Citar como: Gutiérrez, A., Jaime, A. (2016). Elementos de geometría. En Carrillo, J. y otros (Eds.), *Didáctica de las matemáticas para maestros de Educación Primaria* (pp. 237-277). Madrid: Paraninfo.

10. Elementos de Geometría

Angel Gutiérrez y Adela Jaime. Dpto. de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia (Valencia, España).

En este capítulo hacemos un recorrido por los principales bloques de contenidos de geometría de la Educación Primaria desde un punto de vista superior, adecuado a la formación matemática y didáctica que deben tener los futuros profesores de Primaria. Combinaremos reflexiones matemáticas teóricas con tareas manipulativas, más próximas a la actividad experimental propia de las clases de Primaria, con dos objetivos: Pretendemos que el capítulo sirva para la actualización y profundización de los conocimientos matemáticos de los futuros profesores. Pretendemos también que el capítulo sirva de complemento al conocimiento didáctico de la geometría presentado en los capítulos 7, 8 y 9, en los cuales nos apoyaremos en algunos momentos.

Los contenidos de geometría plana presentes en el currículo de Primaria se reparten mayoritariamente entre polígonos, circunferencia y círculo e isometrías. En geometría espacial, en Primaria se hace un recorrido, fundamentalmente descriptivo, por las principales familias de poliedros y cuerpos de revolución. Dentro de los poliedros, en Primaria se estudian los prismas, las pirámides y los poliedros regulares, pero los maestros deben conocer también otras familias importantes de poliedros.

10.1. Los orígenes de la geometría escolar

Empezaremos con un recorrido breve y simplificado por la historia de la geometría en la cultura occidental, que ayudará a entender la forma actual de hacer geometría y de organizarla en los currículos oficiales y los libros de texto. La geometría que se estudia en Primaria es parte de la Geometría Euclidiana, denominada así porque se reconoce a Euclides, matemático griego que vivió aproximadamente entre los años 325 y 265 a.c., como el primero que recopiló los conocimientos geométricos existentes en su tiempo y les dio una organización deductiva coherente. El resultado fue un tratado de geometría titulado *Los Elementos* (Euclides 1991a, 1991b, 1996), que comienza presentando 23 definiciones de objetos geométricos necesarios para poder empezar a definir otros conceptos y a enunciar y demostrar propiedades. Después de estas definiciones, Euclides enunció 5 axiomas (o postulados), es decir afirmaciones que se admiten como ciertas sin demostración. Los axiomas de Los Elementos de Euclides son[1]:

1. Es posible trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.
2. Y prolongar continuamente un segmento en línea recta.
3. Y dibujar un círculo con cualquier centro y distancia.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. (Figura 10.1) Si una recta, al cortar otras dos rectas, hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos.

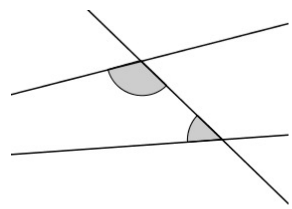


Figura 10.1. Representación del 5º axioma de Euclides.

Esta formulación del 5º axioma es poco conocida. Es más frecuente leer la siguiente formulación, que es matemáticamente equivalente, conocida como el "axioma de las paralelas":

5. Por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela a la recta dada.

En la época de Euclides, los instrumentos de dibujo geométrico eran la regla no graduada y el compás. Los elementos básicos sobre los que se creaba cualquier figura geométrica eran los puntos. A partir de los puntos se podían dibujar circunferencias, rectas y segmentos. Con rectas y segmentos se podían dibujar ángulos y polígonos, además de elementos auxiliares como mediatrices, bisectrices, alturas, etc. En la actualidad, la regla y el compás siguen siendo los instrumentos básicos para hacer geometría, no solo en papel, sino también en el ordenador con las aplicaciones de geometría dinámica.

10.2. Geometría del plano

No tenemos espacio para reflexionar sobre todos los conceptos básicos de la geometría de

[1] Tomamos como fuente Euclides (1991a), aunque, para facilitar la comprensión, hemos sustituido varios términos por los equivalentes de uso común en el contexto escolar actual: "Postúlese" por "Es posible", "recta finita" por "segmento", "describir" por "dibujar", e "incidir sobre" por "cortar". También hemos añadido algunas comas en el 5º axioma.

Primaria con detalle, por lo que nos vamos a centrar en los ángulos, triángulos y cuadriláteros, circunferencias, polígonos estrellados e isometrías. Estos constituyen la base del estudio de otros temas de geometría más complejos, como los polígonos regulares, los poliedros, la semejanza o la trigonometría.

10.2.1. Los ángulos

Si un profesor en formación inicial de Maestros pide dibujar un ángulo, todos sus alumnos dibujarán dos segmentos (los lados) con un extremo común (el vértice) y un arco entre los lados alrededor del vértice. Ahora, el profesor puede plantear algunas preguntas, como estas:

- ¿Cómo se define un ángulo?
- ¿Qué tipo de objeto geométrico son los lados del ángulo?
- ¿Los lados forman parte del ángulo?
- ¿El espacio entre los lados forma parte del ángulo?
- ¿En qué se diferencian un ángulo grande y uno pequeño?
- ¿Si el arco dibujado es más grande, el ángulo es mayor?

Actividad 10.1. Antes de seguir leyendo, contesta a las preguntas anteriores.

Consultando libros de texto y páginas de internet encontramos definiciones de ángulo que, al menos por su verbalización, parecen diferentes. Veamos algunos ejemplos: Un ángulo es

1. la parte del plano comprendida entre dos semirrectas que tienen el mismo punto de origen,
2. la abertura entre dos líneas rectas que se intersecan,
3. la unión de dos semirrectas que tienen el mismo punto extremo,
4. la amplitud del giro que describe un segmento rectilíneo en torno a uno de sus extremos, tomado como centro de giro, desde una posición inicial hasta una posición final,
5. la unión de dos semirrectas no colineales que tienen el extremo común,
6. la intersección de dos semiplanos.

Actividad 10.2. Antes de seguir leyendo, analiza las definiciones anteriores y compara unas con otras, tomando nota de las diferencias entre ellas y de cualquier otro aspecto que resulte llamativo.

Un análisis comparativo de estas definiciones nos permite observar diferentes cosas:

Las definiciones se basan en diferentes objetos: semirrectas (1, 3 y 5), rectas (2), segmentos (4) y semiplanos (6).

Lo primero que debemos notar es que la definición 4 es matemáticamente incorrecta, pues una característica de los ángulos es que delimitan regiones no acotadas, luego sus lados no pueden ser segmentos; para corregir esta definición, basta con sustituir "segmento" por "semirrecta" y "uno de sus extremos" por "su punto origen".

También es matemáticamente incorrecta la definición 6, pues la intersección de dos semiplanos cuyos bordes sean rectas paralelas no forma un ángulo; en este caso, para corregir la definición, es necesario añadirle la restricción de que los bordes de los semiplanos tienen que cortarse.

Por otra parte, aludir a la abertura entre dos rectas que se cortan (definición 2) es ambiguo, pues dos rectas secantes delimitan dos pares de ángulos. Esta definición se puede mejorar sustituyendo "rectas que se intersecan" por "semirrectas con punto origen común".

Las definiciones 3 y 5 difieren en que la segunda requiere dos semirrectas no colineales, es decir que no están apoyadas en la misma recta. Podemos considerar esta definición como matemáticamente correcta, pero tiene el inconveniente didáctico de que no admite ángulos de 180º. Por lo tanto, es necesario descartarla y quedarnos con la definición 3.

Así pues, vamos a seguir nuestro análisis con las siguientes definiciones de ángulo:

1. Es la parte del plano comprendida entre dos semirrectas que tienen el mismo punto origen.
2. Es la abertura entre dos semirrectas con punto origen común.
3. Es la unión de dos semirrectas que tienen el mismo punto origen.
4. Es la amplitud del giro que describe una semirrecta en torno a su punto origen, tomado como centro de giro, desde una posición inicial hasta una posición final.
5. Es la intersección de dos semiplanos cuyos bordes se cortan (antes definición 6).

Las definiciones caracterizan el ángulo de diferentes formas: como la parte del plano comprendida entre sus lados, sin incluir los lados (1) o incluyéndolos (5), como los propios lados (3), como abertura, es decir como medida del espacio entre los lados (2) y como amplitud, es decir como medida de un giro realizado por una semirrecta (4).

Claramente se trata de definiciones diferentes, pues aluden a diferentes tipos de objetos (semirrectas o superficie), a una forma de medir el espacio entre dos semirrectas (abertura) o una forma de medir el movimiento de giro (amplitud). Desde el punto de vista matemático, podríamos discutir acerca de si son equivalentes o no y plantearnos qué definición es más adecuada, pero esto tiene poco interés para la enseñanza en Primaria. Desde el punto de vista didáctico, estas definiciones ponen de relieve diferentes facetas de los ángulos que son todas importantes ya que aluden a diferentes formas de encontrar y utilizar los ángulos en situaciones de la vida ordinaria. Lo importante es que los niños formen una imagen conceptual de ángulo (ver el capítulo 8) lo más rica posible, que les permitirá ver, identificar y utilizar los ángulos de diferentes maneras, siendo capaces de seleccionar la más adecuada dependiendo del contexto. Para ello es necesario que, independientemente de la definición que estudien, los niños resuelvan actividades y problemas en los que utilicen todas las facetas y visiones de los ángulos.

Actividad 10.3. Busca contextos, situaciones, acciones, aparatos, etc. en los que estén presentes los ángulos y que correspondan a cada una de las definiciones 1 a 5 anteriores. Por ejemplo, el ángulo formado al abrir una puerta ordinaria corresponde a la definición 4, ya que estas puertas describen un giro al abrirse y al decir que una puerta está más abierta que otra queremos decir que el giro de la primera tiene más amplitud que el de la segunda.

Como resumen de lo dicho en estos párrafos, la enseñanza del concepto de ángulo en Primaria debe incidir en las diferentes interpretaciones que hemos visto aunque, obviamente, no se debe intentar que los niños aprendan varias definiciones diferentes. Mitchelmore y White (2000) presentan una interesante propuesta de enseñanza del concepto de ángulo basada en la progresiva abstracción y matematización de una diversidad de objetos y situaciones cotidianos que enfatizan los diversos aspectos relevantes de dicho concepto.

Actividad 10.4. Busca en libros de texto de Primaria y en internet varias definiciones de cada uno de estos conceptos: línea recta, segmento, bisectriz y mediatriz. Realiza, para cada concepto, un análisis similar al que hemos realizado aquí para los ángulos.

10.2.2. Cuadriláteros y triángulos

En el capítulo 7 se analiza la familia de los paralelogramos para mostrar que los estudiantes con diferentes niveles de Van Hiele de razonamiento interpretan de distintas maneras las características de cada cuadrilátero y ello les hace producir diferentes formas de clasificación. El nivel de razonamiento de los estudiantes de Primaria es profundamente visual, lo cual explica que, en ocasiones, realizan clasificaciones que no son coherentes con las definiciones aprendidas.

Unos elementos centrales de la enseñanza de los cuadriláteros y los triángulos son la definición y la clasificación de sus familias. Como veremos más adelante en este capítulo, la elección de definiciones para determinados tipos de triángulos y, sobre todo, cuadriláteros, tiene consecuencias en la forma de organizar otros contenidos de geometría plana y espacial que se estudian a lo largo de Primaria y Secundaria. Los maestros deben utilizar las definiciones y clasificaciones adecuadas al nivel de razonamiento de sus alumnos.

Los cuadriláteros

En los libros de texto de Primaria (y también de ESO) podemos encontrar definiciones diferentes, y no equivalentes, de algunos tipos de cuadriláteros. Vamos a centrarnos en la problemática de la elección de definiciones y la clasificación que generan las definiciones seleccionadas. Las definiciones que más frecuentemente aparecen en los libros de texto de Primaria españoles son las que muestra la Figura 10.2.

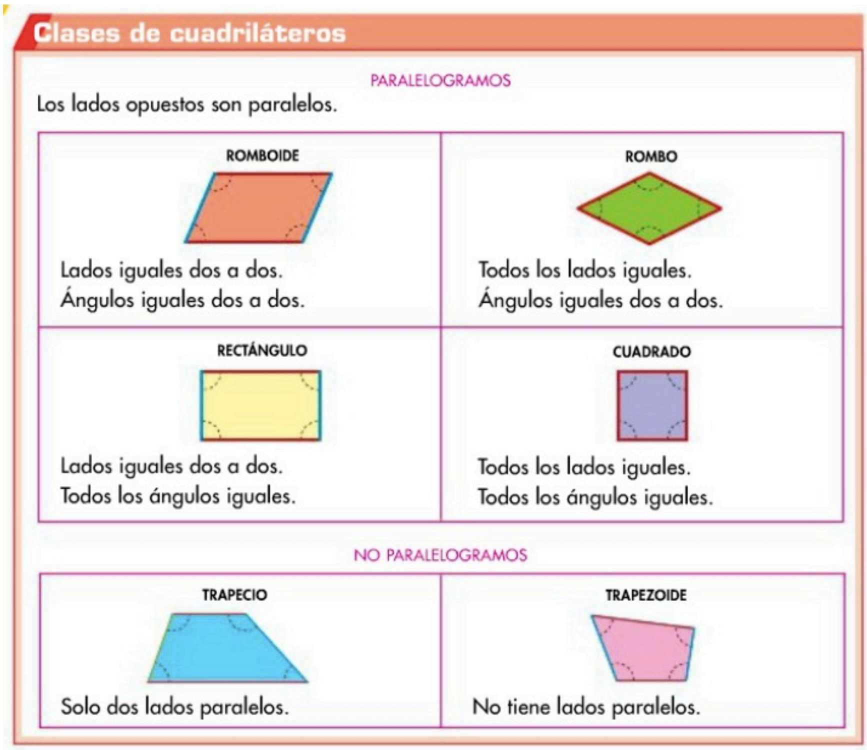


Figura 10.2. Definiciones de los tipos usuales de cuadriláteros convexos (extraída de "Anaya (2012), *Matemáticas. En línea. Primaria* 4 (p. 168). Grupo Anaya, Madrid").

