificación de posiciones en el espacio y de relaciones espaciales.

Tabla 3. Habilidades de visualización más usadas en cada tipo de actividades

	Identificación visual	**Conserv. de la percepción**	**Rotación mental**	**Identif. de posic. en el espacio**	**Identif. de relaciones espaciales**	**Discriminación visual**
Desarrollos				X	X	X
Giros		X	X	X	X	
Secciones	X	X		X	X	X

Conclusiones

En este texto he presentado algunas propuestas metodológicas para la enseñanza de la geometría en clases ordinarias de Primaria cuyos estudiantes tienen una diversidad de intereses y capacidades matemáticas y entre los que hay estudiantes de talento matemático. Esta diversidad de estudiantes supone un reto para los profesores que quieren organizar una enseñanza personalizada que procure llevar a cada estudiante lo más lejos posible en su aprendizaje de las matemáticas. He presentado una propuesta metodológica basada en las actividades matemáticas ricas, formadas por una secuencia de problemas cada vez más complejos cuyo objetivo es permitir a todos los estudiantes del grupo trabajar en la resolución de los mismos problemas y avanzar en el estudio de los contenidos matemáticos tanto como puedan.

Para poder valorar la validez y calidad de las actividades matemáticas ricas, disponemos del modelo de los niveles de demanda cognitiva, que permite evaluar la complejidad del razonamiento matemático necesario para resolver correctamente un problema. He mostrado la aplicación de este modelo a una actividad rica de geometría plana que, en el contexto de 5º grado de Primaria, permite a los estudiantes con más dificultades descubrir los conocimientos básicos sobre la suma de los ángulos de los polígonos convexos mientras que los estudiantes con más talento matemático pueden avanzar hasta el descubrimiento de la relación general para un n-gono e incluso adentrarse en la exploración de los polígonos cóncavos.

El uso competente de la visualización es una ventaja, con frecuencia una necesidad, en el estudio de las matemáticas y, en especial, de la geometría. El desarrollo de esta capacidad es muy importante para el aprendizaje de la geometría espacial y, al mismo tiempo, la geometría espacial es un contexto muy adecuado para practicar y mejorar en el uso de la visualización. En este texto he presentado un modelo clásico de descripción de la actividad de visualización centrado en las relaciones entre procesos, imágenes y habilidades de visualización cuando estos intervienen en la resolución de problemas. La fusión de este modelo con los tipos de razonamiento matemático de Krutetskii constituye un marco teórico útil para organizar actividades para los estudiantes y para analizar y evaluar sus resoluciones.

Apoyado en este marco, he presentado ejemplos de actividades de geometría 3d y he analizado respuestas de estudiantes, algunos de ellos con altas capacidades matemáticas, que han participado en investigaciones experimentales llevadas a cabo por mi grupo de investigación.

Referencias

Benedicto, C. (2013). *Investigación sobre variables en el diseño de actividades escolares para alumnos con altas capacidades matemáticas* (tesis de máster de investigación). Valencia, España: Universidad de Valencia. Disponible en http://roderic.uv.es/ bitstream/handle/10550/32580/Clara 23-01-2014.pdf.

Benedicto, C., Jaime, A., & Gutiérrez, A. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. In C. Fernández, M. Molina, & N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 153-162). Alicante: SEIEM.

Diezmann, C. M., & Watters, J. J. (2000). Identifying and supporting spatial intelligence in young children. *Contemporary Issues in Early Childhood, 1*(3), 299-313.

Escrivà, M. T. (2016). *Habilitats de visualització manifestades per alumnes de primària quan resolen activitats de geometria 3D i la seua relació amb el talent matemàtic* (tesis de maestría de investigación). Valencia, España: Universidad de Valencia. Disponible en http://roderic.uv.es/handle/10550/56732.

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *Arithmetic Teacher, 28*(6), 14-17.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. In L. Puig, & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference* (vol. 1, pp. 3-19). Valencia, España: PME. Disponible en http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/Gut96c.pdf.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, EE.UU.: The University of Chicago Press.

Miller, R. C. (1990). *Discovering mathematical talent* (manuscrito no publicado). ERIC. Washington, EE.UU. Disponible en http://www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/ contentdelivery/servlet/ERICServlet?accno=ED321487.

Piggott, J. (2011). *Rich tasks and contexts* (manuscrito no publicado). Cambridge, G.B.: NRICH. Disponible en https://nrich.maths.org/5662.

Presmeg, N. C. (1986a). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(3), 297-311.

Presmeg, N. C. (1986b). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *6*(3), 42-46.

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (tesis doctoral). Granada, España: Universidad de Granada. Disponible en http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalles/7461/descargar.

Rojas, S., Jiménez, W., & Mora, L. C. (2009). El uso de la resolución de problemas como instrumento para la caracterización de talento en matemáticas. In *Actas del 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (documento electrónico sin paginación). Pasto, Colombia: ASOCOLME. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/709/1/eluso.pdf.

Simon, M. A., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trayectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91-104.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: from research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 344-350.

Stein, M. K., Smith, M. S., & Henningsen, M. A., Silver, E. A. (2009). *Implementing Standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development*. Nueva York, EE.UU.: Teachers College Press.

Stylianou, D. (2001). On the reluctance to visualize in mathematics: is the picture changing? In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference* (vol. 4, pp. 225-232). Utrecht, Holanda: PME.

Van Garderen, D. (2006). Spatial visualization, visual imagery, and mathematical problem solving of students with varying abilities. *Journal of Learning Disabilities*, *39*(6), 496-506.

Webb, R. M., Lubinski, D., & Benbow, C. P. (2007). Spatial ability: a neglected dimension in talent searches for intellectually precocious youth. *Journal of Educational Psychology*, *99*(2), 397-420.