



## Artículo en conferencia



V Coloquio Binacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas, Universidad Nacional de Tumbes, 28 y 29 de mayo de 2021 (V COBISEMAT)

## Diseño de libros electrónicos para la enseñanza a distancia a estudiantes con diferentes capacidades matemáticas

### Design of e-books for distance learning for students with different mathematical abilities

Ángel Gutiérrez

Universidad de Valencia, España

<https://orcid.org/0000-0001-7187-6788>

[angel.gutierrez@uv.es](mailto:angel.gutierrez@uv.es)

Conferencia en

#### Información

Recibido: 14/03/2021.

Aceptado: 26/05/2021.

#### Palabras clave:

Alta capacidad matemática, libro electrónico interactivo, niveles de Van Hiele, simetrías.

#### Information

[Universidad Nacional de Tumbes](#)

#### Keywords:

High mathematical ability, interactive e-book, Van Hiele levels, symmetries.

#### Resumen

La enseñanza a distancia está ganando importancia por las restricciones en la docencia presencial de la pandemia del covid-19. Pero es necesario plantear una forma de enseñanza a distancia diferente de la tradicional, que sea flexible y se integre con la enseñanza presencial. Los libros electrónicos interactivos son una herramienta interesante para que los profesores de primaria y secundaria organicen su enseñanza combinando la presencia de los niños en las aulas y el estudio en sus casas. En esta conferencia presento un ejemplo de esta forma de enseñanza a distancia, mediante un libro electrónico interactivo diseñado para su uso por los estudiantes en las aulas o fuera de ellas. El libro presenta las simetrías del plano mediante la metodología de descubrimiento guiado y organizado según los niveles de Van Hiele. Además, el libro ofrece diversos itinerarios por sus actividades, adecuados a estudiantes con dificultades, medios y con alta capacidad matemática.

#### Abstract

Distance learning is gaining importance because of the restrictions on face-to-face teaching due to the covid-19 pandemic. But it is necessary to propose a form of distance teaching different from the traditional one, which is flexible and integrated with face-to-face teaching. Interactive e-books are an interesting tool for primary and secondary school teachers to organize their teaching by combining the presence of children in the classroom and study at home. In this lecture I present an example of this form of distance learning, using an interactive e-book designed for use by students in or out of the classroom. The book presents the symmetries of the plane using the guided discovery methodology and organized according to Van Hiele's levels. In addition, the book offers several itineraries through its activities, suitable for students with difficulties, medium and high mathematical ability.

## INTRODUCCIÓN

Los métodos de enseñanza de las matemáticas en educación primaria y secundaria están cambiando muy rápidamente durante las cuatro últimas décadas como consecuencia de la creciente disponibilidad de herramientas TIC como computadores, tabletas, celulares inteligentes, pizarras digitales, internet, etc.

Son numerosas las publicaciones que muestran los beneficios que tiene la manipulación de materiales didácticos, tanto reales como electrónicos, para el aprendizaje de la geometría por los estudiantes de educación primaria y secundaria (Sinclair, Cirillo, de Villiers, 2017; Swoboda, y Vighi, 2016).

En particular, la enseñanza de la geometría ha sufrido una revolución desde la aparición de programas de computador de geometría dinámica, como Cabri, Sketchpad y GeoGebra, entre otros. Por otra parte,

algunas formas de comunicación basadas en las TIC han entrado también en las aulas, como videos, podcasts o libros electrónicos.

Entre los diversos contenidos geométricos incluidos en los currículos de primaria y secundaria, las simetrías son un tema muy importante por su utilidad dentro y fuera de las matemáticas. El aprendizaje de las simetrías presenta diversas dificultades para los estudiantes, conocidas y analizadas desde hace bastantes años (Küchemann, 1981), la principal de las cuales es el obstáculo cognitivo producido por la imagen prototípica de los ejes de simetría en posición vertical.

En las aulas de cualquier centro educativo de primaria o secundaria podemos encontrar estudiantes con dificultades de aprendizaje o falta de interés por esforzarse, estudiantes de nivel medio y estudiantes con alta capacidad matemática. Los profesores deben prestar atención a cada tipo de estudiantes, para procurar que lleguen lo más lejos posible en el aprendizaje de las matemáticas, pero la forma de hacerlo es diferente para cada tipo. Mientras que los primeros necesitan un ritmo de trabajo más lento que los estudiantes medios y unos objetivos de enseñanza básicos, los estudiantes con alta capacidad matemática aprenden y trabajan deprisa y piden una enseñanza en la que abunden los problemas complejos cuya resolución les suponga un reto (Diezmann, Watters, 2002).

