

9. La Visualización en la Geometría de la Educación Primaria

Angel Gutiérrez y Adela Jaime. Dpto. de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia (Valencia, España).

Una de las características de la metodología de enseñanza en Primaria es la necesidad de evitar la abstracción presentando a los estudiantes los contenidos apoyados con actividades prácticas y elementos visuales y manipulativos. Este principio general tiene la máxima importancia en la asignatura de matemáticas y los libros de texto lo aplican de manera sistemática, ya que, para todos los contenidos curriculares desde el primer hasta el último curso de Primaria, presentan la información acompañada de dibujos, fotografías, etc. y proponen realizar actividades prácticas para introducir o afianzar los conocimientos que se están estudiando.

En el contexto de la enseñanza de la geometría, este principio metodológico cobra, si cabe, mayor importancia, pues la geometría es la rama de las matemáticas que estudia las características y propiedades de los objetos planos y espaciales. Por lo tanto, la actividad en las clases de geometría de Primaria necesariamente tiene que basarse en el análisis de tales objetos, el cual se puede hacer mediante acciones de observación (de figuras, fotografías u objetos reales), manipulación o construcción (de objetos reales o virtuales en la pantalla de un ordenador) y dibujo (de representaciones planas de esos objetos).

Al enseñar a los niños de Primaria a leer, los profesores prestan atención a si los estudiantes entienden o no lo que están leyendo, siendo la lectura comprensiva un objetivo explícito de enseñanza en este nivel educativo. Sin embargo, los autores de libros de texto y profesores de Primaria suelen ser menos conscientes de que, en las clases de geometría, los estudiantes tienen que aprender a “leer” los objetos geométricos reales, tanto planos como espaciales, y sus representaciones dibujadas. Cuando los estudiantes están leyendo un texto,

encuentran palabras que tienen varios significados y deben deducir cuál es el significado apropiado en ese momento, que depende del contexto. Del mismo modo, en clase de geometría, los estudiantes encuentran figuras que pueden tener varios significados, pues pueden representar diferentes objetos, y deben aprender a identificar el correcto; por ejemplo, en los libros de texto encontramos actividades en las que se pregunta cuántos cubos hay en torres similares a las de la Figura 9.1. Piensa una respuesta antes de seguir leyendo.

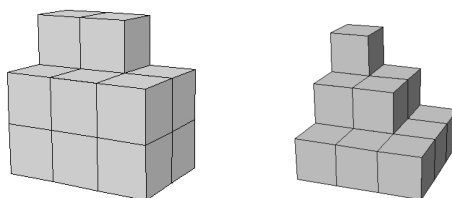


Figura 9.1. ¿Cuántos cubos hay en cada torre?

La mayoría de lectores, para contar, se han imaginado la forma que tienen las partes que quedan ocultas en cada torre de cubos. Si nos basamos sólo en la información que transmiten las figuras de las torres, la pregunta puede tener varias respuestas, pues no hay manera de saber cuántos cubos quedan ocultos en cada torre, si todos los cubos son iguales o si hay huecos. Los lectores que han calculado que cada torre tiene 14 cubos (que es la respuesta dada por el libro de texto) han supuesto que la parte de cada torre que no se ve está bien ordenada, de manera que debajo de los cubos visibles hay cubos iguales bien alineados, sin huecos, y que no hay más cubos fuera de las columnas que se ven en las figuras. Si se tratara de una situación real, podríamos dar una vuelta alrededor de las torres, o levantar algún cubo para ver qué hay debajo, y contar con certeza la cantidad de cubos. Pero, al tratarse de un dibujo, tenemos que añadir información por nuestra cuenta para encontrar una respuesta razonable; en este caso, la información añadida es que los cubos están bien apilados y que las paredes ocultas de las torres son planas, sin escalones.

En este capítulo vamos a estudiar la problemática del análisis visual de las representaciones de objetos geométricos, planos y espaciales. Presentamos un recorrido por diversos componentes de la visualización, tanto cognitivos como prácticos, que influyen tanto en la manera en cómo los estudiantes de Primaria observan, imaginan y analizan figuras u objetos en las clases de geometría, como en las conclusiones que obtienen a partir de dicho análisis. La importancia de la visualización y la imaginación espacial en el aprendizaje de la geometría se debe a que su uso deficiente tiene como consecuencia dificultades para percibir

y comprender las estructuras geométricas y para entender y aprender los conceptos y propiedades geométricos que poseen esas estructuras.

En primer lugar, hacemos un recorrido por los elementos teóricos que permiten analizar y entender el uso de la visualización por los estudiantes de matemáticas. Después presentaremos varias propuestas de actividades de clase cuyo objetivo común es ayudar a los estudiantes de Primaria a desarrollar adecuadamente sus destrezas de visualización e imaginación espacial.

9.1. Una aproximación a los componentes de la visualización en geometría

Siguiendo a Gutiérrez (1996: 9), entendemos por *visualización*, o razonamiento visual, al tipo de razonamiento matemático basado en el uso de elementos visuales o espaciales, tanto mentales como físicos, realizado para comprender y aprender conceptos o propiedades y para resolver problemas (de geometría).

Según lo estudiado en el capítulo 8, en los estudiantes de Primaria, y también en la mayoría de adultos, las imágenes conceptuales dominan sobre sus definiciones conceptuales. Así, al leer la palabra *pirámide* y pararse a pensar en ella un momento (hazlo ahora, antes de seguir leyendo), la mayoría de lectores han reaccionado representando en su mente la figura de una pirámide. En el momento en que ocurre esto, empieza a operar el razonamiento visual.

La resolución de un problema de geometría empieza leyendo el enunciado. Durante la lectura, o inmediatamente después, los estudiantes tratan de entender el significado del enunciado, qué datos se dan y qué se pide. Para ello, la mayoría de estudiantes hacen dibujos en los que representan la información geométrica y de los que obtienen nuevos datos o ideas para avanzar en la resolución. Esta actividad pone en marcha unos procesos cognitivos que regulan las interacciones de los estudiantes con el mundo exterior, en las cuales juega un papel fundamental la representación gráfica de la información, física y mentalmente. En estos procesos, son partes fundamentales la generación de imágenes mentales que representan las figuras o relaciones geométricas del problema y el uso de esas imágenes para avanzar en la resolución. La mayor o menor eficacia de un estudiante resolviendo problemas de geometría está estrechamente relacionada con la complejidad de su actividad de visualización y con su destreza en el uso de determinadas habilidades de visualización, que se pueden aprender y desarrollar con la práctica.

La resolución de problemas de geometría también incluye procesos mentales relacionados con información de tipo verbal (escuchar lo que dice el profesor, recordar una definición o

fórmula, explicar, oralmente o por escrito, cómo se ha encontrado un resultado, etc.), pero en este capítulo nos centramos solamente en analizar el manejo de la información gráfica.

La función principal del razonamiento visual es ayudar a resolver problemas estableciendo relaciones adecuadas entre representaciones visuales mentales y representaciones externas (gráficas o verbales). Para ello, es necesario que intervengan los tres elementos principales que integran la visualización: *procesos* de visualización, *imágenes* mentales y *habilidades* de visualización.

9.1.1. Los procesos de visualización

Los procesos de visualización se encargan de regular y gestionar la conexión entre la información externa que percibe el estudiante y la información gráfica interna que genera como consecuencia de su actividad mental (Figura 9.2). Simplificando el contexto, la información externa puede ser de tipo gráfico (esquemas, figuras, objetos reales o virtuales, etc.) o verbal (texto escrito, información oral, etc.). En geometría, ambos tipos de información se pueden convertir en información gráfica, en particular en representaciones gráficas mentales.



