UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Departament de Didàctica de la Matemàtica

APORTACIONES A LA INTERPRETACIÓN Y APLICACIÓN DEL MODELO DE VAN HIELE: LA ENSEÑANZA DE LAS ISOMETRÍAS DEL PLANO. LA EVALUACIÓN DEL NIVEL DE RAZONAMIENTO.

TESIS DOCTORAL

Presentada por:
ADELA JAIME PASTOR

Dirigida por:
ÁNGEL GUTIÉRREZ RODRÍGUEZ

Valencia, septiembre de 1993

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS

No es posible expresar aquí mi agradecimiento a todas las personas que, directa o indirectamente, con sus conocimientos sobre el tema de esta tesis o con su apoyo moral, han ayudado a que haya podido llevar adelante y finalizar este trabajo. Pero no puedo menos que mencionar expresamente a algunas de ellas.

En primer lugar a Angel Gutiérrez, director de esta tesis, quien durante todos estos años me ha orientado, aconsejado y animado.

A Michael Shaughnessy, David Fuys y Alan Hoffer, cuyas acertadas opiniones me han ayudado a comprender mejor el modelo de Van Hiele.

A los estudiantes de Magisterio Carmen, Nuria, María Dolores y Enrique, y a la profesora del Departamento de Didáctica de la Matemática María Cáceres, quienes llevaron a cabo algunas experimentaciones con alumnos de E.G.B., fundamentales para el desarrollo de esta tesis.

A todos los alumnos de E.G.B., B.U.P. y Magisterio que participaron desinteresadamente en las experimentaciones que realizamos, así como a los equipos directivos y profesores de Matemáticas de los Centros, que me dieron todas las facilidades para que pudiera llevar a cabo este trabajo.

A los profesores del Colegio Amadeo Tortajada de Mislata, Miguel, Ramón y José Manuel, con quienes colaboré durante varios años y que aportaron información sobre la viabilidad de la enseñanza de las simetrías en E.G.B. y sobre el modo de razonamiento en Geometría de los estudiantes del Ciclo Superior de E.G.B.

Al Departamento de Didáctica de la Matemática de la U. de Valencia, que me ha facilitado la realización de estas investigaciones siempre que fue necesario.

Por otras razones, a mis padres, quienes siempre me animaron a estudiar y, en estos últimos años, a realizar la tesis doctoral.

Y, finalmente, a mis profesores de Enseñanza Media y la Facultad de Matemáticas que contribuyeron a ampliar mi visión de la organización de las Matemáticas.

Adela Jaime Pastor

RESUMEN

Una de las preocupaciones centrales de los investigadores en Didáctica de las Matemáticas es tratar de describir y explicar los procesos cognitivos de los estudiantes de Matemáticas. En las últimas décadas ha destacado de manera especial dentro de este terreno el Modelo de Razonamiento Matemático de Van Hiele, que ha sido estudiado con intensidad y utilizado con éxito como marco de referencia para el diseño curricular.

La memoria que presentamos tiene como objetivo analizar algunas componentes del Modelo de Van Hiele, aportando varias sugerencias, tanto metodológicas como de aplicación, que ayuden a conocer mejor dicho modelo y a utilizar todo su potencial de manera más eficaz para mejorar la enseñanza de las Matemáticas.

El primer capítulo es una introducción y está dedicado a una revisión de las principales componentes del Modelo de Van Hiele (los niveles de razonamiento, las fases de aprendizaje y las características centrales del modelo). Además, hacemos una revisión de las principales aportaciones de las publicaciones realizadas sobre el modelo y resumimos nuestra postura en relación con algunas cuestiones críticas que se han suscitado a raíz de los resultados de investigación.

En el capítulo 2 hacemos una aportación a la utilización del Modelo de Van Hiele como marco teórico para el diseño curricular, mediante la presentación de *una unidad de enseñanza de las isometrías del plano* que ha sido elaborada de acuerdo con los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje de Van Hiele. Esta unidad de enseñanza es válida para las Enseñanzas Primaria y Secundaria, así como para la formación de profesores de Primaria. La unidad es el resultado de numerosas experimentaciones realizadas con estudiantes de los cursos 1º a 8º de E.G.B. y estudiantes de la Escuela de Magisterio.

En las primeras secciones de este capítulo planteamos el objetivo y el desarrollo de nuestra investigación y analizamos las publicaciones más interesantes relacionadas con el tema. Después, en las secciones posteriores, presentamos la unidad de enseñanza dividida en tres partes, dirigidas a la enseñanza de las traslaciones, los giros y las simetrías del plano. Para cada isometría, enunciamos los objetivos generales (tanto de habilidades de razonamiento como de conocimientos) a conseguir para alcanzar cada uno de los niveles primero a tercero de Van Hiele, afinamos dichos objetivos especificando los correspondientes a cada fase de aprendizaje de ese nivel y enunciamos los tipos de actividades, organizadas para las diferentes fases de aprendizaje de cada nivel de razonamiento.

En el capítulo 3, apoyando la idea de la continuidad en la adquisición de los niveles de razonamiento de Van Hiele, planteamos una interpretación del proceso seguido por los estudiantes en su avance a través de los sucesivos niveles y proponemos una técnica para determinar el nivel de razonamiento de los estudiantes coherente con dicha interpretación. Diferentes secciones del capítulo están dedicadas a los elementos claves de nuestra investigación:

- Describimos el proceso de adquisición de los niveles mediante la definición del concepto de *grado de adquisición de los niveles de Van Hiele.* Aunque son bastantes las investigaciones que, al determinar el nivel de razonamiento de estudiantes, reconocen la existencia de numerosos estudiantes que se encuentran en transición de un nivel al siguiente, hasta ahora ninguna investigación ha planteado una manera de evaluar con detalle ese período de transición.

- Utilizamos operativamente los grados de adquisición de los niveles mencionados en el párrafo precedente, para lo cual, y como complemento a dicha definición, presentamos un *método de evaluación de los grados de adquisición de los niveles* de Van Hiele por los estudiantes, que nos permite analizar e interpretar las contestaciones a items de respuesta libre.

- Hemos usado los dos elementos anteriores en un estudio longitudinal realizado con estudiantes desde 6º de E.G.B. hasta C.O.U. Para ello hemos desarrollado un conjunto de tests escritos de respuesta libre y hemos utilizado este método para evaluar las respuestas a los tests y determinar los grados de adquisición de los niveles de Van Hiele por los estudiantes. En esta memoria presentamos los tests y comentamos los resultados de dicha administración.

- Junto a estas tres aportaciones, que consideramos más destacables, en el capítulo 3 presentamos otra contribución, también original, que puede constituir un avance en la utilización del Modelo de Van Hiele: La elaboración de un tipo de *items escritos de respuesta libre* que ayude a romper la actual escasez de tests fiables para la determinación del nivel de razonamiento de los estudiantes. Estos items están concebidos con el objetivo de superar algunos de los inconvenientes que suelen tener los tests escritos, para lo cual tratamos que se acerquen en lo posible al formato de las entrevistas clínicas. Consideramos esta última componente de la memoria de menor relieve en comparación con las anteriores porque es un tema de investigación que estamos iniciando y del cual sólo planteamos los principios básicos, que seguiremos desarrollando en el futuro.

La memoria termina con unas conclusiones generales y varios anexos que contienen información complementaria sobre las experimentaciones que hemos realizado para las investigaciones recogidas en los capítulos 2 y 3 de la memoria.

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

Este capítulo está dedicado a hacer un rápido recorrido por el Modelo de Van Hiele, describiendo los elementos y características principales de los niveles de razonamiento y de las fases de aprendizaje. Esta descripción no intenta ser exhaustiva, pues hay diversas publicaciones en las que se pueden encontrar análisis detallados, por ejemplo Hershkowitz (1990) y Clements, Battista (1992), sino que sólo pretendemos dar una visión general de las características del modelo, centrándonos con más detalle en aquellos elementos que están directamente relacionados con las investigaciones que presentamos en los siguientes capítulos de esta memoria.

1.1. Origen y difusión del Modelo de Van Hiele.

El modelo en el que se centran las investigaciones recogidas en esta memoria tiene su origen en los trabajos de dos profesores holandeses de Matemáticas de Enseñanza Secundaria, Pierre M. van Hiele y Dina van Hiele-Geldof, quienes, en sus tesis doctorales, presentaron, respectivamente, un modelo de enseñanza y aprendizaje de la Geometría (Van Hiele, 1957) y un ejemplo concreto de aplicación de ese modelo en unos cursos de Geometría (Van Hiele-Geldof, 1957).

El Modelo de Van Hiele ha tenido una difusión relativamente reciente en el mundo occidental si observamos la fecha de las primeras publicaciones de los Van Hiele. En la Unión Soviética se supo muy pronto del Modelo de Van Hiele y se tomó como base para el diseño de un nuevo currículum de Matemáticas implementado en la primera mitad de los años 60 (ver Pyskalo, 1968). También se utilizó el Modelo de Van Hiele en Holanda en el proyecto Wiskobas de desarrollo curricular, que se empezó a desarrollar en 1971 (Treffers, 1987). Pero hasta mediados de la década de los 70 no se le empezó a prestar atención en los EE.UU., a raíz de la publicación de una conferencia de I. Wirszup (Wirszup, 1976), y a continuación se difundió también por los demás países occidentales.

Sin embargo, el interés despertado fue tal que se ha convertido en el modelo teórico de referencia más frecuente en las investigaciones y diseños curriculares relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría. Esta referencia es muchas veces explícita, aunque otras lo es implícita, como en N.C.T.M. (1989). En España el proceso comenzó una década más tarde y en la actualidad se encuentra en período de difusión, reflejándose ello en la existencia de varios equipos de investigación, en la publicación de trabajos basados en el Modelo de Van Hiele o en los que se le cita y en su presencia como tema de trabajo en diversas conferencias, cursos y congresos de Didáctica de las Matemáticas.

En los capítulos siguientes de esta memoria haremos unas recopilaciones y descripciones de las investigaciones más interesantes sobre el Modelo de Van Hiele que tienen que ver directamente con los contenidos de cada capítulo. No obstante, es necesario mencionar aquí tres proyectos de investigación que, en cierto modo, han sido los impulsores del Modelo de Van Hiele y que han marcado profundamente las pautas del trabajo de investigación realizado después de la publicación de los resultados de dichos proyectos. Todos se desarrollaron en EE.UU. en el período de 1979 a 1982 y se les denominan en ocasiones los proyectos de Brooklyn (Fuys, Geddes, Tischler, 1988), de Chicago (Usiskin, 1982) y de Oregón (Burger, Shaughnessy, 1990 y 1986). En las memorias de estas tres investigaciones se aporta información detallada sobre el modelo de Van Hiele que todo estudioso del tema debería conocer.

Los objetivos del Proyecto de Brooklyn, según se menciona en Fuys, Geddes, Tischler (1988), eran:

- Desarrollar y documentar un modelo de trabajo sobre los niveles de Van Hiele, basándose en diversos documentos traducidos del holandés al inglés para este proyecto.

- Evaluar el nivel de razonamiento de los estudiantes de los grados 6º a 9º (equivalentes a 6º de E.G.B. y 1º de B.U.P., respectivamente).

- Analizar el nivel en el que se plantea la enseñanza de la Geometría en esos grados, a partir de los libros de texto de diversas editoriales.

- Determinar si se puede instruir a los profesores de esos grados para que sean capaces de identificar los niveles de Van Hiele de sus alumnos y en los materiales curriculares.

Gracias a este trabajo disponemos de la versión inglesa de algunos escritos interesantes de los propios Pierre y Dina van Hiele que, de otra manera, quizá hoy todavía serían accesibles sólo en holandés. También es destacable mencionar el diseño de tres unidades de enseñanza, organizadas según los niveles de razonamiento, que se emplearon en entrevistas dirigidas a evaluar el razonamiento de los estudiantes.

Además de los resultados en sí mismos sobre el nivel de los estudiantes, hay que mencionar: i) el trabajo llevado a cabo en relación con la identificación de comportamientos específicos de cada nivel (1 a 5) para las tareas propuestas, obteniendo una relación de descriptores para cada nivel, ii) la propuesta, original, de identificar un nivel "actual" y un nivel "potencial" de razonamiento en cada alumno, correspondientes, respectivamente, al nivel que muestra el estudiante cuando se le presenta una serie de tareas y las intenta resolver y el nivel que puede llegar a utilizar cuando recibe instrucción y iii) la elaboración de unos formularios para facilitar la evaluación de los alumnos en las entrevistas, los cuales no se limitaban a la identificación del nivel o bondad de la respuesta, sino que incluían otros datos de interés para la evaluación posterior del nivel del estudiante.

En el Proyecto de Chicago (Usiskin, 1982) se evaluó a 2700 estudiantes de Enseñanza Secundaria en EE.UU. mediante diversos tests, realizados antes y después de un curso de Geometría. Con ello se pudo: i) Observar el nivel de Van Hiele de razonamiento de los estudiantes, antes y después del curso de Geometría, ii) determinar si el nivel de Van Hiele es un buen predictor del éxito de los estudiantes en los cursos de Geometría y iii) comentar la relación/diferencia entre el nivel de razonamiento empleado en la enseñanza y el exhibido por los alumnos.

Al margen de los resultados obtenidos en el proyecto sobre los aspectos indicados anteriormente, el resultado de esta investigación que ha logrado mayor divulgación ha sido el test diseñado para la evaluación de los alumnos. Se trata de un test para medir los niveles de razonamiento 1 a 5 mediante 5 ítems de elección múltiple para cada nivel, lo cual lo convierte en un instrumento tentador para administrarlo rápidamente y/o a grandes poblaciones. A pesar de la amplia difusión de dicho test, provocada por su facilidad de uso y la falta de alternativas, un problema de fondo que presenta es el interrogante existente sobre la posibilidad de evaluar los niveles de razonamiento mediante ítems de elección múltiple (Crowley, 1989). De manera más particular, se han presentado críticas directas a este test (ver, por ejemplo, Wilson, 1990 y Crowley, 1990) que han sido contestadas por el propio Z. Usiskin (Usiskin, Senk, 1990).

En la memoria de este proyecto también se da una relación de descriptores generales para cada nivel (1 a 5), extraída de los escritos de Pierre y Dina van Hiele.

Por lo que respecta al Proyecto de Oregón (Burger, Shaughnessy, 1990), sus autores estudian la adecuación del modelo de Van Hiele para describir el razonamiento de los estudiantes en Geometría. Para ello se entrevistó oralmente a 48 estudiantes de los grados K a

12 (su equivalente en España es Pre-escolar a C.O.U.), de los cuales se analizó en detalle a 14. Además de las conclusiones relativas al modelo de Van Hiele, ha tenido amplia difusión la batería de problemas empleados en las entrevistas clínicas de evaluación, que se centran en triángulos y cuadriláteros.

Al igual que hemos comentado anteriormente para el proyecto de Brooklyn, en el de Oregón también: i) se elabora una relación de descriptores, en este caso para los niveles 1 a 4, extraídos de los comportamientos de los alumnos ante los problemas propuestos y ii) se redacta un formulario con indicaciones concretas sobre las preguntas a plantearle al alumno, según las respuestas que éste vaya dando, y para su evaluación.

Hay diversas publicaciones que narran de forma detallada las componentes del Modelo de Van Hiele y las aportaciones e investigaciones más destacadas. Por esa razón, no haremos aquí una descripción exhaustiva del mismo, sino que sólo presentaremos sus elementos fundamentales y sus características relacionadas directamente con los contenidos de esta memoria. Unas buenas descripciones del modelo aparecen en Hoffer (1983), Crowley (1987), Burger, Shaughnessy (1986). En castellano, Corberán y otros (1989) y Jaime, Gutiérrez (1990 b). Además, en Gutiérrez, Jaime (1989) se ofrece una relación detallada de referencias comentadas en relación con el Modelo de Van Hiele. Por otra parte, el propio Van Hiele (1986) explica sus ideas sobre el modelo 29 años después de su primera publicación, lo cual permite observar la evolución que sufrió en los primeros años, hasta llegar a la forma generalmente aceptada en la actualidad.

1.2. Descripción del Modelo de Van Hiele.

El Modelo de Van Hiele abarca dos aspectos:

- Descriptivo, mediante el cual se identifican diferentes formas de razonamiento geométrico de los individuos y se puede valorar el progreso de éstos.

- Instructivo, que marca unas pautas a seguir por los profesores para favorecer el avance de los estudiantes en su nivel de razonamiento geométrico.

El núcleo central del Modelo de Van Hiele está constituido por la idea de que, a lo largo del proceso de aprendizaje de la Geometría, el razonamiento de los estudiantes pasa por una serie de niveles de razonamiento, que son secuenciales, ordenados y tales que no se puede saltar ninguno. Cada nivel supone la comprensión y utilización de los conceptos geométricos de una manera distinta, lo cual se refleja en una manera diferente de interpretarlos, definirlos, clasificarlos, y hacer demostraciones.

La componente instructiva del modelo se basa en las fases de aprendizaje. Estas constituyen unas directrices para fomentar el desarrollo de la capacidad de razonamiento matemático de los estudiantes y su paso de un nivel de razonamiento al siguiente, mediante unos tipos de actividades y de problemas particulares para cada fase.

Los niveles de razonamiento.

La descripción de los niveles de Van Hiele hecha en Wirszup (1976) plantea la existencia de cinco niveles de razonamiento. Esta es la caracterización más extendida y aceptada actualmente, en la que se centran todas las investigaciones referentes al modelo y a partir de la cual se ha trabajado para conseguir descripciones más finas de los niveles. No obstante, el proceso de evolución histórico del modelo ha sido más variable.

La cantidad de niveles de razonamiento contemplados por el propio Van Hiele en sus descripciones del modelo ha sido modificada en varias ocasiones, como consecuencia del proceso de evolución de sus ideas, del contraste con las ideas de otros expertos y de una mayor cantidad de resultados de investigaciones. Así, en Van Hiele (1986, cap. 8) se recuerda que la primera descripción, publicada en 1955, planteaba la existencia de tres niveles, que corresponden a los niveles 2º a 4º actuales. Sin embargo, otros especialistas plantearon la ausencia de un nivel inferior que recogiera el tipo de razonamiento visual tan frecuente entre los estudiantes; este nivel echado en falta es el actual primer nivel de razonamiento. Así pues, a raíz de los primeros análisis hechos, Van Hiele perfeccionó su propuesta definiendo cuatro niveles, que corresponden a los niveles 1º a 4º actuales. En Van Hiele (1986, p. 47) el autor habla de la posible existencia de niveles superiores al cuarto, de la dificultad de diferenciarlos y del peligro de sobrevalorarlos.

Más recientemente, en la "Conference on learning and teaching geometry: Issues for research and practice", que tuvo lugar en junio de 1987 en la Universidad de Siracusa (EE.UU.), Van Hiele planteó una nueva propuesta de definición de los niveles de razonamiento, en la cual contemplaba la existencia de tres niveles. Esta propuesta, en realidad, supone la eliminación del 5º nivel y la reorganización de las características de los niveles 2º a 4º actuales para refundirlos en los niveles 2º y 3º de la nueva propuesta. No obstante, esta propuesta de P.M. van Hiele no ha tenido ninguna trascendencia y, como decíamos antes, los investigadores siguen considerando actualmente la descripción básica de cinco niveles hecha en Wirszup (1976).

Aunque, en su forma más general, el Modelo de Van Hiele considera la existencia de cinco niveles de razonamiento, que describiremos más adelante, también se utiliza con frecuencia una restricción de ésta, que ignora el quinto nivel. Precisamente esta última organización, que consta de cuatro niveles, es la que utilizamos en esta memoria, por motivos que señalaremos más adelante. Así mismo, alguna investigación ha incluido un nivel anterior al primero de Van Hiele (Clements, 1988).

Es necesario comentar que no hay unanimidad en cuanto a la numeración de los niveles, pues algunas publicaciones hablan de los niveles 0 a 4, mientras que otras hablan de los niveles 1 a 5. Nosotros adoptamos la segunda opción, pues creemos que es más cómoda y evita confusiones, al hacer coincidir las etiquetas con los valores ordinales de cada nivel. Seguidamente presentamos las características generales de los cinco niveles de razonamiento. Están extraídas de diversas publicaciones, pero principalmente de Burger, Shaughnessy (1986), Hoffer (1981) y Jaime, Gutiérrez (1990 b):

Nivel 1 (Reconocimiento)

• Percepción global de las figuras: Se suelen incluir atributos irrelevantes en las descripciones, especialmente referidos a la posición en el plano.
• Percepción individual de las figuras: Cada figura es considerada como un objeto, independiente de otras figuras de la misma clase. No se generalizan las características de una figura a otras de su misma clase.
• Descripción de las figuras basada principalmente en su aspecto físico y posición en el espacio. Los reconocimientos, distinciones o clasificaciones se basan en semejanzas físicas globales.
• Frecuentemente hay descripciones por semejanza con otros objetos, no necesariamente matemáticos: "Se parece a …", "tiene forma de …".
• Uso de propiedades imprecisas para identificar, comparar, ordenar, caracterizar figuras, con frecuentes referencias a prototipos visuales.
• Aprendizaje de un vocabulario básico para hablar de las figuras, escribirlas, etc.
• No se suelen reconocer explícitamente las partes de que se componen las figuras ni sus propiedades matemáticas. Cuando sí se hace dicho reconocimiento, estos elementos o propiedades no tienen un papel central y, frecuentemente, reflejan contradicciones.

Nivel 2 (Análisis)

• Reconocimiento de que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y están dotadas de propiedades matemáticas. Se describen las partes que integran una figura y se enuncian sus propiedades. Se es capaz de analizar las propiedades matemáticas de las figuras.

- Deducción de propiedades mediante experimentación. Capacidad de generalización de dichas propiedades a todas las figuras de la misma familia.
- La definición de un concepto consiste en el recitado de una lista de propiedades, lo más exhaustiva posible, pero en la que puede haber omisiones de características necesarias. Así mismo, se rechazan las definiciones dadas por el profesor o el libro de texto en favor de la del estudiante cuando aquéllas entran en conflicto con la propia.
- No se relacionan diferentes propiedades de una figura entre sí o con las de otras figuras. No se establecen clasificaciones a partir de las relaciones entre las propiedades. No se realizan clasificaciones inclusivas[1].
- La demostración de una propiedad se realiza mediante su comprobación en uno o pocos casos.

Nivel 3 (Clasificación)

- Sí se pueden relacionar propiedades de una figura entre sí o con las de otras figuras: Se comprende la existencia de relaciones y se descubren, de manera experimental, nuevas relaciones.
- Comprensión de lo que es una definición matemática y sus requisitos. Se definen correctamente conceptos y tipos de figuras. También se hacen referencias explícitas a las definiciones cuando se realizan razonamientos o demostraciones.
- Sí se pueden realizar clasificaciones inclusivas.
- La demostración de una propiedad ya no se basa en la comprobación de casos, pues hay una necesidad de justificar de manera general la veracidad de dicha propiedad, para lo cual se usan razonamientos deductivos informales.
- Comprensión y realización de implicaciones simples en un razonamiento formal. Comprensión de una demostración realizada por el profesor. Capacidad para repetir tal demostración y adaptarla a otra situación análoga.
- Incapacidad para llevar a cabo una demostración formal completa, en la que haya que encadenar varias implicaciones, pues no se logra una visión global de las demostraciones y no se comprende su estructura.

[1] Nos referimos a la clasificación consciente realizada por el propio individuo, basada en la relación lógica entre el concepto más general y su subclase. No negamos la posibilidad de asignarle a un ejemplo concreto el nombre de la clase y de la subclase si se ha introducido con ambas designaciones.

Nivel 4 (Deducción Formal)

- Se pueden reformular enunciados de problemas o teoremas, trasladándolos a un lenguaje más preciso.
- Realización de las demostraciones (de varios pasos) mediante razonamientos deductivos formales.
- Capacidad para comprender y desarrollar demostraciones formales. Capacidad para adquirir una visión global de las demostraciones y para comprender la misión de cada implicación simple en el conjunto.
- Capacidad para comprender la estructura axiomática de las matemáticas: Sentido de axiomas, definiciones, teoremas, términos no definidos, …
- Aceptación de la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas o mediante diferentes formas de demostración.

Nivel 5 (Rigor)

- Posibilidad de trabajar en sistemas axiomáticos distintos del usual (de la geometría euclídea).
- Capacidad para realizar deducciones abstractas basándose en un sistema de axiomas determinado.
- Capacidad para establecer la consistencia de un sistema de axiomas. Capacidad para comparar sistemas axiomáticos diferentes y decidir sobre su equivalencia.
- Comprensión de la importancia de la precisión al tratar los fundamentos y las relaciones entre estructuras matemáticas.

Ya hemos comentado anteriormente que en las investigaciones que integran esta memoria hemos trabajado sólo con los cuatro primeros niveles de Van Hiele. El no considerar el quinto nivel se debe a los siguientes motivos:

1) La unidad de enseñanza de isometrías del plano que hemos diseñado es útil para la Enseñanza Primaria, la Secundaria y la formación de profesores de Primaria. Todas las investigaciones llevadas a cabo en estos niveles educativos, tanto en España como en otros países, coinciden en señalar que son pocos los alumnos que tienen una adquisición alta del cuarto nivel de razonamiento, y éstos sólo surgen al final de la E. Secundaria. De hecho, la unidad de enseñanza de isometrías propuesta aquí no contempla actividades para el cuarto nivel de Van Hiele, ya que no ha habido oportunidad, dentro de nuestras posibilidades y limitaciones, de trabajar con estudiantes que razonaran en el cuarto nivel, o que estuvieran en condiciones de avanzar hasta la adquisición completa de ese nivel, como consecuencia de nuestra instrucción.

2) La propuesta de evaluación del razonamiento de los estudiantes que formulamos en esta memoria es válida para cualquier nivel de razonamiento, pero la aplicación práctica de la misma que mostramos se ha llevado a cabo con alumnos del Ciclo Superior de E.G.B., B.U.P. y C.O.U. Como acabamos de señalar, a priori esperábamos que apenas hubiera estudiantes en el cuarto nivel, cosa que se ha ratificado en la realidad. Por eso, tampoco hemos considerado el quinto nivel de Van Hiele en el diseño de los tests usados en esta experimentación.

3) Un análisis teórico de las características del quinto nivel publicadas y utilizadas por diversos autores (por ejemplo, Usiskin (1982, p. 79) concluye que "El nivel 5, tal como lo describen los Van Hiele, o no existe o no se puede evaluar. Todos los demás niveles sí se pueden evaluar"), junto a los resultados de nuestras propias investigaciones, nos han llevado a una posición de escepticismo respecto a las validez de dichas características del quinto nivel y a la posibilidad de testarlas. Desde esta postura, creemos que lo razonable es restringir el uso de este nivel hasta que se hayan realizado investigaciones específicas orientadas a dar respuesta a estos interrogantes, lo cual, por lo que sabemos, todavía no ha ocurrido.

Las fases de aprendizaje.

Las cinco fases de aprendizaje pretenden presentar una organización de las actividades que permita pasar de un nivel de razonamiento al siguiente. Las fases no están por tanto asociadas a un nivel determinado, sino que en cada nivel la instrucción comienza con actividades de la fase primera y continúa con actividades de las siguientes fases. Al finalizar la fase quinta, los alumnos deben haber alcanzado el nivel de razonamiento siguiente. Las características principales de las fases de aprendizaje son las siguientes:

Fase 1 (Información)

- En esta fase se procede a tomar contacto con el nuevo tema objeto de estudio. El profesor debe identificar los conocimientos previos que puedan tener sus alumnos sobre este nuevo campo de trabajo y su nivel de razonamiento en el mismo.
- Los alumnos deben recibir información para conocer el campo de estudio que van a iniciar, los tipos de problemas que van a resolver, los métodos y materiales que utilizarán, etc.

La primera fase se puede obviar en algunos casos pues, dado que su finalidad es que el profesor obtenga información sobre los conocimientos y el nivel de razonamiento de sus alumnos y que éstos la obtengan sobre el campo de estudio, cuando existe con anterioridad esa información no es necesario realizar el trabajo específico de esa fase. Ello sucede generalmente cuando se produce una enseñanza continua que incluye el paso de un nivel al siguiente. Por ejemplo, una situación bastante frecuente en los centros de E.G.B. es que un grupo de estudiantes tiene el mismo profesor de Matemáticas en todos los cursos del Ciclo, pues el profesor va subiendo de curso junto a sus alumnos. Otra situación posible es que, dentro del mismo curso, y sin que haya ruptura en la continuidad de las clases dedicadas a un tema de Matemáticas, se produzca el paso de los estudiantes de un nivel al siguiente; es relativamente fácil que ocurra esto al pasar del nivel 1 al 2 ó del nivel 2 al 3. En ambos casos, puede ocurrir que la primera fase sea innecesaria.

Ese es el motivo por el que, en la secuencia de enseñanza de las isometrías del plano que proponemos, sólo incluimos un conjunto completo de actividades de la fase de información en el primer nivel de razonamiento de cada movimiento, limitándonos en los bloques de actividades de los siguientes niveles a dar algunas orientaciones o actividades aisladas. En caso de que la instrucción no comience en el primer nivel, se pueden seleccionar tareas de distintos niveles para saber hasta qué punto los alumnos están familiarizados con las estructuras propias del nivel correspondiente.

Fase 2 (Orientación Dirigida)

- Se guía a los alumnos mediante actividades y problemas (dados por el profesor o planteados por los mismos estudiantes) para que éstos descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicas de la red de conocimientos que deben formar.
- Los problemas propuestos han de llevar directamente a los resultados y propiedades que los estudiantes deben entender y aprender. El profesor tiene que seleccionar cuidadosamente estos problemas y actividades y debe orientar a sus alumnos hacia la solución cuando lo necesiten.

Esta fase es fundamental, ya que en ella se construyen los elementos básicos de la red de relaciones del nivel correspondiente. Van Hiele (1986, p. 97) señala que "las actividades (de la segunda fase), si se seleccionan cuidadosamente, constituyen la base adecuada del pensamiento de nivel superior". El trabajo se ha de presentar a los alumnos de manera que los conceptos y las estructuras a alcanzar aparezcan de manera progresiva. El papel del profesor es, por tanto, básico en esta fase, ya que debe guiar a sus alumnos para que adquieran correctamente las estructuras básicas del nivel. El profesor debe seleccionar los problemas para que planteen situaciones en cuya resolución aparezca alguno de los elementos (conceptos, propiedades, definiciones, relaciones entre propiedades, etc.) que los alumnos tienen que aprender y en los que deben basar su nueva forma de razonamiento.

Fase 3 (Explicitación)

- Los alumnos deben intentar expresar en palabras o por escrito los resultados que han obtenido, intercambiar sus experiencias y discutir sobre ellas con el profesor y los demás estudiantes, con el fin de que lleguen a ser plenamente conscientes de las características y relaciones descubiertas y afiancen el lenguaje técnico que corresponde al tema objeto de estudio.

Los estudiantes tienen que utilizar el vocabulario adecuado para describir la estructura sobre la que han estado trabajando. Se debe aprender y afianzar el vocabulario propio del nivel. En esta fase no se produce un aprendizaje de conocimientos nuevos, en cuanto a estructuras o contenidos, sino una revisión del trabajo llevado a cabo con anterioridad, de puesta a punto de conclusiones y de práctica y perfeccionamiento de la forma de expresarse, todo lo cual origina un afianzamiento de la nueva red de conocimientos que se está formando.

El tipo de trabajo que de debe realizar en esta fase es de discusión y comentarios sobre la forma de resolver los ejercicios anteriores, elementos, propiedades, relaciones, … que se han observado o utilizado.

La tercera fase no debe interpretarse como fijada temporalmente después de la segunda fase y antes de la cuarta, sino más bien como una actitud permanente de diálogo y discusión en todas las actividades que lo permitan de las diferentes fases de aprendizaje. Por tanto, en la secuencia de enseñanza de las isometrías que proponemos no hay actividades diseñadas expresamente para esta fase, entendiendo que sí se debe exigir la justificación y discusión en todo momento entre los alumnos o entre profesor y alumnos.

Fase 4 (Orientación Libre)

- En esta fase se debe producir la consolidación del aprendizaje realizado en las fases anteriores. Los estudiantes deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores y, probablemente, más complejos.
- El profesor debe proponer a sus alumnos problemas que no sean una simple aplicación directa de un dato o algoritmo conocido, sino que planteen nuevas relaciones o propiedades, que sean más abiertos, preferiblemente con varias vías de resolución, con varias soluciones o con ninguna. Por otra parte, el profesor debe limitar al máximo su ayuda a los estudiantes en la resolución de los problemas.
- En palabras de Van Hiele (1986, p. 54), los estudiantes aprenden a encontrar su camino en la red de relaciones por sí mismos, mediante actividades generales.

Los alumnos deberán aplicar los conocimientos y lenguaje que acaban de adquirir en otras situaciones nuevas. Los problemas planteados en esta fase deben obligar a los estudiantes a combinar sus conocimientos y aplicarlos a situaciones diferentes de las propuestas anteriormente. La intervención del profesor en la resolución de las tareas debe ser mínima, pues son los alumnos quienes tienen que encontrar el camino adecuado a partir de lo aprendido en la segunda fase.

Fase 5 (Integración)

- Los estudiantes establecen una visión global de todo lo aprendido sobre el tema y de la red de relaciones que están terminando de formar, integrando estos nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente.
- El profesor debe dirigir resúmenes o recopilaciones de la información que ayuden a los estudiantes a lograr esta integración. Las actividades que les proponga no deben implicar la aparición de nuevos conocimientos, sino sólo la organización de los ya adquiridos.

Se trata de adquirir una visión general de los contenidos del tema objeto de estudio, integrada por los nuevos conocimientos adquiridos en este nivel y los que ya tenían los estudiantes anteriormente. No hay un aprendizaje de elementos nuevos, sino una fusión de los nuevos conocimientos, algoritmos y formas de razonar con los anteriores. Las actividades de esta fase deben favorecer dicha integración y permitirle al profesor comprobar si se ha conseguido ya. Parte del trabajo que debe realizar el profesor en la quinta fase es la confección y presentación a los alumnos de resúmenes de los contenidos estudiados. En cuanto a los estudiantes, es importante memorizar los resultados más importantes y adquirir destreza y agilidad en el uso de los nuevos algoritmos, procedimientos de resolución de problemas o métodos de trabajo.

Por lo que respecta a las experimentaciones de nuestras unidades de enseñanza de las isometrías, no hemos diseñado actividades específicas para la quinta fase, si bien a ella corresponden el resumen por el profesor de la red de relaciones de la isometría objeto de estudio y la memorización por los alumnos de los nuevos resultados, definiciones, relaciones, etc., así como la comprensión e interiorización de las nuevas relaciones.

Sin embargo, es necesario tener presente que la quinta fase de aprendizaje es importante. Una debilidad de nuestras experimentaciones ha sido que hemos prestado a esta fase poca atención pues, aunque periódicamente hemos hecho con nuestros estudiantes resúmenes de lo estudiado hasta ese momento, han sido pocos y posteriormente se ha notado su falta ya que a veces los estudiantes no recordaban algún resultado que habían estudiado algunas semanas antes y que debían utilizar.

Es posible que, después de analizar los contenidos de las unidades de enseñanza de las isometrías, los cuales presentamos en el capítulo 2, al lector le parezca demasiado libre la aplicación de las fases de aprendizaje de Van Hiele que hemos hecho. Sobre ello deseamos puntualizar que, desde nuestro punto de vista, las fases de aprendizaje son una pauta útil a tener en cuenta para llevar a cabo la enseñanza de manera apropiada, pero que no es fácil, ni posible en bastantes ocasiones, encontrar tipos de actividades que coincidan exactamente con los que teóricamente se proponen en el modelo, o hacer un recorrido total por cada fase antes de pasar a la siguiente.

También pensamos que ningún modelo teórico de enseñanza o aprendizaje puede ni debe ser aplicado de manera rigurosa, sino que su estructura debe permitir adaptarlo a las particularidades de cada caso. La formulación de un modelo o una teoría será tanto más útil cuanto más fácil sea aplicarlo a la gran diversidad de situaciones que se presentan en las matemáticas escolares, tanto por las diferentes áreas de las Matemáticas como por los distintos tipos de estudiantes.

Probablemente, esta dificultad sea el motivo por el que apenas hay trabajos en los que se presentan unidades de enseñanza con una especificación clara y explícita de la fase de aprendizaje para la que están diseñadas las distintas actividades de la unidad. Más aún, las pocas investigaciones que sí lo hacen se limitan a trabajar en uno o dos niveles y a veces presentan variaciones en la aplicación de las fases de aprendizaje respecto de lo que señala su formulación teórica análogas a algunas de las que hemos hecho aquí (por ej., Bobango, 1987).

Para concluir esta sección de análisis de las fases de aprendizaje de Van Hiele, creemos importante destacar que una actividad por sí misma no corresponde en general a un nivel de razonamiento y una fase de aprendizaje concretos. No es posible analizar una actividad aislada, sino que hay que hacerlo dentro del contexto en el que se encuentre y teniendo en cuenta el trabajo realizado previamente y el que se planea realizar con posterioridad. Por ejemplo, se puede dar el caso siguiente: Una actividad A, propuesta en la fase 2 de un cierto nivel, permite descubrir una propiedad P1 que se empleará como base para la resolución, en la fase 4, de la actividad B, cuyo objetivo es descubrir la propiedad P2 basándose en el uso de P1. Pero si modificamos la organización de la unidad de enseñanza, podemos hacer que la actividad B pertenezca a la fase 2 y la actividad A a la fase 4, de manera que la propiedad P1 surgirá de la aplicación de la propiedad P2.

Del mismo modo, una actividad no tiene por qué corresponder a un nivel de razonamiento determinado, pues generalmente las actividades propuestas se pueden resolver utilizando métodos de trabajo y formas de razonamiento propias de distintos niveles. Lógicamente, si una actividad está incluida entre las correspondientes a cierto nivel N, el profesor debe exigir a los estudiantes respuestas coherentes con las características de dicho nivel N.

Propiedades del Modelo de Van Hiele.

Junto a las características particulares de cada nivel de razonamiento o fase de aprendizaje, es necesario mencionar algunas propiedades globales del Modelo de Van Hiele cuya consideración y análisis es imprescindible para una adecuada comprensión y utilización del modelo. A continuación presentamos las principales de estas propiedades, algunas de las cuales están íntimamente relacionadas con las investigaciones descritas en esta memoria.

Jerarquización y Secuencialidad de los niveles de razonamiento.

Para alcanzar un nivel de razonamiento, es necesario haber adquirido previamente los niveles anteriores. Van Hiele (1986, p. 51) afirma que "el pensamiento del segundo nivel no es posible sin el del nivel básico; el pensamiento del tercer nivel no es posible sin el pensamiento del segundo nivel".

Todos los estudios que conocemos realizados hasta la fecha que han analizado esta propiedad confirman su veracidad. Por ejemplo, Denis (1987), Burger, Shaughnessy (1986), Fuys, Geddes, Tischler (1988), Mayberry (1981) y (1983), Soon (1989) o Usiskin (1982). No obstante, también es frecuente encontrar estudiantes cuyo comportamiento no se ajusta a esta propiedad, si bien su proporción suele ser poco significativa y, generalmente, su presencia es un síntoma de algún tipo de problema o deficiencia en la metodología de asignación de niveles empleada.

La aceptación de esta propiedad puede ser importante cuando llega el momento de la práctica de la determinación del nivel de razonamiento de los estudiantes. Como veremos en su momento en el capítulo 3, tanto el método para evaluar las respuestas a los tests como el procedimiento de determinación de los grados de adquisición de los niveles de Van Hiele que hemos desarrollado nosotros se basan en la idea de que si un problema puede ser resuelto según los niveles N-1 y N, la resolución correcta del problema por métodos del nivel N supone tener adquirido el nivel N-1.

Relación entre el Lenguaje y los niveles de razonamiento.

Cada nivel tiene un lenguaje propio, entendiendo por ello no sólo las palabras o construcciones gramaticales empleadas, sino también el significado que se les da. Por ejemplo, para un estudiante del segundo nivel de razonamiento, "demostrar" una propiedad consiste en comprobar su veracidad en uno o pocos casos, para un estudiante del tercer nivel consiste en buscar algún tipo de justificación lógica intuitiva de la propiedad, mientras que para un estudiante del cuarto nivel consiste en aplicar el razonamiento lógico formal para obtener una demostración matemáticamente correcta y aceptable. Otro ejemplo lo da Van Hiele (1986, p. 51) en el campo de la aritmética, cuando dice que "la diferencia entre los objetos del segundo y el tercer niveles se puede observar también por diferentes formas de escritura. En el segundo nivel, los cálculos se basan en relaciones entre números concretos: 4 x 3 = 12, 6 + 8 = 14. En el tercer nivel de pensamiento, se basan en la generalización de resultados: a x (b + c) = (a x b) + (a x c)".

Esta característica explica la incomprensión entre dos personas que empleen lenguajes de distintos niveles. Este es un fenómeno que se produce con frecuencia en las aulas de Enseñanza Secundaria o la Universidad entre profesor y alumno cuando el profesor plantea un problema del cual espera una respuesta correspondiente al cuarto nivel (es decir un desarrollo riguroso y formal del problema) pero el estudiante está todavía en el segundo o tercer nivel de razonamiento y resuelve el problema mediante un ejemplo o un razonamiento intuitivo.

Localidad de los niveles de razonamiento.

Por localidad de los niveles se entiende que un individuo puede razonar en diferentes niveles al trabajar en distintos campos de la Geometría. Por el contrario, la idea de globalidad de los niveles plantea que el nivel de razonamiento de un individuo es el mismo en cualquier campo de la Geometría.

La falta de información válida sobre esta disyuntiva en un primer momento hizo que varias investigaciones intentaran poner luz en esta cuestión, entre ellas Gutiérrez, Jaime (1987 b) y Mayberry (1981). Según los resultados obtenidos, la localidad es la situación real, postura que compartimos. El propio Van Hiele acepta la localidad de los niveles pues sugiere que, una vez que se ha alcanzado un nivel para un concepto, o área de la Geometría, requiere menos tiempo y esfuerzo alcanzar ese mismo nivel para otros conceptos o áreas. Esta postura es también apoyada por Freudenthal (1973) cuando plantea la idea de las organizaciones locales de la Geometría.

Al elaborar la unidad de enseñanza de las isometrías hemos tenido en cuenta esta característica: En primer lugar, hemos diseñado unidades de enseñanza para los niveles 1 y 2 independientes para cada isometría (traslaciones, giros, simetrías). Posteriormente, al llegar al nivel 3 surgen las propiedades que relacionan unas isometrías con otras, por lo que se produce la necesaria integración de conocimientos de las distintas isometrías. Esto supone, en términos prácticos, que, por ejemplo, para poder trabajar correctamente en el tercer nivel de las simetrías, es necesario haber adquirido en las traslaciones y los giros, como mínimo, el nivel 2.

Discretitud o Continuidad de los niveles de razonamiento.

Esta propiedad hace referencia a la manera como se produce el paso de un nivel a otro. La formulación inicial del modelo hecha por el propio Van Hiele establecía que el paso de un nivel al siguiente se produce de manera brusca, como un salto. Este concepto lo podemos representar gráficamente mediante una escalera, como en la figura 1.1.

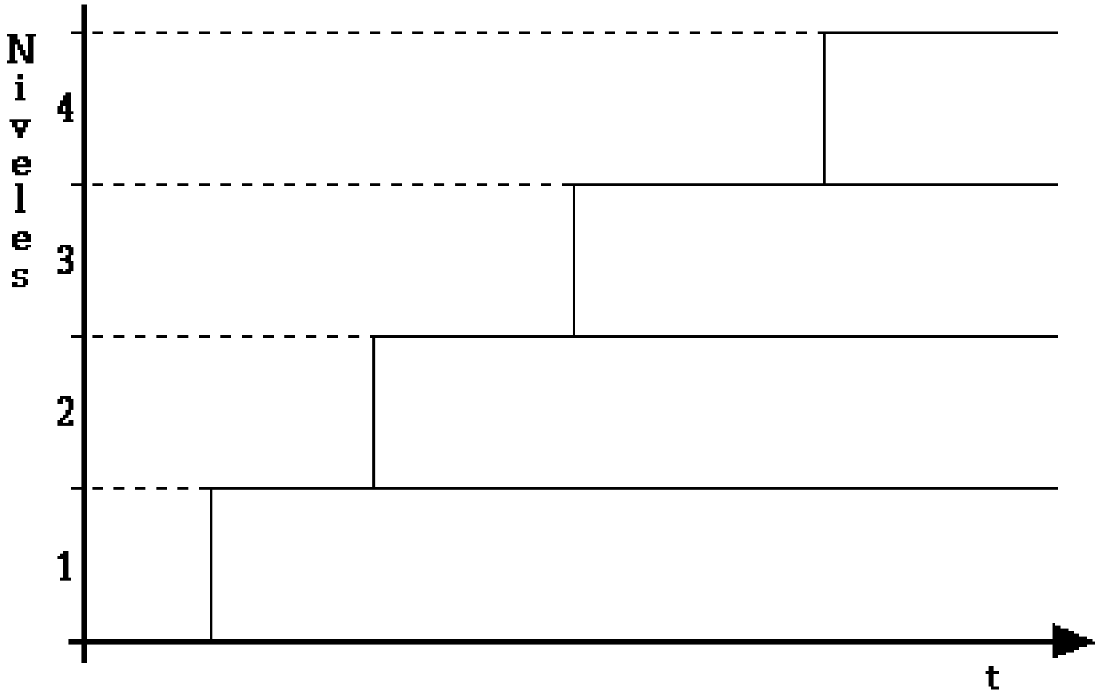


Figura 1.1. Discretitud de la adquisición de los niveles de Van Hiele.

Sin embargo, las investigaciones recientes, por ejemplo Fuys, Geddes, Tischler (1988), Burger, Shaughnessy (1990), Gutiérrez y otros (1991) y Shaughnessy y otros (1991), han mostrado que la interpretación discontinua de los niveles no puede explicar ciertas situaciones, bastante frecuentes, de alumnos que razonan simultánea o alternativamente en dos niveles consecutivos. En algunas de estas investigaciones, aunque los autores iniciaron la investigación basándose en la concepción discreta de los niveles de Van Hiele, los resultados obtenidos les obligaron, a plantear la existencia de contradicciones entre sus resultados y esa idea de discretitud (Usiskin, 1982), cuando no a reconocer que el paso de un nivel al siguiente se producía de manera continua (Burger, Shaughnessy, 1990).

Por ello, actualmente tiene más fuerza y produce mejores resultados en los análisis del comportamiento de los estudiantes la consideración de la continuidad en la adquisición de los niveles. Nuestros trabajos de los últimos años y los presentados en esta memoria se basan en el carácter continuo de la transición entre los niveles: Creemos que el paso de un nivel al siguiente no se produce de forma brusca, sino que hay un período de transición, durante el cual se entremezclan momentos de razonamiento de los dos niveles consecutivos.

Una representación de la continuidad, a la que se ajusta la interpretación de adquisición de los niveles de razonamiento en términos de "grados de adquisición" que proponemos en el capítulo 3, es la esquematizada en la figura 1.2, que es una variación del propuesto en Clements (1992).

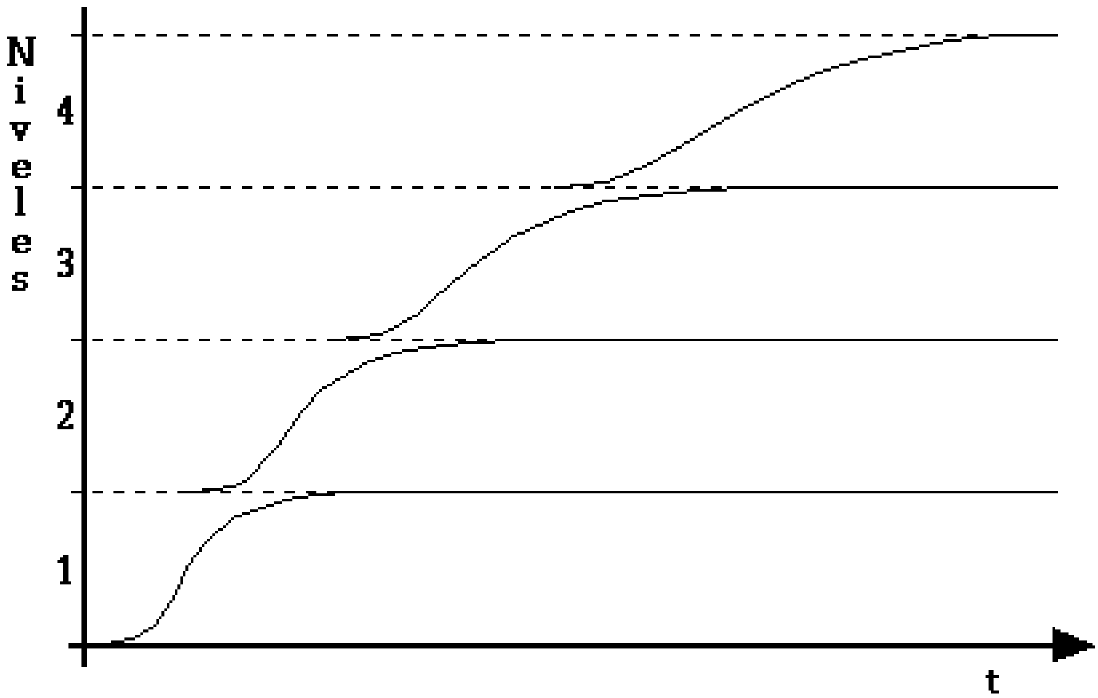


Figura 1.2. Continuidad de la adquisición de los niveles de Van Hiele.

La Instrucción como herramienta de avance en el nivel de razonamiento.

Frente a teorías, como la de Piaget, que ligan el desarrollo intelectual al biológico, Van Hiele afirma que la instrucción es un factor básico para avanzar en el nivel de razonamiento. Por una parte, Van Hiele dice que "la maduración que lleva a un nivel superior … debe considerarse, por encima de todo, como un proceso de aprendizaje y no como una maduración de tipo biológico" (Fuys, Geddes, Tischler, 1984). Además, señala que "la transición de un nivel al siguiente no es un proceso natural; tiene lugar bajo la influencia de un programa de enseñanza-aprendizaje. La transición no es posible sin el aprendizaje de un nuevo lenguaje"

(Van Hiele, 1986, p. 50), aunque también nos previene de que, "sin embargo, es posible que ciertas formas de enseñanza no permitan alcanzar los niveles superiores, pues los métodos de pensamiento usados en esos niveles permanecen inaccesibles a los estudiantes" (Fuys, Geddes, Tischler, 1984).

CAPÍTULO 2: DISEÑO DE UNA UNIDAD DE ENSEÑANZA DE LAS ISOMETRÍAS DEL PLANO BASADA EN EL MODELO DE VAN HIELE

Este capítulo tiene como objetivo presentar una propuesta de enseñanza de las Isometrías del Plano, que está organizada teniendo en cuenta los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje del Modelo de Van Hiele.

En primer lugar explicamos los motivos por los que iniciamos hace algunos años esta investigación y el interés que tienen sus resultados. A continuación, hacemos una revisión de las publicaciones interesantes relacionadas con el tema de nuestro trabajo, con el fin de permitir situarlo en el contexto de las otras investigaciones realizadas que tienen puntos en común con él. También es importante identificar los contenidos matemáticos de la unidad de enseñanza, por lo que hacemos un rápido resumen de los conceptos y propiedades matemáticos que son los objetivos de enseñanza de la unidad.

La parte más importante de este capítulo empieza en la sección 2.4, en la cual se hace una presentación general de la investigación que ha dado lugar a la unidad de enseñanza de las Isometrías del Plano. Las cuatro secciones restantes contienen nuestra aportación a la aplicación del Modelo de Van Hiele en el campo de las Isometrías: En la sección 2.5 enunciamos descriptores de los niveles de Van Hiele específicos para las Isometrías del Plano y en las secciones siguientes presentamos y comentamos de manera detallada los objetivos y actividades de la unidad de enseñanza.

2.1. Interés y motivos de la investigación.

Hay dos puntos que se deben tener en cuenta al valorar el interés de esta parte de la memoria y que, al mismo tiempo, son las razones por las que nos decidimos, hace algunos años, a iniciar esta investigación:

1) La escasez de materiales curriculares diseñados teniendo en cuenta explícitamente los niveles de razonamiento y, sobre todo, las fases de aprendizaje de Van Hiele.

2) El interés de ampliar el campo de aplicación del Modelo de Van Hiele a otras áreas de la Geometría diferentes de los polígonos y los conceptos relacionados con éstos.

Tanto en España como en otros países en los que se está investigando sobre el Modelo de Van Hiele, se aprecia una falta de materiales curriculares diseñados teniendo en cuenta las propuestas de dicho modelo y en los que se presenten de manera explícita no sólo los niveles de razonamiento, sino también las fases de aprendizaje. Además, en la mayoría de los casos en que los autores afirman que sí han prestado atención a esta componente del modelo, no especifican claramente cuál es la parte de la unidad que corresponde a cada una de las fases.

El proyecto de investigación Gutiérrez y otros (1991) es uno de los escasos trabajos en los que sí se hace esa identificación: Esta investigación incluye una unidad de enseñanza de triángulos, cuadriláteros y polígonos en general centrada en los niveles segundo y tercero de Van Hiele; para cada uno de dichos temas de Geometría, se presentan los ejercicios organizados siguiendo las fases de cada nivel.

Bobango (1987) presenta una propuesta para la enseñanza de triángulos y cuadriláteros centrada en un contexto informático que utiliza principalmente el programa Geometric Supposer. En dicha unidad se incluye una especificación de las actividades para las fases de aprendizaje, si bien se limita al segundo nivel de razonamiento. Es interesante anotar que en la secuencialización de las fases de aprendizaje utilizada en esta investigación hay algunas modificaciones respecto a la propuesta teórica de Van Hiele, parte de las cuales coinciden con las introducidas en la secuencia que proponemos en esta memoria, que ya hemos comentado en el capítulo 1. En particular, en la unidad de Bobango, la fase 3 no se sitúa secuencialmente tras las fases 1 y 2, sino que perdura a lo largo de toda la instrucción. En cuanto a la fase 5, se limita a realizar un resumen de los aspectos generales estudiados sobre triángulos y cuadriláteros.

Ludwig (1986) plantea la enseñanza de las Isometrías del Plano en un entorno informático a través del lenguaje Logo, pero lo hace de una manera confusa: El análisis en términos del Modelo de Van Hiele del progreso de los estudiantes en el aprendizaje de las Isometrías se combina con un análisis del aprendizaje del lenguaje Logo, tal como proponen Olson, Kieren, Ludwig (1987). El resultado final es una propuesta de unidad para la enseñanza de las Isometrías que está organizada haciendo más énfasis en el aprendizaje del Logo, pues se propone una distribución según los niveles de razonamiento y según las fases de aprendizaje del Logo.

Aparte de los trabajos que acabamos de mencionar, no conocemos ningún otro en el que, para cada actividad propuesta en la unidad de instrucción, se especifiquen el nivel y la fase dentro del nivel en los que debe situarse. No obstante, por su interés especial, comentaremos además otras dos investigaciones. La primera de ellas es la tesis doctoral de Dina van Hiele-Geldof (Van Hiele-Geldof, 1957), en la cual presenta la aplicación del modelo propuesto por P.M. van Hiele (Van Hiele, 1957) a unos temas de Geometría. No obstante, Dina van Hiele no especifica qué tareas de las que propone a sus alumnos corresponden a cada fase de aprendizaje de cada nivel.

La segunda investigación es el proyecto de Brooklyn, en el cual se diseñaron tres módulos de enseñanza basados en el Modelo de Van Hiele. En la memoria de este proyecto (Fuys, Geddes, Tischler, 1988) se realiza una descripción detallada de la organización de las actividades según los niveles de razonamiento, pero sólo se hacen alusiones generales y vagas a su distribución en fases. En Jaime, Gutiérrez (1990 b) mostramos un desglose del segundo de esos módulos, el titulado "Estudio de relaciones angulares de los polígonos", indicando concretamente los niveles y, dentro de cada nivel, las fases a las que, según nuestro parecer, puede corresponder cada una de las actividades propuestas.

Mencionábamos al comienzo de esta sección el interés de aplicar el Modelo de Van Hiele a las diversas áreas de la Geometría escolar. El hecho de que en las primeras descripciones de los niveles presentadas se emplearan los polígonos para ilustrar la forma de razonar en cada nivel, especialmente en Van Hiele (1959) y Wirszup (1976), originó que la mayoría de los estudios posteriores sobre el Modelo de Van Hiele se centraran en dicha parte de la Geometría. Ello no quiere decir que no se haya trabajado en otras áreas de la Geometría, pero sí que se ha hecho poco y de manera dispersa.

En otra publicación clásica, Hoffer (1983), su autor reproduce la descripción de los niveles de razonamiento basada en los polígonos, pero también propone caracterizaciones de los niveles de Van Hiele para las áreas de lógica matemática, isometrías y números reales. No obstante, A. Hoffer nos ha comentado personalmente que dichas caracterizaciones no tenían su origen en investigaciones experimentales, sino que eran el fruto de una extrapolación teórica desde el campo de los polígonos.

Probablemente, uno de los motivos para que existan pocas investigaciones basadas en los niveles de Van Hiele en otros campos es la dificultad de iniciar el estudio ya que, en primer lugar, hay que realizar una caracterización específica y detallada de cada nivel de razonamiento en ese campo concreto. De todas formas, el uso de los niveles de Van Hiele está dando muy buenos resultados, por lo que, aunque resulta difícil, es interesante abrir nuevas líneas de investigación en áreas de la Geometría como la Proporcionalidad Geométrica (Semejanza), la Geometría Espacial o las Isometrías del Plano.

2.2. Resumen de la literatura sobre la enseñanza de las Isometrías del Plano.

Trabajos de otros autores

Los primeros trabajos importantes que conocemos en los que se analizan las dificultades del aprendizaje de las Isometrías del Plano son los de Moyer (1974) y (1978) y Schultz (1977) y (1978). Se trata de dos investigaciones de corte piagetiano que reflejan los métodos de investigación habituales en ese momento. En ellas se estudia la influencia de diversos factores de tipo perceptivo en la habilidad para realizar traslaciones, giros o simetrías, mediante la manipulación de unas figuras con las que los estudiantes deben realizar determinados movimientos. Entre otros factores que influyen en la dificultad para realizar correctamente el movimiento, se identifican la dirección del movimiento (vertical, horizontal, inclinada), la distancia entre el objeto y su imagen y, para las simetrías, la posición del eje.

Entre los trabajos más recientes que no están directamente relacionados con el Modelo de Van Hiele hay que señalar los trabajos de D. Küchemann y D. Grenier. Küchemann (1981), como parte del proyecto C.S.M.S., llevó a cabo un análisis de los errores cometidos al dibujar giros y simetrías. Esta investigación se basó en la administración de un test a una muestra significativa en una región de Gran Bretaña y en entrevistas posteriores a parte de la muestra, por lo que sus resultados se han tenido en cuenta en gran parte de las investigaciones posteriores en las que intervenían esos movimientos. En concreto, determina unas variables que influyen en la dificultad de la realización de los giros y las simetrías y determina los tipos de errores cometidos. Con estos resultados establece una jerarquía de niveles de comprensión del movimiento correspondiente, que no tiene relación con el Modelo de Van Hiele.

Grenier (1988) es un estudio muy completo, organizado según la metodología de la escuela francesa de Didáctica de las Matemáticas, que intenta dilucidar dos puntos: i) Si es posible elaborar una serie de situaciones-problema, susceptible de cuestionar las concepciones erróneas sobre la simetría axial que persisten en los alumnos después de la enseñanza, y ii) cuáles son los medios didácticos y pedagógicos de los que dispone el enseñante que le permiten la devolución del problema al alumno y una gestión de las fases de institucionalización adaptada a los objetivos de aprendizaje. Entre los trabajos llevados a cabo para responder a esas cuestiones, incluye un estudio pormenorizado de cada una de las variables que influyen en la aplicación de una simetría axial y la secuencia de situaciones que se diseñó como propuesta de enseñanza en 6° grado (11-12 años de edad).

En cuanto a investigaciones publicadas sobre isometrías, basadas en el Modelo de Van Hiele, merece la pena reseñar las tres siguientes:

Como hemos comentado en la sección anterior, Ludwig (1986) diseña una unidad de enseñanza de las Isometrías del Plano en un entorno de lenguaje Logo. Para cada uno de los sub-temas (congruencia, traslaciones, simetrías y giros), Ludwig enuncia descriptores de los niveles de Van Hiele obtenidos a partir de la observación de las intervenciones de los alumnos. Pero, como hemos señalado previamente, se produce un solapamiento entre el análisis de las Isometrías y el del Logo que da lugar a una mezcla de descriptores de ambos campos, en la que predomina éste último.

Uno de los objetivos de Soon (1989) es investigar si en el aprendizaje de las transformaciones del plano (traslaciones, giros, simetrías y homotecias) se verifica la jerarquía de los niveles de Van Hiele. Su conclusión es afirmativa. En su trabajo, Soon incluye una caracterización de los niveles de Van Hiele 1 a 5 para las transformaciones del plano y diseña un test en forma de entrevista clínica, que administra a 20 estudiantes de Enseñanza Secundaria de 15 y 16 años de edad.

En Johnson-Gentile (1990) se estudian los efectos de entornos informáticos y no informáticos en el aprendizaje, niveles de razonamiento y precisión del lenguaje geométrico de los estudiantes, así como la relación entre el sexo de los estudiantes y su capacidad de visualización espacial, todo ello en los grados 5° y 6°. Esta investigación utiliza como material de trabajo la sección dedicada a los movimientos del plano en el diseño curricular de Clements y Battista (1988), el cual está basado en el uso de Logo y uno de cuyos objetivos es facilitar el progreso a lo largo de los sucesivos niveles de razonamiento de Van Hiele.

Trabajos previos propios

Nuestra actividad de enseñanza de las Isometrías del Plano comenzó en 1980, en la E.U. del Profesorado de E.G.B. de Valencia. Los contenidos de la asignatura en la que impartíamos el tema de las Isometrías eran fundamentalmente matemáticos y la presentación de la asignatura correspondía al esquema clásico de exposición formal en la pizarra y ejercicios de aplicación. En aquel momento desconocíamos la existencia de los niveles de Van Hiele. Un análisis de aquellas clases desde la perspectiva actual nos permite reconocer el problema de incomprensión de lenguaje a que hace referencia el Modelo de Van Hiele, puesto que los alumnos mayoritariamente razonaban en el segundo nivel, mientras que para gran parte del tema se exigía razonamiento formal, esto es, de cuarto nivel.

La incomprensión que mostraban los alumnos nos hizo modificar la metodología llevada a cabo e invertir el proceso de desarrollo del tema a partir del curso 1983-84: Una cadena de actividades, en las que era básica la manipulación de figuras, iba conduciendo a los alumnos al descubrimiento de las características de los diversos movimientos y las relaciones entre ellos. En Gutiérrez, Jaime (1986) está el núcleo central de actividades propuestas. Esta forma de introducir los conceptos resultó mucho más efectiva, si bien, en momentos determinados, se podían detectar dificultades de comprensión, que correspondían a la exigencia de un nivel superior de razonamiento para resolver las tareas propuestas. En Gutiérrez, Jaime (1987 a) y (1988) presentamos los resultados de unas pruebas que realizamos para evaluar este cambio en la metodología de enseñanza.

Por otra parte, en el año 1986 comenzamos a trabajar con un grupo de profesores de diversos colegios públicos de E.G.B. en el diseño e implementación de unidades para la enseñanza de las Isometrías del Plano en E.G.B. Durante varios años, a partir de la aprobación de un proyecto de investigación por la Generalitat Valenciana, se realizaron experimentaciones de enseñanza de las simetrías en Preescolar, 4º, 6º, 7º y 8º de E.G.B, todas ellas con los grupos completos de alumnos, en sus horas habituales de clase y dirigidas por los respectivos profesores. También se amplió la investigación a la enseñanza de giros y traslaciones, mediante la elaboración de las secuencias de actividades correspondientes.

Tras las experimentaciones piloto en clases ordinarias de E.G.B. y en Magisterio que acabamos de mencionar, las tres unidades de enseñanza fueron modificadas y experimentadas de una manera más controlada, en condiciones de laboratorio, con estudiantes de los cursos 1º, 3º y 6º de E.G.B. Estas experimentaciones, junto con otra llevada a cabo posteriormente con estudiantes de la Escuela de Magisterio, también con metodología de laboratorio, son las que han formado la base de la propuesta que presentamos en esta memoria y a las cuales pertenecen las referencias concretas a comportamientos de alumnos que haremos en otras secciones de este capítulo.

La consideración del Modelo de Van Hiele en relación con la enseñanza de las Isometrías comenzamos a hacerla al empezar a preparar estas experimentaciones de laboratorio mencionadas en el párrafo anterior. En diversas publicaciones hemos presentado algunos resultados preliminares. En Jaime, Gutiérrez (1989 a) se puede ver una descripción general de las características de los niveles de Van Hiele para las Isometrías del Plano. En Jaime, Gutiérrez (1990 b) incluimos una descripción de los niveles de Van Hiele particularizados para las traslaciones del plano y proponemos una unidad de enseñanza de este tema que abarca desde el primero hasta el cuarto nivel de razonamiento, estando las actividades distribuidas según los niveles. En Gutiérrez, Jaime (1991) presentamos un trabajo sobre los giros con una organización semejante al anterior, pero con las actividades de cada nivel distribuidas también de acuerdo con las fases de aprendizaje. Por último, en Jaime (1992) hacemos algo similar en relación con las simetrías; en esta última publicación, hacemos una descripción de todos los niveles de razonamiento en el área de las simetrías y ofrecemos una relación de los objetivos de enseñanza a conseguir, pero sólo enunciamos actividades para las fases del primer nivel de razonamiento.

2.3. Bases matemáticas: El grupo de las Isometrías del Plano.

En esta sección presentamos un resumen de los principales elementos (definiciones y propiedades) de la estructura matemática del conjunto de las Isometrías del Plano que tienen que ver con los objetivos de enseñanza de la unidad que hemos diseñado.

No hemos pretendido dar una visión completa del tema desde el punto de vista matemático, sino que nos hemos limitado a enunciar aquellas propiedades que son explícitamente objeto de estudio en algún momento o que, aunque no aparecen enunciadas directamente en ninguna actividad, la unidad de enseñanza sí contiene todos los elementos necesarios para su estudio. Este es el caso de la estructura de grupo (los distintos grupos de isometrías y sus subgrupos) y de las propiedades relacionadas directamente con ella (elementos neutro y simétricos).

Por otra parte, la organización de esta sección es más temática que lógico-deductiva. Para un estudio matemático detallado de las Isometrías del Plano, se puede recurrir a numerosas publicaciones, por ejemplo Martin (1982).

Definiciones.

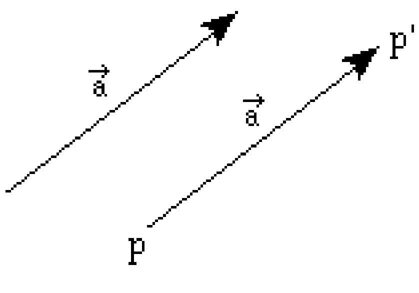
Definición 1. Una isometría del plano es una aplicación del plano en sí mismo $f: \Pi \longrightarrow \Pi$ que mantiene las distancias entre los puntos:

$$d(f(p),f(q)) = d(p,q)\ , \quad \forall\, p \in \Pi \ \text{ y } \ \forall\, q \in \Pi.$$

Definición 2. Sea $\vec{a}$ un vector del plano. La traslación de vector $\vec{a}$ es una aplicación del plano en sí mismo $T_a: \Pi \longrightarrow \Pi$ tal que:

$$T_a(p) = p' \text{ si y sólo si } \overrightarrow{pp'} = \vec{a}, \quad \forall\, p \in \Pi.$$

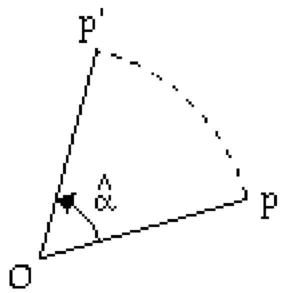
El vector $\vec{a}$ es el *vector de traslación.*



Definición 3. Sean un punto O del plano y un ángulo orientado $\hat{\alpha}$. El giro de centro O y ángulo $\hat{\alpha}$ es una aplicación del plano en sí mismo $G(O, \hat{\alpha}): \Pi \longrightarrow \Pi$ tal que:

$G(O, \hat{\alpha})(p) = p'$ si y sólo si $d(O,p) = d(O,p')$ y $\angle pOp' = \hat{\alpha}$, $\forall p \in \Pi$.

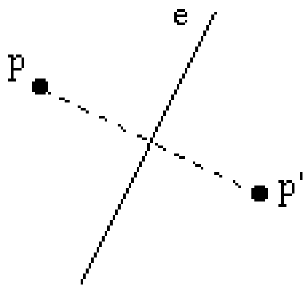
El punto O es el *centro de giro* y $\hat{\alpha}$ es el *ángulo de giro.*



Definición 4. Sea una recta e del plano. La simetría axial (o simplemente simetría) de eje la recta e es una aplicación del plano en sí mismo $S_e: \Pi \longrightarrow \Pi$ tal que:

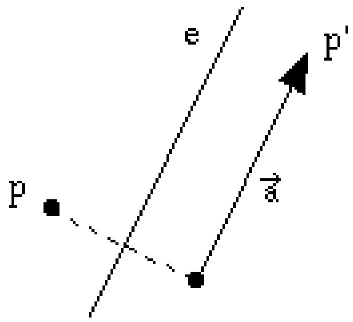
$S_e(p) = p'$ si y sólo si e es la mediatriz del segmento pp', $\forall p \in \Pi$.

La recta e es el *eje de simetría.*



Definición 5. Sean una recta del plano e y un vector del plano $\vec{a}$ paralelo a la recta e. La simetría en deslizamiento de eje e y vector $\vec{a}$ es una aplicación del plano en sí mismo $S(e,a): \Pi \longrightarrow \Pi$ tal que:

$S(e,a) = T_a \circ S_e$.



Definición 6. Dos isometrías del plano f y g son equivalentes si y solo si $f(p) = g(p)$, $\forall p \in \Pi$.

Propiedades básicas de las isometrías.

Traslaciones.

1) Toda traslación es una isometría.

2) La composición de dos traslaciones de vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es otra traslación de vector $\overrightarrow{a+b}$: $T_b \circ T_a = T_{a+b}$.

3) Toda traslación se puede descomponer (de infinitas formas) en un producto de dos traslaciones.

4) Las traslaciones conservan el sentido de los ángulos.

Giros.

1) Todo giro es una isometría.

2) Dos giros del mismo centro $G(O, \hat{\alpha})$ y $G(O, \hat{\beta})$ son equivalentes si y sólo si $\hat{\alpha} - \hat{\beta} = 360^\circ$

3) El centro de un giro (distinto de la aplicación identidad) es el único punto que se mantiene invariante por ese giro: Sean $p \in \Pi$ y $\hat{\alpha} \neq 360^\circ$. Entonces, se tiene que $G(O, \hat{\alpha})(p) = p$ si y sólo si $p = O$.

4) a) La composición de dos giros del mismo centro es otro giro del mismo centro cuyo ángulo es la suma de los ángulos: $G(O, \hat{\beta}) \circ G(O, \hat{\alpha}) = G(O, \hat{\alpha} + \hat{\beta})$.

b) La composición de dos giros de distinto centro $G(O', \hat{\beta}) \circ G(O, \hat{\alpha})$ es:

- Un giro $G(O'', \hat{\alpha} + \hat{\beta})$ si $\hat{\alpha} + \hat{\beta} \neq 360^\circ$
- Una traslación T_a si $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 360^\circ$

5) a) Todo giro se puede descomponer (de infinitas maneras) en un producto de dos giros con su mismo centro.

b) Todo giro se puede descomponer (de infinitas maneras) en un producto de dos giros de distintos centros.

6) Toda traslación se puede descomponer (de infinitas maneras) en un producto de dos giros de distintos centros.

7) Los giros conservan el sentido de los ángulos.

Simetrías.

1) Toda simetría es una isometría.

2) Si $p' = S_e(p)$, entonces el segmento pp' es perpendicular al eje e.

3) Si $p' = S_e(p)$ y $q \in e$, entonces $d(p,q) = d(p',q)$.

4) Los puntos del eje de una simetría son los únicos puntos que se mantienen invariantes por esa simetría: Sea $p \in \Pi$. Entonces, $S_e(p) = p$ si y sólo si $p \in e$.

5) a) La composición de dos simetrías $S_{e_1} \circ S_{e_2}$ de ejes paralelos es la traslación T_a tal que: $\vec{a} \perp e_i$, $i = 1, 2$, $|\vec{a}| = 2\, d(e_1,e_2)$ y el sentido del vector $\vec{a}$ es desde el eje e_2 hacia el eje e_1.

b) La composición de dos simetrías $S_{e_1} \circ S_{e_2}$ de ejes que se cortan en el punto O es el giro $G(O, \hat{\alpha})$ tal que: $\hat{\alpha} = 2 \angle e_2 e_1$ y el sentido del ángulo $\hat{\alpha}$ es igual al del ángulo que va desde el eje e_2 hasta el eje e_1.

6) a) Toda traslación se puede descomponer (de infinitas maneras) en un producto de dos simetrías de de ejes perpendiculares al vector de traslación.
b) Todo giro se puede descomponer (de infinitas maneras) en un producto de dos simetrías que se cortan en el centro de giro.

7) Las simetrías invierten el sentido de los ángulos.

Simetrías en deslizamiento.

1) Toda simetría en deslizamiento es una isometría.

2) El orden de actuación de la simetría y la traslación que definen una simetría en deslizamiento es indiferente: $S(e,a) = T_a \circ S_e = S_e \circ T_a$.

3) Las simetrías en deslizamiento invierten el sentido de los ángulos.

Teoremas de clasificación de las Isometrías del Plano.

1) Toda isometría, o conserva la orientación de los ángulos o la invierte.

2) Toda isometría que conserve la orientación de los ángulos o es una traslación o es un giro.

3) Toda isometría que invierta la orientación de los ángulos o es una simetría axial o es una simetría en deslizamiento.

4) Toda isometría del plano se puede descomponer como producto de tres o menos simetrías axiales.

La estructura algebraica del conjunto de las Isometrías del Plano.

1) La composición de una traslación y un giro es otro giro del mismo ángulo: $G(O, \hat{\alpha}) \circ T_a = G(O', \hat{\alpha})$ y $T_b \circ G(C, \hat{\alpha}) = G(C', \hat{\alpha})$. Esta composición no es conmutativa.

2) Cualquier giro se puede descomponer (de infinitas maneras) en producto de un giro y una traslación.

3) Para todo $p \in \Pi$, $S_e(p) = p'$ si y sólo si $S_e(p') = p$. Por lo tanto, las simetrías son aplicaciones idempotentes: $S_e \circ S_e = I$, siendo I la aplicación identidad.

4) El conjunto de las traslaciones del plano es un grupo abeliano con la ley composición de aplicaciones. El elemento neutro es la traslación de vector nulo T_o, la aplicación identidad. El elemento simétrico de la traslación T_a es la traslación T_{-a}, donde $-\vec{a}$ es el vector del mismo módulo y dirección que $\vec{a}$ pero de sentido contrario.

5) Para cada punto $O \in \Pi$, el conjunto de los giros del plano con centro en O es un grupo abeliano con la ley composición de aplicaciones. El elemento neutro es el giro G(O, 0°), la aplicación identidad. El elemento simétrico del giro $G(O, \hat{\alpha})$ es el giro $G(O, -\hat{\alpha})$.

6) El conjunto de las traslaciones y los giros del plano es un grupo, no abeliano, con la ley composición de aplicaciones. El subconjunto de las traslaciones es un subgrupo abeliano. El subconjunto de los giros del mismo centro es un subgrupo abeliano, para cada punto del plano.

7) El conjunto de las Isometrías del Plano es un grupo, no abeliano, con la ley composición de aplicaciones. El elemento neutro es la aplicación identidad. Los elementos simétricos son: $T_a^{-1} = T_{-a}$; $G(O, \hat{\alpha})^{-1} = G(O, -\hat{\alpha})$; $S_e^{-1} = S_e$; $S(e,a)^{-1} = S(e,-a)$.

2.4. Desarrollo y organización de la investigación.

Cronología de la investigación.

Tal como hemos señalado en la sección 2.2, previamente a la consideración de los niveles de Van Hiele como marco de referencia para la organización de la enseñanza, disponíamos ya de información relativa a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de este tema. En concreto, contábamos con la información aportada por:

- Nuestro conocimiento de las Isometrías del Plano desde el punto de vista matemático.

- Los resultados de investigaciones previas sobre aprendizaje de las Isometrías del Plano, mencionadas en la sección 2.2, en particular las llevadas a cabo por Küchemann (1981), Grenier (1988) y nosotros mismos: Gutiérrez, Jaime (1987 a), (1988) y Jaime, Gutiérrez (1989 b).

- Nuestra experiencia de enseñanza de este tema en la E.U. del Profesorado de E.G.B. de Valencia siguiendo varias metodologías, unas veces mediante enseñanza formal y otras mediante una enseñanza por descubrimiento.

- Los resultados de la experimentación piloto, en grupos completos de E.G.B., de una unidad de enseñanza de las simetrías diseñada por nosotros[1].

Toda esta experiencia previa ha influido, obviamente, en los resultados de nuestra investigación actual. El trabajo de diseño de las unidades de enseñanza basadas en el Modelo de Van Hiele presentado en esta memoria se ha llevado a cabo mediante las siguientes etapas:

- Consideración y análisis de toda la información y experiencia detalladas en los párrafos precedentes.

- Identificación teórica de las características de los niveles de Van Hiele en el área de las Isometrías del Plano, a partir de las características generales del modelo.

- Modificación de la unidad de enseñanza de las simetrías, ya experimentada con anterioridad, y diseño de unidades de traslaciones y giros para los dos primeros niveles de Van Hiele.

- Experimentación en laboratorio de las unidades anteriores, con grupos de dos a cuatro alumnos, todos ellos del Colegio Público de Prácticas de Valencia, en los siguientes cursos:

Traslaciones y Giros: 3º y 6º de E.G.B.; Simetrías: 1º y 3º de E.G.B.

- Ampliación de las unidades de enseñanza anteriores para los niveles de razonamiento tercero e inicio del cuarto.

- Experimentación de estas unidades de enseñanza con dos alumnas de 2º curso de la especialidad de Ciencias de la E.U. del Profesorado de E.G.B. de Valencia.

- Caracterización definitiva de los niveles de Van Hiele en el área de las Isometrías del Plano, como consecuencia del análisis de las experimentaciones mencionadas.

- Modificación de las unidades de enseñanza experimentadas y elaboración de las unidades que presentamos como propuesta final en esta memoria.

Los grupos reducidos de estudiantes de E.G.B. a los que nos acabamos de referir han sido diferentes para la experimentación de cada movimiento, excepto en el caso de 6º de

[1] Las primeras actividades de esa unidad están extraídas de o basadas en Walter (1973).

E.G.B., cuyas alumnas siguieron las unidades de traslaciones y giros, y en el de Magisterio, cuyas alumnas siguieron, en este orden, las unidades de traslaciones, giros y simetrías. De las dos alumnas de Magisterio, una realizó las tres unidades de enseñanza, mientras que la otra no asistió a la de simetrías.

Todas las sesiones de estas experimentaciones se llevaron a cabo en el laboratorio del Departamento de Didáctica de la Matemática, fuera de las horas habituales de clase y se grabaron en video. Posteriormente, las cintas de video fueron transcritas y analizadas. Como resultado de este análisis preparamos unos resúmenes que recogen, con algunos comentarios, las partes más interesantes de las experimentaciones. Estos resúmenes están incluidos en los anexos 1, 2 y 3 de esta memoria.

La duración habitual de las sesiones de experimentación osciló entre 45 y 60 minutos para los alumnos de E.G.B. y entre 1 y 3 horas para las alumnas de Magisterio. La cantidad de sesiones con cada grupo puede verse en la tabla 2.1.

La unidad de enseñanza fue diseñada por la autora de esta tesis doctoral, la cual proporcionó personalmente la instrucción en la mayoría de los cursos (traslaciones y giros en 6° de E.G.B. y Magisterio; simetrías en Magisterio) y dirigió a profesores o futuros profesores en los restantes.

Traslaciones	nº de sesiones
3º de E.G.B.	8
6º de E.G.B.	5
Magisterio	5

Giros	nº de sesiones
3º de E.G.B.	20
6º de E.G.B.	9
Magisterio	6

Simetrías	nº de sesiones
1º de E.G.B.	3
3º de E.G.B.	6
Magisterio	13

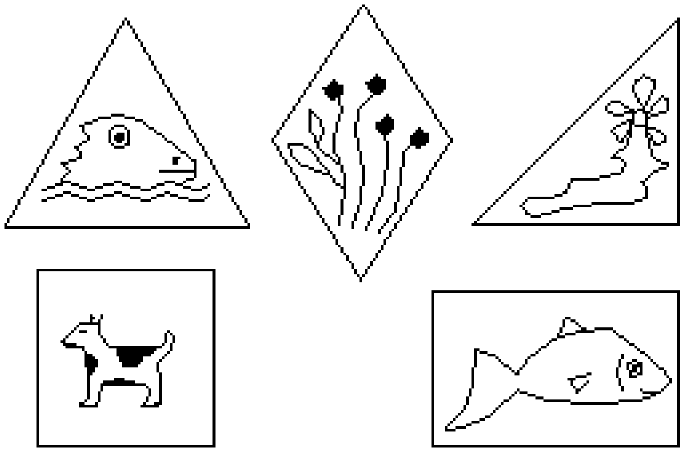
Tabla 2.1. Cursos de la experimentación y cantidad de sesiones de cada uno.

El contexto de la unidad de enseñanza.

Uno de nuestros objetivos al abordar la elaboración de este material de enseñanza fue preparar unas actividades en las que la comprensión de los conceptos básicos estudiados se basara en la realización física de los movimientos correspondientes, más que en el dibujo de las imágenes. Esto es particularmente importante cuando nos encontramos con estudiantes de los dos primeros niveles de Van Hiele.

Otro objetivo, de distinto tipo, fue conseguir la viabilidad de su implementación en cualquier Centro, con un coste mínimo. Ello descartaba el uso de materiales costosos o de actividades que requiriesen una infraestructura especial, en particular un entorno informático.

El resultado ha sido un entorno de aprendizaje en el que el material básico para manipular son unas pequeñas figuras de papel (ver dibujo 2.1). Es muy fácil y barato disponer de la cantidad necesaria de figuras, pues sólo hay que conseguir la cantidad suficiente de fotocopias y recortar las figuras. Los enunciados de las actividades están planteados en hojas de papel de forma que los alumnos utilicen estas piezas sobre ellas en la realización de los movimientos correspondientes.



Dibujo 2.1. Figuras para las actividades.

Una vez encontrada la solución (generalmente la imagen de una figura por determinado movimiento), los alumnos pegarán una pieza sobre la lámina, en vez de dibujarla. Esta reducción de la necesidad de dibujar es interesante por varios motivos: Evita errores producidos por una destreza insuficiente de dibujo, garantizando la congruencia real (no sólo formal) de las figuras y sus imágenes. Este procedimiento resulta especialmente eficaz para los niños pequeños. Así mismo, para cualquier tipo de alumnos supone un ahorro bastante importante de tiempo.

Además de las láminas y las figuras mencionadas, los materiales complementarios que necesita cada estudiante para todas las unidades de enseñanza son hojas de papel y los instrumentos habituales de dibujo (regla, escuadra y compás). Para las actividades de giros, necesitan, además, un transportador, un disco de plástico transparente (acetato, por ejemplo) de aproximadamente 15 cm. de diámetro y una varilla de cartulina, madera, etc. de unos 10 cm. de longitud. Para las actividades de simetrías necesitan, además de los materiales generales, un mira (metacrilato coloreado, que permite ver la figura simétrica a su través, en el lugar donde le corresponde) y un espejo, ambos de unos 10x15 cm.

En la unidad de enseñanza que hemos elaborado, prescindimos casi por completo del uso de coordenadas. El motivo de ello es que hemos puesto el énfasis en la consideración de los movimientos en sí mismos, evitando situaciones que implicaran el conocimiento o dominio de conceptos o relaciones matemáticas no imprescindibles para lograr nuestros objetivos y que muy probablemente no serían comprendidas por los alumnos de los niveles en los que debíamos trabajar, o necesitarían un proceso de instrucción largo. En concreto, eso se produce en el caso de las simetrías axiales cuyos ejes no están en posición horizontal o vertical y en los giros. Sin embargo, en las traslaciones, las relaciones implicadas en el uso de coordenadas para calcular las imágenes de los puntos son mucho más simples, por lo que se pueden introducir en la secuencia de enseñanza como un objetivo más de aprendizaje en los niveles de razonamiento apropiados, pero siempre manteniendo el objetivo de mostrar qué es este movimiento físico, evitando la reducción del estudio de las isometrías al aprendizaje de unas reglas de manejo de números.

Desde hace bastantes años, tras unas someras ideas presentadas en Enseñanza Primaria, que normalmente se reducen al plegado para las simetrías y a una visión intuitiva de los giros, en Enseñanza Media y en la Universidad las isometrías se contemplan casi exclusivamente desde el punto de vista matricial. De esta manera, el estudio de las isometrías se convierte en operaciones con matrices y, para la mayoría de los estudiantes, se pierde el significado real de lo que son esos movimientos. A partir de la secuencia de enseñanza que proponemos, el enfoque matricial se podría introducir una vez que los estudiantes hayan alcanzado el cuarto nivel. En ese momento serán capaces de trabajar en un contexto abstracto y las matrices y sus operaciones podrán adquirir sentido como representaciones de los movimientos correspondientes y las composiciones entre ellos.

En los nuevos Diseños Curriculares Base para la Educación Secundaria Obligatoria (M.E.C., 1989 y Generalitat Valenciana, 1990), se propone el estudio de las isometrías del plano en este período escolar, sugiriéndose métodos manipulativos para su estudio. En este caso sí se presentan las condiciones idóneas para poder realizar un estudio de las isometrías a lo largo de la E.S.O. que empiece en el primer nivel de razonamiento de Van Hiele y llegue hasta el tercero, pudiendo continuarlo en la Educación Secundaria Post-obligatoria, para intentar alcanzar el cuarto nivel de razonamiento.

Organización de la unidad de enseñanza.

La secuencia de enseñanza que proponemos pretende conseguir un progreso desde el primer nivel de razonamiento hasta el cuarto. Por los motivos que explicamos al describir los niveles de razonamiento en la sección 1.2, sólo hemos diseñado actividades para los tres primeros niveles.

Es importante tener presente que la adquisición de un nivel de razonamiento no obedece a una madurez estrictamente biológica ni a una cantidad de horas de enseñanza. Incluso con enseñanza adecuada, la forma de razonamiento de algunos estudiantes no llegará al tercer o cuarto nivel. Por lo general, la adquisición de un nivel de razonamiento requiere bastante tiempo, incluso años en el caso de los niveles 3 y 4, con una experiencia adecuada.

Tal como indicamos en la última parte de la sección 1.2, la opinión más generalizada es que los niveles de Van Hiele son locales. En caso de que una persona no haya alcanzado todavía el nivel n en ningún área de la Geometría, el dominio de ese nivel en cualquier concepto será una labor lenta en el tiempo. Pero si posee el nivel n en varios campos, es probable que la adquisición de ese mismo nivel en otros sea más rápida, siendo esto más evidente cuanto más alto sea ese nivel n. Así, una persona que razone en el cuarto nivel en polígonos, por ejemplo, es probable que adquiera deprisa los primeros niveles en cualquier otro concepto geométrico.

Con lo anterior queda claro que, generalmente, una secuencia de unas pocas actividades u horas de clase no será suficiente para pasar de un nivel al siguiente si los alumnos no tienen adquirido ese nivel en ningún otro concepto.

Al entender y valorar la propuesta de unidad de enseñanza que presentamos en esta memoria, es necesario tener en cuenta que no se trata de una unidad totalmente desarrollada, preparada para llevar a un aula. Los bloques de actividades que la componen están formados por tipos de actividades, adecuados para alcanzar los objetivos de aprendizaje propuestos y para ayudar a los estudiantes a alcanzar cierto nivel de razonamiento. Pero en ningún caso se debe interpretar que la realización de dichos bloques de actividades, tal como aparecen aquí, hará que un estudiante interiorice por completo las características de los conceptos implicados y de ese nivel de razonamiento.

Análogamente, las láminas que acompañan a las actividades, son tipos de situaciones sobre las que hay que resolver los problemas planteados en la actividad. En algunos casos, las láminas contienen todas las variedades de situaciones convenientes para esa actividad, pero en otros casos se deben plantear más situaciones, modificando las características de las figuras o las isometrías. Por último, queremos señalar que en muchas actividades no hemos incluido ejemplos de las láminas que las acompañan porque el contenido de estas láminas se desprende de manera evidente del texto de la actividad, luego incluir las láminas no aportaría información a la lectura y comprensión de la unidad de enseñanza.

Aunque nos estamos refiriendo en este capítulo al conjunto de las Isometrías del Plano, las actividades que hemos diseñado están divididas en tres módulos, dirigidas a la enseñanza de traslaciones, giros y simetrías. Las simetrías en deslizamiento se introducen en las actividades del segundo nivel y se estudian en las del tercer nivel del módulo dedicado a las simetrías, desde la perspectiva de una composición de movimientos, ya que los resultados y propiedades de las composiciones de movimientos forman parte del trabajo básico de ese nivel. Los motivos de que dicha isometría tenga un papel secundario en esta unidad son que este movimiento no se puede caracterizar de manera independiente de las otras isometrías y que su definición y utilización tiene una fuerte componente formal. Para comprender las simetrías en deslizamiento hace falta, como mínimo, un alto grado de adquisición del tercer nivel, por lo que en esta unidad nos hemos limitado a introducir el concepto y a procurar el aprendizaje de sus propiedades básicas. Un desarrollo de la unidad de enseñanza que incluyera actividades para el cuarto nivel de Van Hiele sí debería abordar el estudio detallado de las simetrías en deslizamiento.

En las secciones siguientes de este capítulo abordamos la unidad de enseñanza de las Isometrías del Plano. El trabajo que presentamos está desglosado en tres partes:

1) Caracterización operativa de los niveles de Van Hiele de forma específica para cada isometría (traslaciones, giros y simetrías), la cual se concreta posteriormente en la definición de objetivos de enseñanza para cada movimiento en cada nivel de razonamiento.

2) Enunciado de los objetivos y las actividades. La unidad de enseñanza de las Isometrías está dividida en tres partes, una por cada isometría. Cada una de ellas, a su vez, está dividida en bloques de actividades correspondientes a los niveles 1 a 3 de Van Hiele. Para cada nivel de razonamiento, enunciamos los objetivos de la enseñanza en ese nivel y en cada fase de aprendizaje, seguidos por los enunciados de los tipos de actividades propuestas.

3) Comentarios sobre los objetivos y las secuencias de actividades de cada nivel de razonamiento y fase de aprendizaje. Estos comentarios tienen como finalidad explicar y justificar la organización de las actividades y dar ejemplos, extraídos de las experimentaciones realizadas, que ayuden a entender su forma de organización.

2.5. Los niveles de Van Hiele en las Isometrías del Plano.

A partir del estudio teórico de las características de los niveles de razonamiento, tanto generales como particularizadas a las Isometrías del Plano, y de las posteriores modificaciones ocasionadas por las experimentaciones que hemos llevado a cabo con estudiantes, proponemos la descripción siguiente, que muestra las destrezas que corresponden a la adquisición de cada nivel de razonamiento en esta área de la Geometría. Son complemento y particularización de las destrezas generales expuestas en el capítulo 1. En las secciones posteriores de este capítulo describiremos los objetivos a conseguir en cada nivel para cada una de las isometrías simples (traslaciones, giros y simetrías), lo cual está estrechamente vinculado con las características de los niveles enunciadas aquí.

Nivel 1 (Reconocimiento)

La consideración global de los movimientos se refleja en:

- El reconocimiento de la conservación del tamaño y la forma de las figuras.
- La posibilidad de reconocer los movimientos y realizarlos sirviéndose de materiales auxiliares.
- La utilización de propiedades fuertemente visuales para identificar isometrías, como la "colocación igual" de las figuras en las traslaciones, la disposición circular de las figuras en los giros y la visión del eje de simetría como separador "por la mitad" de las dos figuras simétricas, junto con el cambio de orientación en éstas.
- El empleo del vocabulario elemental de las isometrías: Traslación, giro, simetría, centro de giro, eje de simetría, …

Nivel 2 (Análisis)

La consideración de los movimientos a través de sus elementos permite:

- Hacer uso de forma intencionada y explícita de los elementos que caracterizan cada una de las isometrías: Módulo, dirección y sentido del vector en las traslaciones, centro y ángulo en los giros y eje en las simetrías.
- Determinar los elementos que caracterizan una isometría concreta en las traslaciones (componentes del vector) y las simetrías (eje), a partir de propiedades de estos movimientos. En los giros (centro y ángulo) sólo en situaciones particulares, que no requieran recurrir a relaciones de propiedades propias del tercer nivel.
- Descubrir y utilizar nuevas propiedades de las isometrías, a partir de su verificación en casos concretos. En particular:
  - Las asociadas directamente a la definición de cada movimiento: Igualdad de los vectores que unen puntos y sus respectivas imágenes por una traslación, equidistancia al centro e invarianza del ángulo en un giro y equidistancia y perpendicularidad al eje en una simetría.
  - La determinación de la inclinación de la imagen de una figura por un giro, según el ángulo del giro efectuado.
  - La determinación de la mediatriz de un segmento PQ como el lugar geométrico de los centros de los giros que transforman P en Q.
  - La existencia siempre de un giro o una traslación entre dos figuras congruentes, de la misma orientación en sus ángulos.
- Utilizar la definición de cada movimiento en tareas de reconocimiento y de aplicación directa del movimiento en cuestión.