Estas definiciones ponen el énfasis en las desigualdades de lados (en rectángulos y romboides) o de ángulos (en rombos y romboides). La expresión "lados/ángulos iguales dos a dos" significa, con la interpretación que se le da en Primaria, que estos polígonos tienen dos pares de lados/ángulos iguales entre sí pero que cada par es diferente del otro[2]. En ocasiones, las figuras refuerzan esta idea marcando, con colores iguales, los lados/ángulos de cada par pero con colores diferentes los pares de lados/ángulos desiguales del polígono (el libro de texto de la Figura 10.2 sólo ha marcado los lados).Con estas definiciones, los cuadrados no son rectángulos, pues los cuadrados no tienen lados desiguales, ni son rombos, pues los cuadrados no tienen ángulos desiguales. Del mismo modo, los rectángulos y los rombos no son romboides, ya que los rectángulos no tienen ángulos desiguales y los rombos no tienen lados desiguales.

Para completar el análisis de este conjunto de definiciones de cuadriláteros convexos, vamos a comparar las de paralelogramo, trapecio y trapezoide. Cada familia es disjunta de las otras dos, pues en las definiciones se indica explícitamente que los paralelogramos tienen dos pares de lados paralelos, los trapecios sólo tienen un par y los trapezoides no tienen ninguno, luego no hay figuras que pertenezcan a la vez a dos de estas familias.

Esa clasificación de cuadriláteros se suele representar visualmente mediante un diagrama conjuntista o un diagrama de árbol, ambos recogidos en la Figura 10.3.

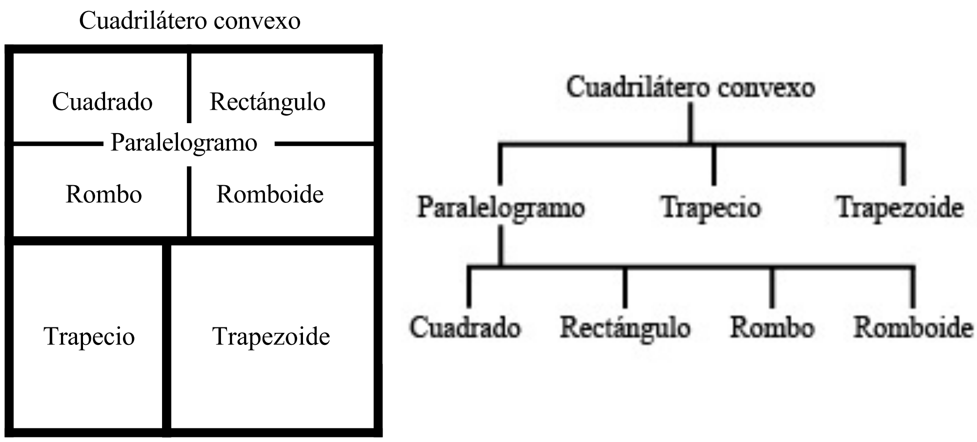


Figura 10.3. Clasificación de los cuadriláteros convexos según las definiciones de la Figura 10.2.

Aunque las definiciones anteriores son las más frecuentes en los libros de texto de Primaria, también podemos encontrar otras definiciones, como las que muestra la Figura 10.4.

[2] El significado en los libros de texto de Primaria de "iguales dos a dos" no coincide con su significado matemático estricto pues, matemáticamente, esta expresión no incluye la necesidad de que cada par de elementos sea diferente del otro.

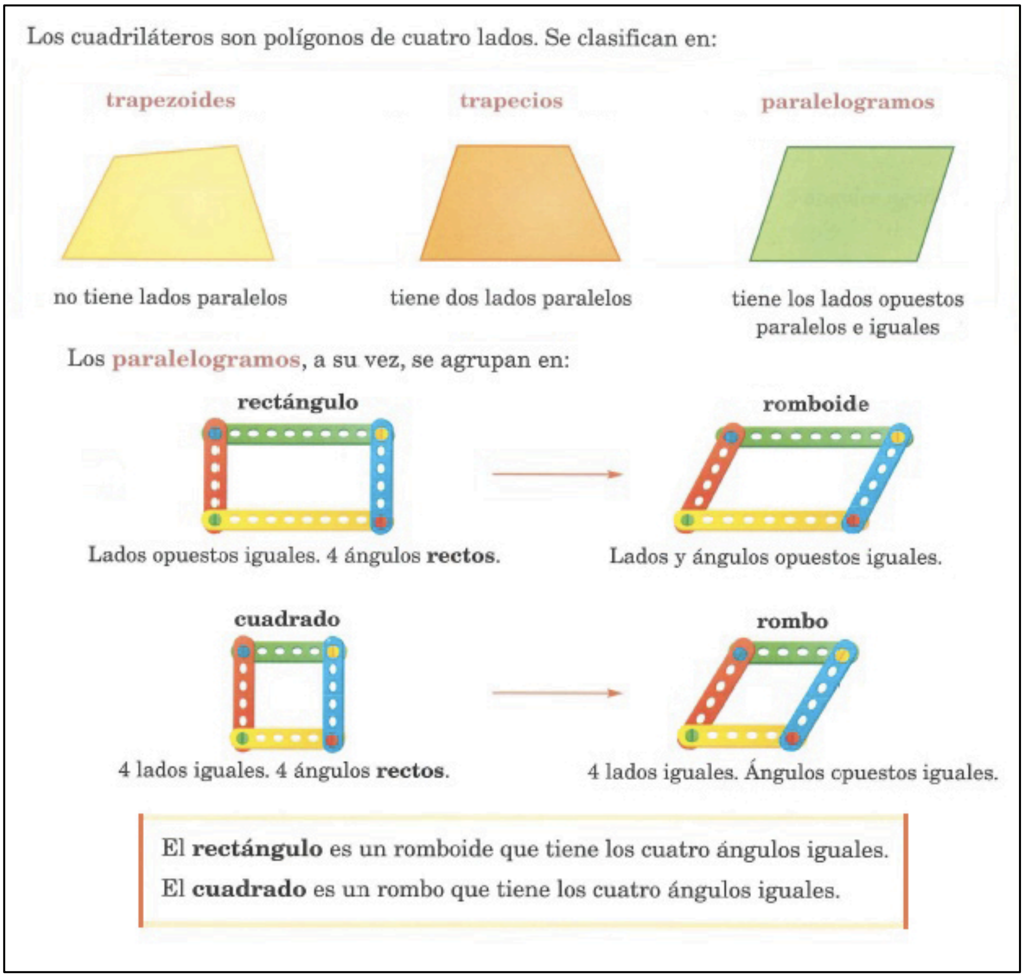


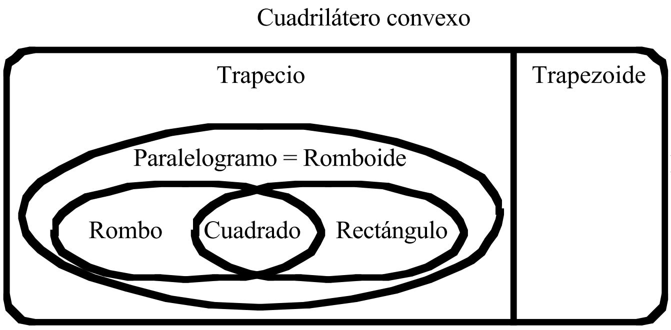
Figura 10.4. Definiciones de los tipos de cuadriláteros convexos (extraída de "Vicens Vives (2009), *Matemáticas 5. Mundo de colores. Primaria, 5º curso* (p. 120). Vicens Vives, Barcelona").

A diferencia de las definiciones de la Figura 10.2, estas definiciones de rectángulo, rombo y romboide no incluyen la precisión "iguales dos a dos". Así, nos encontramos con unas definiciones en las que, como el propio libro de texto indica gráfica y verbalmente, los rectángulos *son* un caso particular de romboide y los cuadrados *son* un caso particular de rombo. Del mismo modo, aunque el libro de texto no lo explicita, los cuadrados *son* un caso particular de rectángulo, pues los cuadrados tienen los lados opuestos iguales y 4 ángulos rectos, y los rombos *son* otro caso particular de romboide, pues los lados y ángulos opuestos del rombo son iguales. Sin embargo, no todos los rectángulos ni todos los rombos son cuadrados y no todos los romboides son rectángulos o rombos.

Si comparamos las definiciones de trapecio de las Figuras 10.2 y 10.4, vemos que también son diferentes, pues la segunda definición no dice que los trapecios tienen "sólo" dos lados paralelos. En matemáticas, los textos de definiciones o propiedades deben tomarse siempre en el sentido más amplio posible, por lo que, en este caso, la definición de trapecio de la Figura

10.4 permite la posibilidad de que un trapecio tenga más de dos lados paralelos, como ocurre con los paralelogramos. Por lo tanto, según estas definiciones, los paralelogramos se convierten en un caso particular de trapecios, aunque no todos los trapecios son paralelogramos.

Las representaciones visuales de esta clasificación de cuadriláteros mediante un diagrama conjuntista o un diagrama de árbol aparecen en la Figura 10.5.



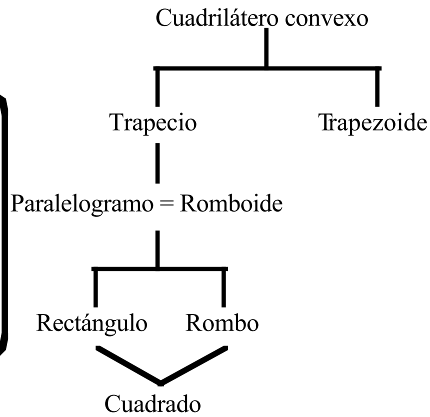


Figura 10.5. Clasificación de los cuadriláteros convexos según las definiciones de la Figura 10.4.

Actividad 10.5. Analiza las definiciones incluidas en libros de texto o páginas web y establece las relaciones entre las familias de cuadriláteros que se derivan de esas definiciones.

Actividad 10.6. Demuestra que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio. ¿Qué paralelogramo te interesa tomar para demostrarlo? Reflexiona sobre si incide en esta demostración el hecho de considerar la clasificación de paralelogramos asociada a las figuras 10.3 o 10.5.

Los triángulos

Otro tema central de la geometría plana de Primaria es el aprendizaje de propiedades de la familia de los triángulos. Los triángulos tienen una organización más simple que los cuadriláteros, pero comparten con ellos la problemática antes analizada de la diversidad de definiciones, aunque en el caso de los triángulos esta diversidad se limita a los triángulos isósceles, que pueden tener dos definiciones en los libros de texto:

- Un triángulo es isósceles cuando tiene dos lados iguales y uno desigual.
- Un triángulo es isósceles cuando tiene dos lados iguales.

Las definiciones de los otros dos tipos de triángulos según sus lados son únicas:

- Un triángulo es equilátero cuando tiene sus tres lados iguales.

- Un triángulo es escaleno cuando tiene los tres lados desiguales.

La primera definición de triángulo isósceles es la más frecuente. Como en el caso de los cuadriláteros, la primera definición excluye los triángulos equiláteros, ya que estos tienen los tres lados iguales. Pero, considerada matemáticamente, la segunda definición significa que los triángulos isósceles tienen *por lo menos* dos lados iguales, es decir que también pueden tener los tres lados iguales, por lo que los triángulos equiláteros son, según la segunda definición, un caso particular de triángulos isósceles. Para evitar errores en los estudiantes, sise quiere que la familia de triángulos isósceles incluya a los equiláteros, conviene que la definición de isósceles indique explícitamente que tienen "al menos dos lados iguales". Análogamente, en la definición de triángulos isósceles que genera familias disjuntas, conviene indicar que "tienen dos lados iguales y el otro desigual" o que "tienen exactamente dos lados iguales".

Actividad 10.7. Representa gráficamente las clasificaciones de las familias de triángulos según sus lados utilizando cada una de las definiciones anteriores de triángulo isósceles, de manera análoga a lo hecho en las Figuras 10.3 y 10.5 para los cuadriláteros.

Los triángulos se clasifican también según sus ángulos en acutángulos (si tienen los tres ángulos agudos), rectángulos (si tienen un ángulo recto) y obtusángulos (si tienen un ángulo obtuso). Aquí surgen algunas cuestiones interesantes:

1. *¿Puede haber un triángulo que sea rectángulo y obtusángulo?*

La respuesta se puede encontrar experimentando con Geogebra: Crear un segmento AB y dos semirrectas cuyos puntos origen sean, respectivamente, A y B. Medir los ángulos A y B. Situar la semirrecta con origen en A de manera que el ángulo A sea recto. Situar la otra semirrecta de manera que el ángulo B sea obtuso. Observar que las semirrectas no se cortan, por lo que no forman un triángulo. Girar la semirrecta con origen en B hasta que se forme un triángulo y observar el valor del ángulo B. ¿Cuál es el mayor valor que puede tener el ángulo B?

Matemáticamente, se puede demostrar que es imposible que un triángulo tenga un ángulo recto y otro obtuso ya que los ángulos de cualquier triángulo suman 180º: si un triángulo tuviera un ángulo de 90º y otro de más de 90º, la suma de los ángulos de este triángulo sería superior a 180º, lo cual es imposible.

Actividad 10.8. Demuestra que no puede haber un triángulo que tenga dos ángulos rectos. Demuestra que no puede haber un triángulo que tenga dos ángulos obtusos.

2. *¿Qué relación hay entre las clasificaciones de los triángulos según sus lados y según sus ángulos?*

Se puede analizar la pregunta con Geogebra: a) Construir un triángulo acutángulo de forma que sus tres vértices se puedan arrastrar libremente. Arrastrar los vértices para que el triángulo, sin dejar de ser acutángulo, sea escaleno. Después, arrastrar los vértices para que el triángulo, sin dejar de ser acutángulo, sea isósceles. Una vez logrado, arrastrar los vértices para que el triángulo, sin dejar de ser acutángulo, sea equilátero.

b) Construir un triángulo rectángulo y arrastrar sus vértices para conseguir que el triángulo, sin dejar de ser rectángulo, sea escaleno, isósceles y equilátero.

c) Construir un triángulo obtusángulo y arrastrar sus vértices para conseguir que el triángulo, sin dejar de ser obtusángulo, sea escaleno, isósceles y equilátero.

Matemáticamente, recordando que los tres ángulos de los triángulos equiláteros son iguales y miden 60º, deducimos que ningún triángulo rectángulo u obtusángulo puede ser equilátero. Los demás emparejamientos sí son posibles, como se muestra en la Figura 10.6.