Figura 9.2. Conexiones entre representaciones externas y representaciones visuales internas.

La conexión entre las representaciones externas y las visuales internas es bidireccional, por lo que hay dos procesos que la gestionan, uno inverso del otro, que son (Bishop, 1989; Gutiérrez, 1992):

- *Procesamiento visual de la información*: Es el proceso que convierte información abstracta o no figurativa en imágenes mentales y que convierte unas imágenes mentales ya formadas en otras diferentes.

Este proceso, por ejemplo, convierte (Figura 9.3) la primera parte del enunciado de un problema de geometría que está siendo leído por un estudiante en una imagen mental que representa la información leída. Cuando el estudiante ha terminado de leer el texto, este proceso también convierte su primera imagen mental en otra imagen más detallada que representa el enunciado completo.

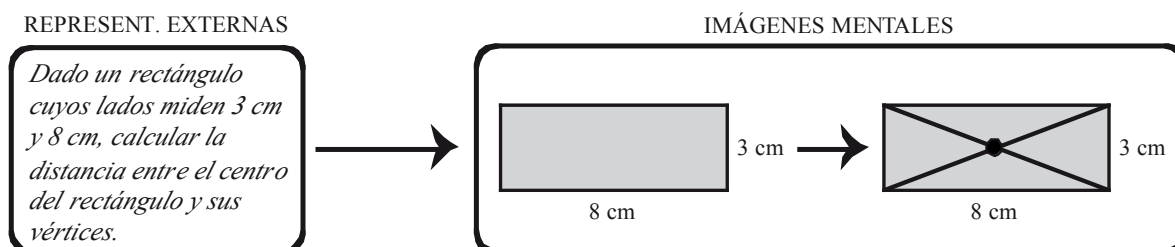


Figura 9.3. Imágenes mentales inducidas al leer el enunciado de un problema.

- *Interpretación de información figurativa:* Es el proceso que permite analizar una imagen mental y extraer información de ella. Esta información puede expresarse tanto externamente como internamente, en particular mediante una nueva imagen mental.

Siguiendo con el problema del rectángulo, nuestro estudiante convierte (Figura 9.4) su segunda imagen mental en un dibujo en papel y, a continuación, en una nueva imagen mental que le ayuda a identificar el proceso de resolución, cosa que hace mediante cálculos apropiados en papel.

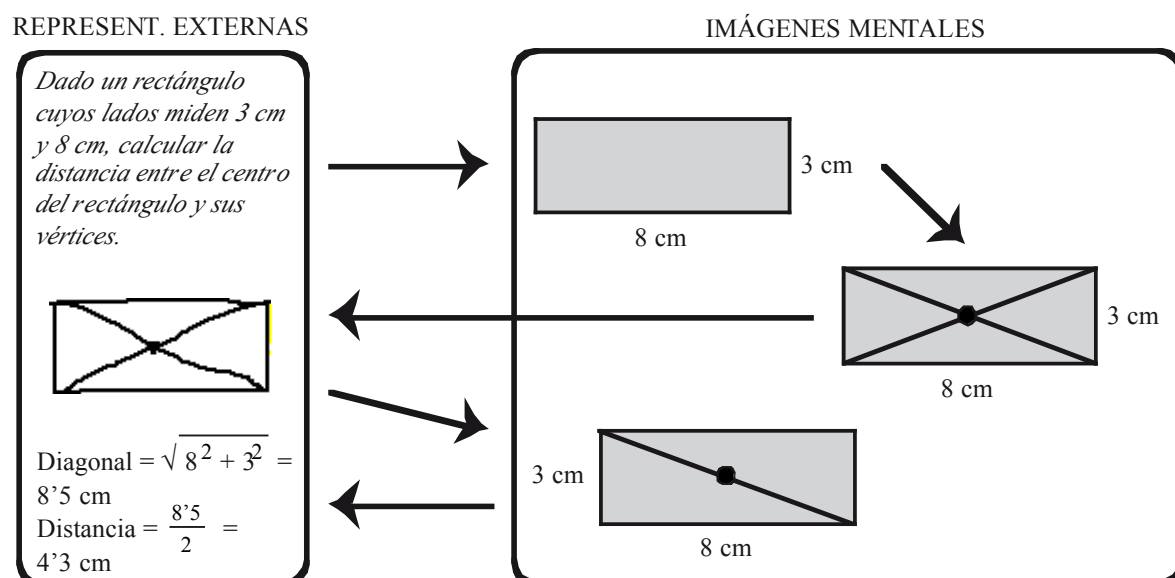


Figura 9.4. Dado un rectángulo cuyos lados miden 3 cm y 8 cm, calcular la distancia entre el centro del rectángulo y sus vértices.

La Figura 9.5 muestra un modelo (adaptado de Gutiérrez, 1996) que esquematiza las posibles relaciones entre las representaciones externas y las imágenes mentales gestionadas por los dos procesos de visualización durante la resolución de un problema de geometría: Al leer el enunciado de un problema de geometría, el estudiante puede crear una imagen mental (P.V.I.) que represente la información leída (o parte de ella). Después, puede utilizar esta imagen de varias formas (I.I.F.), analizándola y transformándola en otra imagen mental o en

una producción externa en forma de dibujo, texto, operaciones, etc. Este proceso de formación de imágenes y de análisis, transformación y generación de información se puede repetir varias veces hasta que, finalmente, el estudiante da el problema por resuelto.

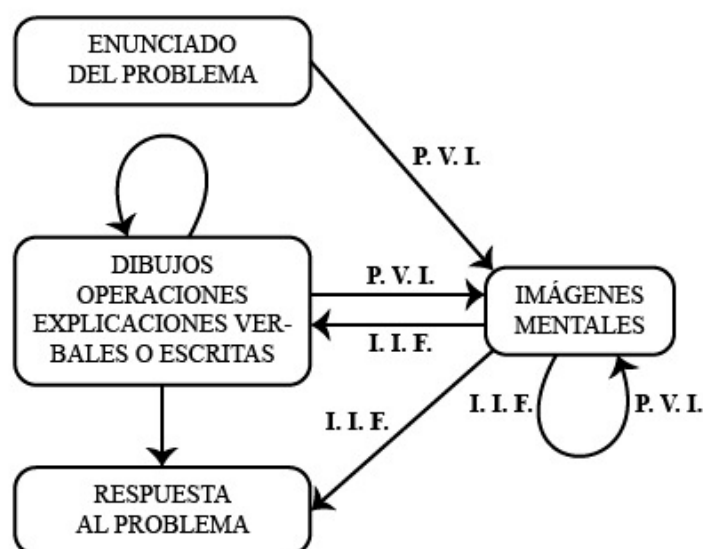


Figura 9.5. Relaciones entre representaciones externas e imágenes mentales mediante los procesos de procesamiento visual de la información (P.V.I.) e interpretación de información figurativa (I.I.F.).

9.1.2. Las imágenes mentales

Hemos visto en los párrafos anteriores que el elemento central de las actividades de visualización son las imágenes mentales, es decir las imágenes que cualquier persona crea en su mente cuando quiere representar mentalmente de forma gráfica determinada información. Presmeg (1986) identificó diversos tipos de imágenes mentales que se forman cuando los estudiantes, de cualquier nivel educativo, trabajan con contenidos geométricos:

- *Imágenes pictóricas*: Son imágenes figurativas de objetos físicos de cualquier tipo, que los representan con fidelidad y realismo. Son como imágenes fotográficas de objetos tal como los recordamos después de haberlos manipulado o visto. Igual que podemos visualizar fielmente la cara de una persona conocida, también podemos visualizar fielmente objetos geométricos conocidos, tanto planos como espaciales.
- *Imágenes de fórmulas*: Son imágenes que reproducen fórmulas u otros tipos de información matemática mostrándolas como se ven en sitios tales como el libro de texto o los apuntes (Figura 9.6). A pesar de su nombre, este tipo de imágenes incluye también representaciones de fragmentos de texto, diagramas, dibujos, etc.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

Figura 9.6. Imagen de una fórmula relacionada con la proporcionalidad.