Para atender a estas diferentes necesidades, los profesores pueden apoyarse en las TIC, ya que permiten la individualización de la enseñanza (NCTM, 2000). Por otra parte, en el contexto actual de pandemia y limitaciones para desarrollar una enseñanza presencial normal, las TIC también ofrecen a los profesores la posibilidad de organizar el aprendizaje de sus alumnos a distancia. Además, esta forma de enseñanza se puede aplicar en otras situaciones que impiden que los estudiantes acudan a los centros escolares, como enfermedad, dificultades de comunicación, etc.

En esta conferencia, presento un ejemplo de uso de las TIC para facilitar la enseñanza de las simetrías del plano de manera individualizada y en un contexto de enseñanza a distancia. Se trata de un libro electrónico (Gutiérrez, Jaime, Gutiérrez, 2021) que ofrece a los estudiantes una secuencia de actividades interactivas, la mayoría de ellas basadas en GeoGebra, es adaptable a distintos objetivos de enseñanza adecuados para estudiantes con diferentes capacidades matemáticas y permite el aprendizaje autónomo de los estudiantes en contextos de enseñanza a distancia o de trabajo independiente en casa o en el aula, lo cual resulta especialmente interesante para los estudiantes con alta capacidad matemática, que pueden seguir un ritmo de aprendizaje más rápido y profundo que sus compañeros.

### **Referentes teóricos**

La metodología de enseñanza por descubrimiento se basa en la estrategia de proponer a los estudiantes actividades o problemas que, cuando resuelven bien, los lleven a descubrir nuevos contenidos matemáticos. Es poco realista pensar que todos los estudiantes serán capaces de progresar por sí mismos, por lo que la variante que resulta más eficaz es la de *descubrimiento guiado* (Gerver, Sgroi, 2003), en la que el profesor acompaña a sus alumnos y vigila para identificar momentos en los que necesiten algún tipo de ayuda, como una pregunta, una pista, etc., pero solo en ocasiones muy excepcionales darles la solución. Los entornos TIC, en particular los programas de geometría dinámica, se han mostrado eficaces para la aplicación de esta metodología (Baya'a, Daher, Mahagna, 2017).

Tratándose de enseñanza de la geometría, es innegable que los niveles de Van Hiele son un excelente marco de referencia para organizar la enseñanza y evaluar el aprendizaje. Al trabajar en los últimos cursos de educación primaria y primeros cursos de educación secundaria, me he centrado en los tres primeros niveles de razonamiento de Van Hiele. Es posible particularizar las características de dichos niveles al contexto de las simetrías de la siguiente manera (Jaime, 1993):

*Nivel 1:* Los estudiantes pueden identificar visualmente figuras o pares de figuras simétricas y ejes de simetría y pueden obtener figuras simétricas o ejes de simetría mediante plegado de papel o usando espejos, pero no pueden identificar características matemáticas de las simetrías.

*Nivel 2:* Los estudiantes pueden identificar experimentalmente, principalmente mediante arrastre si están usando un programa de geometría dinámica, las propiedades que caracterizan las simetrías (equidistancia de un punto y su imagen respecto del eje, perpendicularidad entre el eje y los segmentos

que unen puntos y sus imágenes). También pueden dibujar imágenes y ejes de simetría aplicando dichas propiedades y justificar sus resultados aludiendo a ellas.

*Nivel 3:* Los estudiantes pueden entender y usar la definición formal de simetría. También pueden descubrir las características de los productos de dos simetrías y usar propiedades abstractas para organizar argumentos deductivos informales con los que justificar la relación entre los productos de simetrías y las traslaciones o los giros.

## MATERIAL Y MÉTODOS

### Contenidos matemáticos estudiados

El libro electrónico interactivo que presento se centra en la enseñanza de las simetrías desde el principio, a estudiantes que nunca han estudiado estos contenidos. Los contenidos matemáticos que integran los objetivos de enseñanza del libro avanzan desde la introducción intuitiva y visual de las simetrías hasta el estudio deductivo de algunas de sus propiedades:

- Aproximación visual a las simetrías: identificación de figuras o pares de figuras simétricas y de ejes de simetría y realización mecánica de simetrías, todo ello apoyado en el uso de plegado y espejos (aunque esto último no es factible en el libro electrónico).
- Descubrimiento de las dos propiedades características de las simetrías (equidistancia al eje y perpendicularidad respecto del eje).
- Creación de imágenes y ejes de simetría mediante geometría dinámica.
- Descubrimiento de la característica del eje de simetría como mediatriz de los segmentos que unen puntos y sus imágenes y uso de dicha propiedad en la resolución gráfica de problemas.
- Productos de dos simetrías.
- Descomposiciones de traslaciones y giros en productos de dos simetrías.