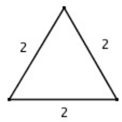
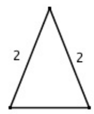
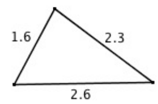
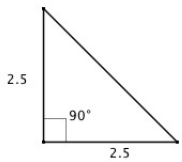
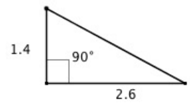
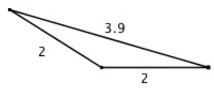
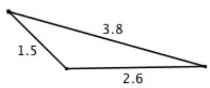
	Equilátero	Isósceles	Escaleno
Acutángulo			
Rectángulo	Imposible		
Obtusángulo	Imposible		

Figura 10.6. Cruce de las clasificaciones de los triángulos según sus lados y ángulos.

10.2.3. La circunferencia

El instrumento tradicional para dibujar circunferencias es el compás: se fijan el punto donde se pincha la aguja (el centro) y la abertura del compás (el radio). Hay una actividad, que se puede realizar en los colegios, en la que un niño sujeta el extremo de una cuerda (de 1’5 m como mínimo) contra el suelo; otro niño coge el extremo libre de la cuerda, se separa hasta que la cuerda esté tirante y se queda quieto en ese lugar; a continuación, este niño, sin moverse, suelta su extremo de la cuerda y otro niño repite el proceso, pero colocándose en otro lugar; esto se repite con más niños. ¿Cómo van a quedar situados los niños? ¿Por qué? Una variante de esta actividad consiste en que un niño sujeta un extremo de la cuerda contra el suelo mientras otro niño ata una tiza en el otro extremo y, con la cuerda tensa, va marcando en el suelo con tiza el recorrido mientras da una vuelta alrededor del primer niño. El dibujo con compás y las actividades escenifican (Figura 10.7) la concepción de circunferencia como la línea curva formada por los puntos del plano que están a una distancia constante de un punto fijo.

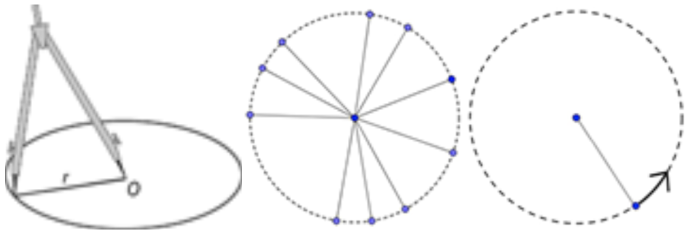


Figura 10.7. Actividades de creación de una circunferencia.

Geogebra ofrece varias formas de construir una circunferencia. La Figura 10.8 muestra su menú de construir circunferencias y la ayuda que indica cómo hacer cada construcción. Vamos a analizarlas y buscar la definición de circunferencia que se ajusta a cada una.

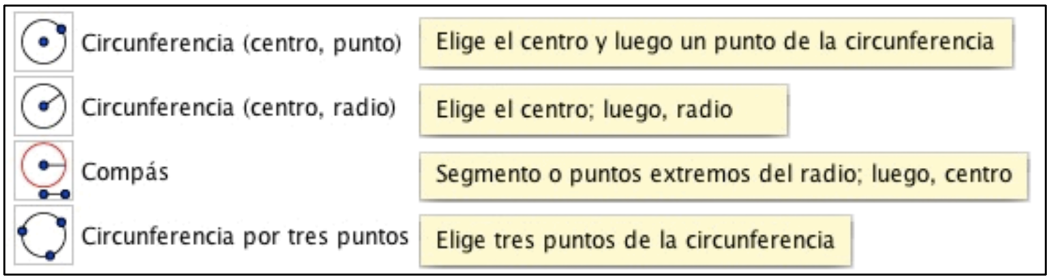


Figura 10.8. Menú de Geogebra con las formas de construir una circunferencia.

La primera opción tiene como datos el centro O y un punto P de la circunferencia. Según esto, *la circunferencia de centro O que pasa por el punto P es el conjunto de los puntos del plano que están a la misma distancia del punto O que el punto P*.

La segunda opción tiene como datos el centro O y un valor numérico r. Según esta forma de construirla, *la circunferencia de centro O y radio r es el conjunto de los puntos del plano que están a la distancia r del punto O*.

La tercera opción tiene como datos el centro O y un segmento S. Según esto, *la circunferencia de centro O y radio S es el conjunto de los puntos del plano que están a la distancia del punto O igual a la longitud de S*. Pero, si adoptamos un enfoque dinámico e imaginamos el segmento S girando alrededor de uno de sus extremos, también podemos decir que *la circunferencia de centro O y radio S es el conjunto de los puntos del plano por los que* *pasa un extremo del segmento S cuando este gira alrededor del otro extremo que está colocado en O*.

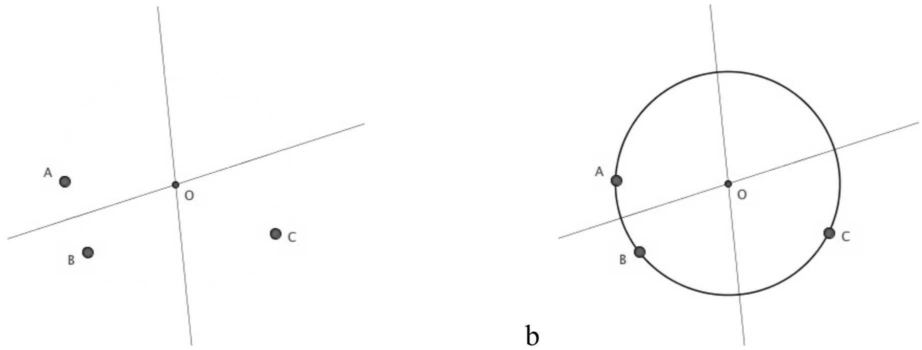
Por último, la cuarta opción del menú tiene como datos tres puntos *P*, *Q* y *R* de la circunferencia. Queda implícita la condición de que los puntos *P*, *Q* y *R* son diferentes y no están alineados. Esta forma de construir la circunferencia no lleva a ninguna definición, sino que ahora necesitamos emplear la definición de circunferencia para entender que por tres puntos diferentes del plano, no alineados, pasa una circunferencia y solamente una.

Una demostración habitual (Figura 10.9) se basa en la propiedad de la mediatriz de un segmento de que todos sus puntos equidistan de los extremos de ese segmento y en la propiedad de la circunferencia de que su centro equidista de todos los puntos de la circunferencia:

Dibujamos las mediatrices de *A* y *B* y de *B* y *C*, y dibujamos el punto *O* donde se cortan las dos mediatrices (Figura10.9a).

Como *O* pertenece a la mediatriz del segmento *AB*, *O* equidista de *A* y de *B* (llamaremos *r* a la distancia *OA*, que es igual a la distancia *OB*). Como *O* pertenece a la mediatriz del segmento *BC*, *O* equidista de *B* y de *C*, por lo que la distancia *OC* es igual a *r*.

Por lo tanto, los puntos *A*, *B* y *C* están a la misma distancia *r* de *O*, luego los tres puntos pertenecen a la circunferencia de centro *O* y radio *r* (Figura 10.9b). Solo hay una circunferencia de centro *O* y radio *r*, luego solo hay una circunferencia que pase por los puntos *A*, *B* y *C*.



a b

Figura 10.9. Las mediatrices entre puntos de una circunferencia pasa por el centro.

Actividad 10.9. ¿Son suficientes dos puntos para dibujar una única circunferencia? Considera dos casos: a) un punto es el centro y el otro está sobre la circunferencia. b) Los dos puntos están sobre la circunferencia. Justifica los resultados.

Rectas tangentes a una circunferencia

Actividad 10.10. Antes de seguir leyendo, dibuja una circunferencia en una hoja de papel. Desplaza una regla sobre la hoja y dibuja varias rectas situadas en posiciones diferentes respecto de la circunferencia. ¿Cuántas posiciones diferentes se obtienen?

Alguna de las rectas dibujadas es *exterior* a la circunferencia, pues no la toca en ningún punto. Otra de las rectas corta a la circunferencia de forma que tienen dos puntos en común; es una recta *secante* a la circunferencia. Al mover la regla desde la recta exterior hasta la secante, llega un momento en el que la regla empieza a tocar la circunferencia y, como la circunferencia es curva, el primer contacto será en un punto. La recta que toca a la circunferencia solo en un punto es una recta *tangente* a la circunferencia.

Vamos a explorar con Geogebra la relación entre circunferencias y rectas tangentes haciendo dos experimentos:

1. Construir una circunferencia (comando centro y punto), un punto *C* exterior a la circunferencia y las rectas tangente de ese punto (comando tangentes).

- Crear el punto *D* de contacto entre la circunferencia y una de las tangentes (comando intersección).

- Construir el radio que termina en *D*.

- Medir uno de los ángulos formados por el radio y la tangente (por ejemplo, *ADC*).

¿Cuánto mide este ángulo? Arrastrar los puntos libres para transformar la construcción, pero manteniendo *C* exterior a la circunferencia. ¿Varía el valor del ángulo *ACD*?

2. En una ventana nueva, construir una circunferencia (comando centro y punto) y una recta que pase por dos puntos exteriores a la circunferencia. Si la recta no es secante a la circunferencia, desplazarla para que lo sea.

- Crear los puntos *E* y *F* de contacto entre la circunferencia y la recta.

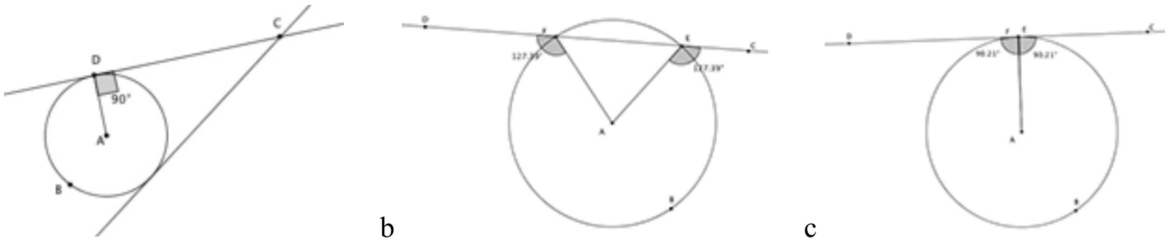
- Construirlos radios que terminan en *E* y *F*.

- Medir uno de los ángulos formados por cada radio y la recta (por ejemplo, *AEC* y *AFD*).

¿Cuánto miden estos ángulos? Arrastrar los puntos *A*, *B*, *C* y *D* para transformar la construcción, pero manteniendo la recta secante a la circunferencia. ¿Varían los valores de los ángulos *ACD* y *AFD*? ¿Qué valores toman los ángulos al desplazar la recta para convertirla en tangente? Es muy difícil lograr, mediante arrastre, que los puntos *E* y *F* coincidan exactamente pero, ¿cuánto medirán los ángulos cuando los puntos *E* y *F* coincidan?

La Figura 10.10 muestra las dos construcciones anteriores. En la primera construcción (Figura 10.10a) se observa que el ángulo entre la recta tangente y su radio mide siempre 90º.

En la segunda construcción se observa (Figura 10.10b) que los ángulos entre la recta y los radios son siempre iguales entre sí, aunque su amplitud varía al arrastrar la recta. También se observa (Figura 10.10c) que el valor de estos ángulos se acerca a 90º cuando la recta se acerca a la posición de tangente, por lo que podemos afirmar que, si logramos que la recta sea tangente (*E* y *F* coinciden), los ángulos medirán exactamente 90º.



a b c

Figura 10.10. Ángulos entre rectas y radios.

Estos dos experimentos permiten enunciar la propiedad característica de las rectas tangentes a las circunferencias: *el ángulo formado entre un radio y una recta que pase por el extremo de ese radio mide 90º solamente cuando la recta es tangente a la circunferencia.*

Ángulos relacionados con la circunferencia

Para preparar este apartado, vamos a realizar una construcción con Geogebra:

- Construir una circunferencia con el comando “centro, punto”. Llamar *O* al centro y *A* al punto.

- Construir un punto libre *P* (distinto de *O* y que no pertenezca a la circunferencia). Construir dos semirrectas con origen en *P*. Llamar *B* y *C* a los puntos que definen las semirrectas.

- Marcar el ángulo *BPC* y asegurarse (abrir Propiedades) de que mide entre 0º y 360º.

En los libros de texto, se pueden encontrar las siguientes definiciones de *tipos de ángulos relacionados con una circunferencia:*

- *Ángulo exterior*: Es un ángulo cuyo vértice *P* es exterior a la circunferencia y cuyos lados son tangentes o secantes a la circunferencia.
- *Ángulo interior*: Es un ángulo cuyo vértice *P* es interior a la circunferencia.
- *Ángulo central*: Es un ángulo cuyo vértice *P* es el centro de la circunferencia
- *Ángulo semi-inscrito*: Es un ángulo cuyo vértice *P* está en la circunferencia y cuyos lados son uno tangente y el otro secante a la circunferencia.
- *Ángulo inscrito*: Es un ángulo cuyo vértice *P* está en la circunferencia y cuyos lados son secantes a la circunferencia.

Usa la construcción anterior de Geogebra para representar cada tipo de ángulo.

Una característica de la relación entre la circunferencia y sus ángulos relacionados es que se pueden calcular las amplitudes de los ángulos a partir de las amplitudes de determinados arcos de la circunferencia. A continuación proponemos realizar diversas construcciones con Geogebra para descubrir estas relaciones entre ángulos y arcos. Es necesario tener en cuenta que puede haber pequeños errores de cálculo debidos a los redondeos, por lo que es aconsejable utilizar al menos 3 cifras decimales y dar a π el valor 3,141592.

Cálculo del valor del ángulo inscrito en una circunferencia

Construcción en Geogebra (Figura 10.11): Una circunferencia de centro *O*. Un ángulo *ABC*, siendo *A*, *B* y *C* puntos de la circunferencia. El ángulo central correspondiente al arco *AC*.

Comparar los valores del ángulo *ABC* y del ángulo *AOC*. ¿Qué conjetura se puede enunciar? Arrastrar los puntos *A*, *B* y *C* sobre la circunferencia. ¿Se confirma la conjetura anterior? Enunciar una relación general entre los valores del ángulo inscrito en una circunferencia y del ángulo central correspondiente.