- Aplicar composiciones de isometrías, realizando sucesivamente los movimientos correspondientes, sobre figuras concretas. En particular, se puede realizar una simetría en deslizamiento.
- Tras la realización sucesiva de las isometrías correspondientes, identificar el movimiento resultante de una composición de isometrías y sus características, cuando ello no suponga utilizar técnicas basadas en el empleo de relaciones correspondiente al tercer nivel. En particular, se puede trabajar con las composiciones de traslaciones, de giros del mismo centro y de dos simetrías.
- Descubrir la conmutatividad de la composición de traslaciones y de giros del mismo centro.
- Utilizar las coordenadas del vector de traslación en situaciones concretas.
- Utilizar notación y vocabulario matemáticos asociados a las isometrías: p, p', T_a, S_e, G(O,a°), perpendicularidad, mediatriz, módulo, dirección, sentido, …

Nivel 3 (Clasificación)

Al establecer relaciones entre las propiedades y comprender planteamientos generales, se consigue:

- Comprender y utilizar el corte de mediatrices de segmentos que unen puntos homólogos para determinar el centro de un giro.
- Completar el estudio experimental de los casos básicos de composiciones de dos isometrías con la composición de dos giros de distinto centro, generalizando las situaciones que conducen a un giro y las que llevan a una traslación.
- Comprender y utilizar la posibilidad de descomposición, de infinitas formas, de una traslación y de un giro en producto de dos simetrías. Comprender y utilizar la posibilidad de descomposición, de infinitas formas, de un giro y de una traslación en producto de dos giros de distinto centro.
- Utilizar las propiedades de las composiciones básicas de isometrías, de determinación de la inclinación de una figura por un giro y de la existencia de giro o traslación entre figuras congruentes no inversas, para justificar:
  - Qué características se puedan conocer del resultado de una composición de isometrías.
  - La posibilidad de transformar una figura en otra por una composición de isometrías.
- Simplificar adecuadamente composiciones de isometrías: Utilización de la conmutatividad en los casos posibles, de la idempotencia de las simetrías, de la asociatividad y de las relaciones conocidas entre las distintas isometrías.
- Establecer relaciones generales, sin soporte de figuras o traslaciones concretas, entre las coordenadas de un punto, de su imagen y del vector de la traslación aplicada.

• Comprender la definición de cada isometría, en términos de un conjunto mínimo, suficiente, de condiciones, así como su enunciado formal.
• Comprender demostraciones formales, sencillas, cuando se presentan hechas. Por ejemplo, la demostración de que la composición de dos simetrías cuyos ejes se cortan es un giro.
• Completar alguna implicación en una demostración formal. Hacer demostraciones simple, que sólo supongan la adaptación de una demostración formal o la aplicación de una propiedad ya conocidas a la situación que se presenta. Por ejemplo, a partir de la definición formal de giro, demostrar que la composición de giros del mismo centro es un giro con ángulo la suma de los ángulos de los giros que se componen.
• Pasar de una situación concreta a una general, completando algunas implicaciones en una demostración particular cuya organización es análoga a la demostración formal general.

Nivel 4 (Deducción Formal)

Se puede razonar prescindiendo de todo soporte concreto, por lo que:

• Se comprende y utiliza la estructura algebraica de las isometrías del plano.
• Se hacen demostraciones formales completas: Se identifican la hipótesis, la tesis y la red de implicaciones lógicas que llevan al resultado. En particular, es de especial interés:
  - El teorema de clasificación de las isometrías: Toda isometría es uno de los siguiente movimientos: Traslación, giro, simetría o simetría en deslizamiento.

2.6. Propuesta de enseñanza de las Traslaciones.

TRASLACIONES: NIVEL 1

Objetivos:

Las actividades que planteamos para este nivel pretenden lograr los objetivos generales siguientes, que más adelante desglosaremos en las diferentes fases de aprendizaje:

1- Reconocimiento de la característica de **iso**metría de la traslación (el tamaño y la forma de las figuras se conservan).

2- Reconocimiento y realización de traslaciones de manera directa sirviéndose de materiales auxiliares (por ejemplo, una regla). Identificación del tipo de desplazamiento (en línea recta).

3- Descubrimiento y empleo de características visuales de las traslaciones: Mantenimiento de la inclinación de la figura, ausencia de inversión.

4- Reconocimiento y realización de traslaciones en diferentes direcciones sin ayuda de material auxiliar.

5- Utilización de vocabulario apropiado relacionado con las traslaciones: Traslación, dirección, figura trasladada, imagen, distancia, …

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

En el primer nivel de razonamiento se entra en contacto con el objeto de estudio, en este caso las traslaciones, y el razonamiento se basa en la consideración global de las figuras y sus movimientos, siendo éste fundamentalmente visual. Por lo tanto, todas las propiedades que se pongan de relieve deberán estar basadas en atributos manipulativos o visuales.

Algunas de las propiedades de las traslaciones que tienen que ver con la forma de movimiento (en línea recta) pueden ser percibidas por los estudiantes como similares a las de otras transformaciones, como las homotecias o las simetrías, por lo que una parte del trabajo inicial de introducción de las traslaciones en el nivel 1 debe centrarse en diferenciar las traslaciones de éstas.

La necesidad de un razonamiento de tipo visual motiva que la realización física de movimientos por los estudiantes se convierta en el mejor medio de comprensión de las traslaciones, lo cual conlleva la consideración de dos aspectos: Dinámico (realización del movimiento) y estático (observación de las figuras inicial y final). Por tanto, la realización física del movimiento y las características visuales de la colocación de las figuras constituyen la base de juicio en este nivel, y de ahí los objetivos 2 y 3.

Durante algún tiempo, muchos estudiantes requieren la ayuda de algún material o medio mecánico que les permita realizar de manera automática las traslaciones. Esta forma de trabajo es necesaria para que puedan observar las características de las traslaciones y, en las experimentaciones que hemos realizado, ha consistido en trasladar figuras a lo largo de una regla en cuyo borde estaban apoyadas.

El cuarto objetivo presenta la necesidad de explotar la componente fuertemente visual de igualdad de inclinación entre figuras trasladadas, consiguiendo un avance hacia la adquisición del nivel 2 de razonamiento, para lo cual es necesario que los estudiantes empiecen a ser capaces de realizar movimientos de traslación sin la ayuda de ningún material auxiliar, lo cual podrán comenzar a hacer una vez que hayan comprendido suficientemente el significado de las propiedades físicas de las traslaciones.

El objetivo 5 incide en la característica del modelo de Van Hiele referente a que cada nivel de razonamiento posee un lenguaje específico. Ello incluye en este caso el aprendizaje de términos nuevos y la unificación de los significados atribuidos por el profesor y los alumnos en torno a las traslaciones. Esto último quiere decir que el profesor deberá adaptar su vocabulario (es decir, el vocabulario matemático usual) a las capacidades y posibilidades de sus alumnos, pues en ocasiones, sobre todo con los más pequeños, será más conveniente emplear vocablos distintos, con el mismo significado, más familiares para los niños. Asimismo, los alumnos modificarán o ampliarán algunas de las acepciones atribuidas a una palabra o expresión.

Fase 1 del Nivel 1

Objetivos:

1- Toma de contacto con el concepto de traslación.

2- Información sobre los conocimientos previos elementales que puedan tener los alumnos acerca de las traslaciones.

3- Toma de contacto con materiales de ayuda (la regla) y métodos informales empleados para la realización de traslaciones (desplazamiento sobre la regla).

4- Información sobre el vocabulario que poseen los estudiantes al hablar de traslaciones, unificación de términos y significados entre profesor y alumnos e introducción de vocabulario específico nuevo (dirección, línea recta, …).

Actividades:

A1- Presentar ejemplos y contra-ejemplos de figuras trasladadas. En primer lugar se muestran pares de figuras. Después se muestran grupos de más de dos figuras. Pedir que los alumnos expresen lo que entienden por traslación.

A2- Dar y pedir ejemplos de traslaciones del entorno escolar y ajenos a la escuela.

A3- Utilizar una regla u otro tipo de soporte equivalente para deslizar una figura a lo largo de su borde (utilizando figuras con alguno de sus lados totalmente apoyado sobre el soporte). Pedir que los alumnos expresen cómo es el desplazamiento.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

Una de las misiones de esta primera fase es permitirle al profesor obtener información acerca del conocimiento que poseen sus alumnos sobre las traslaciones. Para ello, si éstos ya las habían estudiado con anterioridad, el profesor, además de proponer las actividades que acabamos de enunciar para la fase 1, puede ir seleccionando actividades de los sucesivos niveles de razonamiento y formulando preguntas a los alumnos sobre los resultados que esperan obtener o por qué han dado cierta respuesta, con el fin de averiguar dónde empiezan las carencias de sus alumnos.

A diferencia de lo que sucede en el caso de las simetrías o los giros, para las traslaciones no hay ningún material que, por sí mismo o manipulándolo, produzca traslaciones de figuras y pueda servir como medio de verificación de ese movimiento. Por ello, en la actividad A1 hemos optado por utilizar el método de ejemplos y contra-ejemplos, que se ajusta a la forma visual de razonar en el primer nivel de Van Hiele. Si se trabaja con niños pequeños, en la presentación deben aparecer no sólo dibujos, sino también contornos de figuras que correspondan a objetos o figuras recortadas en cartulina o papel, de manera que se puedan situar encima de las de la lámina. Además de ello, es importante incluir casos en las más diversas posiciones, evitando limitarse a las estándar, y con una separación entre las figuras diferente en casos distintos.

La secuencia de ejemplos y contraejemplos se ha mostrado eficaz en todas las experimentaciones que hemos llevado a cabo. De hecho, todos los alumnos con lo que hemos trabajado extrajeron la idea de que dos figuras trasladadas son las que "están igual", teniendo esa expresión el significado de que no varía nada en la figura y de que se encuentran con la misma inclinación, idea correcta, puesto que ningún alumno presentó problemas posteriormente en la identificación de figuras trasladadas.

Los ejemplos del entorno real por parte de los alumnos (actividad A2), y la expresión de lo que entienden por traslación (actividades A1 y A3) le han permitido al profesor, en las experiencias realizadas, darse cuenta de la idea que se han forjado los alumnos sobre lo que es una traslación, así como de unificar significados asignados por el profesor y por los alumnos. Tal es, por ejemplo, el caso citado anteriormente, de "figura igual", con el significado de figura con la misma inclinación. Estas actividades son también útiles para ir perfeccionando las expresiones empleadas por los alumnos, bien en esta fase o en las posteriores pues, como todo intento de expresar verbalmente un concepto, obligan a los alumnos a prestar atención a las características que consideran fundamentales.

En la actividad A3 se introduce el deslizamiento de figuras como método que permite realizar traslaciones de forma ajustada. Este procedimiento lo han empleado todos los alumnos que han participado en nuestras experimentaciones sobre traslaciones, no solamente en las actividades de esta fase, sino también con posterioridad. De hecho, para algunos alumnos ése método fue básicamente el utilizado durante varias sesiones, tanto en tareas de reconocimiento como de realización de traslaciones. Por ello, es importante su aprendizaje y utilización desde el primer momento, lo cual constituye el objetivo de la actividad A3.

Fase 2 del Nivel 1

Objetivos:

1- Reconocimiento de las características de las traslaciones de ser isometrías (no cambia el tamaño ni la forma) y de conservar la orientación.

2- Introducción y utilización correcta de vocabulario básico: Figura trasladada, traslación, línea recta, …

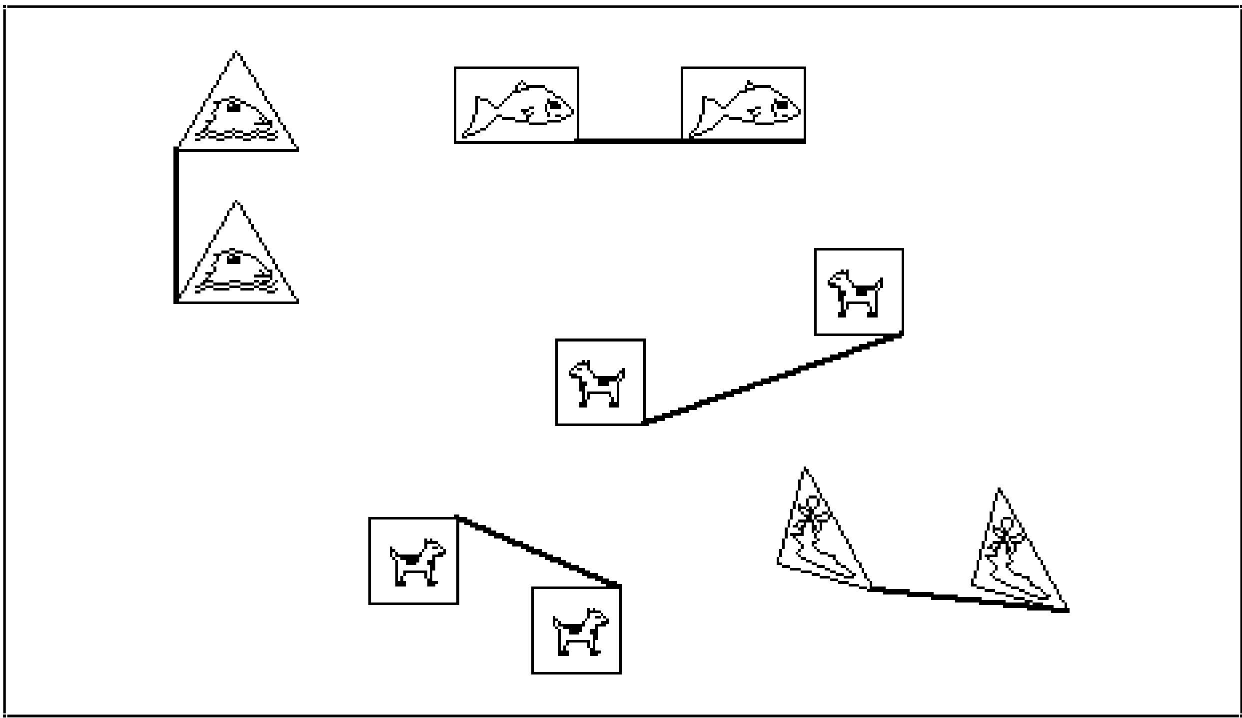
3- Empleo correcto de un soporte para deslizar una figura por una traslación o para identificar figuras trasladadas. Obtención de líneas alternativas de deslizamiento.

4- Identificación visual de grupos de figuras trasladadas o no trasladadas. Justificaciones visuales y manipulativas.

5- Identificación de elementos homólogos de dos figuras trasladadas (vértices, lados, otros puntos con características visuales concretas).

Actividades:

A1- Trasladar una figura sobre la línea marcada utilizando un soporte para el deslizamiento. Dibujar otras líneas válidas para el desplazamiento.



A2- Dado un conjunto de figuras, reconocer las figuras que se corresponden mediante una traslación, sirviéndose y sin servirse del deslizamiento de la figura (se incluyen figuras de diferente tamaño, forma y orientación de sus ángulos).

A3- Dadas dos figuras trasladadas, deslizar una hasta la otra (con o sin ayuda de un soporte). Marcar un punto o lado sobre la figura original. Marcar el correspondiente en la figura trasladada. Unirlos por una línea que represente el recorrido de ese elemento.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

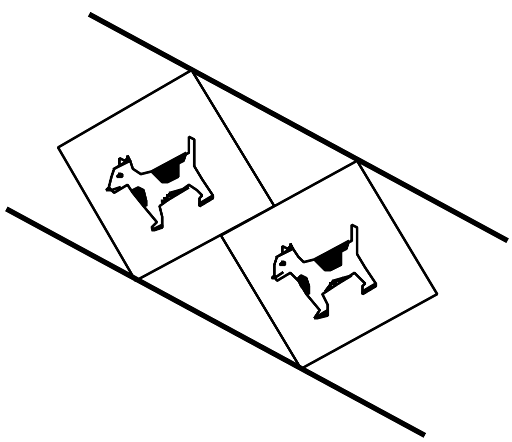
En las tres actividades de esta fase se realizan deslizamientos de figuras, cuya finalidad es doble: Ayudar a que los estudiantes lleguen a asimilar las características dinámicas y visuales de las traslaciones y proporcionarles destreza en esta técnica que les permitirá, desde el primer momento, realizar físicamente las traslaciones.

En todas las experimentaciones realizadas, incluso en Magisterio, hay constancia del arrastre de las piezas para efectuar o verificar traslaciones; en ocasiones se utilizaba un soporte para ello -regla- pero en las mayoría de los casos no. En 3º de E.G.B. ese método del arrastre prevaleció sobre los demás, en 6º de E.G.B. su uso se fue haciendo menos frecuente y en Magisterio casi desapareció, siendo las alumnas de este último curso conscientes, tras las primeras actividades, de su imprecisión.

Cabe destacar que en la experimentación de Magisterio fueron las propias alumnas las que propusieron en las primeras actividades (la segunda, concretamente) el empleo de un soporte para identificar figuras trasladadas. En concreto, la profesora pide un método que asegure que las identificaciones que han realizado las alumnas sobre figuras trasladadas son correctas. Las propuestas de las alumnas son:

Merche: *Yo cogería la regla la coloca como soporte entre las figuras correspondientes. Si hay una línea que …* [no acaba la frase]. *Si un punto está sobre la regla, pero trasladado* [entonces sí hay traslación].

Ara: *Yo pondría así la regla, formando dos paralelas* [sitúa dos reglas paralelas, de manera que las figuras quedan entre ellas, tocándolas, como se aprecia en el dibujo].



Como la tendencia natural de los estudiantes (sobre todo de los más pequeños) es apoyar un lado completo de las figuras sobre la línea soporte para deslizarlas, tanto en la actividad A1 como en las actividades siguientes, se han incluido pares de figuras con las que es factible efectuar la traslación de esta manera y otros pares en los que sólo se puede apoyar un punto en la guía.

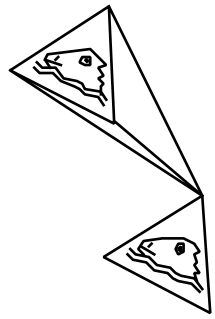
Entre las figuras empleadas en la actividad A2 se incluyen algunas de diferente tamaño, forma y orientación, con lo cual se trabaja el primer objetivo. La variación de forma no se incluyó en las experimentaciones realizadas, pero en esta propuesta sí se tiene en cuenta esa característica para cubrir por completo este aspecto del concepto de traslación, que es reconocible mediante un análisis visual.

Después de haber realizado las actividades de la fase 1 y la actividad A1 de esta fase, los estudiantes de todos los cursos con los que hemos experimentado han resuelto con facilidad la actividad A2. Las explicaciones dadas por los niños de 3º y 6º de E.G.B. para justificar su elección de los pares de figuras trasladadas o no trasladadas fueron análogas y siempre se referían a atributos de posiciones o de movimientos: *Que se repiten igual, No está igual, Son dos figuras iguales y miran hacia el mismo lado, Esta mira hacia acá y esa hacia allá, Están cada uno de una forma* [quiere decir en una posición]. *Que todos los dibujos miran hacia el mismo sitio, …* Las estudiantes de Magisterio resolvieron esta actividad sin ninguna dificultad y en sus explicaciones utilizaban términos matemáticos como: *Están sobre una línea* [recta]. *Forman paralelas, No está girada, …*

El segundo objetivo no es específico de ninguna actividad concreta, sino de todas ellas. A lo largo de las sucesivas actividades, el profesor debe ir modificando el vocabulario de los estudiantes para sustituir los términos imprecisos que suelen utilizar por otros más correctos. Esto es especialmente importante con los niños de los cursos inferiores, ya que son los que tienen menos desarrollados el vocabulario matemático. Un comentario análogo sobre este objetivo se puede hacer para los otros niveles de razonamiento, así como para las simetrías y los giros.

En la experimentación de 3º de E.G.B., se pone claramente de manifiesto la conveniencia de trabajar en la identificación de puntos y lados homólogos (actividad 3) como paso previo a la realización de algunas de las actividades propuestas en la fase 4: En el caso de algunas figuras en ejercicios de la fase 4, con las que algunos niños han tenido problemas, la identificación indicada anteriormente permite realizar correctamente las traslaciones pedidas (los ejercicios consisten en trasladar una figura, de manera que un lado o punto prefijados se sitúen sobre otro dado). El proceso de enseñanza para que los alumnos hagan corresponder correctamente los elementos homólogos incluye el deslizamiento de la figura siempre que sea necesario.

La identificación de varias líneas para el deslizamiento también tiene que ser objeto de enseñanza en esta fase del primer nivel. Ello se puede comprobar en el caso de Fernando, alumno de 3º de E.G.B.: Algunas situaciones las resuelve bien, pero no todas. En el dibujo de la derecha se aprecian varias de sus soluciones para un par de figuras. Sin embargo, la orientación dirigida, en la que el profesor hace que Fernando deslice la figura tantas veces como quiera, parece resultar efectiva.



La identificación como homólogos de los puntos iguales de las figuras original y trasladada no es inmediata. También ahora se puede apreciar cómo Fernando sólo descubre esta propiedad después de una instrucción dirigida en la que el profesor marca, y hace que el niño marque también, pares de puntos homólogos (vértices, ojo, boca, …) y que verbalice lo que observa. No obstante, cuando ya asocia correctamente los pares de puntos, Fernando sigue necesitando desplazar una figura antes de unir los puntos mediante una recta.

Fase 4 del Nivel 1

Objetivos:

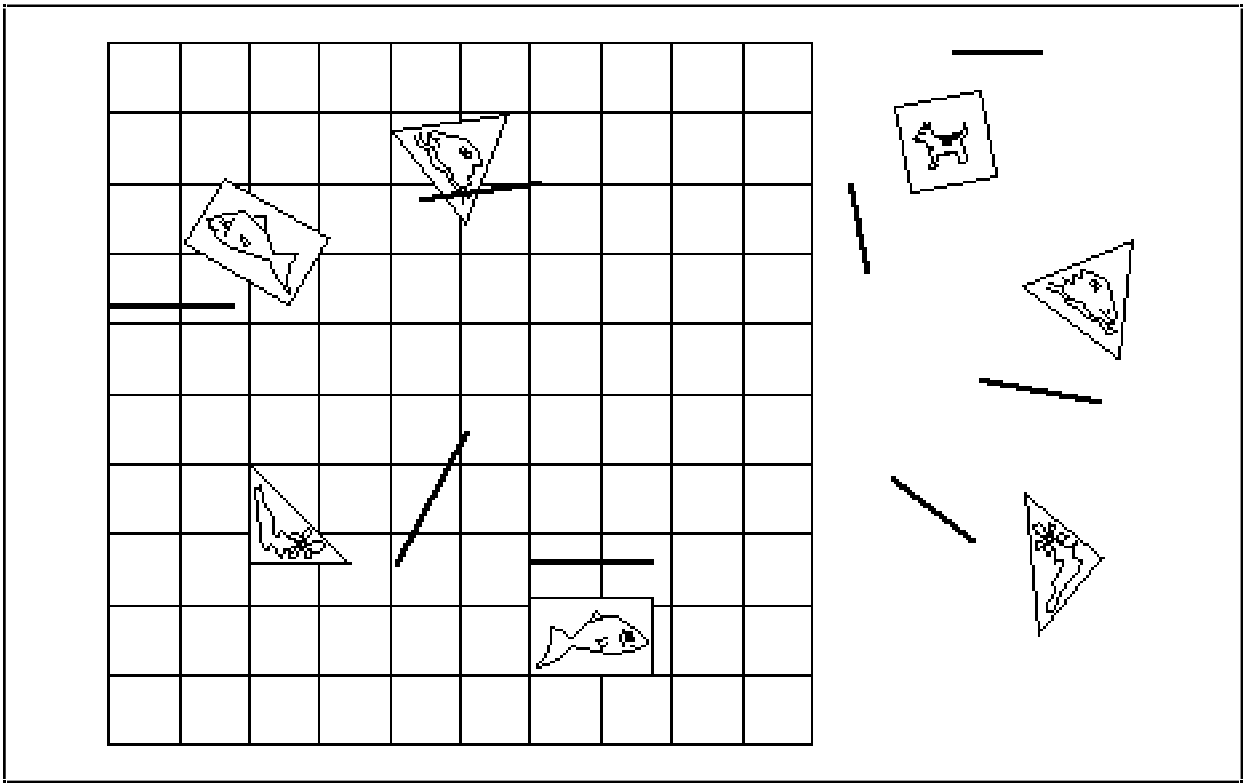
1- Utilizar las características visuales y los procedimientos de realización de traslaciones que se pusieron de manifiesto en la fase 2, en otras situaciones en las que los estudiantes deban emplear, aunque sea implícitamente, algunas propiedades matemáticas que se harán explícitas en el nivel 2, tales como el paralelismo de segmentos de las figuras trasladadas o la asociación de un vector al desplazamiento la traslación.

Actividades:

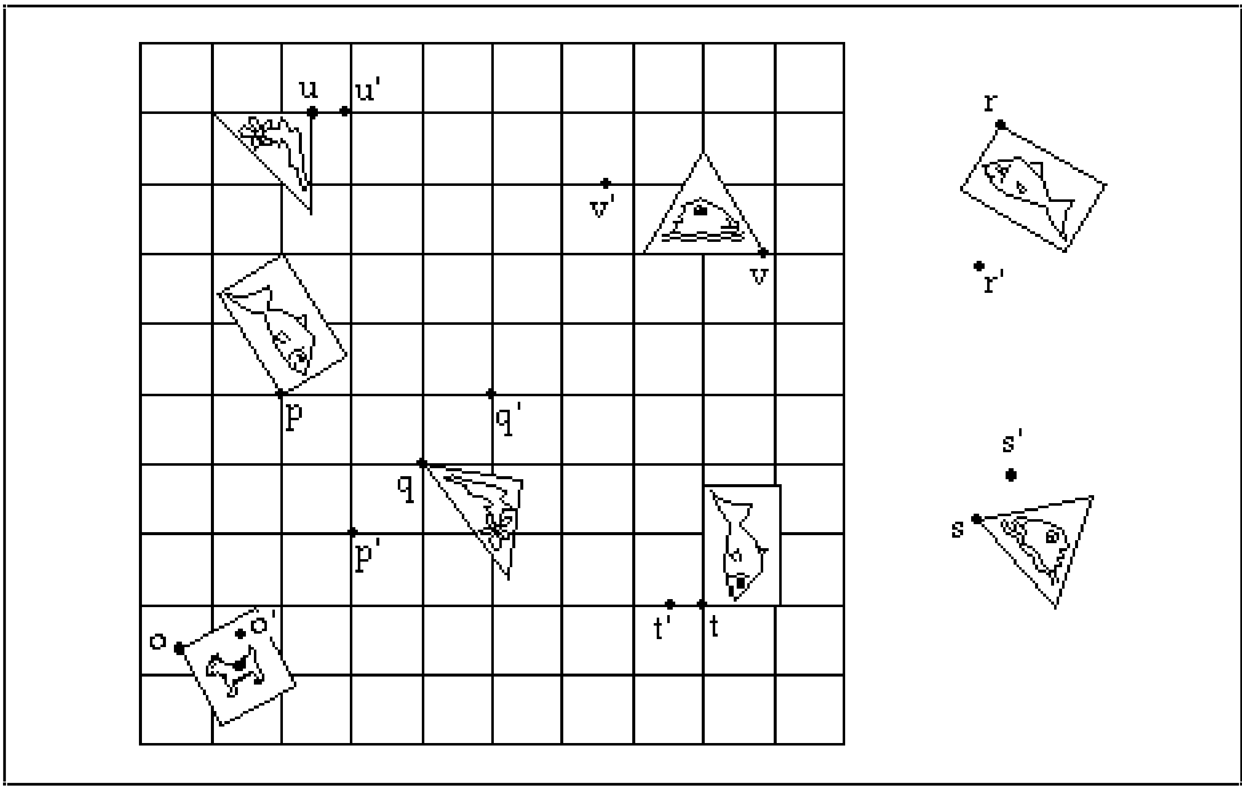
A1- Trasladar una figura de manera que un lado concreto de la figura se sitúe sobre un segmento dado de la misma longitud (siempre hay solución).

Realizar otro ejercicio análogo al anterior, pero siendo ahora los propios alumnos quienes elijan y dibujen dicho segmento.

Proponerles a los alumnos un ejercicio análogo al primero, pero en el que no exista siempre solución.



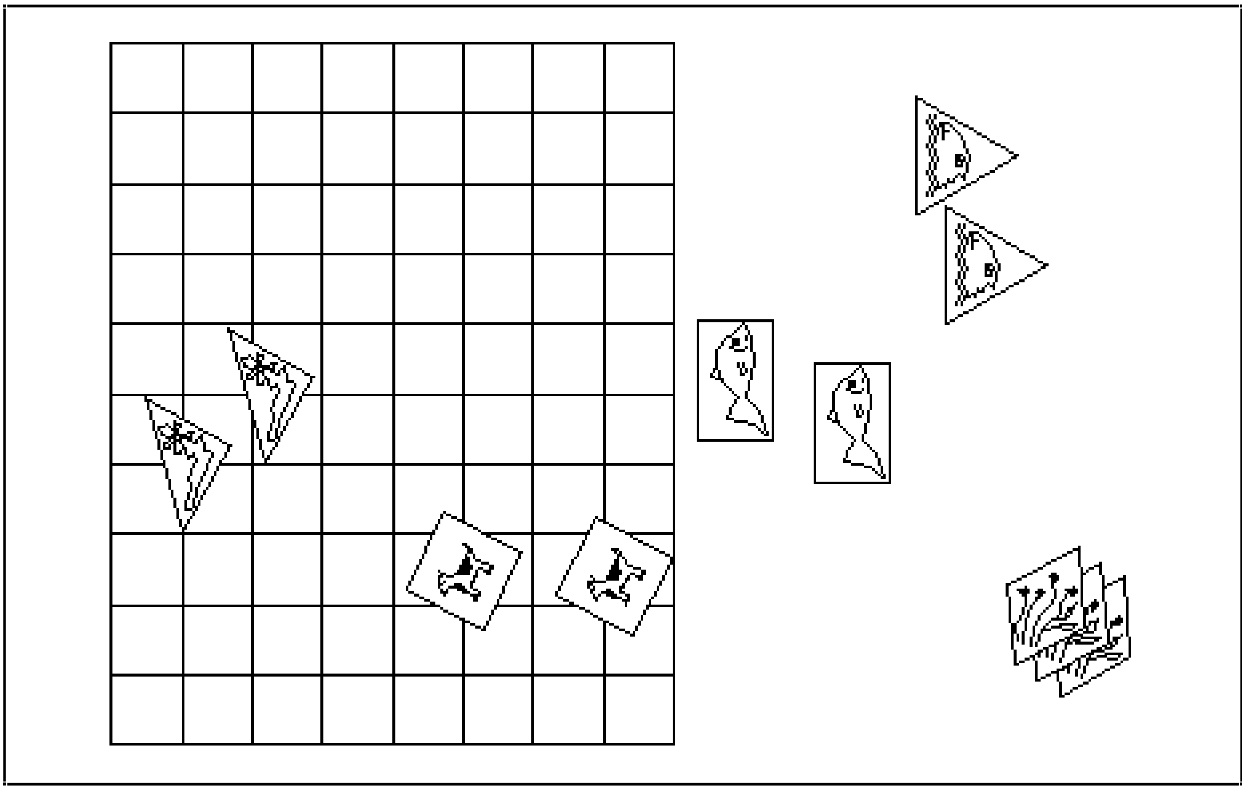
A2- Trasladar una figura de manera que el punto marcado se sitúe sobre un punto dado.

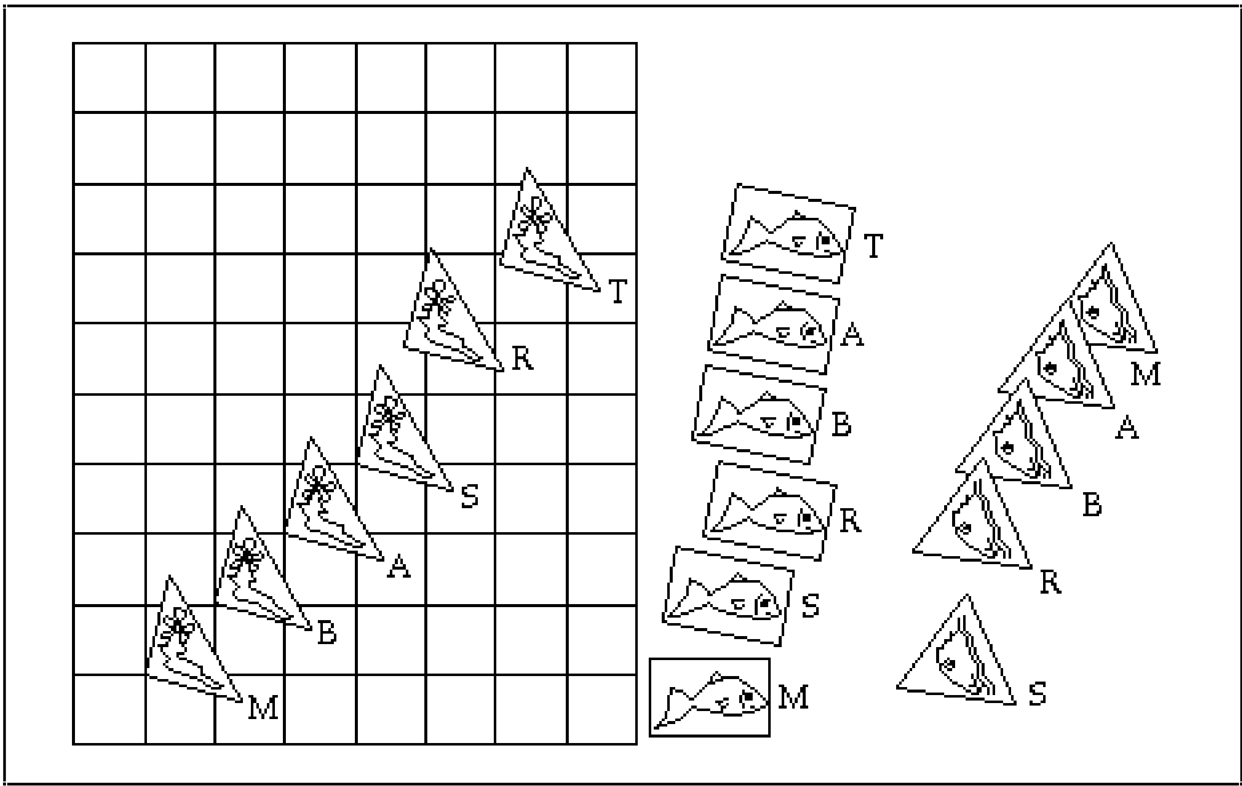


A3- Colocar piezas continuando un friso cuyo inicio se da.

Construir varios frisos diferentes, creados libremente por los estudiantes.

Identificar piezas que claramente (es decir, que se aprecia visualmente) están mal situadas en un friso.



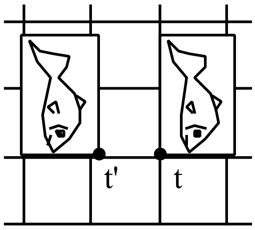

T
R
S
A
B
M
T
A
B
R
S
M
M
A
B
R
S

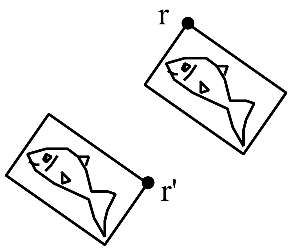
- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

Al comentar las actividades correspondientes a la fase 2 ya indicamos la conveniencia de que los alumnos identificaran elementos homólogos, para que fueran conscientes de esa propiedad y la pudieran emplear en situaciones como las planteadas en las actividades A1 y A2 de la fase 4. Estas actividades no son tan sencillas como pudieran parecer, pues incluso en 6º de E.G.B. y Magisterio hubo estudiantes que cometieron errores al no ser capaces de asociar el punto marcado en la lámina con el punto correcto de la figura imagen. Además, hay ejercicios de estas actividades en los que algunos estudiantes de cada curso sitúan la figura imagen girada respecto de la original, si bien se dan cuenta de estos errores en cuanto el profesor hace algún comentario, y los corrigen por sí mismos.

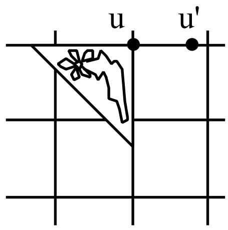
El reconocimiento del paralelismo de segmentos que se corresponden por una traslación, en especial de los lados de las figuras que hemos empleado, corresponde al primer nivel de razonamiento, ya que es una de las características visuales de ese movimiento. De hecho, todos los alumnos muestran desde el principio que han observado y asumido esa propiedad cuando insisten en que las figuras deben estar "igual", refiriéndose con ello a que deben tener la misma inclinación, es decir que sus lados deben ser paralelos. No obstante, puntualmente cometen errores al respecto, ocasionados por general por prestar atención a otras características, pero que se resuelven en cuanto se fijan, tal como hemos señalado en el párrafo anterior.

Como ejemplo de la forma de actuar de los estudiantes de los diferentes grupos de las experimentaciones, podemos describir al de 6º de E.G.B., cuyas las alumnas resolvieron bien la mayoría de los casos de las actividades A1 y A2, pero no todos. Los más destacados son (actividad 6 de la experimentación) una incorrección en la inclinación (por parte de Inmaculada, que es la alumna de este grupo que requería más enseñanza) y no situar el vértice correspondiente sobre el punto indicado (por parte de Icíar); en los dibujos que incluimos tras este párrafo mostramos los errores de Icíar. Posiblemente, si se hubiera incluido previamente una actividad como la A3 de la fase 2, este último error, no relacionar correctamente los puntos homólogos, se habría evitado. En cuanto al error de inclinación, sólo lo comete Inmaculada en una figura, lo cual hace pensar que en general sí tiene asumida la permanencia de inclinación, pero también muestra la necesidad de incluir suficiente cantidad de ejercicios anteriormente, en la fase 2, para que los estudiantes asimilen completamente esta característica y la tengan siempre en cuenta.





Los casos más problemáticos para los estudiantes son aquéllos en los que la figura original y la imagen se superponen. Esta dificultad, que se encuentra presente también al hacer giros y simetrías, la hemos podido observar en todos los grupos de estudiantes con los que hemos trabajado, con más o menos frecuencia según los cursos de E.G.B. en los que se encontraban. Creemos que se debe a una tendencia generalizada a evitar la colocación de una figura sobre otra, lo cual se ha puesto claramente de manifiesto en el grupo de 3º de E.G.B., donde Lorena resuelve sin dificultad los casos de traslaciones en los que la imagen no toca la figura original, pero comete errores cuando la imagen debe superponerse a la original (ver dibujo). Una vez bien resuelto el ejercicio, con la ayuda del profesor, Lorena comenta: *Queda mal porque se queda una encima de la otra.*



La realización o continuación de frisos de la actividad A3 se experimentó en 3º de E.G.B. y en Magisterio. Los alumnos de ambos grupos construyeron bien todos los ejemplos (trabajando con una apreciación plenamente visual los estudiantes de 3º y más matemática los de Magisterio). El ejercicio de identificación de piezas mal colocadas en frisos sólo se utilizó en la experimentación de Magisterio, pero en este caso se exigieron justificaciones de nivel 2. Sin embargo, tras analizar las grabaciones de las experimentaciones, hemos considerado más adecuado incluirlo entre las actividades correspondientes a la cuarta fase del nivel 1, para permitir una ejecución basada en las características visuales del nivel 1 y, al mismo tiempo, propiciar el uso de componentes y propiedades matemáticas por parte de los estudiantes que hayan iniciado la adquisición del nivel 2.

TRASLACIONES: NIVEL 2

Objetivos:

Las actividades que planteamos para este nivel pretenden lograr los objetivos generales siguientes, que más adelante desglosaremos en las diferentes fases de aprendizaje:

1- Descubrimiento, reconocimiento y utilización adecuada de:

a) Las propiedades que caracterizan las traslaciones: Dirección, sentido y longitud del movimiento. Representar esas características mediante un vector.

b) Las tres componentes de un vector para realizar la traslación asociada.

c) El paralelismo y la igualdad de longitudes de los segmentos que unen cada punto de una figura y su imagen.

2- Utilización de la notación y el vocabulario matemáticos para identificar o referirse a puntos, traslaciones, vectores, etc. (P, P', a, T_a, …).

3- Utilización explícita de la definición de traslación en las explicaciones.

4- Identificación de las traslaciones mediante mediante las coordenadas del vector libre asociado. Realizar traslaciones de figuras a partir de las coordenadas del vector de traslación.

5- Realización de composiciones de traslaciones y generalización del resultado. Utilización de la traslación resultante de una composición. Descubrimiento de la conmutatividad de la composición de traslaciones.

6- Descubrimiento y verificación, a partir de ejemplos, de otras propiedades de las traslaciones.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

La característica básica del razonamiento de nivel 2 consiste en el descubrimiento y utilización explícita de los elementos y propiedades matemáticos de las diferentes isometrías como base de los juicios que desarrollan los estudiantes. Si nos centramos en las traslaciones, los elementos que constituyen su caracterización matemática son la longitud recorrida, la dirección del desplazamiento y el sentido en que se realiza el desplazamiento. Por ello, estos elementos deben ser los primeros objetos de estudio (objetivo 1), tanto su descubrimiento como su utilización. Con el fin de que los estudiantes identifiquen claramente cada una de las tres componentes de los vectores de traslación, en primer lugar se trabaja sobre cada uno de ellos independientemente (objetivo 1a). Sólo después de que los estudiantes sean capaces de reconocer y usar las tres componentes, se introducirá el concepto de vector de traslación (objetivo 1b).

Este tipo de actividad es adecuado para el nivel 2 de razonamiento, ya que se basa en establecer una relación directa entre las propiedades matemáticas representadas gráficamente por el vector y las propiedades matemáticas que caracterizan las traslaciones. Además, aunque es necesario que los estudiantes utilicen simultáneamente las tres componentes de un vector de traslación, no hay ninguna relación de dependencia lógica entre ellas, por lo que su consideración no requiere el razonamiento lógico propio del nivel 3 de Van Hiele.

La adquisición del segundo nivel de razonamiento se basa, en buena parte, en el uso por los estudiantes del vocabulario matemático para expresar sus resultados o conclusiones y para comunicarse con el profesor y los demás estudiantes. Por este motivo, el objetivo 2 nos recuerda que debemos prestar atención a la forma de expresión de los estudiantes durante todas las actividades de las sucesivas fases de este nivel, procurando que vayan abandonando el vocabulario informal propio del nivel 1, si bien tratando de evitar que la adquisición del nuevo vocabulario les cree dificultades adicionales. El vocabulario adecuado al nivel 2 incluye la identificación matemática, oral y escrita, de los elementos que intervienen en la realización y representación simbólica de las traslaciones: Puntos, traslaciones, composiciones, vectores, …

El aprendizaje y uso por los estudiantes del vocabulario matemático relativo a las traslaciones se complementa con la capacidad para definir en estos términos la traslación (objetivo 3), dando una lista de propiedades suyas, y para utilizar la definición como elemento de sus justificaciones. La utilización explícita de la definición de traslación sirve también para que los estudiantes aprendan a diferenciar más claramente las propiedades generales de las traslaciones de aquéllas que sólo lo son de una traslación concreta.

Además de la visión directa de una traslación, que conduce a la consideración del vector asociado, se puede interpretar ese movimiento mediante su descomposición en un desplazamiento horizontal y otro vertical, lo cual está directamente asociado a las coordenadas del vector de traslación. Este tratamiento encuentra un contexto natural cuando se trabaja sobre cuadrícula y permite obtener propiedades de las traslaciones a partir de las relaciones numéricas correspondientes. Ambos enfoques están estrechamente vinculados y, aunque es posible prescindir del último, pensamos que tiene interés su inclusión como objetivo de enseñanza (objetivo 4), ya que permite descubrir y analizar propiedades y relaciones desde una perspectiva analítica.

Estas dos perspectivas están claramente influidas por los conocimientos que tengan los alumnos sobre vectores y sobre el conjunto de los números enteros. En particular, los alumnos que comprendan y utilicen adecuadamente los sistemas de coordenadas y los vectores libres, su suma y las relaciones entre las coordenadas de los vectores, sólo tendrán que hacer una transferencia de sus conocimientos al campo de las traslaciones, mientras que los alumnos que no hayan recibido enseñanza sobre vectores tendrán que ir descubriendo cada relación.

En lo que concierne a la influencia de los conocimientos de los estudiantes en el campo de los números enteros, hay que tener en cuenta que varía la forma de instrucción a realizar según que conozcan o no los números negativos y sepan o no sumarlos y restarlos. De las experimentaciones que hemos realizado se desprende que los estudiantes de E.G.B. que no conocían previamente el sistema de coordenadas cartesianas eran capaces de generar espontáneamente sistemas de coordenadas alternativos, formados por números naturales acompañados de referencias a la dirección del desplazamiento (a la derecha/izquierda y hacia arriba/abajo).

Uno de los objetivos del nivel 2 de razonamiento es desarrollar las dos perspectivas indicadas anteriormente, por lo cual en las unidades de enseñanza se propondrán actividades en las cuales no se utilicen coordenadas, mientras que en otras (o en las mismas) el trabajo se efectúa a través de las coordenadas.

Conocido un tipo de movimiento, los alumnos pueden pasar a su aplicación reiterada, esto es, a realizar composiciones en las que intervenga ese movimiento. En el caso de las traslaciones, uno de los objetivos del nivel 2 debe ser observar experimentalmente el resultado de mover una figura sucesivamente mediante varias traslaciones y encontrar el movimiento resultante de dicha composición (objetivo 5). Los resultados obtenidos en varios ejemplos les permiten, a los estudiantes que están iniciando el razonamiento de nivel 2, generalizar los resultados y enunciar de forma abstracta la propiedad subyacente. Por ello, también se puede obtener la regla de cálculo de las coordenadas de la traslación resultante de una composición y aplicarla directamente.

Análogamente, la generalización de resultados experimentales les permite a los alumnos darse cuenta de la conmutatividad de la composición de traslaciones (objetivo 5).

El objetivo 6 hace referencia a una de las finalidades del nivel 2 de razonamiento: Procurar que los estudiantes aprendan una variedad de propiedades matemáticas que formarán la base para su aprendizaje en la cuarta fase del nivel 2 y en los niveles siguientes. Está claro que, además de propiedades directamente encaminadas a la construcción y caracterización del concepto de traslación, como las especificadas en algunos de los objetivos de este nivel, interesa que los estudiantes descubran otras y se familiaricen con ellas, para profundizar de esa manera su conocimiento de tipo analítico y algebraico de las traslaciones. Un ejemplo es la obtención de las coordenadas de la traslación inversa a una dada.

Fase 1 del Nivel 2

Objetivos:

1- Obtener información de los conocimientos que tienen los alumnos sobre traslaciones, y en particular sobre vectores, suma de vectores, coordenadas, números enteros y suma y resta de números enteros.

2- Obtener información de los conocimientos que tienen los alumnos rectas paralelas, sus propiedades y el trazado de estas líneas.

3- Proporcionar una unidad complementaria de enseñanza sobre rectas paralelas y su trazado, si fuera necesario.

Actividades:

A1- Dadas varias rectas, de diversas inclinaciones, dibujar rectas paralelas a ésas, utilizando herramientas adecuadas: Regla, escuadra y cartabón. Si los alumnos saben usar el compás, utilizar también este material.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

La utilidad de esta primera fase del nivel 2 y su forma de desarrollo dependen en gran medida de si se trata de estudiantes con los que se empieza a trabajar en este momento en las traslaciones o, por el contrario, son estudiantes que han llegado al nivel 2 como consecuencia del trabajo previo con las unidades de enseñanza del nivel 1. En el primer caso, el profesor debe comprobar qué conocimientos previos tienen sus alumnos y cuál es su nivel de razonamiento, por lo que el bloque de actividades de esta fase debe estar formado por la actividad A1 enunciada aquí junto a otras actividades de las diferentes fases del nivel 1 y algunas de los niveles 2 y 3. De esta manera, el profesor puede conocer el nivel de razonamiento de sus alumnos y, al mismo tiempo, éstos van tomando contacto con los diferentes elementos y materiales de trabajo.

En el segundo caso, que es la situación que ha tenido lugar en todas nuestras experimentaciones, el trabajo en esta fase se puede limitar al tema planteado en la actividad A1, sobre el concepto de paralelismo y el trazado de rectas paralelas. En todos los cursos en los que hemos experimentado isometrías, se ha puesto de manifiesto la necesidad de disponer de un método eficaz par trazar paralelas. Siempre hemos utilizado regla y escuadra, pero estos materiales presentan problemas, pues se requiere bastante tiempo hasta que los alumnos de

E.G.B. y algunos universitarios los dominan, por lo que, en nuestras experimentaciones, se convirtieron en una fuente de errores para los niños que no sabían usarlos bien antes de empezar las actividades de la fase 2. Por ello, es conveniente dotarles a los estudiantes de la destreza suficiente para poder trazar paralelas antes de comenzar los ejercicios de traslaciones en los que se deba aplicar.

Para estudiantes que tengan especiales dificultades en el manejo de los instrumentos citados anteriormente, sería interesante disponer de algún material alternativo. Existe en el mercado un instrumento especialmente diseñado para trazar paralelas y perpendiculares, formado por una regla y un rodillo que le permite desplazarse perpendicularmente, pero cuyo uso está poco extendido. También se puede pensar en el diseño de algún material fácil de construir y barato; por ejemplo, se podría emplear una hoja de plástico transparente, cuadriculada, suficientemente rígida como para que su borde sirviera de regla. Ese material no lo hemos experimentado, pero creemos que su manejo sería bastante sencillo para los estudiantes de E.G.B.

Fase 2 del Nivel 2

Objetivos:

1- Descubrir y utilizar el paralelismo y la igualdad de longitudes de todos los segmentos que unen puntos homólogos mediante una traslación.

2- Descubrir y utilizar como características de una traslación la longitud, la dirección y el sentido del desplazamiento mediante la traslación. Introducir el vector de traslación.

3- Comprender el significado del concepto de vector libre correspondiente a una traslación. Utilizar vectores libres para aplicar y determinar traslaciones.

4- Aprender a aplicar una traslación concreta a un punto por procedimientos exactos. Comprender la independencia del punto elegido para aplicar el vector de una traslación y calcular la imagen.

5- Descubrir y utilizar las coordenadas del vector de una traslación. Identificar y aplicar traslaciones mediante las coordenadas de sus vectores.

6- Comprender y utilizar la notación estándar de las traslaciones, T_{vector}, y el vocabulario básico asociado.

Actividades:

A1- (La lámina consiste en pares de figuras trasladadas; en algunos pares la traslación es la misma; entre otros la diferencia está sólo en la longitud, dirección o sentido; entre otros la diferencia son 2 ó 3 características). Marcar varios puntos de la figura A y unirlos mediante segmentos con sus respectivas imágenes en la figura A' mediante la traslación. Marcar en todos los segmentos, mediante una flecha en el extremo correspondiente, el sentido del movimiento de la traslación. (Abrir un diálogo sobre las regularidades y propiedades observadas. Introducir el concepto de vector asociado a la traslación).

Copiar, en lugar separado de las figuras, el vector que indica cuál ha sido la traslación.

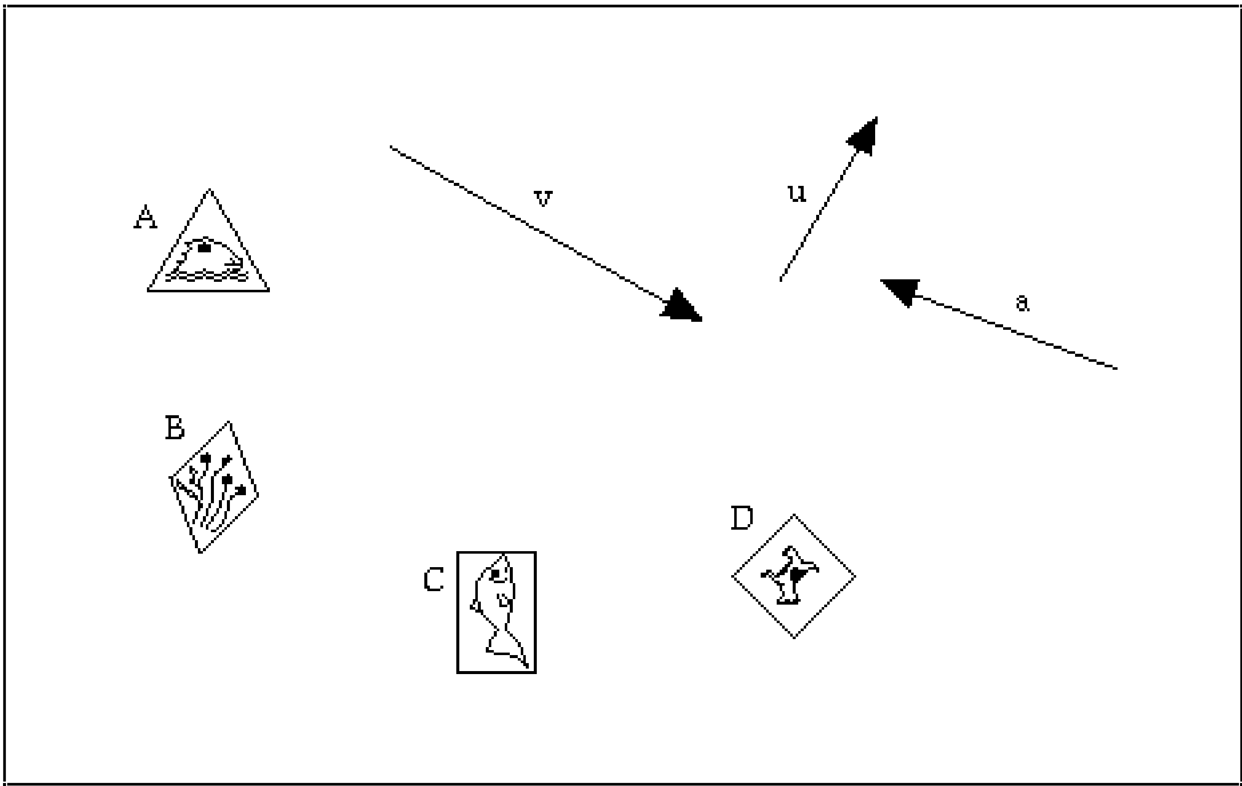
Repetir el ejercicio con otros pares de figuras trasladadas. Pedir a los estudiantes una previsión de lo que va a suceder. ¿En qué se diferencian los vectores de los pares de figuras ... y ...? ¿Son iguales algunos vectores de distintos pares de figuras?

(Pedir a los estudiantes que especifiquen los datos que necesitan para determinar una traslación).

A2- El vector *v* que hay en la lámina se ha obtenido copiando, en un lugar separado de las figuras, los vectores que unen puntos correspondientes de la figura A y de su imagen, pero la figura imagen se ha borrado. Tratar de colocar la imagen de A por esa traslación.

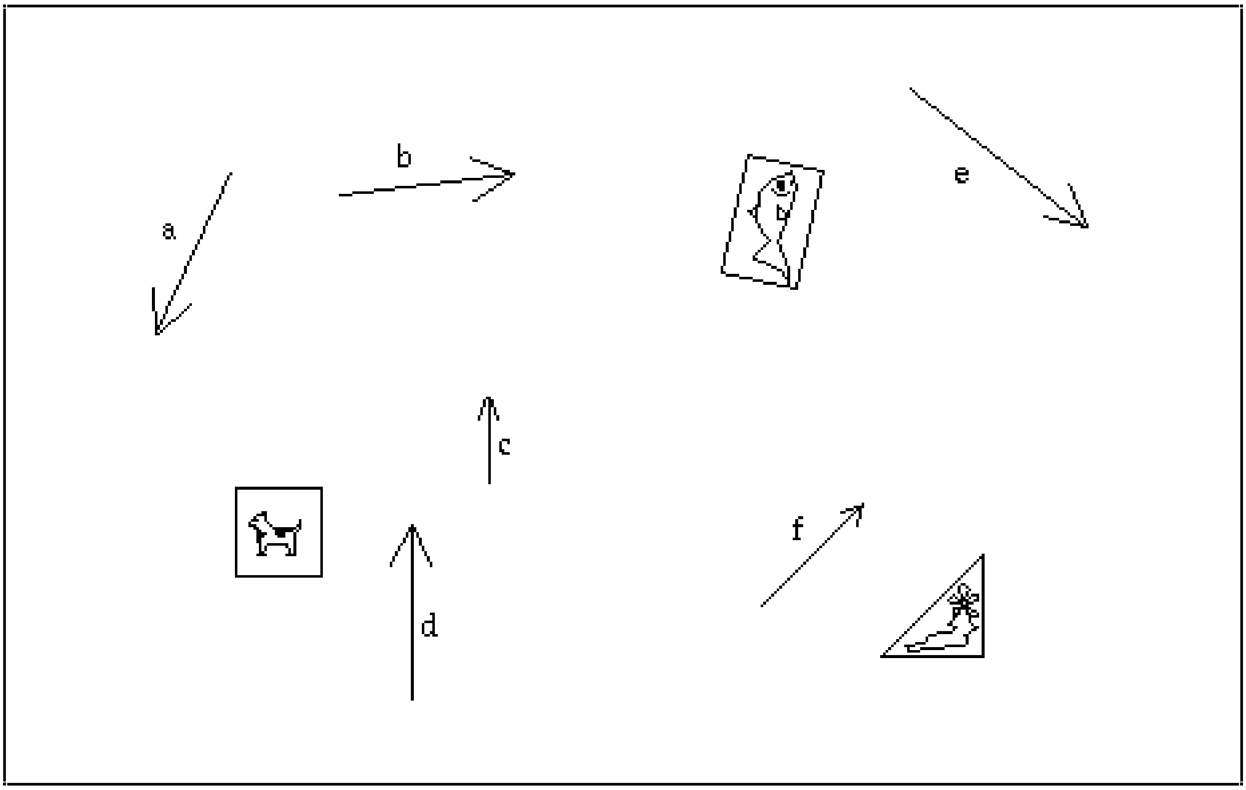
Trasladar la figura B de forma que el vector de la traslación sea también *v*.

Repetir el ejercicio con otros vectores y figuras dados en la lámina.



A3- Para trasladar la figura A, José ha elegido el vértice P, a partir del cual ha situado el vector de la traslación. Ara va a realizar la misma traslación, pero utilizando el vértice Q. ¿Dónde situará la imagen de la figura? ¿Por qué? Justifícalo.

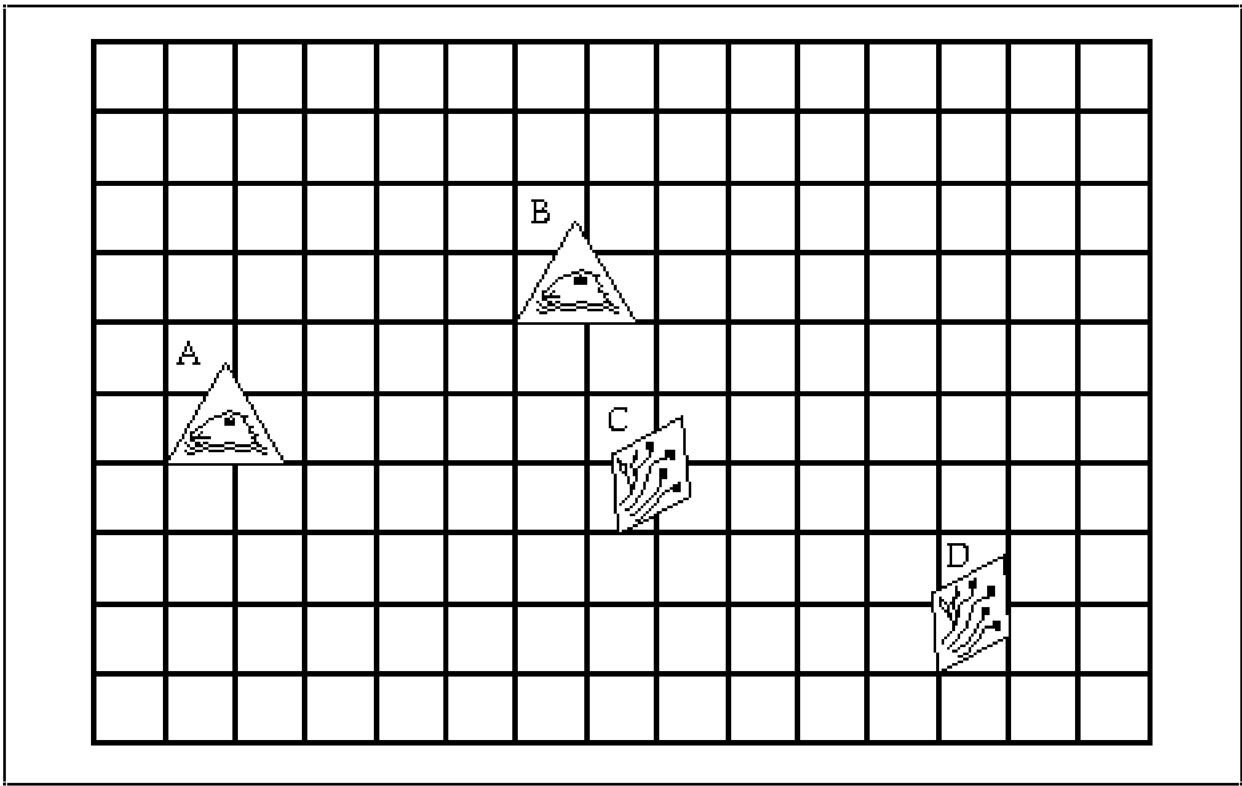
A4- Aplicar a las figuras de la lámina las traslaciones cuyos vectores se dan.



A5- Marcar un punto de la figura A y su homólogo de la figura B. Indicar cuánto hay que mover la figura A (en horizontal y en vertical) para trasladarla hasta la figura B.

Repetir el ejercicio con otros puntos de la figura A. Comparar los resultados y extraer consecuencias.

Dibujar el vector de la traslación y anotar la cantidad de cuadrados que hay, en horizontal y en vertical, desde el origen hasta el final del vector.

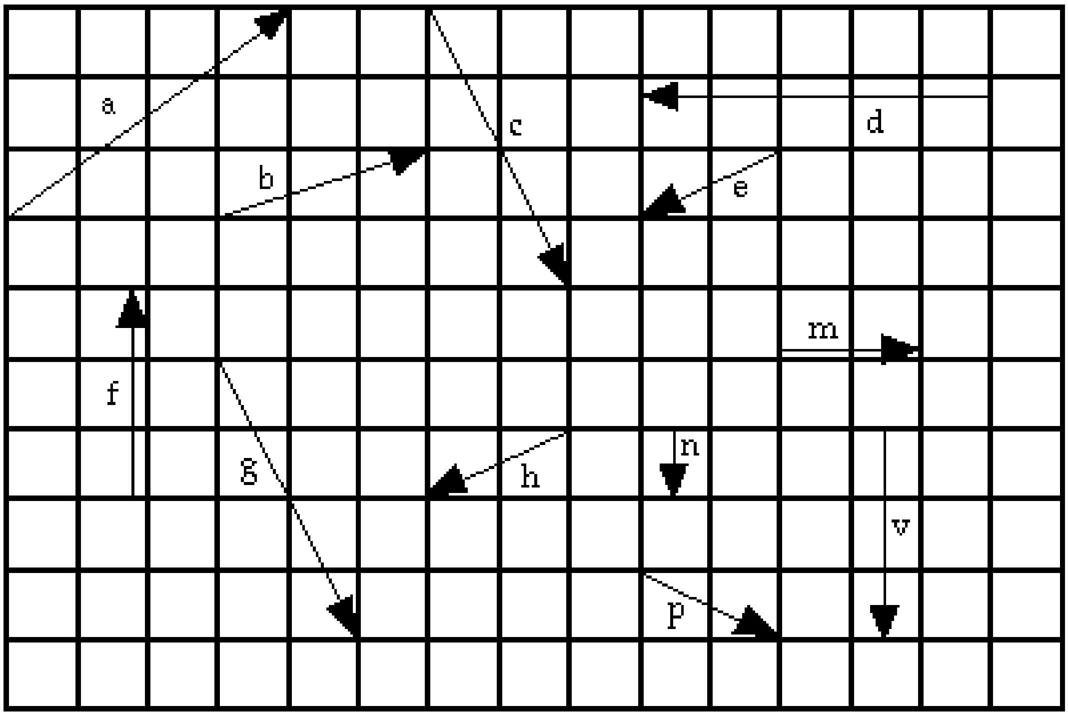


A6- Aplicar a la figura A la traslación que la mueve 3 cuadros hacia la derecha y 5 cuadros hacia abajo, usando el vértice P como punto de partida. Conjeturar y verificar dónde se situará la imagen de A si se cuenta desde el vértice Q. ¿Y si se cuenta desde el punto R? (R está situado el interior de la figura). Dibujar después el vector de esta traslación.

Dibujar los vectores de las traslaciones[1]: (2 a la izquierda, 5 abajo); (4 a la derecha, nada en vertical); (nada en horizontal, 6 abajo); (6 a la derecha, 2 arriba). Aplicar cada una de estas traslaciones a alguna de las figuras de la lámina.

A7- Dar las coordenadas de cada uno de los vectores que hay en la lámina. Decir cuáles corresponden a la misma traslación y explicar por qué. (Introducir el concepto de vectores equivalentes).

[1] Si los estudiantes saben trabajar con números enteros, se sustituirá lo antes posible la notación de direcciones por los números positivos y negativos, presentando este cambio como un convenio para economizar esfuerzo.



A8- Dar las coordenadas de los vectores de las traslaciones que llevan la figura A hasta cada una de las otras figuras de la lámina.

A9- Colocar una figura A sobre una hoja cuadriculada y colocar su imagen por medio de la traslación de vector[1] (3, -1). Colocar en otro lugar de la misma lámina otra figura B y su imagen por esa misma traslación. Repetir el ejercicio con las traslaciones de vectores (-4, -4), (0, 5) y (-3, 0). Observar los resultados y plantear conclusiones.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

El análisis de los resultados obtenidos en los cursos en que hemos experimentado la unidad de enseñanza de las traslaciones es la base sobre la que descansa la propuesta de actividades de la fase 2 que hacemos aquí. Esta propuesta va encaminada a conseguir la comprensión por los estudiantes de las traslaciones en términos de sus características y sus coordenadas, así como a procurar que comprendan y utilicen el vector libre como resumen de las características de la traslación.

Con las actividades propuestas a los estudiantes a lo largo de la fase 2 del segundo nivel de razonamiento se pretende que éstos adquieran la visión de las traslaciones en términos de sus elementos matemáticos característicos y que desarrollen las destrezas básicas para su aplicación desde ese punto de vista: Utilización del vector libre y consideración de las coordenadas. Estas destrezas son las que les deben permitir posteriormente a los estudiantes, en las actividades de la fase 4, realizar por sí mismos actividades que les conducirán al descubrimiento de otras propiedades más complejas (composición de traslaciones, conmutatividad, etc.).

Como se desprende de los resúmenes de las experimentaciones que hemos realizado, las cuales presentamos en el anexo I de esta memoria, la introducción del vector libre como representante de la traslación requiere que los alumnos hayan asimilado con anterioridad la propiedad inversa: Realizada una traslación, existe un vector que representa esa traslación; la comprensión de esta propiedad por los estudiantes supone, además, que sean capaces de dibujar el vector a partir de diferentes puntos de la figura original y también en una posición alejada de dicha figura. También hemos podido comprobar en las experimentaciones que es necesario diseñar actividades expresamente dirigidas a desvincular las traslaciones de las figuras concretas sobre las que se aplican. Por eso, una parte de la actividad A1 consiste en dibujar los vectores de las traslaciones en varios puntos diferentes y en lugares separados de las figuras correspondientes.

[1] Con alumnos que no utilizan números negativos, el profesor debe modificar el enunciado convirtiendo los vectores a la notación de direcciones.

La idea de que unas traslaciones pueden diferenciarse de otras por la longitud recorrida, la dirección o el sentido del movimiento se introduce también en la actividad A1, mediante la comparación de las características comunes y diferentes de los vectores de diversas traslaciones, ya que estas propiedades forman la base sobre la que se apoyan los conceptos matemáticos de traslación y de vector. En los diversos ejercicios propuestos, algunas veces las traslaciones se diferencian sólo en una característica, mientras que otras se diferencian en dos o las tres características.

Es evidente que, previamente a la comparación de esas características, los estudiantes tienen que asumir el hecho de que, cuando se hace una traslación, los segmentos que se forman al unir puntos con sus respectivas imágenes son todos paralelos y de la misma longitud. Por esta razón, la primera parte de la actividad A1 consiste precisamente en eso.

La experimentación llevada a cabo en 3º de E.G.B. contemplaba en la secuencia de actividades, entre otras, a) unir puntos homólogos, b) reconocer que los segmentos obtenidos en a) son paralelos y de igual longitud, c) dibujar, separado de las figuras, un segmento igual a los que unen puntos homólogos, y d) utilizar el segmento (sin sentido) que define una traslación para mover algunas figuras. Pero los alumnos se encontraban todavía en el nivel 1 de Van Hiele y por ello resultó imposible que trabajaran basándose en las características de paralelismo e igualdad de segmentos entre puntos homólogos. Solamente uno de los alumnos, que comenzaba a razonar en el nivel 2, fue capaz de utilizar esas propiedades y algunas características del vector libre después de que se le mostrara mediante un ejemplo cómo hacerlo.

En la experimentación de 6º de E.G.B., la introducción a la idea de igualdad de traslaciones se presentó de otra manera: Tras realizar una traslación sobre una figura, se pedía a los alumnos que aplicaran "la misma" traslación sobre otra figura. No se habían realizado con anterioridad ejercicios, consistente en comparar segmentos que unieran puntos con sus imágenes por traslaciones diferentes, por lo que los alumnos no interpretaron el significado de la pregunta en los términos deseados. No obstante, todos ellos, mediante instrucción guiada de la profesora, llegaron a entender lo que se les pedía y mostraron comprender correctamente el significado del vector libre cuando se les presentó por primera vez en la sesión siguiente.

En este curso se pudo ver con claridad, además, que la comprensión de la idea de independencia del punto elegido para aplicar la traslación (estudiada en la actividad A3) es otra de las propiedades básicas de las traslaciones, que no es evidente ni intuitiva para los estudiantes y que requiere una instrucción dirigida específica, quizá debido a que visualmente produce una idea errónea. Por lo tanto, hay que presentar a los estudiantes esta propiedad mediante métodos adecuados al comienzo del razonamiento de nivel 2, los principales de los cuales son la realización de ejemplos por los estudiantes y la verificación de los resultados. Entre los alumnos de 6º se puede ver que Rebeca (que tenía un nivel de razonamiento más alto, avanzando por el nivel 2) enseguida comprendió y empezó a utilizar la independencia, mientras que sus compañeras mostraron prácticamente hasta el final de la experiencia una tendencia a usar con cierta frecuencia la concepción visual (propia del nivel 1 y errónea en el nivel 2) de dependencia del punto elegido. Por ejemplo, al realizar una actividad de composición de traslaciones algún tiempo después (actividad 12 de la experimentación de 6º de E.G.B.), la profesora plantea el tema de la independencia de los puntos elegidos:

Prof. [a Marta]: *Yo veo que siempre marcáis un punto* [un vértice] *para empezar en ese punto. ¿Y qué pasa si no marcáis un punto?*
Marta: *Pues que lo podemos hacer desde otro vértice y* <u>*no*</u> *sale igual.*
Prof.: *Probad ahora. Tú* [a Inmaculada] *prueba haciéndolo* [la misma traslación] *desde este punto y tú* [a Marta] *desde éste.*
Inmaculada [tras hacer la traslación]: *Sale en el mismo sitio.*
Marta: *Nos sale igual.*
Prof.: *¿Y si cogierais otro vértice?*
Marta: *Seguramente saldría igual.*
Prof.: *¿Seguramente? ¿No estáis seguras? A ver, probad.*
Marta: *Sí, saldrá lo mismo. Espera, vamos a hacerlo.*

En la experimentación de Magisterio sí hubo ejercicios consistentes en unir puntos homólogos y comparar los segmentos, pero no se les pidió a las alumnas que copiaran el vector en un lugar separado de las figuras. Poco después, cuando se les pidió por primera vez que realizaran una traslación representada por un segmento libre, separado de la figura a trasladar, las alumnas no supieron utilizar sus características y de las respuestas que dieron en esta actividad se desprendió claramente que la actividad de copiar el segmento de la traslación distante de la figura habría sido efectiva.

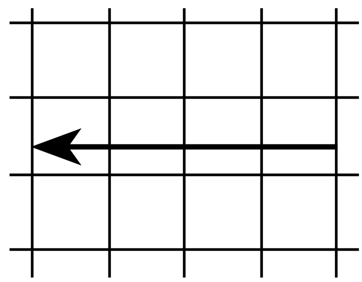
En efecto, el primer intento de Merche y Ara en esta actividad fue resolverla como otra actividad anterior (A1 de la fase 4 del nivel 1) en la que debían mover la figura hasta situar uno de sus lados sobre el segmento dado. En este caso su respuesta fue que no había solución porque el segmento dado no era paralelo a ningún lado de la figura. También pensaron que habría que trasladar un vértice de la figura hasta un extremo del segmento, por semejanza con la actividad A2 de la fase 4 del nivel 1. En vista de las respuestas, la profesora les presentó a las alumnas una lámina de alguna actividad anterior en la que se veía cómo son los segmentos que unen puntos homólogos y, a partir de ella, realizaron la actividad de dibujar un segmento representando la traslación separado de las figuras. Desde ese momento, Merche entendió el significado del segmento libre, que utilizó bien salvo algún error puntual, pero Ara tuvo dificultades durante algún tiempo para utilizar correctamente la dirección de la traslación.

En Magisterio no se puso de manifiesto el error de la dependencia del punto elegido para realizar o definir una traslación. Esto se pudo deber, en parte, a que en esta experimentación la profesora sólo realizó preguntas directas sobre esa propiedad cuando ya se habían resuelto numerosas actividades de nivel 2. Otro posible motivo es que el método empleado usualmente por estas alumnas para trasladar las figuras consistía en obtener las imágenes de dos vértices, en vez de la imagen de un solo vértice y colocar la figura imagen paralela visualmente a la original.

Por todo ello, como hemos indicado antes, los ejercicios incluidos en las actividades A1 y A2 son importantes para facilitar la comprensión del vector libre, cuyo aprendizaje se completa mediante las actividades A3 y A4. Las actividades A2 y A3 son dos pasos intermedios entre la obtención directa del segmento o vector de la traslación (realizada en A1) y la aplicación a una figura de una traslación definida por su vector (actividad A4). También hemos considerado necesario incluir como objetivo directo en algunas actividades la propiedad de independencia del punto elegido en la realización de traslaciones, tanto cuando se realizan gráficamente (A3), como cuando se realizan mediante las coordenadas (A6).

La introducción de las coordenadas de una traslación también requiere enseñanza dirigida específica, aunque deberá ser distinta según los conocimientos que tengan los estudiantes sobre números enteros y sobre vectores. Este es el objetivo de la segunda parte de las actividades, desde la A6. En las experimentaciones llevadas a cabo en 6º de E.G.B. y en Magisterio, hemos tenido las dos situaciones opuestas de no conocer y conocer bien, respectivamente, ambos conceptos.

Hemos podido comprobar que los estudiantes que no conocen los números enteros ni los vectores sí son capaces de generar y utilizar un sistema de coordenadas cartesianas, en el que se mantiene la idea de par de datos, pero donde los signos +/- deben sustituirse por indicaciones de desplazamientos hacia la derecha/izquierda y hacia arriba/abajo. Aunque la ordenación (abcisa, ordenada) no es imprescindible cuando se utilizan los sentidos de desplazamiento, es conveniente habituar a los estudiantes a mantener el orden (horizontal, vertical) para facilitar el paso a las coordenadas estándar. Por otra parte, las alumnas de Magisterio tuvieron que adaptar sus conocimientos sobre vectores al campo actual de trabajo, así como recordar y afianzar los conocimientos que poseían en relación con los números enteros. Tales resultados nos han llevado a incluir en la secuencia que proponemos aquí actividades encaminadas directamente al descubrimiento y utilización de las coordenadas, si bien la forma concreta de estas actividades hay que adaptarla a los conocimientos de cada considerando durante cierto tiempo como ordenada del vector la distancia entre el vector (que era horizontal) y la cuadrícula (ver dibujo).



En la actividad A7, además de afianzar la comprensión de la identificación de las traslaciones mediante las coordenadas de su vector, se trabaja sobre la idea de la equivalencia de vectores caracterizada por la igualdad de sus coordenadas. Con esto intentamos que los estudiantes diferencien aún mejor el concepto de vector libre de la posición concreta de su representante sobre una hoja de papel. En las experimentaciones de 6º de E.G.B. y de Magisterio, los estudiantes no necesitaron realizar traslaciones con vectores equivalentes para darse cuenta de que producían la misma traslación. De todas maneras, es importante que los estudiantes asuman por completo la traducción de la equivalencia visual a la igualdad de coordenadas y, aunque en las experiencias llevadas a cabo no hubo problemas en este aspecto, pensamos que es una propiedad que se debe presentar explícitamente, sobre todo si se desea continuar usando las coordenadas en las actividades de la cuarta fase y de los niveles posteriores.

Fase 4 del Nivel 2

Objetivos:

1- Componer traslaciones a partir del dibujo de sus vectores y obtener la traslación resultante.

2- Componer traslaciones a partir de las coordenadas de sus vectores y obtener las coordenadas de la traslación resultante.

3- Comprender y utilizar el vocabulario y la notación formales asociados a las traslaciones y su composición.

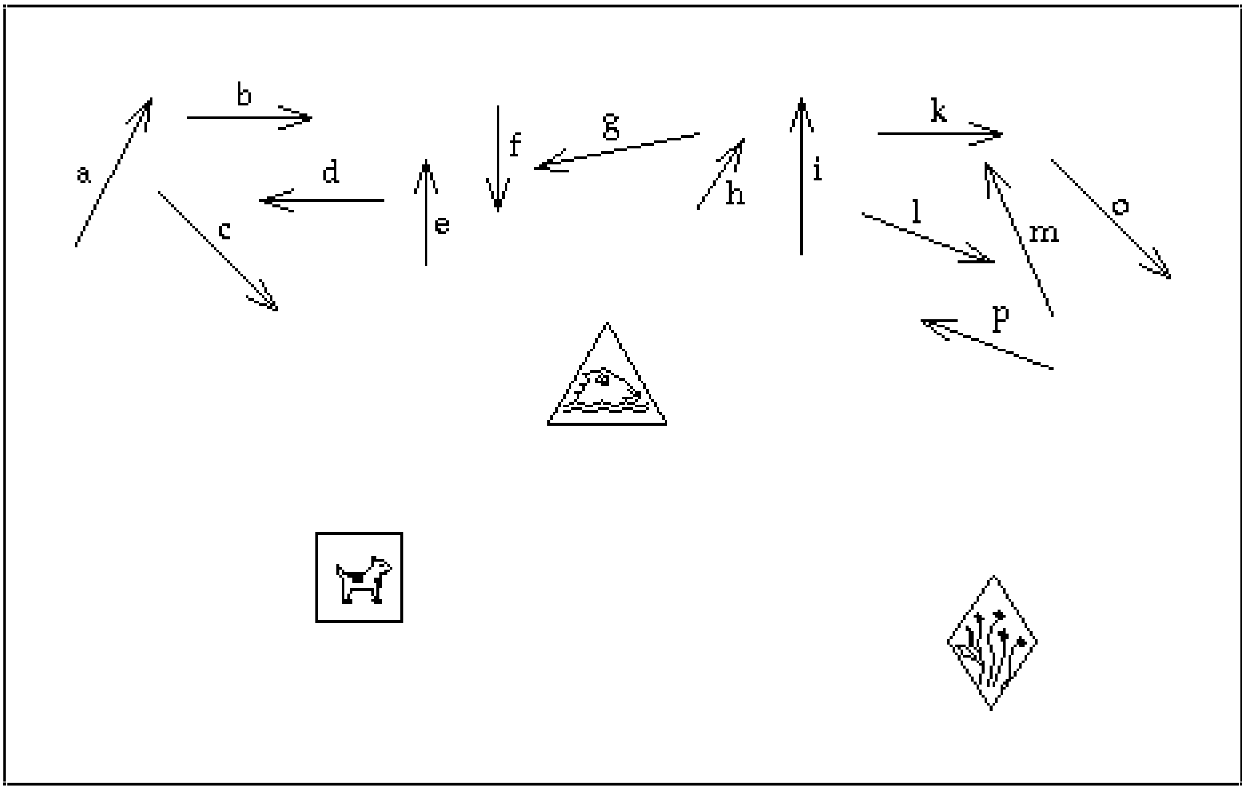
4- Verificar la conmutatividad de la composición de traslaciones.

5- Descubrir experimentalmente y utilizar otras propiedades relacionadas con las traslaciones.

Actividades:

A1- Sin utilizar coordenadas, aplicar a una figura de la lámina la traslación de vector ... (especificar alguno de la lámina). Sobre la figura imagen, hacer actuar la traslación de vector ... (especificar otro de la lámina). Determinar el movimiento que permite pasar directamente desde la figura original hasta la última imagen obtenida, dando las características de ese movimiento.

Repetir el ejercicio componiendo otras traslaciones y moviendo otras figuras. Generalizar el resultado de la composición de traslaciones.



A2- (Lámina sin cuadrícula). Sin utilizar coordenadas, aplicar a una figura la traslación T_v (especificar algun vector de la lámina). Aplicarle a la figura imagen la traslación T_r. Copiar los vectores de las traslaciones de la composición y el de la traslación resultante.

Repetir el ejercicio, con la misma figura y las mismas traslaciones, pero tomando el mismo punto del dibujo para calcular las sucesivas imágenes. Dibujar luego el vector de la traslación resultante poniendo su origen en el punto elegido.

Repetir el ejercicio con otras figuras y otros vectores.

A3- (Lámina sin cuadrícula). Sin utilizar coordenadas, obtener directamente la imagen final de la figura por medio de la composición $T_b \circ T_a$, sin colocar la imagen intermedia.

Repetir el ejercicio calculando la composición de otros pares de vectores.

A4- (Lámina con cuadrícula). Obtener las coordenadas de los vectores *a* y *b*. Aplicarle a una figura de la lámina la composición $T_b \circ T_a$. Obtener el vector de la traslación resultante y calcular sus coordenadas.

Repetir el ejercicio con las composiciones $T_c \circ T_a$, $T_a \circ T_d$, etc.

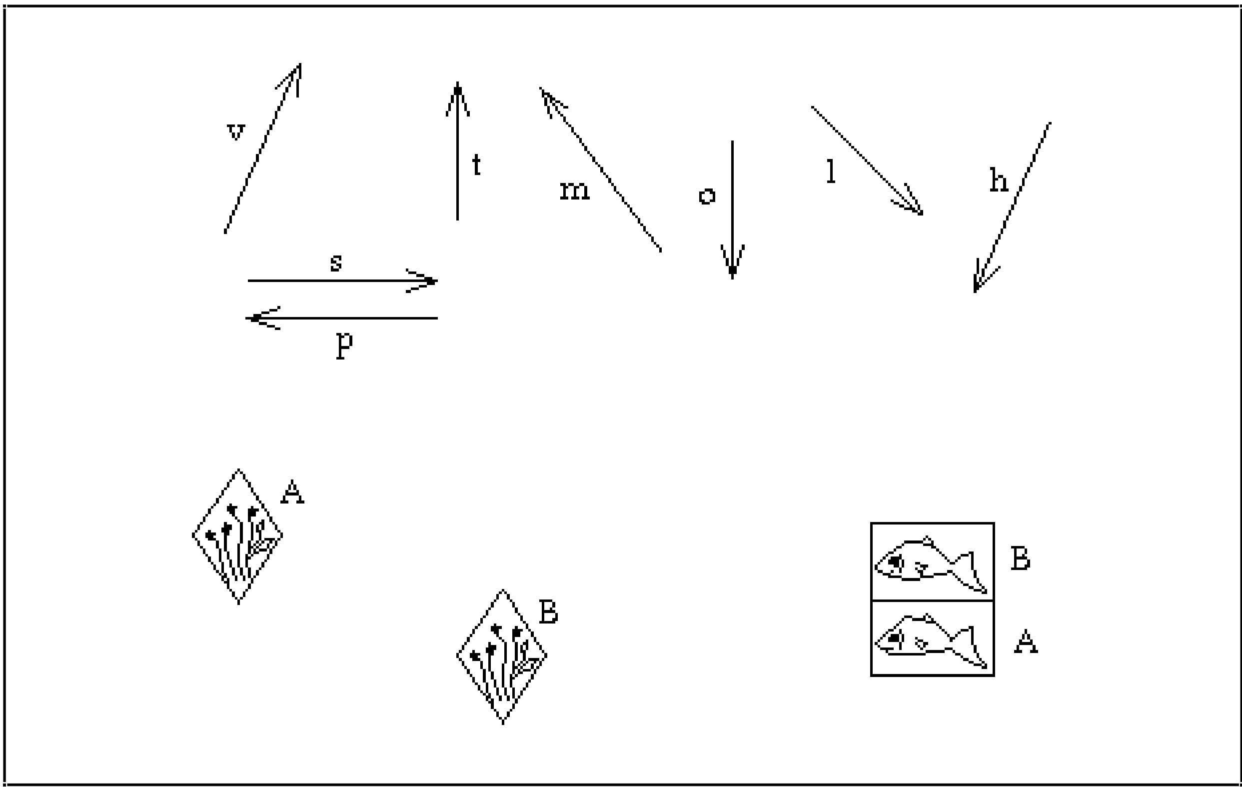
A5- (Lámina con cuadrícula). Hacer la composición $T_c \circ T_b \circ T_a$ sobre la figura de la lámina. Dibujar el vector de la traslación resultante. Escribir las coordenadas de cada uno de los vectores de la composición y las del vector de la traslación resultante.

Repetir el ejercicio con otros grupos de tres traslaciones.

A6- Realizar varias de las composiciones de traslaciones de las actividades anteriores, pero cambiando el orden de las traslaciones; usar las mismas figuras que antes y elegir algunas composiciones de láminas sin cuadrícula y otras con cuadrícula. En cada caso, obtener el vector resultante de la composición y, cuando se utilice cuadrícula, calcular las coordenadas de dichos vectores.

Comparar los resultados de esta actividad con los de las actividades anteriores y extraer conclusiones. Generalizar el resultado de la composición de varias traslaciones y su conmutatividad.

A7- Se ha utilizado la composición de dos traslaciones para llevar la figura A hasta la B. Una de las traslaciones es T_v. Dibujar el vector de la otra traslación.



A8- Queremos pasar de la figura A a la B mediante la composición de dos traslaciones. Dibujar los vectores de dos traslaciones cuya composición produzca ese movimiento.

Si es posible, encontrar otra solución diferente de la anterior, es decir con dos traslaciones diferentes. ¿Cuántas soluciones distintas se pueden encontrar?

A9- Si se mueve la figura A hasta la B mediante la traslación de vector (3, 5), ¿cuáles son las coordenadas del vector[1] de la traslación que permite llevar la figura B hasta A? Introducir el concepto de traslación inversa de una dada.

Repetir el ejercicio con la traslación de vector (-4, -7) y con la de vector (-2, 6).

A10- Si se le aplica a la figura de la lámina una traslación, a su imagen se le vuelve a aplicar la misma traslación, y así sucesivamente, ¿cómo tiene que ser el vector para que se forme una banda que no deje huecos entre las figuras y que tampoco se solapen? Construir dos bandas distintas con la misma figura.

Para conseguir que las bandas anteriores se prolonguen igual en sentido contrario, ¿qué otra traslación es necesario usar?

A11- Definir las traslaciones imprescindibles que hay que utilizar repetidamente para cubrir todo el plano, y no solamente un friso, con imágenes de la figura de la lámina, sin que quede ningún hueco ni se monten las figuras.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

Las actividades propuestas en esta cuarta fase del nivel 2 se basan en los conocimientos básicos que los estudiantes deben haber asimilado y aprendido mediante las actividades realizadas en la fase 2 de este nivel. La secuencia empieza con varias actividades (de la A1 a la A5) dedicadas al aprendizaje de la composición de traslaciones desde las dos perspectivas trabajadas con anterioridad: Utilización gráfica de los vectores de traslación y consideración de las coordenadas de dichos vectores.

La pertinencia de la introducción de la composición de traslaciones en esta fase viene avalada por las experimentaciones realizadas. Tanto en 6º de E.G.B. como en Magisterio, la comprensión previa que tenían los estudiantes de las características de las traslaciones en términos de sus vectores, permitió que los estudiantes fueran capaces, desde el principio, de realizar por sí mismos las composiciones sin necesitar ayuda del profesor.

En cuanto al descubrimiento de la relación entre las coordenadas de los vectores de traslación que se componen y el de la traslación resultante, se trata de una interesante actividad para investigar libremente, pues ayuda a consolidar los conocimientos acerca de las traslaciones y a obtener estrategias cuando los estudiantes no conocen las operaciones de suma y resta de números enteros. En la experimentación de 6º de E.G.B., todos los niños fueron capaces de obtener dichas relaciones por sí mismos, excepto una alumna, que fue

[1] Con alumnos que no utilizan números negativos, el profesor debe modificar el enunciado, convirtiendo los vectores a la notación de direcciones.

ayudada en el primer ejercicio por una compañera y entonces ya supo generar su método de trabajo. En caso de estudiantes que ya saben operar en Z, la generalización del resultado mediante la experimentación en casos concretos, trabajo propio del nivel 2, resultó sencilla y no presentó dificultades particulares.

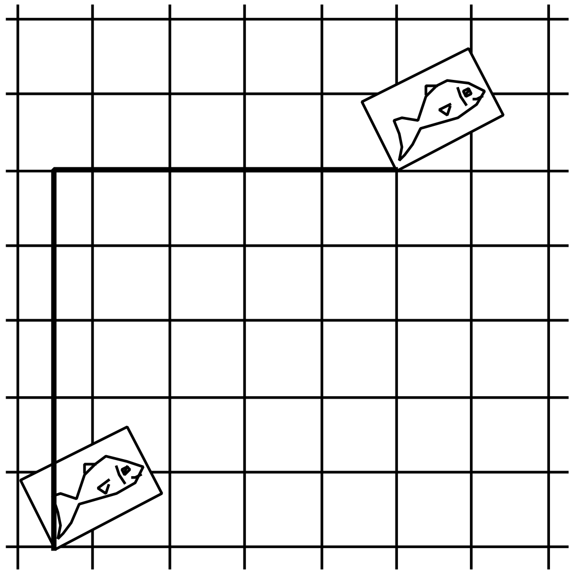
Debido a que nos encontramos trabajando el nivel 2 de razonamiento, en todas las actividades se utilizan figuras y vectores concretos, a partir de los cuales se experimenta, se generaliza y se enuncian las propiedades estudiadas, dejando para los niveles 3 y 4 de razonamiento el trabajo de estudiar la composición de traslaciones de manera abstracta y la obtención de demostraciones generales de estas propiedades.

Las actividades de composición de traslaciones que presentamos en esta propuesta son muy similares a las utilizadas en las experimentaciones de 6º de E.G.B. y Magisterio, aunque con algunas modificaciones o ampliaciones. Por ejemplo, la segunda parte de la actividad A2, en la que se pide utilizar siempre el mismo punto para dibujar desde él los vectores de las sucesivas traslaciones de la composición y el de la traslación resultante, ayuda a establecer un método de obtención de la imagen final: Bien mediante la suma de vectores (procedimiento que probablemente usarán los estudiantes que hayan trabajado anteriormente con vectores, como sucedió con las alumnas de Magisterio), o bien obteniendo la imagen final de un punto (generalmente un vértice) mediante la aplicación sucesiva en ese punto de los vectores de las traslaciones que se componen.

Tanto en lo referente al uso de números enteros y su aritmética, como al uso de vectores libres y su suma, los conocimientos previos que posean los estudiantes pueden modificar el planteamiento de este grupo de actividades, ya que en un caso los estudiantes deberán transferir propiedades o procedimientos ya conocidos a este nuevo campo de trabajo y en el otro tendrán que ir descubriendo las propiedades y técnicas correspondientes, aunque en este caso lo harán limitándose al campo de las traslaciones.

Un segundo grupo de actividades (de la A6 a la A9) está centrado en el aprendizaje de varias propiedades básicas de las traslaciones: La conmutatividad de la composición, la descomposición de una traslación en producto de varias y la traslación inversa de otra. En la actividad A6 se plantea la conmutatividad; ésta es una propiedad importante que, según hemos observado en todas las experimentaciones realizadas, los estudiantes del nivel 2 de Van Hiele pueden descubrir y generalizar sin dificultad a partir de su comprobación en algunos casos.