Todos tenemos la experiencia de recordar el contenido de una definición, fórmula, figura, etc. porque visualizamos dónde está ubicada en nuestro material de estudio y también detalles como su tamaño, color, si hay un subrayado, etc. Estos elementos secundarios ayudan a recordar el elemento principal.

- *Imágenes de patrones:* Son imágenes que representan visualmente relaciones abstractas. A diferencia de los tipos anteriores de imágenes, en este caso lo que el estudiante visualiza no es un objeto concreto o un fragmento de texto, sino una representación visual de su significado. Por ejemplo, un estudiante que está estudiando giros en el plano puede visualizar el concepto de giro mediante una imagen que represente el movimiento circular de forma abstracta (Figura 9.7), es decir, sin que estén presentes explícitamente elementos como el centro o el ángulo de giro.

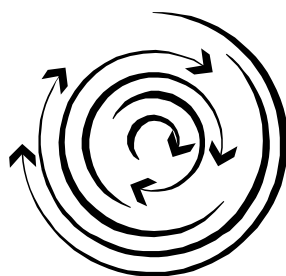


Figura 9.7. Imagen de un patrón de giro.

- *Imágenes cinéticas:* Son imágenes parcialmente mentales y parcialmente físicas, pues combinan la imaginación espacial con acciones que refuerzan o representan la imagen creada en la mente.

Actividad 9.1. Explica a otra persona que esté contigo cómo se sale del edificio desde el lugar donde estás.

¿Has movido las manos para indicar las direcciones o los giros del camino que hay que seguir? Una situación típica en la que se usan imágenes cinéticas es la de explicar cómo se va a cierto lugar.

Otra situación típica, ésta en el contexto de una clase de geometría, es la de un

estudiante o profesor describiendo cómo es físicamente un determinado poliedro, por ejemplo una pirámide. Esta descripción está basada en la imagen mental (pictórica) que se ha formado de la pirámide que, en ciertos momentos, se refuerza con movimientos de las manos, por ejemplo al referirse al vértice de la pirámide.

- *Imágenes dinámicas*: Son imágenes totalmente mentales, pero que representan objetos en movimiento dentro de nuestra mente.

Actividad 9.2. Imagina un cono y detente unos segundos a fijarte en la posición del cono en tu imagen mental (hazlo ahora, antes de seguir leyendo). Lo normal es que lo hayas visualizado con la base horizontal debajo y el vértice arriba. Ahora visualiza el cono girando poco a poco hasta colocarse con el vértice debajo, como un cucurucho de helado. Si lo logras, has creado una imagen dinámica.

Los estudiantes y profesores de Primaria utilizan todos los tipos de imágenes durante las clases de geometría. Probablemente las imágenes más frecuentes son las pictóricas, aunque las cinéticas son también muy frecuentes en las clases de geometría espacial. Las imágenes dinámicas son muy importantes en geometría, tanto plana como espacial, pues son la base para resolver cualquier problema en el que haya que hacer movimientos o transformaciones de objetos, especialmente si se usa una aplicación de geometría dinámica.

9.1.3. Las habilidades de visualización

Hemos analizado los procesos de visualización y las imágenes mentales, es decir las acciones mentales necesarias para resolver un problema y los objetos mentales con los que hay que llevar a término las acciones. Falta reflexionar sobre cómo utilizar los objetos para realizar las acciones adecuadas, es decir qué habilidades son necesarias para llevar a cabo esas acciones. La Figura 9.8 completa el esquema que mostrábamos en la Figura 9.2 incorporando este nuevo elemento y conectándolo con los demás.

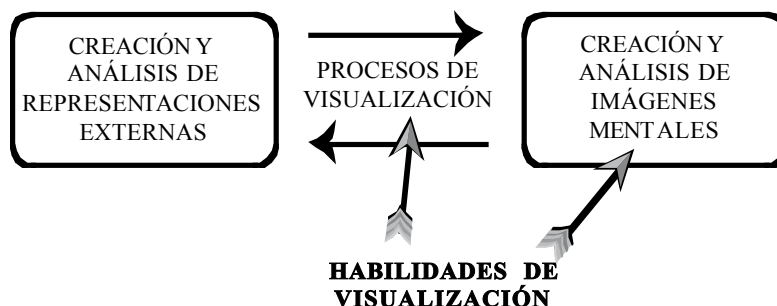


Figura 9.8. Conexiones entre procesos, imágenes y habilidades de visualización.

Para entender mejor la función de los procesos de visualización, de las imágenes mentales y de las habilidades de visualización, podemos usar la metáfora de una carpintería, en la que un aprendiz debe construir una caja. Tiene clavos, piezas de madera y un martillo: los procesos que debe realizar son poner y quitar clavos para unir o separar piezas de madera (que equivalen a los procesos de visualización). Los objetos que se manipulan son las piezas de madera y los clavos (que equivalen a las imágenes mentales). El aprendiz sabe que tiene que elegir las piezas de madera adecuadas y clavar varios clavos para fijar unas a otras. Pero saber lo que tiene que hacer no es suficiente para terminar con éxito la caja (es decir, para resolver el problema de geometría planteado). Debe saber dónde poner los clavos y cómo usar el martillo para clavarlos sin que se doblen ni entren en la madera en una dirección incorrecta, para lo cual debe adquirir habilidades como las de sujetar el clavo, coger el martillo, mover el brazo en la dirección adecuada, etc. Para adquirir estas habilidades, el aprendiz puede leer un manual, pero, sobre todo, tiene que practicar lo que dice el manual.

Del mismo modo, para poder realizar correctamente los procesos de visualización y poder crear, analizar y transformar imágenes mentales adecuadas, los estudiantes deben adquirir determinadas habilidades de visualización, cosa que no lograrán sólo escuchando a su profesor, sino mediante una práctica adecuada en la realización de actividades geométricas.

Existen numerosas habilidades que influyen en el perfeccionamiento de las capacidades de visualización de los niños de Primaria. Siguiendo a Del Grande (1990), algunas son habilidades de tipo fisiológico o de carácter general, como la *coordinación motriz de los ojos*, la *conservación de la percepción* o la *memoria visual*. En este texto nos centramos en describir las habilidades más específicamente relacionadas con el uso de la visualización para resolver problemas de geometría. Estas habilidades son (Del Grande, 1990):

- *Identificación visual*: Es la habilidad que permite identificar estructuras o propiedades geométricas ocultas en contextos visualmente complejos.

Por ejemplo, no es igual de fácil identificar las caras de todos los dodecaedros representados en la Figura 9.9. El dodecaedro *a* es el más fácil, debido a que es opaco, mientras que los demás son transparentes. Para identificar una cara en los dodecaedros *b* a *d*, es necesario fijarse sólo en algunos de los segmentos que se entrecruzan e ignorar otros, para lo cual hace falta desarrollar la habilidad de identificación visual. En el dodecaedro *b*, las aristas del fondo están trazadas con líneas discontinuas, lo cual facilita un poco la identificación de las caras, cosa que no ocurre en los casos *c* y *d*.