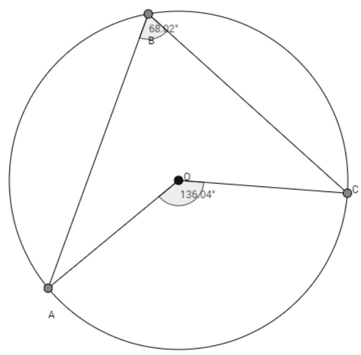


Figura 10.11. Ángulo inscrito.

Cálculo del valor del ángulo interior de una circunferencia

Construcción en Geogebra (Figura 10.12): Una circunferencia de centro *O*. Un ángulo *ABC*, siendo *A* y *C* puntos de la circunferencia y *B* un punto interior a la circunferencia. Las semirrectas *AB* y *CB* y los puntos *D* y *E* de corte de estas semirrectas con la circunferencia. Los segmentos *BD* y *BE*. Ocultar las semirrectas. Los ángulos centrales correspondientes a los arcos *AC* y *DE* de la circunferencia (arcos correspondientes a los ángulos *ABC* y *DBE*).

Comparar los valores del ángulo *ABC* y de los ángulos centrales mencionados. ¿Qué conjetura se puede enunciar? Arrastrar los puntos *A* y *C* sobre la circunferencia y *B* por su interior. ¿Se confirma la conjetura anterior? Enunciar una relación general entre los valores del ángulo interior en una circunferencia y de los ángulos centrales correspondientes.

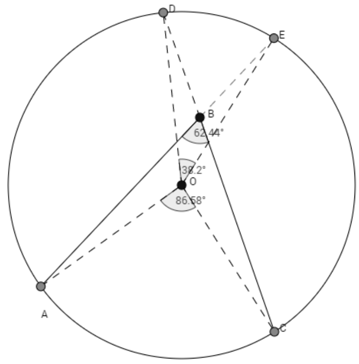


Figura 10.12. Ángulo interior.

Por la limitación de espacio, no planteamos las actividades equivalentes para los ángulos central, semi-inscrito y exterior. Las construcciones son similares a las anteriores, aunque los resultados que se obtienen son diferentes. Tampoco incluimos las fórmulas de cálculo de los ángulos anteriores; pueden encontrarse fácilmente en los libros de texto o en internet.

Actividad 10.11. En los libros de texto (y páginas de internet), los ángulos relacionados con la circunferencia se suelen dibujar como ángulos menores de 180º. ¿Son válidas las fórmulas encontradas si los ángulos son llanos o cóncavos?

Actividad 10.12. Un caso particular de los ángulos relacionados con la circunferencia son los ángulos cuyos lados tocan a la circunferencia en los extremos de un diámetro. Encontrar estos casos en los diferentes tipos de ángulos y calcular su valor en un ejemplo concreto de cada tipo. ¿Cómo varía el valor del ángulo cuando se desplaza el vértice manteniendo la característica del tipo de ángulo?

Si has realizado la actividad anterior, habrás podido observar que en los ángulos central, semi-inscrito, interior y exterior, el hecho de que los puntos de contacto del ángulo con la circunferencia sean los extremos de un diámetro no proporciona ningún resultado interesante más allá de lo evidente, por ejemplo que el ángulo central mide 180º o el semi-inscrito mide 90º. Sin embargo, en los ángulos inscritos, cuando los puntos de corte de sus lados con la circunferencia son los extremos de un diámetro, el ángulo inscrito mide 90º. Esta particularidad tiene dos aplicaciones interesantes, una en los propios ángulos inscritos y la otra en los triángulos rectángulos:

- Si dibujamos una circunferencia y un diámetro suyo, todos los ángulos inscritos cuyos lados terminen en los extremos de ese diámetro miden 90º, aunque sus formas sean aparentemente muy diferentes.

- La circunferencia circunscrita a un triángulo rectángulo tiene la hipotenusa como diámetro, por lo que el centro de esta circunferencia es el punto medio de la hipotenusa; de esta manera, es posible construir la circunferencia circunscrita a un triángulo rectángulo sin necesidad de las mediatrices. Por otra parte, es fácil dibujar un triángulo rectángulo sin necesidad de medir ángulos ni trazar perpendiculares, pues basta con dibujar una circunferencia, un diámetro suyo y un punto cualquiera de la circunferencia (distinto de los extremos del diámetro) para tener un triángulo rectángulo.

10.2.4. Los polígonos estrellados

Por definición, un *polígono estrellado es la figura plana obtenida al prolongar cada uno de los lados de un polígono convexo*. Aunque la forma de los polígonos estrellados resulta llamativa, su estructura encaja en la definición habitual en los libros de texto que indica que un polígono es la parte del plano limitada por una línea poligonal cerrada.

Esta manera de construir polígonos estrellados no siempre produce un polígono; por ejemplo, prolongando los lados de triángulos y cuadriláteros no se consigue ningún polígono estrellado, pero con polígonos de más de cuatro lados sí obtenemos polígonos estrellados (Figura 10.13a, b y c). Si hacemos esta manipulación con polígonos regulares de más de cuatro lados, obtenemos los polígonos estrellados regulares (Figura 10.13b y c). Los polígonos estrellados más famosos son el pentágono regular estrellado (Figura 10.13b), símbolo de la Escuela Pitagórica, y el hexágono regular estrellado, símbolo del judaísmo, que la llama Estrella de David.

Es necesario diferenciar (Guillén, 1991, p. 143) los polígonos estrellados de los polígonos cóncavos que tienen forma de estrella pero no son polígonos estrellados porque no cumplen el criterio de construcción por prolongación de los lados de un polígono convexo. Comparar los polígonos rojos de la Figura 10.13 a y d; el primero es un polígono estrellado pero el segundo no es estrellado.

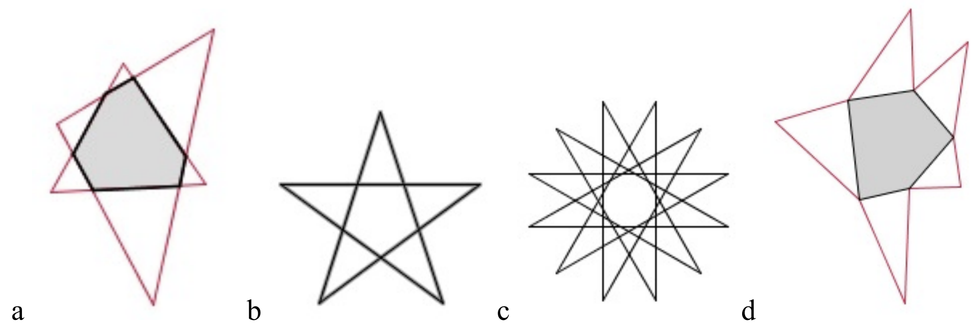


Figura 10.13. Dibujo de polígonos estrellados.

A partir de un polígono regular es posible crear varios polígonos estrellados regulares, dependiendo de cuánto se prolonguen los lados. Por ejemplo (Figura 10.14), un decágono regular genera tres decágonos estrellados diferentes, ya que los vértices de cada uno son los extremos de las puntas de la estrella, por lo que los tres tienen diez vértices y diez lados.

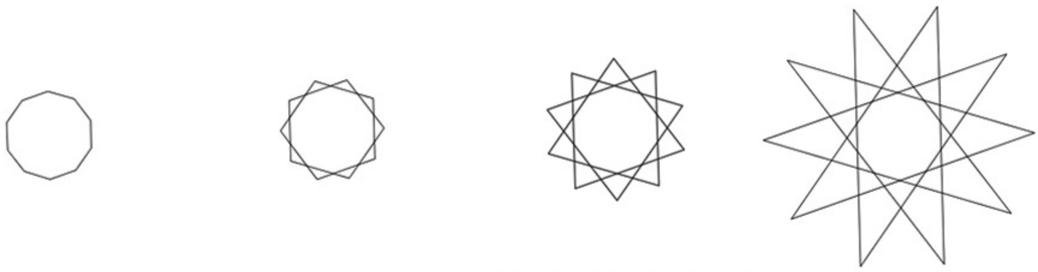


Figura 10.14. Polígonos estrellados generados por el decágono.

10.2.5. Las isometrías del plano

Una de las formas más habituales de utilizar las matemáticas en contextos extraescolares (domésticos, profesionales, lúdicos) es para relacionar propiedades de objetos que tienen la misma forma. Es muy frecuente, por ejemplo, basarse en fotografías de objetos para decidir si interesa o no comprarlos; al reorganizar una habitación, los miembros de la familia imaginan cómo quedarán los muebles cuando los cambien de sitio y si cabrán o no en una determinada posición; los técnicos (arquitectos, ingenieros, mecánicos, albañiles, etc.) se basan en planos y esquemas para construir un edificio, montar una máquina, o sustituir una pieza estropeada. Y no olvidemos el arte, los maravillosos diseños de mosaicos y rosetones, con simetrías, traslaciones, etc. Estas y muchas otras situaciones muestran que, a diario, tomamos decisiones basadas en relacionar objetos con la misma forma. En unas ocasiones estas comparaciones las realizamos de manera intuitiva, sin pensar en ellas, mientras que en otras utilizamos conscientemente propiedades matemáticas.

En esta sección vamos a revisar los principales conceptos y propiedades matemáticos de las isometrías del plano, es decir de las transformaciones que mantienen la forma y el tamaño de los objetos.

El capítulo 7 presenta un análisis didáctico de la enseñanza de las simetrías desde el punto de vista de los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje de Van Hiele. Este análisis puede ampliarse a la enseñanza de las traslaciones y los giros (Jaime, Gutiérrez, 1996). Por ello, en este capítulo nos centraremos en los aspectos matemáticos de las isometrías.

Empecemos construyendo en Geogebra un polígono. Podemos realizar varios tipos de acciones con él. Uno consiste en arrastrar un vértice o un lado del polígono; esta manipulación modifica la forma del polígono. También podemos situar el cursor en el interior del polígono y arrastrarlo; en este caso, se desplaza todo el polígono, por lo que su forma y tamaño no varían y, en lenguaje coloquial, diríamos que hemos trasladado el polígono.

Las isometrías del plano suelen denominarse también *movimientos* en el plano, pues su vertiente manipulativa se basa en mover objetos sobre una superficie plana siguiendo determinadas reglas. En Primaria, es fundamental iniciar la enseñanza mediante actividades manipulativas de movimiento para, con el tiempo, introducir las características matemáticas que dan significado a sus definiciones formales, las cuales se suelen estudiar en Educación Secundaria. Por ello, en este capítulo combinaremos los componentes manipulativo (movimientos en el plano) y matemático (isometrías del plano) para mostrar la relación entre uno y otro.

Traslaciones

En el arrastre del polígono realizado antes, hemos visto que éste se desplaza a través de la pantalla sin modificar su inclinación (Figura 10.15). Este tipo de movimiento se denomina *traslación.* Para describir cómo se pasa de una posición del polígono a otra (por ejemplo, de la posición 1 a la 2), podemos usar la cuadrícula como referencia para caracterizar los desplazamientos. Podríamos, por ejemplo, decir que si el polígono 1 se mueve 5 cuadrados hacia la derecha, 8 cuadrados hacia abajo, 2 hacia la izquierda y 3 hacia arriba, llegará a la posición del polígono 2. También podríamos moverlo1 cuadrado hacia arriba, 2 hacia la izquierda, 7 hacia abajo, 4 hacia la derecha y 1 hacia arriba y llegará a la misma posición.

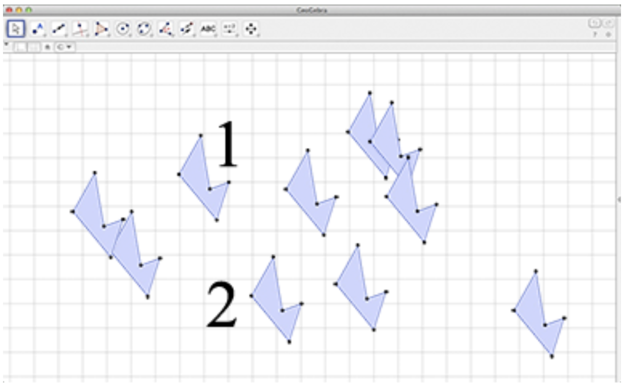


Figura 10.15. Traslación de un polígono por la pantalla del ordenador.

Actividad 10.13. Antes de seguir leyendo, describe varios recorridos para llevar el polígono desde la posición 1 hasta la 2. ¿Hay algún recorrido que sea el más corto?

Mover el polígono 3 cuadrados hacia la derecha y 5 hacia abajo (o 5 hacia abajo y 3 hacia la derecha) es la forma más rápida de llevarlo desde la posición 1 hasta la 2. Estas instrucciones se pueden sintetizar introduciendo ejes de coordenadas (Figura 10.16) y diciendo que hay que mover el polígono (3,-5) pasos o dibujando un vector en el que la diferencia de abscisas entre el origen y el final del vector sea de 3 unidades y la diferencia de ordenadas sea de -5 unidades.

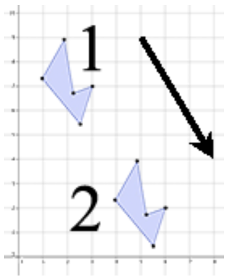


Figura 10.16. Vector de traslación**.**

El vector de la Figura 10.16 se denomina *vector de traslación* y caracteriza la dirección de movimiento de la traslación (indicado por la recta que contiene al vector), el sentido de movimiento (indicado por la punta de flecha) y la longitud del movimiento (indicada por la longitud, o módulo, del vector). El vector de traslación es un vector libre, es decir que puede situarse en cualquier lugar del plano manteniendo sus coordenadas, en este caso (3,-5). En este contexto, todos los vectores cuyas coordenadas sean (3,-5) son iguales, porque producen el mismo resultado, es decir la misma traslación. Esto nos permite introducir la definición matemática de traslación:

Definición: Dado un vector $\vec{v}$ del plano, se llama *traslación de vector* $\vec{v}$ a la transformación $T_{\vec{v}} : \Pi \rightarrow \Pi$ del plano en sí mismo tal que, para todo punto *P* del plano, el punto *P'* es la imagen de *P* por dicha traslación si $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$.

Las actividades planteadas en el capítulo 5 de Jaime, Gutiérrez (1996) pueden usarse para profundizar en el estudio matemático de las traslaciones del plano.