La descomposición de traslaciones surge como el proceso contrario a la composición y su presentación comienza con el planteamiento, en la actividad A7, de situaciones concretas, a partir de las cuales se pueda comprender la existencia de diversas soluciones (actividad A8). Este trabajo sigue la metodología propia del nivel 2, pero debe continuarse en el nivel 3, cuando los estudiantes tengan suficiente capacidad de razonamiento para asumir la generalidad de la descomposición, sin necesidad de soporte concreto de figuras, y para relacionar las traslaciones con las otras simetrías. Esto último no se puede hacer en el nivel 2, por lo que en los ejercicios de estas actividades las situaciones se limitan a la descomposición de una traslación en dos traslaciones.



En las experimentaciones llevadas a cabo en 6º de E.G.B. y en Magisterio se puede apreciar el estilo de trabajo típico de nivel 2. Al resolver la primera parte de la actividad A8, una estudiante de 6º sólo veía la descomposición horizontal + vertical (ver el dibujo) y, cuando se le pidieron otras posibilidades, empezó a tantear con una figura de papel, pero no se daba cuenta de que cualquiera de las posiciones en las que estaba situando esa figura era válida como primera traslación de la composición. Tras un tiempo de búsqueda por tanteo reconoció uno de los lugares donde había situado la figura como posible solución, seguramente porque la segunda traslación en ese caso era horizontal. Seguidamente, una compañera le mostró otras variantes y la alumna poco a poco, tanteando por sí misma más opciones, se dió cuenta de que sí había más soluciones. La otra alumna de 6º a la que se le propuso la actividad (que es la que razonaba a un nivel más alto) también también dio como primera solución la descomposición horizontal + vertical pero, a diferencia de la estudiante anterior, al pedirle más, enseguida se dió cuenta de la infinidad de posibilidades.

Respecto a las alumnas de Magisterio, desde el principio reconocieron la existencia de infinitas posibilidades. Sólo les planteamos actividades análogas a la A7. Sin embargo, en 6º de E.G.B. se planteó directamente la descomposición en dos traslaciones (actividad A8). Después de analizar los resultados obtenidos, creemos que se facilita y se hace más completo el proceso de aprendizaje si los estudiantes realizan las dos actividades, por lo que en la unidad de enseñanza que proponemos aquí hemos incluido ambas.

La nomenclatura y el vocabulario matemáticos correctos también se deben ir introduciendo en estos ejercicios a medida que surgen los conceptos o términos correspondientes, siempre que no sean origen de errores y no seas innecesarios. Por ejemplo, para la composición de aplicaciones sí hemos empleado la notación matemática $T_b \circ T_a$, mientras que para la traslación inversa no se utilizó el símbolo matemático T_a^{-1} .

Las actividades de la fase 4 terminan con dos (A10 y A11) dedicadas a trabajar en la construcción de frisos y mosaicos. Este tipo de actividades, cuando el sistema generador está formado por un solo tipo de isometrías, son muy apropiadas para concluir la fase 4, ya que en ellas los estudiantes pueden experimentar por sí mismos (objetivo de la fase de orientación libre) en el nuevo contexto de frisos y mosaicos y deben emplear la mayoría de las propiedades de las traslaciones que han aprendido hasta el momento. Por otra parte, la construcción de frisos y mosaicos se puede plantear con todas las isometrías y con diversos grados de dificultad, abstracción y formalismo.

Al realizar estas actividades por primera vez, el profesor debe dirigir a sus alumnos para mostrarles las peculiares "reglas de juego" de la construcción de frisos y mosaicos derivadas de su estructura algebraica, aunque dicha estructura debe quedar oculta por el momento. La primera de las reglas es que se pueden utilizar tanto las isometrías dadas en el enunciado de la actividad como sus inversas. La segunda regla, que en el caso de las traslaciones carece de significado y no es necesario mencionar, es que los giros y las simetrías se pueden aplicar basando su centro de giro o eje de simetría en cualquier celda de la malla, y no sólo en la inicial, siempre que se mantengan las posiciones relativas entre la celda y el centro o el eje, respectivamente.

Este contexto de los frisos y mosaicos no fue explotado en las experimentaciones realizadas; en todos los cursos empleamos bandas de figuras, que en ocasiones eran frisos, pero con otros objetivos (recordar las actividades del nivel 1); en Magisterio, al final de la experimentación de simetrías, también se introdujo el concepto de sistema generador de un friso o mosaico, a través de la construcción del friso y el mosaico más sencillos (celda rectangular, con sistema generador de traslaciones), pero se le dedicó poco tiempo.

TRASLACIONES: NIVEL 3

Objetivos:

Las actividades que planteamos para este nivel pretenden lograr los objetivos generales siguientes, que más adelante desglosaremos en las diferentes fases de aprendizaje:

1- Trabajar con traslaciones expresando los datos y resultados (puntos, imágenes y vectores) mediante coordenadas.

2- Descubrir y justificar que siempre existe una isometría (giro o traslación) relacionando dos figuras congruentes de la misma orientación.

3- Demostrar el resultado de la composición de traslaciones y el resultado de la descomposición de una traslación en traslaciones. Comprender y saber utilizar la infinidad de soluciones de la descomposición y las relaciones gráficas y aritméticas de los vectores implicados y de sus coordenadas.

4- Obtener, utilizar y analizar la definición formal de traslación. Caracterizar las traslaciones mediante conjuntos de condiciones necesarias y suficientes.

5- Demostrar informalmente, mediante razonamiento deductivo, propiedades de las traslaciones descubiertas en este nivel o en los anteriores.

6- Comprender el planteamiento y desarrollo de algunas demostraciones formales relacionadas con las traslaciones.

7- Realizar algunas implicaciones simples en una demostración y demostraciones de pocos pasos relacionadas con las traslaciones.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

Antes de entrar a justificar los objetivos especificados para el estudio de las traslaciones en este nivel, es imprescindible señalar que un desarrollo completo del tercer nivel de razonamiento requiere comprender las relaciones existentes entre las traslaciones y los otros tipos de isometrías estudiados (giros y simetrías). Esto lo hemos tenido en cuenta al plantear los objetivos de las unidades de enseñanza de los giros y las simetrías correspondientes al tercer nivel, donde, además del estudio específico del movimiento correspondiente, se hace un estudio conjunto de todas las isometrías.

Por lo tanto, especificamos los objetivos a alcanzar en esta unidad de enseñanza de las traslaciones para el tercer nivel de razonamiento, aunque no todos ellos se puedan conseguir por medio de actividades exclusivas de esa isometría. Tal es el caso, por ejemplo, del objetivo 2, aunque es importante ya que se refiere a una parte del teorema fundamental de las isometrías y es clave para entender globalmente la estructura de este conjunto, no puede ser abordado en este momento. La consecución de este objetivo se llevará a cabo en la unidad de enseñanza de los giros. Por el contrario, el objetivo 3 y los últimos objetivos enunciados para el tercer nivel de las traslaciones sí los desarrollamos en esta unidad, puesto que se pueden alcanzar centrándose sólo en ese movimiento.

Otra consecuencia importante de esta interrelación entre las distintas isometrías es que conviene que los estudiantes hayan desarrollado simultáneamente un aprendizaje de giros y de simetrías y se encuentren en el mismo nivel de razonamiento en esos conceptos que en traslaciones.

Los primeros objetivos plantean la necesidad de que los estudiantes lleguen a razonar de manera abstracta, utilizando representantes genéricos de las traslaciones y plasmando sus argumentos en los símbolos matemáticos correspondientes. De acuerdo con las características del modelo de Van Hiele, ese trabajo de generalización y abstracción es propio del tercer nivel de razonamiento pues, además, se basa en la utilización y combinación de diversas propiedades de las traslaciones.

El primer objetivo se refiere al interés de que los estudiantes trabajen en la obtención de las coordenadas (v_1, v_2) del vector de una traslación a partir de las coordenadas de un punto P $= (p_1, p_2)$ y de su imagen $P' = (p'_1, p'_2)$ o viceversa. Para el desarrollo correcto de la unidad de enseñanza que proponemos en esta memoria, no es imprescindible lograr este primer objetivo, pues en el entorno que hemos creado para el estudio de las isometrías sólo hemos empleado las coordenadas con las traslaciones, y esto de forma no generalizada. En las experimentaciones realizadas, hemos comprobado que incluso estudiantes de E.G.B. pueden resolver correctamente actividades de traslaciones basadas en coordenadas, por lo que hemos incluido, tanto en las actividades de este nivel como del segundo, algunas sugerencias al respecto. Somos conscientes de que se trata solamente de una primera aproximación, pues un tratamiento detallado basado en el uso de coordenadas (que, probablemente, debería incluir los giros y las simetrías) llevaría a la elaboración de otras unidades de enseñanza completamente diferentes, lo cual se aleja de los objetivos de nuestra investigación.

El desarrollo del objetivo 3 difiere de la visión de la composición de traslaciones que hemos proporcionado con las actividades del segundo nivel, en cuanto que ahora pretendemos que los estudiantes lleguen a una consideración general y abstracta de la composición de traslaciones, mientras que en las actividades del segundo nivel se utilizaban sólo situaciones concretas. Por una parte, los estudiantes deben comprender y utilizar la suma de vectores sin necesidad de recurrir a ejemplos concretos. Por otra parte, respecto del uso de coordenadas, deben generalizar por sí mismos y justificar la fórmula $(v_1, v_2) = (r_1+s_1+\ldots, r_2+s_2+\ldots)$, siendo (v_1, v_2) el vector de la traslación resultante de una composición de traslaciones y (r_1, r_2), (s_1, s_2), … los vectores de las traslaciones que intervienen en esa composición: $T_v = \ldots \circ T_s \circ T_r$.

Por lo que respecta a la descomposición de traslaciones, como ya indicamos en los comentarios de las actividades de la fase 4 del segundo nivel, la visión general de la descomposición, la infinidad de posibilidades y las relaciones numéricas de las coordenadas, así como la descomposición de una traslación en movimientos que no son traslaciones, corresponden al tercer nivel de razonamiento. En unos casos, esto se debe al elemento abstracto que interviene cuando se establecen afirmaciones trabajando sobre isometrías abstractas y en otros a las relaciones que hay que establecer entre los diversos movimientos, relaciones que se construyen sobre propiedades de los movimientos correspondientes.

Los objetivos 4 a 7 se refieren a las otras dos componentes básicas del razonamiento del tercer nivel de Van Hiele, la capacidad de definir y la de demostrar de manera lógico-deductiva, aunque informal, propiedades nuevas o ya conocidas. Los diferentes objetivos dan una visión más puntual del proceso de iniciación al razonamiento matemático, que debe hacerse poco a poco y empezando con situaciones sencillas al alcance de los estudiantes, para permitirles tener la experiencia necesaria para progresar en su adquisición del razonamiento del tercer nivel.

Fase 1 del Nivel 3

Objetivos:

En la presentación de las actividades de los niveles anteriores ha quedado suficientemente explicada la finalidad que debe tener la fase 1 de cada nivel, por lo que no creemos necesario repetir esas consideraciones respecto a la fase 1 del tercer nivel. En este caso, tampoco proponemos ninguna actividad específica para dicha fase, si bien los profesores deben centrar su actividad en determinar el nivel de razonamiento de sus alumnos en relación con las traslaciones y sus conocimientos sobre:

- Los números enteros y las operaciones de suma y resta en este conjunto.
- Utilización de los vectores gráficamente y mediante coordenadas.
- Manipulación y propiedades de las traslaciones.
- Los elementos necesarios de las otras isometrías.

En relación con estos puntos, si los alumnos conocen el tema pero tienen alguna carencia concreta, es conveniente darles una instrucción específica adecuada antes de empezar a trabajar con las traslaciones.

Fase 2 del Nivel 3

Objetivos:

1- Obtener la relación general entre coordenadas de un punto y su imagen por una traslación y las coordenadas del vector de la traslación.

2- Obtener y justificar de manera general, sin el soporte de figuras, la resultante de una composición de traslaciones, tanto a partir de la suma gráfica de los vectores de las traslaciones que se componen como de la suma de sus coordenadas.

3- Obtener y justificar de manera general, sin el soporte de figuras, la descomposición de una traslación en producto de varias traslaciones mediante la utilización gráfica de los vectores y a partir de sus coordenadas.

4- Justificar si determinados conjuntos de condiciones son suficientes para determinar una traslación.

5- Comprender y realizar demostraciones, dirigidas por el profesor, mediante justificaciones deductivas generales y no sólo comprobando casos particulares.

Actividades:

A1- A) Las coordenadas de un punto P son (2, 3). Si se le aplica a P la traslación de vector (5, 2), ¿cuáles son las coordenadas de su imagen P'? ¿Y las coordenadas de la imagen de Q = (-1, 5)? ¿Y las coordenadas de la imagen de R = (20, -30)?

Repetir el ejercicio con las imágenes de los puntos anteriores cuando la traslación que se aplica tiene como vector (-40, 50).

B) Las coordenadas de P', imagen de P, por la traslación T_V de vector (5, 6) son (10, 14). ¿Cuáles son las coordenadas de P? Si las coordenadas de Q' son (0, -7), ¿cuáles son las de Q?

Repetir el ejercicio con P' = (-10, 70), Q' = (50, -80) y la traslación de vector r = (8, -10).

C) Las coordenadas de un punto P son (3, 9) y las de su imagen P' por una traslación son (5, 7). ¿Cuáles son las coordenadas del vector de la traslación?

Repetir el ejercicio con el punto Q = (30, -40) y su imagen Q' = (-20, 60).

A2- Si P' es la imagen de P por una traslación T_a, y los puntos P y P' tienen de coordenadas (p_1, p_2) y (p'_1, p'_2) respectivamente, ¿cuáles son las coordenadas del vector a? Justificar la respuesta sin recurrir a los ejemplos de la actividad A1 u otros análogos.

Si conocemos las coordenadas de $P' = (p'_1, p'_2)$, que es la imagen del punto P por medio de una traslación T_a, ¿qué otros datos necesitamos conocer para saber cuáles son las coordenadas de P? Expresar en términos matemáticos la forma de obtener las coordenadas de P.

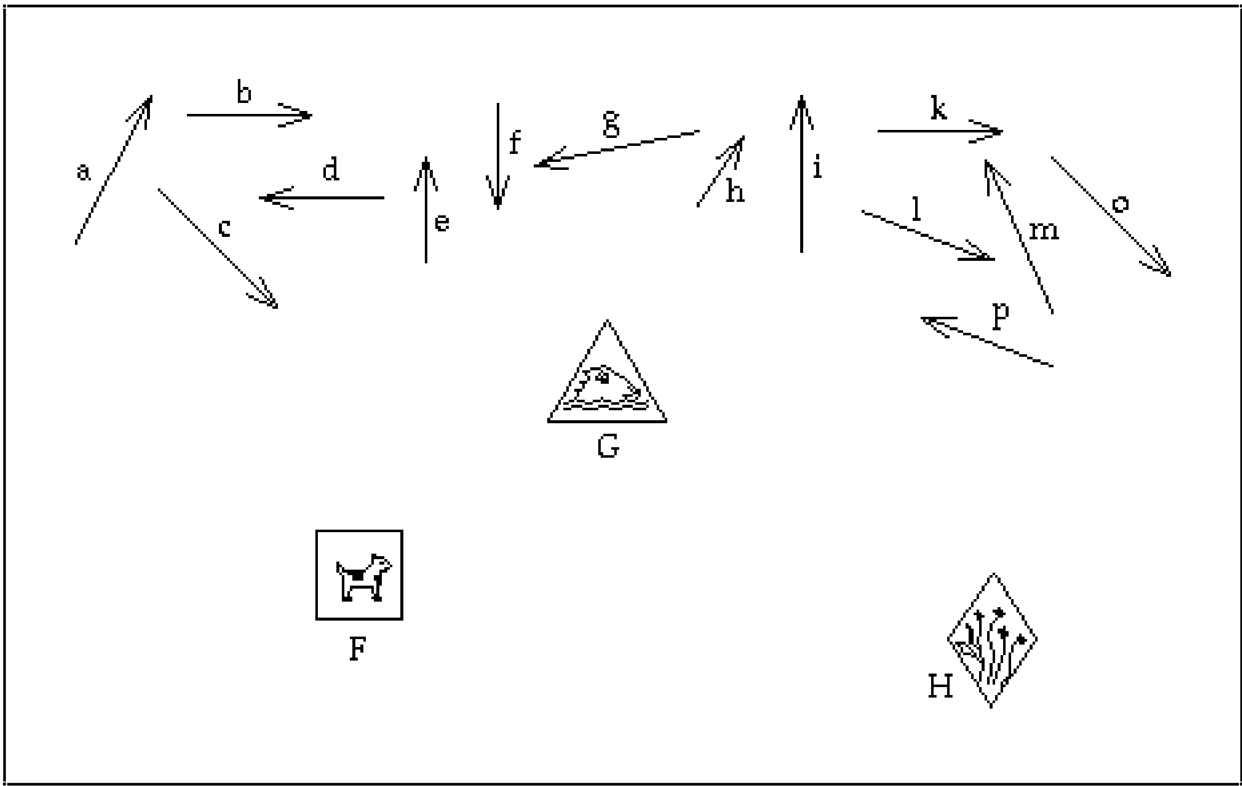
A3- A) A la figura F hay que aplicarle la composición $T_a \circ T_b \circ T_c \circ T_d \circ T_e$. ¿Se puede simplificar esta expresión? Sin aplicar los vectores para mover la figura F y sus imágenes, ¿cómo se puede determinar gráficamente, sin recurrir a las coordenadas de los vectores, el movimiento equivalente a esta composición?

Repetir el ejercicio con otras composiciones de traslaciones, aplicándole directamente a una figura de la lámina el vector de la traslación resultante de la composición.

Describir de manera general el procedimiento gráfico que permite obtener el vector resultante de una composición de traslaciones cuando se conocen los vectores de las traslaciones que forman parte de dicha composición.

B) A una figura F hay que aplicarle la composición $T_a \circ T_b \circ T_c \circ T_d \circ T_e$, cuyos vectores tienen las coordenadas $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, etc. ¿Se puede simplificar esta expresión? Sin aplicar los vectores para mover la figura F y sus imágenes, ¿cómo se puede determinar el movimiento equivalente a esta composición?

Describir de manera general el procedimiento para obtener las coordenadas del vector resultante de una composición de traslaciones cuando se conocen las coordenadas de los vectores de las traslaciones que forman parte de dicha composición.



A4- (Planteamiento general del problema, por lo que no se proporciona ningún vector concreto). Dada una traslación T_v, ¿es posible descomponerla en un producto de dos traslaciones? En caso afirmativo, ¿cuántas soluciones hay? Justificar los resultados de manera general, gráficamente, sin limitarse a la comprobación de algunos casos.

¿Es posible descomponer T_v en producto de tres, cuatro, … traslaciones?

A5- A) Dada una traslación T_a de vector a = (3, 1), ¿es posible descomponer esta traslación en un producto de dos traslaciones? En caso afirmativo, ¿qué coordenadas tienen los vectores de estas dos traslaciones? Si ello es posible, proporcionar cuatro soluciones particulares diferentes.

¿Es posible que el vector de una traslación de la descomposición de T_a sea el de coordenadas (5, 2)? ¿Y el de coordenadas (-7, 6)?

B) Dada una traslación T_b de vector $b = (b_1, b_2)$, ¿de cuántas formas se puede descomponer esta traslación en producto de dos traslaciones? Decir qué condiciones deben cumplir las coordenadas de las traslaciones de la descomposición: Si $r = (r_1, r_2)$ y $s = (s_1, s_2)$ son los vectores de las traslaciones que intervienen en la descomposición ($T_v = T_r \circ T_s$), expresar la relación entre (b_1, b_2), (r_1, r_2) y (s_1, s_2).

Si T_b se descompone en producto de tres, cuatro, … traslaciones, justificar cuántas soluciones hay en cada caso. Proporcionar ejemplos concretos descomponiendo la traslación de vector b = (1, 0) en producto de tres y cuatro traslaciones.

En general, dado el vector $b = (b_1, b_2)$, ¿qué condiciones deben cumplir las coordenadas de los vectores $r = (r_1, r_2)$, $s = (s_1, s_2)$ y $t = (t_1, t_2)$ para que sea cierto que $T_b = T_r \circ T_s \circ T_t$? Justificar las respuestas deductivamente, sin limitarse a comprobar algunos ejemplos concretos.

A6- Enunciar propiedades de las traslaciones para que los alumnos demuestren si son ciertas o falsas y si caracterizan a las traslaciones. Un ejemplo es el siguiente:

- La imagen de un punto P por cierto movimiento es P' y la imagen de otro punto Q por ese mismo movimiento es Q'. ¿Podemos dar algunas condiciones que aseguren que este movimiento es una traslación? O sea, ¿qué relaciones debe haber entre P, P', Q y Q' para que estemos seguros de que el movimiento ha sido una traslación?

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

En el tercer nivel de razonamiento se deben enlazar las tres isometrías (traslaciones, giros y simetrías), por lo que es conveniente realizar también las actividades incluidas en las unidades correspondientes a giros y simetrías, en particular las que relacionan estos movimientos con las traslaciones. La necesaria secuenciación y linealidad de la presentación escrita de esta unidad de enseñanza de las isometrías nos ha aconsejado limitar las actividades propuestas para las fases 2 y 4 de la enseñanza de las traslaciones a aquéllas en las que sólo se requieren conocimientos de traslaciones. Por lo tanto, en ninguna de las dos fases hemos incluido actividades que relacionen traslaciones con giros o simetrías, que están planteadas en las unidades correspondientes al tercer nivel de Van Hiele de dichos movimientos.

Respecto a las experimentaciones llevadas a cabo, prácticamente la totalidad de las actividades que se proponen para el nivel 3 se han utilizado sólo en la de Magisterio, puesto que en las experimentaciones de 3º y 6º de E.G.B. sólo se planteó la instrucción para los dos primeros niveles de razonamiento. A las alumnas de 6º les planteamos algunas actividades de iniciación al tercer nivel de razonamiento, pertenecientes a la secuencia propuesta para esta fase, pero detuvimos la experimentación al observar que, en el poco tiempo disponible, estas alumnas no podrían realizar un avance significativo. En algunos de los párrafos siguientes se pueden leer algunas respuestas de estas niñas que confirman nuestra afirmación anterior.

Según hemos indicado al comentar los objetivos de la fase 1 de este nivel de razonamiento, sugerimos que las actividades A1 y A2, que están diseñadas para cubrir el objetivo 1 de esta fase, sólo se propongan a estudiantes que tengan fluidez en el manejo de la aritmética en Z. Estas actividades marcan un tipo de trabajo típico del inicio de la fase 2, pues inicialmente corresponde al segundo nivel de razonamiento, ya que la actividad A1 plantea situaciones concretas, con puntos y vectores de coordenadas concretas, pero después la actividad A2 plantea la generalización y la demostración abstracta, mediante argumentos lógicos correspondientes al tipo de razonamiento del tercer nivel.

Las actividades A1 y A2 sólo se han utilizado en la experimentación de Magisterio. Estas alumnas necesitaron hacer muy pocos ejercicios concretos (A1) para deducir la relación general; únicamente hubo algún pequeño problema ocasionado por su olvido o falta de dominio de las operaciones aritméticas con los números negativos. Estas alumnas sí llegaron a establecer por sí mismas las relaciones generales entre las coordenadas de los puntos origen e imagen y las del vector de traslación, expresando las relaciones correspondientes en términos matemáticos abstractos (A2).

La actividad A3 está dirigida a cubrir el objetivo 2 de esta fase. En A3-A el énfasis está en la utilización gráfica de los vectores, para obtener el vector de la traslación resultante mediante la suma de los vectores de las traslaciones que se componen. El interés radica en que los alumnos deduzcan el procedimiento general, a partir de los conocimientos que poseen sobre la composición de traslaciones adquiridos en la fase 4 del segundo nivel. El objetivo de esta parte de la actividad es que los estudiantes establezcan la relación entre la suma de vectores y la composición de traslaciones de manera general y que lleguen a describir y justificar dicha relación sin referirse a ejemplos concretos. En la actividad A3-B el planteamiento es similar al anterior, pero referido a las coordenadas del vector de la traslación resultante de la composición.

En las actividades que propusimos en las experimentaciones de 6º de E.G.B. y en Magisterio, las alumnas hicieron las simplificaciones oportunas por sí mismas, sin necesidad de que lo pidiera la profesora, si bien en 6º de E.G.B. no lo hicieron todas las alumnas.

Respecto a la actividad A3-B, recordemos que las estudiantes de 6º no sabían manejar los números negativos, por lo que el sistema de coordenadas que utilizaron se basaba en los términos derecha-izquierda y arriba-abajo. Además, dos de las niñas, Marta e Inmaculada, a veces calculaban las coordenadas de los vectores inclinados midiendo en la dirección del vector; esto provocó algunas descripciones ambiguas, tal vez porque todas las alumnas veían los vectores y no necesitaban especificar todos los datos (actividad 13 de la experimentación, lámina 6-T-13.2):

Marta [refiriéndose al vector (2, -2)]: *El vector 1 es dos cuadros en diagonal hacia la derecha, pero pasando por el medio* [le falta añadir que el movimiento es hacia abajo].

....

Inmaculada [refiriéndose al vector (3, -1)]: *Tres.*

Prof.: *¿Tres hacia abajo?*

Inmaculada: *No. Es que lo lleva en la misma línea.*

De todas formas, las alumnas de 6º fueron capaces de obtener las coordenadas del vector resultante de una composición de hasta 4 traslaciones después de que haber aplicado paso a paso las traslaciones de la composición a un punto o una figura. A continuación la profesora les pidió que calcularan las coordenadas del vector resultante sin realizar los movimientos; al poco tiempo consiguieron resolver el problema, trabajando por separado con la primera y segunda coordenadas de los vectores. No obstante, su desconocimiento de los números negativos hizo este proceso laborioso y lento.

En la experimentación de 6º propusimos la actividad A3-A después de la A3-B. Por este motivo, parte de las niñas la resolvieron por un procedimiento mixto: Calculaban las coordenadas de un vector con una regla para luego dibujar dicho vector a partir de un vértice de la figura a trasladar, no suponiendo ninguna dificultad adicional el uso de papel no cuadriculado. Sólo una de las cuatro niñas utilizó el trazado de paralelas en esta actividad.

En la experimentación de Magisterio la única dificultad especial en la actividad A3 se debió a los conocimientos previos que tenían las estudiantes del uso de vectores en Física, fundamentalmente Ara (ella misma dice: *Esto es Física,* en la actividad 21 de la experimentación), lo cual ocasiona la aplicación incorrecta de algunas fórmulas. Por ejemplo, en la actividad 24 de la experimentación, equivalente a la A3-A, Ara recuerda la relación "extremo menos origen" para determinar el sentido del vector resultante, pero al aplicarla obtiene el sentido inverso al correcto.

Posteriormente, en la misma actividad, al trabajar con una composición de más de dos traslaciones, Ara calcula el vector resultante de las dos primeras traslaciones, después el resultante del anterior y la tercera traslación, etc. El procedimiento es correcto (propiedad asociativa) pero más largo de lo necesario. En cuanto la profesora le hace ver que obtener las imágenes sucesivas de un punto de la figura por las traslaciones lleva a la imagen final, Ara se da cuenta de que no es necesario el proceso que ella empleaba; ella misma lo dice:

Ara: *Hay que unir el origen del primer vector con el extremo del último vector.*

Las estudiantes de Magisterio resolvieron correctamente la actividad equivalente a la A3-B, en la cual, además, se les pidió que calcularan las coordenadas de la imagen de un punto $M = (m_1, m_2)$ por una composición de traslaciones. Al principio utilizaron dos estrategias diferentes (actividad 26 de la experimentación): Mientras una calculaba el vector resultante (sumando las coordenadas de los vectores de la composición) y después sumaba esas coordenadas a las del punto M, la otra alumna sumaba directamente las coordenadas de los vectores y de M. Pero al pedirles la profesora que generalizaran los resultados, ambas enunciaron la misma fórmula, $(m'_1, m'_2) = (m_1+v_1+t_1, m_2+v_2+t_2)$, la cual después la empleaban siempre.

Las actividades A4 y A5 están relacionadas con el objetivo 3 de esta fase. Igual que para la composición de traslaciones, ahora, para la descomposición, primero se plantea el problema basado en la representación gráfica de los vectores de las traslaciones (actividad A4) y después basado en las coordenadas de los vectores (actividad A5).

En la experimentación de 6º, esta actividad sólo se les planteó a dos de las cuatro niñas y se puede ver claramente en sus respuestas que razonaban en el segundo nivel de Van Hiele, por lo que terminó aquí la experimentación de la unidad de enseñanza de las traslaciones en este curso.

Influidas por el uso de las coordenadas, la primera solución de descomposición de una traslación en producto de otras dos que dan estas niñas es siempre el par de vectores vertical y horizontal. Al poco tiempo Rebeca se dió cuenta de la existencia de "muchas" posibilidades, de que podía obtener tantas descomposiciones como deseara. Por el contrario, Marta solo podía ver *siempre los dos mismos vectores;* después de un rato de tanteo, fue capaz de encontrar algunas soluciones más, pero siempre las percibía como casos concretos, sin conexión entre ellas. En el siguiente diálogo se nota que Marta no tuvo la capacidad de generalización de Rebeca (actividad 14 de la experimentación):

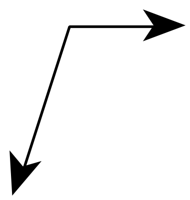
Prof. [después de que Marta haya encontrado una descomposición de una traslación]: *¿Y otra solución?*
Marta: *No sé. Espera que piense.*

La profesora le pidió a Rebeca que indicara otras posibilidades. Rebeca dio tres ejemplos (con anterioridad ya se había puesto de manifiesto que Rebeca había comprendido la generalización del resultado). Marta también encontró otras soluciones y descubrió cómo conseguir distintas soluciones.

Prof.: *¿Cuántas soluciones puedes encontrar?*
Rebeca: *Muchas.*
Marta [empieza a contar]: *1, 2, … muchas.*
Prof.: *¿Muchísimas?*
Marta: *Pues no sé. No me voy a pasar toda la vida comprobando.*
Prof.: *¿Tienes que irlo comprobando?*
Marta: *Sí.*

Las alumnas de Magisterio realizaron estas actividades siguiendo pasos análogos a los que se plantean en la secuencia propuesta en esta memoria. Esto resultó adecuado, obteniendo las alumnas las descomposiciones y justificaciones pedidas en las actividades y utilizando la notación matemática correcta para vectores, coordenadas y relaciones, notación en la que no fue necesario insistir, pues la emplearon por su propia iniciativa, sin que la profesora tuviera que pedirla explícitamente. En cuanto a la infinidad de descomposiciones de una traslación, veamos el diálogo entre estas alumnas, ante una situación análoga a la planteada a las alumnas de 6º, la cual hemos transcrito arriba:

Merche: *Se pueden hacer muchas.*
Prof.: *¿Muchas cuántas son?*
Ara: *Bastantes.*
Merche: *Una infinidad … Podemos coger todas las coordenadas de todos los …* [no termina la frase].
Ara: *Podemos coger un segmento muy largo. No sé. Muchas.*
Merche: *Yo diría que infinitas. Porque puedes coger lo que quieras. Puedes coger uno así de largo* [coloca las manos separadas] *u otro.*
Ara: *Claro. Puedes coger uno pequeñito y otro muy largo; puedes coger dos largos, iguales o grandes; éste muy pequeñito y éste muy grande* [Ara dibuja dos vectores (ver dibujo) y hace referencia a variaciones sobre ellos].



Prof.: *¿Y cuántos pequeñitos y grandes hay?*
Ara: *Muchos. Yo creo que infinitos.*
Merche: *Yo creo que sí hay infinitas. Porque hay infinitos vectores que al sumarlos den ése.*

Finalmente, la propiedad que planteamos en A6 tiene relación con el objetivo 4 de esta fase y parcialmente con el objetivo 5. Por la actuación de las alumnas se puede ver que este ejercicio sí resultó adecuado para empezar a modificar su comprensión de la demostración matemática desde una perspectiva del nivel 2 de razonamiento a una del nivel 3: Por una parte, cambió su consideración de la propiedad enunciada, pasando de verla como condición necesaria a condición suficiente. Por otra parte, cambió su tipo de confianza en de la veracidad de dicha propiedad, pasando de una base experimental del razonamiento a otra de demostración general deductiva.

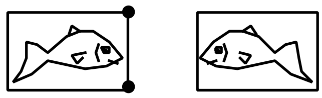
Al plantear esta propiedad a las estudiantes de Magisterio y analizar sus respuestas, podemos ver que Merche sí se dió cuenta desde el principio de que lo que se pedía era una condición suficiente, y su forma de razonar mostraba que tenía clara la diferencia entre condiciones necesarias y suficientes. Sin embargo, Ara se mantuvo en la búsqueda de una condición necesaria, justificando que eso se tiene que cumplir, sin darse cuenta de que no era lo que se pedía. Después de que la profesora leyera el enunciado de la propiedad, se estableció el siguiente diálogo (última actividad, 28, de la experimentación):

Ara: *Sí porque a P le habremos sumado el mismo vector que a Q; la misma longitud, por así decirlo.*

....

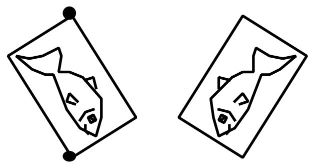
Merche: *Pero con dos sólo vimos que no se podía. En el pez …* [no acabó la frase porque intervino Ara. Merche hacía referencia a la lámina M-T-9.1 en la que había visto, en la sesión correspondiente, que en dos peces simétricos, dos vértices y sus correspondientes imágenes se podían unir mediante vectores iguales en dirección, módulo y sentido. La lámina no se pone a la vista hasta un poco después].

Ara: *Pero da igual. La longitud tiene que ser la misma.*



Merche: *Ahí* [en la lámina M-T-9.1] *era la misma y no era una traslación.*

Ara: *Esa es una condición que yo digo. No digo que sea la única. Hay más condiciones.*



Merche: *Pero hay* [movimientos] que *la cumplen y no son traslaciones.* [Sacamos la lámina M-T-9.1, de los peces simétricos] *Que éste fuera el P y éste el Q* [Merche señaló los vértices marcados en el primer dibujo]. *Ahí hay la misma distancia y no es una traslación. Si los vértices fueran opuestos, sí.*

....

[La profesora dibujó un contraejemplo (ver el segundo dibujo) a la situación planteada por Merche].

Merche: *Deberían ser los cuatro* [vértices los que tuvieran la misma distancia a sus imágenes].

Prof.: *¿Por qué?*

Merche: *El número de vértices. No. Con tres ya sería* [suficiente]. *Sí. Ese es más* *largo* [señala el segmento que une otro de los vértices y su correspondiente en la figura anterior].

Prof.: *Tú te fijas en ese dibujo, ¿no?* [el dibujo hecho por la profesora]

Merche: *Sí.*

Ara: *Continúo pensando lo que he dicho antes: Que sumándole un mismo vector nos dará siempre un P', un Q' y nos dará todos los vértices.*

Prof.: *Pero lo que te dicen es que te dan las coordenadas de un punto P y de P', de Q y de Q'. ¿Qué tiene que pasar para que estés segura de que se trata de una traslación?*

Ara: *Que tengan la misma longitud, pero los vértices que se corresponden.*

Prof.: *En esta figura que yo he hecho, en estos dos puntos hay la misma longitud* [la profesora señala los vértices opuestos, paralelos al eje de simetría, y sus correspondientes imágenes].

Ara: *Esos puntos no se corresponden.*

Prof.: *Sí se corresponden, pero es una simetría. La longitud es la misma. Entonces, el hecho de que la longitud ésta, para pasar de aquí a aquí, sea la misma que para pasar de aquí a aquí* [señala unos puntos P, P', Q y Q' que Ara había marcado al principio de la actividad y que no pertenecen a ninguna figura], *incluso la misma dirección y el mismo sentido, ¿eso te garantiza que sea una traslación o no?*

Ara: *No.*

Como se ve, este proceso de cambio en las concepciones de las alumnas requirió la orientación constante por parte de la profesora, por lo que es necesario realizar varias actividades con esta finalidad en la fase 2.

Fase 4 del Nivel 3

Objetivos:

1- Comprender el planteamiento y desarrollo de algunas demostraciones formales sencillas. Demostrar algunas propiedades ya conocidas.

2- Entender la concatenación de los pasos de una demostración que se haya estudiado anteriormente y adaptarla a otro teorema cuando la variación de planteamiento y desarrollo sea pequeña.

3- Completar demostraciones formales, presentadas por el profesor, realizando algunas implicaciones simples que no aparecen explícitamente.

Actividades:

A1- Demostrar que la composición de traslaciones es conmutativa, basándose en la representación gráfica de los vectores de traslación. Demostrar esta propiedad también mediante el uso de coordenadas.

A2- Demostrar que las traslaciones son isometrías, es decir: Dado un segmento PQ, demostrar, aplicando la definición de traslación, que su imagen P'Q' por la traslación T_V tiene su misma longitud.

Como introducción a las demostraciones formales, los estudiantes deben:

- identificar las partes del enunciado del teorema,
- demostrar este teorema informalmente,
- repetir una demostración formal desarrollada por el profesor, identificando el argumento general de razonamiento y justificando cada uno de los pasos.

A3- Dar a los estudiantes los enunciados de varias propiedades de las traslaciones para que verifiquen si son verdaderas o falsas y hagan las demostraciones correspondientes. Algunos enunciados pueden ser los siguientes:

- La imagen de una línea recta por una traslación es una línea recta. Además, cada recta y su imagen son paralelas.
- Dada T_V, para todo punto P del plano, si $P' = T_V(P)$, se cumple que $P \neq P'$.
- Basta comprobar que los segmentos que unen dos puntos y sus respectivas imágenes son de la misma longitud para saber que el movimiento realizado es una traslación.

- Dada T_V, para todo par de puntos P y Q del plano, si P' y Q' son sus imágenes por la traslación, se cumple: i) d(P,P') = d(Q,Q'). ii) d(P,Q) = d(P',Q'). iii) d(P,Q') = d(P',Q).

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

Ya hemos comentado con anterioridad que, en la propuesta de actividades de traslaciones para las fases 2 y 4 de este nivel, sólo incluimos actividades que tengan que ver exclusivamente con las traslaciones, dejando para las unidades dedicadas a los giros y las simetrías la ampliación del estudio de las traslaciones. Este motivo por el cual, no se plantean ciertas propiedades importantes de las traslaciones.

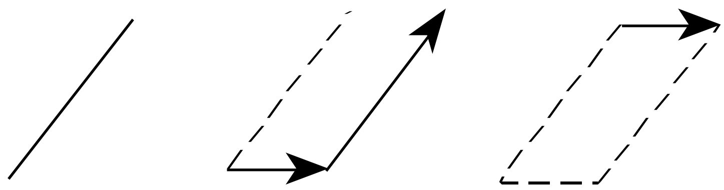
En la experimentación de Magisterio la actividad A1 se propuso algo prematuramente, pues los estudiantes no habían recibido instrucción suficiente del segundo nivel, por lo cual la alumna que intentó hacer una demostración general actuó intuitivamente. De todas maneras, en los comentarios que hacemos un poco más adelante se puede ver el razonamiento de nivel 3 al intentar analizar los casos posibles según las direcciones de los vectores.

En la experimentación con ese mismo grupo, la introducción a la conmutatividad de la composición de traslaciones tuvo lugar mediante un ejercicio en el que las alumnas aplicaron a la misma figura las dos composiciones asociadas. Como era de esperar, estas alumnas generalizaron inmediatamente la propiedad, por lo que la profesora les planteó que demostraran su validez general. Ara se basó en la analogía (y tal vez en la interpretación cartesiana de las traslaciones) para su justificación (actividad 24 de la experimentación):

Ara: *Porque da lo mismo sumar 4 + 5 que 5 + 4.*
Prof.: *Pero ahora son vectores, no números.*
Ara: *Pero da lo mismo. Yo creo que da lo mismo.*

Al pedirles una demostración más rigurosa, Merche inició un análisis de casos, según las posiciones de los vectores: los dos vectores horizontales (Ara planteó que si eran verticales sería igual) e inclinados (en realidad su clasificación debería haber sido en vectores con la misma dirección y con direcciones diferentes, pero Merche no fue capaz de identificarla explícitamente). En el diálogo que presentamos a continuación se ve que Merche no organiza bien los pasos de su justificación, pues los vectores que traza sucesivamente (y que mostramos en los dibujos) no son los adecuados en el momento que los dibuja. Un poco más adelante, al afirmar que no comprende por qué se produce la conmutatividad, se pone de manifiesto que el razonamiento que sigue no es de nivel 4, puesto que no intenta establecer una cadena hipótesis - demostración - conclusión para demostrar la propiedad.

Merche: *Si están torcidos, da lo mismo hacer uno después del otro. Esto mismo* [traza un vector inclinado, que mostramos en el dibujo de la izquierda] *será lo mismo que si hago así* [Merche traza el vector inferior horizontal y el inclinado de la derecha. Ver el dibujo del centro] *y después así* [Merche traza el vector superior del dibujo de la derecha].



- a - - b - - c -

Prof.: *Esta figura que estás dibujando ahí, ¿qué será? Tú has hecho este dibujo para explicarlo. En ese dibujo, ¿qué ves? Tú dices: Si compongo éste y luego éste* [izquierdo y superior] *da lo mismo que si compongo éste y luego éste* [inferior y derecho].

Merche: *Sí.*

Prof.: *¿Por qué?*

Merche: *No lo sé.*

Prof.: *Tú te has basado en este dibujo … Explica el razonamiento: Has puesto a y b. La composición de a y b es ésta. Luego* [has puesto] *b y a. La traslación resultante es ésta. ¿Por qué sale lo mismo? ¿Qué es lo que te lo asegura? ¿Esta figura qué es?*

Merche: *Un paralelogramo.*

Prof.: *¿Por qué?*

Merche: *Porque tiene los lados paralelos dos a dos.*

Prof.: *Entonces es la misma diagonal. Si poneis los vectores, éste es paralelo a éste y éste paralelo a éste. Entonces tenemos la diagonal del paralelogramo.*

Esto hace pensar que una organización de la enseñanza que cubra los objetivos de la fase 2 del tercer nivel antes de plantear la actividad A1 sí les permitirá a los estudiantes tener los conocimientos y la capacidad de razonamiento necesarios para resolver la cuestión propuesta, reduciendo la componente intuitiva y las imprecisiones que se produjeron con las alumnas de la experimentación.

Respecto a las actividades A2 y A3, su planteamiento y el tipo de respuesta que se debe pedir a los estudiantes corresponde al tercer nivel, por la consideración matemática de unas propiedades con un marcado carácter visual y ya conocidas con anterioridad. Este tipo de propiedades tan evidentes tienen la peculiaridad de que los estudiantes que razonan en el segundo nivel de Van Hiele no comprenden qué hay que demostrar, o por qué hay que demostrar algo tan obvio. Con la actividad A2 tratamos precisamente de mejorar la compresión por los estudiantes de esta necesidad de demostración.

La actividad A3 plantea la verificación de propiedades de las traslaciones y su demostración. También surge al papel de los contraejemplos como demostración de la falsedad de una propiedad. Generalmente, las demostraciones tendrán que ser guiadas por el profesor, para lograr que los estudiantes afiancen su convencimiento de la necesidad de las demostraciones deductivas y vayan más allá de la simple comprobación de algún ejemplo. Como en otras actividades similares a ésta, no proponemos ningún conjunto de propiedades que los alumnos deban estudiar necesariamente, sino que planteamos una actividad abierta que cada profesor puede organizar según su propio criterio e intereses. Nosotros planteamos cuatro propiedades a modo de ejemplo.

En la experimentación de Magisterio se pudo comprobar, una vez más, algo conocido por cualquier profesor de matemáticas: Que los estudiantes aprenden a demostrar la falsedad (mediante contraejemplos) mucho antes que la veracidad (sin poder recurrir a los ejemplos) de las propiedades. Así, al plantear el tercer enunciado de la actividad A3, se generó el siguiente diálogo:

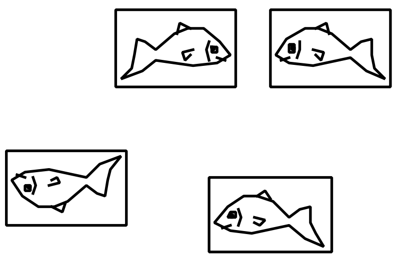
Merche: *Con dos sólo no. Porque me acuerdo del otro día. Eran dos peces* [busca la lámina M-T-9.1 resuelta en una sesión anterior; ver el dibujo de la página siguiente]. *Son dos segmentos de la misma longitud y no son paralelos.*

Prof.: *Exactamente. Con dos sólo no es suficiente. Ara, ¿estás de acuerdo?*

Ara: *Sí.*

Prof.: *Y si con dos no es suficiente, ¿qué pasa?*

Merche: *Tendría que ser con cuatro por lo menos …* [posteriormente se ve que Merche está pensando en los cuatro vértices] *No. Con 4 no porque …* [se pone a mirar los peces de la lámina].



Ara: *Pruebas con todos los vértices. Si no te da la misma longitud, entonces es que no es traslación.*

Prof. [a Merche]: *Y tú que decías con 4 puntos, mira: ¿Este punto no es también de la figura? Pues la distancia es la misma. Y con este punto también* [la profesora le muestra a Merche un contraejemplo a su afirmación anterior: Señala, en los peces simétricos, varios puntos situados sobre el lado paralelo al eje de simetría, con lo cual todos los segmentos correspondientes son de la misma longitud].

Merche: *Yo decía 4 vértices.*

Como se ve, en el tercer nivel de razonamiento en Geometría, todavía tienen mucha influencia la representación gráfica y los dibujos, pues los estudiantes utilizan a menudo propiedades implícitas de las que no llegan a ser conscientes. En este caso, Merche planteaba que si los cuatro vértices de un rectángulo verifican la hipótesis del enunciado (los segmentos que unen cada punto y su imagen tienen la misma longitud), entonces el movimiento es una traslación. En realidad, lo que planteaba era un caso particular de la utilización de cuatro puntos no alineados.

2.7. Propuesta de enseñanza de los Giros.

GIROS: NIVEL 1

Objetivos:

Las actividades que planteamos para este nivel pretenden lograr los objetivos generales siguientes, que más adelante desglosaremos en las diferentes fases de aprendizaje:

1- Reconocimiento de la característica que poseen los giros de ser **iso**metrías (el tamaño y la forma de las figuras se conservan).

2- Reconocimiento y realización de giros de manera directa sirviéndose de materiales auxiliares (por ejemplo, discos, palillos, ruedas). Identificación del tipo de desplazamiento (circular).

3- Descubrimiento y empleo de características visuales de los giros: Desplazamiento circular, cambio de posición, equidistancia al centro, no inversión de la figura.

4- Utilización de vocabulario apropiado relacionado con los giros: Giro, centro, distancia, recorrido circular, inclinación, imagen, …

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

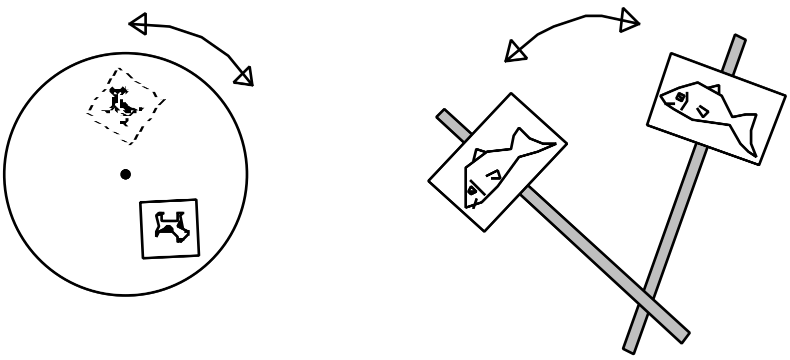
El enfoque global, en el cual se basa el razonamiento del primer nivel, se centra, en el caso de los giros, en la consideración de un desplazamiento alrededor de un punto u objeto fijo. En este nivel de razonamiento, hay que fomentar también la consideración del cambio de inclinación que va experimentando una figura a lo largo de su recorrido (objetivo 2).

La manipulación con materiales adecuados debe facilitarles a los estudiantes la visión señalada anteriormente, tanto cuando el centro de giro es interior a la figura objeto del movimiento como cuando es exterior.

A diferencia de lo que ocurre con las simetrías y el espejo o el mira, no hay ningún material estandarizado que produzca giros de manera automática, sin necesidad de manipulación. Por este motivo, como parte de esta investigación, hemos experimentado con varios materiales. En particular, hemos empleado discos transparentes y palillos (Jaime y otros, 1989).

Los discos transparentes son círculos de hojas de acetato con su centro marcado. Para girar una figura, se coloca el disco con su centro sobre el de giro, se calca o pega una figura como la que hay que girar, se pincha por el centro del disco con algún objeto punzante y se le dan vueltas (ver dibujo). Para obtener una copia sobre el papel, se pinchan los vértices o puntos extremos de la pieza o dibujo, se retira el disco y se ajusta la imagen a las marcas.

Los palillos son palitos o tiras de cartulina. En este caso debe haber piezas recortadas como la que que es objeto del giro. Para girar una figura, se sitúa el palillo de manera que pase por el centro de giro y por la figura. Se pega sobre el palillo una pieza igual a la que hay que girar, en su mismo lugar y con la misma inclinación; se sujeta o pincha el palillo por el centro del giro y se le dan vueltas (ver dibujo). Para obtener una copia sobre el papel, se pinchan los vértices o puntos extremos de la pieza, se quita el palillo y se ajusta la imagen a las marcas.



En las actividades se utilizarán estos materiales para efectuar giros de figuras, para permitir a los estudiantes observar el desplazamiento de las figuras y para comprobar la exactitud de las respuestas obtenidas.

No hemos considerado el compás como herramienta de apoyo en las actividades del nivel 1, ya que en este nivel se debe conseguir una familiaridad con el efecto visual (cambios de posición y de inclinación) producido al girar figuras, lo cual no se puede observar al girar puntos aislados. No obstante, cuando los estudiantes saben manejarlo, el compás puede resultar útil en algunas actividades para dibujar circunferencias, en lugar de trazarlas a mano alzada.

La visión primaria de giro, como algo que da vueltas, incluye las características a las que hacemos alusión en los objetivos 1 y 3: Conservación del tamaño y forma de las figuras (primer objetivo) y desplazamiento circular, cambio de posición y equidistancia al centro de giro (tercer objetivo). Respecto a estas últimas, no pretendemos desarrollar una consideración puntual y precisa, sino global y aproximada; en particular, la equidistancia se entiende como recorrido circular.

El último objetivo se refiere al aprendizaje necesario del vocabulario asociado a los giros. La concreción de este objetivo depende de la edad de los estudiantes y sus conocimientos geométricos. Con frecuencia los niños de los cursos inferiores de Primaria conocen algunos elementos relacionados con los giros (por ejemplo los sentidos de giro), pero no han aprendido a referirse a ellos con propiedad. Por lo tanto, el profesor deberá proporcionar oportunidades para que los alumnos reconozcan la necesidad de usar un vocabulario más exacto y lo practiquen.

Fase 1 del Nivel 1

Objetivos:

1- Toma de contacto con el concepto de giro.

2- Información sobre los conocimientos previos elementales que tienen los alumnos acerca de los giros.

3- Introducción de herramientas de ayuda y métodos informales empleados para la realización de giros (palillo, disco).

4- Información sobre el vocabulario que poseen los estudiantes al hablar de giros, unificación de términos y significados entre profesor y alumnos e introducción de vocabulario específico nuevo (centro, movimiento circular, …).

Actividades:

A1- Dar y pedir ejemplos de giros del entorno escolar y externos a la escuela. Pedir a los alumnos que expresen lo que entienden por giro o por girar un objeto.

A2- Pinchar, sucesivamente, por un vértice, otro punto del contorno y un punto interior una figura con algún dibujo y darle vueltas en cada uno de esos casos, parándola en diversas posiciones a lo largo del recorrido y pegando piezas iguales en el lugar correspondiente.

A3- Sobre un disco transparente, en el que está marcado el centro, pegar una figura. Colocar el disco sobre una hoja de papel en blanco y darle vueltas, pinchando por su centro. Situar varias piezas a lo largo del recorrido. Pedir a los alumnos que describan el desplazamiento.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

La información que el profesor debe obtener en esta primera fase, sobre los conocimientos que poseen sus alumnos en relación con los giros, se pueden conseguir observando cómo resuelven los estudiantes determinadas actividades y formulándoles preguntas sobre qué resultado creen que obtendrán o por qué han dado cierta respuesta. Si los alumnos ya han estudiado con anterioridad los giros, el profesor puede plantear problemas para los que se necesiten niveles de razonamiento cada vez más elevados, con el fin de averiguar dónde empiezan las carencias de sus alumnos.

La actividad A1 revela en términos generales lo que los alumnos entienden por girar, giro, … y le proporciona al profesor la primera información sobre los conocimientos y familiarización de los alumnos en relación a los giros. En todas las experiencias que hemos llevado a cabo, los ejemplos de giro espontáneos que proporcionaron los alumnos fueron casi exclusivamente tridimensionales: *La Tierra, el Sol, una noria, las aspas de un molino, …* fueron los principales ejemplos dados por los niños de 3º de E.G.B. En cuanto a los estudiantes de 6º de E.G.B., los ejemplos que propusieron fueron *la Tierra* y *Los discos de música.* En Magisterio, los ejemplos espontáneos correspondieron también al espacio, por lo que después se les pidió a las alumnas expresamente que dieran ejemplos de giros en el plano. Una de ellas sí proporcionó uno, un disco, pero la otra no supo dar ninguno.

Las explicaciones de esta última alumna eran confusas, con una terminología que denotaba claramente que en su experiencia escolar había trabajado en algún momento con giros en el espacio, pues siempre se refería a rotaciones alrededor de un eje: *Esto* [un tubo cilíndrico de pegamento] *gira sobre su eje central … En un giro la distancia al eje de todos los puntos es constante.*

Las actividades A2 y A3 sirven de toma de contacto con la visión dinámica de los giros en el plano y sus efectos sobre una figura, introduciendo a los estudiantes en el entorno en el que se desarrollará esta propuesta de aprendizaje. Las dos actividades son complementarias, ya que en la primera se trata el caso de las figuras que contienen el centro de giro (que manipulativamente es el más fácil) y en la segunda el caso de las figuras que no lo contienen.

En este par de actividades se debe poner el énfasis en la observación global del movimiento de giro, sin entrar en analizar en detalle las propiedades de mantenimiento de la distancia de las figuras al centro o variación de su inclinación. Salvo que los estudiantes ya conozcan estas propiedades, su empleo riguroso son objetivos de la fase 2 de este nivel.

Los medios y métodos propuestos en estas actividades (dar vueltas a la figura, tras pincharla o situarla sobre un disco transparente o un palillo) les permiten a los alumnos percibir qué es un giro y disponer de herramientas para el trabajo que se realizará posteriormente. En todas las experiencias llevadas a cabo, esos instrumentos mostraron su eficacia, pues los alumnos se sirvieron de ellos para diversas tareas de realización, verificación y corrección de giros.

Desde los primeros ejercicios el profesor puede hacer uso de vocabulario matemático (giro, centro, …) para ir familiarizando a sus alumnos con esos términos. En las experiencias efectuadas se aprecia que la simple mención de esos vocablos por parte del profesor provoca su utilización, o al menos la posibilidad de empleo, por parte de todos los alumnos. En ocasiones, generalmente en los primeros cursos de E.G.B., los estudiantes tardan en empezar a usar espontáneamente estos términos, aunque los comprenden sin dificultad cuando los utilizan el profesor u otros estudiantes.

Fase 2 del Nivel 1

Objetivos:

1- Reconocimiento de la característica de los giros de ser isometrías (no cambia el tamaño ni la forma) y de la conservación de la orientación.

2- Introducción y utilización de vocabulario básico: Giro, girar, centro de giro, imagen, …

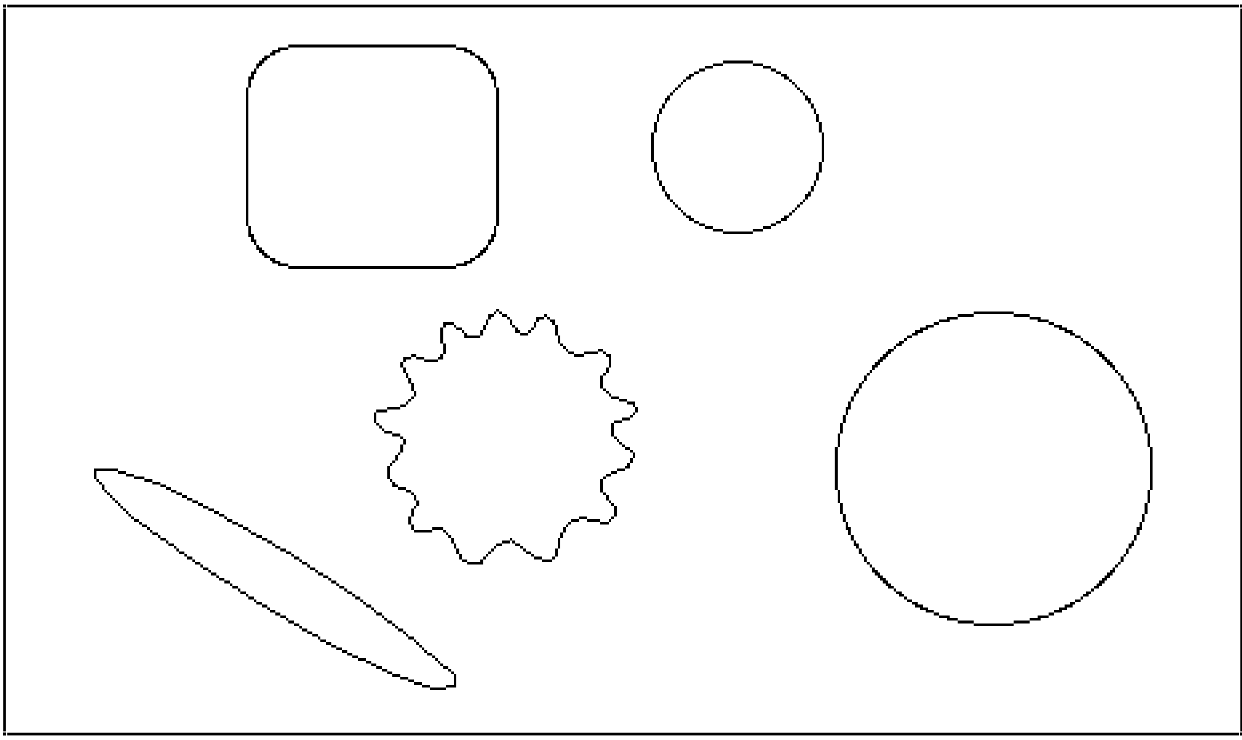
3- Empleo correcto de métodos y materiales adecuados para realizar o identificar un giro: Pinchar sobre el centro de giro si está en la figura; usar un disco, palillo, … cuando el centro de giro es exterior a la figura.

4- Identificación visual de grupos de figuras giradas o no giradas, en situaciones claramente distinguibles visualmente.

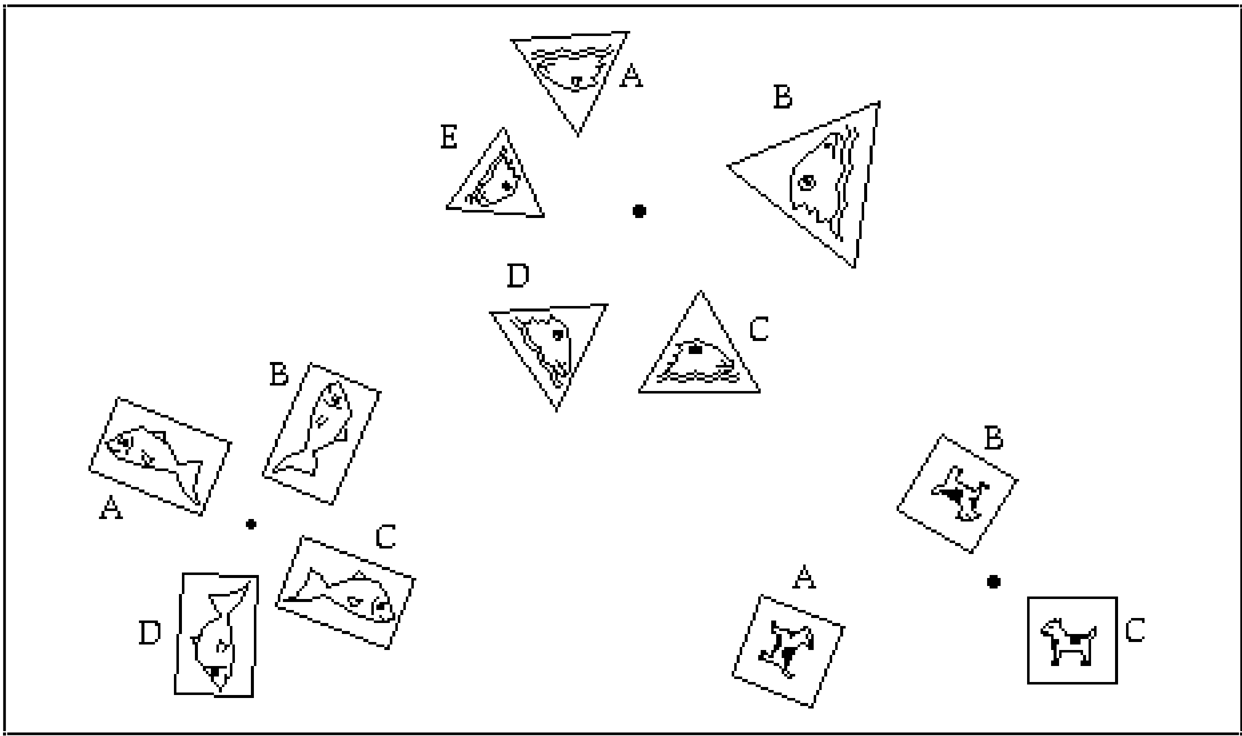
Actividades:

A1- Dados una figura y un punto, realizar giros sirviéndose de algún material auxiliar, tomando como centro el punto especificado (incluir casos con el centro de giro en el interior, en el contorno y en el exterior de las figuras).

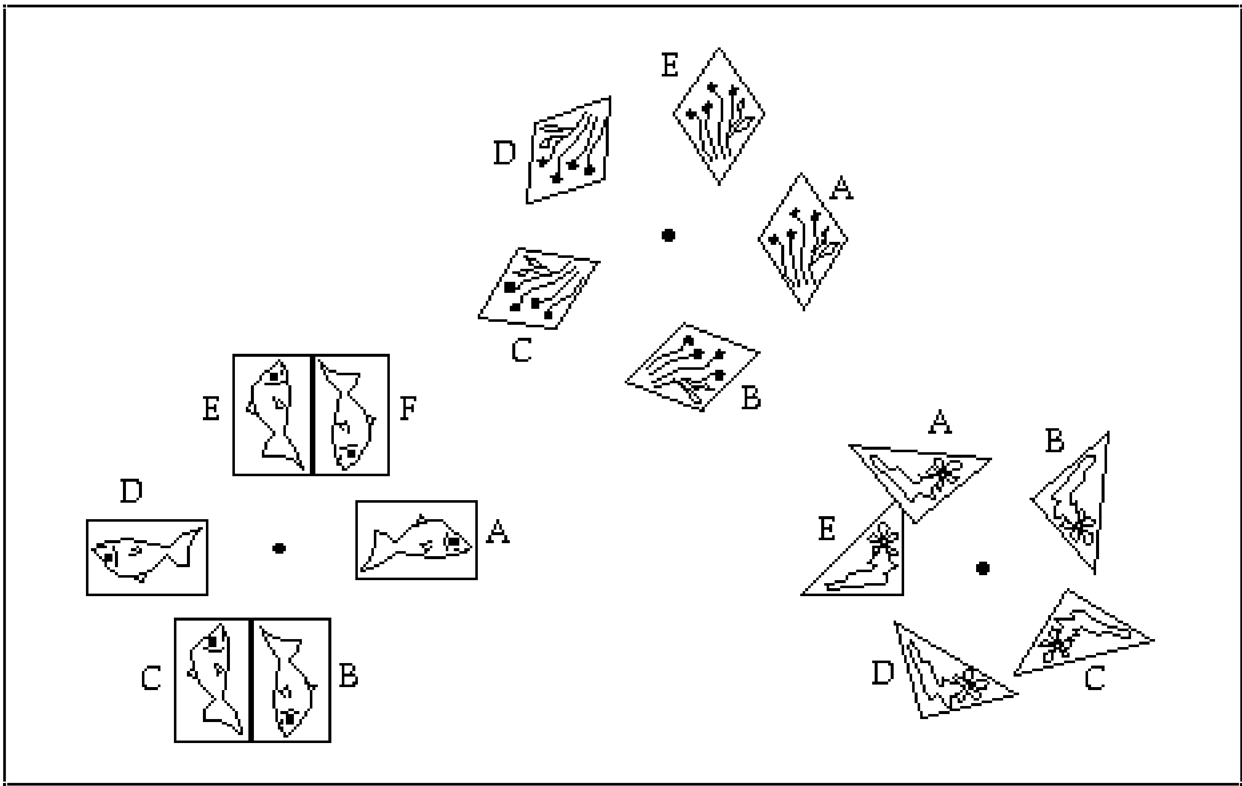
A2- Dadas varias líneas, algunas de las cuales son circunferencias y otras no, reconocer cuáles corresponden a recorridos de giros y cuáles no.



A3- Dados un punto y un conjunto de figuras, identificar las que se corresponden mediante un giro con centro en el punto especificado (los casos negativos deben corresponder a variaciones claras de tamaño o forma, a inversión de la figura y a diferencias acusadas en la distancia al centro de las figuras no giradas respecto a las giradas).



A4- Dados un punto y un conjunto de figuras, identificar las que se corresponden mediante un giro con centro en el punto especificado (los casos negativos deben corresponder a diferencias muy acusadas en la inclinación de las figuras no giradas respecto de las giradas).



- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

En las actividades A3 y A4, los alumnos deben servirse del arrastre manual de las figuras a lo largo de la circunferencia y de los métodos y herramientas ya conocidos (pinchar, disco o palillo) para resolver el ejercicio. Además, después de resolver los primeros casos de esta manera, el profesor les pedirá en los ejercicios siguientes que, antes de llevar a cabo las comprobaciones, conjeturen la respuesta a partir de su juicio visual.

Mediante las actividades A1 y A2 se pretende afianzar la base manipulativa necesaria para el trabajo de nivel 1. Una parte de los objetivos de la fase 2 del primer nivel es la utilización correcta de los medios manipulativos, la cual se fomenta en la actividad A1, ya que, por una parte, su manejo es necesario para poder desarrollar y utilizar el razonamiento del primer nivel y, por otra parte, esas herramientas se utilizarán a lo largo de las actividades que se proponen en los distintos niveles en la realización de giros y en su comprobación.

En unos casos el centro de giro está sobre la figura, en un vértice, un lado o su interior; otras veces es exterior a la figura. Los estudiantes deben seleccionar un método adecuado:

Pinchar sobre el centro y empujar la figura cuando el centro está sobre ella, y emplear un disco, palillo, u otro material válido, cuando el centro se encuentra fuera de la figura.

La visión del desplazamiento circular con cambio continuo de inclinación de la figura se potencia en las actividades A1 y A2 mediante el arrastre de figuras a lo largo de la circunferencia formada en el giro. Este sistema de arrastre, junto con los medios manipulativos, constituyen los elementos sobre los que apoyar el razonamiento del nivel 1, y también serán útiles posteriormente en otros niveles.

La finalidad de la actividad A2 es trabajar explícitamente sobre la idea más primaria relacionada con el giro, que es la visión circular del desplazamiento. Para ello el profesor debe propiciar explicaciones o justificaciones de los estudiantes basadas en la forma circular (o "redonda", en su terminología) de los recorridos de los giros, frente a variación de la distancia al centro o la existencia de tramos rectos en los recorridos que no lo son. En esta actividad, todos los alumnos con los que hemos trabajado identificaron de inmediato la circunferencia como la única línea posible de desplazamiento al efectuar un giro. En 3º de E.G.B., la justificación espontánea de los alumnos fue *Porque es/no es redondo* y, ante la petición del profesor de otras razones, para los casos negativos indicaron que *Es ovalado* o *No es círculo entero.* Cuando, poco después, el profesor hizo referencia a la existencia de tramos rectos, los niños también emplearon esa característica para justificar movimientos que no eran giros.

La utilización explícita de la equidistancia al centro de giro no es una característica a desarrollar en el primer nivel de razonamiento, ya que se trata de una propiedad de carácter puntual propia de un nivel de razonamiento superior. Sí lo es el desplazamiento circular, tal como hemos indicado en ocasiones anteriores, pues ésta es una propiedad global visual que contiene de manera implícita la idea de equidistancia. Los estudiantes que utilizaron la equidistancia al centro en las actividades del primer nivel de razonamiento lo hicieron porque tenían asociada esa propiedad a la circunferencia; pero en tal caso, la relación no se origina en el proceso de aprendizaje de los giros, sino que ha sido tiene adquirida con anterioridad. En la experimentación llevada a cabo en 3º de E.G.B., el profesor introdujo la equidistancia al centro de giro como factor a considerar en los giros y se apreció que los niños no fueron capaces de interiorizar esa propiedad; la repitieron en algún momento, debido a que se les indicó que la tuvieran en cuenta, pero a lo que recurrieron espontáneamente fue a la visión de recorrido circular. Por ejemplo, cuando el profesor pidió una segunda característica de los giros, Sandra hizo referencia a la necesidad en general de emplear la equidistancia, pero de manera poco precisa:

Sandra: *Medirlo con la regla.*
Prof.: *¿Desde dónde hasta dónde?*

Sandra: *Desde el punto de giro …*
Prof.: *¿Hasta dónde?*
Sandra: *Hasta el final.*

Hay, no obstante, una niña de 3º de E.G.B., cuyo razonamiento es superior al de los demás niños, que sí utiliza esa propiedad:

Gloria: *Si lo mides con la regla, por ejemplo, desde aquí … Te da 2; siempre te ha de dar 2 y si no es* [giro], *a veces no* [no mide 2].

Esta niña es la única que posteriormente, en otras actividades, hizo uso a veces de la equidistancia al centro de giro, tanto en la ejecución como en la verificación de giros.

En 6º de E.G.B. algunas alumnas indican por sí mismas la relación de equidistancia al centro, vinculada a la circunferencia, como propiedad de ésta. Así, cuando la profesora pide que las alumnas tracen el recorrido seguido por un punto en un giro, todas dibujan una circunferencia y sus justificaciones son:

Inmaculada: *Porque es así.*
Rebeca: *Porque al mover una figura en una rotación se convierte el movimiento en una circunferencia.*
Marta [corrige una circunferencia con un trazado no exacto]: *Porque no guardaba la distancia.*
Tras esa intervención, la profesora pregunta si saben qué propiedad posee la circunferencia. La respuesta de Marte es:
Marta: *Que hay la misma distancia desde el punto centro hasta todos sus puntos.*

En Magisterio las alumnas sí emplean y hacen referencia desde el primer momento a la equidistancia al centro, si bien al principio Ara tiene alguna idea errónea.

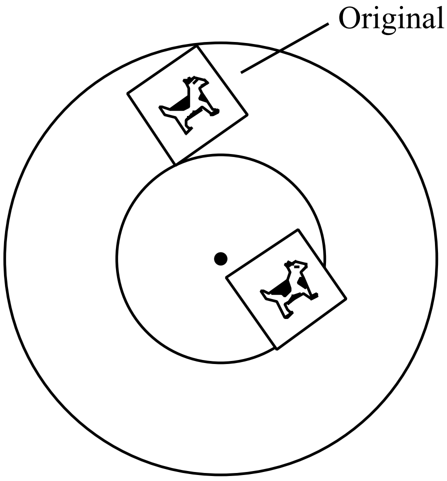
Respecto al uso de materiales manipulativos, en las experiencias de 3º y 6º algunos alumnos necesitaron la ayuda del profesor para emplearlos adecuadamente o para transferir el modo de utilización de un material al del otro (disco-palillo).

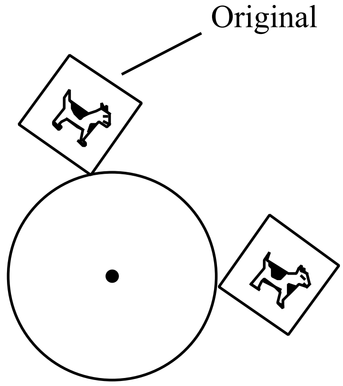
En la actividad A3, además de presentar la característica de isometría de los giros, expresada por el hecho de reconocer que las figuras no cambian su tamaño ni forma, se analizan las propiedades de conservación de distancia y de ausencia de inversión de orientación en los giros, propiedades visuales abordables en el primer nivel de razonamiento.

La percepción de la variación de la inclinación de una figura cuando se mueve por un giro no es tan inmediata como la idea de movimiento circular. Los primeros ejercicios de toma de contacto con los giros provocan a veces la visión de cambio continuo uniforme, pero es necesario trabajar sobre ello para asimilar correctamente esa característica. En todas las experimentaciones que hemos llevado a cabo se produjeron errores en varias ocasiones, no solamente al principio de la instrucción, sino también en ejercicios más avanzados. Por ello ahora insistimos más, con la actividad A4, en la realización de ejercicios orientados directamente a desarrollar en el primer nivel de razonamiento esa idea de cambio de inclinación, para lo cual es eficaz el arrastre de la figura a lo largo del recorrido y la comprobación con herramientas manipulativas.

En ninguna de las experimentaciones efectuadas se hizo hincapié en el arrastre de la pieza, pero los alumnos de todos los cursos lo utilizaron espontáneamente. Por ejemplo, en 3º de E.G.B., Gloria empleó esa técnica desde los primeros ejercicios en los que se le daba una figura y el centro de giro, y lo hacía para formarse una idea de cómo se situaría la figura girada. Mucho más adelante, en la sesión 15ª, a Gloria se le presentó un dilema al ver que la posición en la que había situado la figura mediante arrastre (errónea por no haber mantenido la distancia al centro de giro) y la posición que había obtenido con el compás (correcta) eran diferentes. Gloria se sorprendió por este resultado y su primera reacción fue considerar correcta su estimación mediante arrastre. Pero podría haberse dado el caso contrario, de corrección en la colocación manipulativa y error en el método más técnico.

Describimos a continuación dos casos, correspondientes a la actuación de Inmaculada, en la experimentación de 6º de E.G.B., en los cuales se observa la ausencia de consolidación de la idea de cambio de inclinación: En la actividad 7 de la experimentación, Inmaculada da como resultado de un giro la figura de la izquierda de las que mostramos a continuación, a pesar de haberse servido del procedimiento que estaba aprendiendo, basado en propiedades matemáticas. Inmaculada no se da cuenta de la necesidad de variar la inclinación. Más adelante, en la actividad 9 de la experimentación, se puede observar de nuevo una traslación de la figura imagen, cuando se había pedido un giro de 80° (dibujo de la derecha).





Insistimos, por tanto, en la conveniencia de desarrollar la visión intuitiva en primer lugar, que comprende tanto la idea de desplazamiento circular como la de cambio uniforme y continuo de la inclinación de una figura a lo largo del recorrido del giro. Para ello, en la secuencia de actividades que proponemos, el arrastre manual de las figuras es uno de los medios de reconocimiento de giros en esta fase, y de realización de giros en la fase de orientación libre de este primer nivel de razonamiento.

Aunque la ausencia de variación de los ángulos girados por distintos puntos de una figura y la conservación del tamaño de las figuras han resultado evidentes para los estudiantes que participaron en las experimentaciones que hemos realizado, ya desde el principio del trabajo con giros, conviene ponerlas de manifiesto. Por ejemplo, en 3º de E.G.B., en un ejercicio se acepta como válida una figura inversa de la dada simplemente porque no se les había presentado a los niños la existencia de tales figuras hasta el momento, por lo que sólo prestaban atención a su colocación sobre la circunferencia de giro. No obstante, cuando los niños probaron con medios manipulativos lo que sucedía, se dieron cuenta de la existencia de piezas diferentes (de orientación inversa en sus ángulos[1]) y en lo sucesivo sí prestaron atención la característica de inversión. De todas maneras, esta propiedad de inversión es menos visual que la conservación de distancias, y es posible que si hubiéramos experimentado con niños de menos experiencia (cursos inferiores), eso se habría convertido en objetivo de instrucción. De hecho, en los comentarios relativos a la experimentación de simetrías, indicamos que los niños de 1º de E.G.B. necesitaban frecuentemente situar las piezas

[1] La consideración de esta característica se hace de manera visual, mediante una apreciación de que las figuras "miran hacia el otro lado", o comprensiones parecidas, y de que al superponer las piezas no pueden coincidir.

correspondientes una encima de la otra o alineadas para compararlas y decidir si eran la misma o no.

Por tanto, creemos conveniente manifestar explícitamente en las actividades del primer nivel esa característica de los giros. Tampoco hay que descartar la posibilidad de que en alumnos con menos experiencia la conservación de distancias tenga que ser objeto de enseñanza, pues en el caso de simetrías, en diversas experiencias sobre giros llevadas a cabo con alumnos de 4° a 8° de E.G.B., las cuales no se incluyen entre las comentadas en esta tesis, y en la de simetrías de 1º de E.G.B. (actividad 9), hemos constatado que, en tareas de dibujo, siempre hay varios alumnos que disminuyen o aumentan considerablemente el tamaño de las imágenes, si bien es probable que en esos errores influya la falta de destreza de dibujo.

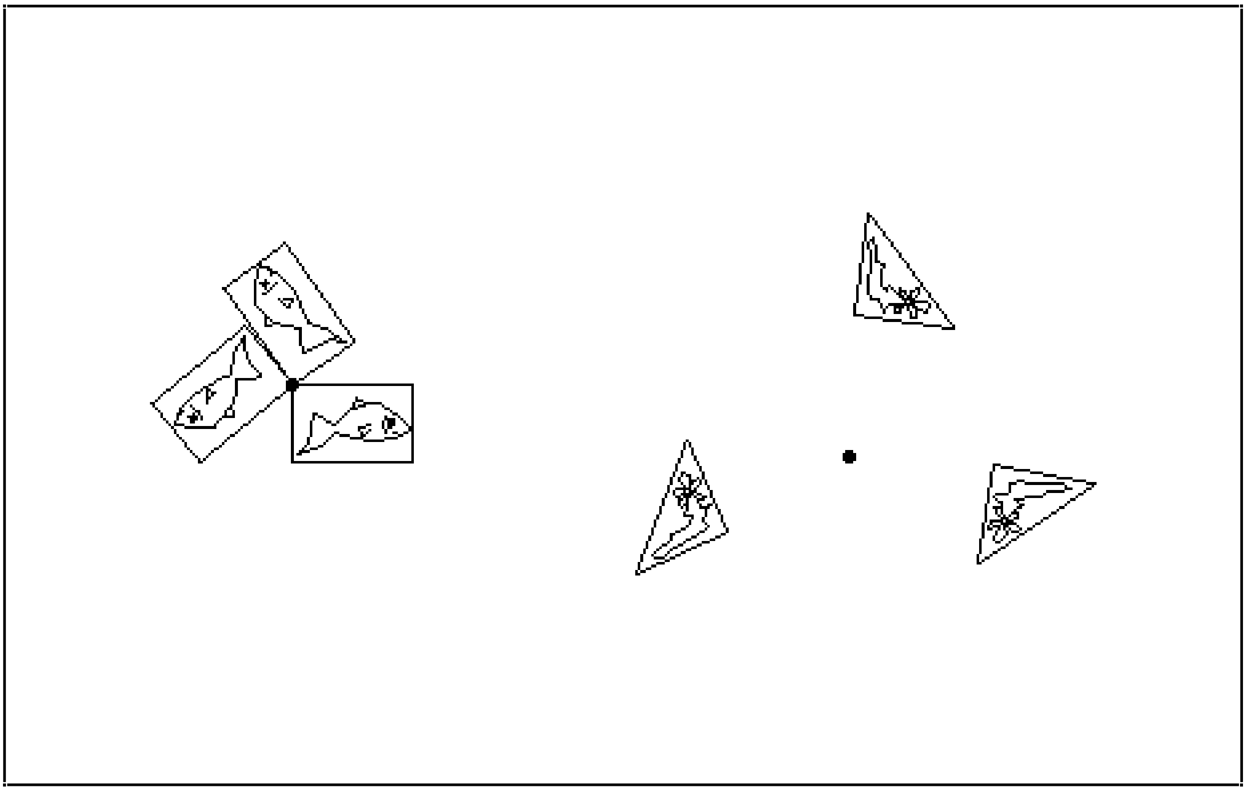
Fase 4 del Nivel 1

Objetivos:

1- Utilizar las características visuales de los giros (desplazamiento circular y variación de la inclinación) y las técnicas de realización de giros, desarrolladas en la fase 2, para reconocer figuras giradas y efectuar giros en situaciones más complejas.

Actividades:

A1- Dado un grupo de tres figuras que se corresponden mediante giros cuyo centro es el señalado, coger una figura igual a las dadas y moverla con la mano siguiendo el recorrido completo del giro a lo largo de toda la circunferencia. Pegar piezas como esta en algunos lugares del recorrido y comprobar posteriormente, sirviéndose de algún material auxiliar, la exactitud de la solución.

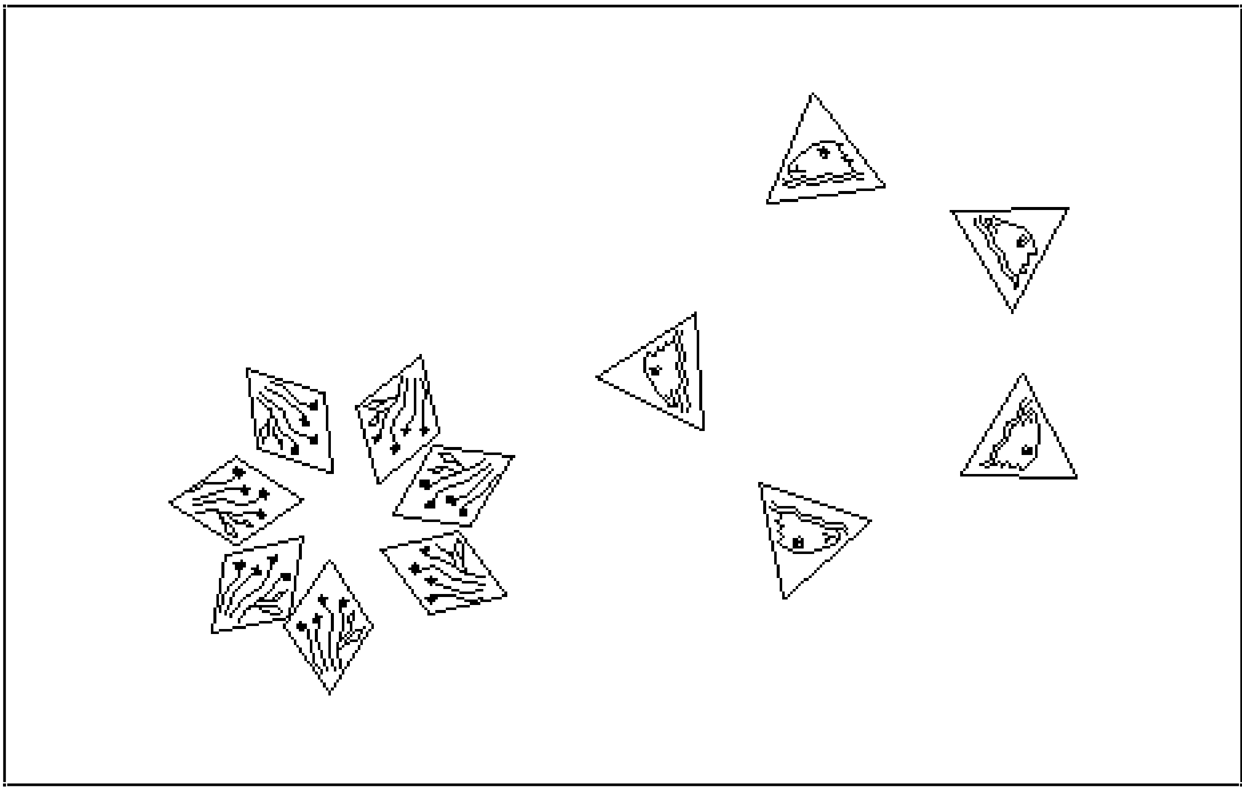


A2- Dados varios grupos de figuras que se corresponden mediante giros con el mismo centro, marcar el recorrido seguido por algunos puntos. Conjeturar primero y comprobar después el recorrido de otros puntos.

A3- Dados una figura y un centro de giro, marcar el recorrido seguido por varios puntos al girar la figura. Hacerlo sin mover la figura y después comprobar la solución aportada, mediante el desplazamiento de la figura y también sirviéndose de alguna herramienta auxiliar.

Disponiendo de las circunferencias trazadas en la primera parte de la actividad, ya corregidas, colocar varias imágenes de la figura a lo largo del recorrido del giro. Hacerlo arrastrando las piezas, sin material auxiliar. Comprobar después el resultado con la ayuda de alguna herramienta.

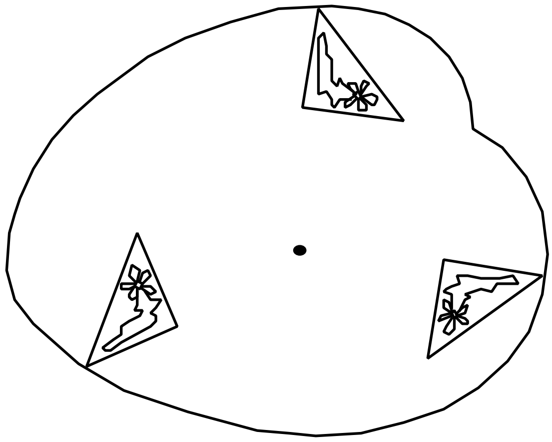
A4- Dado un grupo de varias figuras que se corresponden mediante un giro y que cubren gran parte de la circunferencia correspondiente, señalar aproximadamente dónde se encuentra el centro de giro. Determinarlo sin servirse de materiales auxiliares, pero utilizarlos luego para la comprobación.



- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

Las actividades que proponemos en la fase 4 incluyen tareas que exigen la aplicación de las características de los giros y de los métodos de movimiento desarrollados en la fase 2.

Con la actividad A1 se intenta afianzar la comprensión de las dos propiedades visuales y globales básicas de los giros: Equidistancia al centro y variación continua de la inclinación de los segmentos. La equidistancia es comprendida y asimilada con bastante facilidad por la mayoría de los estudiantes, pero no ocurre lo mismo con la variación de inclinación. Existe una fuerte tendencia, que hemos detectado en estudiantes de todas las edades, desde E.G.B. hasta Magisterio, a pensar que las figuras se mantienen paralelas a sí mismas cuando están girando (Jaime y otros, 1989).



Tal como pone de manifiesto la experimentación de 3º de E.G.B., el conocimiento de que el desplazamiento en un giro es circular (visión de tipo global) no implica que se haya asimilado su particularización a cada punto de una figura. Entender esta particularización es el primer paso necesario para iniciar la adquisición del segundo nivel de razonamiento. Por ejemplo, en el dibujo se ve la respuesta de Jorge acerca del recorrido seguido por un punto. Es evidente que no intenta dibujar una circunferencia. Por ello, en las actividades A2 y A3 se incide sobre esa característica. Una vez contestada A3, aparece planteada explícitamente la propiedad de la situación concéntrica de las diversas circunferencias correspondientes a los recorridos de diversos puntos de la misma figura.

La segunda parte de la actividad A3 no se planteó en nuestras experimentaciones del mismo modo que se propone aquí. Su inclusión se es consecuencia de la forma de actuación de los estudiantes en otras actividades: Cuando saben manejar el compás y se les pide que ajusten la posición de la figura imagen (esperando el profesor que obtengan las imágenes de varios puntos), la actitud espontánea que se produce en varios alumnos de 6º de E.G.B. y de Magisterio es ajustar la figura de manera que encajen en varias circunferencias, es decir situando simultáneamente varios puntos de la figura (generalmente sus vértices) sobre las circunferencias correspondientes. Ello se debe a que la visión de ajuste por circunferencias se puede adquirir en una fase avanzada del primer nivel, aunque haya que esperar hasta las actividades del nivel 2 para estudiar los aspectos matemáticos y metodológicos relacionados con la obtención de las imágenes de varios puntos.

En nuestras experimentaciones no se planteó ninguna actividad como la A4. No obstante, la visión global de movimiento circular, desarrollada en este primer nivel, incluye la existencia del "punto central" (centro de giro), reconocido incluso por los alumnos de 3º de

E.G.B. La actividad A4 pretende centrar la atención en dicho elemento, ya que juega un papel fundamental en el trabajo que se realiza en niveles superiores de razonamiento. La experiencia adquirida en las fases previas del primer nivel debe permitirles a los estudiantes reconocer la posición aproximada del centro de giro y servirse correctamente de los instrumentos empleados con anterioridad, para situarlo con un grado de exactitud aceptable.

GIROS: NIVEL 2

Objetivos:

Las actividades que planteamos para este nivel pretenden lograr los objetivos generales siguientes, que más adelante desglosaremos en las diferentes fases de aprendizaje:

1- Descubrimiento, reconocimiento y utilización adecuada de:

a) Las propiedades que caracterizan los giros: La equidistancia al centro de giro y la invarianza del ángulo de giro entre cualquier punto y su imagen.

b) La equivalencia de giros del mismo centro y ángulos α y β tales que $\alpha - \beta$ es múltiplo de 360°.

2- Utilización de la notación y el vocabulario matemáticos para identificar o referirse a puntos, centros de giro, ángulos, etc. (p, p', G(O,60°), …).

3- Utilización explícita de la definición de giro en las argumentaciones.

4- Determinación del ángulo o el centro de un giro a partir de otros datos.

5- Realización de composiciones de giros del mismo centro y generalización del resultado de la composición de varios de tales giros. Descubrimiento de la conmutatividad.

6- Descubrimiento y verificación, a partir de ejemplos, de otras propiedades de los giros.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

En el segundo nivel de razonamiento se empiezan a poner de manifiesto y a utilizar explícitamente los elementos matemáticos que caracterizan los giros y sus propiedades. Por ese motivo, el primer objetivo de este nivel debe ser el aprendizaje comprensivo de las propiedades básicas de los giros.

Se utiliza la equidistancia de un punto y su imagen al centro de giro, relacionándola con la circunferencia correspondiente, lo cual es la formalización de la interpretación de giro desarrollada en el primer nivel de razonamiento debido a su fuerte componente visual.

La medida del desplazamiento realizado mediante un giro se plasma en el ángulo de giro. Pero para utilizarla hace falta comprender su invarianza, por lo que ésta constituye otro de los primeros objetivos de este nivel de razonamiento. El empleo de los grados en los giros (no necesariamente a través del transportador[1]) permite descubrir experimentalmente propiedades de los giros, propiedades que posteriormente se generalizan y aplican.

Casi la totalidad de los objetivos propuestos para este nivel de razonamiento lleva asociada la medida de ángulos. En particular, destacan la equivalencia de giros, la composición de giros del mismo centro y la determinación del ángulo o el centro de giro.

El paso del primer al segundo nivel de razonamiento supone el inicio de la actividad realmente matemática de los estudiantes, por lo que en este nivel deben también empezar el aprendizaje del vocabulario matemático usual, así como de las notaciones correspondientes a los conceptos u operaciones implicados. Por este motivo, uno de los objetivos importantes del nivel 2 debe ser el desarrollo de la capacidad de los estudiantes para entender la terminología matemática y utilizarla en sus explicaciones. No obstante, es conveniente evitar aquellos casos en los que dichos vocablos o notaciones puedan crear dificultad a los estudiantes, retrasando su uso hasta el momento adecuado.

Una vez que los estudiantes han entendido qué es un giro y cuáles son sus características matemáticas, ya están en condiciones de entender la definición y usarla en sus explicaciones, por lo que un objetivo del nivel 2 debe ser fomentar el uso de la definición de giro. No obstante, no se debe olvidar que, para los estudiantes del segundo nivel, una definición es una relación de las propiedades destacadas de ese concepto, más que un conjunto mínimo de tales propiedades (condiciones necesarias y suficientes).

Los estudiantes que se encuentran en el segundo nivel de razonamiento pueden trabajar en la determinación del centro de un giro, lo cual hacen mediante procedimientos de aproximación. Sin embargo, para que entiendan correctamente el procedimiento técnico de cálculo del centro de giro, que es una destreza necesaria para lograr una visión completa de los giros, es necesario previamente el descubrimiento y la generalización de la propiedad de que la mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los centros de los giros que transforman uno de los extremos del segmento en el otro. El afianzamiento de esa propiedad permitirá posteriormente, en el tercer nivel de razonamiento, efectuar composiciones de giros de distinto centro y justificar la obtención del centro del giro resultante. Por lo tanto, en las actividades del nivel 2 se trabajará en las ideas básicas (cálculo aproximado del centro de giro y asimilación de la propiedad de la mediatriz) y en las actividades del nivel 3 se utilizarán estos conocimientos en un contexto más formalizado y más apropiado para su uso general.

[1] Si el empleo del transportador presenta problemas, se pueden utilizar otros medios que, aunque posiblemente sean de menor exactitud, permiten obtener algunas propiedades. En particular, disponer de sectores de cartón de diversas amplitudes ha demostrado resultar útil en otras investigaciones (Fuys, Geddes, Tischler, 1988).