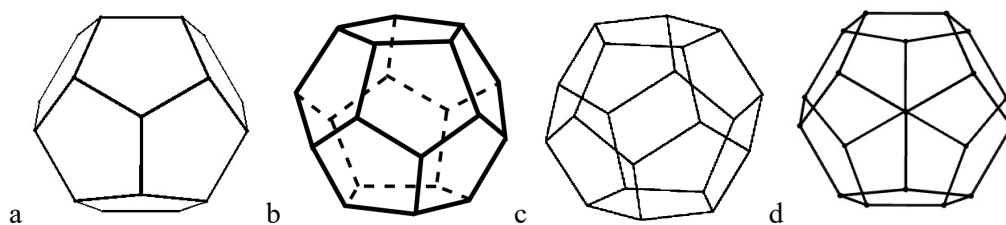


Figura 9.9. Uso de la habilidad de identificación visual para diferenciar las caras.

Actividad 9.3. En la Figura 9.9 hay dos dodecaedros colocados en la misma posición. Antes de seguir leyendo, ¿cuáles son?

Los dodecaedros que están en la misma posición son *a* y *d*. Para verlo es necesario usar la habilidad de identificación visual, para aislar en los dodecaedros *b* a *d* los segmentos que forman las caras del frente y darse cuenta de que sólo en el sólido *d* coinciden exactamente con las caras visibles del *a*.

- *Reconocimiento de posiciones en el espacio:* Es la habilidad para relacionar las posiciones de diversos objetos (en el plano o en el espacio) con un punto de referencia fijo, que generalmente, sobre todo en Primaria, es el propio estudiante.

Esta habilidad está relacionada con la orientación y es necesaria para describir las posiciones de objetos geométricos, o de sus elementos, en una hoja de papel o en el espacio. Indicaciones como “está a la derecha”, “está más lejos”, “es vertical”, etc. aluden siempre a un determinado punto de vista, que suele ser el de quien las hace.

Por ejemplo, un estudiante de Primaria que tenga que describir el sólido de la Figura 9.10 dirá que hay 5 cubitos sobre la mesa y que encima del cubito de la izquierda hay otro. Si un compañero suyo está sentado frente a él, para el segundo estudiante, el último cubito está encima del cubito de la derecha, por lo que las referencias del primer estudiante sólo son válidas si el segundo estudiante tiene suficientemente desarrollada la habilidad de reconocimiento de posiciones en el espacio y puede asumir el punto de vista del primer estudiante. Esta situación se da con mucha frecuencia en las aulas cuando el profesor alude a objetos situados “a la derecha” o “a la izquierda” (es decir, a *su* derecha e izquierda), pero la orientación desde la posición de sus alumnos es la contraria.

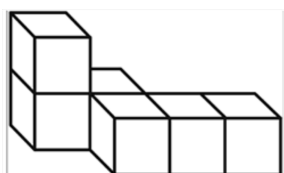


Figura 9.10. Uso de la habilidad de reconocimiento de posiciones en el espacio.

- *Reconocimiento de relaciones espaciales*: Es la habilidad para caracterizar las posiciones de unos objetos respecto de otros (en el plano o en el espacio) mediante relaciones internas y directas, sin utilizar ningún punto de referencia externo.

Por ejemplo, la Figura 9.11 muestra la respuesta de un estudiante que debía dibujar todos los desarrollos planos diferentes del cubo. Para asegurarse de que la solución es correcta, el estudiante debe identificar posibles repeticiones, si ha dibujado un desarrollo varias veces en posiciones diferentes, comparando unos desarrollos con otros para saber si son el mismo o no. Es necesario utilizar eficazmente la habilidad de reconocimiento de relaciones espaciales, junto con imágenes dinámicas, para darse cuenta de que entre los desarrollos dibujados hay repeticiones: Los desarrollos 1 y 3 son el mismo y los desarrollos 2 y 6 también son el mismo.

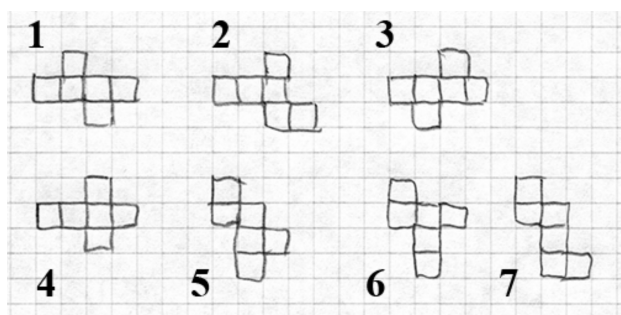


Figura 9.11. Uso de la habilidad de reconocimiento de relaciones espaciales.

Las habilidades de reconocimiento de relaciones espaciales y de reconocimiento de posiciones en el espacio analizan y describen las posiciones de objetos para mostrar relaciones entre ellos. La diferencia principal entre ambas habilidades es que el reconocimiento de posiciones se centra en relacionar indirectamente unos objetos con otros relacionando cada objeto con un punto de referencia externo y común a todos, mientras que la habilidad de reconocimiento de relaciones se centra en relacionar directamente unos objetos con otros, sin recurrir al punto de referencia externo.

Actividad 9.4. Buscar una página web que muestre los 35 hexaminós diferentes que hay (figuras formadas por 6 cuadrados iguales unidos unos a otros por uno de sus lados). Identifica los hexaminós que son desarrollos planos de un cubo, es decir que pueden plegarse para formar un cubo cerrado.

Para resolver esta actividad, resultan muy útiles la capacidad de creación de imágenes dinámicas y la habilidad de reconocimiento de relaciones espaciales, por los mismos motivos que hemos explicado a propósito de la actividad de la Figura 9.11. La habilidad de reconocimiento de relaciones espaciales nos ayudará a identificar los desarrollos falsos porque nos daremos cuenta, por ejemplo, de que dos caras se superponen.

- *Discriminación visual*: Es la habilidad que ayuda a comparar varios objetos identificando visualmente sus similitudes y diferencias locales. La discriminación visual no consiste en una comparación de los aspectos globales.

Por ejemplo, la respuesta a la actividad 9.3 (basado en la Figura 9.9) es que los dodecaedros *a* y *d* están en la misma posición. Para verificarlo, podemos recorrer las aristas que vemos en el poliedro *a* identificando cada una de ellas en el *d* y dándonos cuenta de que están situadas en la misma posición. Esta identificación de los elementos del poliedro *a* en el *d* se puede hacer gracias a la habilidad de discriminación visual.

Un entorno que ayuda a desarrollar la habilidad de discriminación visual es el basado en alguna aplicación informática que represente sólidos en la pantalla y permita girarlos libremente. Existen diversas aplicaciones disponibles, como Geogebra, SketchUp o Cabri 3d. En todas es fácil crear diferentes sólidos, variar su aspecto (con caras opacas o transparentes) y girarlos en la pantalla en cualquier dirección.

Un ejercicio interesante en este entorno consiste en dar a los estudiantes una copia en papel de una posición específica de un poliedro (haciendo una captura de pantalla) y pedirles que muevan el poliedro del ordenador hasta ponerlo en la misma posición que el poliedro de la hoja de papel.