Giros

Todos los niños de Primaria, hasta los más pequeños, tienen una concepción intuitiva del giro, pero es necesario darle forma y aproximarla al concepto matemático. Suelen entender "girar" como equivalente a "dar vueltas", realizando un recorrido cerrado que le hace pasar una y otra vez por los mismos sitios, pero esto resulta ambiguo. Por ejemplo, en la feria, el movimiento de una persona en la atracción de los caballitos es similar al que tiene en la noria (Figura 10.17a), pero el movimiento en la atracción del pulpo (Figura 10.17b) es bastante diferente y lo es mucho más en la montaña rusa (Figura 10.17c). En todos los casos, la persona "da vueltas" pasando varias veces por el mismo sitio, pero las formas de los recorridos de los caballitos y la noria son iguales, mientras que las del pulpo y la montaña rusa son diferentes de las anteriores. En otros contextos, podemos comparar la órbita de un planeta alrededor del sol (Figura 10.17d) o el recorrido de un logotipo grabado en un cd puesto en el reproductor.

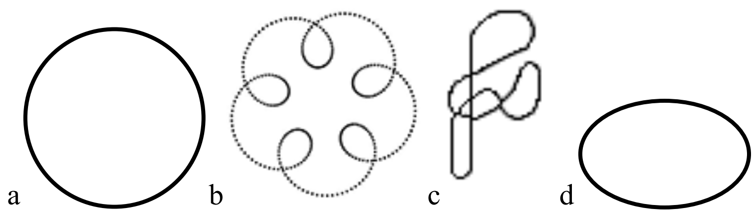


Figura 10.17. "Dando vueltas" en la noria, el pulpo, la montaña rusa y un planeta.

Los movimientos de norias, caballitos, ruedas, discos cd, agujas del reloj, etc. tienen en común que realizan un recorrido uniforme, que gráficamente es igual siempre y que se puede representar mediante una circunferencia. Por el contrario, los movimientos del pulpo, la montaña rusa o los planetas no realizan un movimiento uniforme, sino que unas veces describen una trayectoria más cerrada que otras, por lo que esta no tiene forma de circunferencia. Los primeros contextos son ejemplos de giros, cuyas características son el centro de la circunferencia, el sentido de giro alrededor del centro (a favor o contrario a las agujas del reloj) y el ángulo recorrido durante el giro. El sentido de giro y el ángulo se sintetizan mediante un ángulo orientado, es decir un ángulo que puede tener signo positivo o negativo: Girar +90º consiste en girar un cuarto de circunferencia moviéndose en el sentido contrario al de las agujas del reloj y girar -90º consiste en girar un cuarto de circunferencia moviéndose en el sentido de las agujas del reloj. Esto nos lleva a la definición formal de giro:

Definición: Dados un punto *O* del plano y un ángulo orientado α, se llama *giro de centro O y ángulo* α a la transformación $G(O,\alpha): \Pi \rightarrow \Pi$ del plano en sí mismo tal que, para todo punto *P* del plano, el punto *P'* es la imagen de *P* por dicho giro si (1) d(*O*,*P*) = d(*O*,*P'*) y (2) <*POP'* = α.

La condición 1, que *P* y *P'* están a la misma distancia del centro de giro *O*, se convierte en la práctica en que ambos puntos están ubicados en la misma circunferencia de centro *O* (Figura 10.18a). La segunda condición significa que puntos situados a diferentes distancias del centro recorrerán trayectos (arcos de circunferencia) con diferentes longitudes lineales pero con la misma amplitud angular, igual al valor absoluto de α (Figura 10.18b). Las actividades planteadas en el capítulo 6 de Jaime y Gutiérrez (1996) ayudarán a profundizar en la comprensión de las características matemáticas de los giros del plano.

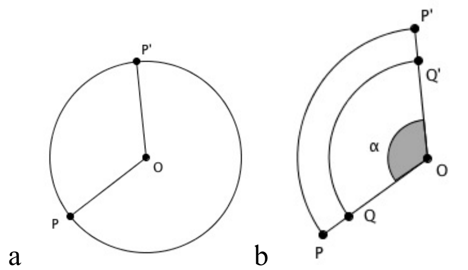


Figura 10.18. Características de los giros.

Simetrías

La simetría se asocia de manera casi general a la imagen reflejada en un espejo. Dejando de lado el hecho de que el reflejo en un espejo es una imagen tridimensional, la materialización de la simetría del plano mediante un espejo es muy útil para ayudar a los niños de Primaria a entender las características de las simetrías. Otro modelo muy útil en Primaria es el plegado y recorte de una hoja de papel; la silueta que se obtiene al deshacer el pliegue será simétrica y la doblez es el eje de simetría. Delante de un espejo, se pueden hacer algunos movimientos y observar cómo reacciona la imagen.

Actividad 10.14. ¿Qué ocurre cuando nos separamos y nos acercamos al espejo? ¿Qué ocurre cuando acercamos un dedo hasta tocar el espejo? ¿Podemos llegar a tocar el espejo antes que el dedo de nuestra imagen? ¿Podemos hacer que nuestra imagen venga a nuestro lado del espejo? ¿Podemos tocar el espejo en un lugar diferente que el dedo de nuestra imagen?

Las respuestas a estas preguntas contienen los fundamentos de la definición matemática de simetría: La distancia entre un objeto y el espejo es igual a la distancia entre su imagen y el espejo (por ello siempre tocarán los dos el espejo al mismo tiempo). El eje de simetría siempre está entre un objeto y su imagen (ya que nunca veremos nuestra imagen a nuestro lado del espejo). El segmento que une un objeto y su imagen es perpendicular al eje de simetría (lo cual impide que podamos tocar el espejo en un punto diferente de nuestra imagen). Matemáticamente, esto se resume en la siguiente definición:

Definición: Dada una recta *e* del plano, se llama *simetría de eje la recta e* a la transformación $S_e : \Pi \to \Pi$ del plano en sí mismo tal que, para todo punto *P* del plano, el punto *P'* es la imagen de *P* por dicha simetría si (1) d(*P*,*e*) = d(*P'*,*e*) y (2) el segmento *PP'* es perpendicular a la recta *e*.

Si observamos la definición anterior desde el punto de vista del segmento *PP'*, nos daremos cuenta de que la recta *e* es perpendicular al segmento (condición 2) y lo corta por su punto medio (condición 1), es decir que el eje *e* es la mediatriz del segmento *PP'* (Figura 10.19).

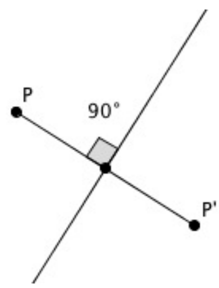


Figura 10.19. Eje de simetría y mediatriz.

Por lo tanto, podríamos definir la simetría también basándonos en el concepto de mediatriz:

Definición: Dada una recta *e* del plano, se llama *simetría de eje la recta e* a la transformación $S_e : \Pi \to \Pi$ del plano en sí mismo tal que, para todo punto *P* del plano, el punto *P'* es la imagen de *P* por dicha simetría si la recta *e* es la mediatriz del segmento *PP'*.

En la práctica, unas veces resulta más útil utilizar la primera definición y otras veces la segunda, por lo que es necesario aprender y entender ambas definiciones y cómo pasar de una a la otra.

Las actividades planteadas en el capítulo 7 de Jaime y Gutiérrez (1996) pueden usarse para profundizar en el estudio matemático de las simetrías del plano.

Ten en cuenta que no es lo mismo decir que una figura es simétrica (es decir, que posee un eje de simetría) que considerar la figura simétrica de una figura dada. En este último caso, el eje de simetría puede ser cualquier recta del plano.

Simetría en deslizamiento

Existe una isometría diferente de las traslaciones, giros y simetrías denominada simetría en deslizamiento. Esta isometría no se estudia en Primaria, pero es necesario que los maestros la conozcan para poder tener una visión completa del conjunto de las isometrías del plano. Gráficamente, la representación más usual de la simetría en deslizamiento es el dibujo que dejan las huellas de los pies humanos al caminar sobre arena húmeda (Figura 10.20a). Matemáticamente, una simetría en deslizamiento se define como el producto de una simetría y una traslación de vector paralelo al eje de simetría (Figura 10.20b).

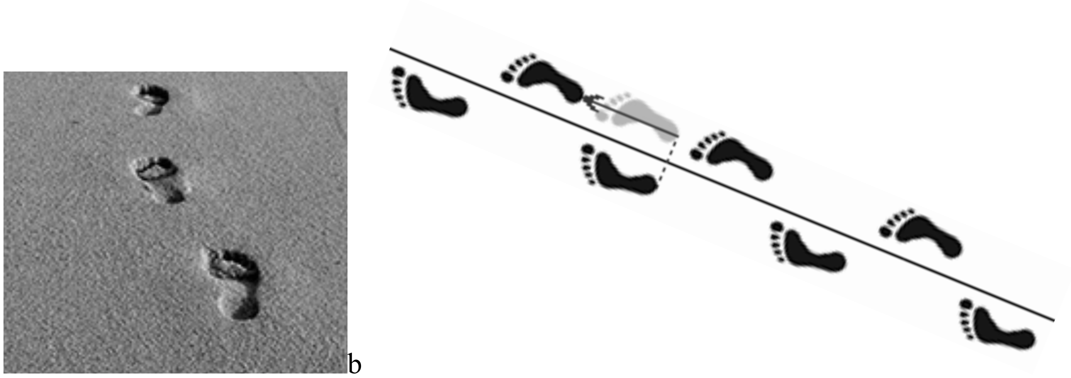

a b

Figura 10.20. Simetría en deslizamiento.

Con la simetría en deslizamiento se completa la descripción del conjunto de las isometrías del plano. Dadas dos figuras planas iguales (Figura 10.21), siempre podemos encontrar una de las cuatro isometrías que hemos estudiado que nos permitirá mover una figura hasta la otra: Si las dos figuras tienen la misma orientación, el movimiento será una traslación o un giro, dependiendo de si ambas figuras tienen la misma inclinación en el plano (Figura 10.21a) o no la tienen (Figura 10.21b). Si las dos figuras tienen orientaciones contrarias, el movimiento será una simetría o una simetría en deslizamiento, dependiendo de si las figuras están colocadas en posición simétrica (Figura 10.21c) o no lo están (Figura 10.21d).

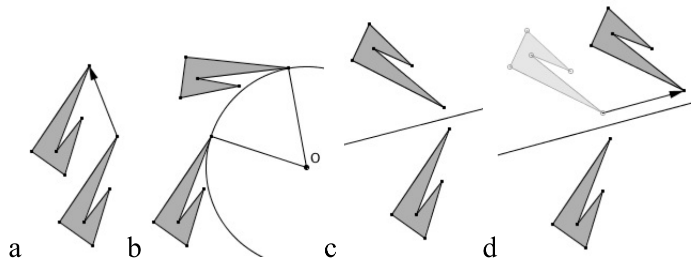


Figura 10.21. Las cuatro isometrías del plano.

Producto de isometrías

La operación algebraica de producto (o composición) de aplicaciones se puede aplicar a las isometrías. Matemáticamente, el producto $g \circ f$ de dos aplicaciones f y g se define como el cálculo de la imagen de un punto por f y, a continuación, el cálculo de la imagen por g de la anterior imagen por f: $(g \circ f)(p) = g(f(p))$.

Observar que el orden de escritura es el contrario al usual en escritura, de derecha a izquierda: la primera aplicación que se utiliza es la de la derecha. En contextos prácticos manipulativos, el producto de dos isometrías consiste en un encadenamiento de movimientos, es decir, en mover un objeto mediante la primera isometría y, a continuación, mover el objeto, desde su posición actual, mediante la segunda isometría. Por ejemplo, la Figura 10.22 muestra el proceso de realización del producto $S_e \circ T_V$ sobre el polígono 1: Primero se ha trasladado el polígono 1 hasta el polígono 2 y después se ha hecho la simetría del polígono 2, resultando el polígono 3. Por lo tanto, $S_e \circ T_V$(Polígono 1) = Polígono 3. En general, el producto de tres o más isometrías se realiza de la misma manera, mediante la secuencia de los movimientos determinados por las sucesivas isometrías.

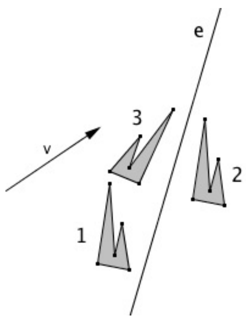


Figura 10.22. Resultado del producto $S_e \circ T_V$(Polígono 1).

Combinando isometrías, podemos hacer varios productos de dos movimientos. La tabla de la Figura 10.23 sintetiza los resultados de los diferentes productos posibles y la Figura 10.24 muestra gráficamente los productos de dos traslaciones, giros de distinto centro y simetrías.

Traslación	Traslación			
Giro	Giro	Giro o Traslación		
Simetría	Simetría en deslizamiento	Simetría en deslizamiento	Traslación o Giro	
Simetría en deslizamiento	Simetría en deslizamiento	Simetría en deslizamiento	Traslación o Giro	Traslación o Giro
	Traslación	**Giro**	**Simetría**	**Simetría en deslizamiento**

Figura 10.23. Productos de isometrías.

Actividad 10.15. Verificar experimentalmente con Geogebra la conmutatividad de los productos de isometrías de la tabla de la Figura 10.23.

Algunos productos de isometrías interesantes son los siguientes:

- El producto de dos traslaciones de vectores *v* y *w* es la traslación de vector *v+w* (Figura 10.24a): $T_v \circ T_w = T_{v+w}$.
- El producto de dos giros de centro *O* y ángulos α y β es el giro de centro *O* y ángulo $\alpha+\beta$: $G(O, \alpha) \circ G(O, \beta) = G(O, \alpha+\beta)$.
- El producto de dos giros de centros O_1 y O_2 y ángulos α y β es:

  - (Figura 10.24b) un giro $G(O_3, \alpha+\beta)$ cuando $\alpha+\beta$ no es 0º ni múltiplo de ±360º.

  - (Figura 10.24c) una traslación T_v cuando $\alpha+\beta$ es 0º o múltiplo de ±360º.

- El producto de dos simetrías de ejes *e* y *f* paralelos es una traslación cuyo vector *v* tiene dirección perpendicular a los ejes, su sentido es desde el eje de la primera simetría hasta el de la segunda y su longitud es el doble de la distancia entre los ejes de simetría (Figura 10.24d):

  $S_f \circ S_e = T_v$ siendo *v* perpendicular a *e* y *f*, con sentido igual al movimiento desde *e* hasta *f* y con longitud igual al doble de la distancia entre *e* y *f*.