Pero también hay otras propiedades que pueden descubrir y utilizar directamente los estudiantes y a las que no aludimos ahora. No obstante, para que avance el nivel de razonamiento de los estudiantes, es necesario que éstos practiquen sus destrezas y hagan nuevos descubrimientos. Son de especial importancia, por diversos motivos, los siguientes:

- Las particularidades de los giros de 180°, pues este movimiento tiene suficiente entidad por sí mismo como para que con frecuencia reciba un nombre propio: Simetría central. Por una parte, posee gran contenido visual, al quedar la figura imagen "al revés", y, por otra parte, el método más sencillo para obtener la imagen por un giro de 180° difiere del usual, pues sólo precisa alinear el punto imagen con el punto original y el centro de giro y mantener la distancia al centro de giro.

- La determinación de la inclinación de las imágenes por el ángulo del giro: Las imágenes de una figura por varios giros del mismo ángulo y centros distintos son trasladadas unas de otras. Pretendemos que esta propiedad sirva posteriormente, en las actividades del tercer nivel de Van Hiele, para establecer relaciones entre giros, traslaciones y su composición, y que sea un elemento básico para la justificación general de ciertos resultados de composiciones de movimientos o para la obtención de técnicas generales de composición y descomposición de isometrías.

Fase 1 del Nivel 2

Objetivos:

1- Obtener información de los conocimientos que tienen los alumnos sobre ángulos, manejo de transportador y empleo del compás para trazar mediatrices, medir distancias, …

2- Proporcionar una unidad complementaria de enseñanza sobre ángulos, su medida y forma de uso del transportador, si ello fuera necesario.

Actividades:

A1- Dados un punto P y su imagen P' mediante un giro con centro O, marcar el ángulo que se forma (en los primeros casos, pintar su interior). Medir el ángulo.

A2- Dados un centro de giro y un segmento con un extremo en dicho centro, girar el segmento aproximadamente, sin servirse de material de medida, un ángulo de … (se da un valor). Comprobar luego el resultado con un instrumento de medida (transportador o cuñas angulares, según las posibilidades de los alumnos).

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

Cuando se inicie la enseñanza con estudiantes que demuestren haber superado ya el nivel 1 de razonamiento en el área de los giros, pero no el nivel 2, las actividades a realizar en esta primera fase deberían ser las propuestas aquí precedidas de algunas actividades de las distintas fases del nivel 1, que servirán para que los estudiantes recuerden determinados conocimientos necesarios y para que el profesor detecte posibles carencias de sus alumnos. Por el contrario, si durante un curso los estudiantes pasan del nivel 1 al 2, el profesor ya tiene información sobre el nivel de razonamiento de sus alumnos y éstos ya conocen el tema objeto de estudio, por lo que en esta fase 1 el profesor se puede limitar a obtener y proporcionar información sobre aspectos concretos, como los conocimientos de ángulos y el uso de compás y transportador.

Para progresar a lo largo del segundo nivel de razonamiento es necesario recurrir al dibujo y medición de ángulos, por lo que resulta imprescindible que los estudiantes posean esos conocimientos antes de empezar a trabajar en las actividades de la fase 2. Por este motivo, en la experimentación que llevamos a cabo con los alumnos de 3º de E.G.B. fue necesario incluir un módulo de instrucción sobre ángulos.

Si se intenta un aprendizaje demasiado rápido o superficial de los ángulos, los alumnos aprenden de memoria algunas propiedades, a veces contrarias a su intuición (por ejemplo, muchos estudiantes de E.G.B. relacionan la amplitud de los ángulos centrales de las circunferencias con sus radios, por lo que consideran mayor el ángulo de la circunferencia con radio más largo, aunque matemáticamente los ángulos tengan la misma amplitud). Esto puede provocar que los estudiantes memoricen algoritmos de obtención de la imagen de puntos o de figuras, aunque no entiendan realmente por qué deben hacerlo así. En la experimentación realizada en 3º de E.G.B., se puede observar que éste es el caso de Sandra y Jorge, los cuales dan respuestas contradictorias porque en unos casos se guían por sus concepciones y en otros por las explicaciones del profesor. Respecto a Gloria, le cuesta al principio asimilar que todas las circunferencias midan 360°, pero su problema está en que desearía una explicación con fundamento más matemático que la simple justificación de "porque es así". Veamos a continuación un extracto de las actuaciones de los niños durante una de las sesiones dedicadas a la unidad complementaria dirigida al aprendizaje de ángulos (en la transcripción siguiente, cuando se indica "niña" la que habla es Gloria o Sandra; no se distingue en el vídeo cuál de las dos interviene):

Niña: *¿Todos los círculos miden 360?*
Prof.: *Todos.*
Niñas: *¿Todos?*
Prof.: *Todos. Aunque el círculo sea inmenso, lo único que tenemos que hacer ¿qué es?*
Niña: *¿Y toda la bola del mundo también?*
¿Gloria?: *¿Y por qué miden todas igual?*
Jorge: *Un duro no porque no tiene centro de giro.*
Niña: *La nariz del duro.*
Prof.: *Un duro es redondo como esto.*
Jorge: *Sí, pero no mide 360.*
Prof.: *¿Cómo que no? ¿Esto cuánto mide?* [el transportador, que es un círculo completo].
Niña: *Deberían medir unos menos que otros.*
Prof. [a Jorge]: *Según tú, ¿cuánto debería medir, más o menos?*
Jorge: *Menos.*
....
Gloria: *Pero es muy raro. ¿Por qué tienen que medir todos lo mismo?.*
Prof.: *Porque lo miden. ¿Lo comprobamos?*
....
Prof.: *Sandra, ¿cuánto mide cada uno de éstos?* [el profesor se refiere a una serie de arcos concéntricos que acaba de dibujar. Los niños acaban de medir el valor del ángulo].
Sandra no lo sabe.

Prof.: *Gloria, explícaselo.*

Gloria: *Lo mismo que ése* [señala el arco que estaba dibujado antes de que el profesor dibujara los demás concéntricos].

Prof.: *Sandra, ¿entonces cuánto miden?*

Sandra: *100 todos.*

Casi inmediatamente después, el profesor hace que Jorge diga los valores de dos arcos complementarios que acababan de medir y luego señala arcos de la misma amplitud, pero sobre circunferencias de mayor tamaño. La contestación de Jorge, correcta, es:

Jorge: *Medirán igual, sólo que más ampliado.*

Sin embargo, un poco después el profesor le pide a Jorge que indique el valor de un ángulo (de 260°) y a continuación le pide el valor de un arco concéntrico, sobre una circunferencia, mayor. La respuesta de Jorge es: *Más de 260.*

En el desarrollo de la experimentación se observa cómo los niños fueron mejorando su comprensión de esta propiedad de los ángulos con el tiempo, de manera que después de realizadas varias actividades ya habían asimilado la independencia entre la amplitud de los ángulos y la longitud de sus lados. Por ejemplo, Jorge, en la quinta sesión dedicada a ángulos, tras resolver las medidas de los ángulos de una lámina, todos rectos, explica que *todos son iguales porque todos miden 90 y da igual que el círculo sea más grande o más pequeño para medir lo mismo.*

Por lo tanto, para el progreso en el segundo nivel de razonamiento en los giros es imprescindible haber adquirido previamente este nivel en el uso de los ángulos y su medida. Esto no significa que una comprensión perfecta de los ángulos implique entender fácilmente el método de obtención de las imágenes de puntos o figuras mediante giros, pero sí es un requisito previo necesario.

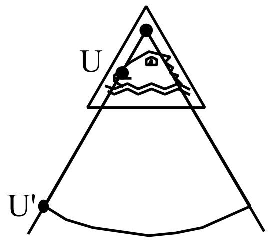
Por otra parte, también es deseable que los estudiantes desarrollen su capacidad de estimación de las medidas de los ángulos, en términos de identificación aproximada de su valor a partir de fracciones de la circunferencia (por ejemplo, 90° es la mitad de 180° y la cuarta parte de la circunferencia, 170° es casi media circunferencia, etc.).

En caso de que el empleo del transportador resulte complicado para los alumnos, es posible recurrir a otros medios. Por ejemplo, se pueden utilizar "cuñas", es decir sectores circulares de un radio fijo hechos con cartulina, cartón, etc., de diversas amplitudes (por ejemplo, 15°, 45° y 90°, cuya suma permite obtener una gran variedad de ángulos). Este material no lo hemos utilizado en nuestras experimentaciones, pero su uso por Fuys, Geddes, Tischler (1988) en un módulo de reconocimiento de ángulos y la dificultad que supone para muchos alumnos de todas las edades el empleo del transportador, nos inclinan a considerar las cuñas como un medio efectivo para el descubrimiento de propiedades de los giros, evitando el deslizamiento de convertir el empleo del transportador en el objeto de atención principal, cuando sólo debe ser un instrumento auxiliar. En la experimentación de Magisterio podemos observar cómo Ara tenía ciertas dificultades en el empleo de buena parte de los materiales manipulativos, siendo sin embargo capaz de obtener, generalizar y aplicar propiedades matemáticas de las isometrías.

En la propuesta que hacemos para esta primera fase, hemos planteado algunas actividades orientadas directamente a vincular los ángulos y los giros de un punto, con el fin de introducir a los estudiantes en lo que constituirá uno de los aspectos básicos de la visión del giro desde la perspectiva del segundo nivel de razonamiento, desde la cual la aplicación de un giro está determinada por la equidistancia al centro y el ángulo de giro concreto. Estos ejercicios les presentan a los estudiantes unos elementos básicos en el trabajo del segundo nivel y, al mismo tiempo, permiten comprobar su destreza en el uso de los ángulos y sus instrumentos de medida, siendo, por tanto, su planteamiento coherente con las finalidades de la primera fase de aprendizaje del nivel 2.

Al realizar estas actividades, se debe tener en cuenta que el trabajo realizado en el primer nivel ha sido eminentemente manipulativo, especialmente por los estudiantes más pequeños, por lo que en los primeros ejercicios de cada actividad habrá que continuar con los mismos métodos, permitiendo a los estudiantes que usen un disco transparente para realizar los giros, y haciendo que en los siguientes ejercicios utilicen regla, transportador o compás si es posible.

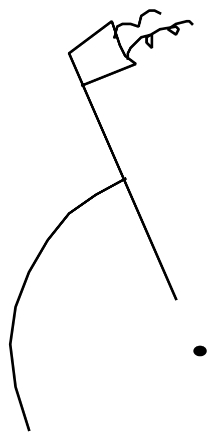
En las experimentaciones llevadas a cabo se ha podido comprobar que siempre hay algún momento en el cual los alumnos dejan de lado como foco de atención principal la equidistancia de un punto y su imagen al centro de giro, o bien el desplazamiento seguido, centrándose en el trazado de un ángulo y/o de la circunferencia. Como ejemplo, presentamos a continuación un dibujo de cada uno de los cursos en los que hemos realizado las experimentaciones de giros:



Dibujo 1.

Sandra, en la actividad 12 de la experimentación de 3º de E.G.B., para efectuar un giro de 60°, marcó un punto U, interior a la figura, trazó el ángulo de 60° y situó U', imagen de U, en el mismo lado del ángulo que U, como muestra el dibujo 1.

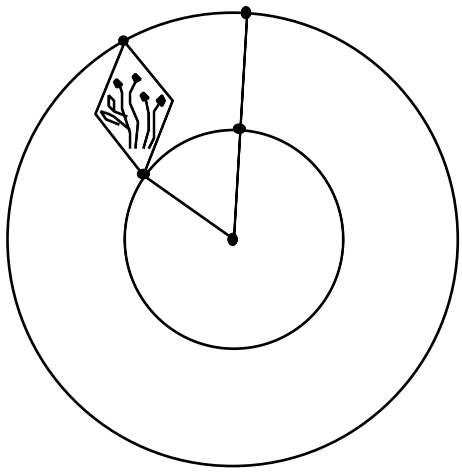
En 6º de E.G.B., para resolver la actividad 10, Inmaculada tenía que girar 90° la pipa. Su explicación fue:



Dibujo 2.

Inmaculada: *Yo he puesto el punto* [que quiero girar] *aquí* [en la intersección de la pipa con la circunferencia exterior del transportador; ver dibujo 2] *y aquí, de 90° hasta éste* [extremo del arco que traza, que es de una amplitud de 90° y mostramos en el dibujo 2] *¿O tendría que ser este punto?* [extremo inferior de la pipa].

En la experimentación de Magisterio, en la actividad 8 Ara debía girar el rombo 57°. Trazó circunferencias para los vértices inferior y superior; midió el ángulo girado por el vértice inferior y dibujó los lados de ese ángulo; después intentó ajustar la figura imagen, de manera que los vértices inferior y superior se situaran en las intersecciones de las circunferencias con el lado del ángulo de 57° dibujado antes. Por lo tanto, la imagen del vértice superior era incorrecta, puesto que no había medido 57° para ese vértice (ver dibujo 3).



Dibujo 3.

Fase 2 del Nivel 2

Objetivos:

1- Descubrir y utilizar la equidistancia de cada punto y su imagen al centro de giro como característica de los giros.

2- Descubrir y utilizar como característica de los giros la invarianza del ángulo de giro para todos los puntos de una figura.

3- Descubrir y utilizar como característica de los giros el centro y el ángulo de giro. Saber determinar el ángulo de un giro.

4- Comprender y utilizar la notación estándar de giro, G(centro,ángulo), el vocabulario básico asociado y los sentidos de giro.

5- Aprender a aplicar un giro determinado a un punto por procedimientos exactos.

6- Obtener la imagen de una figura por un giro dado usando varios procedimientos apropiados para diferentes situaciones. Reconocer y utilizar las propiedades particulares de las situaciones según que el centro de giro esté sobre la figura a girar o fuera de ella.

Actividades:

A1- Dadas varias figuras que se corresponden mediante un giro, con centro sobre ellas, determinar la posición exacta del centro de giro. Hacer explícita y generalizar la idea de la invarianza del centro de giro (la imagen del centro es él mismo).

A2- Dadas dos figuras, A y B, que se corresponden mediante un giro (unas veces con el centro exterior a ellas y otras con el centro en su interior o contorno), marcar varios puntos de A y sus imágenes en B. Dibujar el arco de circunferencia recorrido en cada caso y marcar el ángulo correspondiente (trazando los respectivos radios). Medir los ángulos formados por los distintos puntos marcados de A y sus imágenes en B.

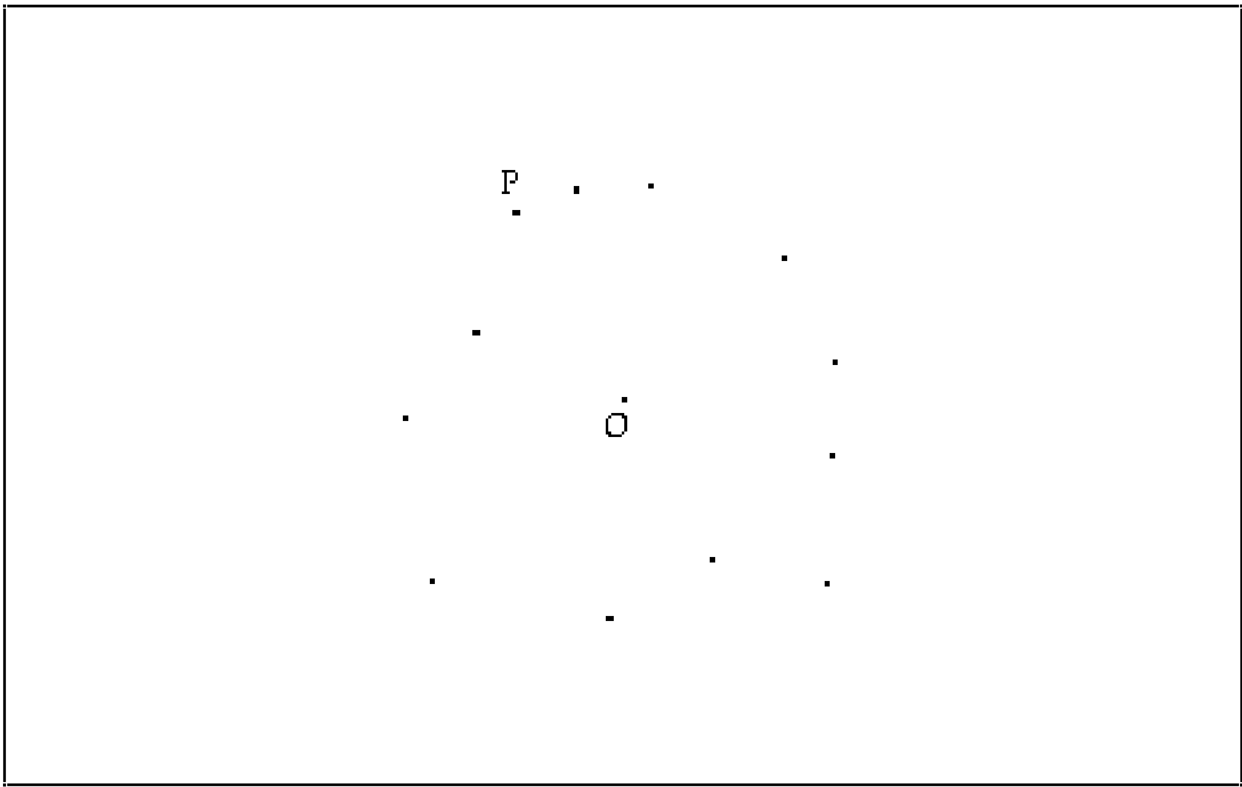
Generalizar la invarianza del ángulo de giro para todos los puntos de una figura.

A3- Dados un punto P, su imagen P' y el centro de un giro, determinar el ángulo de dicho giro. Escribir el giro con la nomenclatura estándar G(centro,ángulo) u otra que se considere adecuada.

Utilizando un disco transparente, obtener la imagen de otros puntos al aplicar el giro anterior. Medir el ángulo del giro que ha pasado cada uno de los puntos a su imagen. Generalizar la idea de invarianza del ángulo de giro para todos los puntos del plano.

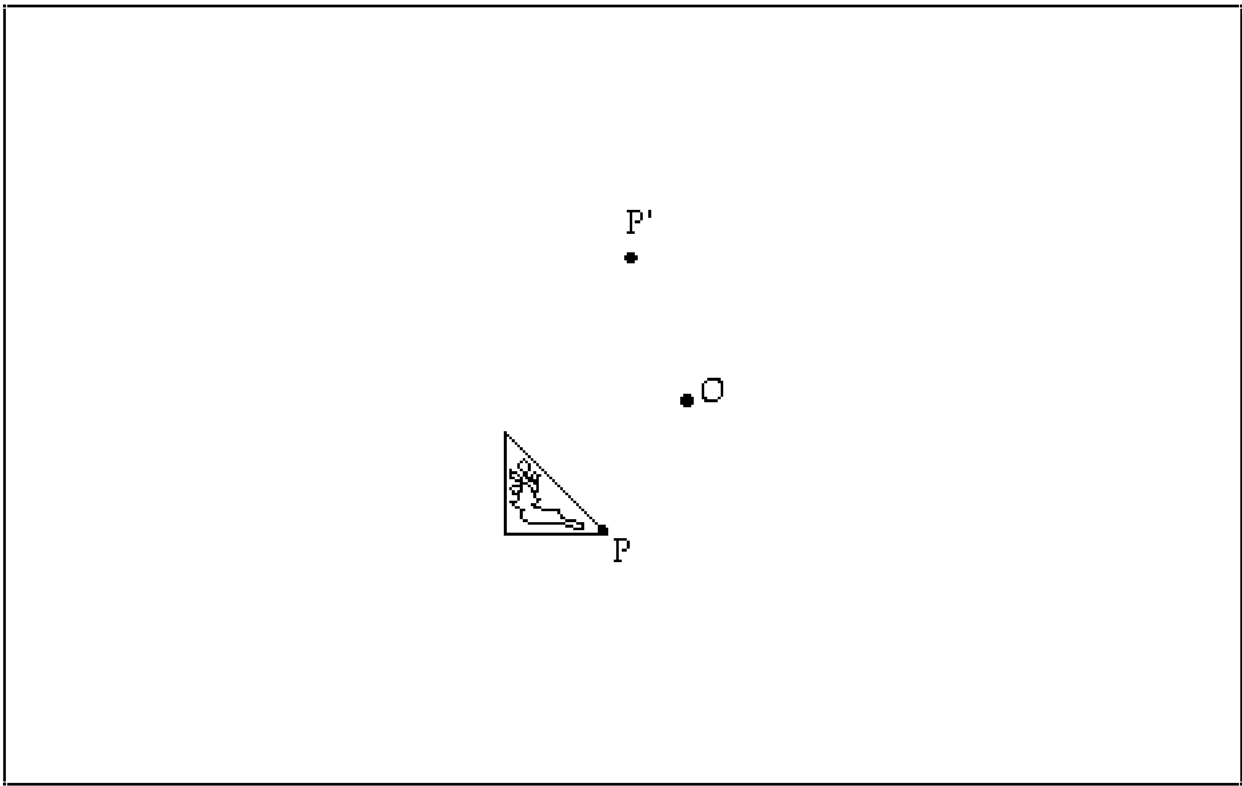
Ahora sin utilizar el disco transparente, obtener la imagen de otros puntos por ese mismo giro.

A4- Dados un punto P, un centro de giro O y otros puntos, determinar con rigor y sin trazar circunferencias (midiendo con una regla la distancia al centro de giro) cuáles de esos puntos pueden ser imágenes de P cuando este punto va girando alrededor del centro de giro dado. Marcar y medir el ángulo del giro en los casos que sí haya giro.



A5- Dados una figura, el centro, exterior a ella, de un giro y la imagen de un punto de la figura por medio de ese giro, tratar de colocar la figura imagen.

Discutir los procedimientos empleados por los estudiantes y resolver otros casos empleándolos. Si no ha surgido, introducir el método consistente en trazar circunferencias para otros puntos y situar la imagen ajustando sobre ellas los puntos correspondientes.



A6- Dados una figura, el centro de un giro exterior a ella y la imagen de un punto de la figura por medio de ese giro, tratar de determinar el ángulo de giro. Obtener las imágenes de otros puntos de la figura y después colocar la figura imagen.

A7- Resolver actividades análogas a A5 y A6, pero con giros cuyo centro esté sobre la figura (en su contorno en los primeros casos y en un punto interior después). Discutir las formas de determinar la imagen utilizadas por los estudiantes.

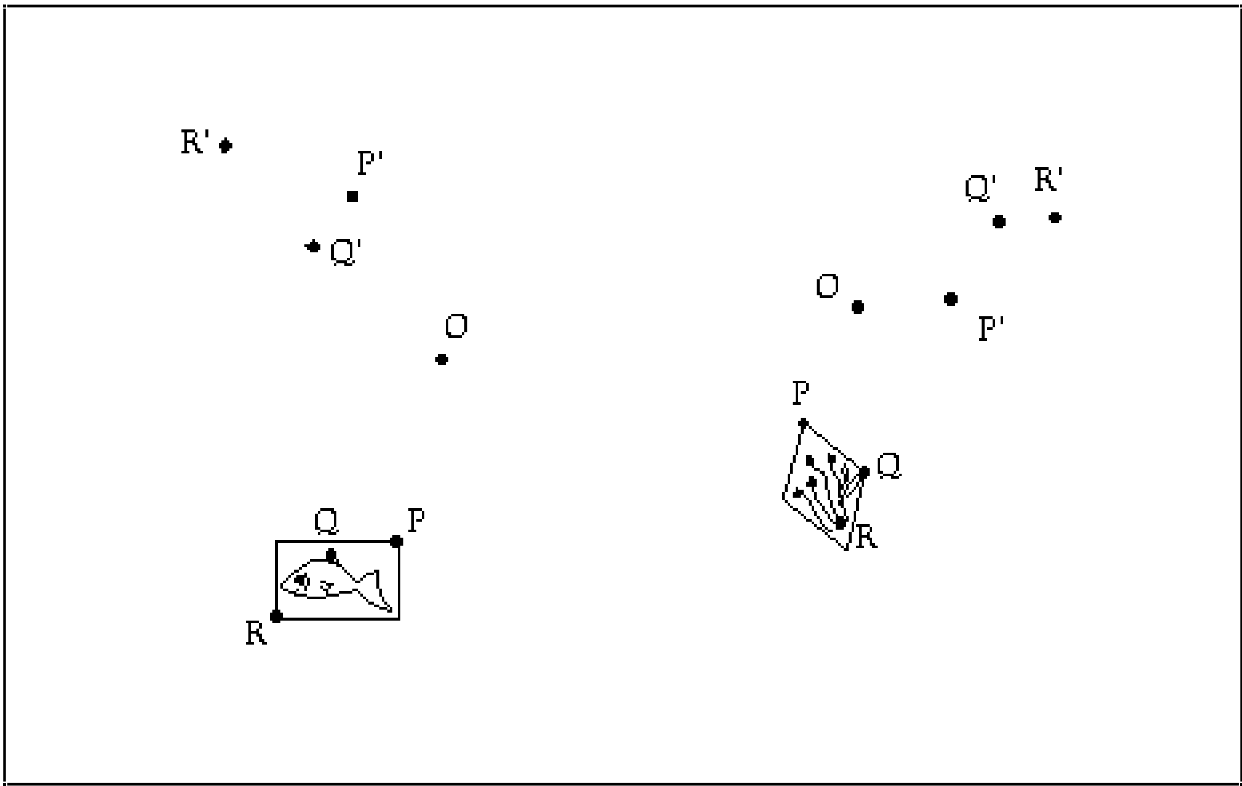
A8- Dados el centro de un giro, un punto P y su imagen P' por ese giro, calcular el valor del ángulo de giro y marcar el recorrido seguido por el punto P a lo largo del giro. Hacer físicamente ese recorrido.

Repetir el ejercicio con otros giros y pares de puntos. Introducir los sentidos del ángulo de giro.

A9- Dados una figura y el giro G(O, …) (dar un valor para el ángulo. El centro de giro es exterior a la figura), determinar la figura imagen.

A10- Dados una figura y el giro G(O, …) (dar un valor para el ángulo. El centro de giro está sobre la figura, primero en su contorno y luego en el interior), determinar la figura imagen.

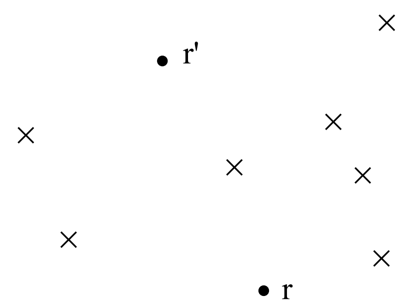
A11- Dados una figura y tres puntos suyos, P, Q y R, determinar si los puntos P', Q' y R' pueden ser sus imágenes por medio de un giro de centro O. Explicar en cada caso si es posible o no y qué falla en los casos negativos.



- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

La necesidad de la equidistancia de un punto y su imagen al centro de giro ya se estableció en las actividades del nivel 1, en situaciones en las que la influencia visual era muy fuerte. Tal es, por ejemplo, el reconocimiento de las circunferencias como las únicas líneas que marcan el desplazamiento seguido por puntos o figuras al girar. No obstante, para poder resolver otras actividades basadas en esa propiedad se requiere un progreso de los alumnos hacia el segundo nivel de razonamiento, por lo que el primer objetivo que hemos planteado en esta fase es construir esos conocimientos básicos sobre la equidistancia.

En la experimentación de 3º de E.G.B., el profesor hacía referencia a la equidistancia al centro de giro pero, excepto Gloria, ningún alumno la consideraba al fundamentar sus explicaciones; todos centraban su atención preferentemente en la componente gráfica del desplazamiento circular. Gloria, que progresaba a lo largo del segundo nivel, sí asimiló bien esa propiedad, a la que recurrió varias veces en sus construcciones y justificaciones, pues, aunque también determinaba sus respuestas a partir de la simple observación; después era capaz de referirse espontáneamente en su explicación a la equidistancia al centro de giro. Así, mientras los otros niños explican que *cuando es giro todo es redondo, pase por donde pase, …; sólo con un poco que no sea redondo ya no es* [un giro], Gloria explicaba que *si lo mides con una regla, por ejemplo desde aquí* [el centro de giro], *te da dos; siempre te ha de dar dos y si no es* [giro], *a veces no* [mide dos]. (Actividad 6 de la experimentación).

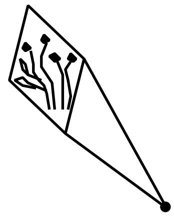


En 6º de E.G.B., las alumnas superaron pronto el primer nivel de razonamiento y empezaron a utilizar esta propiedad en sus justificaciones. En el caso de Inmaculada, el progreso hacia el segundo nivel fue más lento (de hecho, su adquisición del nivel 2 no llegó a ser completa), por lo que se detectó en ella un menor empleo de la propiedad matemática de la equidistancia al centro de giro. Por ejemplo, en la actividad 12 de la experimentación, para obtener entre los puntos que se ven en el dibujo los posibles centros de giro que transforman R en R', Inmaculada recurría al compás -real o colocando los dedos a modo de compás- y no pensaba por sí misma directamente en términos de equidistancia (aunque sí podía hacer referencia a ella cuando sus compañeras se lo indicaban):

Inmaculada [a Marta]: *Tienes que poner la punta* [del compás] *en cada estrellita* [los puntos que debía indicar si eran centros de giro] *y si te pasa por las dos partes, entonces está bien.*

En Magisterio, las alumnas sí empleaban consciente y voluntariamente la equidistancia de una manera sistemática, acompañada de otras propiedades matemáticas particulares de cada caso, como la tangencia de un lado de la figura a la circunferencia de uno de sus vértices. En particular, Ara recordaba de su experiencia escolar una definición de giro basada en la equidistancia, pero incorrecta, que intentaba aplicar. En este caso, la primera función de las actividades de la fase 2 del segundo nivel fue la de hacerle rectificar esta concepción errónea:

En la actividad 3 de la experimentación, Ara debe colocar la imagen de una figura por medio de un giro con centro exterior a la figura. Ara mide la distancia desde dos vértices de la figura inicial al centro de giro (ver el dibujo de la derecha), que cree que han de ser iguales, pues según ella, *todos los puntos se encuentran a la misma distancia del eje* (Ara usa la palabra eje en vez de centro pues, seguramente, ha estudiado giros en el espacio. La propiedad que enuncia ahora es exactamente la que dio con anterioridad como definición de giro).



Prof.: *O sea, que has medido dos* [cm.] *de aquí* [un vértice de la figura inicial] *al centro y dices que de aquí* [el otro vértice] *al centro ha de medir dos* [cm.]. *¿Y mide eso?*

Ara: *No.*

Prof.: *No se cumple. ¿Cómo se te ocurre que lo puedes hacer? Todavía no lo he explicado.*

Ara: *Trazar la circunferencia externa y tomar ese punto como referencia* [Ara hace con la mano la circunferencia que pasa por uno de los vértices (ver el dibujo de la página siguiente), aunque no la dibuja].

Entonces Ara dice que no le sale, que no entiende por qué las distancias de cada vértice al centro de giro son distintas. Merche le explica el error:

Merche: *Esa distancia no es la misma que ésa de ahí* [Merche señala, correctamente, de un vértice y de su imagen al centro de giro].

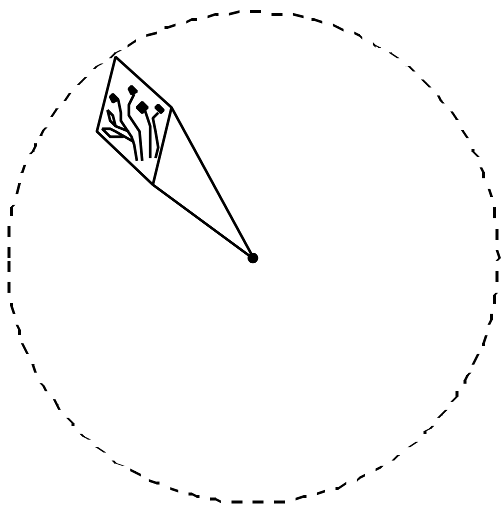
Prof.: *O sea, que ahí hay una distancia que falla.*

Ara: *¿Entonces tenía razón yo con lo de la distancia?*

Prof.: *¿Pero qué distancia era igual?*

Ara: *Esa. La distancia de ese vértice* [el inferior del rombo] *al eje* [quiere decir centro].

Prof.: *¿Qué vértice?* [Ara señala el inferior del rombo].



Prof.: *Al centro. ¿Y con ese otro vértice qué pasa?* [la profesora señala el vértice de la derecha].

Ara: *Que ésta tendrá que ser también la misma* [ahora Ara señala las distancias correctas: Del vértice y de su imagen al centro de giro].

Prof.: *¿Era eso lo que tú decías antes?*

Ara: *Claro. Eso es lo que yo decía; por eso yo …* [la profesora le interrumpe]

Prof.: *¿Tú no decías que la distancia desde este vértice al centro y desde este vértice al centro tenían que ser iguales?* [la profesora señala los vértices inferior y derecho de la figura inicial].

Ara: *Sí. Estaba equivocada. Es que sabía que había una distancia. Pero luego creía … Bueno, como en todas las rotaciones que había visto la distancia era la misma, pues mi idea era ésa.*

Desde el punto de vista matemático, está claro que es equivalente dibujar circunferencias y situar los puntos sobre ellas que medir directamente la distancia de cada punto al centro de giro, pero no ocurre lo mismo desde la perspectiva del progreso en el nivel de razonamiento, pues es conveniente que en el segundo nivel la circunferencia tenga el significado de la equidistancia y no simplemente el significado gráfico del nivel 1, de línea sobre la que se desplaza un punto al girar. Por ello, en las actividades propuestas para la segunda fase del nivel 2, se debe conseguir que los alumnos utilicen explícitamente el concepto de equidistancia en sus argumentaciones (aquí vemos una clara interrelación entre los objetivos de la fase 2 y los de la fase 3).

La primera actividad de esta fase (actividad A1) está dirigida expresamente a considerar la invarianza del centro de giro, a través de su identificación en figuras giradas en las que el centro de giro se encuentra sobre ellas. El énfasis en esta propiedad obedece a que influye directamente en el método de obtención de la imagen de figuras con centro de giro sobre ellas. La identificación del centro de giro en el nivel 1 es visual; por ejemplo, en la experiencia de 6º de E.G.B., las alumnas se basaron en una visión global de las figuras para diferenciar casos correspondientes o no a giros, cuando el profesor situaba una pieza en distintos lugares. Posteriormente, la orientación de los ejercicios que realizaron en esta fase del nivel 2 hizo que las estudiantes expresaran claramente la invarianza del centro de giro (actividad 15 de la experimentación):

Las niñas habían estado haciendo giros con centros exteriores a las figuras que mueven, y se había planteado la cuestión de saber cuántos puntos imagen se necesitan para poder colocar la figura imagen. Aunque en un primer momento Inmaculada dice que 1 imagen, porque usaba el disco transparente, Rebeca se da cuenta de que con las imágenes de dos puntos se puede determinar siempre la posición de la figura imagen. A continuación tienen que hacer un giro cuyo centro está sobre la figura. Rebeca se da cuenta de que uno de los dos puntos puede ser el centro de giro porque su imagen es él mismo:

Icíar: *¿Lo hacemos con todos los puntos?*
Prof.: *Como quieras. ¿Cuántos hacen falta?*
Rebeca: *Con uno si haces todas las circunferencias* [se refiere al método de trazar las circunferencias de los recorridos de los vértices de la figura, calcular la imagen de uno de ellos y ajustar los otros vértices de la figura de papel sobre sus respectivas circunferencias].
Prof. [a Rebeca e Icíar]: *¿No tenéis ahí* [en la figura] *el centro? Pues, ¿cuántos hacen falta?*
Rebeca: *¡Claro! Pues ya hay dos.*
Prof.: *¿Con cuántas circunferencias habríais tenido bastante?*
Rebeca: *Con una. ¡Claro!*
....
Prof.: *¿Y con el centro de giro qué pasa?*
Icíar: *Que siempre está en el mismo sitio.*

En la experimentación de Magisterio se observa que no es inmediata la identificación del centro de giro y su invarianza cuando éste se encuentra sobre la figura, como se puede ver en la solución de Ara a una de las actividades que se le plantearon, análoga a las actuales A2 y A3.

Algo parecido ocurrió en la experimentación de 3º de E.G.B., pues habría hecho falta más instrucción para que los estudiantes superaran por completo el nivel 1 de Van Hiele y progresaran al ritmo requerido en el nivel 2, sobre todo por parte de Sandra. Una de las consecuencias de la presentación antes de tiempo de las actividades de esta fase es que Sandra memorizaba los distintos algoritmos de obtención de la imagen de un punto o de una figura y por eso no los relacionaba con la posición del centro de giro sobre la figura o exterior a ella. Resulta significativo el comentario de Sandra tras girar, con ayuda del profesor, algunas figuras mediante el algoritmo propuesto por el profesor: *A mí me da igual* [elegir] *un punto fácil que uno difícil* [para aplicar el giro]. *Todo es lo mismo. Y si es más fácil o más difícil lo comprendes igual.*

Para comprender las formas de obtención de la imagen de una figura por un giro se requiere necesariamente haber asimilado la idea de que todos los puntos giran el mismo ángulo (es decir, la invarianza del ángulo de giro). Esta propiedad fue totalmente asumida por las alumnas de Magisterio, pero no así por algunos estudiantes de otros cursos. Por ejemplo, en la actividad 11 de la experimentación en 3º de E.G.B., Gloria no tiene dudas y sus respuestas son siempre rápidas y seguras. Cuando el profesor le pregunta por qué hay siempre los mismos grados responde:

Gloria: *Porque siempre es lo mismo. Porque el ojo* [del pez, que es la figura con la que trabajaban en ese momento] *está más hacia allí y ahora está más hacia ahí y …*
Prof. [interrumpiéndole]: *¿Toda la figura se ha movido lo mismo?*
Gloria: *Sí.*

Sin embargo, su compañera Sandra tenía serias dificultades, pues al principio no era capaz de coordinar las imágenes de los diversos puntos y sus respuestas eran lentas e inseguras. Con el tiempo, Sandra fue dando más respuestas correctas, pero no estaba claro si ello se debía a la repetición o comprendía realmente la propiedad, pues con frecuencia era incapaz de aplicarla para calcular la imagen de una figura.

En la secuencia de actividades propuesta aquí, esta propiedad es el objetivo de la actividad A2, que junto a la A1 abordan estos conocimientos que son necesarios antes de proceder a la obtención por procedimientos matemáticamente correctos de la imagen de una figura.

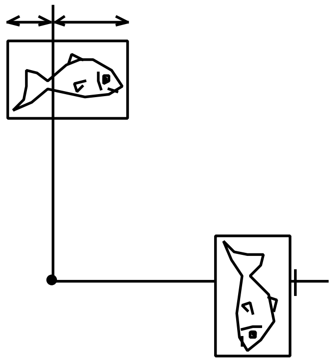
La obtención de la imagen de una figura de modo correcto se pueden realizar de varias maneras y en situaciones particulares existen variantes que incorporan propiedades especiales del caso en cuestión. Una vez adquiridas las ideas básicas de equidistancia al centro y de invarianza del ángulo de giro, es conveniente que los estudiantes aprendan varios métodos de trabajo que, si bien son matemáticamente equivalentes, pueden aparecer como diferentes ante estudiantes del segundo nivel de razonamiento a causa de los distintos elementos que se utilizan y las formas de trabajo. Por otra parte, también es importante en este nivel que los estudiantes adquieran destrezas en el empleo de herramientas auxiliares como parte del algoritmo seguido. Las actividades de la A4 a la A7 están orientadas a conseguir estos objetivos, pues en A4 se pide usar una regla en vez del compás, en A5 y A6 se puede empezar, si es necesario, usando el disco transparente, para pasar después, en A5, a dibujar varias circunferencias y ajustar la figura imagen sobre ellas, mientras que en A6 se debe llegar al cálculo de las imágenes de varios puntos para fijar la figura imagen. Así mismo, se debe tener en cuenta en este grupo de actividades la diferencia, ya comentada, entre los giros de figuras que contienen o no el centro de giro. A continuación, en las actividades A9 a A11, se plantean problemas más libres, con el fin de que los estudiantes afiancen los diferentes algoritmos y profundicen en la comprensión de las propiedades matemáticas subyacentes.

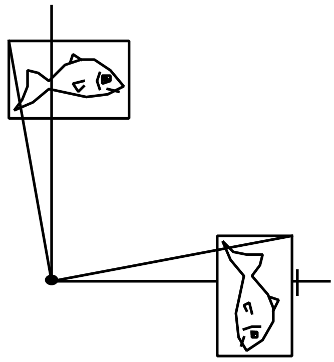
En relación con los métodos usados por los estudiantes, en las experiencias realizadas hemos encontrado que las dos alumnas de Magisterio y casi todas las de 6º de E.G.B. se encontraban cómodas usando el método de ajuste de la figura imagen sobre las circunferencias correspondientes, si bien algunos estudiantes, como Inmaculada (alumna de 6º) se decantaron por la utilización del disco transparente.

En la experimentación de 3º de E.G.B., el profesor dirigió siempre la instrucción hacia la obtención de las imágenes de dos vértices midiendo los ángulos correspondientes, por lo que no se dejó prácticamente opción a la aparición de otros métodos. Quizá ello influyó en la gran dificultad que tuvo Sandra para asimilar ese método. De todas maneras, incluso bajo esas condiciones, se puede observar la tendencia de Gloria a servirse del ajuste sobre circunferencias mediante el desplazamiento manual de la figura sobre ellas.

En consecuencia, dado que la mayor parte de los estudiantes se inclinaba más por el empleo del disco transparente y por el ajuste sobre circunferencias, hemos incluido explícitamente el estudio de ambos métodos en la propuesta de actividades contenida en esta memoria para que, con su utilización, los estudiantes afiancen su comprensión del resultado de aplicar un giro a una figura. No obstante, el profesor no debe anular la posibilidad de aparición de otros métodos correctos, propuestos por los alumnos. Probablemente, algunos de los que se produzcan de manera espontánea serán particularizaciones de los dos mencionados antes, pero no por ello son desechables.

Tal es el caso, por ejemplo, de Gloria (3º de E.G.B.), en la actividad 11 de la experimentación, al aplicar G(O,-90°) a un rectángulo. En la sesión anterior, Gloria había girado alguna figura usando el método propuesto por el profesor, el consistente en obtener las imágenes de dos puntos, pero en esta ocasión se basó en sus propias ideas sobre los giros: Gloria hizo el ángulo recto indicado en el dibujo de la izquierda y después midió con la regla las distancias marcadas en la figura mediante una llave (las marcas son nuestras). Con el compás, midiendo su abertura en la figura original, trazó sobre la línea horizontal una marca (así aseguró la equidistancia al centro). Después, colocó en vertical la pieza imagen (en la posición correcta) y, para ajustarla en el lugar exacto, midió sobre el lado correspondiente las dos distancias a las que la línea horizontal ha de cortar a uno de los lados (medidas que ya había obtenido antes). Finalmente, para asegurarse de que estaba bien hecho, midió el ángulo girado por otro vértice de la figura (ver el dibujo de la derecha).





Matemáticamente, el método de Gloria es correcto, pues se basa en la equidistancia al centro de cada punto y su imagen, pero Gloria actuaba de un modo intuitivo y en esta sesión el profesor no analizó con ella su método. Después, Gloria intentó aplicarlo también al ejercicio siguiente, cuyo ángulo de giro era de 100°, pero esta vez se desorientó y lo abandonó en favor del empleado por el profesor.

En la fase 4 de este segundo nivel de razonamiento el profesor puede aprovechar la existencia de esta variedad de métodos de trabajo para proponer su análisis y discutir sobre las propiedades empleadas en cada uno de ellos.

En las experimentaciones pedíamos a menudo a los estudiantes que determinaran la cantidad de puntos-imagen que es necesario obtener para poder determinar la figura imagen. La reflexión se centraba en el método propuesto por el profesor, el consistente en determinar el arco recorrido por cada punto, con el objetivo de poner de relieve la información que se necesita para realizar cada paso del algoritmo y hacer desaparecer poco a poco las formas de resolución basadas en la simple apreciación visual. Aunque los estudiantes progresaban en ello, con frecuencia hacían referencia a otros métodos empleados o ideados por ellos. Por este motivo, creemos que el profesor debe tratar también de comprender los métodos de realización de giros empleados por sus alumnos, cosa que se plantea explícitamente en las actividades A5 y A7 de la secuencia propuesta aquí, e implícitamente en la actividad A9. En todas ellas se debe dejar a los estudiantes libertad para que elijan el método a seguir, analizando después entre todos los estudiantes y el profesor los diferentes métodos, en particular, los tres que se han planteado en las actividades: Disco transparente, ajuste por circunferencias y cálculo de la imagen de varios puntos.

El objetivo final de este trabajo debe ser fomentar una maduración progresiva de los estudiantes, para que sean capaces de razonar basándose en cualquiera de los métodos y de elegir el más apropiado para cada situación.

Al analizar las grabaciones de las sesiones de trabajo que hemos realizado, se observa cómo no es trivial lograr que los estudiantes comprendan qué información necesitan para poder girar una figura y cuándo tienen suficientes datos para fijar la figura imagen. Entre los alumnos de 3º de E.G.B., Gloria sí llegó a entenderlo, pero parece que Sandra memorizaba las propiedades y los métodos de trabajo sin llegar a entenderlos. Los dos fragmentos de transcripciones siguientes resultan significativos:

Tras haber resuelto varias actividades en las que las niñas habían obtenido las imágenes de figuras por giros con centros exteriores a ellas, el profesor les formuló preguntas a las niñas con el fin de recordar la propiedad de la cantidad mínima de puntos-imagen necesarios para situar correctamente la figura imagen. Se produjo el diálogo siguiente, en el que se aprecia que Gloria tiene muy claro el resultado, pero Sandra parece que no comprende la contribución de cada nueva imagen (actividad 11 de la experimentación de 3º de E.G.B.):

Prof. [a Gloria]: *¿Con un solo punto podemos saber cómo queda la figura?*
Gloria: *No. Bueno, si lo haces de casualidad sí.*
Prof.: *Bueno, de casualidad sí, pero ¿con dos lo podrías asegurar?*
Gloria: *Sí.*
Prof.: *¿Y con tres?*
Gloria: *También.*
Prof.: *Más seguro. ¿Y con cuatro?*
Gloria: *Mejor.*
Prof.: *El número mínimo para saber cuántos puntos hay que coger cuál es?*
Gloria: *Dos.*
Prof. [a Sandra]: *¿Cuántos puntos hay que coger como mínimo?*
Sandra: *Dos.*
Prof.: *¿Y si cogemos tres?*
Sandra: *No. No puedo coger tres.*
Prof.: *Imagínate que a este punto lo llamo K. ¿Podría coger el punto K?*
Sandra: *Sí.*
Prof.: *¿Y a este punto lo puedo llamar B? Puedo coger los puntos que quiera. Lo que pasa es que como mínimo hay que coger …*
Sandra: *Dos.*
Gloria: *¿Y como máximo?*

Sandra: *1200.*
Gloria: *No. Más. 4000.*

Al día siguiente, al resolver algunos casos con los centros de giro sobre la figura, se produjo este diálogo (actividad 12 de la experimentación):

Prof.: *¿Qué diferencia hay* [de cuando el centro de giro está dentro de la figura] *a cuando el centro de giro está fuera de la figura?*
Gloria: *Que había que coger dos puntos … Y aquí hay uno.*
Prof.: *¿Con uno es suficiente?*
Gloria: *Sí. Puedes coger más.*
Sandra: *Sí. Pero lo mínimo son dos.*
Prof.: *¿Si coges más qué pasaría?*
Gloria: *Mejor.*
Prof.: *Mejor. Te asegurarías más puntos.*

En 6º de E.G.B., Rebeca fue la primera que espontáneamente pudo razonar utilizando las propiedades de los giros. La primera aproximación de las alumnas de 6º a estas actividades consistió en obtener la imagen de un punto y ajustar la inclinación de la figura visualmente. La llamada de atención del profesor hizo que Rebeca justificara correctamente por qué no era suficiente con esos datos (actividad 4 de la experimentación):

Prof.: *Con un vértice no es bastante.*
Marta: *Pues lo hacemos con otro.*
Rebeca: *Con un vértice podría estar así, o así, o así, … La figura la podemos poner de todas las maneras que queramos, siempre que el vértice esté aquí.*

Después, en una actividad en la que se les pedía verificar si dos figuras se correspondían mediante un giro de centro dado exterior a las figuras, las alumnas comprobaron sólo con un punto. Ante una pregunta del profesor, las niñas recuerdan lo hablado en la sesión anterior y Rebeca justifica la indeterminación colocando una figura en varias posiciones de la imagen posibles si sólo se fija un vértice (actividad 6 de la experimentación). En los resúmenes de las sesiones siguientes hay referencias a otros comentarios, relacionados con esta propiedad, en los que se aprecia que las alumnas han comprendido los motivos por los que no es suficiente el empleo de un solo punto imagen para determinar la imagen de una figura por un giro con centro exterior a ella. Por ejemplo, en la última sesión, Inmaculada decía que había obtenido la imagen de un punto y, sin que el profesor indicase nada, añadió que no había colocado la imagen a ojo porque se había servido del disco transparente.

Varias sesiones más tarde, cuando estaban trabajando en una actividad análoga a la actual A13 de la fase 4 del nivel 2, el profesor provocó un diálogo en el que se ve que Rebeca e Icíar comprendían la relación entre la cantidad de puntos-imagen necesarios y la posición del centro de giro, exterior o interior a la figura (actividad 15 de la experimentación):

[Rebeca e Icíar estaban trabajando con un centro de giro sobre la figura]
Icíar: *¿Lo hacemos con todos los puntos?*
Prof.: *Como quieras. ¿Cuántos hacen falta?*
Rebeca: *Con uno* [es suficiente] *si haces todas las circunferencias* [Marta corrobora la contestación anterior de Rebeca].
Prof. [a Rebeca e Icíar]: *¿No tenéis ahí* [sobre la figura] *el centro? Pues, ¿cuántos hacen falta?*
Rebeca: *¡Claro!, pues ya hay dos.*
Prof.: *¿Con cuántas circunferencias habríais tenido bastante?*
Rebeca: *Con una. ¡Claro!*
Prof. [después de que Rebeca e Icíar terminaran el ejercicio]: *Vosotras habeis cogido el centro ahí* [sobre la figura]. *¿Cuántos puntos hacía falta mirar?*
Rebeca e Icíar: *Uno.*
Prof.: *¿Por qué?*
Rebeca: *Porque uno* [el punto cuya imagen ha obtenido] *y uno* [el centro de giro], *dos.*
Prof.: *¿Y con el centro de giro qué pasa?*
Rebeca: *Que es un punto* [de los dos necesarios].
Icíar: *Que siempre está en el mismo sitio.*

En cuanto a las alumnas de Magisterio, al principio también tuvieron algunas vacilaciones sobre la determinación de la figura, principalmente Ara, si bien las resolvieron pronto y ya comprendían la propiedad desde casi el principio de la experimentación, si bien fue necesario consolidarla para afianzar el razonamiento del segundo nivel y eliminar las justificaciones intuitivas basadas en características visuales. Así, en la primera sesión, al resolver una actividad consistente en determinar si dos figuras (A y C) se correspondían mediante un giro, se produjo el siguiente dialogo, que refleja dichas vacilaciones (actividad 5 de la experimentación):

Ara: *La C se corresponde con la A porque este vértice* [de A] *mide lo mismo que éste* [su imagen de C]. *Bueno, la distancia al centro es la misma.*
Prof.: *¿Y con ese vértice que has probado seguro que está girada?*
Merche: *Tienen que estar en la misma posición respecto al centro.*
Prof.: *¿Qué quiere decir en la misma posición?*

Merche: *Que éste también mediría lo mismo que éste* [Merche señala la distancia de otro vértice de A y de su imagen en C al centro de giro].

Prof.: *Pero eso no lo has hecho.*

Merche: *No, pero se ve. Hago otra circunferencia.*

Prof.: *O sea, has probado el otro* [vértice] *con una circunferencia y entonces …*

Ara: *Sí que es, porque he medido la distancia a otro vértice y mide 3'9* [se refiere a la distancia desde otro vértice y desde su imagen al centro de giro].

Prof.: *Entonces, ¿con medir la distancia a un vértice es bastante?*

Ara: *En principio parece que sí.*

Prof.: *¿Uno sólo?*

Ara: *Yo he cogido otro para asegurarme.*

Prof.: *¿Pero con uno sólo sería suficiente o no?*

Merche: *No. Depende de la posición de la figura.*

Ara: *Se necesitarán dos.*

Prof.: *Si miramos esta de antes* [perros B y C de la lámina M-G-5.1], *¿la distancia de este vértice al centro y la de éste al centro cómo son?*

Alumnas: *Igual.*

Prof.: *Y los perros no son girados. ¿Si comprobamos con un vértice es suficiente?*

Alumnas: *No.*

Prof.: *¿Y si probamos con dos?*

Alumnas: *Sí.*

Algo después, en esa misma sesión, tras girar una figura con centro en un vértice, Merche justificaba que era suficiente con dibujar una circunferencia *porque el otro* [punto necesario] *ya está pintado* [aludiendo al centro de giro].

La actividad A8 tiene como objetivo la introducción de los sentidos positivo y negativo de los ángulos de giro. Esta actividad aparece después de otras en las que los estudiantes han tenido que realizar giros (siempre con ángulos sin signo), por lo que es probable que en alguna de esas actividades surja la cuestión de los dos sentidos de movimiento posibles. Naturalmente, el profesor debe aprovechar la primera oportunidad que le proporcionen sus alumnos de un contexto apropiado para introducir este concepto, con lo que la actividad A8 pasaría a tener una misión de afianzamiento. No obstante, si en las siete primeras actividades no surgiera espontáneamente la cuestión, la actividad A8 la provocará. En las experiencias realizadas no hemos tenido nunca ninguna dificultad en relación con los sentidos de giro, una vez que los estudiantes memorizaban la regla mnemotécnica que asocia los sentidos al giro de las agujas del reloj.

En la unidad de enseñanza de la fase 2 que presentamos en esta memoria, hemos incluido varias actividades (A5, A6 y A7) en las que explícitamente se hace incidencia en la indeterminación de la imagen de una figura cuando solamente se conoce la imagen de un punto. Con ello pretendemos llegar a que los estudiantes sean capaces de determinar cuántos elementos necesitan para relacionar las figuras original e imagen. No obstante, una tendencia que se presenta con bastante frecuencia en estudiantes de todas las edades es la de pasar de calcular la imagen de un solo punto a calcular las imágenes de más puntos de los necesarios, por ejemplo de los cuatro vértices de un rectángulo. Esta forma de razonar es coherente con las características del nivel 2 de Van Hiele, pues los estudiantes de este nivel actúan bajo la creencia de que una buena descripción es aquélla que incluye la mayor cantidad posible de características, bien sean imágenes de puntos para hacer movimientos o propiedades de un concepto para dar su definición.

La última actividad de esta fase, A11, sirve como resumen de las propiedades más importantes estudiadas en las actividades precedentes. Los distintos ejercicios que la componen son variados, de forma que algunos casos sí corresponden a giros, mientras que otros no lo son por diversos motivos: En unos el ángulo del giro no es el mismo para todos los puntos; en otros la distancia al centro no es correcta, … La actividad puede también servir de resumen de métodos de realización de giros, si se fomenta que los estudiantes usen distintos procedimientos en unos y otros casos: Trazado de circunferencias, medición de las distancias al centro de giro, medida del ángulo de giro, uso del disco transparente, del compás y el transportador, …

Fase 4 del Nivel 2

Objetivos:

1- Componer giros del mismo centro y determinar el giro resultante. Verificar la conmutatividad de la composición de giros del mismo centro.

2- Descubrir y utilizar la equivalencia de giros.

3- Descubrir y utilizar la propiedad de la mediatriz de un par de puntos como el lugar geométrico de los centros de giros que transforman un punto en el otro.

4- Comprender y utilizar el vocabulario y la notación formales asociados a los giros y su composición.

5- Descubrir experimentalmente y utilizar otras propiedades relacionadas con los giros. En particular, la determinación de la inclinación de la imagen de una figura por el ángulo del giro efectuado y propiedades particulares de los giros de 180°.

Actividades:

A1- Dados una figura y el giro G(O, …) (se dan el centro y el ángulo), determinar, para cada uno de los métodos empleados con anterioridad, la cantidad mínima de puntos-imagen necesarios para poder situar con exactitud la figura imagen. Estudiar las diferencias según que el centro de giro se encuentre sobre la figura o sea exterior a ella.

A2- Dados el centro de un giro, un punto P y su imagen P', marcar el recorrido de ese giro. Medir el ángulo orientado del giro. Marcar también el recorrido del giro de sentido contrario al anterior que va desde P hasta P'. Medir también el ángulo orientado de este giro.

Aplicar esos dos mismos giros al punto Q. Repetir el ejercicio con otros centros de giro y otros conjuntos de puntos. Enunciar los resultados que se observan y justificarlos.

(Introducir el concepto de giros equivalentes). Generalizar la relación entre los ángulos de los giros equivalentes. Identificar algunos giros que sean equivalentes a los siguientes: G(A, …), G(B, …), G(C, …) (dar los valores de los ángulos).

A3- Dados una figura, su imagen por un giro cuyo centro es exterior a la figura y el centro de ese giro, determinar el ángulo del giro utilizado y realizar el recorrido seguido por la figura. Hacer también el recorrido del giro equivalente.

Seleccionar un punto de la figura y marcar los recorridos seguidos por ese punto mediante cada uno de los dos giros equivalentes. Hacer lo mismo con otros puntos de la figura. Repetir el ejercicio con el mismo centro de giro y otra figura de la lámina.

A4- Dada una figura, obtener su imagen mediante cada uno de los giros siguientes: … (especificar giros concretos, entre los cuales algunos pares sean equivalentes. Incluir ángulos de +180° y -180°).

A5- Dado el punto P, obtener su imagen mediante cada uno de los giros siguientes: … (especificar varios pares de giros equivalentes, uno de cada par con ángulo inferior a 360° y el otro del par con ángulo mayor que 360°). Hacer el recorrido con un disco o con compás y justificar por qué en algunos casos se obtiene el mismo resultado. Identificar otros giros equivalentes a cada uno de los anteriores. Repetir el ejercicio, aplicando los giros a una figura.

A6- Dada una figura y un centro de giro (en unos casos sobre la figura y en otros exterior a ella), aplicar giros de +180° ó de -180° con el centro indicado. Observar las regularidades que se producen en las soluciones y generalizar el resultado.

Dado el punto P, aplicarle el giro G(O,180°). Repetir varias veces el ejercicio con otros puntos y centros de giro, intentando hacerlo sin usar herramientas auxiliares (compás, transportador, disco transparente, etc.).

Dados un punto A y su imagen A' por medio de G(C,180°), encontrar el centro del giro.

A7- Dada una figura, aplicarle el giro G(O, …) (indicar un ángulo). A la figura imagen, aplicarle el giro G(O, …) (indicar otro ángulo). (Introducir la idea de composición de giros). Identificar un movimiento que permita pasar directamente desde la figura inicial hasta la última imagen obtenida, indicando las características de dicho movimiento.

Repetir el ejercicio con las otras figuras de la lámina y los pares de giros siguientes: G(P, …) y G(P, …); G(S, …) y G(S, …) (se dan los valores de los ángulos). Comparar los resultados de los distintos ejercicios y obtener algunas conclusiones. Generalizar esas conclusiones y justificarlas.

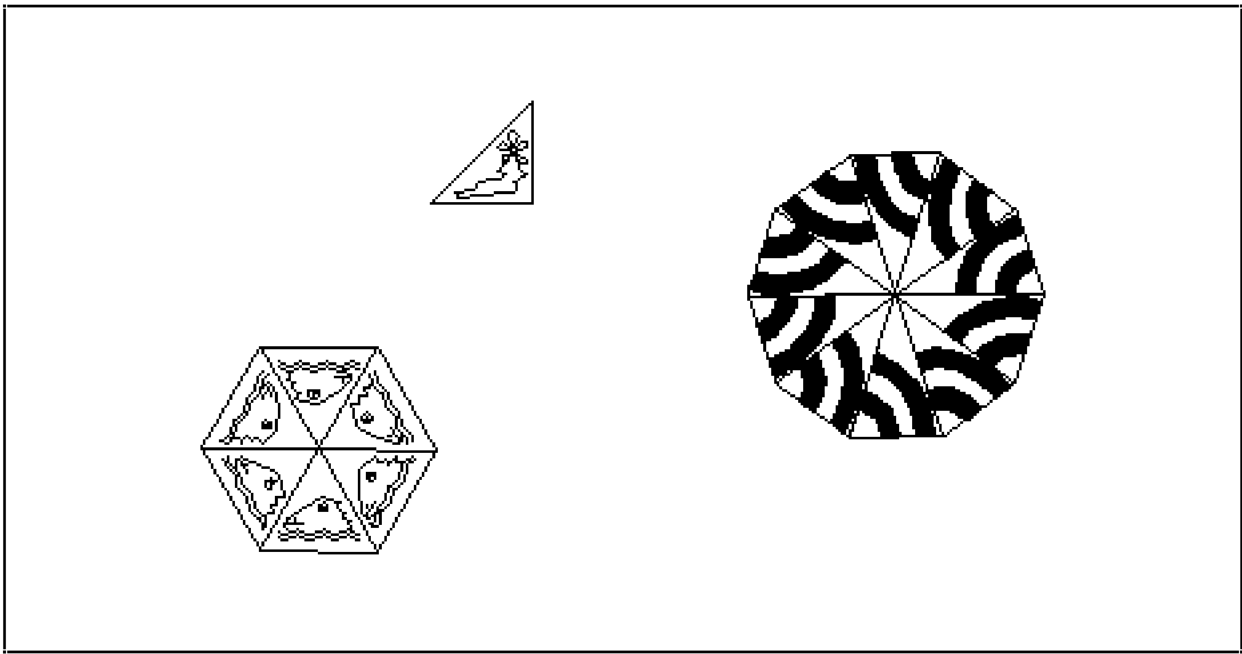
A8- Aplicarle a la figura la siguiente composición de giros: G(O, …)∘G(O, …)∘G(O, …) (dar los valores de los ángulos). ¿Cómo se puede simplificar el trabajo? O sea, ¿cómo se puede resolver el ejercicio sin realizar todos los giros?

Hacer algunas composiciones utilizando las mismas figuras y giros de las actividades A7 y A8, pero cambiando el orden de los giros orden. Comparar los resultados obtenidos y generalizar la propiedad de la conmutatividad en la composición de giros del mismo centro.

A9- Presentar a los estudiantes varios rosetones generados por giros. Pedirles que, en cada caso, identifiquen el centro y el ángulo de giro que permite pasar de una celda a la siguiente. Pedirles también que identifiquen el ángulo que permite pasar de una celda a otra no contigua a la primera.

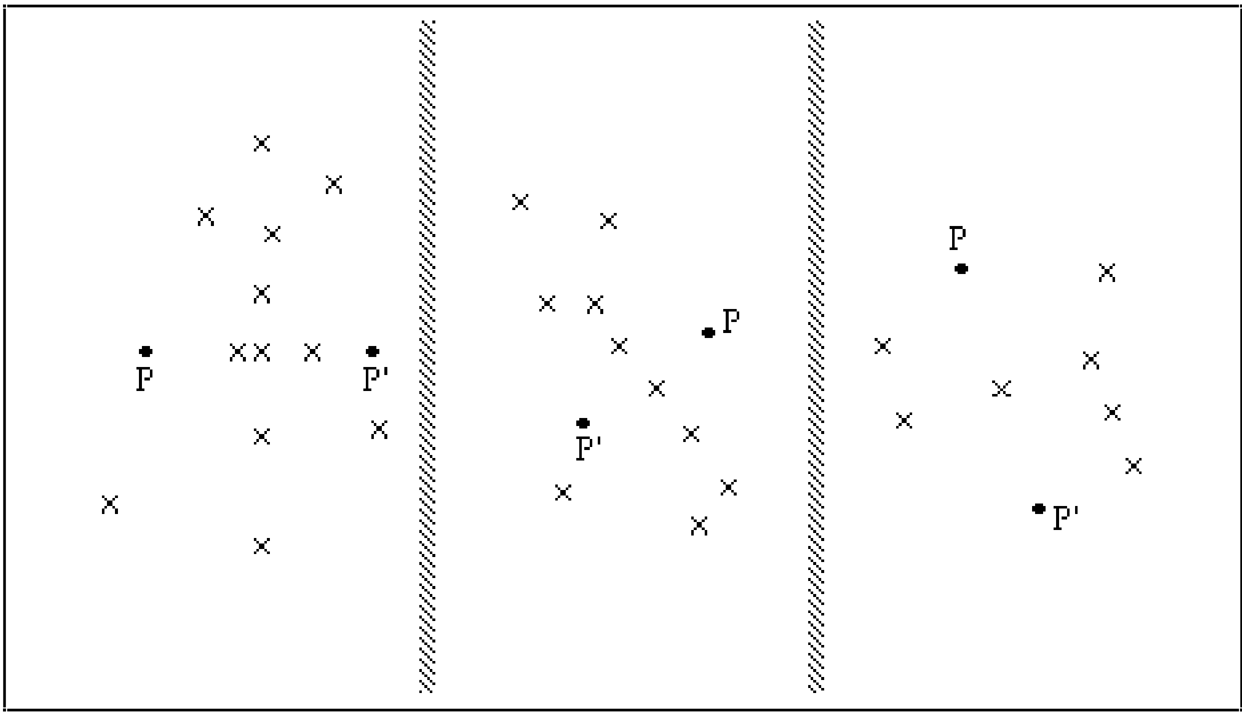
Dada una pieza, determinar el ángulo del giro que permite generar un rosetón e indicar, además, la cantidad de celdas que tendrá el rosetón.

Determinar el ángulo de giro necesario para que un rosetón esté formado por … celdas (indicar el número de celdas). Generalizar los resultados de esta actividad, referentes a la relación entre el número de celdas del rosetón y el valor del ángulo del giro que lo genera. Indicar algunos casos en los que no sea posible construir un rosetón.



A10- Dados los puntos P y P', y varios puntos más, indicar cuáles de éstos pueden ser centros de giros que transformen P en P'. Buscar otros puntos, no dibujados en la lámina, que también puedan ser centros de giro. ¿Hay más posibilidades? Determinar el ángulo de giro para algunos de los centros de giro encontrados. ¿Cuál es el mayor/menor? ¿Qué giros son positivos/negativos? Si se quiere realizar un giro con un ángulo pequeño/grande, positivo/negativo, ¿dónde estará el centro?

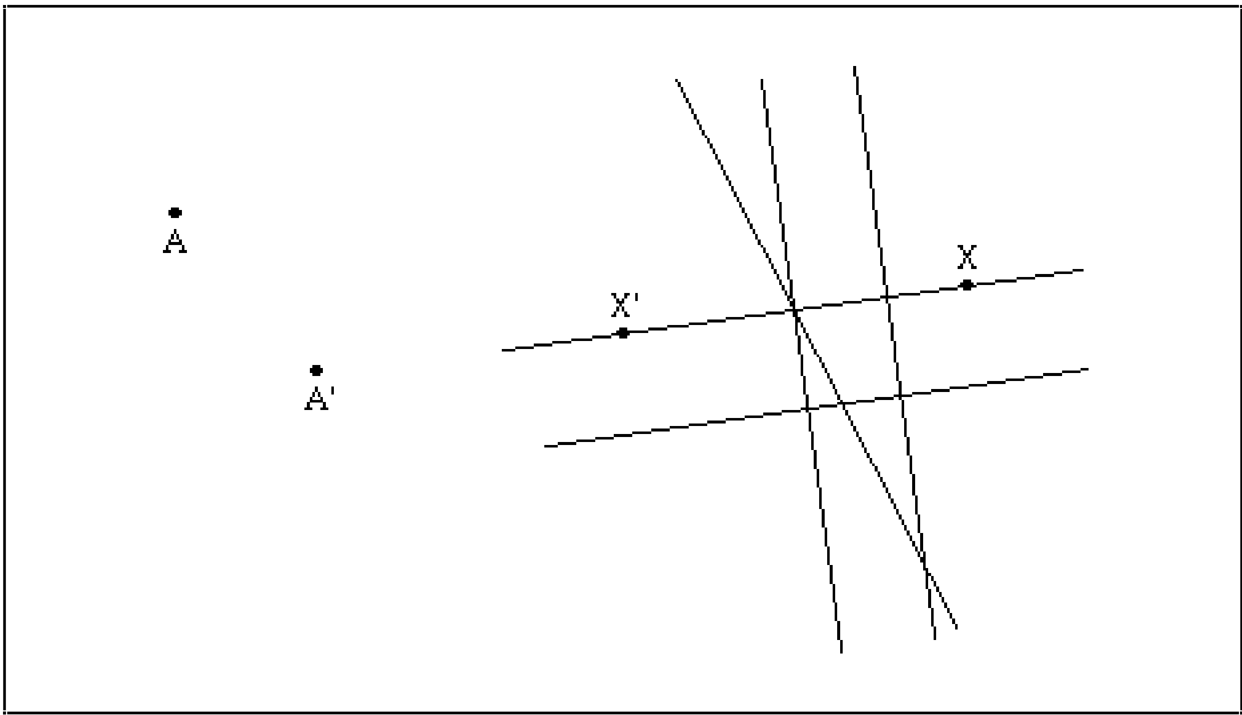
Buscar el centro de un giro de … (especificar el ángulo) que transforme P en P'.



A11- Dados dos puntos A y A', buscar centros de giros que lleven A en A'.

Dados dos puntos X y X' y varias rectas, justificar cuál o cuáles de las rectas contienen los centros de los giros que transforman X en X'.

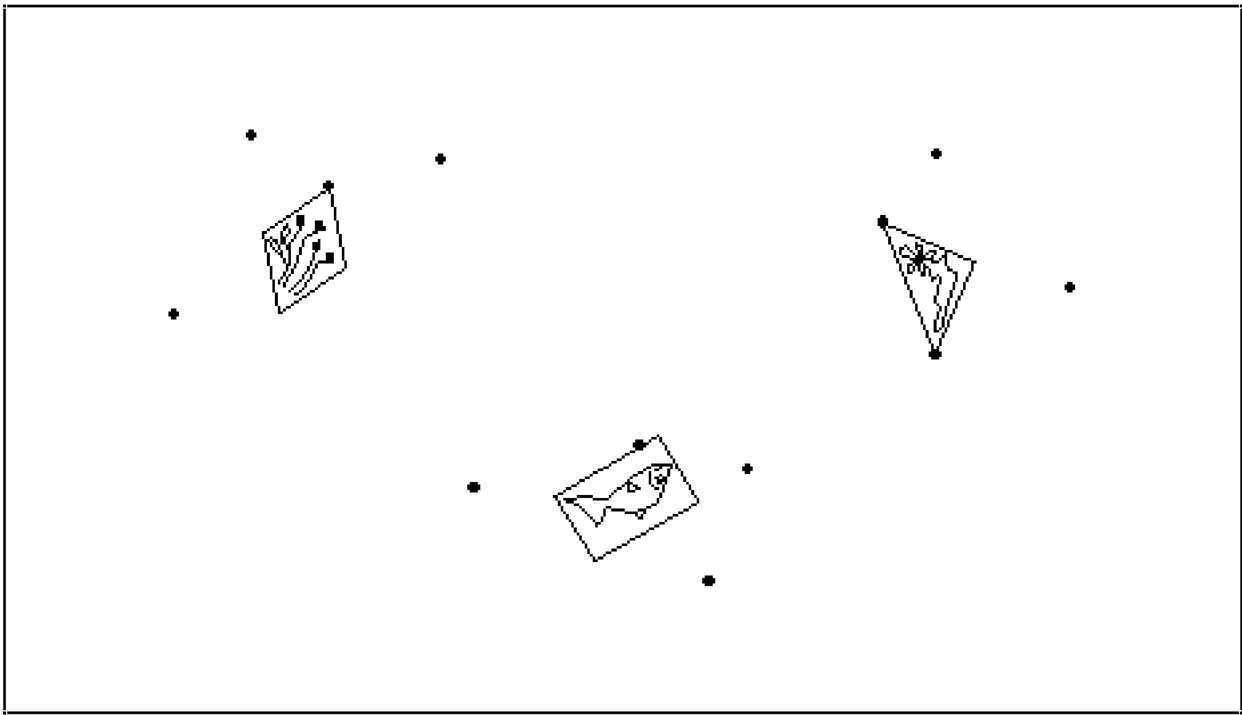
(Una vez obtenida la propiedad de que la mediatriz es la recta que contiene los centros de giro, explicar el procedimiento para trazar la mediatriz con compás, si esto no supone gran dificultad para los estudiantes).



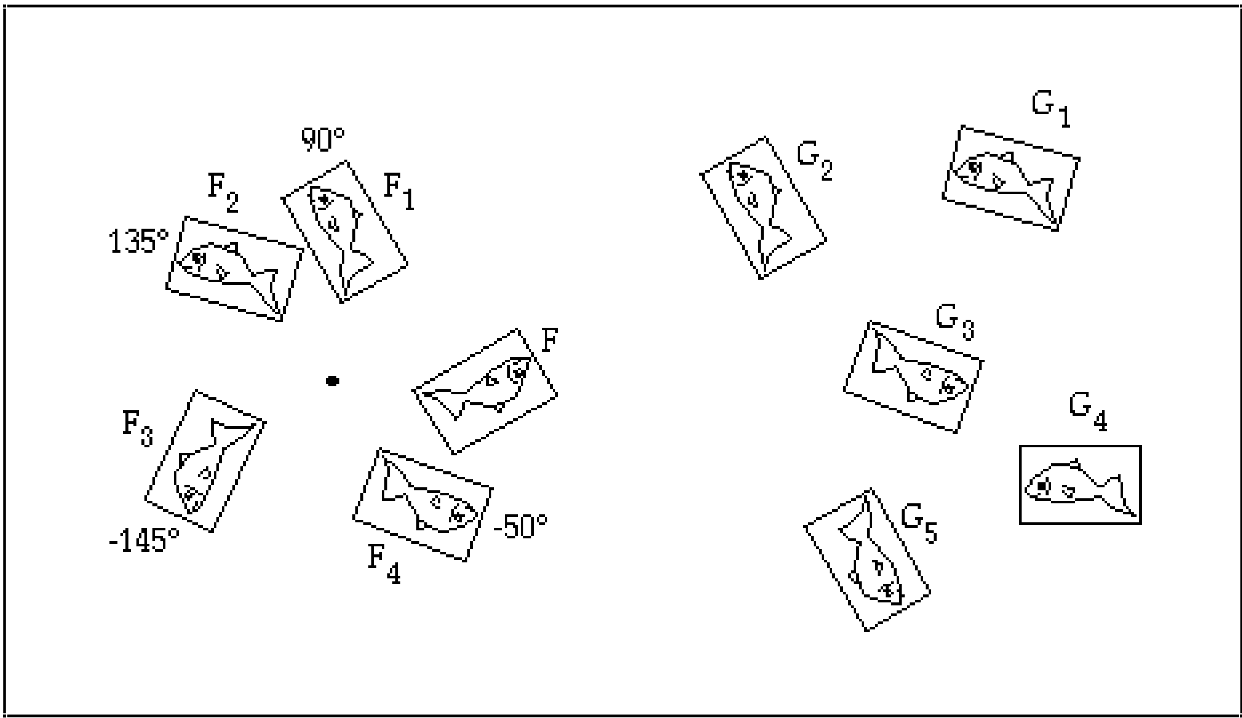
A12- Proporcionar a los estudiantes el enunciado de alguna propiedad relacionada con los giros y pedirles que la verifiquen y justifiquen si es cierta siempre, en algunos casos concretos o nunca. Por ejemplo: i) Si P' es la imagen de P por un giro, entonces P' ≠ P. ii) Si Q' es la imagen de Q por un giro de centro O, entonces ΔQQ'O es equilátero.

A13- Dados una figura y varios puntos, aplicar a la figura, siempre a la misma, giros de … (especificar un ángulo) con centro en cada uno de los puntos dados. Analizar los resultados, enunciar la propiedad observada.

Repetir el ejercicio anterior con otra figura y varios puntos distintos como centros de giro, siendo el ángulo del giro … (dar un valor). Generalizar el resultado y su forma de utilización.

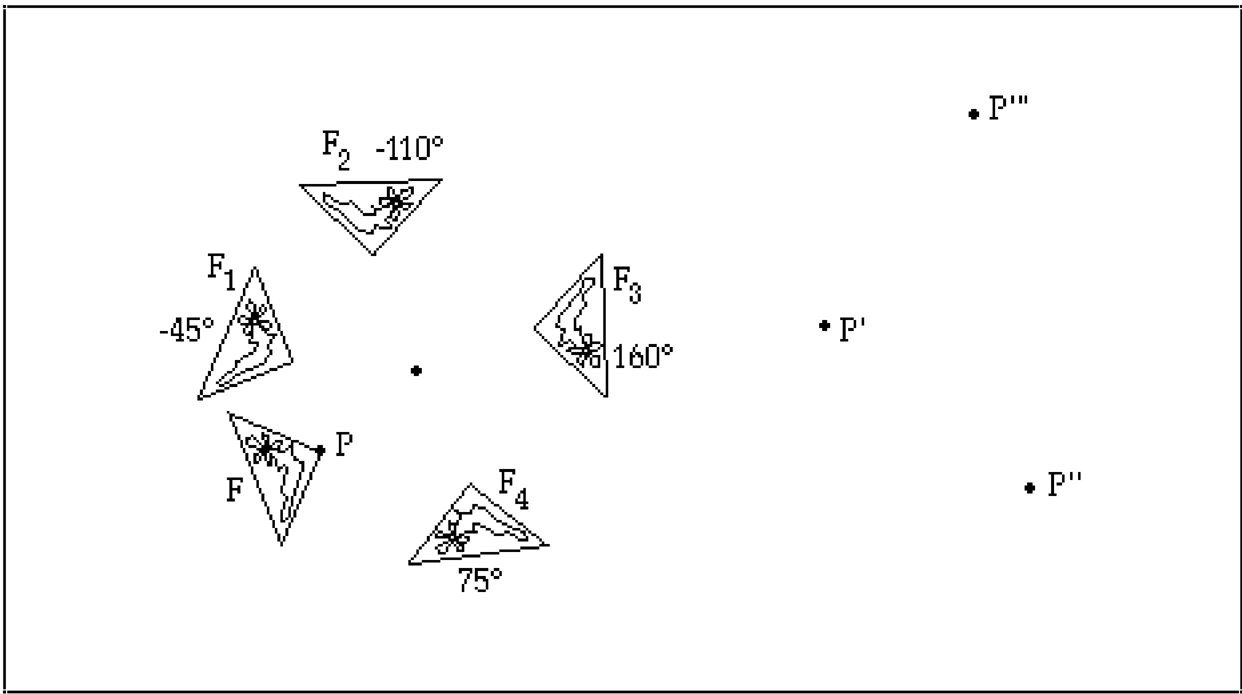


A14- Dadas una figura F, varias imágenes suyas (F_1, F_2, …) mediante giros cuyos ángulos se indican junto a las respectivas imágenes, y otro grupo de figuras (G_1, G_2, …), decir, cuando sea posible, simplemente observando las figuras, el ángulo del giro que permite pasar desde F hasta cada figura G_i. Comprobar en algunos casos el resultado obteniendo el centro y el ángulo del giro.



A15- Se dan una figura F y varias imágenes suyas (F_1, F_2, …) mediante giros cuyos ángulos se indican junto a las respectivas imágenes. Obtener la imagen de la figura F mediante un giro de … (indicar uno de los ángulos escritos junto a las figuras), sabiendo que el punto P de F gira hasta P'.

Repetir el ejercicio en otros casos, variando la posición de P', el ángulo del giro, eligiendo otro punto de F, …



A16- Construir un friso a partir del rectángulo dado, tomando como sistema generador G(O,180°) y T_a (el centro O está en el punto medio del lado menor del rectángulo y el vector a mide el doble que el lado mayor).

Después de construido el friso, fijar una celda y explicar dónde y cómo se situará la imagen de esa celda al aplicarle el giro G(O,180°).

Fijar una celda y señalar las celdas desde las cuales alguno de los movimientos generadores permite llegar hasta ella.

A17- Determinar el vector a para que se pueda construir un friso a partir del rectángulo dado, tomando como sistema generador G(O,180°) y T_a (el centro O está en el punto medio del lado mayor).

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

En las actividades del nivel 1 y las fases anteriores del nivel 2, tuvimos en cuenta la diferencia que hay entre la realización de un giro cuyo centro está dentro de la figura a girar, o en su perímetro, y de uno cuyo centro está fuera de dicha figura, para lo cual planteamos actividades diferentes basadas en una y otra situación. En las actividades de esta fase también hemos tenido en cuenta dicha diferencia, que sigue siendo importante, si bien ahora nos limitaremos a plantear en una misma actividad ejercicios matemáticamente análogos pero con figuras en posiciones diferentes respecto al centro de giro. No obstante, en los comentarios de los párrafos siguientes no haremos referencia a dicha distinción salvo que, en algún momento, pueda ser relevante.

Análogamente, en las actividades de niveles y fases anteriores se trabajó para lograr que los estudiantes adquiriesen destreza en el uso de los diferentes materiales y métodos de realización de giros, por lo que en las actividades de esta cuarta fase del nivel 2, los estudiantes tuvieron libertad para utilizar los materiales y métodos que prefirieran, salvo que se indicara explícitamente lo contrario. No obstante siempre se exigió que los resultados tuvieran un mínimo de exactitud y rigor matemáticos. El material usado por los estudiantes de nuestras experimentaciones dependió, principalmente, de la edad y destreza de cada estudiante, si bien el objetivo final debe ser que todos lleguen a usar correctamente los materiales usuales de dibujo técnico (regla, compás y transportador).

En los comentarios sobre de las actividades planteadas para la segunda fase de este nivel, ya hemos explicado la finalidad de la actividad A1 de la fase 4. La necesidad de determinar la imagen de más de un punto de una figura para obtener correctamente la figura resultante, afianzada a través de los ejercicios de la fase 2, se matiza más en la fase 4, donde se pide a los alumnos que actúen con precisión respecto al empleo de la cantidad mínima de puntos e imágenes, llegando a diferenciar los procedimientos de obtención de la figura imagen, según que el centro de giro sea interior o exterior a la figura girada. En los comentarios de la fase 2 incluimos algunos ejemplos de actuaciones de estudiantes que corresponderían a la situación deseada en la fase 4.

Las ideas sobre giros adquiridas en la segunda fase les permiten a los estudiantes comprender y explorar el concepto de giros equivalentes, estableciendo la relación visual y numérica entre ellos. Las actividades A2 hasta A6 están dirigidas a la enseñanza de la equivalencia de giros y a hacer que los estudiantes descubran algunas propiedades particulares, como las relativas a los giros de 180°. Todos los alumnos con los que se ha llevado a cabo la experiencia visualizaron la equivalencia, en términos de los dos caminos posibles de las figuras, si bien el grado de utilización de esta propiedad poco después de su introducción varió significativamente de unos a otros. Gloria (3º), Rebeca (6º) y Merche (Magisterio) emplearon espontáneamente en tareas posteriores el giro equivalente al dado, cuando ello facilitaba su trabajo, aunque no se hiciera mención en el enunciado de la actividad a la conveniencia de recurrir a la equivalencia. No ocurrió así siempre con los demás estudiantes, si bien sí podían utilizarlo cuando se les pedía.

En todos los cursos podemos encontrar referencias incorrectas por parte de algún estudiante al valor numérico del ángulo del giro resultante o a su signo, aunque gráficamente sí señalaba el recorrido correctamente. Los errores se debían casi siempre a la rapidez de la experimentación llevada a cabo, que no permitía memorizar por completo algunos aspectos. También se produjeron algunos errores en las justificaciones de los estudiantes debidos a un intento de aplicar propiedades de otro campo de las matemáticas, pero que no eran adecuadas aquí. Por ejemplo, Ara (Magisterio) en una ocasión dió como valor del ángulo del giro equivalente la suma del que se indicaba y 360° porque *Menos por menos es más,* pero sí marcó bien el recorrido de dicho giro.

Por ello, las actividades A2, A3 y A4 abordan el concepto de giros equivalentes a partir del recorrido de los puntos o las figuras en sentidos contrarios, hasta completar la circunferencia, preparando el camino para que los estudiantes, observando los resultados obtenidos, puedan plantear la relación numérica de los ángulos equivalentes y la constatación y aplicación de la equivalencia de giros al aplicar pares de giros a un mismo punto o figura.

En la actividad A5 hemos planteado también la equivalencia de giros con ángulos mayores que 360°, dado que en las composiciones de giros pueden aparecer estos valores como resultado de la suma de los ángulos. En las actividades planteadas en las experimentaciones se vió claramente la conveniencia de su tratamiento al estudiar la composición de giros, si bien no se dedicó ninguna actividad específica a la equivalencia de giros en sí misma.

Las actividades que planteamos en la propuesta de esta memoria para introducir y entender la composición de giros del mismo centro (A7 y A8) son análogas a las utilizadas en las experimentaciones, si bien algunas no se emplearon en todos los cursos. La forma de organizar estas dos actividades intenta que los estudiantes consigan, en primer lugar, una comprensión visual de la composición de giros y, después, que obtengan las relaciones numéricas, teniendo siempre en mente las equivalencias de giros.

En la experimentación de 3º de E.G.B. se aprecia la carencia de visión global de la composición por parte de Sandra. Por ejemplo, tras la solución de varios ejercicios sobre el valor numérico del ángulo del giro resultante de una composición de giros, la primera actividad en la que se le planteó la composición sobre una figura, los valores de los ángulos de giro fueron -180°, -180°, -90°, -90°. Sandra realizó la composición por pasos pero no supo reconocer el movimiento resultante. A lo largo de todos los ejercicios que se le plantean, se aprecia claramente que Sandra no entiende la finalidad de una simplificación de giros. Ante un ejercicio concreto solía optar por ejecutar todos los movimientos, salvo que se le indicara expresamente lo contrario. Asimismo, las simplificaciones previas a la realización del giro resultante que hacía Sandra eran muy pobres, pues prácticamente se limitaba a simplificar los ángulos de valores numéricos opuestos. Por ello en esta propuesta insistimos más en la comprensión previa visual, tanto del significado de los giros equivalentes como de la idea de composición de giros del mismo centro.

No sucedía lo mismo con Gloria (3º de E.G.B.), la cual se había construido unas estrategias mentales de interpretación de los ángulos y de cálculo que le permitían resolver los ejercicios y comprender lo que hacía. Desde ese punto de vista, los distintos signos de los ángulos no impidieron llegar a la solución de los ejercicios, aunque está claro que el manejo de los números enteros habría agilizado y facilitado el proceso.

En un momento dado, el profesor introdujo en ese curso, 3º de E.G.B., la regla usual para simplificar los ángulos de los giros de una composición: Sumar los positivos, sumar los negativos y restar, de los dos valores obtenidos, el menor del mayor. El profesor no la expuso directamente, sino que dejó que las niñas indicasen la operación aritmética a efectuar cada vez en el paso siguiente. Gloria intervino eficazmente, adelantando correctamente en varias ocasiones la operación. Eso pone de manifiesto la comprensión por su parte de lo que hace y, en particular, del significado del valor del ángulo de giro, signo incluido. Como contrapartida, Silvia no comprendió la justificación de ese método y, de haberlo exigido en ejercicios posteriores, su estrategia habría consistido en intentar su memorización, como de hecho se vio en algún ejercicio en el que se le pidió la simplificación.

En 3º de E.G.B., la composición de giros de distinto centro sólo se le planteó a Gloria, pero con muy poco tiempo, ya al final de la experimentación. No obstante, se aprecia un intento de generalización de los trabajos y métodos válidos para otras situaciones, desarrollando un razonamiento correcto de nivel 2.

En 6º de E.G.B. la introducción de los sentidos de giro no supuso ninguna dificultad, surgiendo en primer lugar, como es habitual con cualquier tipo de estudiantes, los adjetivos de "izquierda" y "derecha". En cuanto a las combinaciones de números positivos y negativos o de números negativos, aparece muy poco, pues sólo se proponen dos ejercicios de composición de giros, uno con dos giros del mismo centro y otro con dos giros de distinto centro. Parece desprenderse que, razonando en términos del sentido del giro, las alumnas sí pueden trabajar correctamente con valores positivos y negativos (aunque en las grabaciones no hemos podido seguir el trabajo efectuado por todas las alumnas). No obstante, en el ejercicio de composición de giros de distinto centro, no queda clara la justificación de las alumnas sobre la operación realizada con los valores de los ángulos (actividad 16 de la experimentación):

Los valores de los ángulos de los giros que se componen son + 90° y -60°.
Inmaculada escribe en la pizarra: *90 P* [positivos] - *60 N* [negativos] = 30 y pregunta: *¿P* [positivos] o *N* [negativos]?
Prof.: *¿Tú qué crees?*
Inmaculada: *P.*
Prof. [señala la pizarra]: *¿90 positivos y 60 negativos no será 30 positivos?*
Marta: *Sí.*
Prof.: *¿Por qué?*
Marta: *Porque hemos restado los ángulos.*
Prof.: *¿Por qué has restado los ángulos?*
Inmaculada: *Porque es así.*

Rebeca, sin embargo, basa su justificación sobre el ángulo del giro resultante en una propiedad que se acababa de descubrir: la determinación de la inclinación de la imagen de una figura según el ángulo del giro aplicado o, lo que es equivalente, y es en los términos en los que se expresa Rebeca, la traslación existente entre todas las imágenes de una misma figura por giros del mismo ángulo. Esto muestra inicio del razonamiento de nivel 3 y está en la línea del modo de razonar que pretendemos con la secuencia de enseñanza que proponemos ahora.

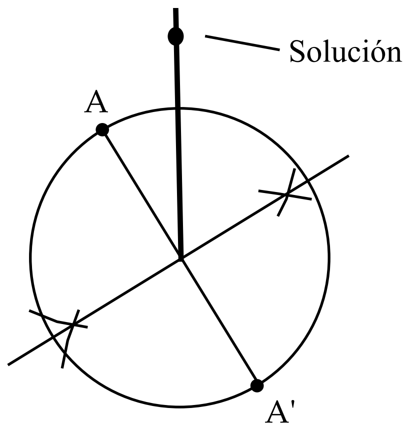
Obviamente, la composición de giros de distinto centro es más compleja que la de giros del mismo centro. Si bien su introducción puede hacerse en el nivel 2, ya que los estudiantes de este nivel tienen capacidad suficiente para realizar estas composiciones e identificar el tipo de movimiento resultante, para entender bien este caso de composiciones hace falta una capacidad de relacionar diferentes conceptos e isometrías que es más propia del nivel 3. Por este motivo, con las actividades del nivel 2 no pretendemos llevar a cabo un descubrimiento exhaustivo de propiedades importantes de los giros, sino que intentamos que los estudiantes tengan las bases de conocimientos y relaciones que les permitan tener éxito en las actividades del nivel 3.

La introducción en las actividades A10 y A11 de la mediatriz como el lugar geométrico de los posibles centros de giros que transforman un punto en otro se planteó por primera vez en las experimentaciones de dos maneras diferentes, según el curso: Los estudiantes de 6º debían seleccionar los puntos que servían como centros de giro de entre un conjunto de puntos que se les daba, mientras que los de 3º y Magisterio debían buscar centros de giro, sin más datos.

En el primer caso (6º de E.G.B.), la solución se obtuvo, simplemente, probando punto por punto con el compás o la regla. En el segundo caso, la solución inmediata fue el punto medio del segmento (giro de 180°), e hizo falta insistir en la búsqueda de más puntos para que los estudiantes reconocieran la existencia de otras soluciones, que fueron consiguiendo por tanteo, probando con el compás y/o midiendo los radios. Hay, no obstante, una excepción en Magisterio, Merche, que traza enseguida la mediatriz, quizá de manera algo intuitiva, influida por sus conocimientos previos.

En la propuesta final que hacemos aquí hemos optado por introducir la visión del lugar de los centros de giros de forma análoga a como se planteó en la experimentación con 6º (actividad actual A10): Proporcionar una serie de puntos para que los alumnos identifiquen los que son centros de giros. De esta forma se facilita de una manera bastante rápida la generalización de la alineación de los centros de giro. El otro tratamiento también es válido, pero consume más tiempo; en la secuencia que proponemos, ese tipo de actividad aparece después de que los estudiantes hayan descubierto la existencia de una línea recta que contiene los centros de giro (actividad A11).

En nuestras experimentaciones no hubo dificultad en que los estudiantes de los diferentes cursos llegaran a discriminar los puntos que son centros de giro de los puntos que no lo son basándose en la equidistancia, si bien en algunos casos al principio no se hizo referencia explícita a ella. La única excepción fue Sandra (3º de E.G.B.), que avanzaba con dificultad y requería más instrucción de la fase 2.



La interpretación de los centros de giro como puntos de una recta se afianza cuando se establece la relación entre los valores de los ángulos y la mayor o menor distancia entre el centro de giro y el segmento que une el punto y su imagen. En las experimentaciones llevadas a cabo sólo les propusimos esta actividad a los estudiantes de 6º de E.G.B. y de Magisterio. En este último curso se vió claramente la utilidad de esta actividad (actividad 16 de la experimentación), pues mientras que Merche aplicaba correctamente la idea de mediatriz y el valor del ángulo, Ara tardó en establecer las relaciones necesarias para resolver la actividad. En el dibujo se muestra la solución obtenida por Ara cuando, tras haber construido la recta de los centros de giro, se le pidió que encontrara el centro del giro cuyo ángulo es de -30°. Obsérvese que traza un ángulo de 30°, con vértice en el punto medio del segmento AA', siendo este segmento uno de los lados del ángulo.