Cuando los estudiantes carecen de la habilidad de discriminación visual, pueden dar respuestas como la de un niño de 6º de Primaria que debía girar en la pantalla del ordenador un tetraedro para colocarlo en la posición de la Figura 9.12a. Su primera respuesta fue la Figura 9.12b. Al decirle la profesora que ella no veía las dos imágenes iguales, el niño observó y dijo que “este triángulo es más grueso que ese” señalando el triangulito formado a la derecha en la Figura 9.12a y el que está en la misma posición en la Figura 9.12b. El niño siguió moviendo el tetraedro de la pantalla hasta que llegó a la posición de la Figura 9.12c, que fue su segunda respuesta. De nuevo, la profesora le preguntó si veía iguales las dos posiciones del tetraedro, a lo que contestó: “Sí... No, no está bien.” A continuación señaló el segmento marcado en la Figura 9.12d y dijo que “ese segmento no debería estar ahí.”

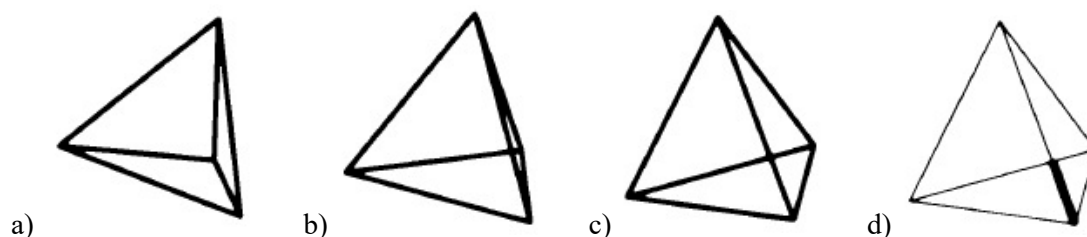


Figura 9.12. Carencia de la habilidad de discriminación visual.

Estas respuestas muestran que el estudiante comparaba los dos tetraedros basándose en su aspecto global pero no era capaz de identificar y comparar detalles como segmentos o regiones específicas, careciendo, por tanto, del necesario desarrollo de la habilidad de discriminación visual.

Los ejemplos que hemos mostrado corresponden a actividades que se pueden realizar en las clases de Primaria. Por lo tanto, es necesario que los profesores planteen en sus clases de geometría tareas en las que sus alumnos tengan que usar sus habilidades de visualización para que las vayan desarrollando y mejorando. También es necesario que los profesores presten atención a las respuestas de sus alumnos para identificar las carencias que puedan tener.

9.2. Enseñanza de la visualización en Primaria

El aprendizaje de la geometría en Primaria se basa en el uso de elementos gráficos. En las clases de geometría, los estudiantes continuamente dibujan o manipulan figuras geométricas, observan figuras mostradas por el profesor o el libro de texto y analizan figuras, tanto reales como dibujadas, para identificar elementos necesarios para responder a las preguntas planteadas. Por lo tanto, los estudiantes deben hacer un uso intensivo de imágenes mentales y de sus habilidades de visualización. La Figura 9.13 muestra el enunciado de un problema que se puede plantear en 4º de Primaria, en el que se pregunta por propiedades de las diagonales como cuáles son iguales, cuáles perpendiculares o cuáles se cortan en los puntos medios. Los estudiantes normalmente responderán basándose en su apreciación visual de la relación por la que les preguntan.

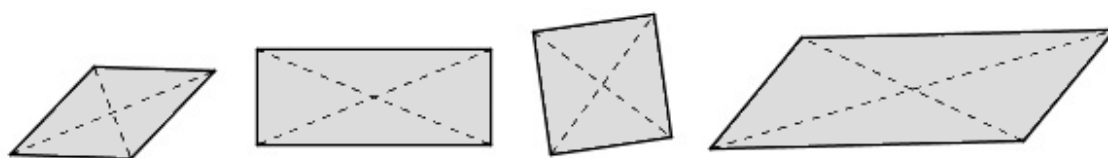


Figura 9.13. Problema de geometría de 4º de Primaria.

Para resolver el problema, los estudiantes deben empezar centrándose en identificar los segmentos que forman las diagonales (usando imágenes pictóricas y la habilidad de identificación visual). En la pregunta a), deben comparar visualmente sus longitudes, para lo cual les serían de gran ayuda una imagen dinámica y la habilidad de discriminación visual. En la pregunta b), los estudiantes tendrán que analizar la posición relativa de cada par de diagonales para decidir si son o no perpendiculares, para lo cual necesitan utilizar sus imágenes mentales y la habilidad de reconocimiento de relaciones espaciales.

Los profesores deben incluir en sus programaciones actividades cuyo objetivo sea ayudar a los estudiantes a desarrollar su capacidad de visualización (creación, análisis y modificación de imágenes mentales y representación externa de esas imágenes). La mejor manera de hacerlo es planteándoles actividades y problemas en los que se combinen dos o más de los contextos mostrados en la Figura 9.14: dibujo; descripción verbal; construcción y manipulación; y observación y transformación en el ordenador. En las páginas siguientes presentamos algunos ejemplos de actividades para implementar esta propuesta. En Guillén y otros (1992) y Gutiérrez (1992, 1998) se desarrolla esta propuesta, con información detallada y numerosas actividades.

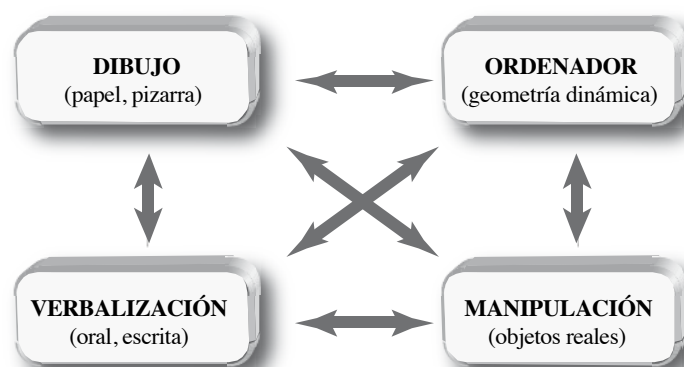


Figura 9.14. Contextos de representación para el desarrollo de la visualización en geometría.

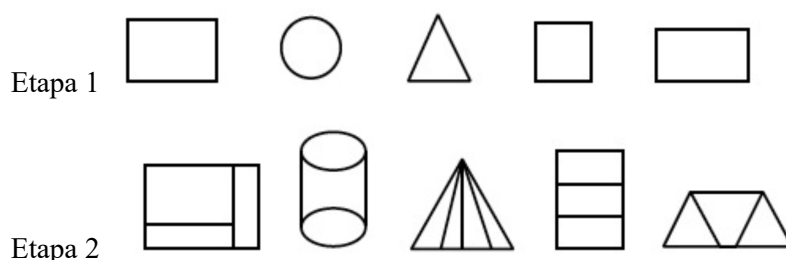
9.2.1. Desarrollo de la habilidad de dibujo de cuerpos espaciales

Si la geometría es el estudio de formas, posiciones, medidas y propiedades de objetos planos o espaciales, la mejor manera de enseñar y aprender geometría en Primaria es utilizando objetos reales. Sin embargo, esto es imposible en la práctica diaria y tanto profesores como estudiantes combinan la utilización de unos pocos objetos reales con una mayoría de objetos dibujados (en papel, la pizarra o la pantalla del ordenador). En este contexto, la precisión de los dibujos es importante pues, por ejemplo, difícilmente reconocerán los estudiantes la igualdad de las

diagonales de un rectángulo si está mal dibujado. Aprender a dibujar no es sólo asunto de la asignatura de plástica. También en la de matemáticas hay numerosas oportunidades para que los estudiantes desarrollen su capacidad de dibujo de objetos geométricos. En particular, el dibujo de cuerpos espaciales como prismas, pirámides, cilindros, etc. es un contexto al que los profesores de matemáticas deben prestar atención ya que en él los estudiantes pondrán de relieve no solo sus destrezas de dibujo sino también las de visualización espacial.