Actividad 10.16. Comprueba que, en efecto, el vector cuyos extremos son un punto del plano y su imagen por el producto de dos simetrías de ejes paralelos no depende del punto de partida.

- El producto de dos simetrías de ejes *e* y *f* que se cortan es un giro cuyo centro *O* es el punto de corte de los ejes, el sentido de giro es desde el eje de la primera simetría hasta el de la segunda y la amplitud del ángulo de giro es el doble de la amplitud del ángulo formado por los ejes de simetría (Figura 10.24e):

$S_f \circ S_e = G(O, \alpha)$ siendo O el punto de corte de *e* y *f*, el sentido de giro es igual al del giro desde *e* hasta *f* y el ángulo de giro α mide el doble del ángulo entre *e* y *f*.

Actividad 10.17. Comprueba que, en efecto, el punto de corte O de los ejes e y f considerados en el punto anterior coincide con su imagen por el producto de dos simetrías $S_f \circ S_e$, y que el ángulo determinado por un punto del plano, O, y la imagen de ese punto por el producto de estas dos simetrías no depende del punto de partida.

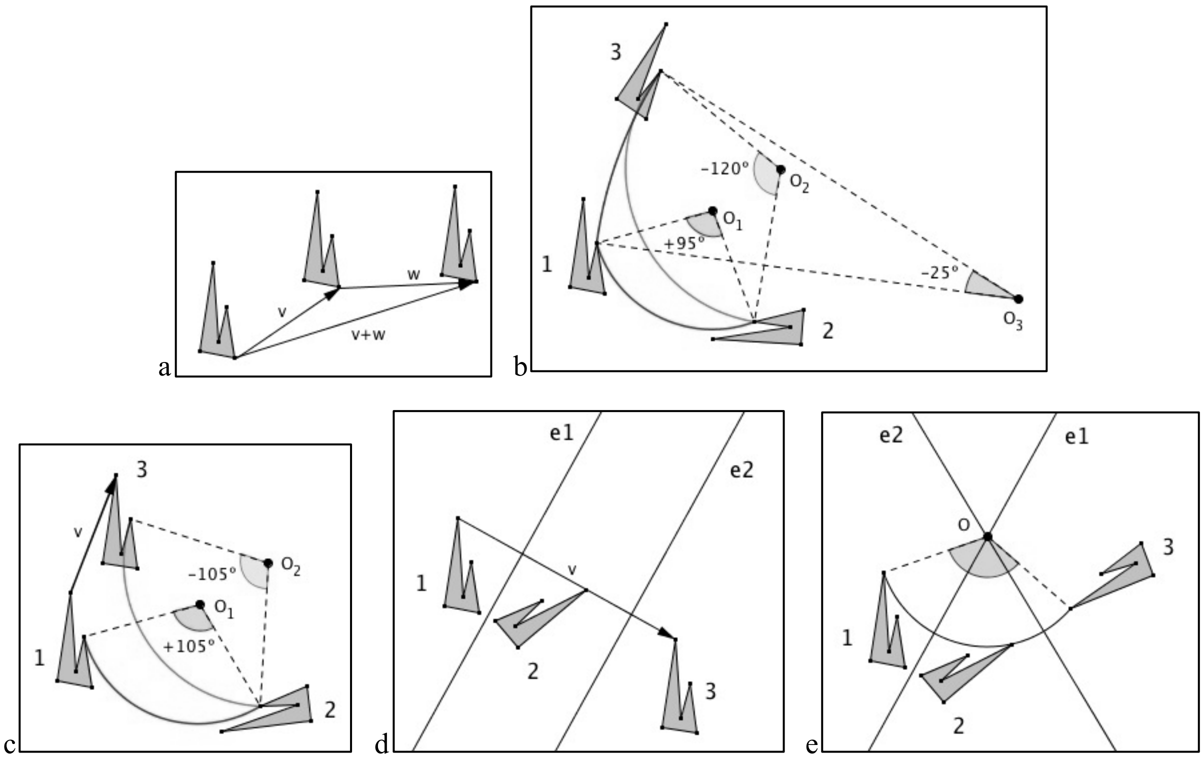
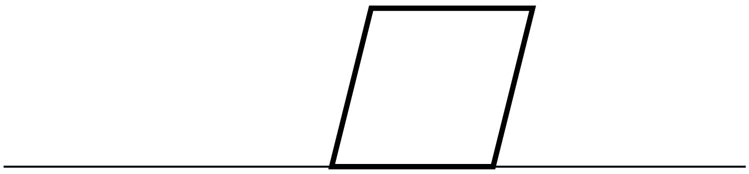


Figura 10.24. Productos de dos traslaciones (a), giros de distinto centro (b, c) y simetrías (d, e).

Actividad 10.18. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Un movimiento aplicado a un triángulo equilátero ABC deja invariante al vértice C, es decir la imagen de C es el propio C. ¿Qué movimiento *puede ser*?

b) Dibuja la figura que resulta al aplicar $S_r \circ G_{O,90^o}$ al rombo dado (siendo r la recta y O el vértice inferior izquierdo del rombo).



c) Considera 2 rectas r y s perpendiculares entre sí, y una recta t paralela a r. Se sabe que r, s y t son rectas dobles por una isometría (esto es, que la imagen de cada una de estas rectas es la misma recta). Halla dicha isometría.

d) El eje de simetría divide a la figura en dos partes iguales. Discute la expresión "toda recta que divide a una figura en dos partes iguales ha de ser un eje de simetría".

e) Representa en un rectángulo la tapa de una mesa de billar. Sitúa dentro dos puntos representando sendas bolas. ¿En qué puntos de dos bandas paralelas de la mesa debe impactar una bola para tocar luego la otra bola?

Actividad 10.19. Atrévete a enfrentarte a los siguientes problemas:

a) ¿Cuántos lados ha de tener, como mínimo, un polígono cóncavo para poseer más de 600 diagonales? Dibuja uno.

b) Clasifica los triángulos según la posición del ortocentro.

c) ¿Cuántos lados tiene el polígono regular cuyo ángulo interior mide 145º?

d) Dibuja un polígono cóncavo cuya suma de ángulos interiores sea 1980.

e) ¿Cuántas diagonales tiene el primer polígono cuyo ángulo interior es mayor de 160º?

f) ¿A partir de qué número de lados el ángulo interior de un polígono regular es mayor de 170º?

g) La plaza mayor de Villa Onuba tiene forma de polígono regular. Se ha adornado para las fiestas con cadenetas que unen todos sus vértices entre sí y han sido necesarias 4 cajas de 15 cadenetas, aunque han sobrado cadenetas de una de ellas. ¿Cuál es la amplitud de los ángulos centrales?

h) Argumenta si es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones:

h.1 La medida del ángulo interior (expresada en grados) de un polígono regular puede ser un número decimal irracional.

h.2 La medida del ángulo interior (expresada en grados) de un polígono regular de 2n lados es el doble de la medida del de n lados.

h.3 Un polígono con un ángulo interior mayor de 240º posee forzosamente más de 197 diagonales.

10.3. Geometría del espacio

El tratamiento que se da a la geometría del espacio en Primaria es casi totalmente descriptivo, centrado en introducir algunas familias de cuerpos espaciales, estudiar sus formas, elementos básicos y desarrollos planos. En esta sección haremos un recorrido más profundo por las principales familias de sólidos (poliedros y cuerpos redondos), recordando y analizando matemáticamente sus definiciones y características más importantes. También definiremos algunas familias de poliedros y plantearemos clasificaciones de estas familias. La fórmula de Euler se puede convertir en una oportunidad para el análisis crítico del concepto de poliedro (Lakatos, 1978), que puede llegar tan lejos como el profesor desee.

10.3.1. Los poliedros

Existe un paralelismo entre los conceptos de polígono en geometría plana, y de poliedro en geometría espacial. Los polígonos se caracterizan por ser figuras bi-dimensionales cerradas y acotadas limitadas por segmentos (uni-dimensionales) que están unidos de dos en dos por sus vértices (cero-dimensionales). Si en la descripción anterior sustituimos loa elementos mencionados por los correspondientes de una dimensión más, obtenemos una caracterización de los poliedros como figuras tri-dimensionales cerradas y acotadas limitadas por polígonos (bi-dimensionales) que están unidos de dos en dos por sus lados (uni-dimensionales).

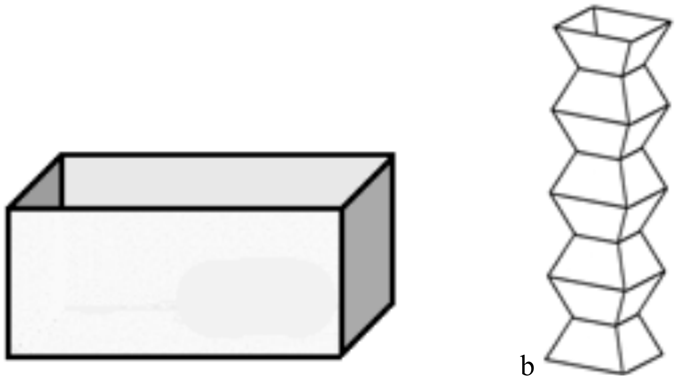
Una definición de poliedro usual en los libros de texto de Primaria es:

Los poliedros son cuerpos geométricos cuyas caras son polígonos.

También podemos encontrar en los libros de texto la siguiente definición:

Los poliedros son cuerpos geométricos que tienen todas sus caras planas (polígonos).

Las dos definiciones anteriores, que son equivalentes, son matemáticamente incorrectas ya que no mencionan que los poliedros deben ser regiones cerradas y acotadas: una caja de zapatos sin tapa (Figura 10.25a) no es un poliedro, aunque sus cinco caras son polígonos, porque no es una región cerrada. Una “chimenea ”formada por una sucesión infinita de troncos de pirámide iguales, conectados como muestra la Figura 10.25b, no es un poliedro, pues los poliedros no pueden contener una región infinitamente grande. No obstante, desde el punto de vista didáctico, como las definiciones anteriores van siempre acompañadas de ejemplos de poliedros, son suficientes para los niños de Primaria.



a b

Figura 10.25. Estos objetos espaciales no son poliedros.

Familias de poliedros

La familia de los poliedros es muy rica y variada, lo cual ha hecho que, desde la época de la geometría griega clásica, los geómetras hayan definido numerosas familias de poliedros importantes por algún motivo. Para estudiar los poliedros, lo mejor es disponer de modelos reales. Existen diversas formas de construir poliedros con materiales fáciles de conseguir y baratos y también hay materiales comerciales específicos. En Requena (2011) se ofrece una descripción de varios de estos materiales.

Las siguientes son algunas de ellas (ver Guillén, 1991, para tener información más detallada sobre estas familias de poliedros):

Prismas: Son poliedros formados por dos caras paralelas (llamadas bases) *que son polígonos congruentes y que están unidas por paralelogramos* (llamados caras laterales). Los prismas se identifican por el número de lados de sus bases: Prisma de base triangular, cuadrangular, etc.

Para que las caras laterales de los prismas sean paralelogramos, es necesario que sus bases estén situadas en la misma posición o, dicho de otra manera, que se pueda pasar de una base a la otra mediante una traslación (Figura 10.26a). Esto permite definir los prismas como *los poliedros generados al trasladar un polígono en una dirección que no coincida con el plano de dicho polígono*.

Los prismas se dividen en rectos y oblicuos. Los prismas rectos son aquéllos en los que todas las caras laterales son rectángulos (Figura 10.26b). Los prismas oblicuos son aquéllos en los que al menos una de las caras laterales no es un rectángulo (Figura 10.26c). Según la segunda definición de prisma, cuando la traslación se realiza en la dirección perpendicular al plano del polígono, se obtiene un prisma recto y, en otro caso, se obtiene un prisma oblicuo.

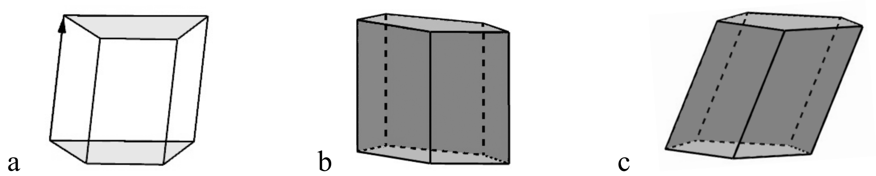


Figura 10.26. Ejemplos de prismas.

Actividad 10.20. La “caja de zapatos” cerrada es un ejemplo de la familia de poliedros llamados paralelepípedos, que están formados por seis paralelogramos. Justifica que los paralelepípedos cumplen las condiciones para ser prismas. ¿Qué tipo de prismas son los paralelepípedos? ¿Qué caras son sus bases? ¿Qué tipo de prisma es el cubo?

Reflexionemos sobre la actividad anterior. Los paralelepípedos son prismas cuyas bases son paralelogramos. Los paralelepípedos cuyas seis caras son paralelogramos no rectangulares son prismas oblicuos, y podemos considerar cualquier par de caras opuestas como las bases. Los paralelepípedos que tienen cuatro caras rectángulos y dos que son paralelogramos no rectangulares se pueden considerar prismas rectos tomando como bases las caras no rectangulares; sin embargo, si tomamos como bases dos caras rectangulares, entonces los consideraremos prismas oblicuos. Los paralelepípedos cuyas seis caras son rectángulos son prismas rectos, y podemos considerar cualquier para de caras opuestas como las bases.

El cubo es un tipo particular de paralelepípedo cuyas seis caras son cuadrados (y por lo tanto, rectángulos), por lo que es un prisma recto.

Antiprismas: Son poliedros formados por dos caras paralelas (llamadas bases) *que son polígonos congruentes y que están unidas por triángulos* (llamados caras laterales). Los antiprismas, igual que los prismas, se identifican por el número de lados de sus bases.

Para que las caras laterales de los antiprismas sean triángulos, es necesario que sus bases no estén situadas en la misma posición sino que una esté girada respeto de la otra (Figura 10.27a). Es interesante realizar la actividad de coger un prisma recto hecho de papel y girar un poco una base respecto de la otra. Se observa que las caras laterales se curvan, por lo que dejan de ser figuras planas y, por lo tanto, el prisma deja de ser un poliedro (Figura 10.27b). La manera más simple de lograr que este sólido no deje de ser poliedro es sustituir los rectángulos curvados por pares de triángulos, con lo que se obtiene un antiprisma.