Esta amplitud de objetivos permite organizar diferentes itinerarios de aprendizaje adecuados a los diversos tipos de estudiantes presentes en un grupo de clase: objetivos mínimos de aprendizaje de los contenidos necesarios, para todos los estudiantes del grupo, objetivos intermedios de aprendizaje, para los estudiantes medios, y objetivos avanzados de aprendizaje, para los estudiantes con mayor capacidad matemáticas.

## RESULTADOS

### Organización del libro electrónico interactivo

El libro electrónico que hemos creado (Gutiérrez, Jaime, Gutiérrez, 2021) es un ibook, la versión del formato e-pub desarrollada por Apple. Los ibooks pueden incorporar diversos elementos como videos, enlaces a páginas web, encuestas de auto-evaluación, figuras interactivas y botones de redireccionamiento a otros lugares del libro, entre otros. En la conferencia mostraré ejemplos de los diferentes tipos de actividades incluidas en el libro.

Las actividades están organizadas de acuerdo con los niveles de Van Hiele necesarios para responderlas correctamente. Las primeras actividades se resuelven de manera visual y manipulativa (nivel 1), llevan a entender qué es una simetría y cómo se puede dibujar y son adecuadas para todos los estudiantes.

La parte central del libro está formada por actividades cuya resolución correcta requiere el nivel 2 de Van Hiele, aunque muchas de ellas se pueden resolver también mediante razonamiento del nivel 1, y son adecuadas para los estudiantes con una capacidad matemática media o alta. En este bloque de actividades se estudian las propiedades de las simetrías necesarias para obtener la definición y las características de los productos de dos simetrías. A medida que se avanza en las actividades de este bloque, aumenta la complejidad, por lo que la segunda parte de ellas no es adecuada para los estudiantes con dificultades de aprendizaje o desinterés.

Por último, las últimas actividades se centran en el aprendizaje de la relación entre productos de simetrías y descomposiciones de traslaciones y giros, son las más complejas y su resolución correcta

requiere razonamiento de nivel 3, por lo que solo está al alcance de los estudiantes con alta capacidad matemática.

## DISCUSIÓN

En esta presentación he mostrado una manera de integrar las TIC, en particular los libros electrónicos interactivos, en la actividad ordinaria de los centros de enseñanza de educación primaria y secundaria, con el fin de mostrar que es posible combinar la enseñanza presencial y a distancia, no solo en las circunstancias especiales que estamos viviendo actualmente, sino en situaciones de normalidad. Además, el uso de materiales de enseñanza interactivos basados en herramientas TIC da a los profesores flexibilidad para adaptar su enseñanza a las necesidades específicas de los diferentes tipos de alumnos que conviven en sus clases, cosa que los materiales impresos no les permiten con la misma facilidad.

## Agradecimientos

Los resultados presentados son parte de las actividades del proyecto de investigación I+D+i EDU2017-84377-R (AEI/FEDER, UE) financiado por el gobierno de España.

## REFERENCIAS

- Baya'a, N., Daher, W., y Mahagna, S. (2017). The effect of collaborative computerized learning using GeoGebra on the development of concept images of the angle among seventh graders. En G. Aldon y J. Trgalov\_á (Eds.), *Proceedings of the 13th International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (pp. 208-215). Universit\_é Claude Bernard Lyon 1.
- Diezmann, C. M. y Watters, J. J. (2002). Summing up the education of mathematically gifted students. En B. Barton, K. C. Irwin, M. Pfannkuch y M. O. J. Thomas (Eds.), *Proceedings of the 25th Annual Conference of the MERGA* (pp. 219-226). Sidney, Australia: MERGA.
- Gerver, R. K., y Sgroi, R. J. (2003). Creating and using guided-discovery lessons. *The Mathematics Teacher*, 96(1), 6-13.
- Gutiérrez, A., Jaime, A. y Gutiérrez, P. (2021). Networked analysis of a teaching unit for primary school symmetries in the form of an e-book. *Mathematics*, 9(8), 832. doi: <https://doi.org/10.3390/math9080832>
- Jaime, A. (1993). Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento. (tesis doctoral no publicada). Universidad de Valencia, Valencia, España. Disponible en <https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/Jai93.pdf>
- Küchemann, D. (1981). Reflections and rotations. En K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 137-157). John Murray.
- NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. NCTM.
- Sinclair, N., Cirillo, M. y de Villiers, M. (2017). The learning and teaching of geometry. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 457-489). NCTM.
- Swoboda, E. y Vighi, P. (2016). Early geometrical thinking in the environment of patterns, mosaics and isometries. Springer.