Se han realizado diversas investigaciones en el campo de la didáctica de las matemáticas para analizar el progreso en las destrezas de dibujo de objetos geométricos. Una de las más interesantes es la presentada por Mitchelmore (1976, 1980), que hizo unos experimentos en los que pedía a estudiantes de diferentes edades dibujar unos cuerpos geométricos que tenían delante, concretamente paralelepípedo, cilindro, pirámide de base cuadrada, cubo y prisma de base triángulo equilátero. Según este investigador, los niños pasan por cuatro etapas de desarrollo de su destreza de dibujo de objetos espaciales (Figura 9.15):

- *Etapa 1: Esquemática plana.* Los dibujos muestran solo una cara significativa del sólido desde un punto de vista frontal (ortogonalmente). No dan sensación de tridimensionalidad.
- *Etapa 2: Esquemática espacial.* Los dibujos muestran varias caras del sólido desde un punto de vista frontal (ortogonalmente), pudiendo incluir caras que no es posible ver al mismo tiempo en el sólido real. No dan sensación de tridimensionalidad.
- *Etapa 3: Pre-realista.* Los dibujos empiezan a mostrar caras con formas y posiciones que responden a intentos de hacer dibujos realistas. Intentan dar sensación de tridimensionalidad, aunque sólo se logra parcialmente. Esta etapa se divide en dos subetapas cuya diferencia es la perfección en la sensación de tridimensionalidad de los dibujos.
- *Etapa 4: Realista.* Se caracteriza por dibujos que tienen un alto grado de perfección y representan de manera suficientemente fiel los sólidos. Además, aplican, aunque sea parcialmente, las reglas del dibujo en perspectiva, en especial la convergencia de las líneas que van hacia el horizonte.



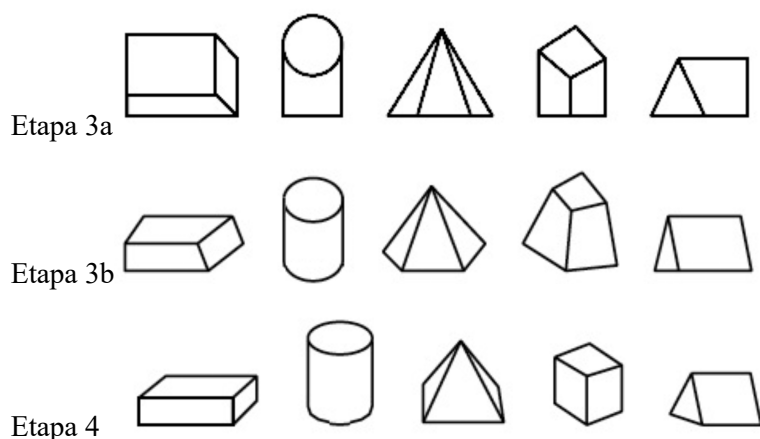


Figura 9.15. Etapas de desarrollo de la habilidad de dibujo de cuerpos espaciales.

Estudios posteriores han confirmado los resultados de Mitchelmore. La Figura 9.16 muestra algunos dibujos de cubos, pirámides de base cuadrada, paralelepípedos y octaedros regulares hechos por estudiantes españoles de Primaria en nuestras propias investigaciones.

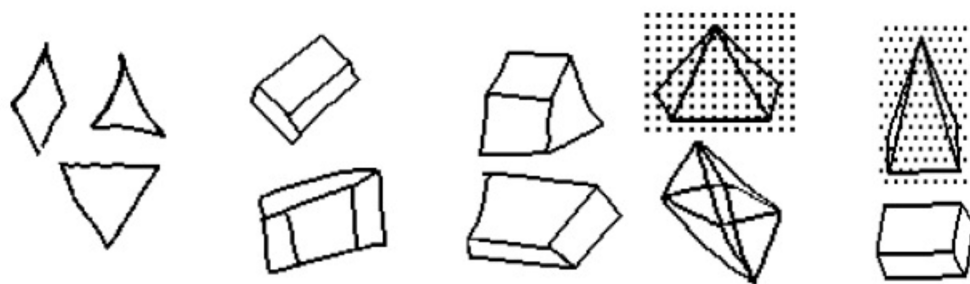


Figura 9.16. Etapas 1 a 4 de dibujo de cuerpos espaciales.

9.2.2. Desarrollo de la habilidad de análisis visual de objetos geométricos

Saber analizar figuras geométricas para identificar relaciones o propiedades es crucial para el aprendizaje de la geometría. Para ser eficaces en estos análisis, los estudiantes deben desarrollar su capacidad de manejo de imágenes mentales y de habilidades de visualización.

Unas actividades muy útiles, usadas en todo el mundo, para desarrollar la capacidad de visualización se basan en módulos contruidos con cubos encajables (por ejemplo, los cubitos Multilink®). Para trabajar las diferentes relaciones mostradas en la Figura 9.14, se plantean varios tipos de actividades (Figura 9.17): Dibujar en papel representaciones de un módulo, tanto en perspectiva como sus proyecciones ortogonales; construir un módulo a partir de una representación en papel; contar la cantidad de cubitos que forman un módulo; construir un

módulo con alguna aplicación informática apropiada. En Guillén y otros (1992) mostramos un completo y variado conjunto de actividades de estos tipos.

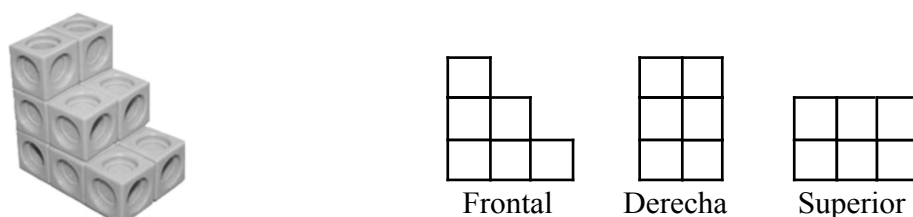


Figura 9.17. Proyecciones ortogonales del módulo de la izquierda

Actividades de estos tipos resultarán muy útiles, por ejemplo, para que los estudiantes puedan resolver correctamente problemas como el recogido en la Figura 9.18, en el que se plantea el descubrimiento de la fórmula de cálculo del volumen de los paralelepípedos. Del mismo modo que, en el plano, el cálculo mediante conteo de áreas de rectángulos cuadriculados permite descubrir la fórmula del área del rectángulo, en el espacio, el cálculo mediante conteo de volúmenes de paralelepípedos formados por cubos unidad permite descubrir la fórmula de cálculo del volumen del paralelepípedo.



Figura 9.18. Descubrimiento de la fórmula del volumen.

Los estudiantes deben identificar correctamente la cantidad de cubos que hay en estos prismas pero, con mucha frecuencia, son incapaces de distinguir visualmente los diferentes planos y tampoco diferencian correctamente los cubos situados en las aristas, que tienen dos o tres caras visibles, de los cubos que sólo muestra una cara, con lo que cometen un error típico consistente en contar la cantidad de cuadraditos en vez de la cantidad de cubos unidad que forman el sólido (Battista, 2010).

Otro interesante tipo de tareas que se puede plantear en Primaria para poner en práctica esta capacidad es la descripción de determinados objetos geométricos, tanto planos como espaciales. Por ejemplo, el profesor pide a un estudiante que describa verbalmente un determinado sólido (prisma, poliedro regular, cilindro, etc.) que sus compañeros no ven, para

que estos descubran de qué sólido se trata. La forma más fácil de la actividad es usando sólidos reales, pero la actividad se complica si el estudiante debe describir el sólido a partir de una representación en papel, siendo la variante más difícil cuando el sólido es transparente (hecho con varillas).