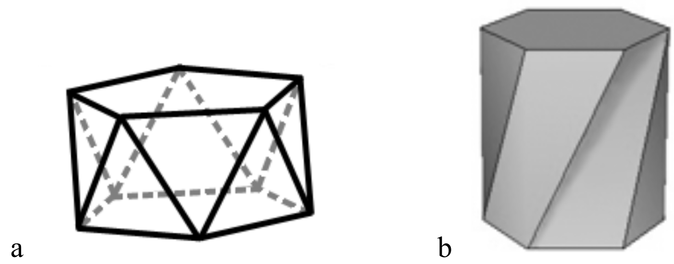


Figura 10.27. Ejemplos de antiprisma y de prisma deformado.

Actividad 10.21. Entra en la web de Proyecto Gauss (2012) y manipula el applet para ver las características de los prismas y los antiprismas y para entender la relación entre ellos. Contesta las preguntas planteadas en esta página.

Pirámides: *Son poliedros formados por una cara que es un polígono cualquiera* (llamada base) *y por triángulos* (llamados caras laterales) *que tienen un vértice común* (llamado vértice o ápice). Las pirámides se identifican por el número de lados y/o la forma de su base, por ejemplo, pirámide hexagonal o pirámide rectangular.

Las pirámides se pueden considerar también como formadas por un polígono cuyos vértices están unidos a un punto exterior al plano del polígono. Esto permite definir las pirámides como *los poliedros generados al unir todos los vértices de un polígono con un punto que no pertenezca al plano de dicho polígono*.

Las pirámides se dividen en rectas y oblicuas. Las pirámides rectas son aquéllas en los que todas las caras laterales son triángulos isósceles (no necesariamente iguales, Figura 10.28a). Las pirámides oblicuas son aquéllas en los que al menos una de las caras laterales no es un triángulo isósceles (Figura 10.28b).

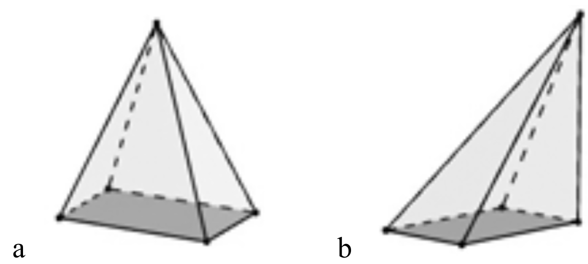


Figura 10.28. Ejemplos de pirámides.

Bipirámides: Son los poliedros formados por la unión de una pirámide y su simétrica respecto al plano de su base, de manera que cada arista de la base de una pirámide coincide con su correspondiente arista de la otra pirámide. La Figura 10.29 muestra un ejemplo.

La segunda definición de pirámides se puede transformar en una definición de las bipirámides como los poliedros generados al unir todos los vértices de un polígono con dos puntos que no pertenezcan al plano del polígono y que sean simétricos respecto de dicho plano.

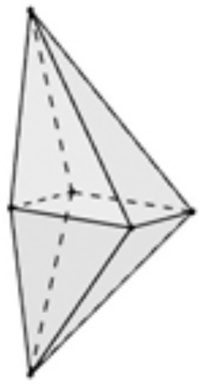


Figura 10.29. Ejemplo de bipirámide.

Poliedros regulares (o platónicos): *Son los poliedros cuyas caras son polígonos regulares congruentes y cuyos ángulos poliedros son iguales*. Para que los ángulos poliedros sean iguales es necesario, y suficiente, que en todos los vértices se junte la misma cantidad de caras, siempre que partamos de que las caras son congruentes.

Los poliedros regulares son los más famosos ya que desde la antigüedad llamaron la atención de matemáticos, astrónomos, filósofos, etc., que descubrieron en ellos propiedades geométricas peculiares y que los tomaron como modelos de la perfección y como referente para entender la estructura del universo.

Resulta sorprendente que, mientras que es posible construir infinitos polígonos regulares, solo pueden formarse cinco poliedros regulares. Este resultado puede demostrarse formalmente como aplicación de la fórmula de Euler (epígrafe 10.3.2). También puede demostrarse de forma más sencilla constructivamente, realizando todas las uniones posibles de polígonos regulares alrededor de un vértice, empezando por el triángulo. Se pueden utilizar polígonos conectables, como los Polydron, o troquelados de cartulina con solapas (Figura 10.30).

La menor cantidad de polígonos que se puede usar para formar un ángulo poliedro es tres. Cuando se unen tres triángulos equiláteros, se obtiene el tetraedro. Con cuatro triángulos alrededor de un vértice se obtiene el octaedro. Con cinco triángulos alrededor de un vértice se obtiene el icosaedro. Con seis triángulos alrededor de un vértice obtenemos una superficie plana, ya que los ángulos de los triángulos alrededor de ese vértice suman 6x60º = 360º, por lo que no se obtiene ningún poliedro. Si unimos siete o más triángulos alrededor de un vértice, se obtienen ángulos poliedros irregulares, por lo que no hay más poliedros regulares formados por triángulos.

Repitiendo el proceso con cuadrados, se observa que, al unir tres cuadrados alrededor de un vértice, se obtiene el cubo. La unión de cuatro cuadrados alrededor de un vértice da una superficie plana, pues sus ángulos suman 4x90º = 360º. Como con los triángulos, la unión de cinco o más cuadrados alrededor de un vértice no puede generar poliedros regulares.

Se pueden unir tres pentágonos regulares alrededor de un vértice, obteniéndose el dodecaedro (Figura 10.30). Al unir cuatro pentágonos regulares, sus ángulos suman 4x108º = 432º, por lo que se obtiene un ángulo poliedro irregular. Unir más de cuatro pentágonos tampoco da lugar a poliedros regulares.

Si unimos tres hexágonos alrededor de un vértice, obtenemos una figura plana, pues sus ángulos suman 3x120º = 360º. Como en casos anteriores, no es posible obtener poliedros regulares uniendo más de tres hexágonos regulares alrededor de un vértice. Tampoco obtenemos resultados positivos uniendo tres o más polígonos regulares de siete ocho, etc. lados por el mismo motivo.

Por lo tanto, sólo es posible construir cinco poliedros regulares.

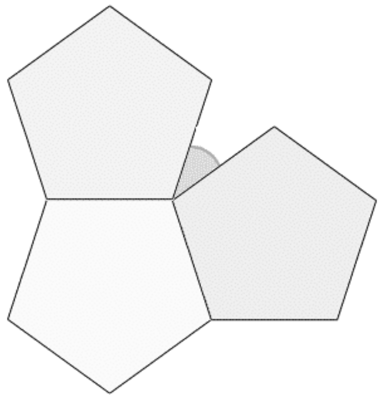


Figura 10.30. Inicio de la construcción del dodecaedro.

Actividad 10.22. Imagina que el espacio se curva y el límite superior para formar poliedros convexos es 420º, en lugar de 360º (suma de ángulos en un vértice). ¿Cuál sería el número de poliedros regulares posibles?

Una propiedad importante de los poliedros regulares es la dualidad: Se llama *dual de un poliedro* al poliedro cuyos vértices están situados en los centros de las caras del primer poliedro. Todos los polígonos regulares, y algunos no regulares como el rectángulo o el rombo, tienen centro, luego los poliedros cuyas caras son estos polígonos tienen dual. Una característica importante de la dualidad es que si construimos el dual de un poliedro y después construimos el dual del dual, obtenemos un poliedro semejante al primero. La Figura 10.31

muestra las relaciones de dualidad de los poliedros regulares: el tetraedro es autodual, el cubo y el octaedro son duales uno del otro y también lo son el icosaedro y el dodecaedro.

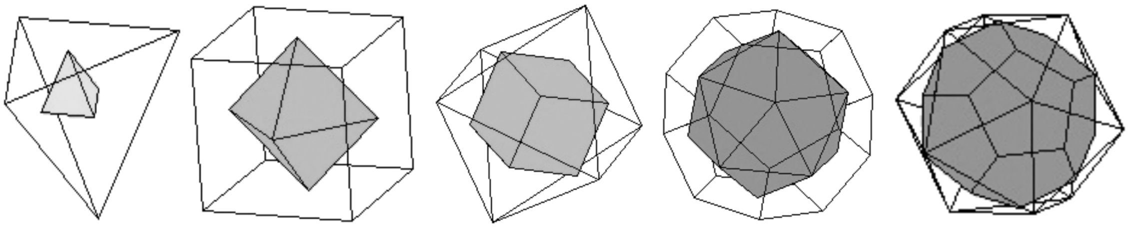


Figura 10.31. Dualidad de los poliedros regulares.

Deltaedros: Son los poliedros cuyas caras son todas triángulos equiláteros. Aunque la definición no lo indica explícitamente, es fácil darse cuenta de que, en un deltaedro, todas las aristas tienen que ser de la misma longitud, por lo que las caras tienen que ser congruentes. Existe una infinidad de deltaedros, pero la mayoría de ellos son poliedros cóncavos. Los deltaedros más interesantes son los convexos, entre los que se encuentran los tres poliedros regulares formados por triángulos. Se puede demostrar que solo hay ocho deltaedros convexos diferentes. La Figura 10.32 muestra los deltaedros convexos no regulares (en Vice-rectorat de la Nouvelle-Calédonie, 2012, hay versiones interactivas de los deltaedros).

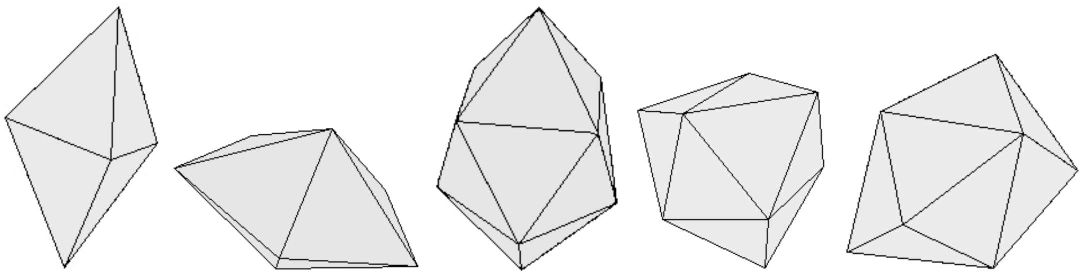
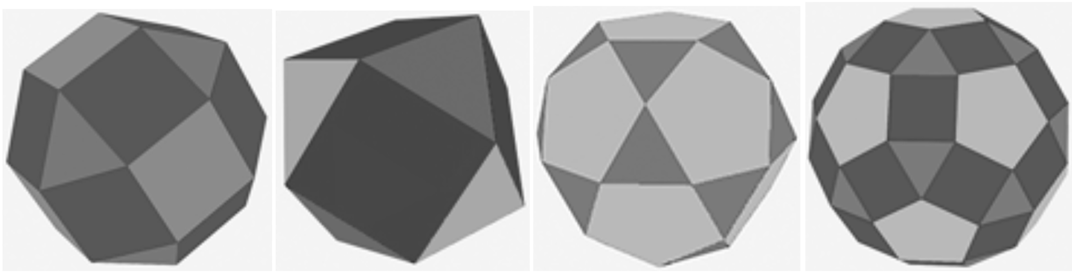


Figura 10.32. Los cinco deltaedros convexos no regulares.

Poliedros arquimedianos: *Son los poliedros convexos que tienen todas sus caras polígonos regulares de dos o más tipos*. La Figura 10.33 muestra algunos de ellos. Obsérvese que esta familia no incluye a los poliedros regulares ni los deltaedros, pues las caras de éstos son todas del mismo tipo de polígonos. Se puede demostrar que hay 13 poliedros arquimedianos, algunos de los cuales se pueden obtener mediante truncamientos de los poliedros regulares.



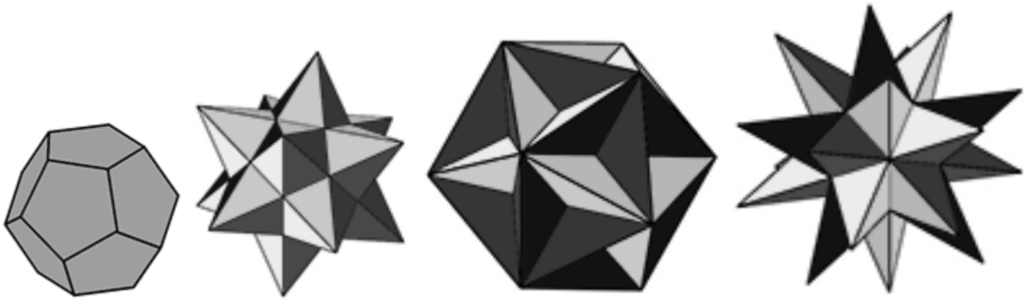
Pequeño Rombicuboctaedro Cuboctaedro Icosidodecaedro PequeñoRombicosidodecaedro

Figura 10.33. Algunos poliedros arquimedianos.

Poliedros estrellados: Son los poliedros obtenidos al prolongar cada una de las caras de un poliedro convexo en el plano que la contiene, para formar un nuevo poliedro.

Existe un paralelismo entre la estructura y características de los polígonos estrellados, estudiados en otra sección de este capítulo, y las de los poliedros estrellados:

- La operación en tres dimensiones equivalente a prolongar los lados de un polígono convexo consiste en prolongar las caras de un poliedro convexo.
- Hay poliedros que no dan lugar a estrellados, por ejemplo el tetraedro y el cubo.
- Es necesario distinguir los poliedros cóncavos con puntas de los poliedros estrellados. Los primeros no cumplen el criterio de construcción por prolongación de caras, sino que son poliedros ordinarios que tienen partes puntiagudas (Guillén, 1991, p. 143).
- Las caras de un poliedro estrellado no son los polígonos que se ven exteriormente, sino que son polígonos, a veces estrellados, que se entrecruzan y que quedan parcialmente en el interior del poliedro. Los polígonos que vemos en un mismo plano son realmente fragmentos del polígono que forma la cara. Para facilitar la observación de los poliedros estrellados es conveniente colorear sus caras de manera que todas las partes visibles de cada cara tengan el mismo color.
- A partir de algunos poliedros solo se genera un poliedro estrellado, pero otros pueden generar varios, dependiendo de cómo se prolonguen las caras. Por ejemplo, (Figura 10.34), el dodecaedro regular genera tres dodecaedros estrellados.