Una de las finalidades generales del segundo nivel de razonamiento es que los estudiantes descubran experimentalmente, apliquen y justifiquen propiedades matemáticas. Por ello es necesario que, además de las propiedades básicas de los giros, que forman el hilo conductor de la organización del tema, los estudiantes trabajen en algunas otras propiedades más específicas. Dado que no tienen por qué ser unas propiedades concretas y cada profesor puede tener sus preferencias, presentamos una actividad abierta (A12), en la que no se especifican las propiedades a estudiar, sino sólo dos ejemplos. No obstante, cualquier propiedad estudiada en esta actividad debe basarse en los fundamentos de los giros aprendidos en las actividades de la segunda fase de este nivel de razonamiento. Magisterio fue el único curso en el que planteamos la actividad A12, que resultó útil porque impulsó la reflexión de las alumnas y les hizo profundizar más en los giros, pero que fue demasiado corta debido a la limitación de tiempo que teníamos.

Las actividades A13, A14 y A15 se dedican al descubrimiento y aplicación, para su afianzamiento, de la propiedad de determinación por el ángulo del giro, de la inclinación de la imagen de una figura por ese tipo de movimiento. Con ellas continuamos la línea de ejercicios contemplados en el objetivo 5 y que iniciamos en A12. El tratamiento es más extenso ahora, puesto que esta propiedad constituirá uno de los pilares sobre los que sustentar las justificaciones de relaciones en el nivel 3.

En las experimentaciones llevadas a cabo, se presentó en 6º de E.G.B. y en Magisterio. En el primero de estos cursos se produjo rápidamente la visión de la traslación entre todas las imágenes de una misma figura por giros del mismo ángulo, excepto en el caso de una estudiante, Icíar, quizá por falta de tiempo. En la aplicación directa de la propiedad, dos estudiantes cometieron errores, más propios de descuidos que de incomprensión de la propiedad; alguno de esos errores fue también cometido por Ara, una de las estudiantes de Magisterio. El trabajo llevado a cabo en 6º de E.G.B. (actividad 15 de la experimentación) fue más breve de lo que proponemos ahora en la nueva secuencia, a pesar de lo cual Rebeca consolidó suficientemente la propiedad como para servirse de ella en un ejercicio planteado inmediatamente después, para justificar el valor del ángulo de giro resultante de una composición:

Se trata de la actividad 16 de la experimentación de 6º de E.G.B. Hay que efectuar la composición de dos giros de distinto centro y ángulos, 90° y 180°, respectivamente. Tras realizarla, por pasos, Rebeca dice que el ángulo del giro resultante es de 90°. Su justificación es: *Se hace 90* [gira 90° la pieza original] *y entonces ya sale trasladada* [de la figura final]. No indica el signo, que es negativo.

En Magisterio, la secuencia de ejercicios propuestos (actividades 21, 22 y 23 de la experimentación) resultó eficaz, puesto que los primeros errores, quizá debidos a descuidos, y los titubeos sobre la aplicación de la propiedad fueron subsanados por completo. Por ello, la secuencia que presentamos ahora contiene tres actividades, A13, A14 y A15, iguales a las experimentadas en Magisterio.

Algunas actividades de esta fase están dedicadas a estudiar las características particulares de los giros de 180°, tanto explícitamente (actividad A6), como implícitamente (actividad A16 y A17). Las experimentaciones han mostrado que los estudiantes son capaces de descubrir por sus propios medios las características de los giros de 180°, si bien no siempre se llegaron a poner de relieve estas propiedades, ya que en algún curso no se habían planteado las actividades con esta finalidad concreta. Por ello en esta propuesta sí incluimos las propiedades básicas de los giros de 180° en la secuencia de actividades.

En las experimentaciones llevadas a cabo se planteó la alineación de cada punto, su imagen y el centro de giro (utilizando sólo la regla para obtener la imagen). También surgió la característica visual de estos giros de que la figura imagen se sitúa "al revés" de la original. Rebeca (6º de E.G.B.) y Merche (Magisterio) hicieron explícito que cada segmento y su imagen por un giro de 180° son paralelos, propiedad que no se había comentado antes y que después utilizaron para resolver otras actividades. Por lo inusual, merece la pena destacar el método seguido por Merche para girar una figura 180° con centro exterior a la figura (actividad 12 de la experimentación): Merche eligió un lado de la figura, trazó las rectas que pasan por los vértices de sus extremos y el centro de giro y, por último, colocó la figura imagen en el lugar en que la separación entre las dos rectas era exactamente igual al lado de la figura, teniendo cuidado de mantener el lado de la figura imagen paralelo al correspondiente de la original (aunque Merche no mencionó explícitamente esta propiedad, en la grabación se ve que sí se preocupa de ella). Algo más tarde, la profesora le pidió a Merche que usara otro método de obtención de imágenes por giros de 180° y Merche empleó el método usual, pero comentando que *lo que pasa es que* [con mi procedimiento] *gano tiempo.*

Las dos estudiantes de los cursos de 3º y 6º de E.G.B. con un nivel de razonamiento inferior no intuyeron alguna de estas propiedades. Por ejemplo, Sandra (3º E.G.B.) asimiló bien la característica del centro como punto medio de los segmentos que unen cada punto y su imagen; así, en la actividad 17 de la experimentación, Sandra justificó que el ángulo de giro entre dos figuras era de 180° *porque si hacemos la raya es la mitad*. Pero, al mismo tiempo, con frecuencia colocaba la figura imagen en posición trasladada de la original (actividad 13 de la experimentación) y mantenía durante cierto tiempo este error, aunque en otras actividades sí giraba la figura.

Por otra parte, Inmaculada (6º E.G.B.) situaba la figura imagen con una inclinación incorrecta (actividad 15 de la experimentación), error que le corregía Rebeca y se lo explicaba basándose en la ausencia de paralelismo entre los lados de la figura inicial y los correspondientes de la imagen.

Para finalizar, queremos mencionar un grupo de actividades (A9, A16 y A17) que, con motivo de la construcción de rosetones y frisos, sirven para aplicar en un contexto diferente propiedades de los giros aprendidas con anterioridad: La composición de giros y las características de los giros de 180°. La única de estas actividades que hemos experimentado es la A9, usada sólo en Magisterio, y no presentó problemas. Tanto los rosetones como los frisos son un buen contexto para investigar dentro del segundo nivel de razonamiento, pues obligan a los estudiantes a combinar propiedades de los giros y las traslaciones y sirven como preparación para el trabajo del nivel 3, en el que se iniciará el estudio conjunto de las tres isometrías.

La primera vez que un grupo de estudiantes trabaje con frisos, será necesario explicarles que se pueden emplear las traslaciones T_a, T_{-a} y que el giro G(O,180°) puede tener su centro sobre cualquiera de las baldosas que van apareciendo, pero siempre sobre el mismo punto de la baldosa. En estas actividades hemos optado por una introducción gradual, manteniendo al principio el centro del giro fijo, sobre la baldosa inicial, para hacerles ver, cuando hayan construido algunos frisos de esa manera, que se obtiene el mismo resultado aunque se cambie el centro del giro a los puntos homólogos de otras baldosas.

GIROS: NIVEL 3

Objetivos:

Las actividades que planteamos para este nivel pretenden lograr los objetivos generales siguientes, que más adelante desglosaremos en las diferentes fases de aprendizaje:

Los objetivos y actividades de este nivel se complementan con los correspondientes de los otros movimientos.

1- Comprender la obtención del centro de giro a partir de determinada información sobre una figura y su imagen.

2- Descubrir y justificar que siempre existe una isometría (giro o traslación) relacionando dos figuras congruentes de la misma orientación.

3- Realizar composiciones de giros de distinto centro, generalizar el resultado de la composición de varios de tales giros y utilizar estos resultados en otros problemas. Análisis de la conmutatividad.

4- Realizar composiciones y descomposiciones de giros y/o traslaciones. Simplificar composiciones de estas isometrías.

5- Demostrar el resultado de la composición de giros y el resultado de la descomposición en giros de un giro o una traslación. Comprender y saber utilizar la infinidad de soluciones.

6- Relacionar propiedades conocidas para obtener nuevas propiedades de los giros o métodos para la aplicación de este movimiento.

7- Obtener, utilizar y analizar la definición formal de giro. Caracterizar los giros mediante conjuntos de condiciones necesarias y suficientes.

8- Demostrar informalmente, mediante razonamiento deductivo, propiedades de los giros descubiertas en este nivel o en los anteriores.

9- Comprender el planteamiento y desarrollo de algunas demostraciones formales relacionadas con los giros.

10- Realizar algunas implicaciones simples en una demostración y demostraciones de pocos pasos relacionadas con los giros.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

Para completar adecuadamente el desarrollo del tercer nivel de razonamiento, hay que estudiar y utilizar las relaciones existentes entre las distintas isometrías, traslaciones, giros y simetrías, ya que tanto al componer giros como simetrías se producen traslaciones y giros. Por lo tanto, al iniciar el trabajo con los bloques de actividades para la adquisición del tercer nivel de Van Hiele, conviene que los estudiantes hayan realizado previamente el aprendizaje de las traslaciones, los giros y las simetrías y que se encuentren, como mínimo, en el segundo nivel de razonamiento en cada uno de estos conceptos.

En este nivel el descubrimiento de propiedades va más allá de la simple experimentación en algunos casos, puesto que se plantea la necesidad de una demostración (justificación) general. No obstante, los ejemplos concretos siguen teniendo importancia pues, en bastantes ocasiones serán la base sobre la que se apoyen las demostraciones elaboradas por los estudiantes o el profesor.

Desde la perspectiva en la que hemos planteado la secuencia de enseñanza propuesta, uno de los objetivos importantes del tercer nivel de razonamiento debe consistir en lograr que los estudiantes adquieran una visión general y global de las relaciones existentes entre las tres isometrías, y en particular entre los giros y los movimientos a que dan lugar en sus composiciones, las traslaciones.

Ello se consigue mediante el empleo de dos propiedades básicas: La determinación de la inclinación relativa entre una figura y su imagen, es decir del ángulo formado por ambas figuras (propiedad descubierta en el nivel anterior), y la existencia siempre de una traslación o un giro que permite pasar de una figura a otra congruente de la misma orientación. Desafortunadamente, para estas dos propiedades no se puede hacer una demostración general informal basada en otras propiedades conocidas, por lo que los estudiantes las generalizan a partir de la consideración y análisis de varios casos, método propio del segundo nivel de razonamiento. Sin embargo, el descubrimiento y justificación de la existencia siempre de un giro o una traslación entre dos figuras congruentes, de la misma orientación, no se ha planteado hasta el tercer nivel porque, en los casos en que las dos figuras están giradas, se requiere la obtención del centro de giro y la combinación de algunas propiedades para poder realizar la demostración de la veracidad de esta propiedad.

Esta visión general permite conocer y justificar el movimiento resultante de una composición de giros y traslaciones, incluyendo la determinación del ángulo entre las figuras original y final. Asimismo, permite estudiar las posibilidades de descomposición de una traslación o de un giro en varias de estas isometrías y aplicarlas a situaciones concretas.

Casi todas las propiedades que acabamos de mencionar requieren saber determinar el centro del giro que transforma una figura en otra. La comprensión y asimilación del procedimiento que permite obtenerlo con precisión, corte de mediatrices, es propia del tercer nivel de razonamiento, ya que para ello se requiere que los estudiantes consideren de forma simultánea los giros de cada punto de una figura, estableciendo la relación entre las diferentes mediatrices. Por ello, uno de los objetivos incluidos en el tercer nivel es descubrir este método de obtención del centro de giro y su comprensión.

Otra característica del tercer nivel de Van Hiele es que los estudiantes empiezan a poder obtener y emplear definiciones matemáticas, así como a comprender y utilizar demostraciones formales. A ello obedece el planteamiento de los últimos objetivos de este nivel, en los cuales se propone el estudio de la definición formal de giro y la demostración de algunas propiedades importantes de los giros (algunas ya conocidas por los estudiantes y otras nuevas). En cuanto a las demostraciones, los profesores no deben olvidar que se trata de la primera aproximación de sus alumnos a las demostraciones formales, por lo que no deben pretender que ellos las obtengan por sí mismos, sino que los profesores deben guiar y explicar el desarrollo de estas demostraciones que, en todo caso, deben ser sencillas y admitir un tratamiento informal pero riguroso.

Fase 1 del Nivel 3

Objetivos:

En la presentación de las actividades de los niveles anteriores ha quedado suficientemente explicada la finalidad que debe tener la fase 1 de cada nivel, por lo que no creemos necesario repetir esas consideraciones respecto de la fase 1 del tercer nivel. En este caso, tampoco proponemos ninguna actividad específica para dicha fase, si bien los profesores deben centrar su actividad en determinar el nivel de razonamiento de sus alumnos en relación con los giros y sus conocimientos sobre:

- Los números enteros y las operaciones de suma y resta en este conjunto.
- Utilización de la circunferencia, los ángulos orientados y los grados.
- Manipulación y propiedades de los giros.
- Los elementos necesarios de las otras isometrías.

En relación con estos puntos, si los alumnos conocen el tema pero tienen alguna carencia concreta, es conveniente darles una instrucción específica adecuada antes de empezar a trabajar con los giros.

Fase 2 del Nivel 3

Objetivos:

1- Obtener el centro de giro, mediante el corte de mediatrices.

2- Descubrir experimentalmente que, dadas dos figuras congruentes con la misma orientación, siempre hay un giro -si su inclinación es distinta- o una traslación -si su inclinación es la misma- que permite pasar de una a la otra.

3- Componer giros de distinto centro y generalizar el resultado en función del valor de la suma de los ángulos de los giros que se componen.

4- Demostrar informalmente el resultado de la composición de dos giros de distinto centro (basando el argumento en la relación de las inclinaciones relativas de las diferentes figuras).

5- Descomponer una traslación o un giro en producto de dos giros de distinto centro. Comprender, justificar y emplear la infinidad de soluciones.

6- Entender la definición formal de giro e identificarla adecuadamente en situaciones concretas.

7- Relacionar propiedades conocidas para resolver situaciones y desarrollar métodos de realización y reconocimiento de giros.

8- Comprender el desarrollo de algunas demostraciones, dirigidas por el profesor, y proporcionar la justificación de algunas implicaciones que formen parte de las mismas.

Actividades:

A1- Dadas una figura y su imagen por medio de un giro, obtener el centro y el ángulo de ese giro (recordar que los centros de los giros que relacionan un par de puntos son los puntos de la mediatriz del segmento que los une).

¿Es seguro que todas las mediatrices se cortan en el mismo punto? ¿Puede haber algún giro para el cual no se corten todas las mediatrices en el mismo punto? Justificar las respuestas.

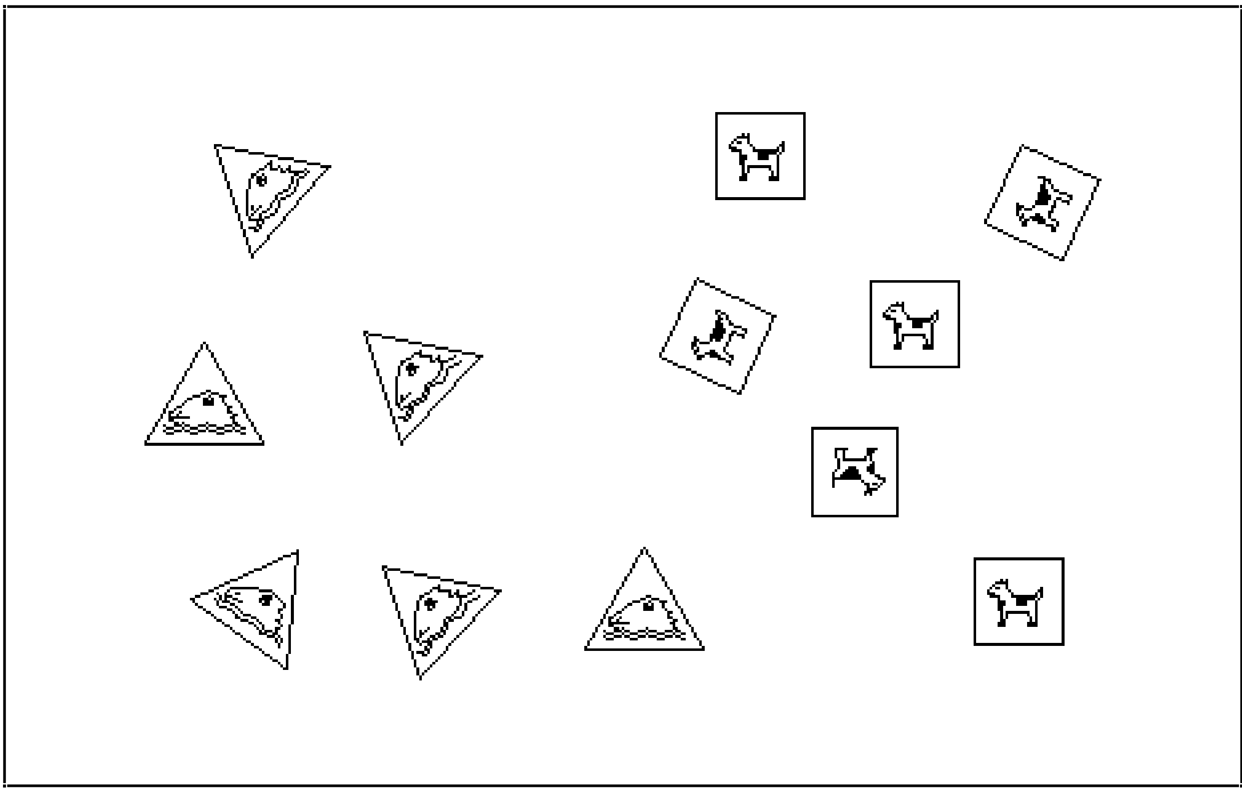
A2- El alumno coloca sobre una hoja de papel dos figuras congruentes de la misma orientación, de forma que tengan distinta inclinación. Averiguar si existe algún giro que permita pasar de una figura a la otra (determinando su centro y su ángulo). Repetir el ejercicio con otros pares de figuras.

Generalizar el resultado anterior: Dadas dos figuras congruentes de la misma orientación y con distinta inclinación, …

¿Puede existir algún caso para el cual no sea cierta la afirmación que se acaba de hacer? ¿Por qué?

A3- Se dan varias figuras congruentes de la misma orientación, algunas con la misma inclinación entre ellas y otras con inclinaciones diferentes. Determinar cuándo es posible pasar de una figura a otra mediante una isometría simple (traslación, giro o simetría). Comprobar cada caso positivo determinando por completo la isometría correspondiente. Repetir el ejercicio con otros conjuntos de figuras.

Generalizar el resultado anterior: Dadas dos figuras congruentes de la misma orientación, …



A4- Dada la figura F, marcar un punto sobre ella y obtener su imagen mediante G(O,-90°) (O está en la lámina). Sin hallar la imagen de más puntos, determinar la imagen de F por el giro anterior. Recordar para ello la propiedad de que la inclinación de la girada de una figura está de terminada por el ángulo del giro.

Si a la figura A de la lámina se le aplica un giro de -75°, colocar una figura con la inclinación de la imagen de A. Luego, señalar un punto de A y obtener su imagen por G(P,-75°). Después, sin obtener la imagen de más puntos, determinar la imagen de A por el giro G(P,-75°).

Repetir el ejercicio anterior con la figura B y el giro G(R,120°).

Describir y generalizar el método seguido para obtener la imagen de las figuras. Aplicarlo a otras figuras y otros giros.

A5- Colocar en la lámina una figura con la inclinación que tendrá la imagen de la figura F de la lámina si se le aplica un giro de 40° (no se especifica el centro de giro). Comprobar el resultado aplicando a F el giro G(C,40°) (se da C).

Colocar en la lámina una figura con la inclinación que tendrá la imagen final de la figura A de la lámina si se le aplica un giro de 125° y a la imagen resultante se le aplica un giro de -235° (no se especifican los centros de giro). Comprobar el resultado aplicándo a la figura A la composición G(P,-235°)∘G(Q,125°) (se dan P y Q).

Repetir este ejercicio, efectuando la misma composición de giros pero invirtiendo su orden. ¿Qué semejanzas y diferencias hay entre ambos resultados?

Repetir el ejercicio haciendo la composición de más de dos giros, modificando cada vez el orden de actuación.

A6- Aplicar a la figura F (se da) la composición G(O,235°)∘G(R,175°) (se especifican los centros de los giros). ¿Qué información sobre la imagen final se puede tener antes de empezar a realizar la composición?

Repetir el ejercicio aplicando a la figura A la composición G(P,-70°)∘G(Q,70°) (se dan G, P y Q).

Repetir el ejercicio haciendo composiciones de más de dos giros.

A7- Generalizar los resultados de las actividades anteriores: ¿Qué movimiento resulta de la composición de giros de distinto centro? ¿Por qué se obtiene unas veces un giro y otras una traslación? ¿Qué sucede si los giros que se componen tienen el mismo centro? Completar los enunciados:

El movimiento resultante de la composición G(B,β°)∘G(A,α°) es …

El movimiento resultante de la composición G(C,β°)∘G(C,α°) es …

A8- A) Para pasar la figura F a la F' (se dan ambas) se ha aplicado el giro G(O,80°) (se da el centro) pero, en lugar de hacer este giro directamente, se tienen que utilizar dos giros, también con centro en O, para obtener el mismo resultado.

Si el primer giro empleado es G(O,50°), ¿cuál es el segundo giro? Y si el segundo giro es G(O,-60°), ¿cuál es el primero?

Si el primer giro efectuado es G(O,α°), ¿cuál es el segundo? Y si el segundo giro es G(O,β°), ¿cuál es el primero?

B) Repetir el ejercicio anterior pero con giros de distintos centros. Si el primer giro que se aplica es G(P,20°) (se da P), ¿qué características se conocen del segundo giro? Obtener el segundo giro.

Repetir el ejercicio, pero siendo G(Q,-65°) el primer giro que se aplica (se da Q).

Generalizar los resultados y métodos de trabajo anteriores expresando la relación verbalmente y por escrito: Si se quiere descomponer G(R,α°) en producto de dos giros de distinto centro, ¿qué se puede decir de sus ángulos de giro? ¿Y de sus centros?

C) Descomponer el giro G(O,80°) en producto de dos giros de distinto centro, pero ahora no se fija previamente ningún dato de estos giros (ni sus centros ni sus ángulos). ¿Dónde se puede situar el centro del primer giro de la composición? ¿Qué ángulo puede tener? ¿Cuántas posibilidades hay para elegir el primer giro?

Una vez fijado el primer giro de la composición, ¿dónde se puede situar el centro del segundo giro? ¿Qué ángulo puede tener? ¿Cuántas posibilidades hay para elegir el segundo giro?

A9- A) Para pasar la figura F a la F' (se dan ambas) se ha aplicado la traslación T_a (se da el vector) pero, en lugar de hacer esta traslación directamente, se tienen que utilizar dos giros para obtener el mismo resultado.

Si el primer giro utilizado es G(O,120°) (se da O), ¿qué características se conocen del segundo giro? Obtener el segundo giro.

Si el segundo giro es G(P,-60°) (se da P), ¿qué características se conocen del primer giro? Obtener el primer giro.

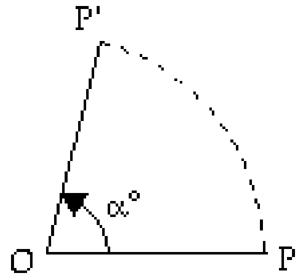
Generalizar los resultados y métodos de trabajo anteriores expresando la relación verbalmente y por escrito: Si se quiere descomponer T_a en producto de dos giros, ¿qué se puede decir de sus ángulos de giro? ¿Y de sus centros?

B) Ahora también se pide descomponer la traslación T_a en producto de dos giros de distinto centro, pero no se fija previamente ningún dato (ni sus centros ni sus ángulos). ¿Dónde se puede situar el centro del primer giro de la composición? ¿Qué ángulo puede tener? ¿Cuántas posibilidades hay para elegir el primer giro?

Una vez fijado el primer giro de la composición, ¿dónde se puede situar el centro del segundo giro? ¿Qué ángulo puede tener? ¿Cuántas posibilidades hay para elegir el segundo giro?

A10- El giro G(O,α°) se define como la aplicación del plano en sí mismo que a cada punto P del plano le hace corresponder el punto P' del plano, de manera que se cumplen las dos condiciones siguientes (ver la figura):

1. d(O,P) = d(O,P').
2. $\angle$ POP' = α°.



Recordar cuál es el resultado de la composición G(O,β°)$\circ$G(O,α°). Demostrar esta propiedad verificando que se cumplen las dos condiciones de la definición de giro.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

En la experimentación realizada en 3º de E.G.B. no llegamos a trabajar en todas las actividades correspondientes al tercer nivel de razonamiento. En este curso, incluso para Gloria, que era la alumna más avanzada, resultó imposible razonar en el tercer nivel. Por ejemplo, al proponerle una actividad similar a la A1, en la que tenía que obtener el centro de giro por corte de mediatrices, Gloria determinó el punto medio del segmento entre un punto y su imagen (seguramente recordando el método usado con los giros de 180°) y trazó la circunferencia que pasa por esos puntos. A continuación, el profesor le pidió que comprobara si el centro que había elegido era válido para otros puntos de la figura; Gloria se asombró cuando comprobó que ese punto no servía. Tras experimentar, se dió cuenta de que *Hay que hallar el centro de giro, pero de todo.* Gloria sí comprendía claramente que, para que un punto sea centro de giro, debe ser válido para todos los puntos de la figura, pero con este comentario mostraba que estaba razonando en el nivel 2, pues no era capaz de relacionar las condiciones de unos puntos y otros de las figuras. A partir de las explicaciones del profesor, Gloria aprendió que el corte de dos mediatrices da la solución, pero no pudo establecer las relaciones lógicas necesarias para que podamos considerar que estuviera utilizando el tercer nivel de razonamiento.

Respecto a la composición de giros de distinto centro, en 3º de E.G.B. sólo se hizo de manera rápida y poco profunda, y no se incluyeron actividades conducentes a demostrar las propiedades o los resultados obtenidos. Como en otras ocasiones anteriores, parece que Sandra ha asimilado las propiedades puntuales y es capaz de aplicar las sucesivas instrucciones del profesor, pero no el proceso general de la actividad. En cuanto a Gloria, sus respuestas eran correctas pero la profesora no logró que la niña diera ninguna justificación para las afirmaciones que había hecho. En la actividad 18 de la experimentación, al proponerle la composición de dos giros de -60° y -130° con distinto centro, y después de que Gloria los hubiera aplicado a una figura, la profesora le preguntó:

Prof.: *Desde este pez* [la figura inicial] *hasta éste* [la imagen final], *¿cuánto hemos movido?*
Gloria: *-190.*
Prof.: *¿Seguro?*
Gloria: *Sí.*
....
Prof.: *¿Habría un centro de giro que desde la figura 1 pasara a la 3?*
Gloria: *Sí.*
Prof.: *¿Seguro o es posible?*
Gloria: *Seguro.*
Prof.: *¿Por qué?*
Gloria: *Porque se puede hacer.*

En cuando a 6º de E.G.B., las limitaciones de tiempo hicieron que la experimentación de las actividades correspondientes al tercer nivel fuera más corta de lo debido. Creemos que una instrucción adecuada, con suficientes actividades como las propuestas en esta memoria, habría logrado desarrollar, al menos parcialmente, el tercer nivel de razonamiento de varias de las alumnas. No es el caso de Inmaculada, pues ya comentamos anteriormente que esta niña habría requerido más actividades para afianzar el segundo nivel de razonamiento. Sin embargo, Rebeca sí mostró un razonamiento de tercer nivel, por ejemplo al resolver la actividad A1, de obtención del centro de giro mediante corte de mediatrices. Las demás alumnas de 6º se sentían satisfechas con el procedimiento consistente en obtener una mediatriz y probar puntos sobre ella, que es lo que habían hecho hasta el momento, pero Rebeca no se conformaba con eso y, al cabo de un rato, se dió cuenta de la solución: *Si hacemos las mediatrices de todos los segmentos de todos los vértices podemos sacar un punto* [en el] *que coinciden todos. ¡Pues claro!*

También se aprecia comienzo del razonamiento de nivel 3 cuando Rebeca se sirve de la propiedad de que la inclinación de la figura imagen depende del ángulo de giro para justificar informalmente el resultado de la composición de giros de distinto centro, situación que ya presentamos en los comentarios del nivel 2.

En la experimentación de Magisterio sí se incluyeron todos los aspectos fundamentales que proponemos ahora para el tercer nivel, por lo que nos referiremos casi siempre a este curso al comentar las actividades de giros propuestas para las distintas fases del ese nivel. En el resumen que presentamos de dicha experimentación, se aprecia cómo las alumnas progresaban en su comprensión de las relaciones entre los movimientos.

A lo largo de la experimentación de las actividades de esta fase, las justificaciones de las alumnas eran a veces imprecisas y requerían la orientación de la profesora para establecer algunas relaciones. Así, por ejemplo, la primera vez que se plantea la obtención del centro de giro de un par de figuras (actividad A1 actual, 17 de la experimentación), Merche justifica el que sea el corte de las mediatrices *porque se desplaza toda la figura. No se desplaza un sólo punto. … O sea, un punto se desplaza y el centro tiene que estar a la mitad; entonces para todos los demás puntos también tiene que estar a la mitad.*

Ara, después de trazar dos mediatrices, dice (actividad 17 de la experimentación): *Lo que hemos hecho antes de trazar la mediatriz respecto dos puntos, para la figura no nos sirve porque, si da muchas mediatrices, ¿dónde está el centro? ¿en una o en la otra?* y, al indicarle que el corte de todas las mediatrices es la solución, dice: *Simplemente no lo veo. No sé decir por qué* [es ésa la solución].

En la experimentación de Magisterio, la profesora dio la justificación correcta de por qué el centro de giro es el punto de corte de las mediatrices, pero se puede conseguir que los estudiantes lo razonen por sí mismos mediante preguntas más o menos dirigidas, según los requerimientos de los estudiantes, lo cual es el objetivo de la actividad A1 tal como la planteamos en esta memoria.

Ya hemos señalado al comentar los objetivos del tercer nivel, que la propiedad de que toda isometría directa es una traslación o un giro es una de las propiedades básicas para lograr que los estudiantes realicen y entiendan las demostraciones siguiendo la metodología propia del tercer nivel de razonamiento. En las experimentaciones llevadas a cabo con alumnos de E.G.B. y de Magisterio, dicha propiedad no fue un objetivo específico de ninguna actividad, si bien en algún momento se vio en Magisterio la necesidad de conocer esta propiedad para poder avanzar. Hemos tratado de corregir esa laguna en la secuencia propuesta en esta memoria, pues es una de las primeras propiedades que se desarrollan en la fase 2 del tercer nivel, mediante las actividades A2 y A3. En estas actividades, si los estudiantes deciden buscar contraejemplos, para demostrar que la propiedad es falsa, el profesor debe dejarles que lo intenten y, tras la búsqueda infructuosa, justificar que no existe tal contraejemplo.

Otra habilidad importante que deben conseguir los estudiantes al progresar en la adquisición del tercer nivel de razonamiento es la de diferenciar condiciones necesarias y condiciones suficientes. El siguiente diálogo es un ejemplo de razonamiento, correcto, de Ara (Magisterio) que muestra su consciencia de la diferencia entre condición necesaria y suficiente. Téngase en cuenta al analizar esta transcripción que no se les había presentado a las alumnas la propiedad, que hemos mencionado en el párrafo anterior, de que siempre existe una traslación o un giro que permite relacionar dos figuras congruentes de la misma orientación.

En esta actividad (número 20 en la experimentación), similar a la A2 actual, se daban a las estudiantes pares de figuras congruentes y se les pedía averiguar cuándo había un giro que permitiera mover una figura del par hasta la otra y, si existía, determinarlo.

Ara indica que, para ver si es giro, hay que *encontrar el centro de giro o, si te lo daban, comprobar que era.*

Merche: *Con dos mediatrices bastará, ¿no? Porque viendo dónde se cortan dos ya sabes dónde está el centro.*
Ara: *Si sabes que es un giro sí, pero si no, tendrás que comprobar primero.*
Merche: *Ya, pero lo he comprobado mirando el otro vértice, si pasa por la circunferencia.*

Un signo del progreso de las estudiantes de Magisterio en la adquisición del razonamiento de tercer nivel es que eran capaces de identificar y justificar situaciones nuevas para ellas basando sus demostraciones en dos propiedades básicas: La posibilidad de determinar la inclinación de la figura imagen a partir del ángulo de giro (introducida en las actividades A4 y A5 de esta fase) y la determinación del movimiento resultante de una composición de giros (introducida en las actividades A6 y A7). Las actividades A4 a A6 conectan con las A13 a A15 de la fase 4 del nivel 2, pues las actividades del nivel 3 plantean la relación entre una figura y su imagen en sentido inverso a las actividades del nivel 2 y sirven para completar y generalizar estos resultados.

Analizando la experimentación vemos cómo, al plantearles por primera vez en la actividad 28 de la experimentación, semejante a la A6 actual la composición de dos giros cuyos ángulos suman 360°, las estudiantes supieron avanzar el resultado, antes de resolver manipulativamente la composición:

Prof.: *Cogéis una lámina. Pegar una figura. Poner un centro de giro en un vértice y haceis primero un giro de +70° y luego, al resultado, le aplicáis un giro de -70° con otro centro. Este otro centro, si queréis, lo podéis poner en un vértice de la imagen.*
Ara [casi inmediatamente]: *Se va a quedar como está. Una paralela a ésta* [la figura inicial]. *Con este lado paralelo, este también y éste también.*
Prof.: *¿Y va a salir donde está ésa* [la figura original]*?*
Alumnas: *Según donde esté el centro de giro.*
....

Prof.: *Vamos a modificar el ángulo. El primero es de +70° y el segundo lo cambiamos a +290°.*

Ara: *Pues dará la suma. Es que esto es igual que si la figura la trasladamos* [quiere decir giramos] *290+70. Entonces, si hago una sola rotación, equivale a las dos. No tengo por qué hacer todo el rollo ese. Hago una de 360.*

Merche [mientras Ara está girando la figura 360°]: *Da lo mismo.*

Prof.: *Entonces, ¿qué pasa?*

Ara: *Se sobrepone. Se pone encima.*

Prof.: *¿Y tú, qué dices, Merche?*

Merche: *Lo mismo.*

Prof.: *¿Eso poniendo los centros de giro dónde?*

Merche: *En el mismo vértice.*

Prof.: *¿Y si ponéis los centros de giro en distintos vértices?*

Merche: *No tiene por qué* [coincidir con la figura inicial].

Ara: *No tiene por qué, pero daría una traslación de ésta.*

Prof.: *¿Por qué?*

Ara: *Por lo mismo de antes* [el caso de los giros de +70° y -70°].

Prof.: *¿Y estáis seguras de que va a dar una traslación?*

Merche: *Sí, porque el ángulo es el mismo.*

Prof.: *¿Cuándo va a dar una traslación?*

Merche: *Cuando el ángulo sea el mismo … Tiene que dar 360. O sea, que la suma de los dos tiene que ser 360. Pero para que quede igual* [que la figura inicial].

....

Prof.: *Entonces lo que tiene que pasar es que la suma de los ángulos sea 360°.. Y en el primer caso que os había puesto, ¿qué pasaba con +70 y -70?*

Merche: *Que daba cero. Que es lo mismo por …* [no se entiende lo que dice].

Prof.: *¿Y va a dar igual si hacemos primero 290 y luego 70 que si hacemos primero 70 y luego 290?*

Ara: *Sí.*

Merche: *El sitio puede que no.*

Ara: *Bueno, pero el ángulo será el mismo. El lugar exacto no tiene por qué, porque si tomamos distintos centros …*

La rapidez de las experimentaciones llevadas a cabo impide que se hagan con frecuencia resúmenes de los resultados obtenidos. Ello, junto al hecho de que el único tiempo que las alumnas dedicaban al tema de la isometrías era el de estas sesiones, provocaba en ocasiones el olvido de algunas relaciones o propiedades necesarias para avanzar. Tal es, por ejemplo, el caso de la composición de giros del mismo centro (actividad semejante a la A7) o, más adelante, otras composiciones que las alumnas asimilaron, justificaron y aplicaron correctamente en su momento, pero que luego no las recordaban. Por ello, como metodología de trabajo si se utiliza esta unidad de enseñanza en una clase real, es necesario que además de descubrir y aplicar las propiedades que corresponden a las diversas actividades propuestas explícitamente, se repasan algunos resultados clave y su demostración general. Tal como hemos organizado las actividades de esta fase y de la fase 4 del tercer nivel, las demostraciones de las relaciones fundamentales no son complejas, sino que sólo hace falta tener presentes y combinar unas pocas propiedades. Estas propiedades permiten conocer de inmediato el movimiento resultante de una composición de giros, así como algunas características de la descomposición de un giro o traslación en producto de giros.

A veces, el planteamiento de las actividades hace pensar que la solución se pueda obtener directamente a partir de los datos, mediante alguna relación simple matemática. Ello provoca en ocasiones respuestas incorrectas. Tal es el caso, por ejemplo, del cálculo del centro del giro resultante de la composición de dos giros (actividad A1), para el cual una respuesta, incorrecta, muy habitual es que corresponde al punto medio de los dos centros de los giros que se componen.

Entre las características generales del tercer nivel de razonamiento está el comienzo de la exigencia de demostración general rigurosa, aunque informal, incluyendo la comprensión de lo que es una demostración, pues los alumnos son capaces de seguir una demostración realizada por otra persona, siempre que las implicaciones que requiera correspondan a relaciones simples entre propiedades conocidas. En la actividad A10 se propone demostrar un resultado ya conocido, que $G(O,\beta°)\circ G(O,\alpha°) = G(O,\alpha°+\beta°)$. Utilizar propiedades o resultados conocidos y aceptados como ciertos por los estudiantes antes de iniciar el acceso a la idea de demostración matemática rigurosa, tiene la ventaja de que se pone el énfasis en la demostración en sí, separándola del proceso de búsqueda y elaboración de una conjetura que, dentro de las características de la forma de pensar en el tercer nivel, es generalmente una etapa previa del trabajo de los estudiantes. Por otra parte, usar propiedades ya aceptadas como ciertas permite discriminar a aquellos estudiantes que todavía están en el segundo nivel, pues éstos no suelen aceptar la necesidad de que haya que demostrar estos resultados. Por lo tanto, con las actividades del tercer nivel de razonamiento se debe romper la idea, característica del segundo nivel, de que los ejemplos (unos pocos por lo general) demuestran la propiedad y convertirla en la idea de que los ejemplos sólo dan confianza en la validez del resultado, pero no seguridad.

También es propio del tercer nivel la comprensión de las definiciones matemáticas, en este caso la de giro, por lo que en la fase 2 se debe empezar a trabajar en este tema. Siguiendo con la actividad A10, para plantear el objetivo de la demostración, en ella se pide a los estudiantes que identifiquen las condiciones de un giro. Las alumnas de Magisterio no tuvieron problemas en ese caso, si bien la profesora guió la actividad mediante preguntas. En este tipo de actividad probablemente sea imprescindible la orientación guiada del profesor para enfocar el proceso a seguir, aunque se presente de manera explícita en el enunciado de la actividad, pues en la secuencia de actividades que proponemos en esta memoria, al igual que sucedió en la experimentación de Magisterio, es la primera vez que se plantea una actividad de este tipo a los estudiantes y, por lo tanto, es muy conveniente seguir la metodología de orientación dirigida propia de la segunda fase de enseñanza.

En respuesta a las preguntas de la profesora, las estudiantes de Magisterio identificaron correctamente las dos características de los giros (equidistancia al centro e invarianza del ángulo de giro). Entre las dos estudiantes fueron respondiendo correctamente a las preguntas de la profesora sobre la identificación de estos datos en el caso de la composición de giros del mismo centro, preguntas que, en realidad, planteaban los sucesivos pasos de la demostración formal.

Después de haber estudiado las diferentes posibilidades de composiciones de giros, las actividades A8 y A9 plantean las mismas propiedades pero en sentido contrario: Descomposición de giros o traslaciones en producto de giros. Estas dos actividades, junto a otras análogas relativas a descomposición en producto de simetrías, planteadas en su momento, son un elemento clave para lograr que los estudiantes comprendan realmente las relaciones entre las diferentes isometrías y puedan llegar a tener una visión global del conjunto de las isometrías del plano.

Estas actividades suelen ser difíciles y nuestra experiencia con numerosos grupos normales de estudiantes de Magisterio nos ha mostrado que la mayor dificultad se encuentra en comprender la existencia de infinitas soluciones (actividades A8C y A9C). En la experimentación con las dos estudiantes de Magisterio, éstas las resolvieron bien, con algunas dificultades o equivocaciones debidas, generalmente, a la novedad de la situación. Así, en la actividad 30 de la experimentación, (actual A8), Merche relacionó sin dificultad los ángulos del giro dado y los giros de la descomposición, pero en A8B, al determinar el centro del segundo factor, Merche calculó el centro del giro que lleva directamente de la figura A (inicial) a la B (imagen). Cuando terminó se dió cuenta del error:

Merche: *Lo que he hecho es ver el centro de ésta* [figura A] *a ésta* [figura B], *pero no sé cómo sacar el otro* [el que se pide en la actividad].

Prof.: *Has obtenido el centro del giro que pasa directamente de A a B, y eso sería un giro con centro ése* [punto] *y ángulo ¿cuánto?*

Merche: *100.*

Prof.: *100°. Pero ahora, ése* [giro] *lo hemos descompuesto en dos, el primero con centro aquél* [señala el punto dado en la actividad], *en O, y ahora hay que hallar el segundo.*

A continuación Merche situó una figura sobre la A y la movió con la mano según G(O, 30°). Al poco tiempo ya se dió cuenta de que, para calcular el centro del segundo giro de la descomposición, debía considerar esta imagen y la figura B. La comprobación de que había asimilado correctamente esta actividad la tuvimos más tarde, al trabajar en la actividad A9, pues Merche ya obtuvo los centros de los dos giros sin equivocarse.

Fase 4 del Nivel 3

Objetivos:

1- Servirse de propiedades conocidas de los giros para:

- Simplificar movimientos en una composición de giros o de giros y traslaciones y conocer todas las características posibles del movimiento resultante. Resolver situaciones generales y casos particulares.

- Descomponer un giro o una traslación en una composición de giros o de giros y traslaciones. Resolver situaciones generales y casos particulares.

- Descubrir, aprender y utilizar técnicas para pasar de una figura a otra mediante una composición de giros o de giros y traslaciones.

2- Comprender el planteamiento y desarrollo de demostraciones formales sencillas.

3- Adaptar demostraciones que se hayan presentado anteriormente, cuando la variación de planteamiento y desarrollo es pequeña.

4- Completar demostraciones, realizando algunas implicaciones simples omitidas.

Actividades:

A1- Aplicar a la figura F (se da la figura) la composición $G(O,-145°)\circ T_a$ (se dan O y a). ¿Qué información sobre la imagen final se puede tener antes de empezar a realizar la composición? ¿Qué se puede decir acerca de la inclinación de la imagen final? ¿Qué tipo de isometría permite pasar directamente de la figura F a su imagen por la composición? ¿Qué características se pueden conocer de esa isometría antes de realizar los movimientos?

Comprobar las respuestas anteriores aplicando a F la composición $G(O,-145°)\circ T_a$.

Repetir el ejercicio aplicando a la figura G la composición $T_b\circ G(Q,75°)$ (se dan Q y b). Repetir el ejercicio aplicando a la figura G la composición $G(Q,75°)\circ T_b$. ¿Qué hay de común y qué de diferente en los resultados de estas dos composiciones? ¿Es conmutativa la composición de un giro y una traslación?

Generalizar los resultados de los ejercicios anteriores: El movimiento resultante de la composición de un giro y una traslación es …

A2- Dada la composición G(O,60°)∘G(O,-50°)∘G(P,80°)∘G(P,-100°), sin aplicar las isometrías de la composición a ninguna figura concreta, simplificar al máximo la composición, decir qué tipo de isometría equivale a la composición y dar todas las características posibles del movimiento resultante. Para responder, recordar las propiedades conocidas sobre la inclinación de la imagen de una figura por un giro.

Comprobar después el resultado marcando en una hoja de papel los centros de giro, obteniendo la imagen de una figura F, y determinando por completo la isometría equivalente a la composición.

Repetir el ejercicio con las siguientes composiciones: G(P,60°)∘G(R,30°)∘T_a; G(R,30°)∘T_a∘G(P,60°); G(P,60°)∘G(R,-40°)∘T_a∘G(S,-20°). Marcar también el vector de traslación para realizar la segunda parte del ejercicio.

A3- Dadas dos figuras F y F' congruentes de la misma orientación y dados los tipos y la cantidad de isometrías que deben formar parte de una composición que permita pasar de F a F', se pide justificar si el ejercicio tendrá solución o no y, en caso afirmativo, obtener varias soluciones, generando técnicas eficaces no sólo para este caso concreto sino para todos los casos análogos.

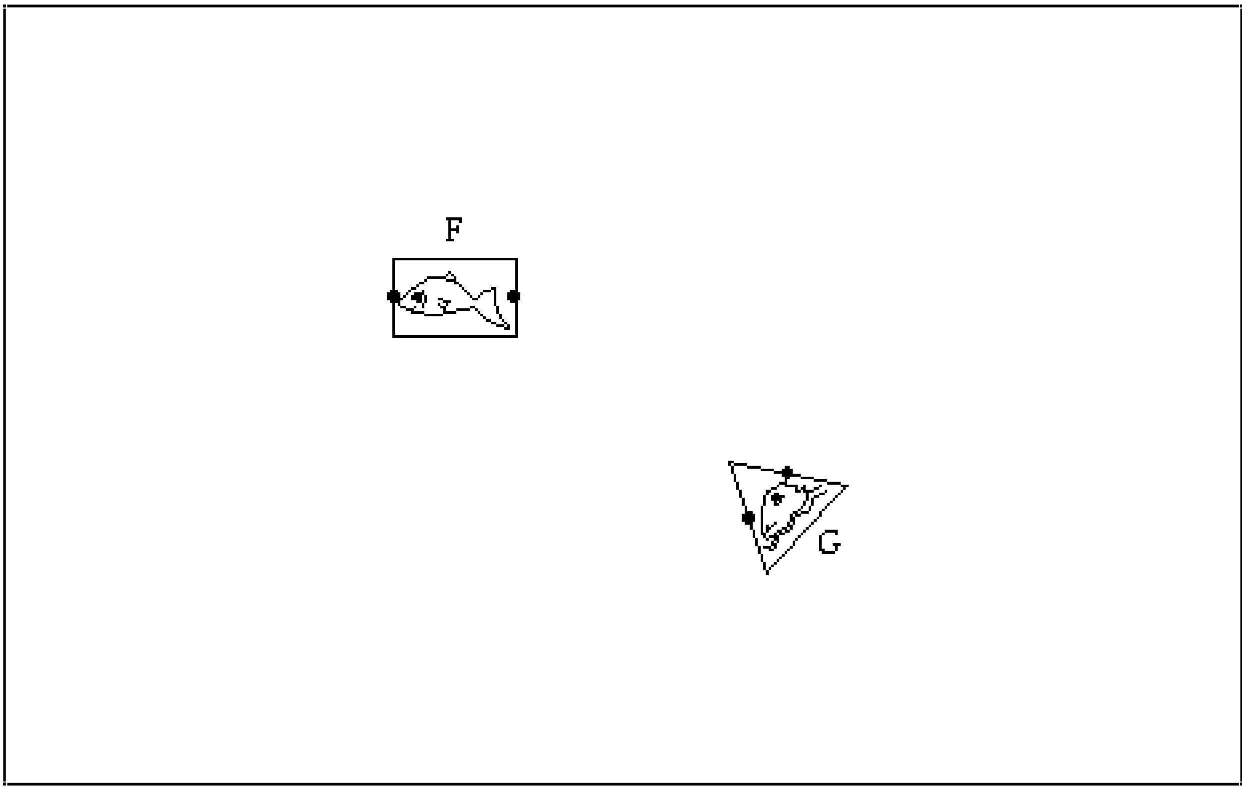
Ejemplo: Se dan dos figuras giradas y hay que resolver el ejercicio mediante una composición de dos giros y una traslación.

(Al plantear los ejercicios, proponer algunos en los que no esté prefijada ninguna de las isometrías de manera concreta, y en otros en los que sí lo estén. Proponer unos casos con solución y otros que no la tengan).

A4- A partir de la figura F, construir un friso cuyo sistema generador sean los giros G(O,180°) y G(P,180°). Repetir el ejercicio con la figura G.

Una vez construido el friso, seleccionar dos celdas A y B y encontrar una isometría simple que permita pasar de A a B. Encontrar también varias composiciones de movimientos que permitan pasar de A a B. Repetir el ejercicio con varios pares de celdas.

Repetir el ejercicio construyendo otros frisos y mosaicos cuyos sistemas generadores estén formados sólo por giros y/o traslaciones.



A5- Introducción a las demostraciones formales: Los estudiantes deben

- completar alguna implicación,
- repetir una demostración que se da, identificando el argumento general de razonamiento y justificando cada uno de los pasos,
- modificar una demostración ya conocida adaptándola a otro enunciado análogo al anterior.

Ejemplo: Desarrollar la demostración de que los giros son isometrías, enunciando este teorema de la forma siguiente: *Dado un segmento PQ, demostrar, aplicando la definición de giro, que su imagen por el giro G(O,α°) tiene su misma longitud.* El trabajo de los alumnos consistirá en resumir el planteamiento general de la demostración, una vez realizada bajo la dirección del profesor, justificar algún paso de la demostración, identificar algún elemento de la misma, y repetirla con un planteamiento gráfico distinto.

A6- Dados varios enunciados de propiedades de los giros, decir si son verdaderos o falsos y hacer las demostraciones correspondientes. Algunos enunciados pueden ser:

- La imagen de una línea recta por un giro es una línea recta.
- Dado G(O,α°), para todo punto P ≠ O, si P' es su imagen por el giro, se cumple que P ≠ P'.

- Dado $G(O,\alpha°)$, para todo par de puntos P y Q, si P' y Q' son sus imágenes por el giro, se cumple: i) d(P,P') = d(Q,Q'). ii) d(P,Q) = d(P',Q'). iii) d(P,Q') = d(P',Q).

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

Las actividades de la fase 4 del tercer nivel tienen como objetivos principales conseguir un aprendizaje más completo y profundo de los giros y sus relaciones con las otras isometrías e iniciar el camino de los estudiantes hacia el razonamiento matemático formal. Ninguno de estos objetivos se pueden lograr por completo sólo con las actividades de la unidad de giros que proponemos para este nivel, sino que necesita del complemento de las actividades de traslaciones y simetrías.

De hecho, en la experimentación llevada a cabo en Magisterio, las actividades de composición y descomposición correspondientes a esta fase de la unidad de giros se llevaron a cabo conjuntamente con las correspondientes a las simetrías; ello pone de manifiesto una posibilidad de relación, por parte de las alumnas, de las diferentes isometrías y sus propiedades, que es posible y deseable como objetivo a conseguir para el tercer nivel de Van Hiele, ya que una de las habilidades que deben desarrollar los estudiantes para alcanzar este nivel de razonamiento es la capacidad de relacionar diferentes familias de objetos matemáticos y sus propiedades. Por lo tanto, el hecho de que hayamos organizado la unidad de enseñanza que presentamos en esta memoria en tres partes disjuntas, una para cada isometría, no quiere decir que propongamos la enseñanza lineal, de cada isometría independiente de las demás.

En esta fase, más que una secuencia completa de actividades, hemos planteado diversos tipos, pues la variedad de posibilidades es grande, tanto en enunciados como en dificultad. Por lo tanto, creemos que en cada momento el profesor debe seleccionar aquellas actividades concretas que se ajusten mejor a la marcha de su clase y a la adquisición del tercer nivel que tengan sus alumnos.

Las actividades A1 a A4 se orientan al primer objetivo y todas ellas piden a los estudiantes realizar composiciones o descomposiciones de giros y traslaciones.

La actividad A1 fue una de las últimas actividades de composición que se presentaron en la experimentación de giros realizada en Magisterio. En concreto, las alumnas debían aplicar $T_a \circ G(O,90°)$ a una figura y determinar la isometría equivalente (actividad 31 de la experimentación). En las actividades de las fases y niveles anteriores no había aparecido esta composición explícitamente, por lo que esta actividad se enmarca correctamente dentro del objetivo de la fase 4 de plantear problemas en los que se deban aplicar conocimientos adquiridos previamente a situaciones nuevas. En la siguiente transcripción se observa que las alumnas (en particular Merche, que es la que interviene) ya tienen un dominio correcto de la influencia de cada isometría en la posición de las imágenes:

Prof.: *Sin hacer nada, ¿sabes algo de la figura final?*
Merche: *Sí. Que será así* [Merche coloca una pieza girada 90° respecto a la original] *Porque la traslación no cambia su inclinación.*
Después de que Merche haya efectuado la composición, la profesora le dice:
Prof.: *Haz la misma composición, pero al revés. ¿Qué crees que va a pasar?*
Merche: *Será una trasladada de ésta* [de la imagen anterior].
Prof.: *¿Saldrá en el mismo sitio o no?*
Merche: *No, porque hay que aplicar la traslación desde aquí* [señala la figura inicial].

La actividad A2 es una extensión de las actividades A5 a A7 de la fase 2 y de la A1 de esta fase, pues plantea el mismo tipo de ejercicios, pero en un contexto abstracto, sin el soporte de las figuras concretas. La segunda parte de cada ejercicio debe ser una comprobación de las respuestas que acaban de dar los alumnos, por lo que las figuras, los centros de giro y los vectores se les darán sólo después de que los estudiantes hayan contestado a las preguntas anteriores. De esta manera, planteamos explícitamente el cambio del papel de los ejemplos en el nivel 2 (los ejemplos son la demostración) al que tienen en los niveles 3 y 4 (simples comprobaciones, antes o después de hacer la demostración, y contraejemplos).

Dentro de una serie de ejercicios en los que debían determinar el resultado de composiciones de giros, la profesora propuso la composición G(Q,-10°)∘G(P,-50°)∘ G(O,150°) (actividad 29 de la experimentación). Antes de realizar en el papel ningún giro, Merche hizo esta reflexión:

Merche: *Será 90 positivos, que será una traslación de ésta, ¿no?* [Merche ha girado 90° la pieza original, tomando un vértice como centro].
....
Prof.: *Para saber dónde está la figura, ¿cuántos puntos necesitas conocer?*
Merche: *Dos, ¿no?*
Prof.: *¿Y si sabes que tiene que estar paralela a ésa* [la pieza girada 90°].
Merche: *Uno.*

En el ejercicio siguiente se plantea la composición G(Q,140°)∘G(P,180°)∘G(O,40°), en la que la suma de los ángulos es 360°:

Merche: *Se queda igual la figura, en el mismo sitio.*
Prof.: *¿En el mismo sitio?*
Merche: *Claro. Da 360. Bueno, se quedaría igual la figura, no en el mismo sitio.*

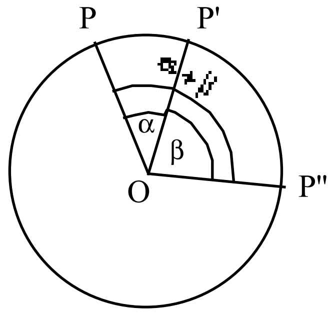
Merche utiliza de manera efectiva lo que aprendió en actividades anteriores, como se ve en el procedimiento que emplea para resolver el ejercicio. En concreto, especifica que toma como punto para obtener la imagen O, que es un vértice de la figura original y el primer centro de giro:

Merche: *Ya sé que G(O,40°) va a dejar O igual. La figura hay que girarla 40°, pero eso me da igual, porque yo sé que O está ahí.*

Respecto a las demostraciones, en las actividades A5 y A6 sólo presentamos unos ejemplos, en los que se conjuga la definición de giro, estudiada en la fase 2, con la comprensión inicial de una demostración formal, también introducida en la fase 2, y el papel de los ejemplo y contraejemplos en las demostraciones, ello dentro de la visión de las demostraciones propia del tercer nivel.

En la actividad A5 proponemos demostrar que los giros son isometrías. Al redactar el enunciado de este teorema, hemos tenido en cuenta las características del tipo de razonamiento del tercer nivel, lo cual nos ha llevado a no proponer el enunciado formal "demostrar que los giros son isometrías" ya que, para los estudiantes que están progresando en la adquisición del tercer nivel, esta formulación general puede resultar demasiado evidente para que sientan la necesidad de convertirla en objeto de demostración, pues la utilización de piezas de papel como material básico en la experimentación lleva implícita la existencia de esa propiedad. En efecto, los resúmenes de las sesiones desarrolladas en la experimentación de Magisterio muestran que las estudiantes no veían la necesidad de demostrar esta propiedad u otras del mismo estilo.

En la experimentación de Magisterio, propusimos la demostración gráfica de que $G(O,\alpha°)\ \ G(O,\beta°) = G(O,\alpha°+\beta°)$ (actividad 26 de la experimentación). Las estudiantes identificaron correctamente las dos componentes de la definición de giro que se tenían que usar para determinar el giro $G(O,\alpha°+\beta°)$ y contestaban correctamente a las preguntas que les iba formulando la profesora como guión de la demostración. Por ejemplo, Merche justificó la igualdad de distancias al centro de giro de un punto y su imagen final *porque están en la misma circunferencia.* El dibujo que realizaron las alumnas en el transcurso de ese proceso es el que mostramos.



La actividad A6 se planteó en Magisterio a través de una serie de 10 enunciados (actividad 25 de la experimentación); los resúmenes de la experimentación de Magisterio que presentamos en el anexo II describen la actuación de las estudiantes en cinco de esos enunciados. Para demostrar la certeza de un enunciado, en ocasiones, las alumnas se basaban en ejemplos concretos, hechos en ese momento o recordados de sesiones anteriores; sin embargo, en otras ocasiones hacían referencia a la definición de giro, como base para su demostración. Esto muestra que las estudiantes se encontraban en transición del segundo al tercer nivel de razonamiento. Uno de los enunciados propuestos fue:

Prof.: *La distancia de un punto a su imagen siempre es la misma. O sea, la distancia de P a P' es la misma que la de Q a Q', sean cuales sean los puntos P y Q.*

En un primer momento, las estudiantes dijeron que sí era cierta la propiedad, pero al tratar de justificarlo quedó claro que habían entendido mal el enunciado. Tras una aclaración por la profesora, empezaron de nuevo:

Merche: *En un giro no* [no es cierta la propiedad]. *Si no, las circunferencias tendrían que estar a la misma … Todo tendría que estar a la misma línea, ¿no?*
Ara: *Tendrían que estar todos los puntos sobre la misma circunferencia.*

En otro momento del diálogo, Merche se sirvió de dos dibujos para demostrar su respuesta de que dichas distancias no siempre eran iguales. Vemos, por lo tanto, que para una correcta adquisición de la idea de demostración lógica es necesario plantear tanto propiedades verdaderas como otras total o parcialmente falsas, para así trabajar en el papel de los ejemplos como método válido de demostración de la falsedad pero no de la veracidad de un enunciado.

Otro enunciado incluido en esa actividad fue:

Prof.: *El ángulo POP', siendo O el centro del giro, es siempre el mismo, sea cual sea el punto P.*

La extrema evidencia de esta propiedad para las estudiantes hizo que trataran de buscar algo oculto y que creyeran que había algo en el enunciado que no entendían. Merche, con una expresión de convencimiento total y de semi-incredulidad de que ésa pudiera ser la pregunta planteada, contestó:

Merche: *El ángulo sí.*
Prof.: *¿Por qué?*
Merche: *¡Porque es un giro!*

Para terminar los comentarios sobre la unidad de enseñanza de los giros, queremos recalcar que, en las experimentaciones, especialmente en la de Magisterio, que ha sido la más larga y densa, se ha hecho patente la necesidad de resumir y recordar de tiempo en tiempo las propiedades fundamentales, de manera que los alumnos puedan recordar o rehacer rápidamente la propiedad necesaria para utilizarla en un momento determinado. Esto es especialmente necesario cuando se alcanza el tercer nivel y se empieza a trabajar en la realización de demostraciones informales.

Como hemos señalado anteriormente en esta memoria, en las experimentaciones llevadas a cabo no incidimos suficientemente en este aspecto, lo cual provocaba en ocasiones olvidos que no facilitaban el progreso del razonamiento e impedían la visión completa de las relaciones entre las isometrías necesaria para resolver una situación concreta.

Por ejemplo, incluso al final de la última sesión dedicada a los giros, cuando estaba trabajando en la composición $T_a \circ G(O,90°)$ que hemos comentado con anterioridad, Merche (Magisterio) se olvidaba en algún momento de que la composición de giros del mismo centro es conmutativa (actividad 31 de la experimentación):

....
Prof.: *Entonces, ¿la composición de traslación con giro es conmutativa o no?*
Merche: [Silencio]
Prof.: *O sea, si compones un giro con centro en O y ángulo 30° y luego un giro con centro en O y ángulo 40°, ¿daba igual el giro que actuaba primero? Con giros del mismo centro.*

Merche: *No me acuerdo.*

Generalmente, cuando la profesora le orientaba de alguna manera, mediante alguna pregunta dirigida o un dato, Merche recordaba el resultado o la deducía con rapidez, dando la solución correcta.

2.8. Propuesta de enseñanza de las Simetrías.

SIMETRÍAS: NIVEL 1

Objetivos:

Las actividades que planteamos para este nivel pretenden lograr los objetivos generales siguientes, que más adelante desglosaremos en las diferentes fases de aprendizaje:

1- Reconocimiento de la característica que poseen las simetrías de ser **iso**metrías (el tamaño y la forma de las figuras se conservan).

2- Reconocimiento y realización de simetrías de manera directa sirviéndose de materiales auxiliares (plegado y calcado, plegado y recorte, mira, espejo).

3- Descubrimiento y empleo de características visuales de las simetrías: Cambio de semiplano, inversión de la figura, equidistancia al eje.

4- Reconocimiento y realización de simetrías con diferentes posiciones de los ejes y de las figuras, con y sin ayuda de material auxiliar.

5- Utilización de vocabulario adecuado relacionado con las simetrías: Nombres de los instrumentos usados, simetría, eje, figura simétrica, imagen, distancia, …

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

Dado que el razonamiento del primer nivel se basa en la consideración visual y global de los objetos matemáticos, las propiedades indicadas en los objetivos tendrán una fuerte componente gráfica o manipulativa y para utilizarlas no será necesaria la descomposición o el análisis local de las figuras, por lo que los estudiantes que razonen en el nivel 1 podrán identificar y usar dichas propiedades.

Por ejemplo, en el primer nivel, el reconocimiento de que las figuras no se hacen más grandes ni más pequeñas ni modifican su forma (primer objetivo) se puede llevar a cabo mediante la observación de reflejos en espejos o miras.

En las actividades de la secuencia propuesta para el nivel 1 se emplean las técnicas de reflejo (mediante el mira o el espejo) y plegado, seguido de dibujo o recorte para colocar piezas en determinadas posiciones, dibujar figuras simétricas y obtener figuras con siluetas simétricas.

El segundo de los objetivos especificados es esencial en el primer nivel de razonamiento, pues los alumnos empiezan a descubrir las simetrías y para ello se hace necesario utilizar medios que las produzcan de forma automática. Al mismo tiempo, esos medios se pueden emplear como correctores, aunque no sólo en este nivel, por lo que los alumnos deben comprender bien sus características y posibilidades y adquirir destreza en su manejo.

En este nivel de razonamiento no se han incluido ejercicios de obtención de las simétricas de figuras que corten al eje, pues para resolverlos no es suficiente con la comprensión visual global propia del nivel 1, sino que es necesario considerar la descomposición de las figuras en partes y la recomposición de las imágenes correspondientes.

Respecto al reconocimiento y utilización de las propiedades indicadas en el objetivo 3, conviene hacer algunas puntualizaciones:

El cambio de semiplano es una característica de apreciación global, y por lo tanto de nivel 1. Las actividades se orientarán a poner de relieve la función del eje de simetría como separador de una figura y su imagen.

En este nivel los estudiantes pueden apreciar algunos aspectos de la inversión de la figura, pero por lo general no se llega a producir una comprensión completa de esta propiedad. Los estudiantes poseen cierta idea gráfica de que la figura se coloca "al revés", pero no diferencian siempre las simetrías de ciertos giros (especialmente los de 180°) de la figura que también la colocan "al revés". Será en el segundo nivel de razonamiento cuando se comprenda por completo la propiedad de inversión, al ser capaces los estudiantes de centrar la atención en las características matemáticas de los movimientos.

Algo parecido sucede con la equidistancia: Al incluirla como objetivo en el nivel 1, no se pretende conseguir que los alumnos la empleen como objeto de estudio en sí misma, sino más bien que, en su consideración global de la figura dada y su imagen mediante una simetría, los alumnos sean capaces de tener en cuenta si la imagen debe tocar o no al eje, según la colocación de la figura original, y, en segundo término, que también puedan prestar atención a la separación correcta (o con bastante aproximación) del eje cuando se trate de figuras sencillas (triángulos equiláteros, círculos, cuadrados, etc.) las cuales, al igual que los ejes, estén situadas en posiciones familiares para los estudiantes. Esto es especialmente importante con los niños de los primeros cursos de Enseñanza Primaria, cuyas concepciones de estas figuras están ligadas en ocasiones a determinadas posiciones prototípicas, por ejemplo con una base horizontal (Hershkowitz, 1990; Vinner, Hershkowitz, 1983).

De todas maneras, es importante tener en cuenta que los estudiantes prestan atención global a la figura, por lo que alguna de estas características puede dejar de ser tenida en cuenta, y si el profesor hace mención explícita de ella, al intentar arreglar la figura imagen se puede perder alguna de las otras características de las simetrías.

La perpendicularidad, respecto al eje de simetría, del segmento que une un punto con su imagen no es una propiedad que pueda ser estudiada por alumnos en el primer nivel de razonamiento, pues no se trata de una propiedad global de las figuras, sino que su reconocimiento requiere un análisis exacto de las figuras y los puntos que las componen. En el nivel 1 sólo se puede llegar a una identificación difusa de la perpendicularidad, mediante la idea de que las imágenes están "en frente de" las figuras originales. En cualquier caso, los estudiantes del primer nivel deben ser capaces de identificar como no simétricos aquellos pares de figuras con una acusada desviación respecto de la perpendicular. Con esto se sentará la base para el estudio detallado de esta propiedad en las actividades del segundo nivel de razonamiento.

El objetivo 4 se refiere a situaciones que usualmente corresponden a la visión primaria de simetría que, bien por la experiencia cotidiana o por su mayor sencillez, se pueden resolver mediante una concepción global de simetría.

El quinto objetivo corresponde a la introducción de vocabulario específico de las simetrías, adecuado al de los alumnos. La concreción de este objetivo en una lista específica de términos debe depender de la edad y los conocimientos previos geométricos de los estudiantes con los que se vaya a trabajar, pues en algunos casos habrá que sustituir ciertos términos matemáticos usuales por otros más significativos para ellos y, por lo tanto, más fáciles de usar por su parte.

Fase 1 del Nivel 1

Objetivos:

1- Toma de contacto con el concepto de simetría.

2- Información sobre los conocimientos previos elementales que tienen los alumnos acerca de las simetrías.

3- Toma de contacto con materiales de ayuda (mira, espejo) y métodos informales para la realización de simetrías u obtención de figuras simétricas (reflejo, plegado y calcado, plegado y recorte).

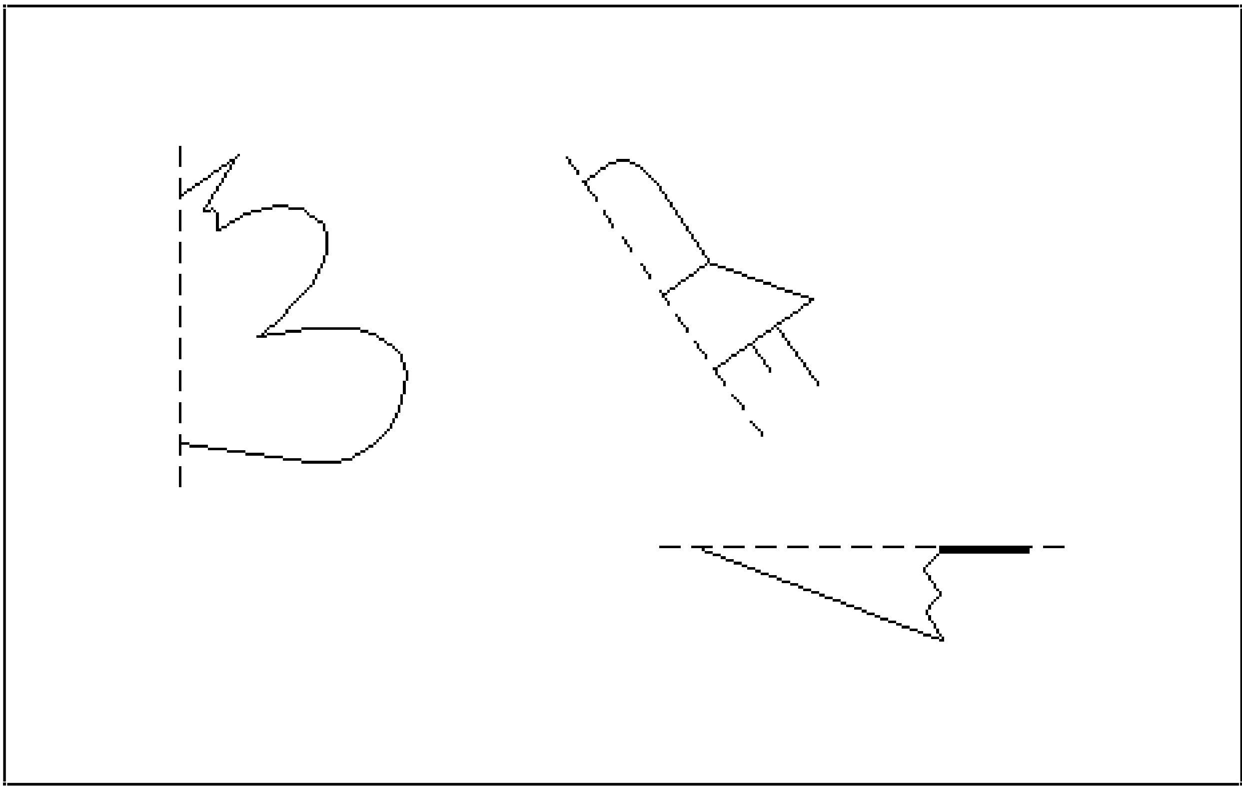
4- Información sobre el vocabulario que poseen los estudiantes al hablar de simetrías, unificación de términos y significados entre profesor y alumnos e introducción de vocabulario específico nuevo (mira, espejo, eje, …).

Actividades:

A1- Los alumnos juegan con espejos y con miras. Los colocan en distintos lugares, observan las imágenes reflejadas y copian lo que se ve a través del mira.

A2- Por parejas, los estudiantes hacen de figura y de imagen, respectivamente, en un espejo imaginario. El estudiante que actúa de persona real realiza movimientos y el que actúa de persona reflejo los debe reproducir. En caso de que haya un espejo suficientemente grande en el aula, utilizarlo previamente.

A3- Obtener las figuras completas plegando por la línea señalada y recortando.



A4- En un conjunto de figuras recortadas que se les dan, los alumnos deben observar la existencia de dos tipos de figuras diferentes (inversas entre sí). Después, emplear el mira para colocar una figura como imagen de la otra.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

El profesor debe obtener información sobre los conocimientos de sus alumnos en relación con las simetrías, a través de los ejercicios de esta fase, observando lo que hacen los estudiantes y formulándoles preguntas sobre qué creen que va a salir o por qué se ha obtenido cierto resultado. Si los alumnos ya han estudiado con anterioridad este movimiento, el profesor puede plantear ejercicios de niveles de razonamiento cada vez más elevados para averiguar dónde empiezan las carencias de los estudiantes.

Una de las ventajas de la simetría es que hay diversos materiales (espejo y mira en nuestro caso) que permiten su introducción fácilmente. A través del empleo libre de esos materiales en la actividad A1, los alumnos empiezan a familiarizarse con las figuras simétricas. Los alumnos de todos los cursos en los que hemos experimentado con el espejo y el mira descubrieron pronto las posibilidades de estos materiales para obtener ciertas figuras y exploraron con interés diversas posibilidades de estos materiales, que explicitan diferentes aspectos de las simetrías. En esta actividad no es necesario usar unas láminas especialmente estructuradas, preparadas por el profesor, sino que se pueden emplear figuras planas y objetos

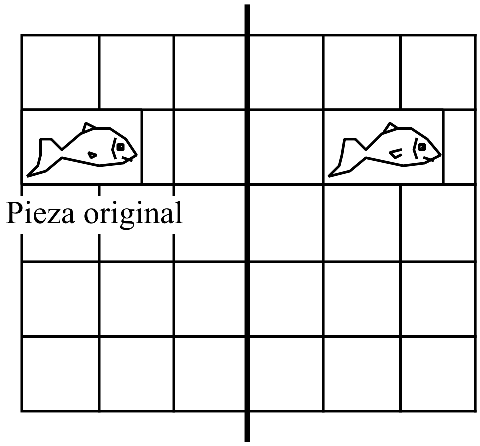
3-dimensionales; los estudiantes deben tener libertad para colocar las figuras y los espejos o miras en posiciones muy variadas.

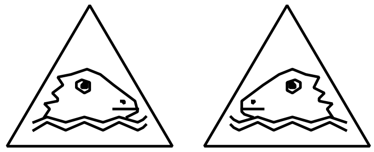
Asimismo, la interpretación de imagen a través de un espejo que se presenta en la actividad A2 conecta una experiencia usual (peinarse, por ejemplo) con el objetivo de estudio. Esta actividad se ha utilizado en cursos, desde 4º hasta 8º de E.G.B., en experiencias no presentadas en esta tesis, y resultó efectiva, pues el conjunto de la clase reconoció inmediatamente los errores cometidos por el alumno "imagen" y éste al poco tiempo actuó sin equivocarse.

Las técnicas de plegar y recortar o plegar y calcar son estrategias empleadas en la mayoría de los colegios desde los primeros cursos de Enseñanza Primaria, e incluso de Preescolar, donde se recurre con frecuencia al plegado y picado. En ese caso, los ejercicios de A3 le dan un nuevo enfoque a algo ya conocido por los niños, pues con frecuencia estas actividades tienen lugar en las clases de expresión plástica y no están conectadas con las matemáticas.

En las experiencias que hemos llevado a cabo, todos los alumnos tenían cierta familiaridad con el plegado y recorte, por lo que con alumnos de 1º y 3º de E.G.B. estos ejercicios resultaron más sencillos que otros que les habíamos propuesto con anterioridad. Por lo tanto, esas primeras actividades que utilizamos entonces son más apropiadas para una fase posterior. En nuestras experiencias quedó clara la conveniencia de utilizar el plegado y recorte y/o plegado y dibujo en esta primera fase de toma de contacto de los alumnos con las simetrías.

Dentro de lo que es una introducción al trabajo del primer nivel, en la actividad A4 destaca la existencia de una diferencia (la inversión) entre las figuras original e imagen. En las experimentaciones realizadas, en 1° de E.G.B. se cometen algunas equivocaciones en la selección de la pieza inversa; en el dibujo de la izquierda de la página siguiente mostramos la solución de Javier a un ejercicio de la actividad 8. De todos modos, cuando las dos figuras inversas (o sea, con distinta orientación en sus ángulos) están colocadas una al lado de la otra, con la misma inclinación (ver dibujo de la derecha), si los niños se fijan entonces sí son capaces de distinguirlas sin excesiva dificultad, usando explicaciones como: *Que unos miran para acá y otros para allá.*





La primera actividad de la experiencia que realizaron los alumnos de 3º fue la identificación de piezas inversas entre sí e inmediatamente supieron distinguirlas. También la expresión que emplearon los niños de 3º fue: *Una mira hacia un sitio y otra hacia otro.*

Por ello nos parece acertado plantear en la fase de información la distinción entre figuras inversas cuyo contorno exterior sean siluetas irregulares, en lugar de polígonos, pues así se sugiere la inversión de manera más acusada.

Fase 2 del Nivel 1

Objetivos:

1- Reconocimiento de la característica de las simetrías de ser isometrías (no cambia el tamaño ni la forma de las figuras).

2- Introducción y utilización de vocabulario básico: Figura simétrica, simetría, eje, imagen, …

3- Empleo correcto, en cualquier posición de eje y figura, de los materiales y técnicas de realización de simetrías: Espejo, mira, plegado y recorte, plegado y dibujo.

4- Reconocimiento del cambio de semiplano y selección del semiplano adecuado sin recurrir a instrumentos auxiliares, en cualquier posición de eje y figura.

5- Afianzamiento y utilización de la inversión de las figuras simétricas.

6- Descubrimiento, reconocimiento y utilización de la equidistancia de manera visual primaria: Tocando al eje / separadas del eje.

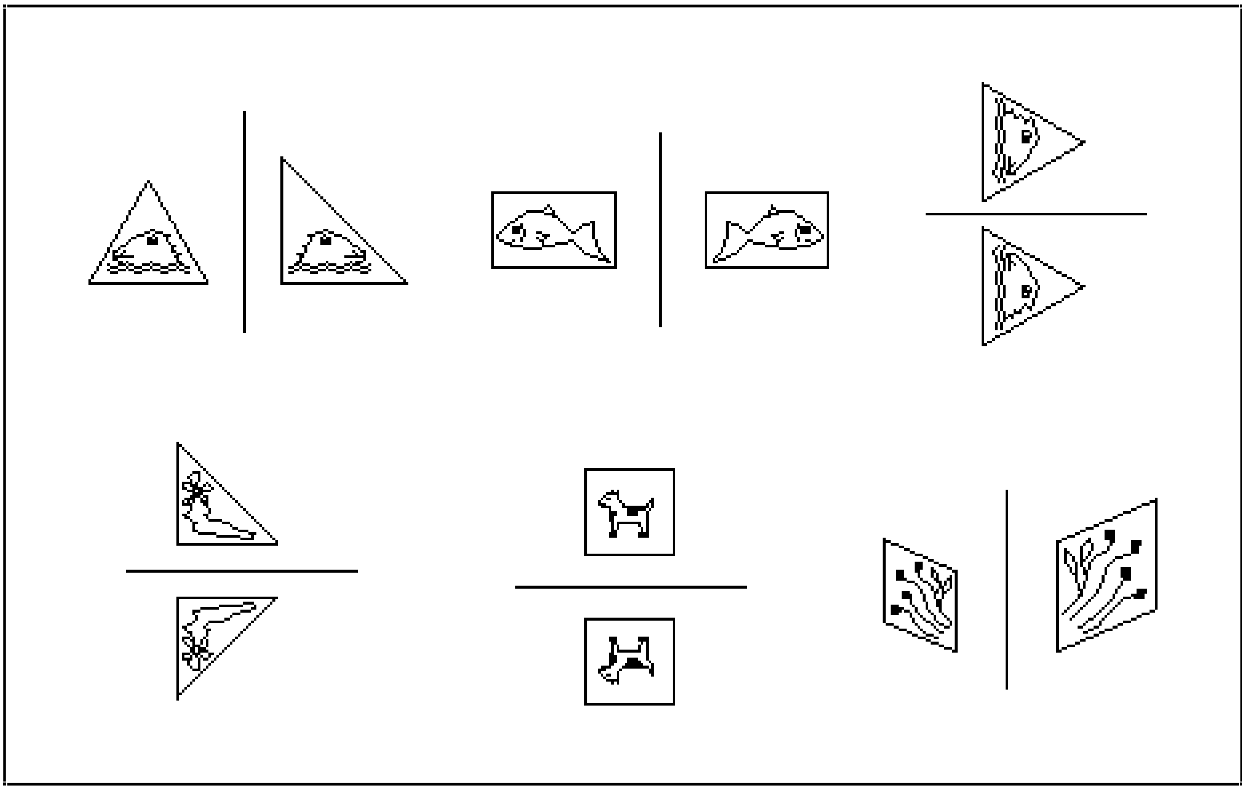
7- Reconocimiento de pares de figuras simétricas / no simétricas. Los pares no simétricos deben corresponder a ausencia de equidistancia (cambio de tocar el eje a no tocarlo), carencia de inversión o ausencia de cambio de semiplano.

8- Obtención aproximada del eje de simetría de dos figuras con el mira.

9- Realización aproximada de simetrías, con ayuda puntual de materiales auxiliares, cuando los ejes y las figuras se encuentran en posiciones sencillas.

Actividades:

A1- Reconocer las figuras que se corresponden mediante una simetría, en un conjunto de figuras en las que los casos afirmativos no presentan dificultades en cuanto a posiciones de eje y de figuras y los negativos corresponden a modificaciones de la figura, ya sea en forma o en tamaño.



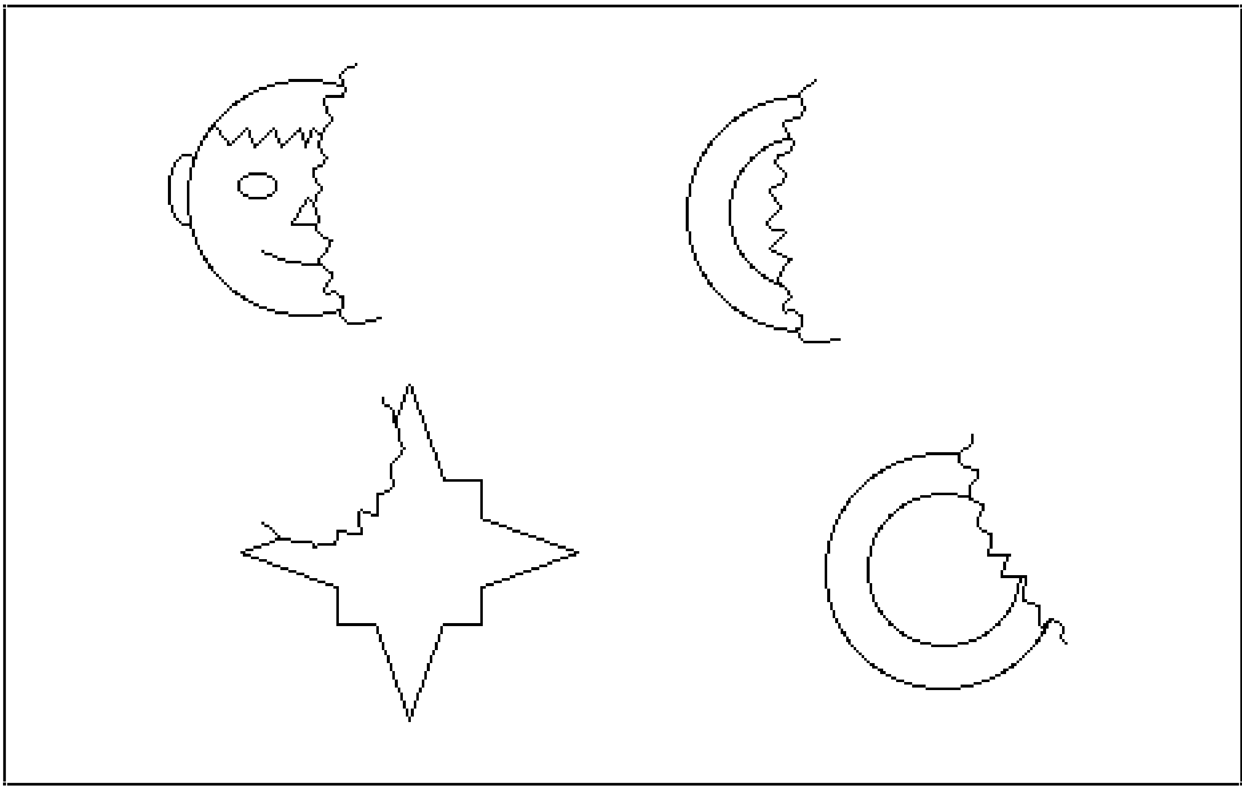
A2[1]- A) Colocando el espejo o el mira sobre una figura de la lámina, conseguir que la figura se vea completa.

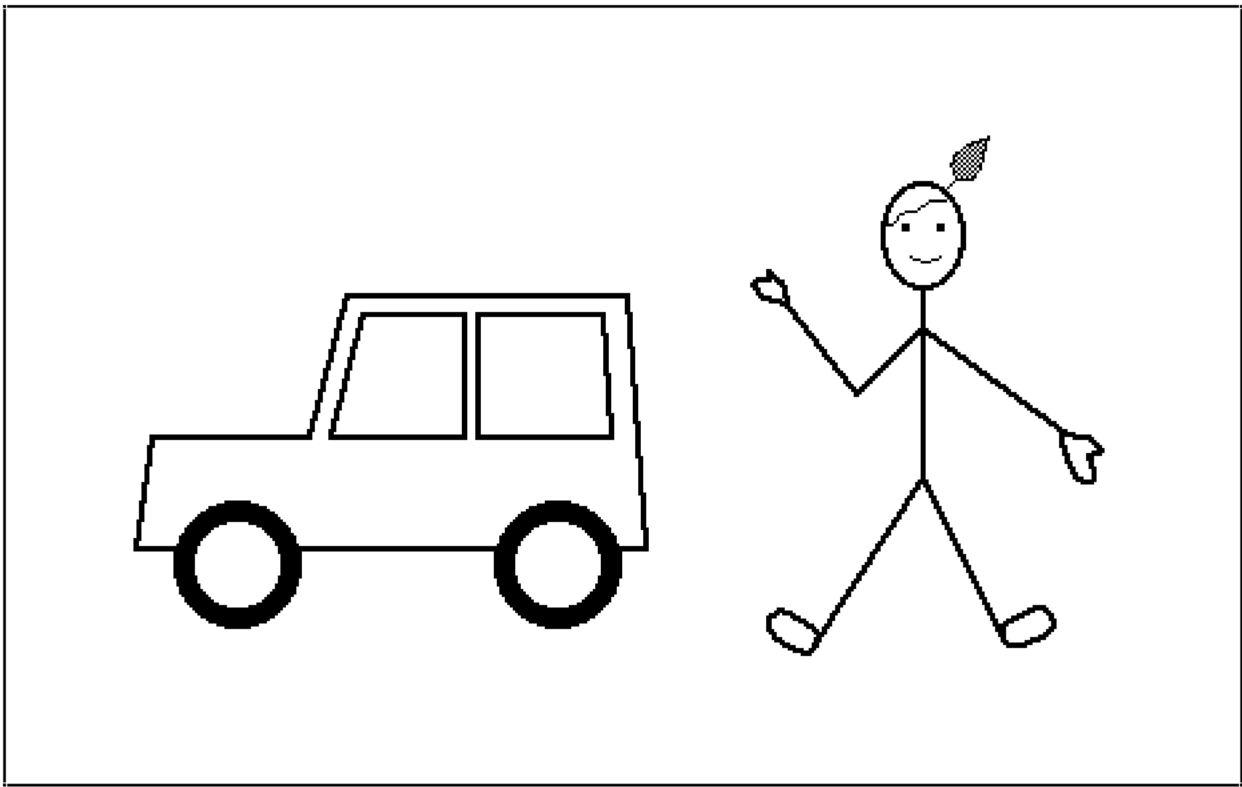
B) Colocando el espejo o el mira sobre la lámina, conseguir que se vean dos coches / hombres. Hacer que los dos coches / hombres se acerquen y se alejen. En el caso del hombre, conseguir también algunas imágenes no usuales, como, por ejemplo, un hombre sin pluma o con dos plumas.

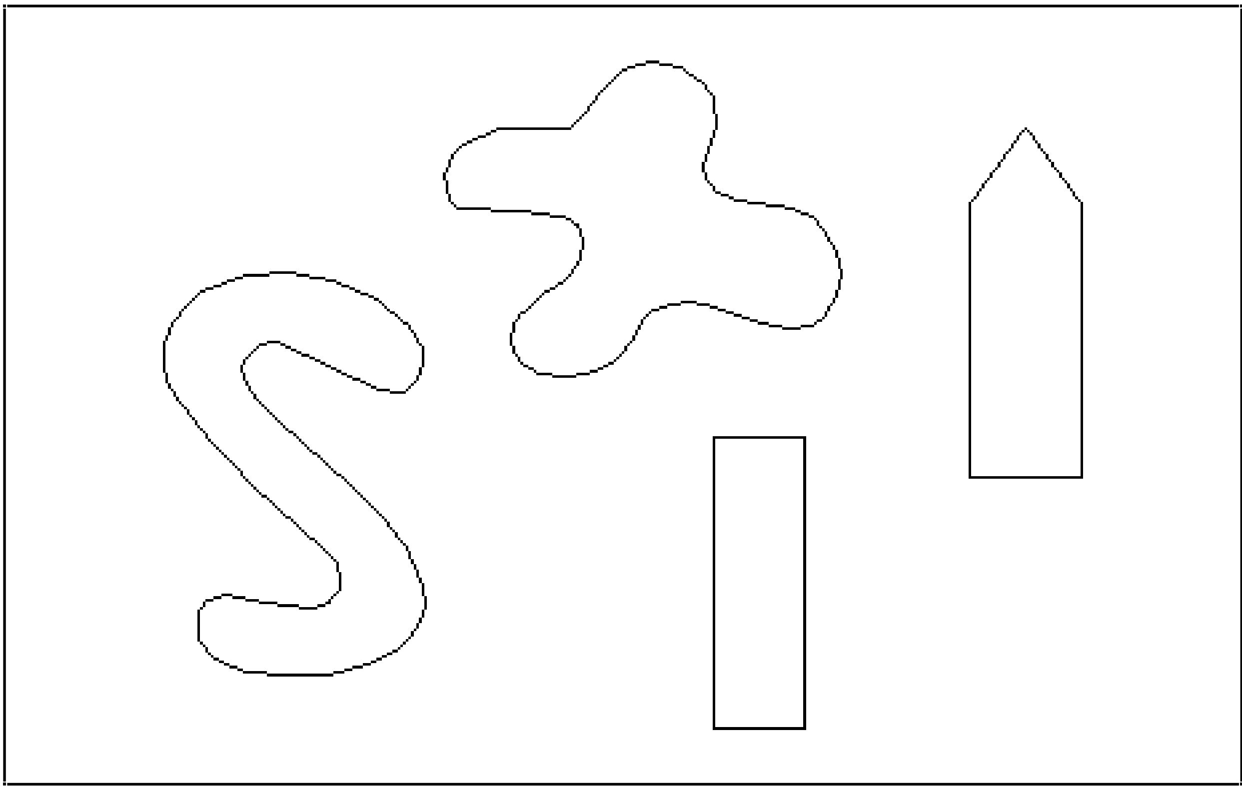
C) Colocando el espejo o el mira sobre la lámina, conseguir algunas transformaciones de las figuras, como, por ejemplo, un palo más / menos largo o grueso.

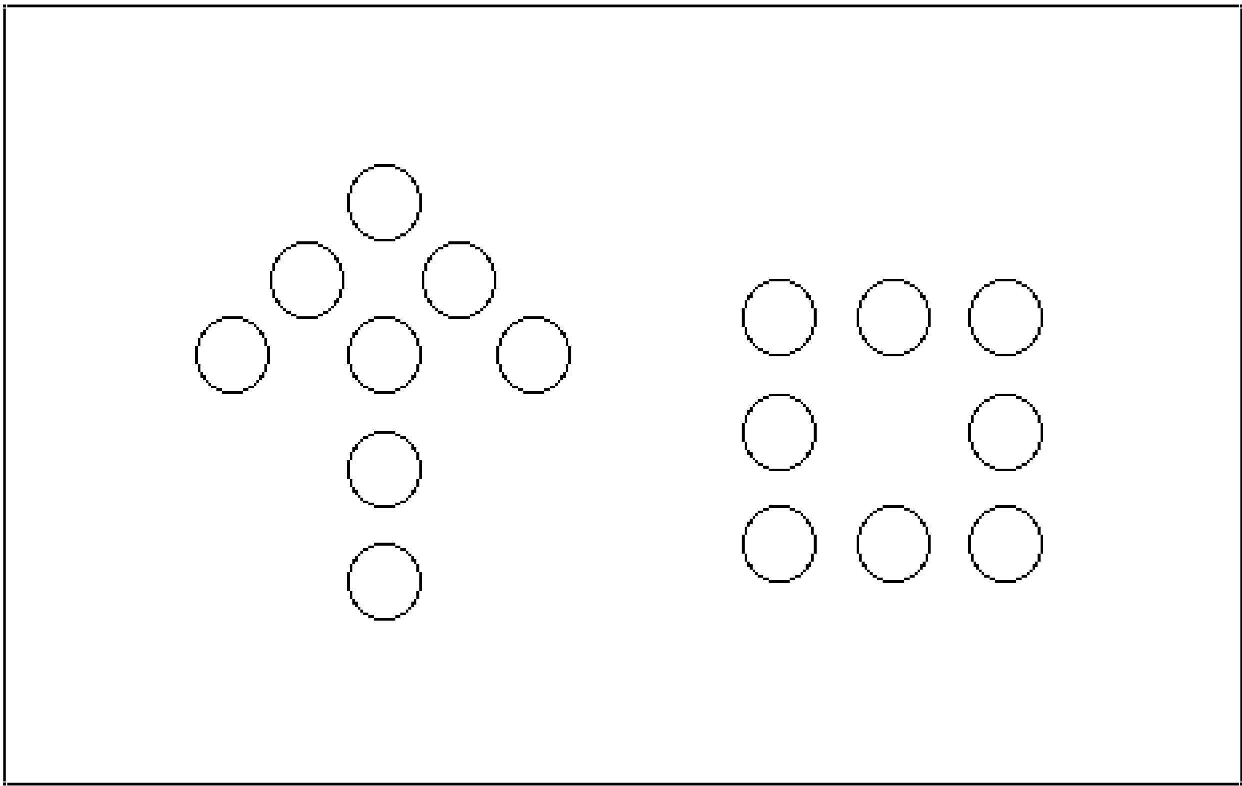
D) Colocando el espejo o el mira sobre la lámina, conseguir que se vean 1, 2, 3, … canicas en cada configuración. Averiguar cuál es el número máximo de canicas que se pueden obtener en cada caso.