Las actividades del párrafo anterior obligan a los estudiantes a producir e interpretar descripciones verbales de los sólidos, pero también se pueden plantear actividades parecidas pidiendo a los estudiantes que hagan descripciones en papel. Esta forma de actividad da a los estudiantes más libertad para elaborar diferentes estilos de descripciones, gráfica, verbal o mixta (parte gráfica y parte verbal). La Figura 9.19 muestra tres módulos de cubos y descripciones hechas por estudiantes de Primaria en cada uno de los estilos. En Gutiérrez (1998) se hace un análisis más detallado de los diferentes estilos de descripciones. La segunda parte de estas actividades consiste en intercambiar las descripciones escritas hechas por los estudiantes, para que cada uno construya con cubitos un módulo a partir de la descripción que le ha correspondido y, después, compare su construcción con la original y discutan las diferencias, que generalmente se deben a errores o inconsistencias en las descripciones.

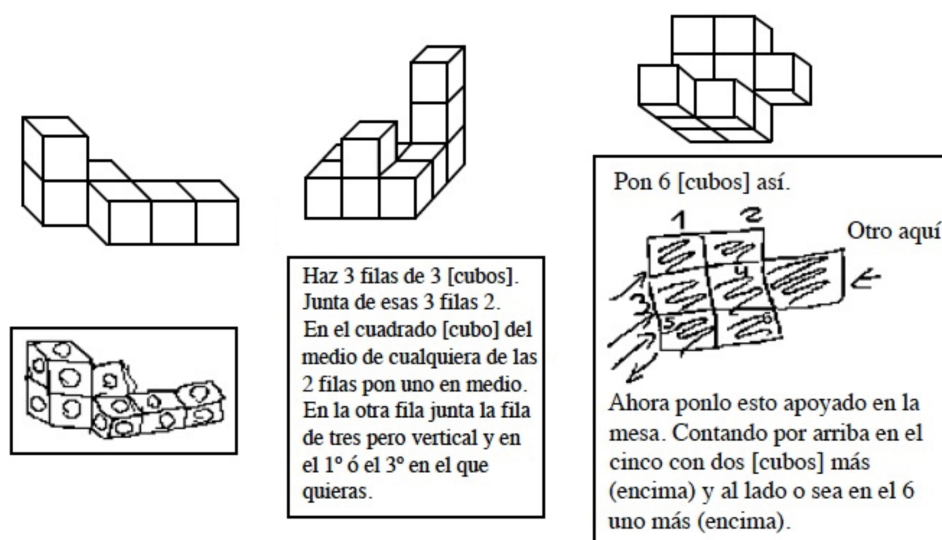


Figura 9.19. Estilos gráfico, verbal y mixto de descripciones de objetos geométricos

9.2.3. Entornos informáticos para el aprendizaje de la geometría

Para terminar el capítulo, vamos a presentar diversas aplicaciones informáticas que se están usando en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en Primaria y Secundaria. Constituyen un contexto muy interesante para propiciar el desarrollo de las habilidades de visualización al mismo tiempo que se induce un aprendizaje por descubrimiento guiado. Las

hemos organizado en varios grupos, de acuerdo con sus características de uso. Estas descripciones no tienen más remedio que ser verbales y estáticas, por lo que aconsejamos a los lectores que acompañen la lectura con la experimentación real en las aplicaciones. En la sección 9.4 incluimos las páginas web de sus desarrolladores.

El grupo más importante lo forman las aplicaciones de *geometría dinámica*. En la actualidad son las más usadas en las clases de geometría, por su polivalencia y porque son las que más éxito están teniendo en lograr una mejor comprensión de los conceptos geométricos por los estudiantes de cualquier nivel educativo. Las siguientes aplicaciones de geometría dinámica son muy usadas en Primaria: *Cabri II+* (para geometría plana), *Cabri 3d* (para geometría espacial) y *Geogebra* (que integra geometría plana y espacial).

En las aplicaciones de geometría dinámica, el usuario puede construir figuras geométricas escogiendo en un menú puntos, segmentos, rectas, circunferencias, etc. así como mediatrices, perpendiculares, paralelas, etc. y simetrías, traslaciones, etc. También puede medir ángulos, longitudes, superficies o volúmenes. La característica diferenciadora de las aplicaciones de geometría dinámica es que permiten construir figuras geométricas aplicando relaciones matemáticas y modificar las figuras *arrastrando* con el cursor elementos de éstas (puntos, segmentos, polígonos, etc.), de manera que la aplicación conserva dichas relaciones matemáticas. Por ejemplo, si se construye un rectángulo (Figura 9.20a) y se arrastra alguno de sus vértices, la aplicación modificará los tamaños y posiciones de los lados para que la figura siga siendo un rectángulo (Figura 9.20b y c).

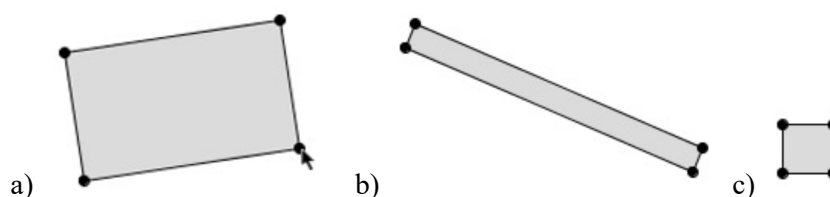


Figura 9.20. Al arrastrar los vértices, la construcción se transforma para seguir siendo un rectángulo.

Este dinamismo las hace también interesantes como potenciadoras de las destrezas de visualización, pues, cuando arrastren un objeto sobre la pantalla, los estudiantes tendrán que seguir con la vista las modificaciones de la construcción que se van produciendo, identificarlas y asociarlas a propiedades geométricas, para lo cual tendrán que poner en juego distintas habilidades de visualización de entre las mencionadas antes. Para resolver problemas de geometría dinámica, también es importante utilizar imágenes mentales, que ayudarán a los estudiantes a prever los resultados de sus acciones y a tomar decisiones operativas.

El segundo grupo de aplicaciones lo forman aquéllas que permiten manipular objetos geométricos en la pantalla realizando con ellos construcciones o determinadas transformaciones, pero que no permiten hacer deformaciones de las figuras tan libremente como las aplicaciones de geometría dinámica. En este grupo se incluyen aplicaciones como *Cubos y Cubos* o *Building with Blocks*, que son muy interesantes para desarrollar las destrezas de visualización espacial, pues plantean problemas consistentes en crear las proyecciones ortogonales de estructuras formadas por cubos apilados y en construir módulos de cubos a partir de proyecciones ortogonales dadas. La Figura 9.21a muestra una actividad similar a las propuestas por algunos libros de texto, en los que se da un ejemplo de un sólido y sus proyecciones ortogonales y, a continuación, se pide dibujar las proyecciones ortogonales de otro sólido parecido. La Figura 9.21b muestra una actividad equivalente planteada en el contexto equivalente en una de estas aplicaciones, en la que los estudiantes pueden girar el sólido y pueden añadir o quitar cubitos para ver el efecto que producen estas acciones.