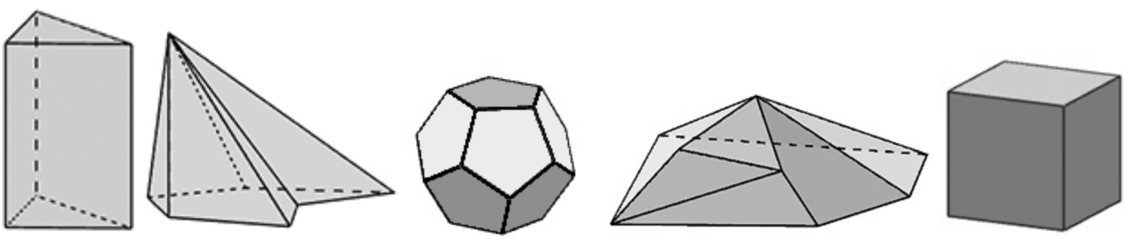
Dodecaedro	Pequeño dodecaedro estrellado	Gran dodecaedro	Gran dodecaedro estrellado

Figura 10.34. Poliedros estrellados generados por el dodecaedro.

10.3.2. La fórmula de Euler

Una actividad interesante con los poliedros es contar la cantidad de caras, vértices y aristas de diferentes modelos. Tanto para los niños de Primaria como para los maestros o futuros maestros, esta actividad ayuda a conocer mejor la estructura de los poliedros y a mejorar las habilidades de visualización mental. La actividad se puede llevar a cabo, dependiendo de las circunstancias particulares, con poliedros reales, con modelos dinámicos en la pantalla del ordenador o, como última y menos aconsejable opción, con modelos dibujados en papel.

Actividad 10.23. Antes de seguir leyendo, cuenta las caras, aristas y vértices de los poliedros mostrados en la Figura 10.35 y completa la tabla incluida en esa figura.



	Nº de Vértices	Nº de caras	Nº de aristas
Prisma triangular			

Figura 10.35. Recuento de elementos de poliedros.

No resulta difícil identificar una relación aritmética entre los datos de las tres columnas de la tabla: La cantidad de vértices más la cantidad de caras es dos unidades mayor que la cantidad de aristas. Sintéticamente esta relación se suele escribir como $V + C = A + 2$ y se denomina *Fórmula de Euler*.

No es conveniente creer en la veracidad general de una relación sólo porque se ha comprobado en cinco casos. Así que es aconsejable buscar más poliedros, diferentes de los anteriores, y comprobar si la fórmula de Euler se verifica en todos ellos.

Actividad 10.24. Antes de seguir leyendo, cuenta las caras, aristas y vértices de los poliedros mostrados en la Figura 10.36 y observa si cumplen la relación de la fórmula de Euler.

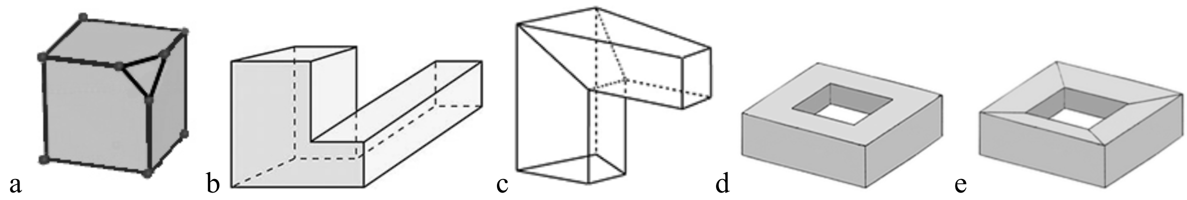


Figura 10.36. Verificación de la fórmula de Euler.

Veamos el recuento de elementos de estos poliedros: (a) V=10, C=7, A=15. (b) V=15, C=10, A=23. (c) V=12, C=10, A=20. (d) V=16, C=10, A=24. (e) V=16, C=16, A=32. En los poliedros (a), (b), (c) y (d) se verifica la fórmula de Euler, pero en el poliedro (e) tenemos que $V + C = A$, luego la fórmula falla en este poliedro. Todos los poliedros convexos (como el a) cumplen la fórmula de Euler (como indica el teorema de Euler), mientras que no todos los poliedros cóncavos la cumplen. Los poliedros que cumplen la fórmula de Euler se denominan *poliedros eulerianos*.

Seguramente algunos lectores habrán hecho un recuento diferente en el poliedro (b), dudando si tiene 21 ó 23 aristas. El elemento conflictivo es el punto azul (Figura 10.37) ya que, dependiendo desde dónde se mire, puede considerarse o no un vértice. Las dos caras vertical (verde) y horizontal (rosa) que tienen cada una de las aristas rojas completas son rectángulos, con 4 aristas y 4 vértices, luego el punto azul no hace falta que sea vértice. Por otra parte, la cara pequeña (amarilla) que toca ambas aristas rojas es un cuadrilátero, uno de sus vértices tiene que ser el punto azul y dos aristas son *parte* de los segmentos rojos. Pero, si el punto azul es un vértice, entonces las dos caras rectangulares que mencionábamos ¿son realmente pentágonos que tienen dos lados consecutivos alineados?

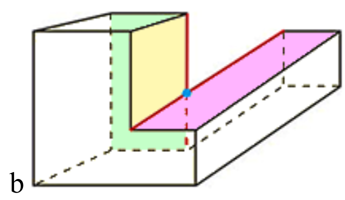


Figura 10.37. Análisis de sólidos en relación con la fórmula de Euler.

Es probable que el poliedro (d) (Figura 10.36) haya llamado también la atención a algunos lectores. ¿El "marco" que forma sus bases es realmente un polígono? Si aplicamos la definición escolar de polígono (región del plano rodeada por una línea poligonal cerrada), el marco no es un polígono, pues está limitado por dos poligonales separadas. Pero, si estas caras no son polígonos, entonces ¿el sólido (d) no es un poliedro? A pesar de todo, este sólido sí verifica la fórmula de Euler, aunque la sorpresa llega cuando vemos que el poliedro (e) (Figura 10.36) no la verifica. Este está formado por caras que, sin lugar a dudas, son polígonos (rectángulos y trapecios), por lo que ahora no hay duda en considerar el sólido (e) como un poliedro, ya que es una parte del espacio cerrada, acotada y limitada por polígonos. Pero, ¿por qué no verifica la fórmula de Euler? ¿Un poliedro con agujero?

Para cerrar esta sección, sólo nos queda decir que las posibles respuestas a las preguntas y dudas anteriores abren un mundo de exploración, análisis y discusión en el que nada es absolutamente cierto, sino que depende del punto de vista adoptado, es decir de qué definiciones de polígono y poliedro se consideren. Podemos plantearnos la necesidad de mejorar las definiciones de polígono y poliedro para expulsar de la familia aquellos sólidos que no verifiquen la fórmula de Euler. O, también, podemos mantener las definiciones actuales y plantearnos identificar las características diferenciadoras de los poliedros (¿y los no poliedros?) que sí o no cumplen la fórmula. El desarrollo de esta discusión está perfectamente analizado en Lakatos (1978).

Actividad 10. 25.

a) Describe y dibuja un poliedro euleriano cóncavo que tenga el mismo número de caras, vértices y aristas que un icosaedro.

b) Describe y dibuja un poliedro no euleriano que tenga el mismo número de caras que un icosaedro, así como el mismo número de vértices o bien de aristas.

10.3.3. Los cuerpos redondos

En los primeros cursos de Primaria se estudian algunos miembros de la familia de los "cuerpos redondos", llamada así porque la principal característica de sus integrantes es que tienen caras no planas. Los más conocidos son el cono, el cilindro y la esfera. No es necesario dedicar espacio a justificar la enorme utilidad de estas tres formas espaciales en la vida diaria. Observando libros de texto de los distintos cursos de Educación Primaria de varias editoriales, nos encontramos con una diversidad de enfoques y definiciones. Nuestro objetivo aquí es reunir estas formas de definir los cuerpos redondos para hacer un análisis matemático y didáctico de las mismas.

Las definiciones de los cuerpos redondos que encontramos en los libros de texto de los primeros cursos de Primaria son similares a éstas:

1. *El cilindro es un cuerpo geométrico formado por dos bases circulares y una superficie lateral curva.*
2. *El cono es un cuerpo geométrico formado por una base circular y una superficie lateral curva.*
3. *La esfera tiene toda su superficie curva.*

Estas definiciones no resisten el mínimo análisis matemático: los lectores pueden dedicar unos minutos a dibujar cuerpos espaciales que cumplen los requisitos de las definiciones pero que, visualmente, son muy diferentes de los conos, cilindros o esferas. Pero el objetivo de los autores de estas definiciones no ha sido lograr la perfección matemática, sino adoptar el punto de vista, didácticamente correcto, de ofrecer unas definiciones descriptivas adecuadas al primer nivel de razonamiento de Van Hiele (ver el capítulo 7), típico de los estudiantes de los primeros cursos de Primaria, haciendo énfasis en los elementos característicos de cada sólido.

Se produce un cambio significativo en algunos libros de texto de los últimos cursos de Primaria, en los que vemos que se habla de los "cuerpos de revolución" para referirse a los cuerpos redondos. Así, por ejemplo, se puede explicar que *los cuerpos de revolución son cuerpos geométricos que se obtienen al hacer girar una figura plana alrededor de un eje* y, a continuación, se pueden ofrecer definiciones como las siguientes:

4. *El cilindro se obtiene haciendo girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados.*
5. *El cono se obtiene haciendo girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus* catetos.
6. *La esfera se obtiene girando un semicírculo alrededor de su diámetro.*

Ahora nos encontramos con definiciones que, por una parte, son matemáticamente correctas y, por otra parte, son fáciles de entender por estudiantes que, típicamente, ya están en condiciones de razonar según el segundo nivel de Van Hiele y, por tanto, pueden realizar y entender experimentos manipulativos para poner en práctica esas definiciones: Basta sujetar las correspondientes figuras geométricas a una varilla y hacerlas girar rápidamente para que el cilindro, el cono o la esfera surjan en las manos de los niños.

Otros libros de texto optan por mantener las definiciones descriptivas, pero incrementando algo su precisión matemática. Por ejemplo, en 5º de Primaria podrían darse las siguientes definiciones:

7. *Un cilindro es un cuerpo redondo formado por dos círculos paralelos e iguales que son sus bases, y por una superficie lateral curva.*
8. *Un cono es un cuerpo redondo formado por una base circular y una superficie lateral curva.*
9. *Una esfera es un cuerpo redondo sin caras, formado por una sola superficie curva.*

Actividad 10.26. Antes de seguir leyendo, compara las definiciones 4-6 y las 7-9. ¿Son equivalentes? Dicho de otra forma ¿hay sólidos que son cilindros, conos o esferas según unas definiciones pero no lo son según las otras?

Las definiciones 7 a 9 siguen teniendo parte de las deficiencias matemáticas de sus antecesoras, las definiciones 1 a 3: La definición 7 es más exacta que la definición 1 porque aclara que las dos bases deben ser círculos iguales y paralelos. En las definiciones de cilindro y cono no se dice cómo tiene que ser la superficie curva, podría ser irregular, con abultamientos o huecos. En la definición de cono no se dice que la superficie curva deba terminar en un punto. La definición 9 sirve también para una pelota de rugby. Sin embargo, sigue siendo válido el comentario hecho a propósito de las definiciones 1 a 4 sobre su intención didáctica.

Desde el punto de vista visual, está claro el parecido entre prismas y cilindros y entre pirámides y conos. Esta relación visual nos debería llevar a pensar que, igual que hay prismas y pirámides rectos y oblicuos, podría haber cilindros y conos rectos y oblicuos; dibujarlos no tiene ninguna dificultad (Figura 10.38).

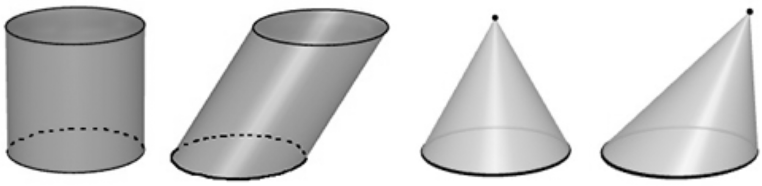


Figura 10.38. Cilindros y conos rectos y oblicuos.

Las definiciones 4 y 5 no admiten los cilindros o conos oblicuos, pues éstos no se pueden generar por un rectángulo o un triángulo rectángulo. Pero, podemos intentar obtenerlo modificando las definiciones 4 y 5: ¿se obtiene un cilindro oblicuo al hacer girar un paralelogramo no rectangular alrededor de uno de sus lados? ¿se obtiene un cono oblicuo al hacer girar un triángulo no rectángulo alrededor de uno de sus lados?

La Figura 10.39 muestra que la respuesta es negativa en ambos casos.

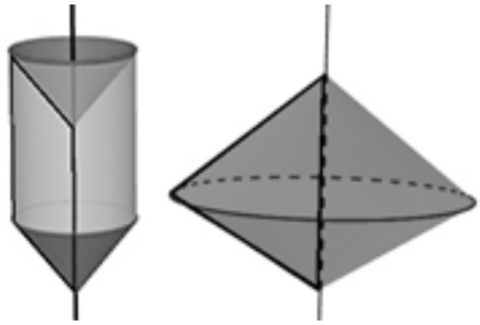


Figura 10.39. Sólidos generados por un paralelogramo y un triángulo no rectángulo.

Se puede pensar que una manera de construir cilindros oblicuos es usar la técnica de los embutidos, es decir cortando oblicuamente un cilindro recto. O, de manera similar, construir un cono oblicuo cortando oblicuamente un cono recto. Sin embargo, esta estrategia no es correcta porque, después de haber hecho los cortes, descubriremos que la base de estos sólidos no es un círculo, sino una elipse.

Para saber más

Clemens, S.R.; O'Daffer, P.G.; Cooney, T.J., *Geometría: con aplicaciones y solución de problemas*, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington (EEUU), 1989.
Guillén, G., *El mundo de los poliedros*, Síntesis, Madrid, 1991.
Jaime, A.; Gutiérrez, A., *El grupo de las isometrías del plano*, Síntesis, Madrid, 1996.