[1] Las láminas que presentamos para la actividad A2 están inspiradas en o extraidas de Walter (1973).



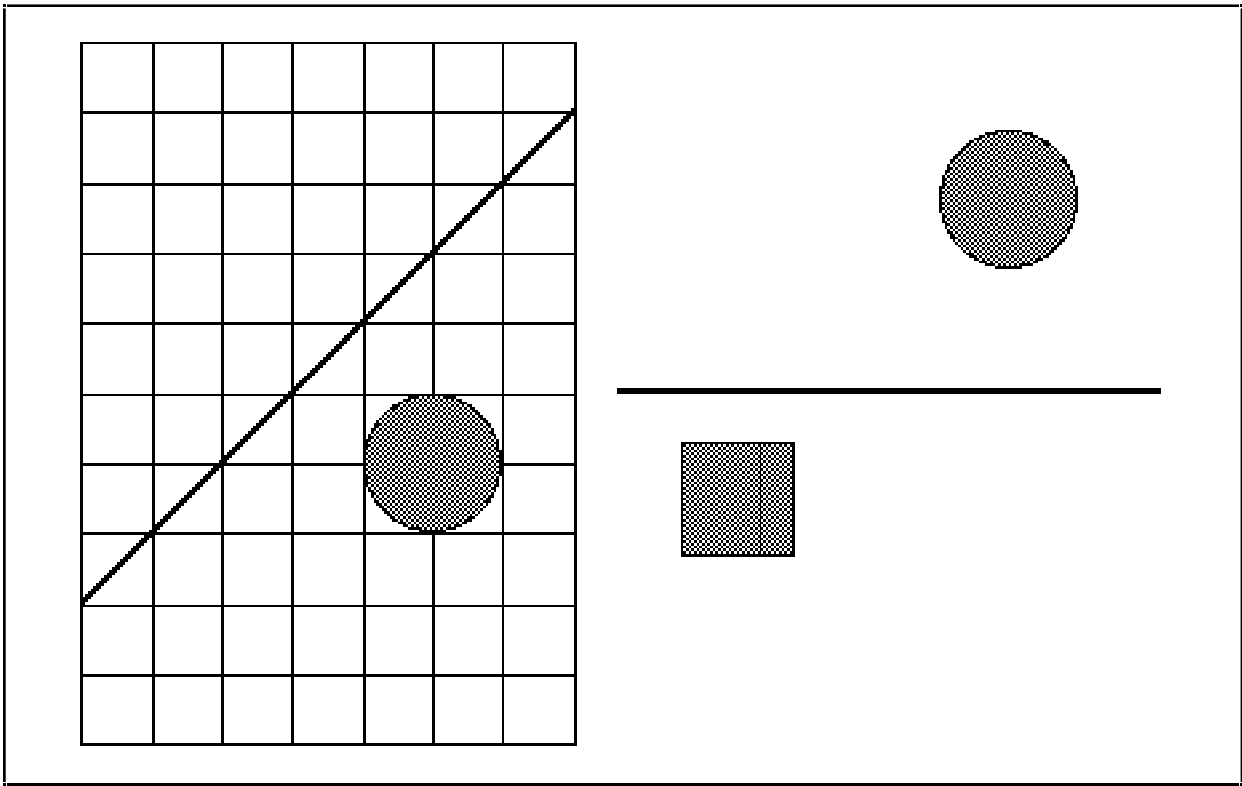




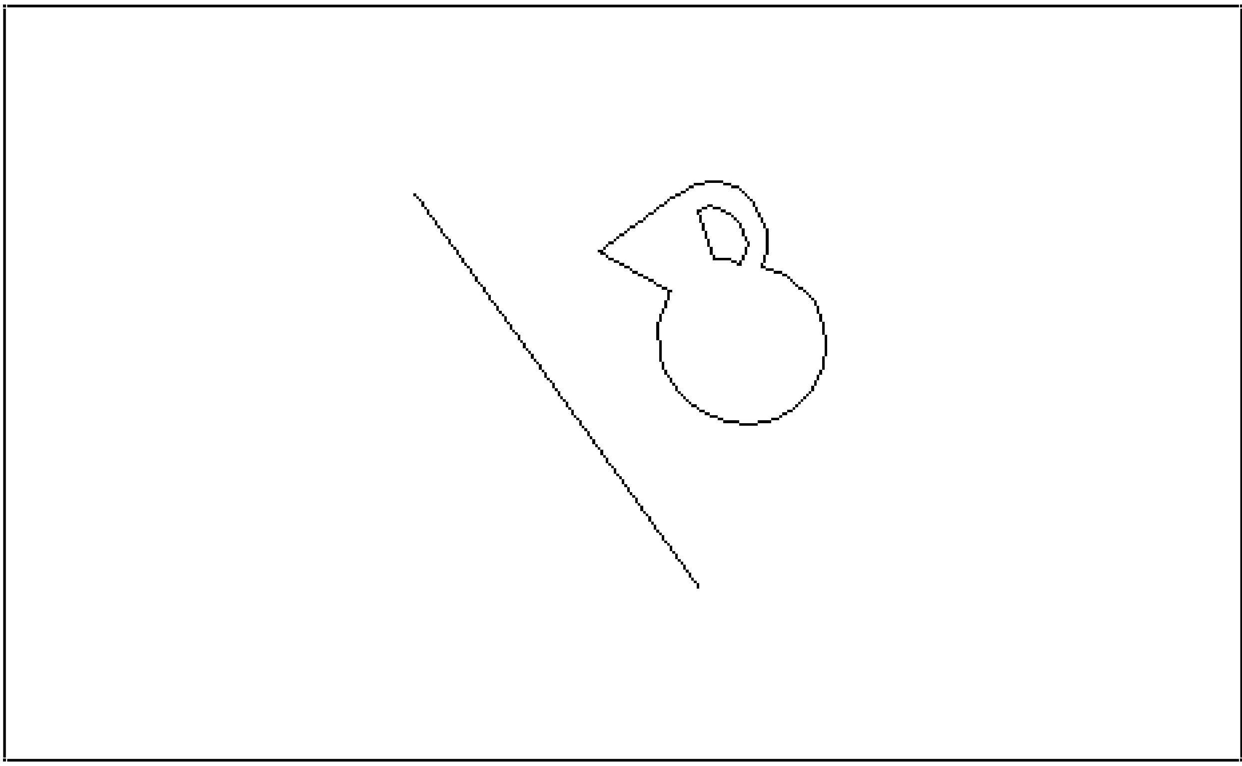


A3- Se proporcionan el dibujo de figuras completas o medias figuras y un eje de simetría. El alumno debe utilizar plegado y dibujo o el mira para obtener la figura imagen o completarla.

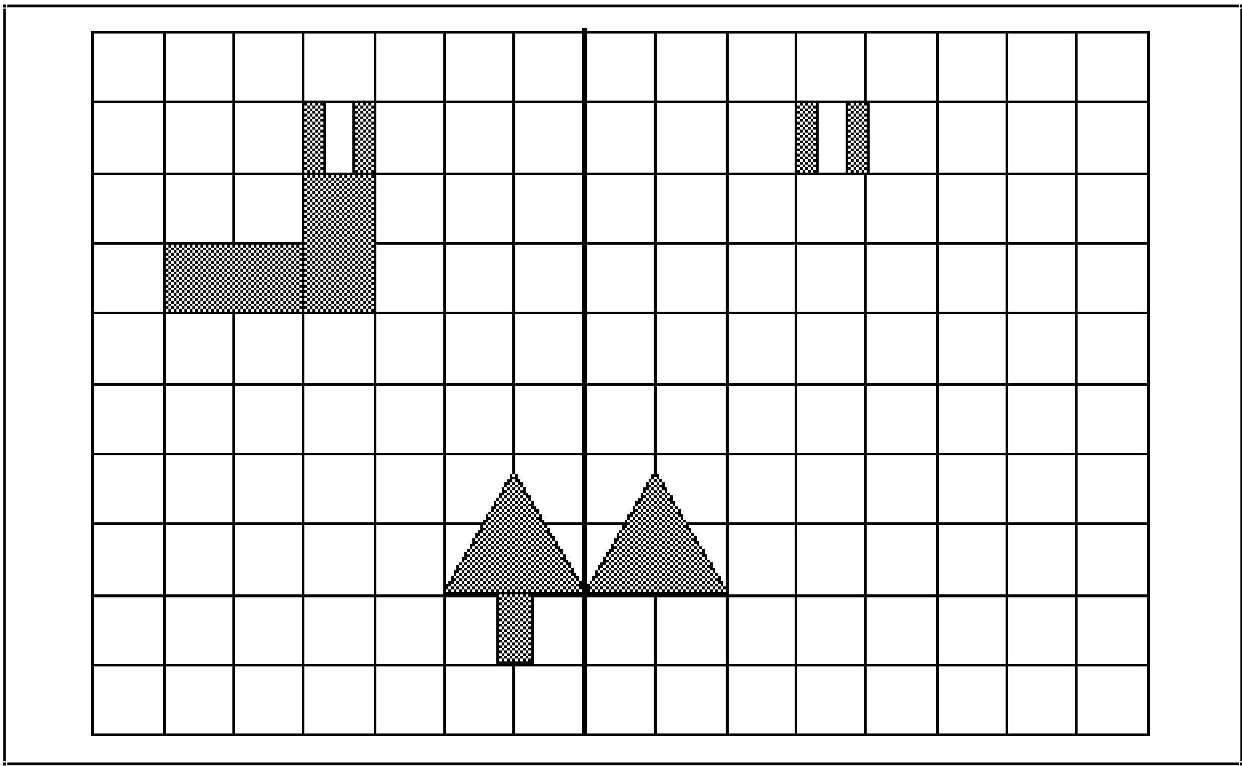
A4- Se proporcionan una pieza poligonal o un círculo (sin dibujo interior para no romper la simetría) y un eje de simetría. El profesor sitúa la pieza en la hoja y dirige a los alumnos para que realicen la simetría situando una pieza igual:
a) En el semiplano correcto y
b) En una posición concreta, teniendo en cuenta si toca o no toca al eje.

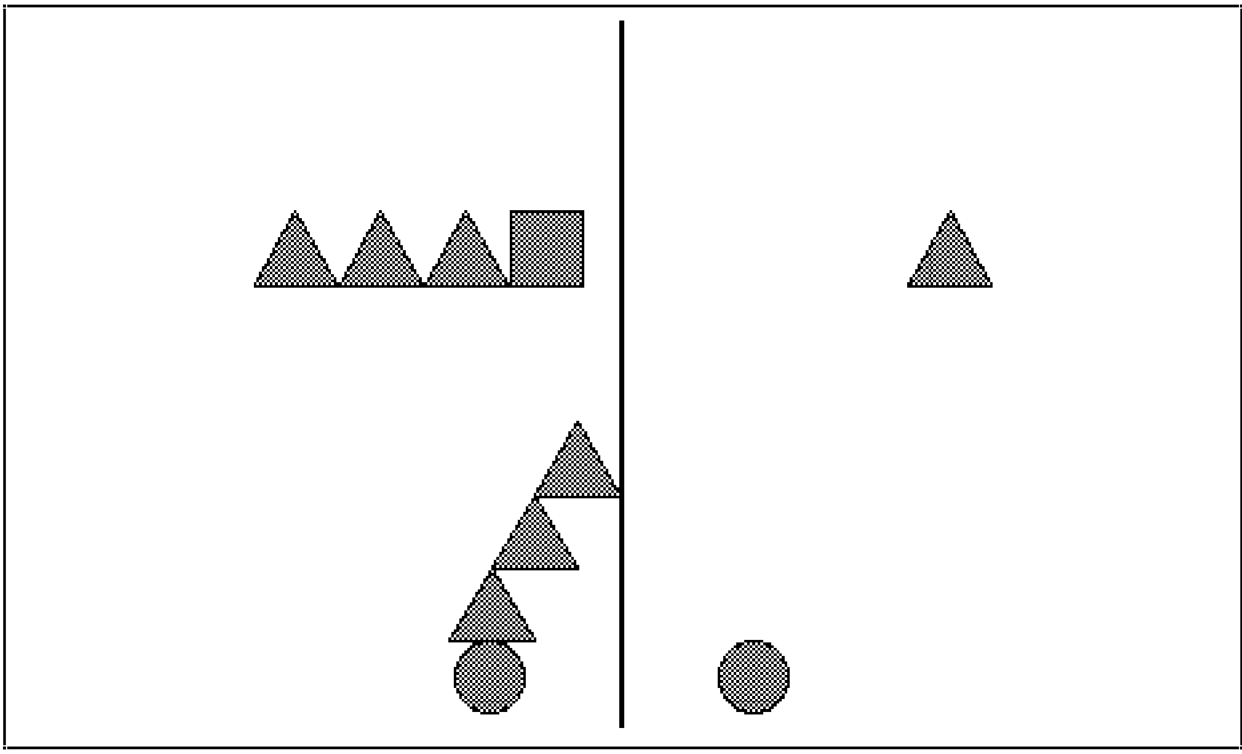


A5- Se presenta el dibujo o la silueta de una figura no simétrica y un eje de simetría. Los alumnos disponen de piezas recortadas, cuyo dibujo o silueta es como el de la lámina y también tienen otras piezas iguales, pero con distinta orientación de sus ángulos (o sea, piezas simétricas). El profesor dirige a los alumnos para que:
a) Seleccionen la pieza imagen adecuada,
b) La sitúen en el semiplano correcto y
c) La coloquen en una posición concreta, teniendo en cuenta si toca o no toca al eje.

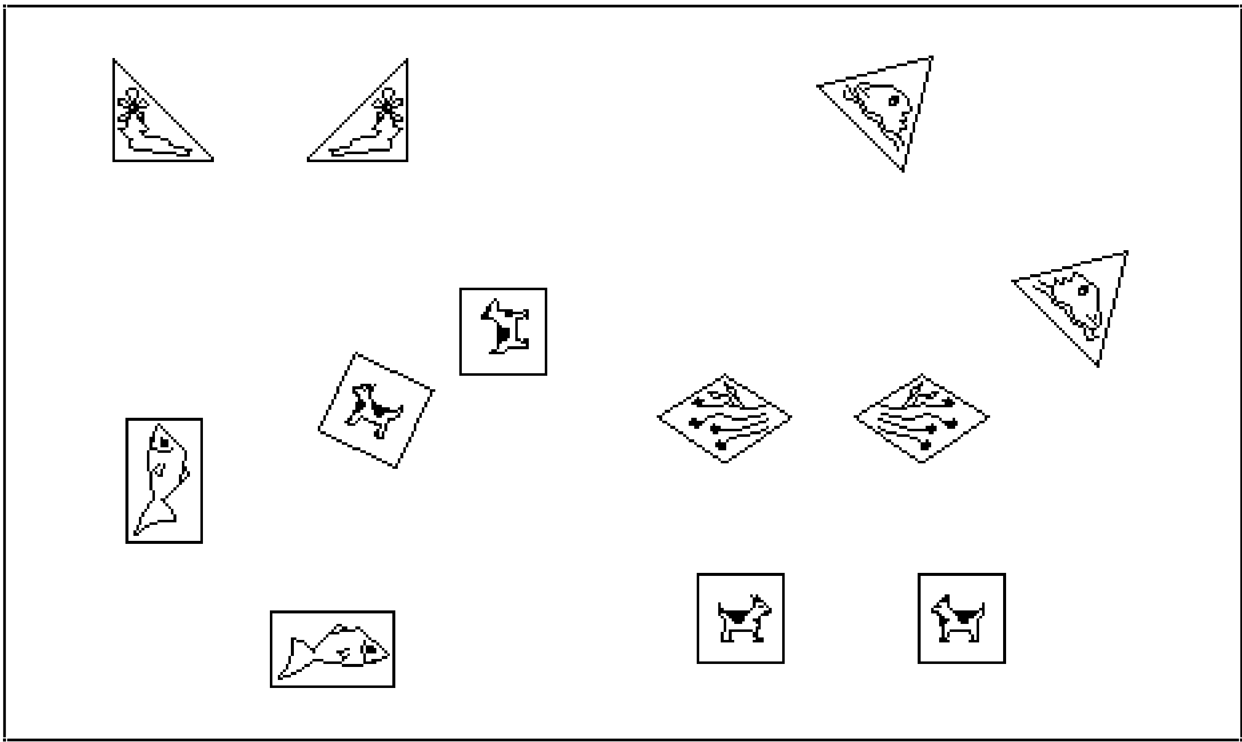


A6- Completar figuras simétricas formadas por piezas. Se proporciona la figura original, el eje de simetría y parte de la figura simétrica. Los ejes de simetría están en posiciones estándar. Las herramientas auxiliares (mira, espejo, plegado) pueden usarse puntualmente.





A7- Obtener, con la ayuda del mira, el eje de simetría de cada par de figuras. (Todos los casos que se presenten deben tener solución y en ninguno el eje de simetría corta las figuras).



- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

El primer objetivo (característica de isometría de las simetrías) se logra mediante la realización de simetrías por procedimientos automáticos (mira, espejo o plegado) y la observación de los resultados.

El segundo objetivo de esta fase puede estar también presente en fases o niveles posteriores, pues, cuando la secuencia se utiliza con niños de los primeros cursos de Enseñanza Primaria o que tienen alguna dificultad especial con algún término, éste debe ser sustituido por otro más conveniente, dejando para más adelante el aprendizaje del vocablo matemático correcto.

Ya se ha comentado anteriormente la problemática referente a las dificultades de aprendizaje de las simetrías asociadas a determinadas posiciones de los ejes y/o las figuras (corte de la figuras por el eje o ciertas combinaciones de inclinaciones entre la figura y el eje). Por ello, en la propuesta de enseñanza que planteamos ahora hemos omitido esas situaciones en las actividades de esta fase.

En las experimentaciones de la unidad de enseñanza de las simetrías que hemos realizado, no se utilizó la actividad A1. No obstante, las experiencias llevadas a cabo con traslaciones y giros han mostrado que los alumnos sí reconocen con rapidez la característica allí exigida (conservación de la forma y el tamaño), que es, evidentemente, de tipo visual y debe formar parte de la primera toma de contacto con cualquier isometría.

Para hacer esta actividad, los estudiantes podrán usar las herramientas auxiliares (espejo, mira o plegado), pero al avanzar la actividad deben prescindir de dicha ayuda.

La actividad A2 se ha experimentado en los diversos cursos de E.G.B. y ha resultado eficaz en cuanto a la consideración por los estudiantes de las características generales de la simetría propias del nivel 1. En concreto, una visión de la inversión y la equidistancia de una figura y su imagen al eje se pusieron de relieve mediante las láminas usadas para esta actividad.

El plegado y el reflejo son las dos bases sobre las que fundamentar la concepción visual global de simetría. Ambos procedimientos proporcionan dos visiones del concepto de simetría y son los procedimientos primarios que sirven para realizar automáticamente y comprobar simetrías; por lo tanto, su conocimiento y utilización es un objetivo importante a lograr en el primer nivel. Por ser métodos básicos de trabajo, su empleo para la obtención de simetrías debe ser objetivo de aprendizaje en la fase 2. En la actividad A3 se inicia a los estudiantes en el manejo de estas herramientas, que seguirán utilizando en adelante siempre que lo necesiten.

La secuencia seguida en las experimentaciones realizadas relegaba a un segundo plano el plegado en favor del mira. Pero hemos podido constatar que todos los alumnos con experiencia escolar tienen cierta familiaridad con el plegado y, en caso de haber estudiado simetrías con anterioridad, éste es el recurso más utilizado, incluso mentalmente a veces, para razonar sobre simetrías.

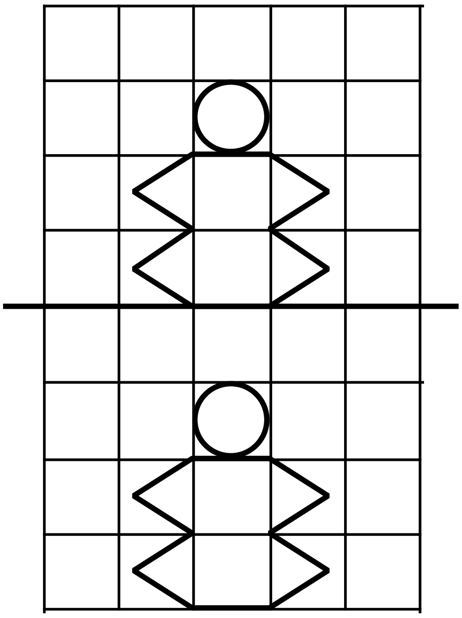
En las actividades A4 y A5 se dirige a los alumnos hacia la consideración de tres características de las simetrías (inversión, cambio de semiplano y equidistancia), aunque desde la visión global de la simetría indicada con anterioridad en la justificación de los objetivos de nivel 1. Se pretende que los estudiantes empiecen a realizar simetrías por sus propios medios, aplicando las concepciones que tengan de ese movimiento, por lo que, si bien al principio pueden servirse de las herramientas auxiliares (espejo, mira) directamente, luego las emplearán sólo para comprobar sus respuestas, hasta obtener una válida.

El énfasis de las actividades se pone por separado en cada una de las tres características de las simetrías mencionadas antes (inversión, cambio de semiplano y equidistancia al eje), con lo cual se dirige al alumno hacia lo que debe tener en cuenta, a diferencia de la actividad A1 de la fase 4, en la cual no se especifica cada una de las características y el alumno debe aplicarlas por sí mismo. La perpendicularidad respecto al eje no es un objetivo de este nivel, como hemos explicado con anterioridad, y en cuanto a la equidistancia, sólo se debe exigir una solución aproximada.

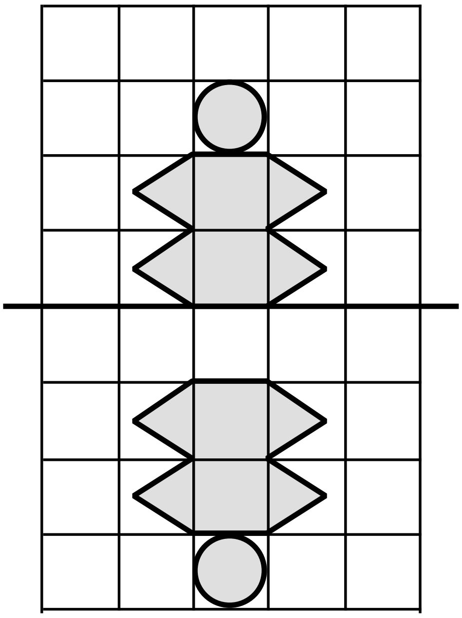
En las experiencias llevadas a cabo se puede ver, de manera muy clara en los alumnos de 1º de E.G.B. y menos acusada en los de 3º de E.G.B., que, en algunas de sus justificaciones, los estudiantes hacen referencia a la distancia al eje y en otras a que la figura "está al revés", pero siempre aluden sólo a una de las características, que no tienen en cuenta en otros ejercicios similares posteriores. Por ejemplo, en la actividad 7 de la experimentación, Sonila sitúa bien las figuras imagen de la lámina 1-S-7.1. Tras ello, la profesora le pregunta sobre el punto de la figura que toca el eje:

Prof.: *¿Por qué has puesto las dos puntas juntas?*
Sonila: *Porque está junto a la raya.*
Prof.: *Y cuando está junto a la raya sale junto a la raya, ¿verdad? y si está separado sale separado.*

Sin embargo, en la lámina inmediatamente posterior, la 1-S-7.2, Sonila da como solución lo que muestro en el dibujo 1 (la figura original es la del semiplano superior), tras lo cual el proceso de modificaciones sucesivas de Sonila transcurre del modo siguiente:



Dibujo 1.



Dibujo 2.

Prof.: *Antes has dicho que lo que tocaba el espejo, ¿tocaba el espejo o no? …* [Sonila asiente] *… Ahí, ¿qué toca el espejo? Esto toca el espejo, ¿no?* [el segmento inferior de la figura] *Entonces, ¿cómo hay que ponerlo?*

Sonila no lo sabe, por lo que la profesora hace que mire a través del espejo. Luego Sonila retira el espejo y vuelve a intentarlo. En esta ocasión sí tiene en cuenta al inversión de la figura, pero la distancia al eje no la modifica (ver el dibujo 2).

Sonila coloca el mira, gira la hoja 180°, quita el mira y ya resuelve bien el ejercicio.

Se requiere la dirección del profesor hacia esas propiedades para que los estudiantes les presten atención, aunque no lo harán aplicándolas a cada punto de la figura, sino desde una perspectiva global de la colocación de la imagen en el plano.

Algo semejante sucede con el cambio de semiplano, que los estudiantes en nuestras experimentaciones utilizaban, salvo en alguna actuación puntual en 1º de E.G.B., pero no aparecía nunca en las justificaciones espontáneas.

En la secuencia experimentada no había ninguna actividad análoga a la A6. Su inclusión en la secuencia propuesta aquí está justificada porque, al proporcionar parte de la figura que los estudiantes deben completar, se incide en el uso de un enfoque visual para su resolución.

De hecho, es una de las formas que pueden facilitar la consideración de la inversión en el nivel 1.

Al igual que en las actividades A4 y A5, el uso del mira, del espejo o de otro medio auxiliar debe decrecer progresivamente, si bien en esta fase los estudiantes pueden servirse de ellos repetidas veces en un mismo ejercicio para mejorar la solución aportada.

En la actividad A6 los ejes se encuentran en posiciones estándar, mientras que en la fase 4 se ha propuesto una actividad similar (A2) en la que se trabaja con ejes en posiciones no estándar y el uso de los materiales auxiliares está más limitado.

La obtención aproximada del eje de simetría, que se propone en la actividad A7, corresponde al primer nivel de razonamiento, pues la visión global de la simetría incluye las ideas de las dos figuras y el espejo o la línea de plegado entre ellas. También se fomenta la consideración del eje como línea situada "por la mitad" de las dos figuras desde una apreciación global, sin la consideración puntual de cada elemento de las figuras. El profesor dirigirá a los estudiantes, observando su forma de resolver el ejercicio y perfeccionando su técnica de doblado o colocación del mira si es necesario. Junto con la apreciación visual, esos serán los medios empleados en esta actividad para resolver los ejercicios.

En las experiencias llevadas a cabo no se experimentó esta actividad en 1º de E.G.B., aunque sí una parecida en todos los demás cursos, a partir de 3º de E.G.B. En estos casos, a diferencia de la actividad A7 que proponemos, no todas las situaciones planteadas tenían solución y la justificación de la existencia o no del eje de simetría y su obtención se planteó en Magisterio con exigencias de razonamiento de nivel superior al que planteamos ahora. En 3º de E.G.B., el tanteo con el mira les permitió a los alumnos identificar los ejes de simetría de los pares de figuras.

Fase 4 del Nivel 1

Objetivos:

1- Utilizar las características y técnicas que se pusieron de manifiesto en la fase 2 en situaciones distintas o en las que aumenta la complejidad. Las diferencias entre las actividades de las fases 2 y 4 están originadas por:

- La posición de los ejes: Actividades que en la fase 2 se restringían a ejes en posiciones estándar, ahora se presentan también con ejes de otras inclinaciones o con posiciones relativas figura-eje más complejas.

- El planteamiento general de la tarea: Actividades que en la fase 2 se enfocaban hacia una sola característica visual, en la fase 4 se plantean en general, debiendo tenerse en cuenta simultáneamente las diferentes propiedades de las simetrías estudiadas en la fase 2.

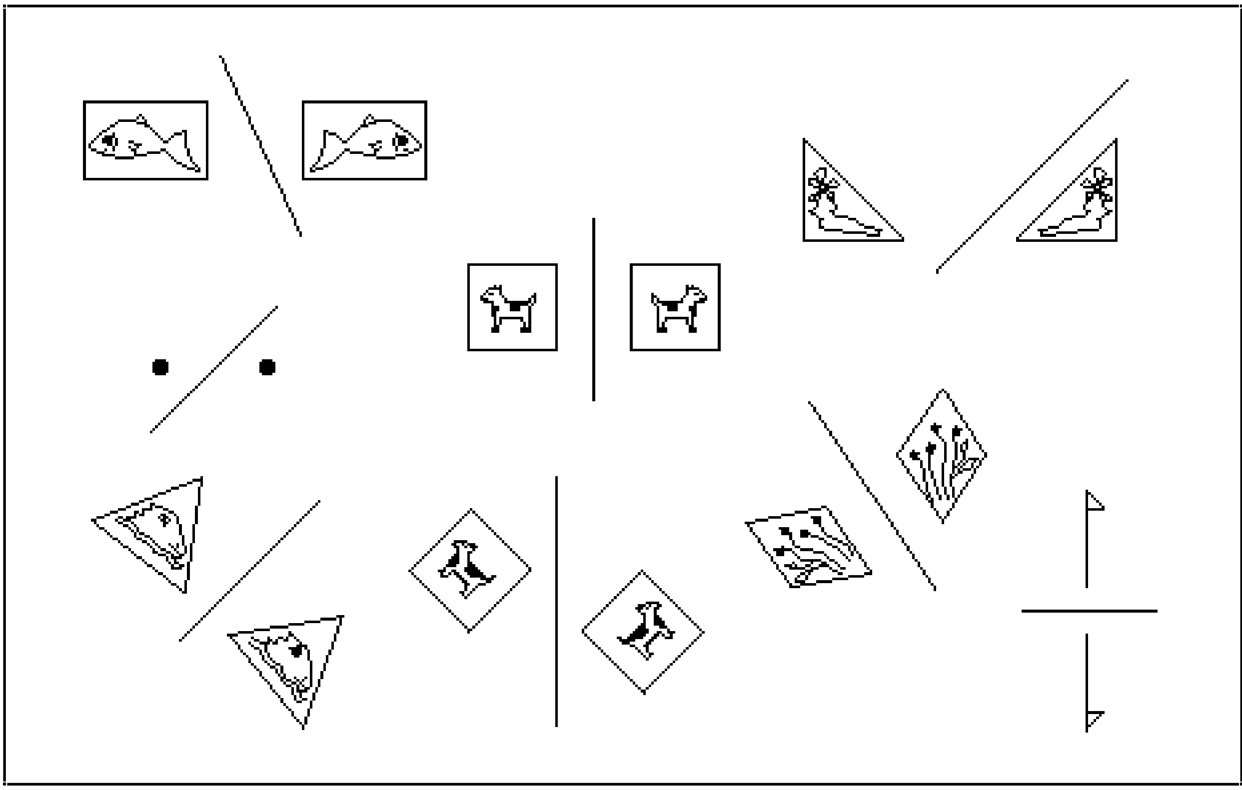
Actividades:

A1- Se proporcionan una pieza, poligonal o círculo (con un dibujo interior para romper la simetría) o con silueta no simétrica, y un eje de simetría. Los alumnos deben colocar la figura imagen.

A2- Completar figuras simétricas formadas por piezas. Se proporcionan la figura original, el eje de simetría y parte de la figura simétrica. Los ejes de simetría no están en posiciones estándar y las herramientas auxiliares (mira, espejo, plegado) pueden usarse sólo para verificar o corregir el resultado.

A3- Obtener con la ayuda del mira el eje de simetría de un par de figuras (los ejes de simetría no se encuentran necesariamente en posiciones estándar).

A4- Dados varios pares de figuras, reconocer las que se corresponden mediante la simetría cuyo eje se da. Si es necesario, se pueden utilizar las herramientas auxiliares para resolver el ejercicio.



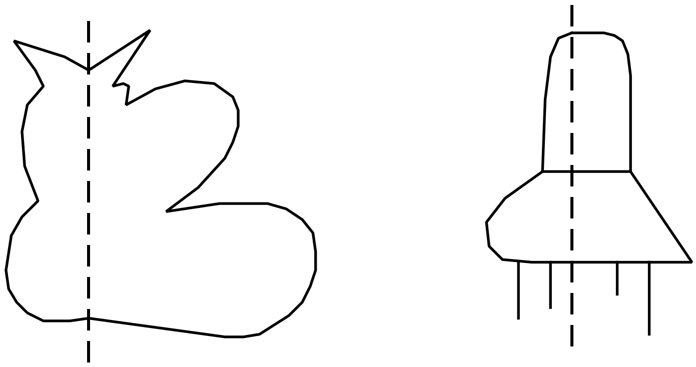
A5- Completar, dibujándola, una figura simétrica de la cual se proporciona la mitad.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

Las actividades A1, A2 y A3 son ampliaciones de las actividades A4, A5, A6 y A7 de la fase 2. Un elemento básico del proceso de aprendizaje de las simetrías es la posición del eje. Como hemos comentado con anterioridad, la ausencia de perpendicularidad es uno de los errores más frecuentes en la realización de simetrías, cuyo origen está, generalmente, en que los estudiantes ignoran la influencia del eje de simetría en la determinación de la dirección del movimiento y aceptan solamente las posibilidades de movimientos verticales y horizontales. Por este motivo, en las actividades de la fase 2 se limitaron las posiciones de los ejes de simetría a los casos más fáciles y en la fase 4 se profundiza en esta componente de la simetría, proponiendo la realización y observación de simetrías con ejes de otras inclinaciones.

Los casos negativos de la actividad A4 corresponden a falta de equidistancia (de tocar a no tocar el eje), a colocación de las dos figuras en el mismo semiplano o a no inversión de la figura. La visión global de la simetría debe permitirles a los estudiantes distinguir en esta actividad si los pares de figuras son simétricas o no respecto a un eje aunque, como se trata del nivel 1, los casos negativos que se presentan deben ser reconocibles a simple vista, sin necesidad de recurrir a técnicas de medición de distancias o perpendicularidad.

En las experimentaciones de la actividad A4, a partir de 3º de E.G.B. las principales dificultades para los estudiantes se plantearon en situaciones de ausencia de inversión de las figuras y de ausencia de perpendicularidad al eje. Esta actividad no es la extensión de ninguna otra de la fase 2, pues lo que requiere de los estudiantes es que utilicen de manera conjunta los diferentes elementos característicos de las simetrías que han aprendido a lo largo de las actividades de la fase 2.



En las experimentaciones realizadas hemos propuesto pocas actividades de dibujo, como la A5, pero hemos comprobado que, desde 1º de E.G.B., los ejercicios basados en el dibujo de figuras sí resultan adecuados para integrarlos en la secuencia de enseñanza, pues requieren que los estudiantes apliquen la visión adquirida de simetría con más cuidado que cuando sólo deben colocar una pieza de papel en su sitio. De hecho, los alumnos de 1º de E.G.B mostraron al final de la fase 4 una visión global correcta de la simetría, con deformaciones originadas por su poca habilidad de dibujo, lo cual repercutía sobre todo en el grosor de la figura (ver dibujo) y, en una niña, en la conversión de algunos ángulos en partes curvas, en concreto en la silla de la lámina 1-S-9.3.

SIMETRÍAS: NIVEL 2

Objetivos:

Las actividades que planteamos para este nivel pretenden lograr los objetivos generales siguientes, que más adelante desglosaremos en las diferentes fases de aprendizaje:

1- Descubrimiento, reconocimiento y utilización adecuada de:

a) Las propiedades que caracterizan las simetrías: Perpendicularidad y equidistancia respecto del eje de simetría.

b) El paralelismo de los segmentos que unen puntos simétricos.

c) El eje de simetría como mediatriz de los segmentos que unen puntos simétricos, aplicándolo en particular para encontrar ejes de simetría.

2- Utilización de la notación y el vocabulario matemáticos para identificar o referirse a puntos, ejes simetrías, etc. (P, P', S, S_e, …).

3- Utilización explícita de la definición de simetría en las argumentaciones.

4- Realización de composiciones de simetrías y generalización de los resultados de la composición de dos simetrías.

5- Comprensión de la idempotencia de las simetrías.

6- Descubrimiento y verificación, a partir de ejemplos, de otras propiedades de las simetrías.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

La descripción de nivel 2 indica como característico de este nivel la utilización de las propiedades y elementos matemáticos de los objetos de estudio como base del razonamiento. Por lo tanto, descubrirlas y aprender a utilizarlas deben formar parte de los objetivos a conseguir en este nivel. Así, el objetivo 1 se refiere a los elementos que habitualmente forman parte de la definición o caracterización de una simetría (equidistancia y perpendicularidad respecto del eje) y a las propiedades básicas que resulta necesario usar en la identificación y caracterización de simetrías en la mayor parte de las situaciones.

Hay un cambio importante en la forma de razonamiento entre los niveles 1 y 2, pues los estudiantes pues los estudiantes pasan de una interpretación global de las simetrías a ser capaces de diferenciar los diversos elementos y propiedades matemáticos que intervienen en la realización de una simetría. Por lo tanto, debe haber también un cambio importante en la forma de expresión usada por los estudiantes cuando comunican sus pensamientos, las formas de resolver las actividades, los tipos de soluciones que son admitidas como correctas, etc. Toda esta problemática queda recogida en el objetivo 2, que indica la necesidad de lograr que los estudiantes terminen de aprender el vocabulario matemático relacionado con las simetrías y que sean capaces de leer y escribir los símbolos matemáticos más usuales en este contexto.

Una vez descubiertas y comprendidas las propiedades características que identifican las simetrías, los alumnos estarán en condiciones de entender y emplear la definición de simetría como parte de sus argumentos para explicar o demostrar resultados, conjeturas o afirmaciones. El tercer objetivo de las actividades del nivel 2 no plantea que los estudiantes obtengan la definición formal de simetría por sí mismos, ya que en este nivel, más que una definición matemática (como conjunto de propiedades necesarias y suficientes), los estudiantes organizarán, analizarán y utilizarán listas amplias de propiedades de las isometrías.

La composición de simetrías es fundamental en el aprendizaje de las isometrías del plano, por ser uno de los pilares en los que sustentar la relación entre las distintas isometrías. De ahí que su aprendizaje esté recogido explícitamente en los objetivos 4 y 5 de este nivel. No obstante, no podemos pretender que los estudiantes del nivel 2 lleguen a dominar la composición de simetrías en sus diferentes casos y las características de los distintos resultados, sino sólo que descubran y aprendan la relación de causa-efecto entre la composición de simetrías y las traslaciones o giros. La actividad propia del tipo de razonamiento del nivel 2 es la aplicación de movimientos sucesivos sobre figuras concretas y la comprobación de las características del movimiento resultante, pues se trata de la realización directa de simetrías y de mediciones sobre situaciones concretas. Más tarde, cuando los estudiantes hayan alcanzado el razonamiento del nivel 3, volverán a estudiar este tema específico, para trabajar sobre las relaciones obtenidas de una manera general y más abstracta que en el nivel 2. De esta manera, se hace patente la característica del Modelo de Van Hiele de promover una enseñanza en espiral.

El último objetivo global del nivel 2 que planteamos nos recuerda que para desarrollar correctamente el razonamiento de este nivel no hay que limitarse a estudiar las propiedades usuales o básicas de las simetrías, sino que los estudiantes debe descubrir por sí mismo otras propiedades o verificar la certeza de algunas que hayan sido planteadas por el profesor. Entre estas propiedades se encuentran, por ejemplo, la invarianza de puntos o figuras por una simetría o las relaciones entre puntos del plano, sus imágenes y los puntos del eje de simetría.

Fase 1 del Nivel 2

Objetivos:

1- Obtener información de los conocimientos que tienen los alumnos sobre mediatrices, paralelas y perpendiculares, las propiedades de estas líneas y su dibujo.

2- Proporcionar una unidad complementaria de enseñanza sobre rectas paralelas y perpendiculares y su trazado, si ello fuera necesario.

Actividades:

A1- Los alumnos han de trazar rectas paralelas o perpendiculares a otras con diversas inclinaciones y emplear instrumentos adecuados para ello: Regla, escuadra y cartabón, compás.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

Si se utiliza la unidad de enseñanza que proponemos en esta memoria con estudiantes que demuestren haber superado ya el nivel 1 de razonamiento en las simetrías, pero no el nivel 2, el profesor deberá iniciar el trabajo con las actividades del nivel 2. En este caso, la fase 1 del nivel 2 debería estar integrada por la actividad que proponemos aquí precedida de algunas actividades de las distintas fases del nivel 1, que sirvan, al profesor, para verificar los conocimientos y el nivel de razonamiento de sus alumnos y, a éstos, para recordar determinados conocimientos previos necesarios y para entrar en contacto con el tema de las simetrías.

Así, en la experimentación realizada en Magisterio, las primeras actividades que propusimos fueron una selección de actividades del nivel 1: Colocar las imágenes de figuras respecto de un eje dado de manera visual, sin usar ningún material, con diversos grados de complejidad; dibujar las imágenes de algunas figuras a mano alzada; identificar qué pares de figuras son simétricas respecto del eje dado; aprendizaje de utilización del mira y el espejo; identificar qué pares de figuras son simétricas y dibujar el eje de simetría de estos pares; etc. (en el resumen de esta experimentación incluido en el anexo III de esta memoria se puede ver la relación completa de estas actividades).

Desde el primer momento, se pudo observar con claridad que Merche, la estudiante de Magisterio (de las dos alumnas que iniciaron la experimentación sobre isometrías, Ara tuvo que abandonarla) razonaba en el nivel 2, pues hacía continuas referencias a la equidistancia y la perpendicularidad al explicar sus respuestas. Al mismo tiempo, se pudo observar también que tenía algunas lagunas y confusiones. Por ejemplo, en su respuesta a la primera actividad (colocar visualmente las figuras simétricas respecto de un eje dado) Merche confundía la simetría axial con el giro de 180° pues, para situar la imagen de un punto o figura, seleccionaba aleatoriamente un punto del eje de simetría y colocaba la imagen girada 180° tomando ese punto como centro de giro. Así explicó su forma de encontrar las imágenes:

Merche: *No me acuerdo mucho, pero creo que tiene que haber en el eje un punto y entonces la distancia de este punto* [uno de la figura inicial] *al eje tiene que ser la misma que del eje a este punto* [su homólogo en la figura imagen], *pero en la misma recta* [la que une los puntos señalados y pasa por el centro de giro].

Esta respuesta, independientemente del error conceptual, refleja claramente un razonamiento de nivel 2. Pero, por otra parte, Merche recordaba también la caracterización de la simetría como plegado, por lo que al plegar la lámina por el eje de simetría se dio cuenta de que había situado mal las imágenes y las corrigió, aplicando la equidistancia y perpendicularidad al eje de manera consciente. Así explicó ahora su forma de proceder:

Prof.: *¿En qué te fijas* [para hacer la simetría]*?*
Merche: *En la distancia de cada punto al eje.*
Prof.: *¿La distancia sólo?*
Merche: *Perpendicular.*

Por lo tanto, estas actividades sirvieron también para que la alumna recordara los conceptos y aclarara sus ideas. Argumentos análogos a éste se pueden encontrar en las actividades siguientes, aunque buena parte de ellas estaban planteadas para permitir un razonamiento puramente visual, de nivel 1.

Si la unidad de enseñanza se utiliza con estudiantes que han realizado previamente las actividades de la unidad del nivel 1 de simetrías, es evidente que la finalidad de informar al profesor y a los estudiantes que tiene la fase 1 del nivel 2 está, en gran parte, superada, pues el trabajo que se inicia es la continuación natural del anterior. Por lo tanto la función de las actividades a realizar en esta fase se limita a hacer que el profesor verifique si sus alumnos conocen o no los nuevos elementos de las simetrías en los que se van a basar las actividades del nivel 2, la perpendicularidad y el paralelismo, y a hacer que los estudiantes tomen contacto con esos nuevos elementos.

En caso de que el profesor detecte alguna carencia importante en sus alumnos, tanto de tipo conceptual como técnico, deberá proponerles algunas actividades (que no hemos incluido en nuestra propuesta por no estar relacionadas directamente con la enseñanza de las simetrías) para que afiancen sus concepciones y aprendan a dibujar correctamente rectas perpendiculares y paralelas con regla y escuadra o compás.

En los párrafos anteriores hemos insistido en los conceptos de perpendicularidad y paralelismo como conocimientos previos necesarios para iniciar el trabajo con las actividades de la fase 2, pero no hemos aludido a otros conceptos geométricos relacionados con las simetrías, principalmente el de mediatriz. Dentro del diseño que hemos elaborado, no es necesario conocer previamente la idea de mediatriz para llevar a cabo las actividades de nivel 2, por lo que, en caso de no conocerlo los alumnos, no es necesario introducirlo en la fase 1, sino sólo en el momento en que sea oportuno.

Fase 2 del Nivel 2

Objetivos:

1- Descubrir y utilizar la equidistancia al eje de simetría de cada punto y su imagen, y la perpendicularidad respecto al eje de los segmentos que unen dichos pares de puntos.

2- Descubrir y utilizar el paralelismo de todos los segmentos que unen puntos que se corresponden.

3- Caracterizar el eje de simetría como la mediatriz de los segmentos que unen puntos simétricos.

4- Comprender y utilizar la notación estándar de las simetrías, S_e, y el vocablo básico asociado.

5- Descubrir la idempotencia de las simetrías y generalizar el resultado de la composición de una simetría consigo misma una cantidad par/impar de veces.

6- Aprender a aplicar una simetría determinada a un punto por procedimientos exactos.

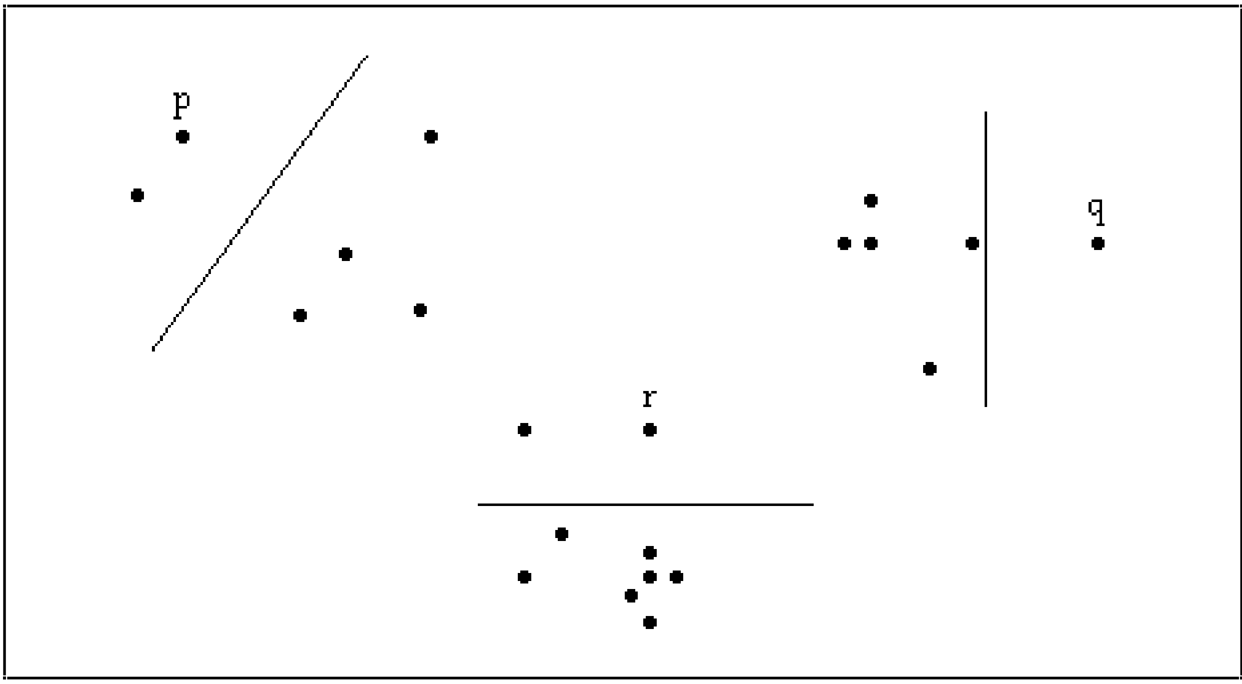
Actividades:

A1- Dados un par de figuras simétricas y el eje de la simetría, marcar dos puntos homólogos de las figuras, P y P', y unirlos por un segmento. Hacer lo mismo con varios pares de puntos (Q y Q', etc.). Repetir el ejercicio con varios ejes de simetría y pares de figuras simétricas.

Obtener los simétricos de varios puntos respecto un eje de simetría dado (se puede usar el mira o plegado). Unir, mediante segmentos, cada punto y su imagen. Repetir el ejercicio con varios ejes de simetría y conjuntos de puntos.

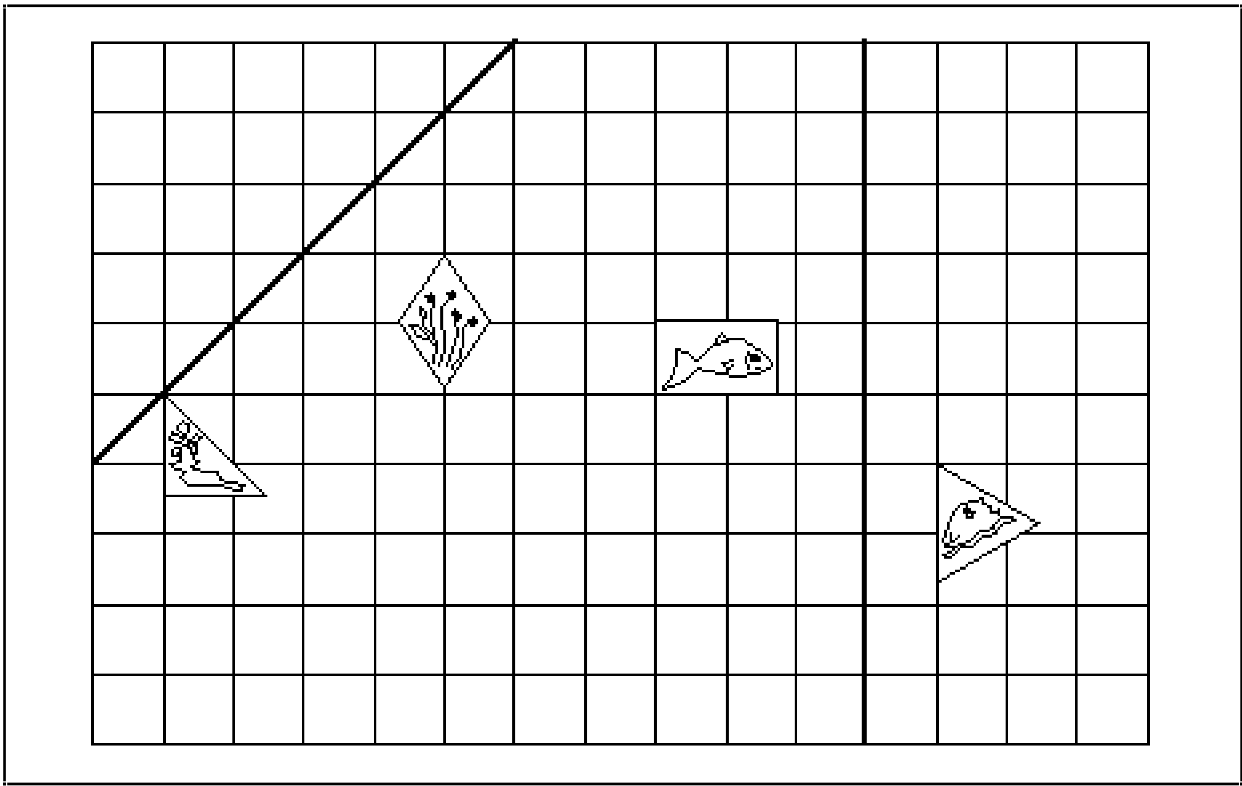
Observar los resultados de los ejercicios anteriores y deducir propiedades de las simetrías.

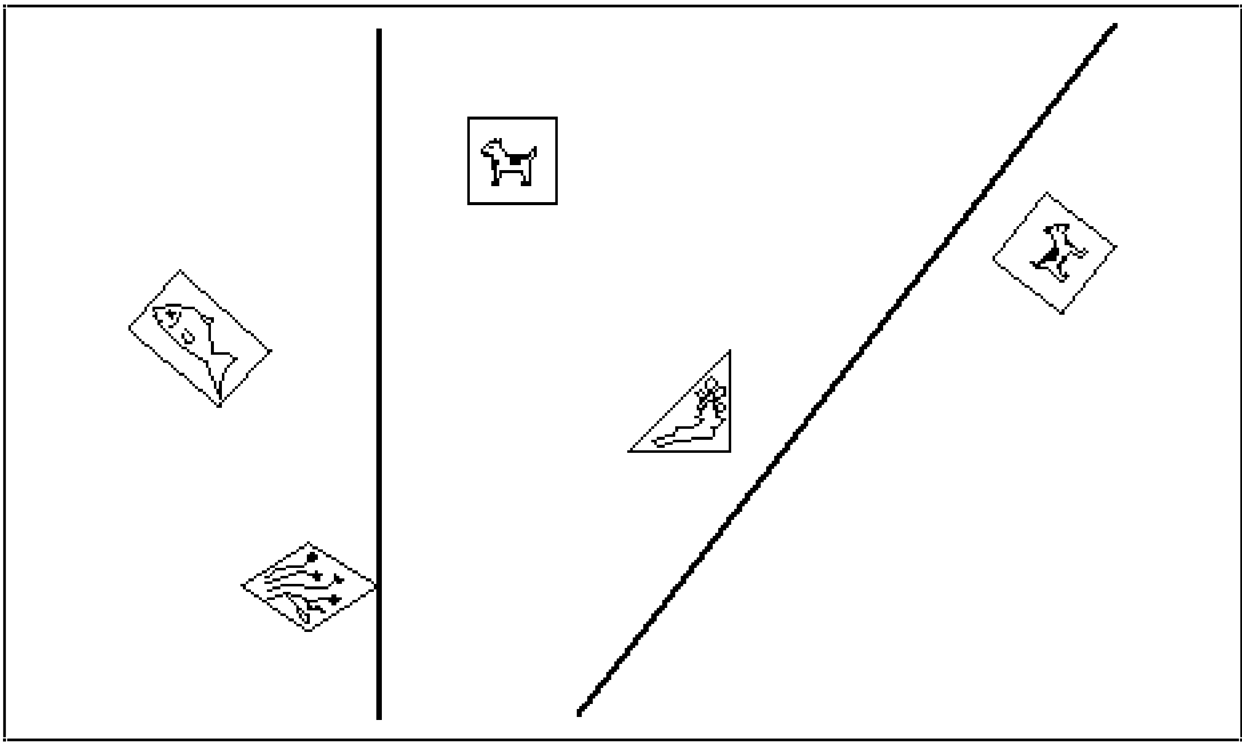
A2- Se dan un eje de simetría, varios puntos y sus posibles imágenes. Identificar los pares de puntos que se corresponden mediante esa simetría sin utilizar procedimientos automáticos (mira, plegado, …).

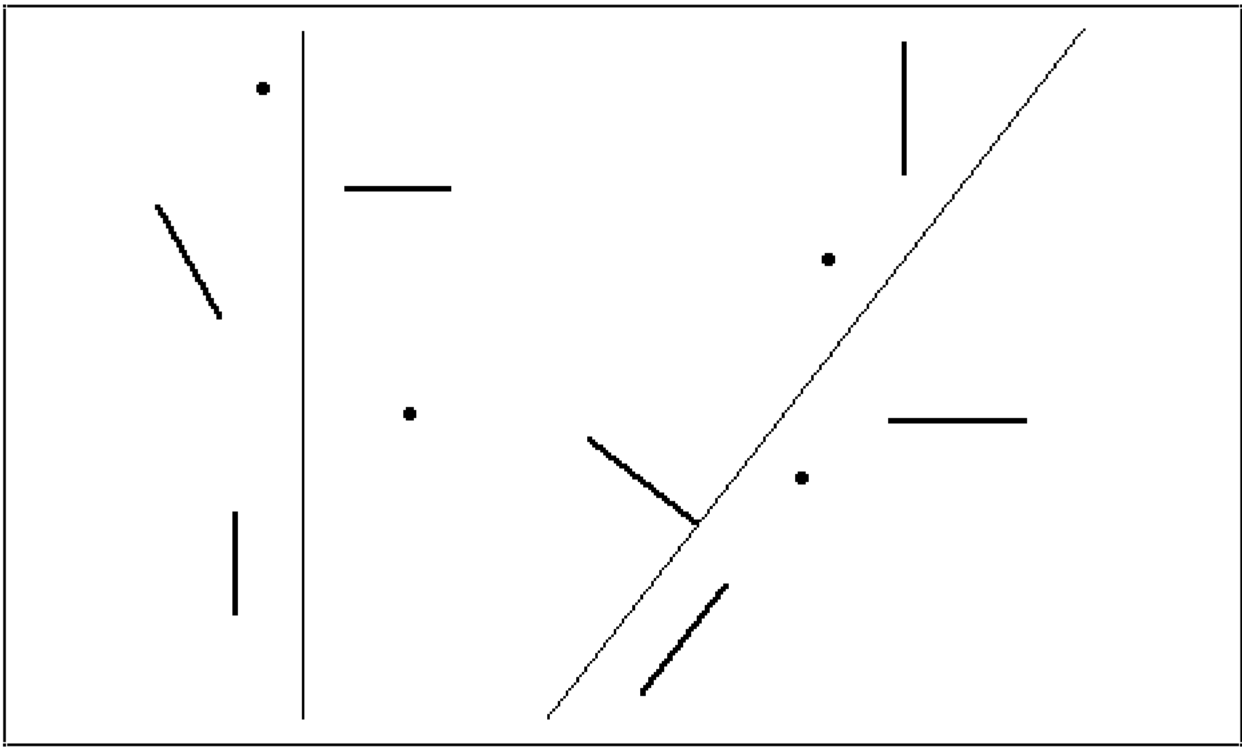


A3- Obtener las imágenes de las figuras de las láminas por la simetría cuyo eje aparece dibujado, sin utilizar procedimientos automáticos (mira, plegado, …).

Obtener las imágenes de los segmentos y puntos marcados respecto del eje de la lámina.

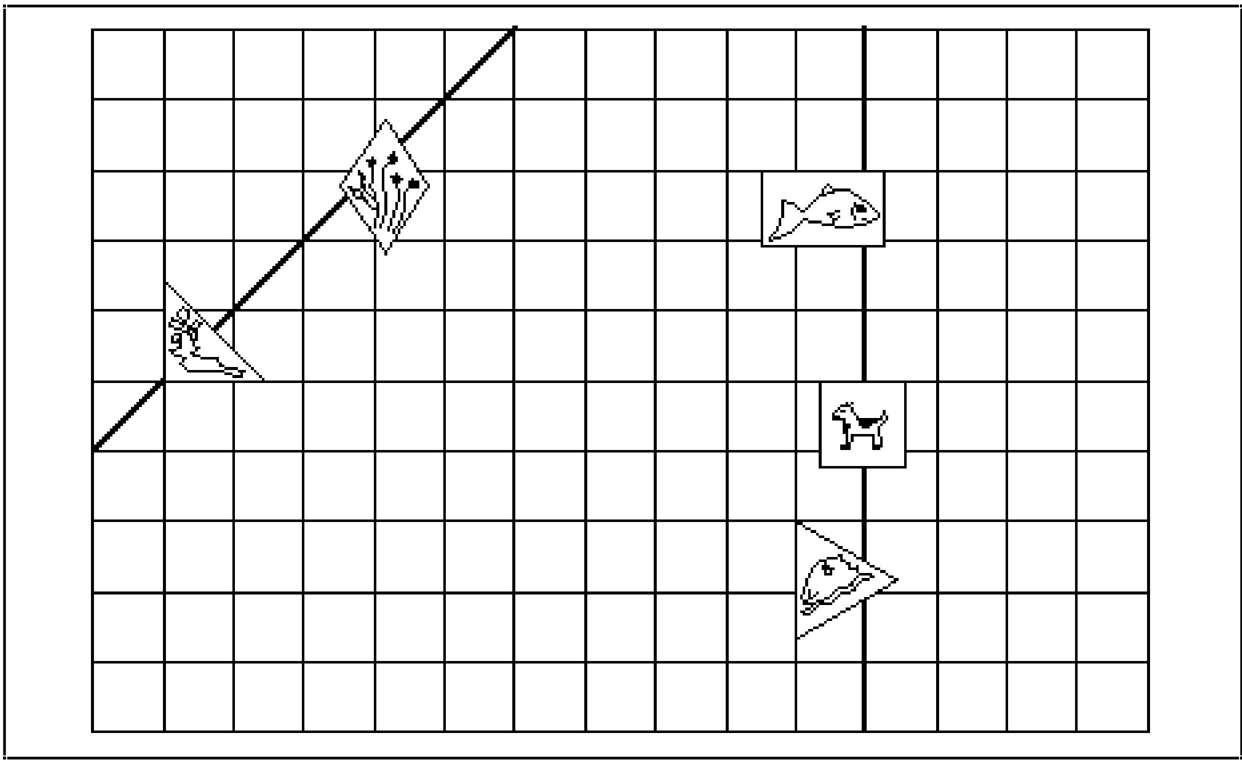


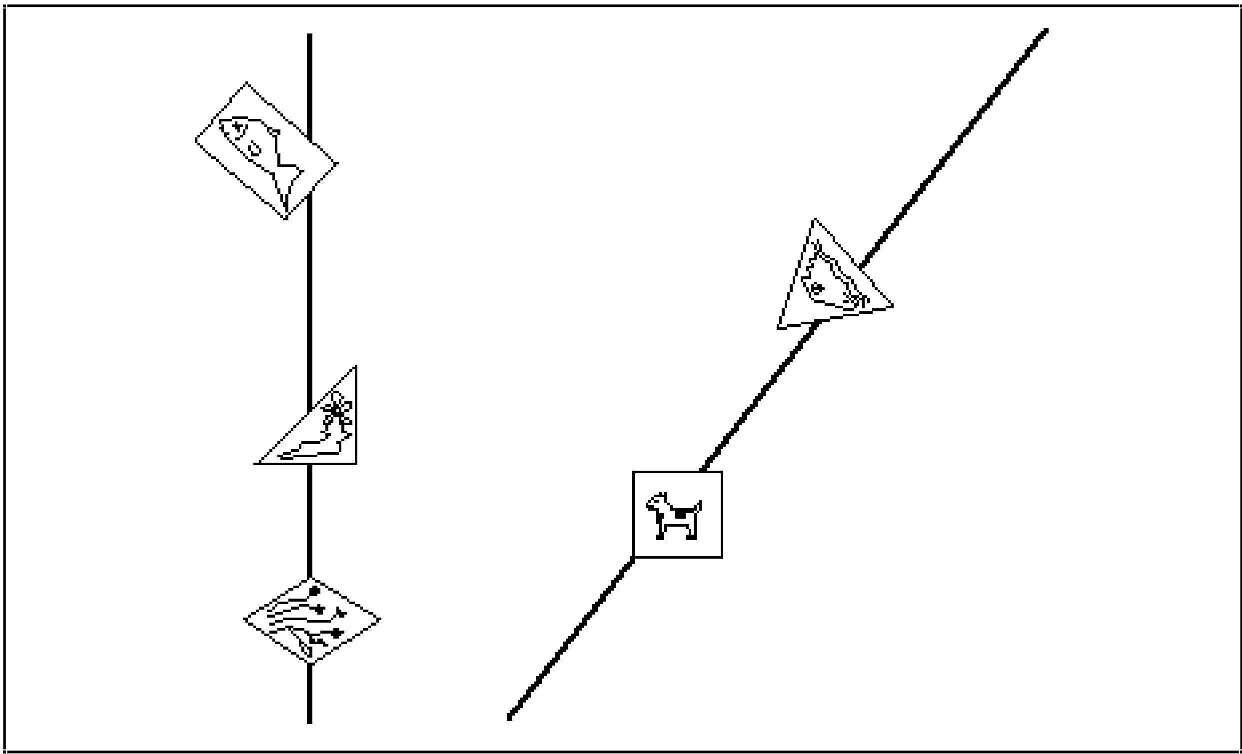


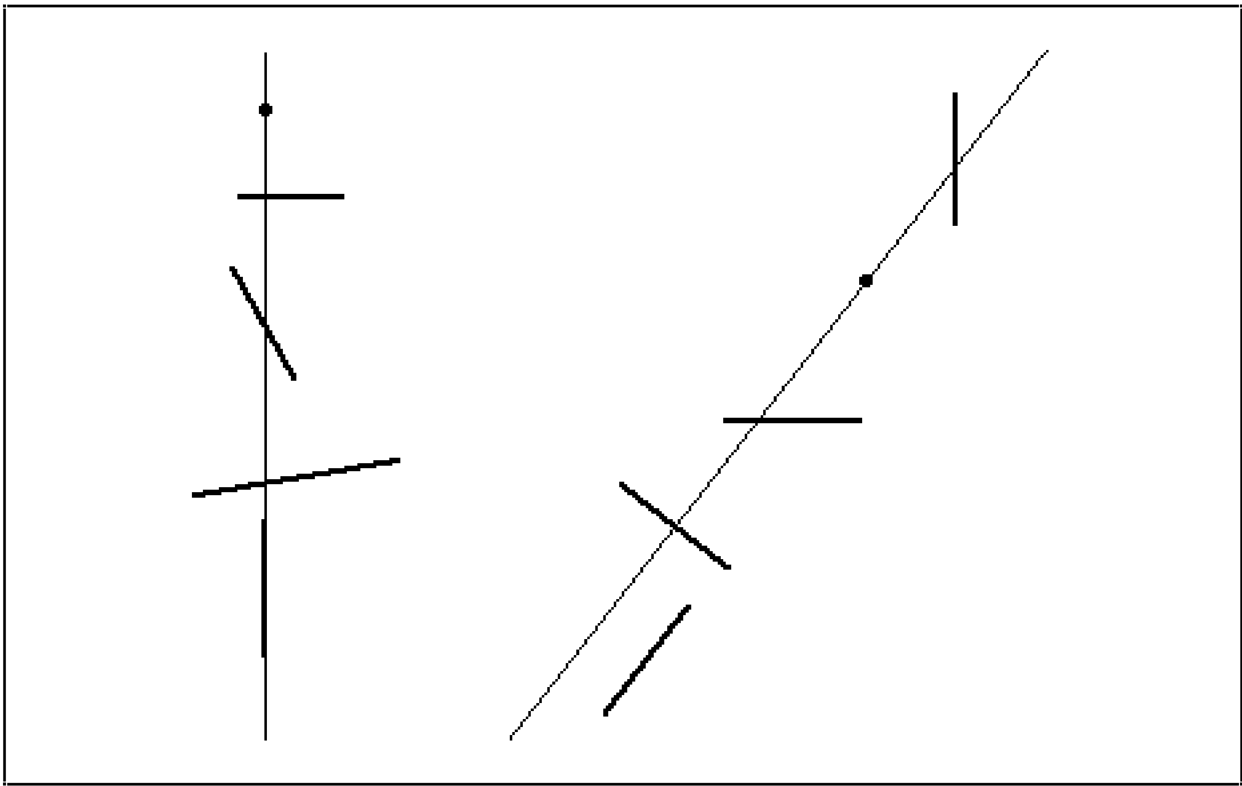


A4- Pedir a los estudiantes que definan lo que es una simetría. Analizar las diferentes definiciones propuestas. Plantear la definición usual de simetría a partir del procedimiento de obtención de figuras simétricas (consideración de la perpendicularidad y la equidistancia al eje) en caso de que no haya surgido espontáneamente.

A5- Obtener las imágenes de las figuras y los segmentos de las láminas por la simetría cuyo eje aparece dibujado (el eje debe cortar las figuras y segmentos). Explicar cómo proceder con el mira. Los alumnos deben explicar cómo obtener la imagen mediante equidistancia y perpendicularidad.







A6- Dados un punto y su imagen mediante una simetría, obtener el eje de dicha simetría (No se incluyen casos en los que el eje corte las figuras).

Dadas dos figuras simétricas, obtener el eje de simetría:

- Mediante la mediatriz de un punto y su imagen.
- Uniendo los puntos medios de dos segmentos.

A7- Aplicar a una figura la misma simetría dos veces consecutivas. Aplicar a otra figura la misma simetría tres veces consecutivas.

Repetir el ejercicio con otras figuras y ejes, aplicando las simetría 2, 3, 4, 5, … veces consecutivas. Observar los resultados y enunciar la propiedad general descubierta.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

Varias de las actividades anteriores no se incluyeron en las experimentaciones descritas en esta memoria. Parte de ellas han sido añadidas como consecuencia de las experimentaciones, para completar y mejorar la unidad de enseñanza. Las otras sí se utilizaron en varias unidades diseñadas para el aprendizaje de las simetrías, puestas en práctica en clases ordinarias completas, de 4º a 8º de E.G.B. y en Magisterio, durante el horario normal de clases, impartidas por los profesores habituales y formando parte de los contenidos del curso oficial. De estas experimentaciones no fue posible realizar un seguimiento detallado día a día que pueda ser incluido en esta memoria, pero los profesores de E.G.B. nos hacían resúmenes periódicos, más o menos minuciosos, del desarrollo e incidencias de las clases; en cuanto a Magisterio, nosotros hemos impartido durante varios años esos cursos, por lo que la información que poseemos es amplia.

El descubrimiento de la perpendicularidad y la equidistancia al eje es una de las actividades que no se han incluido en ninguna de las experimentaciones realizadas, tal como se plantean en la actividad A1. En los grupos del Ciclo Superior de E.G.B., el profesor hizo alusión directa a estas propiedades después de que los estudiantes realizaran algunos ejercicios de obtención de figuras simétricas, mientras que en Magisterio ya eran conocidas por la mayor parte de los alumnos, por lo que se procedió a recordarlas.

En las experimentaciones de 3º de E.G.B. se utilizaron actividades equivalentes a la A1 para traslaciones y giros, que produjeron buenos resultados para la introducción de las propiedades características de dichas isometrías. Este tipo de actividad también se reveló como un buen método de observación para el descubrimiento por los estudiantes de otras propiedades. Por ello creemos que resulta acertado comenzar la segunda fase del nivel 2 de las simetrías con la actividad A1 e iniciar así a los alumnos en las propiedades características de las simetrías. Aunque en el enunciado de esta actividad se indica que los estudiantes pueden emplear materiales que permiten obtener las imágenes de manera automática (mira o plegado), es conveniente que se sirvan de la regla, la escuadra y el compás cuando sean capaces. Aunque esto pueda suponer algo más de tiempo para realizar la actividad, su realización será más rica, ya que estos materiales obligan a utilizar conscientemente unas propiedades matemáticas de la simetría que, de otra manera quedan más ocultas.

La actividad A2 tiene como objetivo reforzar las ideas de equidistancia y perpendicularidad al eje y es un complemento de la anterior, pues al tener que reconocer y justificar las situaciones correctas se resaltan las características objeto de interés. La limitación en el uso de materiales manipulativos se hace con el fin de impulsar a los estudiantes a usar estas características matemáticas de las simetrías, pues es necesario reducir al mínimo el uso de los materiales propios del nivel 1 (mira, plegado y espejo). Esta actividad tampoco estuvo incluida en las unidades de enseñanza de las experimentaciones resumidas en esta memoria, pero sí se utilizó en la Escuela de Magisterio y resultó útil para alumnos de Magisterio con conocimientos escasos o nulos sobre las isometrías del plano.

La actividad A3 supone un paso más hacia la utilización explícita de la definición de simetría axial, propia del razonamiento del nivel 2, por lo que se debe forzar a los estudiantes a usar los instrumentos de dibujo. En la experimentación llevada a cabo en Magisterio se pudo observar que éste fue el método seguido por Merche. También fue el método utilizado por la mayor parte de los estudiantes del Ciclo Superior de E.G.B. y de Magisterio, una vez que habían descubierto y comprendido la concepción de la simetría basada en sus características de perpendicularidad y equidistancia al eje.

Las tres primeras actividades presentan a los estudiantes las propiedades básicas de las simetrías desde diferentes puntos de vista. Así pues, al realizar la actividad A4 los estudiantes ya deben disponer de la información y la experiencia suficientes para poder dar una definición de simetría axial, entender el significado de otras definiciones diferentes y juzgarlas. Por lo tanto, con esta actividad se pretende, en primer lugar, que los estudiantes proporcionen sus propias definiciones de simetría axial (entendiendo la palabra "definición" de acuerdo con las características del nivel 2 de Van Hiele). Aunque, posiblemente, los estudiantes incluyan algunas propiedades irrelevantes en sus definiciones, el profesor no debe rechazarlas, salvo que sean erróneas, pero sí debe procurar que siempre aparezcan explícitamente las características fundamentales (perpendicularidad y equidistancia del eje). En una clase normal, generalmente los estudiantes propondrán varias definiciones diferentes, por lo que la actividad debe continuar con una discusión, orientada y controlada por el profesor, sobre la validez de las diferentes definiciones.

En la experimentación de Magisterio se produjo una situación usual: Merche, a lo largo de las primeras sesiones, resolvió diversas actividades en las que tuvo que utilizar las propiedades características de las simetrías para resolver la actividad o para justificar su respuesta. Esto hizo que fuera creando su propia definición de simetría, a pesar de que en dichas actividades no se le pidió que definiera explícitamente las simetrías. Pero al llegar, en la cuarta sesión, a la actividad 19 de la experimentación en la que la profesora le presentó varios enunciados, para que Merche dijera si eran ciertos o no, reconoció en uno de ellos la definición de simetría. El enunciado era: *Al unir un punto de una figura con su imagen, el eje de simetría pasa siempre por el punto medio de ese segmento.* La respuesta de Merche fue:

Merche: *Esa es la definición de simetría, ¿no? … O sea, un punto y su imagen, la mediatriz siempre tiene que estar a … siempre tiene que ser el eje, ¿no?*

La obtención de la imagen de una figura cortada por el eje de simetría, se ha revelado problemática si se propone a estudiantes que todavía no han alcanzado el segundo nivel de razonamiento, ya que no aparece directamente por ninguna de las técnicas auxiliares propias del primer nivel de razonamiento (espejo, mira o plegado), sino que requiere la división de la figura en dos partes (a ambos lados del eje) y la consideración independiente de cada una de ellas. Los estudiantes de E.G.B. y de Magisterio que se enfrentan a la actividad A5 por primera vez, generalmente no son capaces de resolverla de inmediato y necesitan con frecuencia la dirección del profesor para descomponer la figura en dos partes y prestar atención a cada una de ellas por separado, pero sin perder la coordinación del segmento que las une. No obstante, una vez que se les sugiere tal descomposición, centrada la situación en la obtención de puntos imagen, mediante la perpendicularidad y la equidistancia, les permite obtener la imagen requerida.

En la experimentación de Magisterio se aprecia que, al encontrarse la estudiante ya desde el principio en el nivel 2, resolvió la situación sin dificultad. En las láminas usadas en la primera sesión, como parte de las actividades de la fase 1, aparecían algunas figuras situadas encima del eje de simetría y en otras actividades posteriores, de esta segunda fase, también tuvo la estudiante que colocar o dibujar las imágenes de figuras o segmentos situados sobre el eje. En ningún momento se apreció ninguna dificultad por el hecho de que las figuras estuvieran sobre el eje; los errores que cometió no fueron particulares de estos casos, sino que se debían a falsas concepciones o despistes y correspondían, casi siempre, a algunos de los errores típicos de las simetrías detectados por diversas investigaciones (Grenier, 1988; Jaime, Gutiérrez, 1989 b; Küchemann, 1981).

Un requisito para poder adquirir completamente el segundo nivel de razonamiento en cualquiera de las isometrías es haber adquirido previamente el segundo nivel en el campo de las figuras geométricas planas, ya que la realización de cualquiera de los movimientos obliga a seleccionar partes de las figuras (puntos o segmentos generalmente), a relacionarlas con las correspondientes partes de la figura imagen y también a considerar algunas propiedades como igualdad de longitudes o ángulos, paralelismo, perpendicularidad, etc., todo lo cual son destrezas propias del nivel 2. En el aprendizaje de las simetrías es donde se puede reconocer más claramente dicha necesidad previa, ya que ésta es la única de las tres isometrías que estamos tratando que obliga a dividir una figura en dos partes y a considerarlas como dos figuras relacionadas pero independientes.

La comprensión de las características de las simetrías permite, en la actividad A6, la obtención de manera precisa del eje de simetría a partir de un par de figuras simétricas. Es importante que los estudiantes practiquen con una variedad de ejercicios en los que haya casos de diferentes posiciones de ejes y de figuras, con el fin de evitar la generación de concepciones erróneas o parciales y de estrategias particulares que sólo sirvan para determinadas situaciones.

En las experimentaciones de los diversos cursos tuvimos cuidado de proporcionar a los estudiantes tal variedad de situaciones en las actividades de los diferentes niveles y fases y, en particular, en los ejercicios directamente vinculados a los que ahora comentamos (ejercicios del mismo tipo que la actividad A7 de la fase 2 del nivel 1 la A6 de la fase que estamos comentando ahora). En la experimentación de 3º de E.G.B., los estudiantes resolvieron estas actividades (u otras similares) de manera visual, ya que se encontraban en el nivel 1, usando el mira o plegado para encontrar el eje de simetría, mientras que en la experimentación de Magisterio las actividades de este tipo se resolvieron mediante trazado de segmentos y determinación de mediatrices o de puntos medios, métodos que corresponden al nivel 2. Hay que destacar que, en esas actividades, omitimos situaciones en las que el eje cortaba las figuras, situación que en la propuesta actual no hemos descuidado, al incluirlas en la fase 4.

La actividad A6 está dividida en dos partes, que corresponden a dos grados de complejidad de las situaciones planteadas. En primer lugar se trabaja con la herramienta básica de determinación del eje de simetría, su interpretación como mediatriz del segmento que une cada punto y su imagen. Las dos técnicas de obtención de ejes de simetría presentadas en la segunda parte de la actividad completan la aplicación de este método, ofreciendo una interpretación alternativa, prácticamente más sencilla (pues es más fácil trazar dos segmentos y unir sus puntos medios que trazar la mediatriz de un segmento) pero conceptualmente más compleja (pues se basa en dos propiedades del eje de simetría, mediatriz común a todos los segmentos, en vez de en una sola propiedad, mediatriz del segmento). Esta doble visión es interesante, pues con posterioridad, en el nivel 3, se puede discutir sobre la necesidad o la suficiencia de considerar todas las propiedades en cada método.

Las dos técnicas presentadas en la segunda parte de la actividad A6 surgieron en la experimentación de Magisterio. La primera actividad de este tipo que se presentó a la estudiante de Magisterio consistió en dibujar el eje de simetría de un par de figuras simétricas y no le proporcionaba ninguna indicación sobre la forma de resolver el problema. La estudiante seguía justificando sus soluciones mediante propiedades matemáticas de las simetrías, aunque algunas veces incluía explicaciones de tipo visual. En este caso (actividad 12 de la experimentación), Merche situó la regla aproximadamente en la posición del eje y dijo:

Merche: *Sería perpendicular, ¿no?*

Prof.: *Ahora te lo pido exacto. Tú has dicho que* [el eje] *es perpendicular y has colocado la regla aproximadamente por en medio.*

Merche: *De un punto a su imagen y pasaría por la mitad. Mediría 2* [Merche usa dos puntos y sus respectivas imágenes y une los puntos medios de los dos segmentos].

Prof.: *¿Dos puntos?*

Merche: *O sea, 4. Dos de cada figura* [dos puntos de la figura original y sus respectivas imágenes].

Prof.: *Y si midieras uno y su imagen, ¿quedaría determinado el eje? En vez de dos, ¿si cogieras uno quedaría determinada la imagen?*
Merche: *No, porque no sabes por dónde va la recta.*

La idempotencia de las simetrías es una propiedad fácil de descubrir y de generalizar por los estudiantes que se encuentran accediendo al nivel 2 de razonamiento, por lo que la actividad A7 no debe presentar especial dificultad una vez comprendido que se debe aplicar la misma simetría varias veces seguidas a las sucesivas imágenes.

Es importante aprovechar las actividades de esta fase para promover en los estudiantes la necesidad de comprobar la validez de los resultados mediante la utilización de todas las propiedades contenidas en la definición del concepto o, si ello no es posible, de las que se hayan establecido como suficientes, y comprender que la limitación a la verificación de una propiedad puede producir resultados incorrectos. De esta manera, gradualmente se va incrementando el grado de exigencia en el razonamiento del individuo que con posterioridad, en el nivel 3, desembocará en demostraciones informales y en el inicio de la demostración formal. La actividad A6, por ejemplo, se presta a ello, pues es relativamente fácil que los estudiantes identifiquen como sí/no simétricas dos figuras que realmente no/sí lo son. Las propias respuestas de los estudiantes deben servir para hacerles ver que, además de poder trazar la mediatriz de un segmento o la recta que pasa por los puntos medios de dos segmentos, se necesitan determinados requisitos para que dos figuras sean simétricas. En la experimentación de Magisterio, Merche identificó como simétricos el par de zapatos de la figura lámina M-S-12 (para los que hay una simetría en deslizamiento), pero al intentar trazar el eje, uniendo dos puntos con sus respectivas imágenes, se dio cuenta de su error ya que sabía que esos segmentos deberían ser paralelos.

Fase 4 del Nivel 2

Objetivos:

1- Utilizar propiedades de las simetrías descubiertas anteriormente.

2- Componer dos simetrías y determinar la isometría resultante. Verificar la ausencia de conmutatividad de la composición de simetrías.

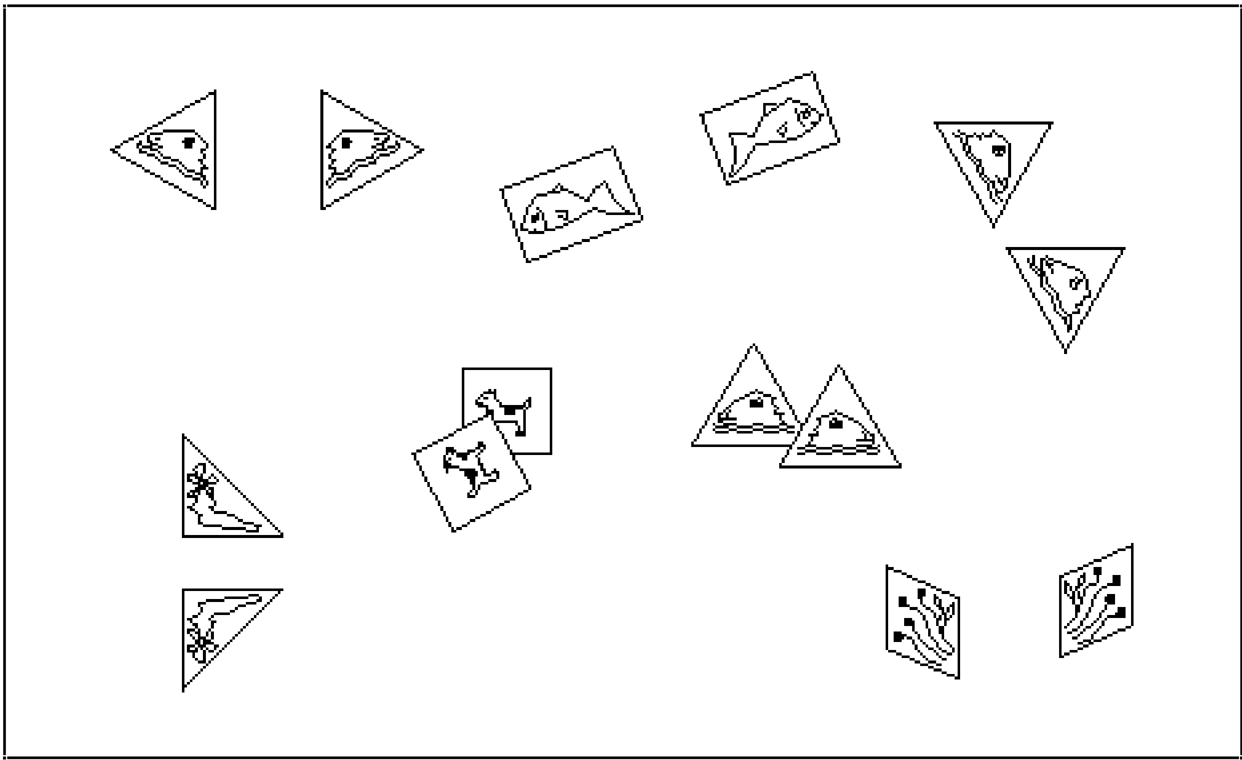
3- Comprender y utilizar el vocabulario y la notación formales asociados a las simetrías y su composición.

4- Introducir la simetría en deslizamiento y sus características básicas.

5- Descubrir experimentalmente y utilizar otras propiedades de las isometrías relacionadas con las simetrías.

Actividades:

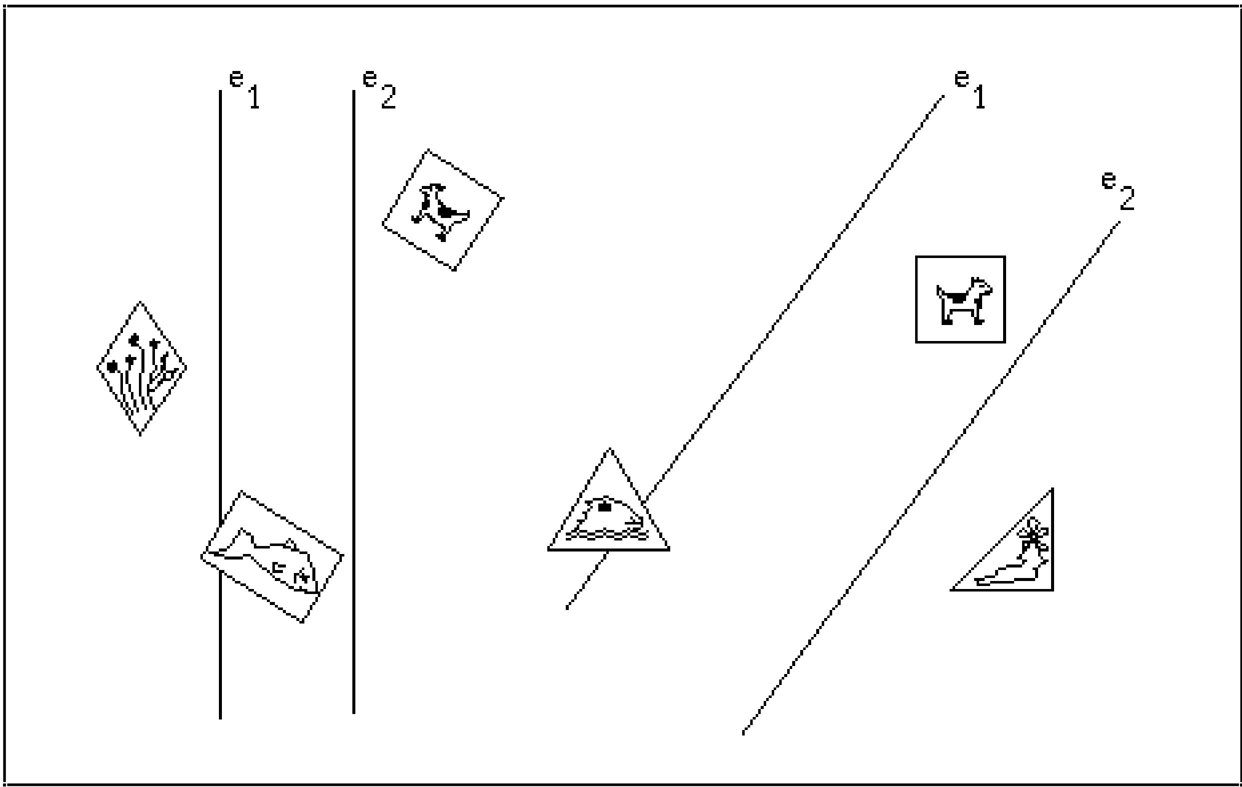
A1- Dados varios pares de figuras, identificar los que corresponden a dos figuras simétricas (incluir casos en los que las figuras se corten). En cada situación, dibujar el eje de simetría o justificar por qué las figuras no son simétricas.



A2- Dadas una figura y la simetría S_e, determinar la cantidad mínima de puntos-imagen necesarios para poder situar con exactitud la figura imagen. Estudiar las diferencias según que el eje de simetría toque la figura o sea exterior a ella.

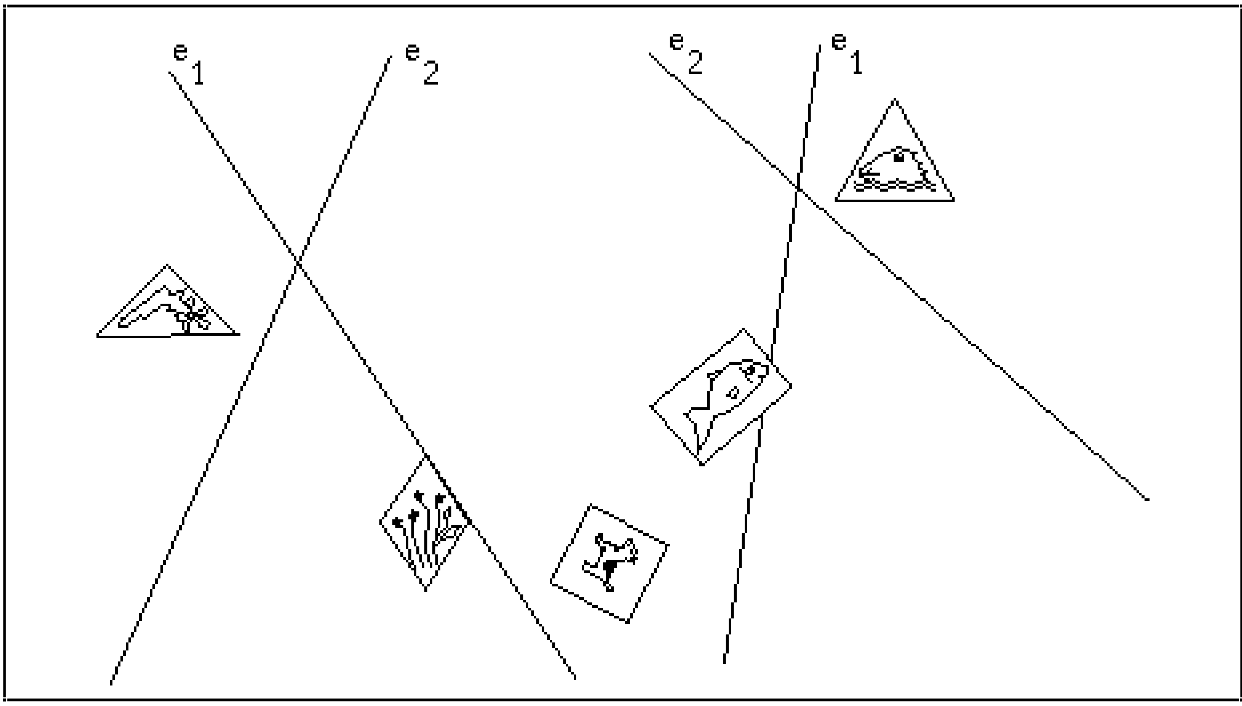
A3- Dados una figura y los ejes de simetrías paralelos e_1 y e_2, aplicarle a la figura la simetría S_1 y a su imagen la simetría S_2 (introducir el concepto de composición de simetrías). Determinar el movimiento que permite pasar directamente de la desde la figura inicial hasta la última imagen obtenida, indicando las características de dicho movimiento.

Repetir el ejercicio con otras figuras y pares de ejes paralelos. Generalizar el resultado.



A4- Dados una figura y dos ejes de simetrías que se cortan, e_1 y e_2, aplicarle a la figura la simetría S_1 y a su imagen la simetría S_2. Determinar el movimiento que permite pasar directamente desde la figura inicial hasta la última imagen obtenida, indicando las características de dicho movimiento.

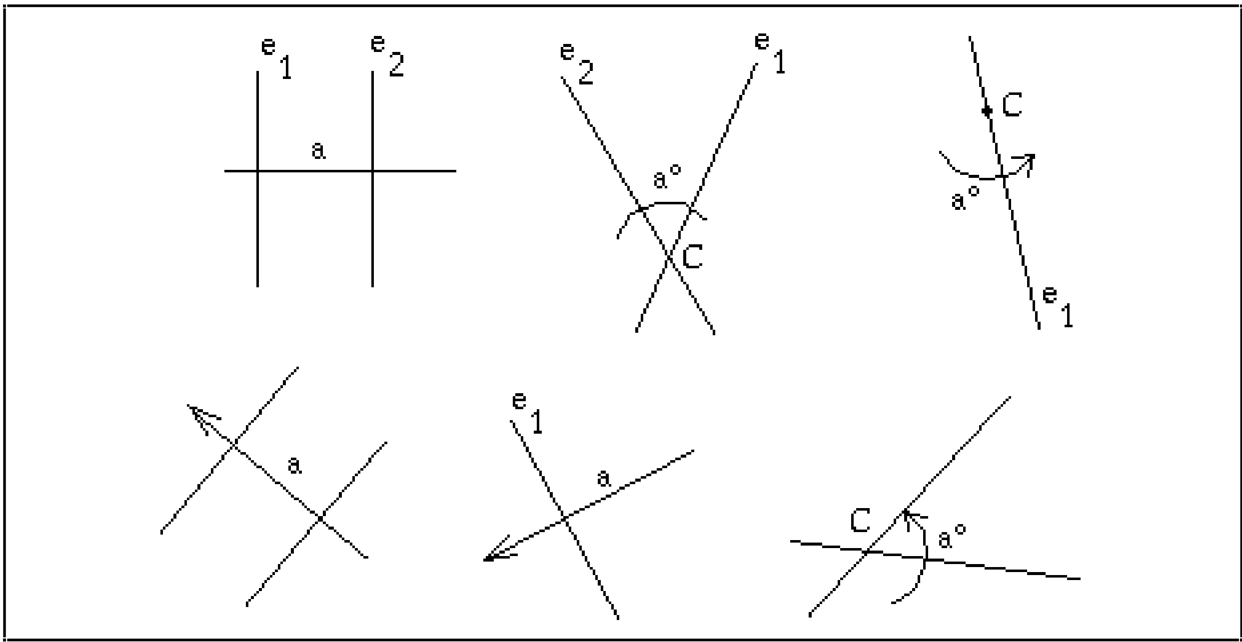
Repetir el ejercicio con otras figuras y pares de ejes que se corten. Generalizar el resultado.