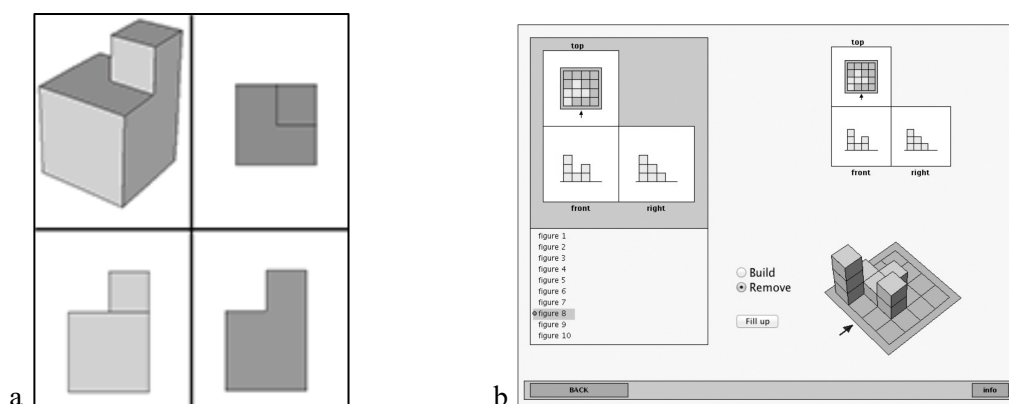


Figura 9.21. Actividad en los libros de texto y de la aplicación *Building with Blocks*.

Merece una mención especial la web de la Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales. Ofrece una gran diversidad de applets interactivos para todos los contenidos de las matemáticas escolares desde Infantil hasta el final de Bachillerato. Los applets están organizados por cursos y por temas matemáticos, por lo que es muy fácil encontrar un applet que sea útil como complemento a las clases de cualquier tema de geometría de Primaria. En la página del applet se plantean varios problemas, pero resulta mucho más interesante cuando es el propio profesor quien elige los problemas que le interesa presentar a sus alumnos.

Otro grupo de aplicaciones lo constituyen las que sólo permiten mover objetos en la pantalla y, como mucho, hacer algunas transformaciones prefijadas en ellos. Hay aplicaciones, como *Small Stella* (Figura 9.22), que representan en la pantalla una amplia diversidad de poliedros, que pueden girar en cualquier dirección, y pueden abrirse para

mostrar su desarrollo plano. Por su parte, *KaleidoTile* permite observar cómo se modifica un poliedro cuando se realizan manipulaciones de truncamiento de sus vértices o biselado de sus aristas.

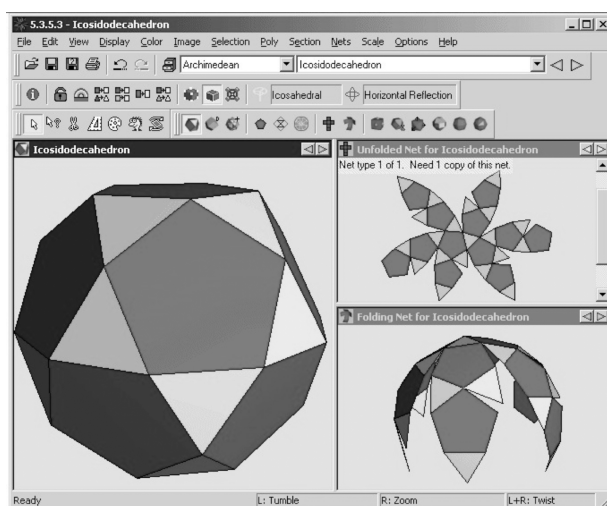


Figura 9.22. La aplicación Small Stella.

Estas aplicaciones son interesantes porque permiten ver los objetos geométricos, sean planos o espaciales, en diversidad de posiciones, lo cual induce imágenes conceptuales más ricas y mejora las habilidades de visualización y de generación de imágenes mentales de esos objetos.

La mayoría de las publicaciones mencionadas en las páginas anteriores incluyen más información que la utilizada en este texto y son documentos adecuados para una lectura de profundización en los temas tratados. Además de esos, Battista (2007) ofrece una visión global y profunda de la didáctica de la geometría, con una sección dedicada a la visualización. Por su parte, Presmeg (2006) está dedicado a analizar los resultados de investigación en educación matemática relativos a la visualización.

9.3. Referencias

- Battista, M.T. (2007). "The development of geometrical and spatial thinking". En F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Reston, VA (EE.UU.), 2007, pp. 843-908.
- Battista, M.T., "Thoughts on elementary students' reasoning about 3-d arrays of cubes and polyhedra". En Z. Usiskin, K. Andersen, y N. Zotto (Eds.), *Future curricular trends in school algebra and geometry*. Information Age, Charlotte (EE.UU.), 2010, pp. 183-199.
- Bishop, A.J., "Review of research on visualization in mathematics education", *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 1989, vol. 11.1, pp. 7-16.
- Del Grande, J., "Spatial sense", *Arithmetic Teacher*, 1990, vol. 37.6, pp. 14-20.
- Guillén, G., Gutiérrez, A., Jaime, A., y Cáceres, M., *La enseñanza de la geometría de sólidos en la E.G.B.* (memoria final del proyecto de investigación). Institución Valenciana de

- Estudios e Investigación “Alfonso el Magnánimo”, Valencia, 1992. Disponible en <http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/GutOtr92.pdf>.
- Gutiérrez, A., “Procesos y habilidades en visualización espacial”. En A. Gutiérrez (Ed.), *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. Geometría*, Secc. de Matemática Educativa, CINVESTAV, México D.F., 1992, pp. 44-59. Disponible en <http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/Gut92b.pdf>.
- Gutiérrez, A., “Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework”. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference of the P.M.E.*, 1996, Vol. 1, pp. 3-19.
- Gutiérrez, A., “Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial”, *Revista EMA*, 1998, vol. 3.3, pp. 193-220. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1079/1/41_Gutiérrez1998Las_RevEMA.pdf.
- Mitchelmore, M.C., “Cross-cultural research on concepts of space and geometry”. En J.L. Martin, y D.A. Bradbard (Eds.), *Space and geometry*. ERIC, Columbus (EE.UU.), 1976, pp. 143-184.
- Mitchelmore, M.C., “Prediction of developmental stages in the representation of regular space figures”, *Journal for Research in Mathematics Education*, 1980, vol. 11.2, pp. 83-93.
- Presmeg, N.C., “Visualization in high school mathematics”, *For the Learning of Mathematics*, 1986, vol. 6.3, pp. 42-46.
- Presmeg, N., “Research on visualization in learning and teaching mathematics”. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future*. Sense Publishers, Rotterdam (Holanda), 2006, pp. 205-235).

9.4. Aplicaciones informáticas

- Cabrillog, *Cabri II+*. Cabrillog SAS, Grenoble (Francia), 2012. <http://www.cabri.com/es/cabri-2-plus.html>
- Cabrillog, *Cabri 3d*. Cabrillog SAS, Grenoble (Francia), 2012. <http://www.cabri.com/es/cabri-3d.html>
- Freudenthal Institute, *Building with Blocks*. Freudenthal Institute, Universidad de Utrech, Utrech (Holanda), 2009. <http://www.fisme.science.uu.nl/toepassing/en/00724>
- Hohenwarter, M., *Geogebra*. International Geogebra Institute, Linz (Austria), 2014. <https://www.geogebra.org>
- Hoyos, E.A., *Cubos y Cubos*. Grupo GEDES, Universidad del Quindío, Armenia (Colombia), 2014.
- Utah State University, *Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales*. Utah State University, Logan (EE.UU.), 2015. <http://nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html>
- Webb, R., *Small Stella*. Software3d, Melbourne (Australia), 2014. <http://www.software3d.com/Stella.php>
- Weeks, J., *KaleidoTile*. Geometry Games, EE.UU., 2014. <http://www.geometrygames.org/KaleidoTile/>