A5- En la lámina se dan algunas características de las simetrías S_1 y S_2 y del movimiento (traslación o giro) resultante de la composición $S_2 \circ S_1$. Completar las características que faltan de dichos movimientos, para que cada uno de ellos quede completamente identificado.

Una vez obtenidas todas las características de cada isometría, verificarlas aplicando a una figura la composición $S_2 \circ S_1$ y el movimiento equivalente.

Repetir el ejercicio con los otros pares de simetrías de la lámina y el movimiento equivalente a su composición.

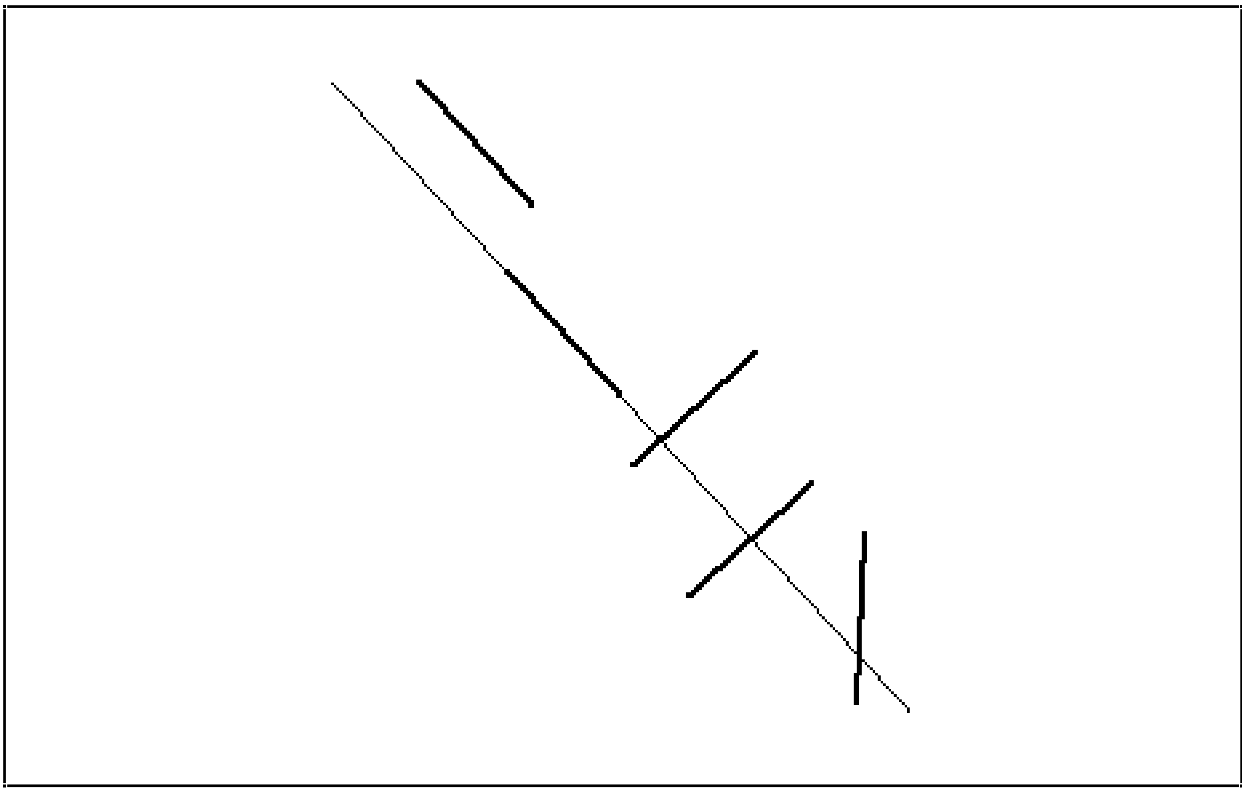


A6- Proporcionar a los estudiantes el enunciado de alguna propiedad relacionada con las simetrías y pedirles que la verifiquen y justifiquen si es cierta siempre, en algunos casos concretos o nunca. Por ejemplo:

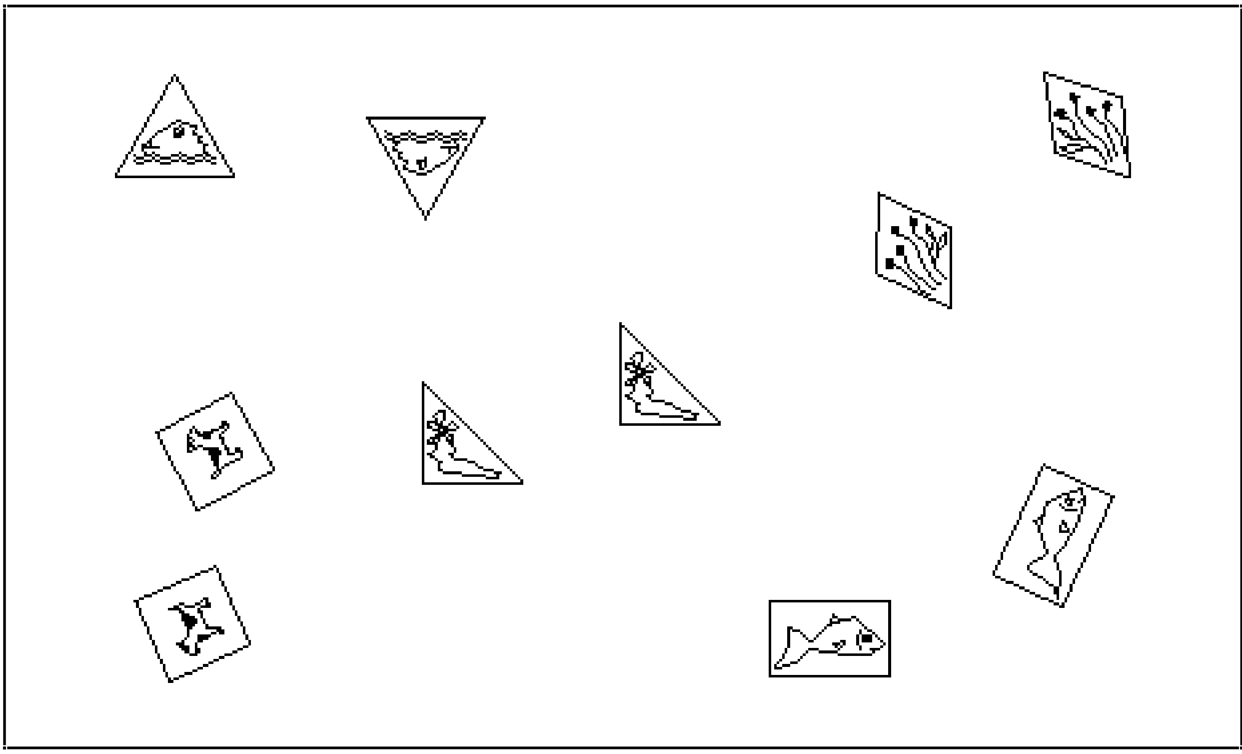
i) Sea R' la imagen de R por la simetría S_e y sea P un punto del eje *e*. a) ¿Qué tipo de triángulo, según sus lados y según sus ángulos, es ΔPRR'? b) Si se coloca P en otro lugar del eje de simetría, ¿será el triángulo ΔPRR' siempre del mismo tipo? c) Si se colocan R en otro lugar de la figura y R' en la posición correspondiente, ¿será el triángulo ΔPRR' siempre del mismo tipo?

ii) Si Q' es la imagen de Q por una simetría, entonces Q' ≠ Q.

A7- Dados varios segmentos y un eje de simetría, dibujar las imágenes de los segmentos por dicha simetría. Generalizar los resultados referentes a las posibles posiciones relativas de un segmento y su imagen.

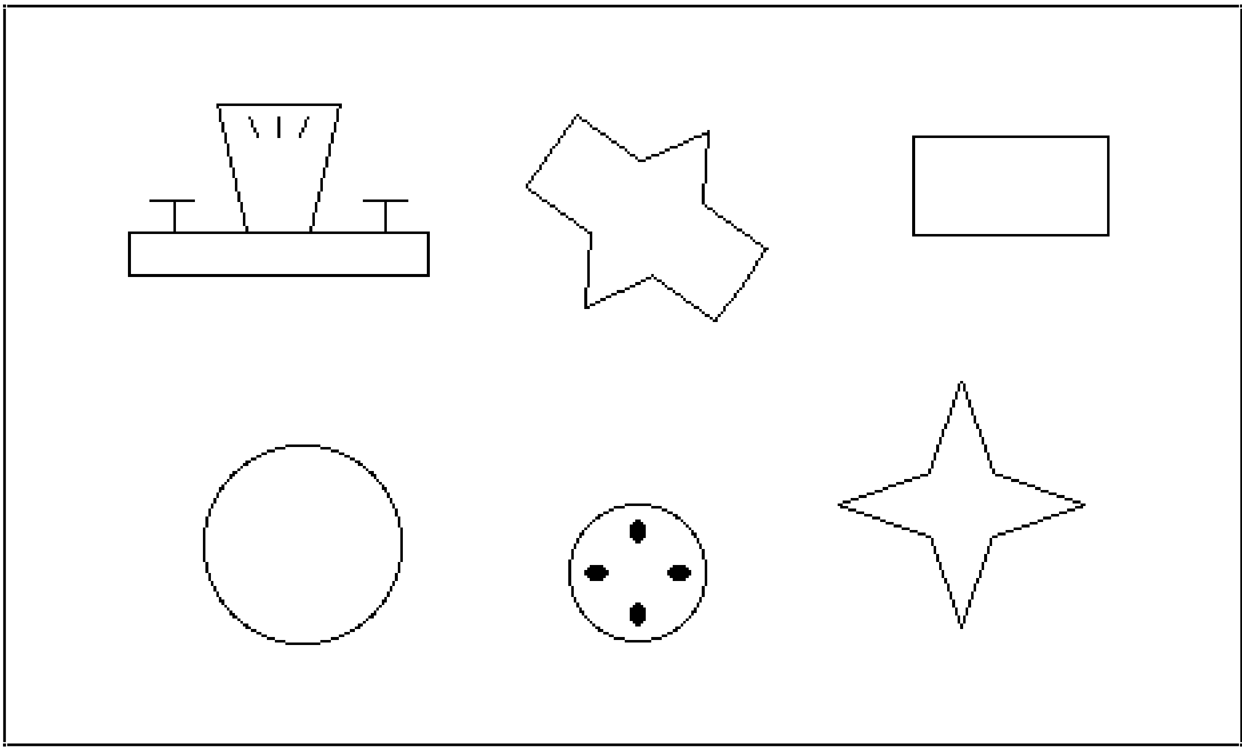


A8- Se dan varios pares de figuras congruentes. Determinar cuándo es posible pasar de una figura a la otra mediante una isometría simple (traslación, giro o simetría). Estudiar, en particular, los casos de pares de figuras con la misma o diferente orientación y aquellos pares en los que coinciden un punto y su homólogo, o en los que coinciden varios puntos y sus respectivos homólogos.

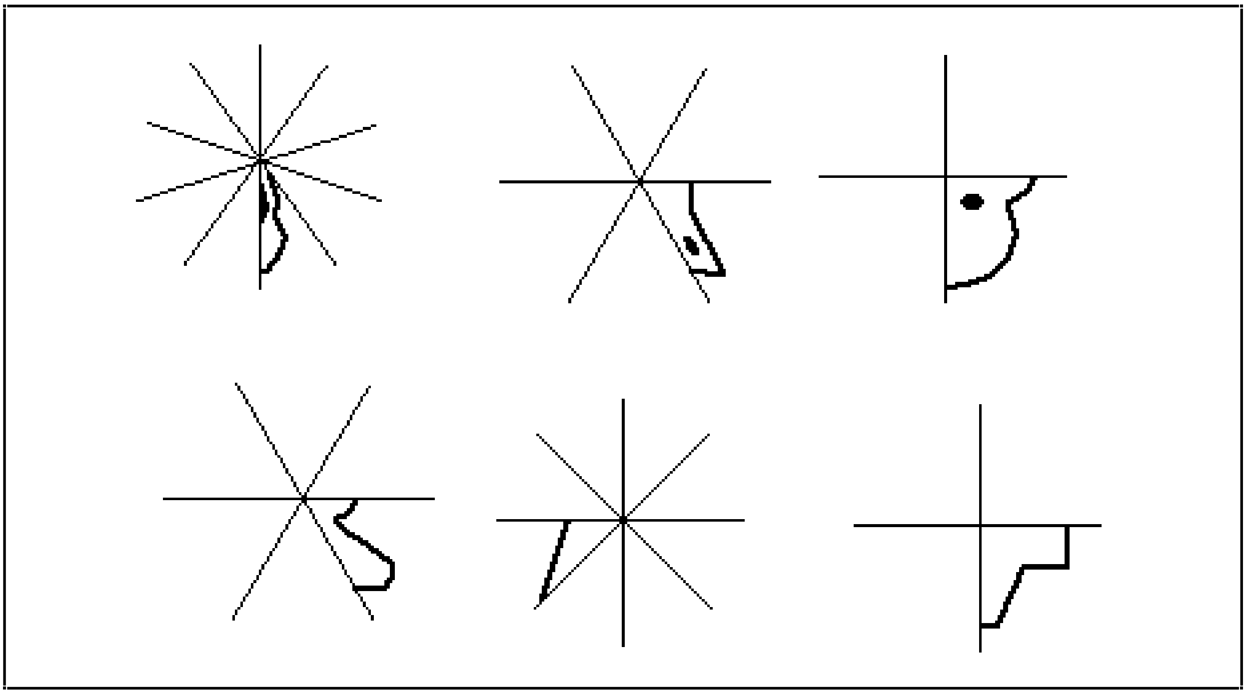


A9- Introducir el concepto de simetría en deslizamiento y mostrar varios ejemplos a los estudiantes. Dadas una figura y una simetría en deslizamiento, aplicar dicho movimiento a la figura.

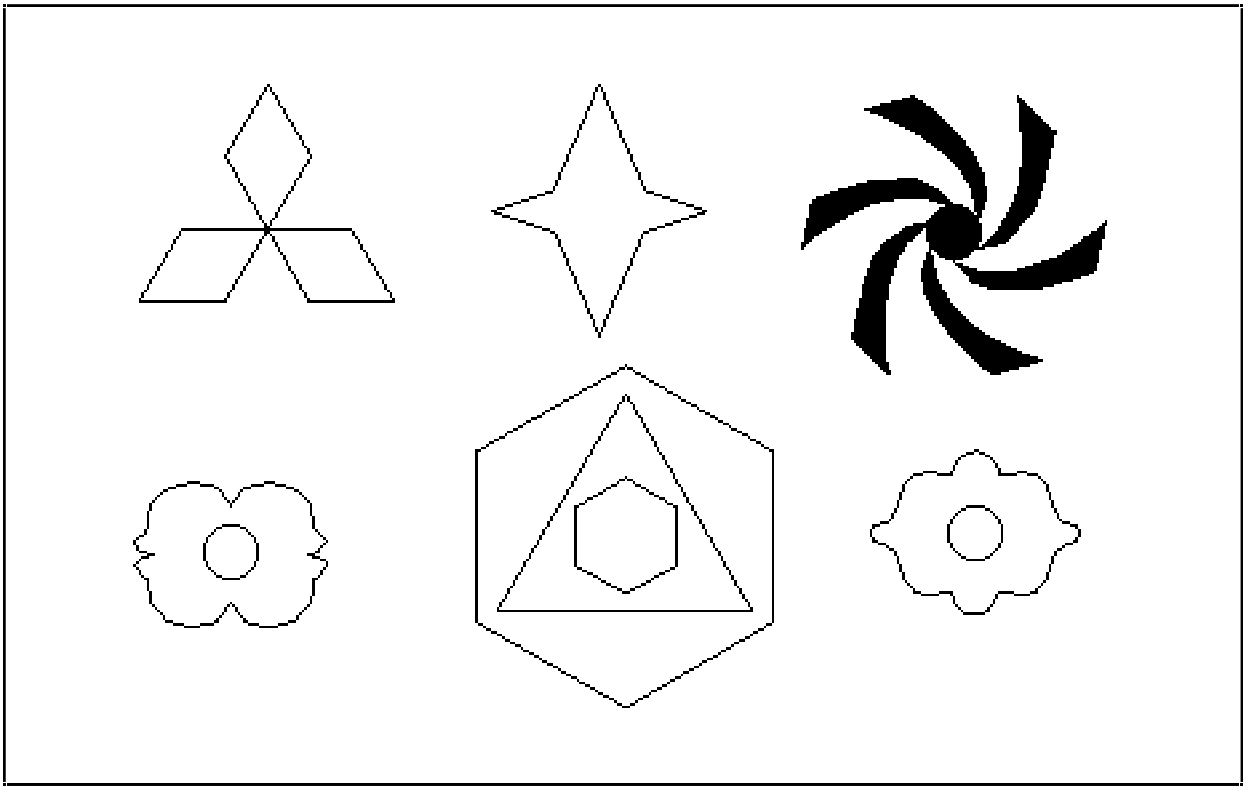
A10- Obtener todos los ejes de simetría de las figuras dadas.



A11- Presentar a los estudiantes varios rosetones generados por simetrías. Dados una parte de una figura y los ejes de simetría de dicha figura, dibujar la figura completa.



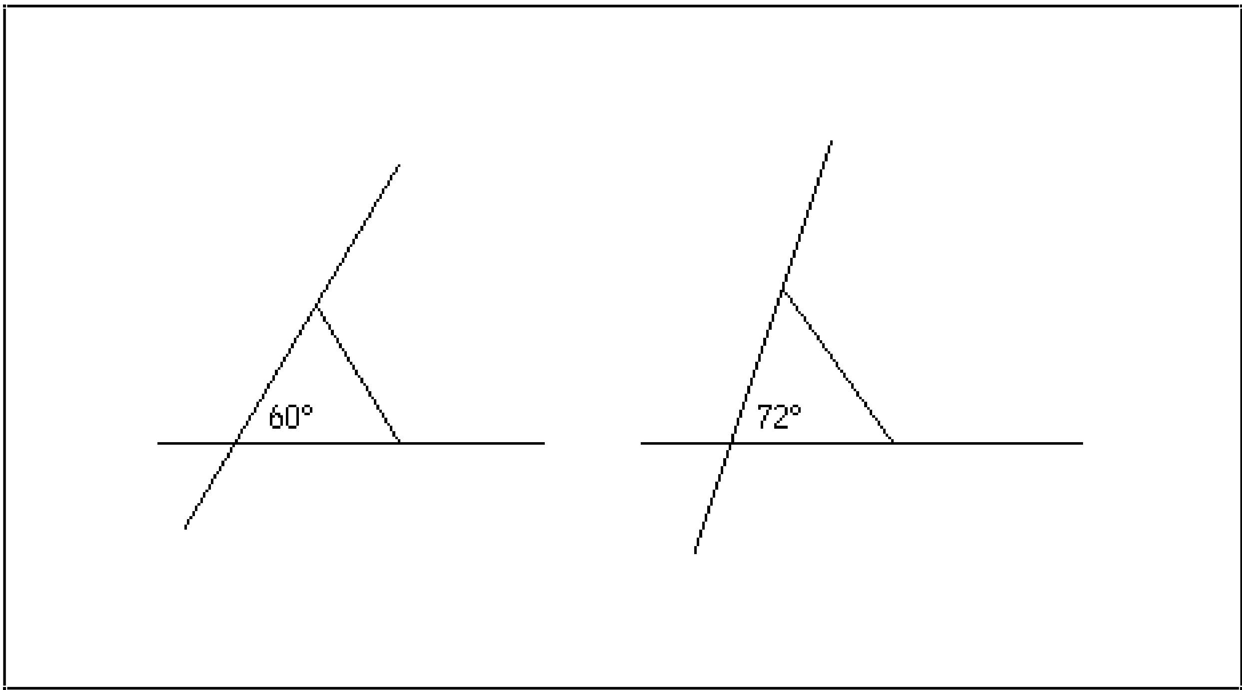
A12- Para cada figura, obtener el motivo mínimo que, mediante la aplicación de simetrías, permita la reproducción de la figura completa.



A13- Dibujar o construir figuras que tengan 1, 2, 3 ó 4 ejes de simetría. Explicar algún procedimiento para obtener figuras con más ejes de simetría.

A14- Averiguar si puede generar un rosetón mediante las simetrías que pasen por los dos lados del triángulo marcados en la lámina. Cuando sea posible generarlo, indicar la cantidad de celdas que tendrá el rosetón.

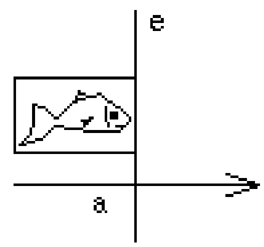
Determinar el ángulo que debe haber entre dos ejes de simetría consecutivos para que generen un rosetón formado por … (indicar el número de celdas). Generalizar los resultados de esta actividad, referentes a la relación entre el número de celdas del rosetón y el valor del ángulo entre los ejes de simetría que lo generan. Indicar algunos casos en los que no sea posible construir un rosetón.



A15- Construir un friso a partir del rectángulo dado, tomando como sistema generador S_e y T_a. El lado mayor del rectángulo mide la mitad que el vector *a* (el rectángulo debe tener un dibujo no simétrico).

Después de construido el friso, fijar una celda y explicar dónde y cómo se situará la imagen de esa celda al aplicarle la simetría S_e.

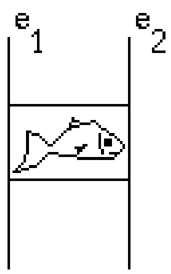
Fijar una celda y señalar las celdas desde las cuales alguno de los movimientos generadores permite llegar hasta ella.



A16- Construir un friso a partir del rectángulo dado, tomando como sistema generador S_1 y S_2 (el rectángulo debe tener un dibujo no simétrico).

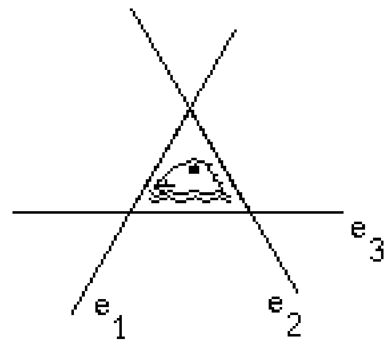
Después de construido el friso, fijar una celda y explicar dónde y cómo se situará la imagen de esa celda al aplicarle la simetría S_1.

Fijar una celda y señalar las celdas desde las cuales alguno de los movimientos generadores permite llegar hasta ella.



A17- Construir un mosaico a partir del triángulo (equilátero) dado, tomando como sistema generador S_1, S_2 y S_3 (el triángulo debe tener un dibujo no simétrico).

Determinar la cantidad de ejes de simetría necesarios y sus posiciones para generar un mosaico a partir de un rectángulo en vez de un triángulo.



- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

En la actividad A6 de la fase 2 se introdujeron los procedimientos para la obtención del eje de simetría entre dos figura simétricas. En la actividad A1 de esta fase los estudiantes deben aplicar esos y otros conocimientos, primero para identificar los pares de figuras que se corresponden mediante una simetría, debiendo realizar las verificaciones y justificaciones oportunas, y después para encontrar los ejes de simetría de los pares que sí sean simétricos. Se incluyen casos en los que el eje corte a las figuras, situación que no se presentó en la actividad semejante de la fase 2 de este mismo nivel.

Las actividades A3 y A4 tienen como objetivo estudiar la composición de simetrías, para que los estudiantes descubran por sus propios medios el resultado de cada caso y la relación existente entre las simetrías que intervienen en la composición y el movimiento resultante. Estas van seguidas por la actividad A5, que plantea algunos problemas de aplicación de los resultados anteriores y que, en la práctica, se puede dividir en dos partes, una correspondiente a simetrías de ejes paralelos y la otra a simetrías de ejes que se cortan. Es necesario esperar a la fase 4 para plantear estas actividades porque, a diferencia de lo que ocurre con las traslaciones y los giros del mismo centro, para la realización de composiciones de simetrías y el análisis de los resultados, no sólo se necesita aplicar los conocimientos sobre simetrías adquiridos en la segunda fase, sino coordinar estos conocimientos con los referentes a traslaciones y giros.

En la experimentación de Magisterio propusimos estas actividades seguidas de algunas de aplicación directa del resultado para afianzarlo. La estudiante no tuvo ninguna dificultad en reconocer que, con los ejes paralelos, el resultado es una traslación, ni que su vector es perpendicular a los ejes de simetría. A continuación, al realizar las composiciones $S_1 \circ S_2$ y $S_2 \circ S_1$ con los mismos ejes y la misma figura, la estudiante, antes de empezar a calcular la segunda composición, dijo (actividad 21 de la experimentación) que esperaba que saliera *hacia el lado contrario, pero el vector será el mismo. Difiere en el sentido,* tras lo cual dedujo fácilmente la relación de los ejes de simetría con el módulo y sentido del vector de la traslación.

En el caso de los ejes que se cortan, la relación entre la figura inicial y la imagen final no es tan evidente, por lo que la estudiante de Magisterio, al principio, no la reconoció. Sin embargo, al preguntarle la profesora directamente por el movimiento que relacionaba dichas figuras, sí lo identificó como un giro. A continuación, al calcular el centro del giro y ver que coincidía con el punto de corte de los ejes, ya relacionó el giro con las simetrías. No obstante, la estudiante no observó la similitud entre el resultado que había obtenido en el caso de composición de simetrías con ejes paralelos y el que estaba obteniendo con simetrías cuyos ejes se cortan. Esto es una señal de que la estudiante todavía no razona en el nivel 3, si bien ya tiene una buena adquisición del nivel 2 pues, una vez obtenida la relación completa entre los ejes de simetría y el giro resultante de la composición, la estudiante sí fue capaz de relacionar los dos casos y resolver inmediata y correctamente actividades similares a otras realizadas antes con simetrías de ejes paralelos.

La forma de trabajar de esta alumna, al resolver las actividades de composición de simetrías durante las experimentaciones, es un ejemplo típico de los estudiantes de Magisterio, pues el comportamiento mayoritario de los estudiantes de grupos ordinarios de Magisterio que han trabajado con estas actividades, u otras similares, es análogo al de ella en cuanto a la forma de reaccionar, las respuestas típicas, las partes más fáciles o más difíciles, etc.

El descubrimiento y la verificación de propiedades matemáticas de cada isometría es un objetivo central del nivel 2 de razonamiento, por lo que en la segunda fase se guía a los estudiantes para que comprendan y aprendan las propiedades básicas y en la cuarta fase se les proponen actividades en las que, aplicando de modo directo los conocimientos obtenidos en la fase 2, deben descubrir otras propiedades importantes de los movimientos. En la actividad A6 hemos planteado dos de estas propiedades de las simetrías. Al igual que en los bloques de actividades de giros o traslaciones, estas propiedades hay que entenderlas sólo como ejemplos de lo que sugerimos a los profesores como contenido de esta actividad y pueden ser sustituidas o complementadas con otras propiedades.

La actividad A7 tiene una finalidad similar a la anterior. La experiencia que han adquirido anteriormente en el uso de las simetrías debe permitirles a los estudiantes resolver el problema planteado en dicha actividad, estudiando cuándo la imagen de un segmento es él mismo, cuándo se solapan parcialmente, cuándo son disjuntos, etc. En las experimentaciones de 3º de E.G.B. y de Magisterio se planteó una actividad análoga a la A7 (actividad 15 de la experimentación de 3º y actividad 11 de la experimentación de Magisterio).

Los estudiantes de 3º la resolvieron correctamente, si bien sólo se les planteó simetrizar segmentos concretos. Ello nos sorprendió, ya que esta actividad resulta difícil para estudiantes que no comprenden bien el concepto de simetría, o que comienzan la adquisición del nivel 2. En las diversas experiencias que hemos realizado con grupos ordinarios de diversos cursos de los Ciclos Medio y Superior de E.G.B., numerosos estudiantes han cometido errores en esta actividad, siendo dichos errores muy sistemáticos y característicos de cada posición relativa de los segmentos y el eje de simetría (Jaime, Gutiérrez, 1989 b). En cuanto a la experimentación de Magisterio, sí se presentó una actividad análoga a la A7, incluyendo el planteamiento general antes de la solución de segmentos concretos. También nuestra alumna la resolvió, distinguiendo en el enfoque de la solución general, entre las situaciones de perpendicularidad, paralelismo y otra inclinación de los segmentos respecto del eje de simetría.

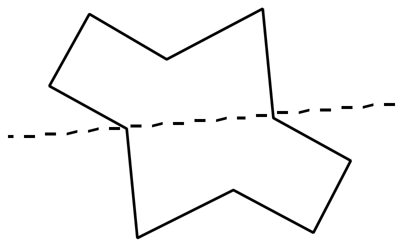
A la actividad A8 hay que darle un enfoque experimental: Los alumnos observarán que, en los casos que se les presentan, siempre hay un giro o una traslación entre las figuras no son inversas y que cuando las figuras son inversas no siempre existe una isometría simple que transforme una figura en la otra, tratándose de una simetría en caso de que sí haya. En la experimentación de Magisterio se observó la necesidad de incluir en la secuencia de enseñanza un actividad análoga a la A8 puesto que, desde el enfoque de razonamiento general que pretendíamos conseguir en el nivel 3, análogo al que ahora deseamos, se utilizaba directamente la propiedad desarrollada en esa actividad como base de muchas justificaciones.

La justificación informal de la propiedad anterior corresponde al nivel 3, donde se puede además ampliar a la situación de figuras inversas entre las cuales no hay una simetría axial, pero sí la composición de una simetría con cualquiera de las isometrías directas. En la unidad de enseñanza que proponemos, la existencia de traslación o giro entre figuras directas, está contemplada como objetivo en el tercer nivel de los giros, completándola ahora, en el apartado de las simetrías, para las figuras inversas. Sin embargo, si se desea plantear el hecho de que siempre hay una isometría simple que permite pasar de una figura a otra congruente, y/o trabajar con al estructura algebraica completa de las isometrías del plano, es necesario introducir previamente la **simetría en deslizamiento**. Por otra parte, dado que la propuesta que hacemos tiene como objetivo conseguir que los estudiantes adquieran una visión global completa de las isometrías cuando alcancen los niveles superiores de razonamiento, y en el mundo matemático la simetría en deslizamiento es básica, consideramos aconsejable su conocimiento y consideración como movimiento con entidad propia por los alumnos del tercer nivel y necesario por los estudiantes del cuarto nivel.

En la actividad A9 se introduce la simetría en deslizamiento. El trabajo que se hace en el nivel 2 sobre ese movimiento es solamente de introducción. Hemos elegido este momento para presentar la cuarta isometría del plano porque es ahora cuando los estudiantes acaban de iniciar la integración de todos los movimientos, sus relaciones y sus características comunes. En la experimentación de Magisterio se introdujo al final de la última sesión, por lo que la alumna poseía en ese momento un dominio de relaciones entre los movimientos superior al que normalmente tendrán los alumnos que sigan la secuencia que ahora proponemos en el momento en que se introduce la simetría en deslizamiento.

Una vez que los estudiantes saben discriminar si dos figuras son o no simétricas y obtener el eje de simetría de un par de figuras simétricas, la actividad A10 plantea encontrar los ejes de simetría de una figura, lo cual supone realizar un trabajo semejante al anterior pero en una situación nueva, motivo por el cual esta actividad es apropiada para la cuarta fase. La novedad principal radica en el hecho de que, en este caso, los estudiantes deben descomponer mentalmente la figura en una cantidad variable de formas. Es evidente que los estudiantes pueden resolver la actividad simplemente mediante la observación global de la figura, usando razonamiento de nivel 1, pero eligiendo adecuadamente la complejidad de las figuras y pidiendo a los estudiantes justificaciones más detalladas y precisas, se puede hacer que la resuelvan usando razonamiento de nivel 2. Por este motivo, en la secuencia que proponemos hemos incluido esta actividad en la cuarta fase del nivel 2.

En las experimentaciones realizadas utilizamos este tipo de actividad en 3º de E.G.B. y en Magisterio, surgiendo en cada curso razonamientos de diferentes niveles: En 3º de E.G.B., (actividad 13 de la experimentación) los estudiantes utilizaron razonamiento de nivel 1, pues su forma de resolver la actividad era dibujar los ejes de simetría que creían que tenía cada figura y comprobar después con el mira si sus respuestas eran correctas o no. Por el contrario, en Magisterio (actividad 13 de la experimentación), Merche dió otro tipo de justificaciones para sus respuestas, a pesar de que en algunos casos cometió los mismos errores que sus compañeros de 3º; por ejemplo, al decidir si la línea marcada en el dibujo es eje de simetría de la figura, la desechó *porque si lo fuera, este punto* [el vértice central superior] *iría aquí* [señala aproximadamente la posición de su imagen].



Incluir un círculo en esta actividad es muy interesante, pues sirve para darse cuenta de la concepción de infinito que tienen los estudiantes; esta concepción juega un papel importante en actividades en las que se realizan procesos iterativos, como la construcción de mosaicos, o hay infinitas soluciones, como la descomposición de una traslación o un giro en dos simetrías. Ante la pregunta de cuántos ejes de simetría tiene un círculo, los estudiantes de 3º de E.G.B. dieron respuestas diversas, como: *Muchísimos, Todos los que quieras,* o *Millones y millones y millones.* La estudiante de Magisterio contestó directamente: *Infinitos, todos los diámetros.*

Las experiencias que hemos realizado mostraron que, a diferencia de la actividad A10, la actividad A11 requiere que los estudiantes recurran a razonamiento de nivel 2, pues deben usar la perpendicularidad y la equidistancia al eje de simetría para dibujar la figura completa, mientras que un tratamiento solamente visual de la simetría no permite su realización, salvo que el profesor dirija muy estrechamente la actividad de los alumnos. En realidad, tanto la actividad A11 como las dos que le siguen, adquieren todo el sentido cuando se proponen después de que se haya estudiado la composición de simetrías de ejes no paralelos, pues estas actividades permiten contextualizar dicha operación y, por lo tanto, para los estudiantes de nivel 2 suponen una aplicación de propiedades ya conocidas a una situación distinta y nueva. De todas maneras, hasta el nivel 3 no se establecen de manera espontánea las relaciones implicadas.

El tipo de análisis que deben hacer los estudiantes para resolver la actividad A12 es análogo al de la A10, aunque el planteamiento no lo pone de manifiesto ya que centra la atención en la obtención de una parte de la figura y no en el dibujo de los ejes, por lo que los estudiantes no se suelen dar cuenta de la similitud entre ambas actividades hasta después de haber resuelto algunos ejercicios concretos. No obstante, como esta actividad plantea la situación inversa de la actividad A11, los estudiantes que han entendido bien la actividad anterior pueden resolver ésta sin especial dificultad.

La actividad A13 también está relacionada estrechamente con las anteriores y refuerza los conocimientos adquiridos en la fase 2, al ser necesario usarlos en un planteamiento distinto. Esta actividad se planteó en la experimentación realizada en Magisterio (actividad 34 de la experimentación), y la solución dada por la estudiante, de nivel 2, se basó en la utilización de situaciones anteriores. La actividad planteada en la experimentación de Magisterio tuvo una segunda parte en la que se pidió a la estudiante construir figuras en las que los ejes de simetría fueran paralelos. La resolución de esta parte de la actividad condujo a una discusión, propia del nivel 3, sobre la justificación de que los ejes deben cortarse siempre. En primer lugar, Merche, tras pensar un poco, dibujó algunas figuras, intentando que tuvieran dos ejes de simetrías paralelos, pero esta experimentación le llevó a la conclusión de que no existe solución porque si en la figura hay dos ejes, el proceso de completar la figura no finaliza nunca (en realidad se genera un friso). Así pues, en este caso los ejemplos no han servido como "demostración" de la respuesta (el estilo de razonamiento del nivel 2 de Van Hiele), sino que han generado una justificación general que se sirve de los ejemplos como complemento para facilitar las explicaciones (el estilo de razonamiento del nivel 3). No obstante, este episodio de trabajo en el nivel 3 está aislado porque la estudiante no es capaz de establecer las relaciones completas entre este resultado y las propiedades de la composición simetrías y, por lo tanto, no entiende claramente la generalización formal al caso de una figura con tres ejes paralelos:

Prof.: *¿Va a ser posible con tres* [ejes de simetría paralelos] *o no?*
Merche: *No.*
Prof.: *¿Y el porqué lo tienes claro?*
Merche: *No. Con dos sí que lo he visto, pero con tres no. Pero será por la misma razón. La figura se quedará … Al poner el tercero siempre le faltaría algo para que sea simétrica a la primera. Al poner ese algo sale uno …* [no se entiende lo que dice] *y ése ya no es de toda la figura, sino de una parte.*

Este bloque de actividades termina con un grupo de ellas (A14 hasta A17) en las que se plantean la construcción y el análisis de rosetones, frisos y mosaicos. Se trata de actividades análogas a otras presentadas en los bloques de actividades de giros y traslaciones correspondientes a la misma fase de aprendizaje. En estas actividades los estudiantes deberán combinar todos sus conocimientos relativos a la composición de simetrías para aplicarlos a una variedad de situaciones diferentes. Excepto en la actividad A15, hemos planteado sólo situaciones en las que los sistemas generadores están formados únicamente por simetrías, pero es posible plantear otros cubrimientos, con sistemas generadores más complejos (evitando las simetrías en deslizamiento), para comprobar si los estudiantes han comprendido bien los tres movimientos y son capaces de relacionar las propiedades de unos y otros.

La primera vez que un estudiante trabaje con frisos o mosaicos, será necesario explicarle que, si utiliza una traslación o un giro, puede emplear también la traslación o el giro inversos y que las simetrías y los giros pueden tener su eje/centro sobre cualquiera de las baldosas que van apareciendo, pero siempre sobre el mismo lado/punto de la baldosa. En las actividades A15 y A16 hemos planteado varias partes para hacer ver a los estudiantes, cuando hayan construido algunos frisos o mosaicos a partir de las posiciones iniciales de las isometrías generadoras, que se obtiene el mismo resultado aunque se cambie la posición de los ejes de simetría a los lados homólogos de otras baldosas.

SIMETRÍAS: NIVEL 3

Objetivos:

Las actividades que planteamos para este nivel pretenden lograr los objetivos generales siguientes, que más adelante desglosaremos en las diferentes fases de aprendizaje:

1- Utilizar el movimiento resultante de la composición de varias simetrías. Comprender y utilizar la equivalencia de composiciones de simetrías. Comprender y saber utilizar la infinidad de soluciones equivalentes

2- Comprender y saber utilizar la infinidad de posibilidades equivalentes para la descomposición de de una traslación y de un giro en dos simetrías.

3- Simplificar composiciones de isometrías mediante la descomposición en simetrías de los movimientos integrantes del producto.

4- Descubrir, justificar y utilizar técnicas para pasar de una figura a otra mediante una composición de isometrías. Reconocer y justificar casos posibles e imposibles.

5- Obtener, utilizar y analizar la definición formal de simetría. Caracterizar las simetrías mediante conjuntos de condiciones necesarias y suficientes.

6- Demostrar informalmente, mediante razonamiento deductivo abstracto, propiedades de las simetrías descubiertas en este nivel o en los anteriores.

7- Comprender el planteamiento y desarrollo de algunas demostraciones formales relacionadas con las simetrías.

8- Realizar algunas implicaciones simples en una demostración y demostraciones de pocos pasos relacionadas con las simetrías.

9- Afianzar las características de la simetría en deslizamiento, su relación con las otras isometrías y su empleo adecuado.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

Ya hemos dicho, al comentar los objetivos generales del tercer nivel para las traslaciones y los giros, que en este nivel se debe conseguir una globalización de los conocimientos adquiridos previamente de las diferentes isometrías, por lo que es conveniente que los alumnos hayan estudiado simultáneamente traslaciones y giros, y que no sólo hayan superado el segundo nivel de razonamiento en las simetrías, sino también en esos otros movimientos. En realidad, la lectura de las actividades que proponemos en este bloque para alcanzar el tercer nivel de razonamiento en las simetrías, pone en evidencia que le resultará muy difícil, por no decir imposible, realizar correctamente dichas actividades a un alumno que no tenga esa base de conocimientos sobre traslaciones y giros.

Los tres primeros objetivos inciden en las relaciones básicas entre las tres isometrías simples: La composición de dos simetrías equivale a una traslación o un giro. Estas relaciones ya han sido descubiertas y aprendidas en las actividades del segundo nivel, por lo que en el tercer nivel se debe buscar la consolidación, profundización, integración, demostración y formalización de dichas relaciones, tanto en sentido directo (simetría ⇒ traslación o giro) como en sentido inverso (traslación o giro ⇒ simetría).

Así, el objetivo 1 plantea el tema de la infinidad de composiciones equivalentes de simetrías o, inversamente, la infinidad de descomposiciones equivalentes de una traslación o de un giro en producto de dos simetrías. El objetivo 2 dirige la atención a la demostración informal de dichas relaciones y el objetivo 3 plantea la necesidad de saber utilizar estas propiedades en diferentes contextos para completar su comprensión.

El cuarto objetivo es, en cierta forma, complementario del tercero, pues ambos hacen énfasis en la conveniencia de que los estudiantes aprendan a manejar conjuntos de isometrías en vez de isometrías aisladas, ya que de esa forma se podrán resolver diversos tipos de problemas que, en otro caso, no tendrían solución. En estos dos objetivos subyace el teorema fundamental de las isometrías, según el cual cualquier isometría se puede descomponer en un producto de, a lo más, tres simetrías. Con el objetivo 4 planteamos la utilidad de llevar al plano operativo este teorema, para conseguir que los estudiantes aprendan a razonar mediante la transformación ágil de unas isometrías en otras, según el interés de cada situación.

La comprensión de qué es una definición matemática y la capacidad para obtener definiciones son uno de los elementos que caracterizan el razonamiento del tercer nivel de Van Hiele. Así pues, cualquier unidad de enseñanza que pretenda promover la adquisición del tercer nivel de razonamiento por los estudiantes debe prestar atención a este tema. En nuestro caso, el objetivo 5 cubre esta componente. En él planteamos la conveniencia de trabajar en la comprensión de la definición usual de simetría axial, pero también la conveniencia de que los estudiantes analicen otros conjuntos de condiciones que puedan caracterizar este movimiento. Por ejemplo, ya que en el entorno que hemos creado para realizar las actividades que proponemos en esta memoria, la técnica más usual para calcular las imágenes de las figuras es mover puntos, es razonable que planteemos a los estudiantes la pregunta de cuántos puntos necesitan mover para tener plenamente identificada la imagen de cualquier figura por un determinado tipo de isometría. En el caso de las simetrías, esto lleva a la propiedad de que la simetría es el único movimiento tal que las mediatrices de tres puntos no alineados y sus correspondientes imágenes coinciden.

Los objetivos 6, 7 y 8 se orientan a procurar que los estudiantes desarrollen su capacidad de demostrar. Ello pasa por varias etapas. La primera es lograr que los estudiantes entiendan la insuficiencia de los ejemplos como forma de demostración (usada como válida en el segundo nivel de razonamiento). Otra etapa es el desarrollo de su habilidad para realizar demostraciones, que debe empezar enfrentando a los estudiantes con casos sencillos y cortos, de uno o pocos pasos, guiados por el profesor. La última etapa, que se debe cubrir con el paso del tercer al cuarto nivel de razonamiento, es la de formalización y abstracción, para lograr el rigor y la exactitud propios del razonamiento matemático formal.

Por último, el objetivo 9 tiene en cuenta el movimiento más complejo de las simetrías, que en este nivel se puede comprender por completo, ya que en el tercer nivel se desarrolla un conocimiento amplio sobre las composiciones y descomposiciones de movimientos, sus características y posibilidad de utilización, con lo cual, la composición de una traslación con una simetría con ciertas características (la simetría en deslizamiento) es tan sólo una situación particular entre las usuales en el trabajo del tercer nivel.

Los profesores deben tener presente que aprender a hacer demostraciones es un proceso largo y costoso, por lo que no deben pretender que, desde el principio, los estudiantes realicen las demostraciones por sí mismos, ni que las realicen de manera formal, sino que deben conformarse con justificaciones informales de carácter general, aunque probablemente basadas en ejemplos particulares. Un elemento importante es, por ejemplo, aprender a diferenciar las diversas partes de los enunciados de los teoremas y a distinguir las condiciones necesarias de las suficientes.

Fase 1 del Nivel 3

Objetivos:

En la presentación de las actividades de los niveles anteriores hemos explicado suficientemente cuál debe ser la finalidad de la fase 1 de cada nivel, por lo que no creemos necesario repetir esas consideraciones respecto de la fase 1 del tercer nivel. En este caso, tampoco proponemos ninguna actividad específica para dicha fase, si bien los profesores deben centrar su actividad en determinar el nivel de razonamiento de sus alumnos en relación con las simetrías y sus conocimientos sobre:

- Utilización de los instrumentos de dibujo para trazar mediatrices y perpendiculares.
- Manipulación y propiedades de las simetrías.
- Conocimiento de la simetría en deslizamiento.
- Las propiedades básicas de las traslaciones y los giros y de sus composiciones.

En relación con estos puntos, si los alumnos conocen el tema pero tienen alguna carencia concreta, es conveniente darles una instrucción específica adecuada antes de empezar a trabajar con las simetrías.

Fase 2 del Nivel 3

Objetivos:

1- Obtener y aplicar directamente el movimiento resultante de la composición de dos simetrías. Comprender y utilizar la equivalencia de todas las composiciones que producen el mismo resultado.

2- Descomponer una traslación o un giro en producto de dos simetrías. Comprender la infinidad de posibilidades.

3- Extender la relación directa entre las simetrías, los giros y las traslaciones a situaciones de composición y descomposición cualesquiera de estas isometrías. Emplear esas relaciones en composiciones de esos movimientos con la simetría en deslizamiento

4- Entender la definición formal de simetría, identificándola y utilizándola adecuadamente en situaciones concretas.

5- Justificar si ciertos conjuntos de condiciones determinan una simetría, tanto en casos concretos como abstractos.

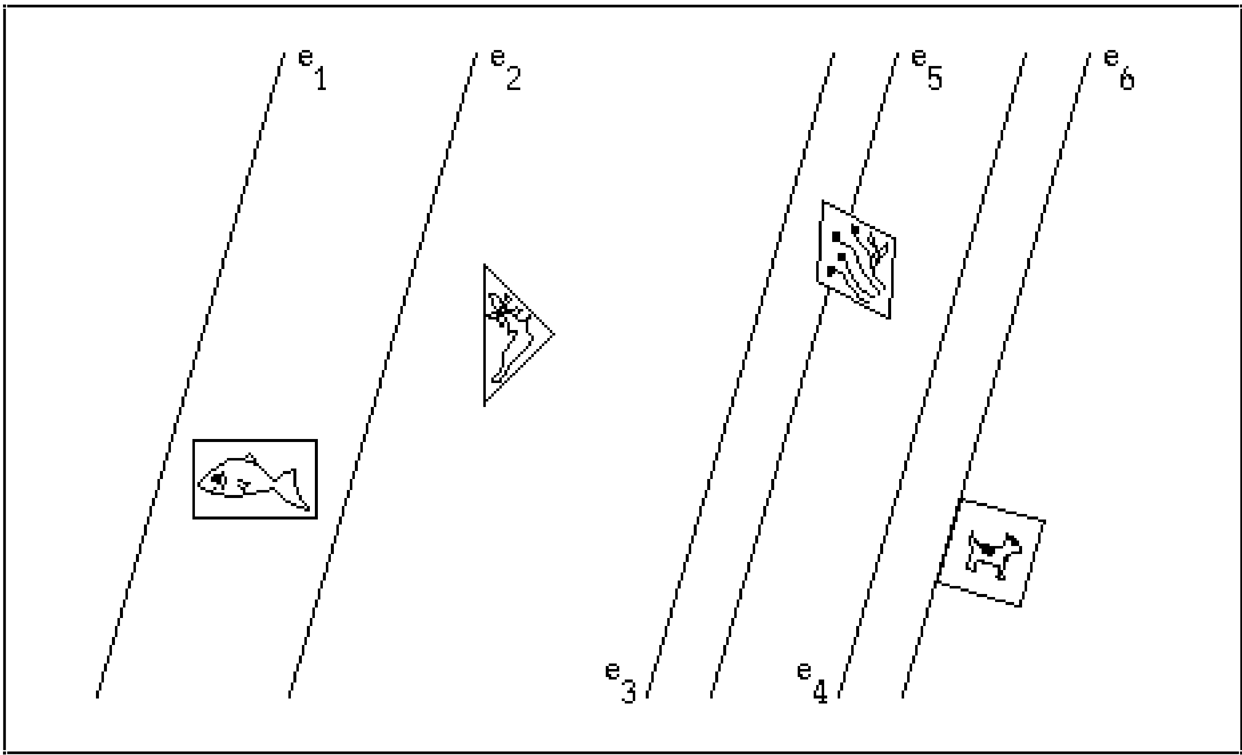
6- Comprender el desarrollo de algunas demostraciones, dirigidas por el profesor, y proporcionar la justificación de algunas implicaciones que formen parte de las mismas.

Actividades:

A1- Dados varios pares de simetrías de ejes paralelos, cuyas composiciones producen la misma traslación ($S_2 \circ S_1 = S_4 \circ S_3 = S_6 \circ S_5 = T_a$), y dadas varias figuras, aplicar directamente el movimiento resultante de cada composición a algunas figuras. Comprobar el resultado mediante la realización de las composiciones. Justificar la equivalencia de las composiciones.

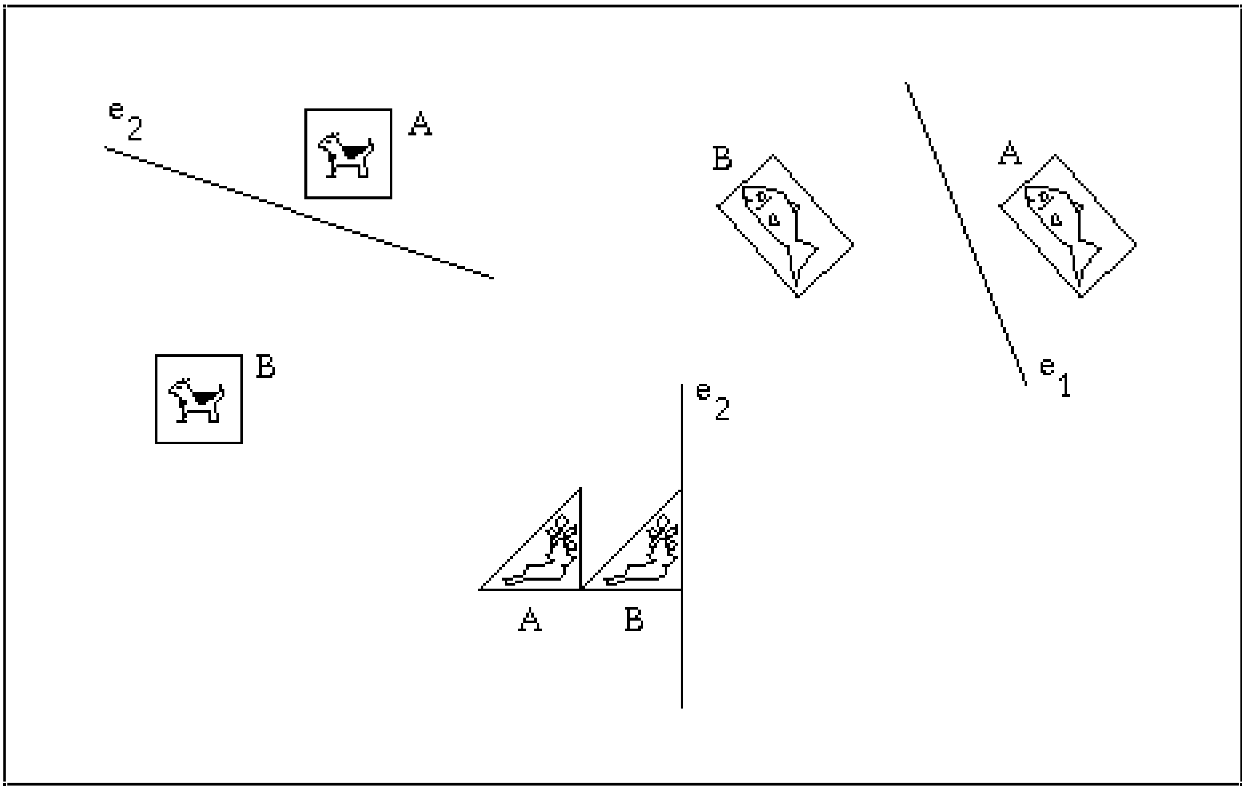
Dibujar otros pares de simetrías cuya composición sea equivalente a las anteriores. Justificar la equivalencia.

Dibujar otros pares de simetrías cuya composición no sea equivalente a las anteriores. Justificar la no equivalencia.



A2- Dadas una figura F y su imagen F' por una traslación, dibujar un par de ejes de simetría cuya composición transforme la figura F en la F'. Después dibujar otros pares de ejes de simetría que produzcan el mismo resultado. Discutir y justificar el número de soluciones posibles.

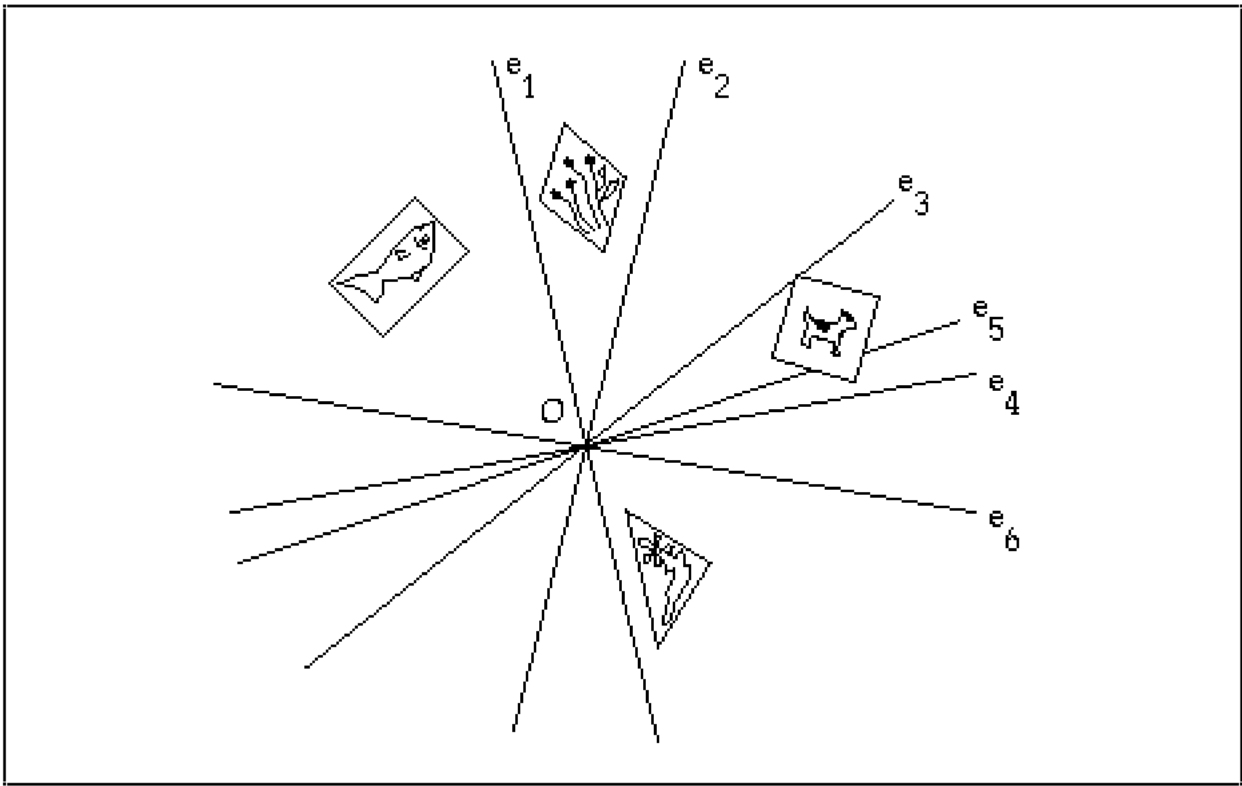
A3- Dadas una figura F y su imagen F' por una traslación, y dado un eje de simetría, dibujar otro eje de simetría tal que la composición de estas dos simetrías transforme la figura F en la F'. Discutir y justificar el número de soluciones posibles. (Los primeros ejercicios deben tener solución, pero también se deben plantear después otros sin solución).



A4- Dados varios pares de simetrías cuyos ejes se cortan, cuyas composiciones producen el mismo giro ($S_2 \circ S_1 = S_4 \circ S_3 = S_6 \circ S_5 = G(O,\alpha°)$), y dadas varias figuras, aplicar directamente el movimiento resultante de cada composición a algunas figuras. Comprobar el resultado mediante la realización de las composiciones. Justificar la equivalencia de las composiciones.

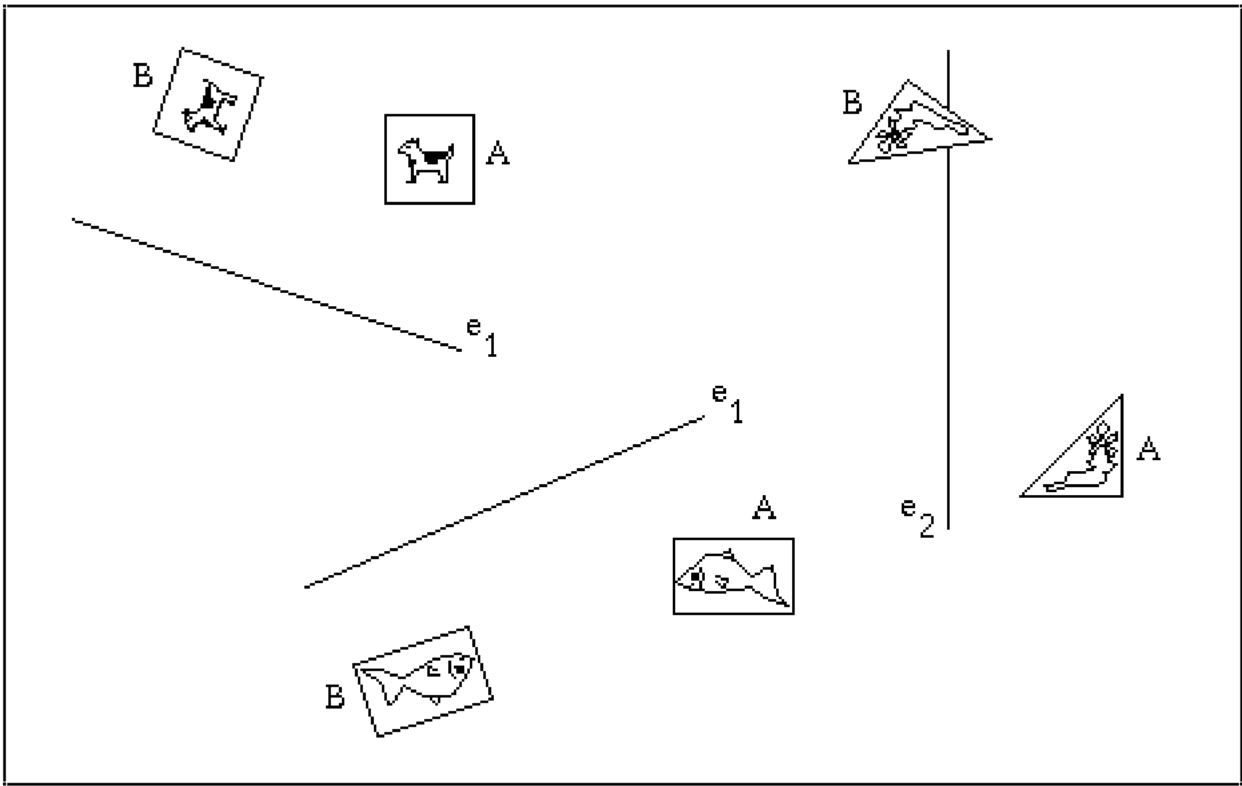
Dibujar otros pares de simetrías cuya composición sea equivalente a las anteriores. Justificar la equivalencia.

Dibujar otros pares de simetrías cuya composición <u>no</u> sea equivalente a las anteriores. Justificar la no equivalencia.



A5- Dadas una figura F y su imagen F' por un giro, dibujar un par de ejes de simetría cuya composición transforme la figura F en la F'. Después dibujar otros pares de ejes de simetría que produzcan el mismo resultado. Discutir y justificar el número de soluciones posibles.

A6- Dadas una figura F y su imagen F' por un giro, y dado un eje de simetría, dibujar otro eje de simetría tal que la composición de estas dos simetrías transforme la figura F en la F'. Discutir y justificar el número de soluciones posibles. (Los primeros ejercicios deben solución, pero también se deben proponer después otros sin solución).

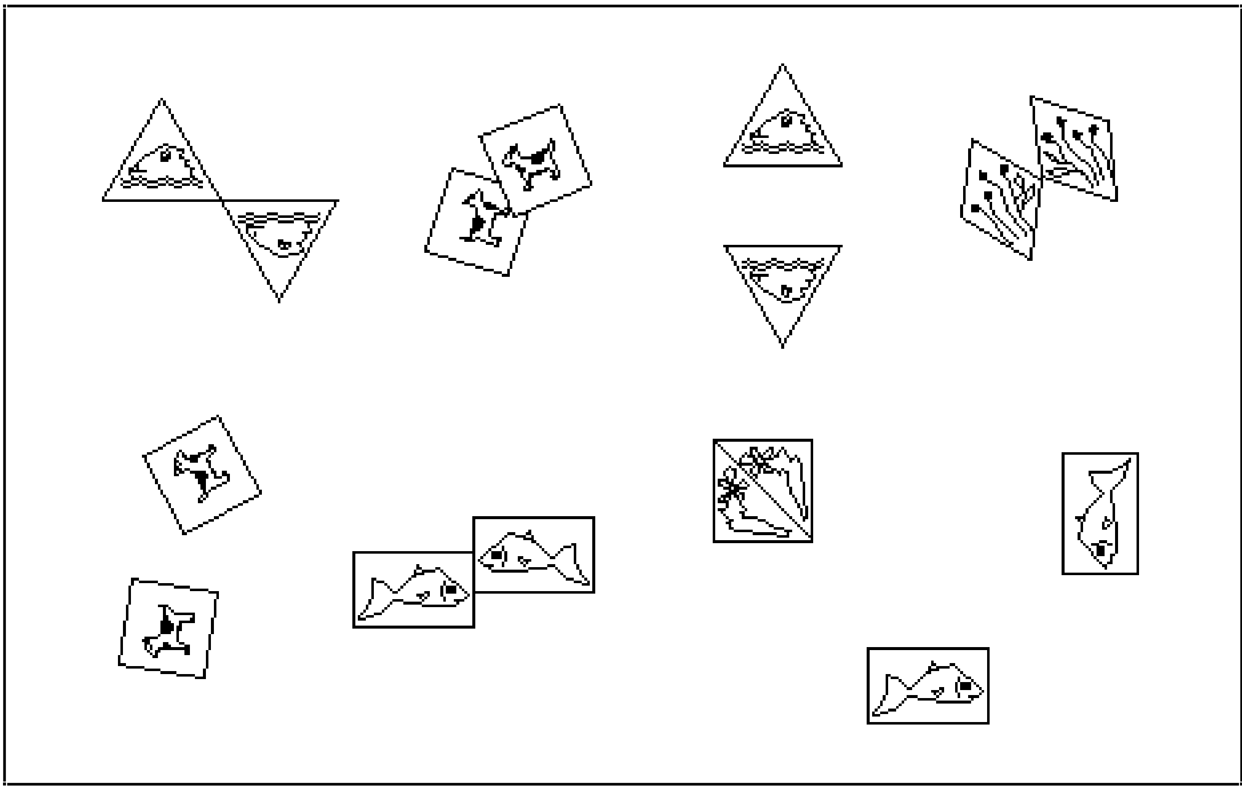


A7- Recordar la propiedad de que, dadas dos figuras congruentes de la misma orientación, siempre existe una traslación o un giro que permite pasar de una figura a la otra.

Estudiar el caso de dos figuras congruentes de orientación inversa: ¿Existe siempre una isometría simple (traslación, giro o simetría) que transforme una figura en la otra?

¿Qué sucede si las figuras están situadas de forma que coinciden un punto y su imagen? ¿Y si coinciden dos/tres/infinitos puntos y sus respectivas imágenes? ¿Y si las figuras no tienen ningún punto en común?

Enunciar unas conclusiones generales que resuman los resultados obtenidos en esta actividad.



A8- En la actividad anterior se ha visto que entre dos figuras iguales, pero inversas, no existe siempre una simetría axial. Utilizar los pares de aquella actividad en los que no hay simetría axial y otros pares en los que tampoco haya, con el fin de descubrir si, en esos casos, se puede pasar siempre de una figura a la otra mediante la composición de una traslación y una simetría. ¿Y mediante la composición de un giro y una simetría?

Generar técnicas generales de resolución en esos casos. En particular, para el caso de traslación y simetría, hacer coincidir un punto con su homólogo de la otra figura por la traslación.

A9- Analizar composiciones de isometrías. Para ello:

1) Indicar si la orientación de la imagen final será igual o inversa de la orientación de la figura inicial.

2) Determinar el mayor número posible de características del movimiento resultante de la composición.

3) Cuando sea posible, especificar cuál será la inclinación relativa de la imagen final respecto de la figura inicial.

Ejemplos de ejercicios de esta actividad:

Analizar las siguientes composiciones (los elementos que definen cada una de las isometrías se dan, o sea, en la lámina están dibujados los vectores de las traslaciones, los centros de los giros y los ejes de las simetrías):

$S_1 \circ S_2 \circ G(O,50°)$ (siendo los ejes de ambas simetrías paralelos / secantes con punto de corte en O / distinto de O).

$S_1 \circ S_2 \circ S_3$ (con ejes en posiciones diversas).

$S_1 \circ S_2 \circ T_a$; $S_1 \circ T_a \circ S_2$; $S_2 \circ S_1 \circ T_a$ (con simetrías de ejes paralelos / secantes).

$S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ S_4$ (con ejes en posiciones diversas).

$S(v,e_1) \circ T_{-v}$; $S(v,e_1) \circ S_2$, siendo e_1 y e_2 paralelos; etc.

A10- Identificar cierta composición de movimientos para pasar de una figura a otra: Dadas dos figuras congruentes, los tipos de isometrías y la cantidad de ellas que deben formar parte de una composición para pasar de una figura a la otra, identificar por completo dichas isometrías, proporcionando varias soluciones cuando sea posible o justificando cuándo no hay solución. Generar y explicar técnicas útiles no sólo para esta actividad concreta, sino también para todos los casos que correspondan a figuras a las que se les ha aplicado el mismo tipo de isometría que el propuesto.

Ejemplo de ejercicios de esta actividad:

Se dan dos figuras giradas. Hay que determinar las isometrías concretas que integran una composición que permita pasar de la primera figura a la segunda, siendo esas isometrías: Dos traslaciones; tres traslaciones; dos simetrías y una traslación; una simetría y dos traslaciones; dos giros; etc.

A11- Distinguir conjuntos suficientes de condiciones para caracterizar una isometría y aprender a seleccionar conjuntos mínimos de condiciones para determinar isometrías.

Ejemplos de ejercicios de esta actividad:

1) Se conoce la mediatriz del segmento que une un punto P y su imagen P' por cierta isometría. ¿Se puede saber de qué isometría se trata?
Si se sabe que esa isometría es una traslación, ¿se puede determinar dicha isometría? (otros casos: un giro, una simetría)
Se conocen las mediatrices de los segmentos que unen dos puntos y sus respectiva imágenes por cierta isometría. ¿Se puede saber de qué isometría se trata? ¿Qué relaciones debe haber entre estas mediatrices para que la isometría sea una traslación, o una simetría, o un giro? (otros casos: tres, cuatro puntos)

2) Si las mediatrices de dos (otros casos: tres, infinitos) segmentos con extremos en puntos y sus respectivas imágenes por una determinada isometría coinciden (otros casos: son paralelas, se cortan en un mismo punto), ¿se puede determinar el tipo de isometría de que se trata? ¿Se puede determinar por completo dicha isometría? ¿Hay

que imponer alguna condición a los puntos y sus imágenes para que el tipo de isometría quede determinado por completo?

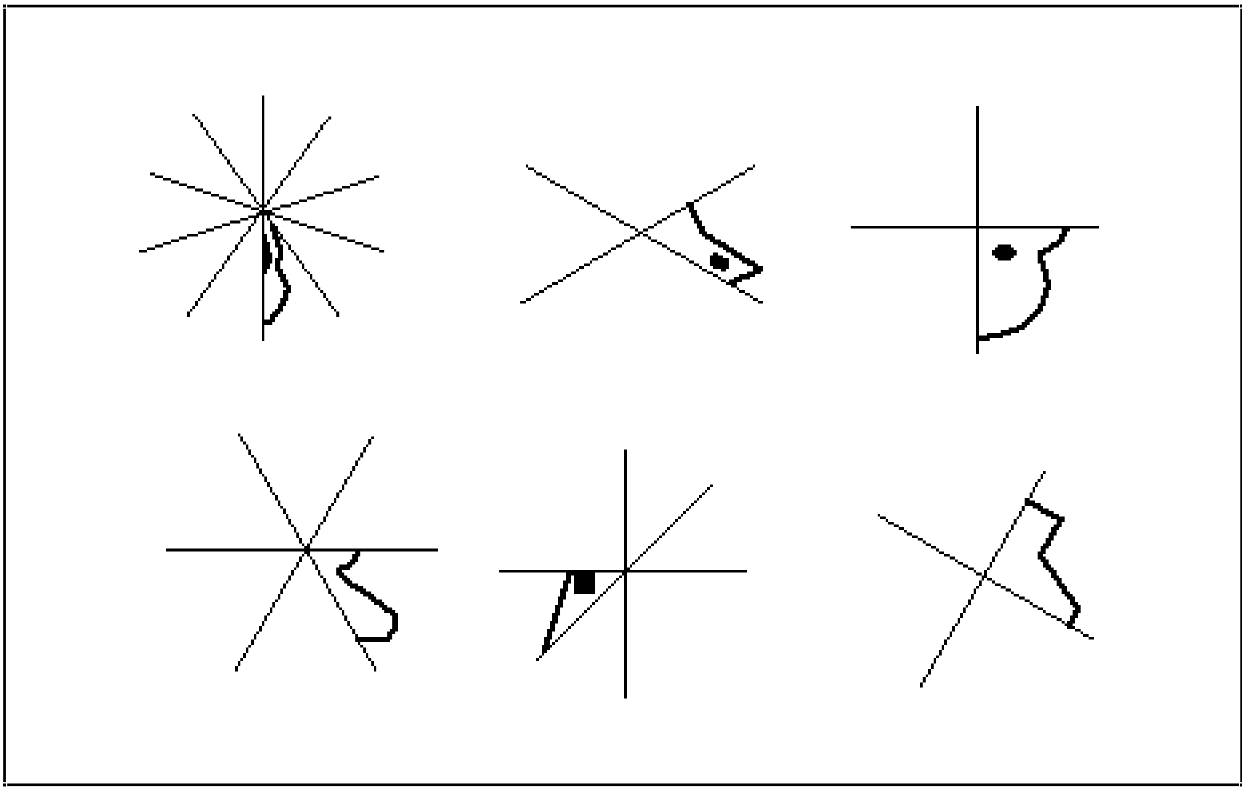
A12- Actividad de aplicación de las relaciones entre isometrías en diferentes contextos.

Ejemplos de ejercicios de esta actividad centrados en los cubrimientos del plano:

1) Dados varios ejes de simetría y un motivo, dibujar, cuando sea posible, una figura completa cuyos ejes de simetría sean exactamente los dibujados. Los alumnos han de identificar, antes de resolver manipulativamente el ejercicio, si hay solución y describir la figura que se obtendrá, justificando sus conclusiones haciendo referencia a las isometrías presentes.

2) Rosetones, frisos y mosaicos: Construir cubrimientos aplicando al motivo mínimo un sistema generador dado y justificar qué movimientos aparecerán en el cubrimiento. Basándose en las relaciones entre las isometrías del sistema generador, proporcionar otros sistemas generadores del mismo cubrimiento.

Realizar deformaciones en los lados de los motivos mínimos, según el sistema generador, y crear diseños propios.



- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

El primer grupo de actividades propuestas (A1 a A6) desarrollan de manera directa las relaciones, descubiertas en las actividades del segundo nivel, entre la composición de dos simetrías cuyos ejes son paralelos y las traslaciones (actividades A1 a A3) o entre la composición de dos simetrías cuyos ejes se cortan y los giros (actividades A4 a A6).

La transformación de una composición en el movimiento equivalente es siempre más sencilla que la descomposición de una traslación o un giro en producto de dos simetrías, pues esto último requiere una comprensión e integración mayores de todos los elementos implicados en las relaciones que se consideran.

Esta afirmación la hemos comprobado tanto con diversos grupos normales de estudiantes de Magisterio con los que hemos trabajado este tema durante varios años, como en la experimentación llevada a cabo en Magisterio. En este último caso, las actividades dirigidas explícitamente a estudiar la descomposición en pares de simetrías se plantearon sólo para las traslaciones. En primer lugar planteamos una actividad en la que se daban una figura, su imagen y un eje de simetría y pedíamos dibujar el otro eje. Las soluciones de Merche (la estudiante que participó en la experimentación) pasaban siempre por la obtención de la imagen de la figura por la simetría dada, obteniendo el eje pedido a partir de esta imagen y la imagen final. Fue necesaria la orientación muy directa de la profesora y la realización de varios ejercicios similares para que Merche lograra entender la relación general existente y la empleara como base del razonamiento que realizó para la resolución de la actividad. Algo análogo sucedió en la actividad propuesta a continuación, en la que los datos eran sólo las figuras inicial y final (las mismas de la actividad que acabamos de comentar) y se pedía dibujar dos ejes de simetría que movieran la primera figura hasta la segunda. Esta vez Merche sólo fue capaz de dibujar los mismos ejes que había utilizado en la actividad anterior. En algún momento sí hizo referencia a la relación entre la traslación y las simetrías (ejes perpendiculares al vector, etc.), pero no supo aplicarla para resolver el problema. De nuevo la orientación de la profesora posibilitó que nuestra alumna progresara y comprendiera el proceso de obtención de los ejes de simetría y la existencia de infinitas soluciones.

Para consolidar las propiedades de la relación entre simetrías y giros o traslaciones, son muy adecuados los problemas en los que los estudiantes se enfrentan a casos sin solución, pues la justificación de la inexistencia de pares de ejes que cumplan las condiciones precisa una coordinación entre las características implicadas más cuidadosa que en los casos con solución, en los que basta con utilizar dichas características de manera secuencial.

En la experimentación de Magisterio tenemos un ejemplo de esta situación en la actividad 24: Dadas una figura, su imagen por una traslación y un eje de simetría no perpendicular al vector de traslación, Merche debía dibujar otro eje de simetría tal que, compuesto con el que se daba, transformara la figura inicial en la final. Merche indicó, correctamente, que no había solución, pero para ello realizó la simetría dada en el planteamiento de la actividad. Su justificación incluía el recitado de alguna propiedad, pero siguió meditando y, tras algún tiempo, comprendió el motivo: *¡Claro! No puede ser. Porque los ejes no eran perpendiculares a la unión de un punto con su imagen. Entonces éstos no pueden ser.*

En la secuencia de actividades que proponemos en esta memoria se han tenido en cuenta las observaciones anteriores, pues planteamos en primer lugar actividades (A1 y A4) para la aplicación directa de la composición de simetrías en una variedad de situaciones que producen el mismo resultado. Estas actividades deben facilitar la resolución, por parte de los estudiantes, de las actividades de descomposición, inversas de las anteriores propuestas a continuación. Las actividades A2 y A5 plantean la descomposición de una traslación o un giro, respectivamente, en producto de dos simetrías, con la diferencia respecto a las actividades anteriores de que ahora los alumnos no disponen de ninguna descomposición equivalente ya realizada para basarse en ella al resolver los casos propuestos. Finalmente, en las actividades A3 y A6 se plantean situaciones de descomposición en las que sólo hay que determinar uno de los dos ejes de simetría. Estas actividades sirven para afianzar las relaciones entre los movimientos correspondientes y para poner más de relieve la diferencia entre la infinitud y unicidad de soluciones, dependiendo de la cantidad de datos disponibles.

Con las actividades A7 y A8 se completa el estudio del teorema fundamental de las isometrías iniciado en el bloque de actividades del tercer nivel de la unidad de giros, prescindiendo de la simetría en deslizamiento. Este teorema es una de las bases en las que se debe fundamentar gran parte del razonamiento del tercer nivel que deberán realizar los estudiantes para resolver las actividades planteadas a continuación, utilizando la propiedad de la existencia o no de isometrías simples que permitan pasar de una figura a otra congruente. Este teorema se emplea, por ejemplo, para justificar la posibilidad o no de pasar de una figura a otra mediante determinada combinación de isometrías y para generar métodos de resolución de ese tipo de problemas, para asegurar la presencia de determinado tipo de isometría en algunas composiciones, etc.

Como señalamos en los comentarios de la fase 4 del nivel 2, en la experimentación llevada a cabo en Magisterio, la propiedad se enunció a partir de los resultados de actividades anteriores, pero no se insistió en ella, al menos de manera explícita, tanto como habría sido deseable para lograr que la estudiante centrara sus justificaciones de algunas de las actividades propias del tercer nivel de razonamiento, tales como las propuestas ahora en las actividades A9 a A12. En una de las últimas sesiones de la experimentación, la profesora planteó por separado las dos partes de la demostración formal de este teorema: El caso de dos figuras de la misma orientación y el caso de dos figuras de distinta orientación.

La actuación de la estudiante puede considerarse típica de las etapas intermedias de adquisición del tercer nivel de razonamiento, pues al principio, durante un tiempo, basaba sus respuestas y justificaciones en lo que veía en las láminas, en vez de en las propiedades de las figuras o las isometrías, evidenciando por lo tanto un razonamiento de segundo nivel. Posteriormente, ya volvió a trabajar basándose en propiedades matemáticas y en relaciones o deducciones a partir de dichas propiedades, es decir razonando en el tercer nivel. Esta forma de comportamiento, de cambio de nivel, se puede observar generalmente en los estudiantes en transición entre un nivel de razonamiento y el siguiente cuando se enfrentan a un problema difícil que no saben resolver.

En las actividades A9 y A10 se extiende la equivalencia de las composiciones de simetrías con traslaciones y giros a situaciones en las que no se presentan las isometrías de manera aislada, sino en el contexto de composiciones formadas, además, por otras isometrías. En estas actividades se plantean en primer lugar situaciones de composición (A9) y en segundo lugar de descomposición (A10). Pretendemos con estas actividades que los estudiantes basen la resolución de los problemas en el uso explícito de propiedades y relaciones matemáticas ya conocidas, tales como la propiedad objetivo de las actividades A7 y A8, y otras propiedades básicas de cada isometría estudiada en las unidades dedicadas a traslaciones y a giros, y en las actividades de simetrías del segundo nivel.

En la experimentación de Magisterio, se apreció cómo nuestra alumna progresaba en su dominio de las relaciones, si bien buena parte de los ejercicios que corresponderían a los propuestos actualmente en las actividades A9 y A10 fueron más limitados, pues no se le exigió la aplicación explícita de las propiedades a las que hemos hecho referencia en el párrafo anterior ni se incluyó la simetría en deslizamiento. La alumna progresó rápidamente, de resolver las situaciones paso a paso a seguir un razonamiento basado en las características de las isometrías concretas implicadas en la composición o descomposición, hasta llegar a la consideración de los tipos de isometrías con los que debía trabajar y de las relaciones generales existentes entre sos tipos de movimientos.

Las actividades que proponemos en esta memoria son más completas y permiten un progreso mejor en la adquisición del tercer nivel de razonamiento, ya que en ellas se exige de los estudiantes la reflexión sobre las propiedades que constituyen la base matemática del grupo de las isometrías del plano y, por lo tanto, del tipo de razonamiento del tercer nivel. Por otra parte, el progreso en ese modo de trabajo requiere una orientación del profesor (fase 2 del nivel) hasta su comprensión, debiendo ser después los estudiantes capaces de trabajar basándose principalmente en las relaciones matemáticas, con menor necesidad de soporte concreto (figuras o elementos de un movimiento determinado), en tareas de ese mismo estilo (ver las actividades A1 y A2 de la fase 4 de este tercer nivel de razonamiento).

Veamos un ejemplo del desarrollo de este tipo de actividades en la experimentación de Magisterio. La actividad (37ª) consiste en pasar de una figura a otra congruente de la misma orientación, que no es trasladada de la primera, mediante una composición de cuatro simetrías (en otras palabras, descomponer un giro en producto de cuatro simetrías). Un poco antes Merche había obtenido, para las mismas figuras, una descomposición en producto de una traslación y un giro. Merche relacionó ambos casos:

Merche: *Podrías aplicar dos que fueran una traslación y dos que fueran un giro.*
Prof.: *¿Y podrías aplicar dos que fueran un giro y dos que fueran un giro también?*
Merche: *… El primer* [centro de giro] *me daría lo mismo* [dónde situarlo]. *Luego, respecto a ése, el otro punto de corte* [quiere decir que el segundo centro de giro lo obtendría a partir de las mediatrices entre puntos de la imagen de la figura inicial por el primer giro, y los puntos correspondientes de la figura final].

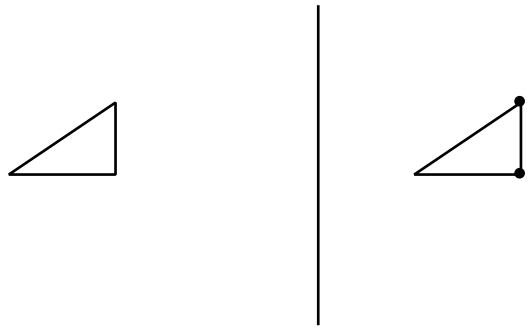
A lo largo de toda la experimentación, como ya hemos comentado en ocasiones anteriores, se apreció la necesidad de recordar y resumir con frecuencia los conocimientos y relaciones fundamentales estudiados hasta ese momento, cosa que en la experimentación de Magisterio, debido principalmente a la escasez de tiempo disponible, hicimos pocas veces. Esto provocó que, por ejemplo, cuando se estaban realizando actividades de la fase 2, la alumna no recordara en algún momento las relaciones entre dos giros de distinto centro y el movimiento resultante de su composición.

Una de las características del tercer nivel de razonamiento es la capacidad para entender el concepto matemático de definición y, por lo tanto, para identificar conjuntos mínimos de condiciones suficientes que determinen algún concepto. Pero este trabajo requiere, al principio, la orientación del profesor y por ello hay que empezar a desarrollarlo en la segunda fase.

En la experimentación de Magisterio propusimos una actividad análoga a la A11 (actividad 16 de la experimentación), aunque menos completa que los ejemplos que proponemos ahora. El planteamiento de la actividad se centró, en primer lugar, en la coincidencia de las mediatrices entre dos puntos y sus respectivas imágenes como condición suficiente para caracterizar una simetría. El proceso seguido por Merche se puede ver al final de los comentarios que hemos hecho para la fase 2 del nivel 2.

Prof.: *Tienes una figura y trazas la mediatriz de un punto y su imagen y te sale una recta y ésa es la perpendicular en el punto medio. Coges otro punto y su imagen y trazas su mediatriz, y es la misma. ¿Entonces estás segura de que el movimiento ha sido una simetría o no?*

Merche dibujó un contraejemplo correcto (ver dibujo 1) y mencionó los dos puntos que hemos marcado en el dibujo 1.



Dibujo 1.

Prof.: *Muy bien. O sea, que no sirve si dos puntos y sus imágenes tienen la misma mediatriz. ¿Y si infinitos puntos y sus imágenes tienen la misma mediatriz?*

Merche contestó varias veces que entonces es seguro que sí se trata de una simetría.

Prof.: *¿Cuántos puntos hay ahí* [en el dibujo del contraejemplo] *que tengan la misma mediatriz?*

Merche: *Infinitos.*

La profesora y Merche se rieron ante la contradicción que suponían las dos últimas respuestas de Merche.

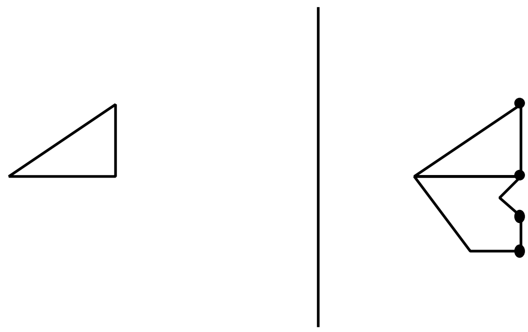
Prof.: *¿Entonces qué pasa? ¿Podrías dar algunas condiciones de puntos y mediatrices que aseguraran que el movimiento que has hecho ha sido una simetría?*

Merche: *Mirando los vértices.*

Prof.: *¿Cuántos vértices tienes que mirar? ¿O cómo?*

Merche: *4 ó 5.*

La profesora amplió el par de triángulos que antes había dibujado Merche, para dar el contraejemplo que mostramos en el dibujo 2.



Dibujo 2.

Prof.: *Si dibujo esta figura y su trasladada y cojo estos cuatro vértices* [los que hemos marcado en el dibujo 2], *sus mediatrices serían la misma.*

Merche: *Cogeríamos 4 que no estén en la misma línea.*

Prof.: *Cuatro que no estén en línea recta. ¿Por qué serviría entonces?*

Merche: *Porque así ya son perpendiculares y* *las mediatrices coinciden. Ya tiene que ser simétrico.*

Prof.: *¿Cuántos te hacen falta exactamente? Ahora que estás afinando la condición, ¿con cuántos sería suficiente probar y cómo tendrías que elegir los puntos ésos?*

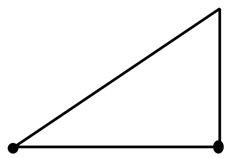
Merche: *Tres y que fueran opuestos.*

Prof.: *¿Opuestos qué quiere decir?*

Merche: *Vértices opuestos son éste y éste* [señalando los dos vértices marcados en el dibujo 3].

Prof.: *¿Y si no hay vértice enfrente justo?*

Merche: *Un punto que tú sitúas en la figura, que está enfrente.*



Dibujo 3.

Prof.: *¿Cómo?*

Merche: *Enfrente.*

A continuación la profesora enunció correctamente la propiedad aludida:

Prof.: *Tres puntos no alineados. Con 3 puntos no alineados ya estás segura de que si al trazar las mediatrices siempre es la misma, las figuras van a ser simétricas.*

Así pues, vemos cómo el trabajo sobre estas y otras actividades y la dirección de la profesora hizo que la estudiante descubriera varias de las propiedades que permiten asegurar que dos figuras son simétricas. La profesora no planteó la cuestión de la necesidad ya que en estos problemas es evidente.

Una secuencia de actividades como la anterior plantea a los estudiantes la caracterización de las diferentes isometrías estudiadas en términos de condiciones suficientes y si, como proponemos en la secuencia descrita en esta memoria se trabaja al mismo tiempo en la eliminación de características redundantes, se completan las componentes básicas de la comprensión de las definiciones matemáticas.

La actividad A12, que completa el bloque de actividades de la fase 2, pretende hacer uso de todas las relaciones y propiedades que se han estudiado hasta ahora de las diferentes isometrías en situaciones cuyo planteamiento no se limite a la ejecución de un movimiento, a aplicar directamente alguna propiedad, o a analizar determinados puntos, rectas o figuras.

Hemos recurrido a los ejemplos de diseño y análisis de cubrimientos, en el primer lugar, porque es muy rico en variedad de situaciones y grados de dificultad, lo cual permite hacer un análisis completo de las relaciones si se fomenta la discusión sobre la existencia o no de solución, la cantidad de repeticiones, los tipos de isometrías y su determinación, etc. Además, algunas experimentaciones que hemos realizado con grupos de alumnos y profesores de diversos niveles educativos han mostrado que este tipo de problemas resulta atractivo para los estudiantes.

Respecto a la construcción y análisis de mosaicos, en la experimentación de Magisterio se trabajó sólo un poco al final de la experimentación, introduciendo la idea de sistema generador, pero únicamente se empleó el formado por dos traslaciones y, como celda, un rectángulo. En la propuesta de unidad de enseñanza que presentamos en esta memoria pretendemos que haya un empleo más amplio de las posibilidades de los cubrimientos del plano, de manera que el trabajo con cubrimientos esté presente en los bloques de actividades de los distintos movimientos y que se retome en los diversos niveles de razonamiento, mediante una organización del trabajo en espiral, típica de la enseñanza basada en el modelo de Van Hiele.

Fase 4 del Nivel 3

Objetivos:

1- Utilización de la idea de conjunto de condiciones necesarias y suficientes para caracterizar una isometría.

2- Predecir la mayor cantidad posible de características de la isometría equivalente a la composición de varias isometrías y de la imagen final por dicha composición de una figura dada.

3- Simplificar composiciones de isometrías. Descomponer isometrías en productos de otras isometrías.

4- Descubrir, aprender, utilizar y justificar técnicas para pasar de una figura a otra mediante una composición de isometrías. Reconocer y justificar casos posibles e imposibles.

5- Comprender el planteamiento y desarrollo de demostraciones formales sencillas.

6- Adaptar demostraciones que se hayan presentado anteriormente, cuando la variación de planteamiento y desarrollo es pequeña.

7- Completar demostraciones realizando algunas implicaciones simples omitidas.

Actividades:

A1- Realizar las simplificaciones posibles en las composiciones que se presentan. Especificar el mayor número posible de características de la isometría resultante. En los casos en que sea posible, realizar las simplificaciones de diversas formas. (No dar ninguna figura ni fijar isometrías concretas, sino sólo el tipo de isometría y ciertas relaciones entre sus características).

Ejemplos de ejercicios de esta actividad:

1) Simplificar $S_1 \circ S_2 \circ T_a \circ T_b$, siendo los ejes e_1 y e_2 paralelos (otros casos: que se cortan; coincidentes) y los vectores a y b de igual módulo y dirección, pero sentidos opuestos.

2) Simplificar $S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ T_a$, siendo: i) e_1 y e_2 perpendiculares a e_3. ii) Los tres ejes se cortan en un punto. iii) Los tres ejes son paralelos. iv) $S_1 = S_2$ y paralelo a S_3. v) $S_1 = S_3$ y paralelo a S_2. …

3) Simplificar las composiciones: $G(O,\alpha°)\circ T_V$; $G(O,\alpha°)\circ S_1\circ G(R,\beta°)\circ S_2$; $G(O,\alpha°)\circ S_1\circ S_2\circ S_3\circ G(O,\beta°)$.

A2- Descomponer una isometría en un producto de isometrías, del cual se conocen los tipos de isometrías que lo integran, la cantidad de cada tipo, el orden de operación y algunas relaciones entre dichas isometrías. Los alumnos se deben basar en relaciones generales y proporcionar, cuando sea posible, varias soluciones (Nota: No todos los casos deben tener solución).

Ejemplos de ejercicios de esta actividad:

1) Descomponer una simetría en un producto de: i) Tres simetrías. ii) Dos simetrías y dos giros de distinto centro. iii) Una traslación y una simetría. iv) Una simetría. …

2) Descomponer un giro en el producto de: i) Un giro de 90° y una traslación. ii) Un giro y dos simetrías. iii) Una simetría y un giro. …

A3- Relacionar composiciones de isometrías.

Ejemplos de ejercicios de esta actividad:

Transformar una simetría en deslizamiento en i) Un giro y una simetría. ii) Un giro de 180° y una simetría.

Descomponer el producto de un giro de 90° y una traslación en: i) Un giro y dos simetrías. ii) Una simetría y un giro. …

A4- Aplicación de relaciones entre las isometrías que forman parte de una composición.

Ejemplos de ejercicios de esta actividad:

Dado un rosetón, friso o mosaico, obtener un sistema generador suyo.

A5- Introducción a las demostraciones formales mediante teoremas relativos a la composición y descomposición de isometrías.

Ejemplos de ejercicios de esta actividad:

1) Demostrar que la composición de giros de distinto centro $G(R,60°)\circ G(O,90°)$ equivale al giro $G(S,150°)$. Para ello descomponer cada uno de los giros en dos simetrías: $G(O,90°) = S_2\circ S_1$, $G(R,60°) = S_4\circ S_3$, pero de tal forma que $S_2 = S_3$.

Repetir la demostración con otros pares de giros variando los valores de los ángulos, pero de forma que su suma no sea múltiplo de 360°.

Demostrar la propiedad general: $G(O,\beta°)\circ G(P,\alpha°) = G(Q,\alpha°+\beta°)$ siempre que $\alpha°+\beta° \neq \dot{360}°$.

2) Repetir el proceso de 1) para demostrar que $G(O,\beta°)\circ G(P,\alpha°) = T_a$ siempre que $\alpha°+\beta° = 360°$.

3) Repetir el proceso de 1) para demostrar que $T_a\circ G(O,\alpha°) = G(P,\alpha°)$.

4) Demostrar que la simetría S_e se puede descomponer en producto de otra simetría y del giro G(O,60°) (Se da una lámina con el eje e y, sobre esa recta, el centro O del giro). Repetir la demostración con el giro G(P,180°) (el punto P pertenece al eje e).

¿Se puede descomponer cualquier simetría como producto de otra simetría y un giro de cualquier amplitud dada?

A6- Realizar demostraciones formales poco complejas basadas en la igualdad de las imágenes de un punto por varias isometrías.

Ejemplo de ejercicios de esta actividad:

Dada la simetría en deslizamiento $D = T_a\circ S_e$, ¿qué relación tiene con la composición $S_e\circ T_a$? Demostrar la respuesta.

A7- Proporcionar a los estudiantes una demostración formal poco compleja para que la analicen y la repitan en una situación idéntica y en casos con pequeñas modificaciones, o bien para que los estudiantes realicen por sí mismos alguna de las implicaciones de la demostración.

Ejemplo de ejercicios de esta actividad:

Proporcionar la demostración de que la composición de dos simetrías de ejes paralelos (que se cortan) es una traslación (un giro) con determinadas características, basada en el análisis de la relación entre un punto y su imagen por la composición.

Una variación en la demostración presentada puede consistir en que los estudiantes la repitan basándose en un esquema gráfico en el que el punto del que se obtiene la imagen esté situado en una posición distinta respecto a los ejes. Por ejemplo, con los ejes paralelos, situar dicho punto entre los dos ejes si en la demostración primitiva se encontraba a la derecha o izquierda de ambos. O, con los ejes no paralelos, situarlo más o menos cerca del punto de corte.

- ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ - ◊ -

Las dos primeras actividades son análogas, en cuanto a los contenidos, a otras realizadas en la fase 2 de este nivel. En la segunda fase, con el apoyo de figuras e isometrías concretas y bajo la dirección del profesor, los alumnos aprendieron a establecer y utilizar las relaciones entre las diversas isometrías, mediante problemas de composición y descomposición de isometrías. Ahora, en la fase 4, el planteamiento de los problemas es más abstracto, ya que se establecen las relaciones generales entre las características de los diversos tipos de movimientos, sin plantearlas con isometrías concretas, determinadas sobre una lámina. Respecto al grado de abstracción de estas actividades, dado que se está trabajando en el tercer nivel, los estudiantes se pueden servir de dibujos concretos para conjeturar sobre los resultados o la forma de demostrarlos y recurrir a calcular las imágenes de puntos en actividades en las que ello pueda ayudarles a abordar de manera efectiva las situaciones planteadas. Pongamos, por ejemplo, el caso de la descomposición de una simetría en producto de un giro y una simetría. En la línea de la justificación informal que fomentamos en el tercer nivel de razonamiento, una solución adecuada es la siguiente:

Pensemos en una figura A y su imagen, B por una simetría S_e (el razonamiento se produce sin la concreción de dibujos). Ambas figuras han de ser inversas entre sí. Lo que se pide es pasar de A a B mediante la composición de un giro y una simetría. Para ello, a A le aplico una simetría, S_2, distinta a S_e. La imagen de A por esa simetría, A', ya no será inversa respecto a B y, por lo tanto, seguro que existe una traslación o un giro que transforme A' en B. Como lo que se pide es un giro, si por casualidad A' y B fueran trasladadas entre sí, entonces modificaría un poco la inclinación del eje e_2, con lo que A' saldría girada respecto a B. El centro del giro, O, se obtiene mediante el corte de mediatrices (de puntos de A' y sus correspondientes de B; el ángulo α del giro se determina midiendo el ángulo POP', siendo P un punto de A' y P' el punto homólogo en B. Así, $S_e = G(O,\alpha)\circ S_2$.

Ante una sugerencia por parte del profesor sobre la posibilidad de utilizar sólo puntos en la demostración anterior y no figuras completas, el estudiante debería rehacer el razonamiento, con las modificaciones pertinentes.

Lo que, evidentemente, no es admisible en el tercer nivel de razonamiento es el uso de los ejemplos como evidencia última que demuestre la veracidad de una afirmación. Que un estudiante intente esta forma de "demostración" significa que su progreso en la adquisición del tercer nivel de razonamiento es insuficiente y que todavía sigue entendiendo las demostraciones según los parámetros del segundo nivel.

En la experimentación de Magisterio se pudo constatar que la realización de diversas actividades basadas en isometrías concretas le proporcionó a nuestra alumna una comprensión de las relaciones entre las isometrías suficiente para lograr el grado de abstracción requerido para las actividades A1 y A2 de la fase 4. No obstante, le propusimos pocos problemas de este estilo y en algunos de ellos nuestra alumna tuvo intervenciones incorrectas, no por imposibilidad de razonar en el nivel que se requería en los problemas propuestos, sino porque, como hemos comentado en otras ocasiones, los estudiantes recurren a un nivel de razonamiento inferior cuando el problema planteado les resulta difícil o, en otras ocasiones, sufren el olvido de algunas propiedades importantes que deben utilizar en ese momento.

Veamos algunos ejemplos en los que se resumen las diferentes formas de actuación mencionadas. La profesora le había propuesto a Merche una serie de ejercicios de simplificación de composiciones de isometrías (actividad 44). Veamos, en primer lugar, la influencia de dos fallos de memoria:

Prof.: *En una composición de dos giros y dos simetrías, ¿hay algunas condiciones con las cuales el resultado final sea una traslación?*

Merche [seguramente intentó recordar y dió una relación incorrecta]: *No porque giro y simetría es giro.*

La profesora le preguntó sobre la orientación de las figuras original y final según la composición de giro con simetría y por la aplicación de un giro (inversas en el primer caso, pero no en el segundo); así Merche se dió cuenta de su error. Después Merche razonó a partir de la escritura algebraica de la composición, G○G○S○S:

Prof.: *¿Y puede ser una traslación?*

Merche: *A ver. Sería o bien tres giros, G○G○G, o bien dos giros y una traslación G○G○T. Dos giros no pueden ser una traslación. Y tres giros tampoco.*

Prof.: *¿No?*

Merche: *Si lo que ha girado es lo mismo y tiene la misma inclinación que la figura original sí que sería.*

Prof.: *¿Y qué tendría que pasar?*

Merche: *Que los tres* [ángulos] *sumaran 360 ó 0.*

Prof.: *Entonces, ¿puede darse o no puede darse?*

Merche: *Sí. En dos casos: Cuando dieran 0 los ángulos entre ellos ó 360.*

En el ejercicio siguiente Merche relacionó correctamente los movimientos que formaban la composición que debía simplificar:

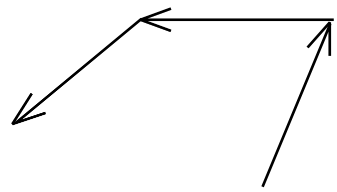
Prof.: *¿Un giro y dos simetrías pueden dar una traslación?*

Merche: *Si se cortan* [los ejes de simetría] *dan un giro.* [En este caso tendría] *giro y giro. Si los dos suman 360 ó 0 sí. Si son paralelos* [los ejes de las simetrías], *sería traslación. Tendría giro y traslación, que no* [no puede ser].

Sin embargo, en el ejercicio siguiente se produjo un retroceso en el nivel de razonamiento de la estudiante, bastante alejado de su forma usual de trabajo hasta ese momento. En concreto, el error consistió en pensar que se puede originar un cambio de inclinación de una figura moviéndola mediante una composición de traslaciones cuyos vectores tienen distintas inclinaciones:

Prof.: *Si compones tres traslaciones, ¿puede salir un giro?*

Merche: *Sí, porque los vectores pueden hacer que la figura cambie de inclinación* [Merche había trazado los vectores del dibujo].



Prof.: *¿Los vectores pueden hacer que la figura cambie de inclinación? ¿Entonces tres traslaciones sí pueden dar un giro?*

Merche: *Sí … Va a ocurrir cuando tengan distinta dirección, porque entonces la dirección cambiará y será un giro. Si tuvieran la misma, sería una traslación junta.*

Este error no fue momentáneo, sino que lo mantuvo durante cierto tiempo, pues necesitó realizar la composición en dos casos distintos para cambiar de respuesta. Es decir, que nuestra alumna pasó a utilizar razonamiento del segundo nivel para convencerse convencerse de que la composición de traslaciones no cambiaba la inclinación de las figuras. Posteriormente, cuando se convenció de ello, ya reaccionó normalmente.

La actividad A3 es una combinación de las dos actividades anteriores, pues se deben realizar simultáneamente simplificaciones y descomposiciones, en la que se amplía la cantidad de relaciones entre movimientos a tener en cuenta, por lo que consolida más el razonamiento del tercer nivel.

En la experimentación de Magisterio esta actividad cumplió su papel correctamente, pues la estudiante supo resolverla adecuadamente, usando el método de trabajo y el tipo de razonamiento apropiados para esta fase del tercer nivel de Van Hiele. En la experimentación sólo se planteó un ejercicio de este tipo (actividad 44):

Prof.: *Si tienes una simetría y una traslación, ¿puedes dar siempre una simetría y un giro cuya composición sea equivalente a la anterior?*

Merche propuso descomponer la traslación en producto de dos simetrías y proporcionó una solución correcta, en la cual se sirvió de la descomposición de un giro en dos simetrías.

Además, Merche dió correctamente las características que deben cumplir los ejes para que el resultado sea el pedido:

Merche: *Como el giro son dos* [simetrías de *ejes que se cortan, tendrá que cortarse uno que sea paralelo* [se refiere a uno de los ejes de las simetrías en que se descompone la traslación] *y el otro que tienes* [el de la composición inicial S∘T].

Hay actividades, como la A4, cuyo objetivo no es estudiar directamente alguna propiedad o técnica de trabajo con las isometrías, sino que tienen como objetivo el uso de dichas propiedades o técnicas en otros contextos. Este trabajo de aplicación de los conocimientos es una de las características de la fase 4 de enseñanza y es necesario para alcanzar el razonamiento del nivel correspondiente. En este caso, al situarnos en el contexto de la construcción y análisis de los cubrimientos del plano, se aplica todo lo estudiado antes sobre composiciones y descomposiciones, selección de conjuntos mínimos y realización de demostraciones.

Los ejercicios propuestos como ejemplo de la actividad A4 continúan el trabajo de actividades propuestas en la fase 2 y de otras actividades de los niveles segundo y tercero de los distintos movimientos. Resolverlos ahora requiere identificar los movimientos que se aprecian visualmente en el cubrimiento y, teniendo en cuenta las relaciones entre ellos, identificar los otros movimientos que pueda haber en el cubrimiento y extraer un conjunto mínimo de isometrías que lo generen. Este tipo de actividad, planteada dentro de la fase 4 del tercer nivel de razonamiento, no se experimentó en Magisterio, pero consideramos acertado el empleo de esa aplicación artística a lo largo de la secuencia de enseñanza. El análisis que deben efectuar los estudiantes para resolver la actividad requiere del tercer nivel de razonamiento, siendo una tarea adecuada para que los alumnos investiguen por sí mismos y apliquen la base proporcionada por los ejercicios llevados a cabo en la fase 2 de este nivel.

El afianzamiento de la necesidad de demostrar rigurosamente las afirmaciones o respuestas y la introducción de las demostraciones formales son dos de los principales objetivos de las actividades del tercer nivel de razonamiento, finalidad a la cual se dedican de manera explícita las tres últimas actividades de este bloque (A5, A6 y A7), como conclusión de las actividades del tercer nivel y preparación para el cuarto nivel. En las actividades A5 y A6 los estudiantes son los encargados de realizar las demostraciones, que son lo suficientemente simples como para que su trabajo se pueda completar aplicando directamente propiedades y relaciones conocidas. En la actividad A7 se les presenta a los estudiantes una demostración completa, con la finalidad de que la comprendan y la repitan con alguna modificación debida al cambio de alguna condición secundaria, como puede ser la organización de la figura en la que se basen los estudiantes para hacer la nueva demostración.

Desde la perspectiva con la cual se ha enfocado la secuencia de enseñanza que proponemos en esta memoria, el razonamiento que se fomenta en el tercer nivel se basa en las definiciones y propiedades básicas de cada isometría, las relaciones de descomposición y composición de movimientos y en algunas otras propiedades. En la actividad A5, las demostraciones formales propuestas siguen esta línea. En esta actividad se hace una introducción a las demostraciones formales mediante el planteamiento, en primer lugar, de casos particulares, basados en isometrías concretas pero cuya forma de demostración es idéntica a la del caso general. Al mismo tiempo, el profesor debe proporcionar algunas indicaciones a los estudiantes para que puedan superar los puntos clave. Tal es, por ejemplo, en la primera demostración propuesta en A5, la idea de descomponer cada uno de los dos giros en producto de dos simetrías de manera que ambas descomposiciones tengan una simetría en común que permita simplificar la descomposición. La parte importante de la actividad es lograr que los estudiantes sepan utilizar esta idea en otras demostraciones, incluso cuando se trata de descomposiciones de isometrías distintas de los giros. También hay que tener en cuenta la destreza algebraica de los alumnos y su conocimiento de las propiedades geométricas que puedan estar implicadas en el desarrollo de las demostraciones. Hay que tener en cuenta, no obstante, que, en el tercer nivel de razonamiento los estudiantes se limitan a adaptar demostraciones a situaciones similares, siendo en el cuarto nivel cuando las transferencias de los métodos de demostración a situaciones distintas son más amplias.

Pero el desarrollo de la capacidad de razonamiento formal se basa también en otro tipo de estrategias, en el cual la idea fundamental es que dos isometrías (o composiciones) son equivalentes si ambas producen la misma imagen para cada punto del plano. Por ello proponemos una actividad, la A6, dedicada a ese tipo de formulación.

En la experimentación de Magisterio, propusimos algunos problemas iguales o parecidos a los incluidos en las actividades que estamos comentando (A5 a A7). Se puede comprobar que nuestra alumna sí pudo realizar los pasos de las demostraciones, aunque no tenía desarrollado por completo el sentido de cuándo una demostración era general o sólo un caso particular. Respecto a ello hay que insistir en la escasez de tiempo para la experimentación, que impidió afianzar adecuadamente los diversos pasos que ahora se proponen para alcanzar el nivel correspondiente de razonamiento. Hay que tener también en cuenta que el proceso de familiarización y adquisición de destreza en la realización de demostraciones lógico-deductivas (no necesariamente formales según los estándares de las Matemáticas) puede ser largo, por lo que en una experimentación de laboratorio como la realizada es difícil conseguir plenamente este objetivo.

En la experimentación de Magisterio planteamos, en la actividad 32 de la experimentación, la actividad A5, mediante la composición G(R,60°)∘G(O,90°). La profesora le presentó a la estudiante, por escrito, la expresión algebraica G(R,60°)∘G(O,90°) = $S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1$ y en una lámina en la que estaban dibujados los centros de giro O y R, Merche debía dibujar los ejes de las simetrías de manera que $S_2 = S_3$.

Merche realizó rápidamente y de manera correcta la descomposición de cada giro en dos simetrías, explicando la infinidad de posibilidades existentes. La profesora le pidió que hiciera $S_2 = S_3$ y, también rápidamente, Merche situó bien los ejes, explicándolo:

Merche: *Que pase un eje por los dos centros. Porque un eje siempre tiene que pasar por el centro y, si tiene que servir para los dos giros …* [deberá pasar por los dos centros].

Al pedirle que simplificara la expresión, Merche eliminó las dos simetrías centrales, por ser la misma. Respecto al valor del ángulo resultante, lo midió con transportador. Cuando la profesora le dijo a Merche que la finalidad de este ejercicio era llegar a una demostración general de que la composición de giros de distinto centro es un giro, se produjo el diálogo siguiente:

Merche: *¿Pero siempre se pueden quitar dos ejes?*
Prof.: *Yo simplemente te he preguntado: ¿Puedes dar siempre las simetrías de manera que una sea igual a la otra? ¿Eso lo puedes hacer siempre o no?*
Merche: *Si no te dan ninguna* [simetría], *sí.*

A continuación la profesora le propuso un ejercicio análogo, con la composición G(S,40°)∘G(O,80°), que Merche hizo bien sin ayuda.

Posteriormente, la profesora le pidió una demostración general y Merche construyó un diagrama de descomposición en simetrías análogo a los anteriores, colocando letras en los ángulos correspondientes y escribiendo unas ecuaciones algebraicas correctas, pero con las que se desorientó. La profesora intervino para centrar la atención de Merche en los ángulos apropiados, tras lo cual ésta consiguió llegar al resultado requerido (actividad 32):

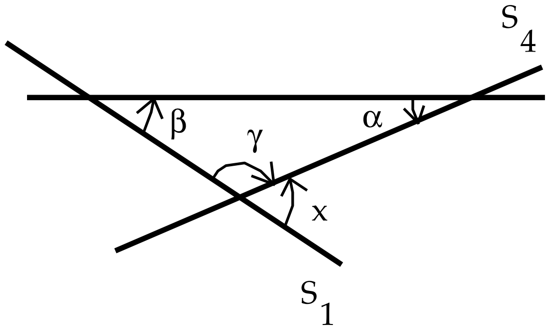
Prof.: *¿Para hacerlo en general, ¿cómo lo harías?*
Merche: *Donde se corten los dos ejes sería otro punto* [diferente de O y S] *y el ángulo de giro sería* $\alpha + \beta$.
Hay que hacer notar que la profesora no había mencionado los ángulos en términos generales.
La profesora le pidió la demostración general, a lo que Merche, que tenía delante el dibujo del ejercicio anterior, contestó:

Merche: *Puede ser fijándote en los ángulos de este triángulo.* α *puede ser este ángulo y* β *éste.* [además, Merche marcó con γ el tercer ángulo del triángulo y escribió]:

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 180°$$

$$\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$$

Después de un rato, la profesora intervino, para hacer referencia al sentido de los ángulos y a las dos posibilidades que producen giros equivalentes. Después, le sugirió a Merche que calculara x, ángulo exterior, a partir de $\alpha + \beta$ (ver dibujo). Merche escribió las siguientes ecuaciones, intentando despejar x:



Merche: $\frac{x}{2} = 180 - \frac{\gamma}{2}$

$$\gamma = 180 - x$$

$$\alpha + \beta + 180 - x = 180$$

[simplifica 180 y despeja x]

$$x = \alpha + \beta$$

Obsérvese que los dos errores cometidos al quitar denominadores se compensaron en la simplificación posterior, por lo que, a pesar de ellos, la igualdad final fue correcta.

Este fragmento de la experimentación que acabamos de mostrar es un ejemplo en el que se ve la necesidad de proporcionar la información adecuada para que los estudiantes puedan superar las partes de la demostración que sean más complejas. Además, es necesario organizar la secuencia de actividades de manera que los alumnos entiendan el paso de la demostración particular a la general. También es un ejemplo en el que se puede apreciar la diferencia entre un razonamiento abstracto informal (basado, generalmente en deducciones intuitivas o poco rigurosas, propio del tercer nivel de Van Hiele) y uno abstracto formal (propio del cuarto nivel). En ocasiones, el razonamiento informal se refleja en el hecho de que los estudiantes formalizan algunas partes de la demostración que son más simples, desde el punto de vista de la abstracción o complejidad de las deducciones involucradas, y resuelven por procedimientos experimentales (observando, midiendo, etc.) las partes que son más complejas.

Por ejemplo, cuando Merche estaba demostrando el resultado de la composición de dos giros de distinto centro con ángulos concretos, que acabamos de describir en los párrafos anteriores, representaba algebraicamente las descomposiciones de los giros en simetrías y las justificaba de manera abstracta, pero medía con un transportador el ángulo formado por los ejes de simetría para determinar el ángulo del giro resultante, porque la deducción abstracta del valor de este ángulo le resultaba difícil, como quedó plenamente demostrado al pedirle la demostración general.

CAPÍTULO 3: INTERPRETACIÓN DE LA CONTINUIDAD DE LOS NIVELES DE VAN HIELE Y DESCRIPCIÓN DE UN MÉTODO DE EVALUACIÓN

Este tercer capítulo de la memoria está dedicado a reflexionar sobre una de las características centrales del Modelo de Van Hiele: La forma como se produce el paso desde un nivel de razonamiento al siguiente. En primer lugar, planteamos el problema, que se centra en la necesidad de describir el proceso de adquisición de un nuevo nivel de razonamiento por los estudiantes. Para ello, hacemos una revisión de la información obtenida a partir de varias investigaciones destacadas y enunciamos nuestra postura al respecto. A continuación, proponemos una solución, que se basa en varios puntos:

- Planteamiento de una interpretación de la continuidad, que se traduce en un proceso de adquisición gradual de los niveles de razonamiento por los estudiantes.

- Descripción de una metodología de trabajo para evaluar el grado de adquisición de los niveles de Van Hiele por los estudiantes. Esa metodología no se basa en un tipo específico de test o prueba.

- Presentación de un ejemplo de aplicación de los conceptos y métodos de los dos puntos anteriores, consistente en un estudio longitudinal de estudiantes españoles de los cursos 6º de E.G.B. a C.O.U. (con edades entre 11 y 18 años). En las últimas secciones de este capítulo describimos dicho estudio y comentamos y analizamos sus resultados.

3.1. Interés y motivos de la investigación.

Como se desprende de los comentarios y la revisión bibliográfica hechos en el capítulo 1 y que completamos en la sección 3.2, la continuidad (adquisición gradual) o discretitud (salto brusco) en el paso de un nivel de Van Hiele al siguiente ha sido una de las propiedades objeto de investigación desde los primeros trabajos sobre este modelo, ya que se trata de una de sus características centrales. Los resultados de las investigaciones han mostrado numerosas discrepancias con la propuesta de discretitud que se hace en el trabajo original de Van Hiele, pero, si bien se ha admitido en la mayoría de dichas investigaciones la necesidad de reconsiderar esta idea, los instrumentos utilizados en las evaluaciones de estudiantes o la forma de interpretar la información proporcionada por dichos instrumentos no habían producido hasta el momento unos resultados que hicieran algo más que señalar la presencia de este problema. En este capítulo, asumiendo plenamente la característica de continuidad de los niveles de Van Hiele, hacemos una propuesta radical que abre una línea de investigación que permite analizar el paso de un nivel de razonamiento al siguiente con detalle y desde una nueva perspectiva.

Bien sea directa o indirectamente, cualquier estudio relacionado con el Modelo de Van Hiele, que no sea estrictamente teórico, incluye una identificación de la forma de razonar de los estudiantes implicados. En términos del Modelo de Van Hiele, eso se traduce en la asignación de un nivel de razonamiento. Tal asignación se ha de llevar a cabo necesariamente proponiendo una serie de tareas o items que los estudiantes deben contestar o resolver. Se plantean, por tanto, dos cuestiones a tener en cuenta para llevar a cabo una evaluación adecuada:

- ¿Qué tipo test emplear? (Escrito u oral, con items de elección múltiple o respuesta libre, …)
- ¿Cómo evaluar las respuestas al test?

Otro de nuestros objetivos en este capítulo es dar una respuesta a la segunda de las preguntas anteriores, esto es, proponer una forma de evaluación de las respuestas de los estudiantes independiente del formato (escrito u oral) de test empleado, pero utilizable con items de respuesta libre sólamente.

Existe consenso generalizado en que la forma de evaluar los niveles de razonamiento que proporciona más información es la entrevista. Pero las condiciones requeridas para poderlas realizar (cantidad de tiempo, coincidencia de horarios, …) limitan en gran medida las posibilidades de emplearlas y las hacen casi inviables para la observación de grandes colectivos de estudiantes. En el terreno del Modelo de Van Hiele, por el momento no hay alternativas válidas a las entrevistas, lo cual hace que una aportación al diseño de tests escritos como la que presentamos en este capítulo, que suponga una aproximación a la cantidad de información obtenida en las entrevistas, constituya un avance interesante en las herramientas a disposición de los investigadores para evaluar los niveles de Van Hiele.

3.2. Resumen de la literatura sobre evaluación de los niveles de Van Hiele.

En lo referente a la discretitud o continuidad de los niveles de Van Hiele, a modo de resumen general, podemos decir que las investigaciones en las que se ha intentado identificar el nivel de razonamiento de los estudiantes han encontrado con frecuencia comportamientos que rebaten la discretitud.

Así, en Burger, Shaughnessy (1990) se observó que algunos estudiantes oscilaban en sus respuestas entre dos niveles consecutivos de razonamiento, empleando a veces uno de los niveles y a veces el otro. Esta oscilación se hacía patente porque, al analizar una respuesta de un estudiante, diferentes investigadores identificaban características de comportamiento pertenecientes a dos niveles consecutivos. Estos alumnos fueron clasificados como alumnos "en transición" entre los dos niveles. En la práctica, para evaluar el nivel del alumno en cuestión, se recurrió a la asignación de un código diferenciador; por ejemplo, el vector (1, 1-2, 1, 1-2, 1-2) significa que los investigadores habían observado predominante el nivel 1 de Van Hiele (segundo nivel en la notación de 0 a 4) en las respuestas a los problemas 1º y 3º, pero que "no pudieron decidir entre los dos niveles" 1 y 2 en las respuestas a los otros problemas (Burger, Shaughnessy, 1990, pg. 20).

En Fuys, Geddes, Tischler (1988) también se observó el empleo de estrategias de dos niveles consecutivos por parte de algunos alumnos, los cuales se servían por lo general del nivel inferior ante una situación en la que no se sentían seguros. La conclusión de los investigadores fue que no está claro que el paso de un nivel a otro sea discreto, aunque según ellos sí se producen momentos de salto o avance brusco. En lugar de la forma de escalera propuesta por la formulación original del Modelo de Van Hiele (ver pg. C1-18), se sugiere una transición de un nivel al siguiente en pequeños escalones. La asignación del nivel de razonamiento mostrado por los estudiantes en cada tarea también la resumen estos investigadores mediante la indicación de un nivel o dos niveles consecutivos. Así, utilizan el símbolo 1-2 para indicar la transición entre los niveles 1 y 2 (también en la escala de 0 a 4) ya que "los estudiantes formularon propiedades y dieron algunos argumentos deductivos simples (usualmente con la guía del entrevistador), pero no fueron capaces de hacer demostraciones por sí mismos" (Fuys, Geddes, Tischler, 1988, pg. 82).

También Usiskin (1982) se ve inducido por sus datos a mencionar la posibilidad de que exista un proceso de transición entre dos niveles. El problema principal que debía resolver este investigador a propósito de la forma de asignar niveles a los estudiantes era la decisión (con efectos estadísticos básicos) del criterio referente al número mínimo de respuestas correctas que se exigía para considerar que un estudiante había alcanzado un cierto nivel de

Van Hiele. A pesar de la pobreza de este tipo de criterio, en esta investigación se plantea que "la transición, por ejemplo, del nivel 2 al 3 podría estar caracterizada por alcanzar un criterio alto en los niveles 1 y 2 y algún criterio intermedio en el nivel 3" (Usiskin, 1982, pg. 33). En esta investigación se utiliza la numeración de 1 a 5 para los niveles de Van Hiele.

Esta situación de oscilación entre dos niveles se ha encontrado prácticamente en la totalidad de las investigaciones en las que se ha examinado el razonamiento de los estudiantes desde el punto de vista del Modelo de Van Hiele. No obstante, ninguno de los investigadores ha profundizado en el análisis de la cuestión de la transición que había identificado, limitándose alguno de ellos a apuntar la necesidad de investigarla. Por ejemplo, poco después de presentar nuestros primeros estudios considerando la idea de la adquisición gradual de un nivel de razonamiento (Fortuny, Gutiérrez, Jaime, 1988), Crowley (1989) plantea que el diseño de items para un test de evaluación del nivel de razonamiento podría tener que ser diferente según que se contemple el paso de un nivel al siguiente como discreto o como continuo. En este último caso, indica que "eso querría decir que un estudiante debe demostrar una proporción mucho mayor de la actividad asociada con un nivel antes de que se considere que lo domina. De hecho, la cantidad de esa 'proporción mayor' -100%, 90%, etc.- debería ser también un tema de investigación" (Crowley, 1989, pg. 212).

Nosotros también detectamos estos problemas en las primeras experimentaciones que hicimos sobre el Modelo de Van Hiele (Gutiérrez, Jaime, 1987 b), lo cual originó un cambio por nuestra parte en la forma de obtener información sobre el nivel de razonamiento: Pasamos de trabajar con tests de elección múltiple a hacerlo con entrevistas y tests escritos de respuesta libre. También, la toma de contacto con el trabajo que estaba realizando J.M. Fortuny sobre evaluación del nivel de razonamiento y la percepción 3-dimensional (Fortuny, 1988) y nuestra colaboración con él generó el inicio de las ideas que presentamos en este capítulo, los grados de adquisición de los niveles de Van Hiele y el método de evaluación, cuyas versiones previas pueden verse en Fortuny, Gutiérrez, Jaime (1988) y Gutiérrez, Jaime, Fortuny (1991).

Además de su utilización en geometría 3-dimensional mencionada en el párrafo anterior, hemos experimentado en geometría plana con diversos tipos de individuos (estudiantes de E.G.B., de Enseñanza Media y de Magisterio), lo cual ha servido para perfeccionar la propuesta. Resultados de estas investigaciones están recogidos en Jaime, Gutiérrez (1990 a), Gutiérrez, Jaime, Shaughnessy, Burger (1991) y Gutiérrez y otros (1991).

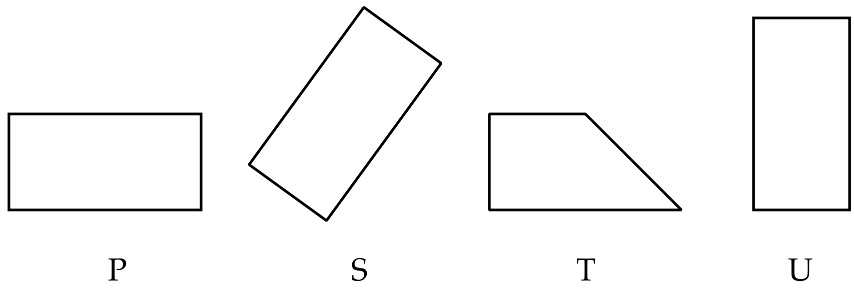
La elección del instrumento para evaluar el nivel de razonamiento de los estudiantes es un elemento importante en este tipo de investigaciones, y se pueden encontrar las más variadas opciones: Tests escritos con items de elección múltiple, de respuesta libre, o parte de cada clase; entrevistas clínicas; tests escritos seguidos de entrevistas complementarias. En

Shaughnessy y otros (1991) se discutió sobre la utilidad y validez de varias de estas posibilidades.

Hay acuerdo generalizado en que las entrevistas clínicas son las que proporcionan más información. En el contexto del Modelo de Van Hiele, tenemos dos excelentes ejemplos en el test utilizado en Burger, Shaughnessy (1990) y las unidades de enseñanza diseñadas por Fuys, Geddes, Tischler (1988). No obstante, por el tiempo que consumen, las entrevistas clínicas sólo se pueden emplear en determinadas investigaciones, con pocos estudiantes implicados, por lo que la mayoría de las investigaciones han utilizado tests escritos.

Respecto a los items de elección múltiple, poseen las ventajas de que se pueden administrar fácilmente a colectivos amplios y su corrección es muy rápida. El test de Usiskin (1982) constituye el ejemplo obligado para este tipo de tests en el contexto del Modelo de Van Hiele y ha sido, y sigue siendo, empleado por numerosos investigadores. Nosotros diseñamos tests con items de elección múltiple en nuestros trabajos iniciales sobre el Modelo de Van Hiele (Gutiérrez, Jaime, 1987 b), aunque pronto cambiamos a items de respuesta libre.

Un inconveniente importante que presenta el empleo de los items de elección múltiple es que no reflejan la razón por la cual un estudiante selecciona una de las opciones que se le presentan. Dado que los items deben estar asignados previamente a un nivel de razonamiento, surgen con frecuencia casos de estudiantes que eligen la respuesta correcta pero empleando un tipo de razonamiento que no corresponde al nivel establecido previamente para ese ítem. D. Fuys ponía de relieve este hecho con el siguiente comentario a un ítem de elección múltiple, parecido a alguno de los empleados por Usiskin (1982), del test que habíamos elaborado en (Gutiérrez, Jaime, 1987 b). En dicho ítem, asignado al nivel 1, se pedía identificar los rectángulos entre los siguientes cuadriláteros:



Fuys (1987) comentaba que "un estudiante podría elegir la respuesta C [los rectángulos son P, S y U] porque:

a) T no tiene forma de rectángulo (nivel 1), o
b) T no es porque no tiene todos los ángulos rectos (nivel 2), o

c) T es un trapecio y los trapecios no son rectángulos porque no tienen todas las propiedades necesarias de los rectángulos (nivel 3, un razonamiento informal)."

Esta ha sido una de las razones por las que se ha puesto en duda la fiabilidad de los test de elección múltiple para evaluar el nivel de Van Hiele de razonamiento. Mayberry (1981) analiza la posibilidad de diseñar un test escrito para identificar el nivel de razonamiento de un estudiante y añade que sería muy difícil diseñar y analizar un test de elección múltiple. Por su parte, Crowley (1989), en una investigación enfocada a diseñar un test de elección múltiple para evaluar los niveles de Van Hiele, no tiene éxito en su objetivo y concluye poniendo en duda la posibilidad de obtener resultados positivos en el diseño de este tipo de tests.

Un ejemplo de test escrito en el que se combinan items de elección múltiple y de respuesta libre es el de Mayberry (1981) y (1983). Por otra parte, nosotros hemos empleado items de respuesta libre (solos o acompañados de entrevistas clínicas) en nuestras investigaciones más recientes, como Gutiérrez, Jaime, Fortuny (1991), Gutiérrez y otros (1991) y en los tests utilizados en la sección 3.5 (los items de estos tests aparecen en el anexo IV).

3.3. Cuestiones objeto de esta investigación.

En este capítulo presentamos algunas contribuciones a la resolución de los problemas, planteados en la sección 3.1, relativos a la evaluación de los niveles de razonamiento de los estudiantes. Las formas de abordarlos tienen una estrecha relación con la postura que se adopte respecto de la cuestión de la continuidad o discretitud de los niveles de Van Hiele. Ya hemos explicado con anterioridad los motivos por los que apoyamos la opción de la continuidad en la transición de un nivel de razonamiento al siguiente. Así pues, desde esta postura, hay tres cuestiones de investigación a las cuales proponemos soluciones en este capítulo:

1- Asumida la continuidad del progreso de un nivel de Van Hiele al siguiente, se plantea el problema de describir ese proceso de adquisición de un nuevo nivel de razonamiento por un estudiante.

Ofrecemos una interpretación de la continuidad en la adquisición de un nivel de razonamiento definiendo el concepto de Grado de Adquisición de un nivel de Van Hiele. Esta visión proporciona mayor información sobre la forma de razonamiento de los estudiantes y mayor precisión en su evaluación que la asignación de un simple y único nivel de razonamiento, empleada en todos los trabajos anteriores sobre el Modelo de Van Hiele que conocemos.

2- Aceptada la descripción anterior del proceso de adquisición de los niveles de Van Hiele, el problema siguiente que se plantea es el de encontrar un procedimiento para evaluar a los estudiantes de manera que se pueda discriminar su progreso en la adquisición de un nuevo nivel de razonamiento.

Para dar respuesta a este segundo problema, hemos construido un método de interpretación de las respuestas de los estudiantes que permite identificar su mayor o menor dominio de determinado nivel de razonamiento. En concreto, hemos definido unos Tipos de Respuesta en los que se tienen en cuenta, dentro de los parámetros del nivel de razonamiento en el que se contesta el ejercicio propuesto, la veracidad y exactitud de la respuesta desde el punto de vista matemático así como la consolidación en el uso de las características propias de ese nivel de razonamiento. A partir del conjunto de respuestas a un test o a una unidad de enseñanza, a cada estudiante se le pueden asignar los grados de adquisición que muestra de cada uno de los niveles de Van Hiele.

3- Entrando en el terreno práctico de la investigación sobre el Modelo de Van Hiele, está planteado desde hace años el problema de construir un test válido y fiable para medir el nivel de razonamiento de los estudiantes. Particularizándolo, el problema es construir un test compatible con las bases teóricas marcadas en los párrafos anteriores de esta sección.

Cuando una investigación utiliza una muestra grande de estudiantes, es evidente la conveniencia de los tests escritos frente a las entrevistas clínicas. Por ello hemos trabajado en la línea de conseguir items escritos de respuesta libre que produzcan el máximo de información sobre el razonamiento de los estudiantes. Sucesivas experimentaciones simultáneas con tests y entrevistas nos han llevado a utilizar la estructura de super-ítem, que aproxima los tests escritos a las entrevistas orales. Hemos elaborado unos tests escritos para analizar el progreso en el nivel de razonamiento, que hemos administrado a grupos de estudiantes de los cursos entre 6º de E.G.B. y C.O.U., inclusives. Al mismo tiempo, esta experiencia sirve para mostrar la aplicación práctica de las respuestas dadas a los problemas 1 y 2 anteriores por medio de un ejemplo real.

En resumen, pensamos que la consideración de los niveles de Van Hiele en términos del Grado de Adquisición de cada nivel es interesante porque proporciona más información que la de los métodos anteriores, en los que sólo se asigna un nivel o se menciona la transición entre dos niveles consecutivos, y que los Tipos de Respuesta que hemos diseñado para valorar las contestaciones a cuestiones de respuesta libre (tanto orales como escritas) se convierten en una directriz práctica para la evaluación de un mayor o menor dominio de los niveles de razonamiento. Estos elementos, combinados con un tipo de items que den a los estudiantes la posibilidad de responder de acuerdo con su propia forma de razonamiento, suponen un instrumento útil para la comprensión del Modelo de Van Hiele y para la realización de investigaciones futuras.

3.4. Definición y método de evaluación de los Grados de Adquisición de los niveles de Van Hiele.

A continuación presentamos de manera detallada las respuestas que proponemos a los problemas planteados en la sección anterior.

Definición de los Grados de Adquisición de un nivel de razonamiento

En los tests de elección múltiple para determinar el nivel de Van Hiele, cada ítem está asignado a un nivel prefijado de razonamiento y a cada respuesta se le asigna el valor "bien" o "mal". Por el contrario, en un ítem de respuesta libre, el evaluador debe interpretar la contestación del estudiante en términos de un nivel de razonamiento, pudiendo, por tanto, identificar la presencia de uno u otro nivel y graduar la calidad de la respuesta. Esta forma de evaluar amplía en gran medida la información obtenida sobre el razonamiento mostrado por el estudiante, en cuanto que de ella se desprende la confianza del estudiante en cada nivel.

Si pensamos en la adquisición progresiva de un nivel de razonamiento, podemos hablar, en términos cualitativos, de un proceso de dominio cada vez mayor del nivel, que va desde el dominio nulo (al comienzo del proceso) hasta el completo (al final del proceso), con una serie de situaciones intermedias con características propias. Cada uno de estos Grados de Adquisición de un nivel de Van Hiele viene determinado por las siguientes características:

<u>Adquisición Nula</u>: No se emplean las características de este nivel de razonamiento.

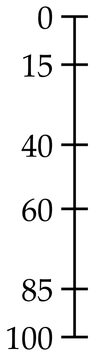
<u>Adquisición Baja</u>: Empieza la consciencia de las características, métodos y exigencias propios del nivel, pero es muy pobre la utilización que se hace de ellos. Es frecuente el abandono del trabajo en este nivel para recurrir al razonamiento de nivel inferior.

<u>Adquisición Intermedia</u>: El empleo de los métodos de este nivel es más frecuente y preciso. No obstante, todavía no se domina, por lo que, ante situaciones que resultan complicadas, se produce un retroceso de nivel, con un intento posterior de retorno al nivel superior. Hay, por tanto, saltos frecuentes entre dos niveles consecutivos de razonamiento, lo cual corresponde a las situaciones descritas en la sección 3.2.

Adquisición Alta: El nivel habitual de trabajo es éste y se produce con muy poca frecuencia el retroceso de nivel, aunque sucede alguna vez. Asimismo, en ocasiones se hace un uso inadecuado de las herramientas propias de este nivel de razonamiento.

Adquisición Completa: Hay un dominio total de las herramientas y métodos de trabajo propios de este nivel de razonamiento.

Si cuantificamos la división anterior mediante porcentajes, unos límites razonables para los diferentes grados de adquisición de un nivel de razonamiento son los siguientes:



Adquisición nula:	0% ≤ Gr(n) ≤ 15%.
Adquisición baja:	15% < Gr(n) < 40%.
Adquisición intermedia:	40% ≤ Gr(n) ≤ 60%.
Adquisición alta:	60% < Gr(n) < 85%.
Adquisición completa:	85% ≤ Gr(n) ≤ 100%.

Tabla 3.1. Valores cualitativos y cuantitativos de los grados de adquisición de un nivel de Van Hiele.

Es importante señalar que la cantidad de divisiones y los valores porcentuales asignados para los límites son subjetivos y no afectan al concepto central de los grados de adquisición del nivel propuesto. Nos hemos decantado por las cinco divisiones señaladas anteriormente porque, a partir de nuestras experimentaciones en diferentes contextos matemáticos y con estudiantes de diferentes cursos y países, pensamos que hay características diferenciadoras claras para cada una de ellas. Por otra parte, los porcentajes asignados son razonables a partir del significado de cada división.

Evaluación de las respuestas a un test: Definición de los Tipos de Respuestas

Para no inducir a confusión al relacionar este trabajo con la propuesta sobre la definición de los tipos planteada en algunas de nuestras publicaciones anteriores, mencionadas en la sección 3.2, señalaremos antes de empezar que la que presentamos ahora difiere algo de la que hemos divulgado anteriormente. La variación afecta a los tipos 0 y 1 anteriores, fusionados en el que actualmente designamos como tipo 1, lo cual es fruto de nuestra experiencia en el uso de este método de evaluación en los últimos años.

Los tipos de respuestas que proponemos son aplicables a items de respuesta libre, tanto orales como escritos, pero no a items de elección múltiple. Por lo general, un ítem de respuesta libre puede ser contestado en distintos niveles de Van Hiele. Por tanto, no será el enunciado del ítem, sino la respuesta del estudiante lo que determine el nivel que se asigne al estudiante. Ejemplos de esta diversidad de formas posibles de responder a una misma pregunta pueden verse en el anexo V, en el cual presentamos ejemplos de toda la gama de respuestas a los items (anexo IV) de los tests administrados que hemos encontrado.

Esta variedad de posibilidades hace que, a la hora de evaluar una respuesta, primero se deba determinar el nivel de razonamiento en el que se ha respondido y después se deba analizar la calidad de la respuesta desde la perspectiva del nivel que se considera, teniendo en cuenta tanto su precisión matemática como el empleo del nivel de razonamiento en cuestión.

Este doble análisis de las respuestas (de nivel de razonamiento y de corrección matemática) lleva a establecer una variedad de Tipos de Respuestas, que tienen las características siguientes:

<u>Tipo 1</u>: Items sin respuesta, con respuestas no codificables o con respuestas que indican que el estudiante no está en un determinado nivel de razonamiento pero que no proporcionan ninguna información sobre su forma de utilizar los niveles de razonamiento inferiores.

<u>Tipo 2</u>: Respuestas matemáticamente incorrectas y muy incompletas, pero en las que se reconocen indicios de utilización de cierto nivel de razonamiento. Se trata, por lo general, de respuestas muy breves y pobres que, además, contienen errores matemáticos o que no contestan directamente a la pregunta planteada.

<u>Tipo 3</u>: Respuestas matemáticamente correctas pero muy incompletas, en las que se reconocen indicios de utilización de cierto nivel de razonamiento. Se trata, por lo general, de respuestas muy breves y pobres, aunque no contienen errores matemáticos.

<u>Tipo 4</u>: Respuestas que reflejan claramente características de dos niveles de razonamiento consecutivos. Esta es la situación más típica de los alumnos en transición entre niveles, pues entremezclan dos niveles de razonamiento consecutivos en sus respuestas a un ítem (generalmente en función de la dificultad de las preguntas). Las respuestas pueden ser matemáticamente correctas o incorrectas, pero deben ser bastante completas.

<u>Tipo 5</u>: Respuestas bastante completas pero matemáticamente incorrectas, que reflejan claramente la utilización predominante de un nivel de razonamiento determinado. La incorrección de las respuestas puede deberse a errores matemáticos o a que siguen una

línea de trabajo que no lleva a la solución del problema planteado, pero cuyos procesos de razonamiento son válidos.

Tipo 6: Respuestas bastante completas y matemáticamente correctas que reflejan claramente la utilización predominante de un nivel de razonamiento determinado. Se trata de respuestas claras y correctas, pero que no están completas porque no llegan a resolver el problema totalmente, porque hay "saltos" en el razonamiento deductivo seguido, porque tienen pequeños errores, etc.

Tipo 7: Respuestas matemáticamente correctas y completas que reflejan claramente la utilización de un nivel de razonamiento determinado.

En el anexo V describimos con detalle los criterios que hemos utilizado para la asignación de nivel de razonamiento y Tipo a las respuestas de los estudiantes testados. En particular, pueden verse, para cada ítem, ejemplos de respuestas de los diferentes Tipos (excepto para el Tipo 1).

El esquema siguiente resume la relación entre la corrección matemática, la consolidación del nivel de razonamiento y los distintos Tipos de respuestas:

		Corrección Matemática	
		Incorrecta	Correcta
Uso del Nivel de V.H.	Alto	5	6, 7
	Medio	4	
	Bajo	2	3

Tabla 3.2. Características de los Tipos de respuestas.

Asignación de los Grados de Adquisición de los niveles de Van Hiele a los estudiantes

La parte final del proceso, una vez que un estudiante ha contestado a un test o un cuestionario, es la determinación de sus grados de adquisición de los diferentes niveles de Van Hiele. Para ello, se deben tener en cuenta varios elementos y pasos:

A) La ponderación de cada tipo de respuesta. Esta guarda relación con los intervalos del segmento [0, 100] fijados para los grados de adquisición de los niveles, y está recogida en la tabla siguiente:

Tipo	1	2	3	4	5	6	7
Ponderación (%)	0	20	25	50	75	80	100

Tabla 3.3. Ponderación de los diferentes Tipos de respuestas.

Al igual que en el caso de los valores cuantitativos de los grados de adquisición, se trata de unos valores subjetivos. En las experimentaciones que hemos realizado no hemos detectado ningún problema en estos valores, por lo que los consideramos válidos.

B) La codificación que se ha hecho de las respuestas del estudiante al test, esto es, el nivel de razonamiento y el tipo que se le ha asignado a cada respuesta.

C) El rango de niveles de Van Hiele en los que se puede contestar cada ítem del test. Ya hemos comentado al comienzo de la sección 3.4 que la mayoría de los items admiten respuestas de diferentes niveles de razonamiento, siendo por lo general posibles respuestas de 2 ó 3 niveles, por lo que se debe ponderar la respuesta en todos los niveles de razonamiento que el estudiante podría haber utilizado. En aplicación de la organización jerárquica de los niveles de Van Hiele, consideramos que si un ítem puede ser contestado en un rango de niveles N_1 a N_2 y es contestado en el nivel N ($N_1 \leq N \leq N_2$), este ítem tendrá una ponderación de:

- 100% en los niveles de ese rango que son inferiores al N.
- 0% en los niveles de ese rango que son superiores al N.
- el valor correspondiente al tipo de la respuesta en el nivel N.

Por ejemplo, si un ítem se puede contestar en los niveles 2, 3 y 4 y a una respuesta se le han asignado el nivel 3 y el tipo 5, la ponderación correspondiente a esa respuesta será: nivel 2 --> 100 % , nivel 3 --> 75 % , nivel 4 --> 0 % .

D) Los items que pueden contestarse en cada nivel de razonamiento, para calcular el grado de adquisición de ese nivel por los estudiantes. Este valor se obtiene calculando la media aritmética de las ponderaciones asignadas a todos los items que pueden ser contestados en ese nivel.

Por ejemplo, si hay tres items que pueden ser contestados en el nivel 2 y las ponderaciones de esos items en dicho nivel son 0%, 20% y 50%, el grado de adquisición del nivel 2 por el estudiante es $Gr(2) = \frac{0 + 20 + 50}{3}$ = 23'3%, que corresponde a una adquisición baja de este nivel.

Este cálculo se debe hacer para cada nivel de razonamiento, con lo que el resultado final de la evaluación de un estudiante es un conjunto de cuatro valores correspondientes a los grados de adquisición de cada nivel de Van Hiele 1 a 4.

Por ejemplo, un estudiante puede mostrar en un test grados de adquisición del 100% (completa), 80% (alta), 20% (baja) y 0% (nula) de los niveles 1 a 4, respectivamente. Estos valores nos dan a entender que el estudiante está terminando la adquisición del segundo nivel de razonamiento, que es su nivel de trabajo habitual, aunque al mismo tiempo está iniciando la adquisición del tercer nivel, que sabe utilizar en problemas fáciles. En la sección 3.5, tomando como base los resultados del estudio longitudinal realizado, explicamos el significado de este grupo de cuatro valores y la información o consecuencias que se pueden extraer de ellos.

Con los métodos de asignación de niveles de Van Hiele utilizados hasta el momento en las restantes investigaciones, el razonamiento de este estudiante habría sido identificado como de nivel 1, de transición entre los niveles 1 y 2, ó de nivel 2, dependiendo del criterio para la superación de niveles adoptado.

En Gutiérrez, Jaime, Shaughnessy, Burger (1991) hicimos un estudio comparativo de los métodos de evaluación utilizados en Burger, Shaughnessy (1990) y en Gutiérrez y otros (1991) (el método seguido en esta última publicación es casi idéntico al que proponemos aquí), aplicando ambos métodos a un grupo de estudiantes formado por parte de los entrevistados en el proyecto de investigación americano y parte de los testados en el proyecto de investigación español.

Tipos de tests para evaluar el nivel de razonamiento

Existen dos aspectos a tener en cuenta en relación con el test a emplear en la evaluación del nivel de Van Hiele de razonamiento de los estudiantes:

- Elección del tipo de test: Oral o escrito. Con items de respuesta libre o de elección múltiple.

- Elección de los items que deben formar el test: Los niveles de razonamiento a los que estarán asociados. El número de items en el test y la cantidad de ellos asociados a cada nivel de razonamiento.

Tras analizar las investigaciones realizadas hasta el momento sobre el Modelo de Van Hiele, mencionadas en la sección 3.2, pensamos que los items o problemas de respuesta libre son los que permiten identificar con mayor precisión el razonamiento de los estudiantes. Con este tipo de items, las entrevistas son la forma de obtener información más amplia; con tests escritos se puede obtener también bastante información sobre el razonamiento de los estudiantes, aunque hay una pérdida de información respecto a las entrevistas. La ventaja de los tests escritos respecto a las entrevistas es que permiten evaluar colectivos más numerosos de estudiantes.

Respecto a los items concretos que deben integrar un test (cantidad, contenidos, objetivos, etc.), siempre existe el problema de proceder a una selección adecuada, pues incluir uno u otro ítem puede suponer sobre o infravalorar un tipo de razonamiento de los estudiantes. Pero esta dificultad existe siempre, en cualquier test y no solamente en los relacionados con el Modelo de Van Hiele. En lo que se refiere al diseño de tests para medir el nivel de razonamiento geométrico, éste es un tema abierto, que debería ser investigado con detalle en el futuro, en el que es necesario considerar, además, la influencia de los conocimientos previos de los estudiantes y la ponderación de las distintas destrezas diferenciadas que integran cada nivel de Van Hiele; en Jaime, Gutiérrez (1990 c) hacemos una sugerencia en esta línea.

3.5. Aplicación a un estudio longitudinal de alumnos desde 6º de E.G.B. hasta C.O.U.

En esta sección presentamos un ejemplo de utilización del método que hemos descrito en las secciones precedentes para identificar el grado de adquisición de los niveles de razonamiento de los estudiantes. Lo haremos empleando un test cuyos items hemos diseñado teniendo en cuenta las ideas expresadas en la sección anterior. Dichos items forman parte de una batería más amplia, diseñada por nosotros para evaluar el nivel de razonamiento de Van Hiele y que, desde 1988, ha experimentado mejoras sucesivas. El análisis de los resultados obtenidos mediante la administración de este test lo centraremos en dos aspectos:

1) Análisis de la evolución del nivel razonamiento de los estudiantes desde 6º de E.G.B. hasta C.O.U. (con edades entre 11 y 18 años). Los alumnos de 3º de B.U.P. y de C.O.U. eran de la especialidad de Ciencias. La comparación de los resultados obtenidos en los diversos cursos puede dar una idea de cómo evoluciona el razonamiento geométrico de los estudiantes a lo largo del Ciclo Superior de E.G.B. y la Enseñanza Media.

2) Seguimiento de la variación experimentada en el nivel de razonamiento de dos de estos grupos de estudiantes a lo largo de varios años: Los estudiantes de 6º de E.G.B. evaluados en 1990 fueron evaluados de nuevo en 1991 y 1992, cuando estaban en 7º y 8º de E.G.B., respectivamente. Análogamente, los estudiantes de 7º de E.G.B. evaluados en 1990 fueron evaluados de nuevo en 1991, cuando estaban en 8º de E.G.B. La comparación de los resultados obtenidos por los mismos estudiantes durante varios años puede servir para contrastar la validez de los resultados de 1).

Es necesario señalar que no pretendemos considerar los resultados obtenidos como generalizables o significativos para colectivos análogos de estudiantes, pues no era éste un objetivo del estudio, ya que no hemos llevado a cabo la necesaria selección previa de los Centros y los alumnos, en función del campo de validez deseado, que hubiera garantizado la validez de tal generalización.

El contexto de la experimentación

Descripción de los grupos evaluados

Como hemos dicho, los cursos en los que se llevó a cabo el estudio abarcan desde 6º de E.G.B. hasta C.O.U. La tabla siguiente resume la información sobre los estudiantes a los que hemos evaluado.

Curso	**Nº de estud.**	**Centro y año**
6º E.G.B.	34*	Amadeo Tortajada (Mislata, Valencia), 1990.
7º E.G.B.	33†	Amadeo Tortajada, 1990.
	29*	Amadeo Tortajada, 1991.
8º E.G.B.	31	Amadeo Tortajada, 1990.
	25†	Amadeo Tortajada, 1991.
	27*	Amadeo Tortajada, 1992.
1º B.U.P.	35	San Vicente Ferrer (Valencia), 1990.
2º B.U.P.	36	San Vicente Ferrer, 1990.
3º B.U.P.	28	I.B. de Villajoyosa (Villajoyosa, Alicante), 1991.
C.O.U.	31	I.B. de Mislata (Mislata, Valencia), 1990.

*) Estos 3 grupos están formados por los mismos estudiantes, testados en 3 años consecutivos.

†) Estos 2 grupos están formados por los mismos estudiantes, testados en 2 años consecutivos.

Tabla 3.4. Características de los estudiantes testados.

En relación con la diversidad de Centros, cabe destacar que para E.G.B. se ha utilizado siempre el mismo y que muchos de los alumnos de este Colegio que continúan sus estudios lo hacen en el I.B. de Mislata, por ser el instituto de bachillerato de la misma población. Este instituto es el que se ha empleado en la evaluación de alumnos de C.O.U. Para la evaluación de alumnos de B.U.P. no nos resultó fácil recurrir a I.B. de Mislata, por lo que, en una primera administración, testamos a estudiantes de 1º, 2º y 3º de B.U.P. del I.B. San Vicente Ferrer de Valencia. Sin embargo, los estudiantes de 3º de B.U.P. no dispusieron de tiempo suficiente para contestar al test completo, lo cual nos obligó a anular este grupo y repetir la prueba en otro grupo de ese curso. Esto no pudo hacerse en el mismo Instituto, sino que tuvo lugar en el I.B. de Villajoyosa (Alicante).

Para efectuar el análisis comparativo de los resultados de los grupos de E.G.B., se administró siempre el mismo test, a cada estudiante le hemos asignado el mismo número de orden en los años sucesivos y hemos procedido a eliminar a los estudiantes que no han contestado los tests todos los años.

La administración de los tests tuvo lugar siempre durante el mes de mayo o primeros días de junio. Aunque el test fue el mismo durante los 2 ó 3 años consecutivos, la posible desviación producida por el aprendizaje de los items en las administraciones es despreciable, pues el tiempo transcurrido entre una administración y la siguiente fue suficientemente largo.

Descripción de los tests diseñados

En la búsqueda durante varios años de un método que permitiera aproximar los tests escritos a las entrevistas clínicas, hemos avanzado respecto a los items usuales de respuesta abierta. La idea central consiste en el planteamiento sucesivo del enunciado inicial y de nuevos enunciados planteando la misma cuestión, después de proporcionar más información, u otras cuestiones relacionadas, de manera que cada vez se requiera un dominio inferior de un nivel determinado de razonamiento o que se pueda resolver con niveles cada vez más bajos. Lo que construimos en realidad son super-items (aunque seguiremos llamándolos, simplemente, items), que se pueden desglosar para su evaluación y codificación en varias partes cuando se crea conveniente. Por lo tanto, que el proceso de organización y administración de uno de estos items es el siguiente:

- Primero se presenta el enunciado del ejercicio, sin dar ayudas complementarias, excepto en el caso de que se pretenda que alguna propiedad figure desde el principio como indicación. La respuesta del alumno ante esta situación, a veces muestra el nivel en el que razona, pero en muchas ocasiones no se produce información debido a que el alumno no sabe cómo enfocar la propiedad o demostración pedida.

- A continuación se le plantea al estudiante el mismo ejercicio, con algún tipo de información adicional, de manera que, si se encuentra en cierto nivel de Van Hiele, pueda contestar. Se intenta eliminar la posibilidad de falta de respuesta originada por una desorientación total sobre el camino a seguir o por la necesidad de que se ocurra una "idea feliz".

- Siguiendo este proceso, se puede proceder a presentar el ejercicio con exigencias de razonamiento menor, del mismo nivel o de niveles inferiores.

- En esta secuencia los estudiantes no pueden retroceder, esto es, una vez que un estudiante ha pasado a la parte siguiente del ítem, no puede volver atrás para contestar o corregir las respuestas anteriores. Ello es porque de esta manera el evaluador puede conocer mejor el proceso de respuesta seguido por los estudiantes y saber si han contestado por sí mismos o gracias a la ayuda proporcionada.

Por ejemplo, el super-ítem 17 de los tests que utilizamos para la evaluación de estudiantes llevada a cabo para esta tesis (ver anexo IV), primero pide la demostración de una propiedad (demostrar que la suma de los ángulos de cualquier triángulo acutángulo es 180°), sin dar indicaciones. En la segunda parte del ítem se presenta una propiedad (las igualdades de los ángulos formados al cortar dos rectas paralelas por una transversal), que se debería haber estudiar en el Ciclo Superior de E.G.B. y que permite completar la demostración. Las respuestas de los estudiantes a estas dos partes las evaluamos conjuntamente, asignándoles un tipo de respuesta en alguno de los niveles 2 a 4. Finalmente, en la última parte del ítem, se muestra con todo detalle la demostración formal, representándola gráficamente en un triángulo acutángulo, y se pregunta si se cumple la propiedad en otros casos (triángulos rectángulos y triángulos obtusángulos), pidiendo la justificación o demostración correspondiente. Este apartado lo evaluamos en el nivel 2 ó 3, según la respuesta del alumno; no se puede responder en el cuarto nivel porque los estudiantes ya tienen un modelo de la demostración y lo que deben hacer es entenderla y adaptarla a otras situaciones parecidas.

Al preparar los tests para este estudio, hemos tenido en cuenta que las condiciones usuales de trabajo exigen que el tiempo total necesario para responder al test no supere cierto límite. En concreto, en este caso, la administración se debía realizar durante las horas usuales de clase de Matemáticas, a los grupos completos de alumnos, en el Centro correspondiente, y por sus profesores habituales, a los cuales habíamos dado previamente instrucciones sobre la forma de proceder. Por todo ello, no se podían superar los 60 minutos, que es el tiempo máximo dedicado usualmente a la clase de Matemáticas en los Centro escolares.

Según el método de evaluación descrito en la sección 3.4, el grado de adquisición de un nivel se obtiene a partir de la media de las ponderaciones de todos los items que se pueden contestar en ese nivel. Por tanto, cuantos más niveles de respuesta admita cada ítem, más oportunidades habrá de observar cada nivel de razonamiento y cuantos más items incluyan en su rango de posibles contestaciones un nivel concreto, más fiable será la evaluación correspondiente a ese nivel.

Para ajustarnos a estas limitaciones, en cierto modo contradictorias, diseñamos tres tests diferentes, en función del nivel de razonamiento esperado de los estudiantes de los diferentes cursos. La diferencia entre los tests está en el cambio de algunos de los items, manteniendo otros fijos y permaneciendo también constante el número de items.

Nuestra experiencia previa, y la de otros investigadores, con alumnos de esos niveles educativos, nos permitió intuir a priori los niveles de razonamiento más probables de los alumnos de cada curso, por lo que incrementamos la cantidad de items que podían ser respondidos en esos niveles y disminuimos el número de ítem orientados a los niveles más improbables, aunque manteniendo un mínimo de dos items asociados a cada nivel de Van Hiele. Esto, junto con la adecuación de los contenidos de los items a los conocimientos geométricos previsibles de los estudiantes, condujo a tres tests, que hemos denominado A, B y C, con los items que indicamos a continuación. Por otra parte, los niveles en los que evaluamos cada uno de los items aparecen en la tabla que presento con posterioridad.

Los items utilizados en los tres tests son: P3, P5, P7.1, P12A, P15 (.1, .2), P17 (A.1, A.1, B), P19 y P24. En el anexo IV presentamos estos items, manteniendo el formato en que fueron administrados. Los items que componen cada test, ordenados según su colocación en el test, son los siguientes:

TEST A (administrado a 6º, 7º y 8º de E.G.B.): P3, P12A, P17A.1, P17A.2, P17B, P7.1 y P19.

TEST B (administrado a 1º y 2º de B.U.P.): P3, P15.1, P15.2, P17A.1, P17A.2, P17B, P5 y P7.1.

TEST C (administrado a 3º de B.U.P. y C.O.U.): P7.1, P15.1, P15.2, P17A.1, P17A.2, P17B, P3 y P24.

La tabla 3.5 resume los items de cada test y los niveles posibles (•) de las respuestas a cada ítem. Están subrayados los items comunes a los 3 tests. Los items de cada test están ordenados según su orden de administración.

Test A					Test B					Test C				
	Niveles					Niveles					Niveles			
Ítem	1	2	3	4	Ítem	1	2	3	4	Ítem	1	2	3	4
3	•	•			3	•	•			7.1	•	•	•	
12A	•	•			15		•	•	•	15		•	•	•
17A		•	•	•	17A		•	•	•	17A		•	•	•
17B		•	•		17B		•	•		17B		•	•	
7.1	•	•	•		5	•	•			3	•	•		
19		•	•	•	7.1	•	•	•		24			•	•

Tabla 3.5. Organización de los tests administrados.

A priori cabía suponer que los niveles de razonamiento predominantes en los estudiantes desde 6º de E.G.B. a 2º de B.U.P. estarían entre el 1 y el 3, mientras que los estudiantes de 3º y C.O.U. estarían entre el nivel 2 y el 4. Como puede verse en la tabla, todos los tests pueden evaluar los 4 niveles de Van Hiele, si bien los tests A y B dedican más atención a los niveles 1 y 2, mientras que el test C dedica más atención a los niveles 3 y 4. La diferencia principal entre los tests A y B se encuentra en los contenidos matemáticos de los problemas planteados.

Asignación de nivel y tipo a las respuesta de los estudiantes

Para la asignación de nivel de Van Hiele a las respuestas de los estudiantes hemos tenido en cuenta:

- Los descriptores generales de los niveles de Van Hiele y los particulares para polígonos, triángulos y cuadriláteros (en el capítulo 1 hemos enunciado los primeros y hemos dado referencias en las que aparecen los segundos).

- Los descriptores particulares de los niveles de razonamiento en los diferentes items empleados. Estos descriptores son particularizaciones de los descriptores anteriores, ampliados y modificados tras experimentaciones piloto, a las preguntas o problemas concretos planteados en los items. Se trata de modelos de respuestas que cubren la mayoría de las respuestas realmente dadas por los estudiantes testados. El anexo V contiene la lista completa de estos descriptores junto a su asignación de nivel y tipo de respuesta.

Todos estos descriptores permiten disponer de unos criterios unificadores y objetivos en los que basarse para asignar nivel y tipo, aunque no cubren todas las posibilidades con detalle, por lo que siempre existe un factor subjetivo que origina discrepancias en las evaluaciones llevadas a cabo por diferentes investigadores.

Para la corrección de los tests, dos evaluadores, conocedores del Modelo de Van Hiele y de los tests, asignamos, de forma independiente, los niveles y tipos de respuesta a cada respuesta de cada estudiante, basándonos en las listas de descriptores mencionadas antes. Los evaluadores fuimos quien presenta esta tesis y Angel Gutiérrez, director de la misma. Una vez corregidos los tests por cada uno, procedimos a la comparación de los resultados, analizando de manera especial los casos de discrepancia, con el objetivo de llegar a un acuerdo para producir una única asignación de niveles y tipos de respuesta para cada estudiante.

En algunos casos, este proceso nos obligó a modificar la lista de descriptores, para introducir uno nuevo o para mejorar alguno de los ya existentes. Cada vez que se producía una de estas modificaciones en la lista de descriptores de un ítem, procedíamos a revisar todas las respuestas previamente evaluadas que pudieran estar influidas por dicha modificación, con el fin de salvaguardar la unidad de criterios y la fiabilidad de los resultados.

Un criterio de fiabilidad de tests que se emplea a veces consiste en comparar las correcciones hechas por varios expertos de forma independiente, para medir las discrepancias entre ellas. Cuanto menos discrepancias haya, más fiable es el test o el criterio de corrección analizado. En nuestro caso, dicha técnica, que no hemos aplicado en estos tests, habría permitido mejorar la lista de descriptores, detectando ambigüedades y limitando la inevitable componente subjetiva del evaluador.

En lo que respecta al cálculo de los valores de los grados de adquisición de los niveles de Van Hiele, hemos aplicado el procedimiento descrito en la sección 3.4. La tabla 3.5. permite identificar qué items han determinado el grado de adquisición de cada nivel, pues son los marcados en cada columna con • los que admiten respuestas de ese nivel. Veamos un ejemplo:

Las respuestas de un estudiante al test B han sido asignadas a los siguientes niveles de razonamiento y tipos de respuesta:

	Nivel	Tipo
Ítem 3	2	5
Ítem 15	3	3
Ítem 17A	--	1
Ítem 17B	3	2
Ítem 5	2	3
Ítem 7.1	2	2

Por lo tanto, a sus respuestas le corresponden las ponderaciones en cada nivel de razonamiento (de acuerdo con la tabla 3.3) y los grados de adquisición de los niveles (según la tabla 3.1) siguientes:

	Nv. 1	**Nv. 2**	**Nv. 3**	**Nv. 4**
Ítem 3	100	75	--	--
Ítem 15	--	100	25	0
Ítem 17A	--	0	0	0
Ítem 17B	--	100	20	--
Ítem 5	100	25	--	--
Ítem 7.1	100	20	0	--
Gr(n)	100 Compl.	53'33 Interm.	11'25 Nula	0 Nula

Es decir, que este estudiante tiene una adquisición completa del primer nivel de Van Hiele, intermedia del segundo y nula del tercer y cuarto niveles.

Validación de los items y los tests

Los items utilizados en este estudio forman parte de una batería más amplia que es el resultado de varios años de investigación previa, en la que hemos trabajado en la elaboración de items escritos de respuesta libre, con el objetivo de acercar el estilo de los tests escritos a la forma como se suelen desarrollar las entrevistas clínicas, en las que el entrevistador puede ir variando progresivamente las preguntas planteadas en función de las respuestas previas del entrevistado (o de sus silencios) y del nivel de razonamiento que refleje, o puede dar alguna ayuda adicional que sirva para desbloquear al estudiante. Dicha batería de items ha sufrido modificaciones en varias ocasiones, como resultado de las numerosas experimentaciones realizadas con estudiantes de todos los niveles educativos y también de consultas con especialistas, en particular D. Fuys, M. Shaughnessy y A. Hoffer, con quienes hemos discutido en varias ocasiones los contenidos, estructura y resultados de administraciones de la mayor parte de los items de la batería, y en particular los que hemos utilizado en el trabajo objeto de este capítulo. Otras veces hemos variado los items a raíz de las respuestas que hemos obtenido en alguna administración.

La validación global de cada test se puede hacer de dos maneras: Analizando el proceso de creación de los items y analizando la coherencia interna de cada test.

Ya hemos explicado en el apartado anterior el proceso de construcción de los items y el tipo de validación a que los hemos sometido. La coherencia interna de los tests es importante para asegurarnos de que los items han sido elegidos correctamente, pues podría ocurrir que, aunque cada ítem por sí mismo sea válido, el conjunto fuera desequilibrado. Un parámetro para medir esta coherencia interna es el Coeficiente de Escalabilidad de Guttman, que mide la jerarquización de los items de un test. En nuestro caso, puesto que asumimos como cierta la estructura jerárquica de los niveles de Van Hiele (un estudiante no puede adquirir un nivel de razonamiento sin haber adquirido antes el nivel anterior), el coeficiente de Guttman nos permitirá determinar si es correcta la relación entre los items asociados a unos niveles y los asociados a los otros, es decir, si los estudiantes que contestan bien los items asociados a un nivel de razonamiento también contestan bien los items asociados al nivel inferior.

El coeficiente de Guttman, por sí solo, nada más nos permitiría validar los items relacionados con los niveles 1 a 3, ya que la jerarquía termina con el nivel 4: Un defecto en el diseño de los items asociados, por ejemplo, al nivel 2 se reflejaría en unos grados de adquisición del nivel 2 inferiores a los del nivel 3, pero un defecto de este tipo en los items asociados al nivel 4 no se podría identificar, salvo que se utilice otro procedimiento de validación diferente.

Para calcular el coeficiente de Guttman, se consideran los vectores formados por los grados de adquisición de los cuatro niveles de razonamiento de cada estudiante (g_1, g_2, g_3, g_4). Puesto que la situación deseable es que $g_1 \geq g_2 \geq g_3 \geq g_4$, se considera que hay un "error" cuando $g_m < g_n$ para al menos un $n > m$. Por ejemplo, el vector (90, $\underline{10}$, 30, 15) tiene 1 error y el vector ($\underline{40}$, $\underline{50}$, 60, 20) tiene 2 errores. Es decir, que el número de errores de un vector (g_1, g_2, g_3, g_4) es igual al número de valores g_i que hay que incrementar para que el vector verifique la relación $g_1 \geq g_2 \geq g_3 \geq g_4$; en los ejemplos anteriores, los valores subrayados son los que hay que incrementar. El coeficiente de escalabilidad de Guttman viene dado por la fórmula:

$$G = 1 - \frac{\text{nº total de errores}}{\text{nº total de respuestas}} = 1 - \frac{\text{nº total de errores}}{4 \text{ x nº de estudiantes}}.$$

De forma análoga se puede utilizar el coeficiente de Guttman para analizar los items de los tests, considerando los vectores formados por las ponderaciones de las respuestas de cada estudiante a los diferentes items asociados a cada nivel de razonamiento (luego este vector tiene 15 componentes, tantas como puntos • hay en la tabla 3.5 para cada test). Ahora se compara el peso de cada ítem de un nivel con los pesos de todos los items de niveles superiores, pero no se compara con los pesos de los otros items de su mismo nivel. En la situación deseable, la ponderación de un ítem en el nivel n debe ser mayor o igual que la ponderación de cualquier otro ítem en los niveles n+1, … En este caso la fórmula es:

$$G = 1 - \frac{\text{nº total de errores}}{\text{nº total de respuestas}} = 1 - \frac{\text{nº total de errores}}{15 \text{ x nº de estudiantes}}.$$

Cuando no hay ningún error se obtiene G = 1. En investigaciones anteriores en Didáctica de las Matemáticas que han utilizado el coeficiente de Guttman, se ha considerado como límite inferior para aceptar la jerarquización el valor G = 0'90 (Mayberry, 1983; Hart, 1980). La tabla siguiente resume los coeficientes de escalabilidad de Guttman para los diferentes cursos.

		Coef. de Guttman	
	Curso	**entre niveles**	**entre items**
	6º E.G.B.	1'00	0'96
Test A	**7º E.G.B.**	1'00	0'96
	8º E.G.B.	1'00	0'96
Test B	**1º B.U.P.**	0'99	0'85
	2º B.U.P.	0'98	0'81
Test C	**3º B.U.P.**	0'99	0'88
	C.O.U.	0'98	0'86

Tabla 3.6. Valores del coeficiente de escalabilidad de Guttman.

Se observa que los valores del coeficiente de Guttman son muy altos al comparar los grados de adquisición de los niveles, lo cual confirma la fiabilidad de los tests. Cuando se comparan las ponderaciones de las respuestas individuales a los items, los valores obtenidos son, lógicamente, inferiores. Destacan en particular los de los cursos de Enseñanza Media, correspondientes a los tests B y C. Un análisis detenido de las respuestas de cada estudiante pone de manifiesto:

1) Que los errores no proceden de pocos estudiantes, sino que afectan a la mayoría de los estudiantes de cada curso (desde un 68% en 3º de B.U.P. hasta un 86% en 1º de B.U.P.).

2) Que los items con mayor número de errores corresponden al nivel 2 (el 16'5% de los errores son en el ítem P3, el 14% en el P5, el 15'8% en el P7.1 y el 11'4% en el P17A), con la única excepción significativa del ítem P5 asociado al nivel 1 (con un 16'2% de los errores). Las diversas fuentes posibles de estos errores (defecto de los items, falta de tiempo para contestar el test completo, carencia de conocimientos geométricos necesarios, etc.) deberán

ser estudiadas con detalle en una investigación posterior, con el fin de determinar los cambios necesarios para mejorar los tests.

Así pues, consideramos los tests globalmente fiables, si bien hay en ellos algunos items que son los principales causantes de los errores producidos y que, por lo tanto, deben ser analizados para su posible revisión.

Resultados de la administración de los tests. Análisis y conclusiones

Con la consideración, formulada con anterioridad, de que no pretendemos que los datos y los resultados que mostramos aquí sean generalizables a la totalidad de alumnos de los niveles educativos con los que hemos trabajado, vamos a hacer algunos análisis de la información obtenida sobre los niveles de razonamiento de los estudiantes. Vamos a centrarnos en los dos aspectos enunciados al comienzo de esta sección 3.5:

1- Comparar los grados de adquisición de los niveles de Van Hiele mostrados por estudiantes de los diferentes cursos desde 6º de E.G.B. hasta C.O.U.

2- Estudiar el progreso a lo largo del Ciclo Superior de E.G.B. del nivel de razonamiento de los estudiantes evaluados varias veces en años consecutivos.

Comparación de los cursos 6º de E.G.B. a C.O.U.

Para el primero de los objetivos, en el anexo VI incluimos unas tablas con los grados de adquisición de los niveles de razonamiento por los estudiantes de cada curso. A continuación presentamos algunas tablas descriptivas que resumen, desde diversos puntos de vista, los resultados obtenidos.

Las tablas de las páginas siguientes (tabla 3.7) informan, para cada nivel de Van Hiele y curso, de las cantidades absolutas (y porcentuales) de alumnos que han obtenido los diferentes grados de adquisición de dicho nivel. En las tablas de 7º y 8º de E.G.B. se recogen los dos (respectivamente, tres) grupos de alumnos de esos cursos testados.

6º de E.G.B.	**Nivel 1**		**Nivel 2**		**Nivel 3**		**Nivel 4**	
Adquis. Completa	9	(26'47)	0	(0'00)	0	(0'00)	0	(0'00)
Adquis. Alta	7	(20'59)	0	(0'00)	0	(0'00)	0	(0'00)
Adq. Intermedia	10	(29'41)	0	(0'00)	0	(0'00)	0	(0'00)
Adquis. Baja	7	(20'59)	7	(20'59)	0	(0'00)	0	(0'00)
Adquis. Nula	1	(2'94)	27	(79'41)	34	(100)	34	(100)
Media	60'39 alta		7'55 nula		0'33 nula		0'00 nula	
Desv. Típica	26'26		8'54		1'33		0'00	

7º de E.G.B.	**Nivel 1**		**Nivel 2**		**Nivel 3**		**Nivel 4**	
Adquis. Completa	32	(51'61)	0	(0'00)	0	(0'00)	0	(0'00)
Adquis. Alta	6	(9'68)	3	(4'84)	0	(0'00)	0	(0'00)
Adq. Intermedia	5	(8'06)	2	(3'23)	0	(0'00)	0	(0'00)
Adquis. Baja	16	(25'81)	18	(29'03)	2	(3'23)	0	(0'00)
Adquis. Nula	3	(4'84)	39	(62'90)	60	(96'77)	62	(100)
Media	69'92 alta		15'56 baja		1'05 nula		0'00 nula	
Desv. Típica	32'18		16'52		5'50		0'00	

8º de E.G.B.	**Nivel 1**		**Nivel 2**		**Nivel 3**		**Nivel 4**	
Adquis. Completa	63	(75'90)	1	(1'20)	0	(0'00)	0	(0'00)
Adquis. Alta	10	(12'05)	4	(4'82)	0	(0'00)	0	(0'00)
Adq. Intermedia	7	(8'43)	9	(10'84)	1	(1'20)	0	(0'00)
Adquis. Baja	2	(2'41)	47	(56'63)	4	(4'82)	0	(0'00)
Adquis. Nula	1	(1'20)	22	(26'51)	78	(93'98)	83	(100)
Media	87'95 completa		26'23 baja		2'55 nula		0'00 nula	
Desv. Típica	20'28		17'41		9'03		0'00	

Tabla 3.7.1. Resultados de la administración de los tests.

1º de B.U.P.	**Nivel 1**		**Nivel 2**		**Nivel 3**		**Nivel 4**	
Adquis. Completa	12	(34'29)	0	(0'00)	0	(0'00)	0	(0'00)
Adquis. Alta	10	(28'57)	2	(5'71)	1	(2'86)	0	(0'00)
Adq. Intermedia	1	(2'86)	7	(20'00)	0	(0'00)	2	(5'71)
Adquis. Baja	12	(34'29)	16	(45'71)	4	(11'43)	0	(0'00)
Adquis. Nula	0	(0'00)	10	(28'57)	30	(85'71)	33	(94'29)
Media	65'24 alta		27'05 baja		6'00 nula		2'86 nula	
Desv. Típica	26'33		18'27		13'43		11'61	

2º de B.U.P.	**Nivel 1**		**Nivel 2**		**Nivel 3**		**Nivel 4**	
Adquis. Completa	22	(61'11)	2	(5'56)	0	(0'00)	0	(0'00)
Adquis. Alta	10	(27'78)	2	(5'56)	1	(2'78)	0	(0'00)
Adq. Intermedia	0	(0'00)	8	(22'22)	4	(11'11)	2	(5'56)
Adquis. Baja	4	(11'11)	19	(52'78)	9	(25'00)	0	(0'00)
Adquis. Nula	0	(0'00)	5	(13'89)	22	(61'11)	34	(94'44)
Media	83'10 alta		36'50 baja		15'28 baja		2'50 nula	
Desv. Típica	22'78		20'10		19'48		9'24	

3º de B.U.P.	**Nivel 1**		**Nivel 2**		**Nivel 3**		**Nivel 4**	
Adquis. Completa	24	(85'71)	1	(3'57)	0	(0'00)	0	(0'00)
Adquis. Alta	0	(0'00)	9	(32'14)	0	(0'00)	0	(0'00)
Adq. Intermedia	4	(14'29)	2	(7'14)	2	(7'14)	0	(0'00)
Adquis. Baja	0	(0'00)	9	(32'14)	9	(32'14)	2	(7'14)
Adquis. Nula	0	(0'00)	7	(25'00)	17	(60'71)	26	(92'86)
Media	92'41 completa		43'32 intermedia		12'93 nula		2'32 nula	
Desv. Típica	17'47		28'42		15'13		7'63	

Tabla 3.7.2. Resultados de la administración de los tests.

C.O.U.	**Nivel 1**		**Nivel 2**		**Nivel 3**		**Nivel 4**	
Adquis. Completa	28	(90'32)	5	(16'13)	0	(0'00)	0	(0'00)
Adquis. Alta	0	(0'00)	8	(25'81)	2	(6'45)	0	(0'00)
Adq. Intermedia	2	(6'45)	9	(29'03)	6	(19'35)	1	(3'23)
Adquis. Baja	0	(0'00)	7	(22'58)	8	(25'81)	0	(0'00)
Adquis. Nula	1	(3'23)	2	(6'45)	15	(48'39)	30	(96'77)
Media	93'55 completa		55'29 intermedia		21'65 baja		2'85 nula	
Desv. Típica	21'03		25'26		21'89		7'96	

Tabla 3.7.3. Resultados de la administración de los tests.

Las tablas anteriores nos muestran el perfil medio de los estudiantes de cada curso, así como el progreso a lo largo de los cursos. En E.G.B. se observa un incremento en el grado de adquisición del primer nivel de Van Hiele, que se completa en 8º, junto a un inicio en la adquisición del segundo nivel a partir de 7º. Además, como cabía esperar, en E.G.B. no hay muestras significativas de razonamiento de tercer nivel (sólo unos pocos estudiantes de 7º y 8º que han respondido algún ítem) y hay una ausencia total de razonamiento del cuarto nivel.

Por lo que se refiere a Enseñanza Media, resulta llamativo el descenso en los grados de adquisición del primer nivel en 1º y 2º de B.U.P., dato que comentaremos más adelante. A lo largo de estos cuatro cursos continua el incremento en la adquisición del segundo nivel y se inicia la adquisición, muy baja, del tercer nivel. Esto último es, seguramente, fruto de la enseñanza formalizada propia de estos cursos, en los que se hace énfasis en las demostraciones. No obstante, a pesar de este tipo de enseñanza, ni siquiera en C.O.U. se aprecia la presencia significativa de razonamiento de cuarto nivel. Desde el punto de vista didáctico, esto es una confirmación de la incomunicación que se produce cuando profesor y alumnos se expresan utilizando diferentes niveles de razonamiento. La enseñanza de las Matemáticas de estudiantes con habilidades de razonamiento como los de esta muestra debería empezar en 1º de B.U.P. basándose en los métodos de trabajo del segundo nivel, para progresar a partir de ahí hasta el tercer nivel y, cuando sea posible, iniciar la adquisición del cuarto nivel.

Sin embargo, de estas tablas no es posible obtener información detallada sobre cada estudiante y sobre los diferentes perfiles de grados de adquisición presentes en cada curso. Tal información es igual o más rica que la anterior, pues nos permite conocer mejor la diversidad de formas de razonar de los estudiantes dentro de un mismo grupo.

A la vista de los vectores con los grados de adquisición de todos los estudiantes evaluados, hemos identificado una serie de perfiles, descritos en la tabla 3.8, que aparecen de manera significativa en nuestro estudio, y que son el reflejo de diferentes estilos de razonamiento matemático. Los perfiles de esta tabla están ordenados desde el nº 1, que corresponde al razonamiento de mayor nivel (estudiantes que han adquirido plenamente los niveles 1 y 2 y están en proceso de adquisición del nivel 3), hasta el perfil nº 12, que corresponde a estudiantes que ni siquiera muestran una adquisición baja del primer nivel de razonamiento.

La tabla 3.9 muestra, de una forma más sintética, la misma información. Aquí es más fácil darse cuenta de la evolución de los niveles de razonamiento de los estudiantes a lo largo de los cursos, pues, con la excepción de 1º de B.U.P., cuanto más alto es el curso, mayor es la cantidad de estudiantes que tienen perfiles correspondientes a formas de razonamiento de más calidad.

Perfil	6º E.G.B.	7º E.G.B.	8º E.G.B.	1º B.U.P.	2º B.U.P.	3º B.U.P.	C.O.U.
CC(AI)≤I			1		6	4	13
CAI≤B					6	4	10
CA≤BN		5	5			25	13
CI≤BN		3	11	11	6	7	26
CBBN			1		8		
C≤BNN	26	44	58	17	36	43	23
AI≤BN				9	11		
A≤BNN	21	10	12	20	17		
INNN	29	8	7	3		14	
BBNN		2	1	14	3		
BNNN	21	24	1	20			
NNNN	3	5	1				

Tabla 3.9. Porcentajes (redondeados) de estudiantes de cada curso en cada perfil.

Perfil nº	Niveles 1	2	3	4	Cursos 6º E.G.B.		7º E.G.B.		8º E.G.B.		1º B.U.P.		2º B.U.P.		3º B.U.P.		C.O.U.		Total	
1	C	C	A,I	≤I	0	(0'00)	0	(0'00)	1	(1'20)	0	(0'00)	2	(5'56)	1	(3'57)	4	(12'90)	8	(2'59)
2	C	A	I	≤B	0	(0'00)	0	(0'00)	0	(0'00)	0	(0'00)	2	(5'56)	1	(3'57)	3	(9'68)	6	(1'94)
3	C	A	≤B	N	0	(0'00)	3	(4'84)	4	(4'82)	0	(0'00)	0	(0'00)	7	(25'00)	4	(12'90)	18	(5'83)
4	C	I	≤B	N	0	(0'00)	2	(3'23)	9	(10'84)	4	(11'43)	2	(5'56)	2	(7'14)	8	(25'81)	27	(8'74)
5	C	B	B	N	0	(0'00)	0	(0'00)	1	(1'20)	0	(0'00)	3	(8'33)	0	(0'00)	0	(0'00)	4	(1'29)
6	C	≤B	N	N	9	(26'47)	27	(43'55)	48	(57'83)	6	(17'14)	13	(36'11)	12	(42'86)	7	(22'58)	122	(39'48)
7	A	I	≤B	N	0	(0'00)	0	(0'00)	0	(0'00)	3	(8'57)	4	(11'11)	0	(0'00)	0	(0'00)	7	(2'27)
8	A	≤B	N	N	7	(20'59)	6	(9'68)	10	(12'05)	7	(20'00)	6	(16'67)	0	(0'00)	0	(0'00)	36	(11'65)
9	I	N	N	N	10	(29'41)	5	(8'06)	6	(7'23)	1	(2'86)	0	(0'00)	4	(14'29)	0	(0'00)	26	(8'41)
10	B	B	N	N	0	(0'00)	1	(1'61)	1	(1'20)	5	(14'29)	1	(2'78)	0	(0'00)	0	(0'00)	8	(2'59)
11	B	N	N	N	7	(20'59)	15	(24'19)	1	(1'20)	7	(20'00)	0	(0'00)	0	(0'00)	0	(0'00)	30	(9'71)
12	N	N	N	N	1	(2'94)	3	(4'84)	1	(1'20)	0	(0'00)	0	(0'00)	0	(0'00)	0	(0'00)	5	(1'62)
Otros					0	(0'00)	0	(0'00)	1	(1'20)	2	(5'71)	3	(8'33)	1	(3'57)	5	(16'13)	12	(3'88)
TOTALES					34	(100)	62	(100)	83	(100)	35	(100)	36	(100)	28	(100)	31	(100)	309	(100)

C = adquisición completa; A = adquisición alta; I = adquisición intermedia; B = adquisición baja; N = adquisición nula.

Tabla 3.8. Cantidades absolutas (y porcentuales) de estudiantes de cada curso en cada uno de los perfiles definidos.

La observación de las tablas anteriores permite deducir que, de manera global, se ha producido un incremento progresivo en los grados de adquisición de los niveles de Van Hiele a lo largo de los cursos, con una excepción que comentaremos más adelante. Efectivamente, al aplicar el test[1] de Kruskal-Wallis (que analiza 3 ó más muestras independientes, basándose en una anova de 1 factor) al conjunto de los estudiantes desde 6º a C.O.U., se obtiene una diferencia entre los cursos altamente significativa para cada nivel de razonamiento (p=0'00005 de una cola).

En la tabla 3.10 se comparan las medias de los grados de adquisición de cada curso y del siguiente (6º y 7º, 7º y 8º, 8º y 1º, etc.) mediante el test de Mann-Whitney (basado en un análisis de las medias de dos muestras independientes). Al igual que en la tabla 3.7, aquí también llama la atención el retroceso en el grado de adquisición del nivel 1 que se observa al pasar de 8º de E.G.B. a 1º de B.U.P. Creemos que esto se puede deber a que los estudiantes de 1º de B.U.P. no tuvieron bastante tiempo para contestar el test, pues 8 de los 35 estudiantes del grupo dejaron en blanco el último ítem (ítem 7.1) y 4 de ellos dejaron en blanco también el penúltimo (ítem 5), que son 2 de los 3 items que miden el grado de adquisición del nivel 1; además, otros estudiantes contestaron sólo parcialmente el último ítem. La influencia de este defecto en el nivel 2 es menor, ya que todos los items del test medían dicho nivel, y no se aprecia influencia en los niveles 3 y 4. En 2º de B.U.P. se ha producido el mismo fenómeno, si bien bastante más atenuado, cuyas causas son probablemente las mismas que en 1º.

La gráfica 3.10 representa la misma información que la tabla que la acompaña. Uno de los datos que esta gráfica refleja con claridad es la variación de los grados de adquisición de cada nivel a lo largo de los cursos. Vemos que el nivel de razonamiento en el que más progresan los estudiantes es el segundo, pero que por término medio no llegan a obtener una adquisición alta de este nivel. lo cual quiere decir que los estudiantes de estos cursos deberían recibir una instrucción que les ayudara a adquirir completamente el segundo nivel de Van Hiele lo antes posible, para poder empezar a desarrollar la adquisición del tercer nivel.

---

[1] Para los análisis estadísticos que vamos a hacer en las páginas siguientes, hemos utilizado estadísticos no paramétricos, ya que no tenemos certeza de que los grados de adquisición de cada nivel por los diferentes cursos sigan distribuciones normales. Más bien, la observación de los datos nos hace sospechar lo contrario.

	Nivel 1	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Nivel 4**
6º E.G.B.	60'39	7'55	0'33	0'00
7º E.G.B.	69'92*	15'56†	1'05	0'00
8º E.G.B.	87'95†	26'23†	2'55	0'00
1º B.U.P.	65'24†	27'05	6'00†	2'86*
2º B.U.P.	83'10†	36'50*	15'28†	2'50
3º B.U.P.	92'41*	43'32	12'93	2'32
C.O.U.	93'55	55'29*	21'65	2'85

*) Diferencia significativa (p<0'05 de una cola) con el curso anterior.

†) Diferencia significativa (p<0'01 de una cola) con el curso anterior.

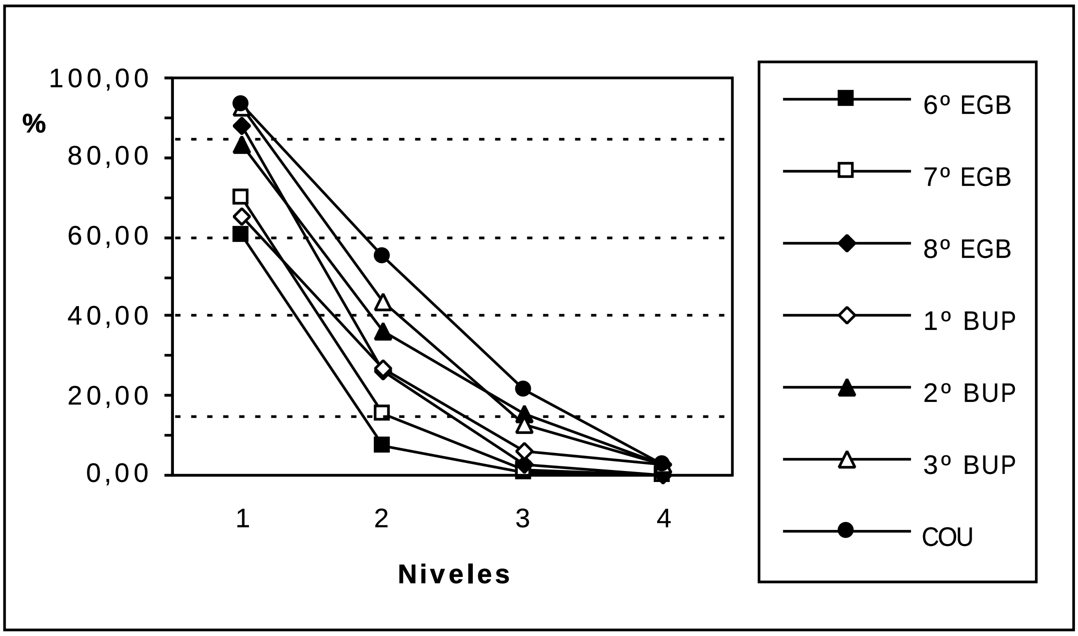


Tabla y gráfica 3.10. Medias de los grados de adquisición de cada nivel de Van Hiele por los estudiantes de los diferentes cursos.

Aunque el Modelo de Van Hiele tiene entre sus características centrales la jerarquía de los niveles de razonamiento, es decir que un estudiante progresará en su capacidad de razonamiento pasando de un nivel al siguiente e iniciando la adquisición del segundo nivel cuando haya adquirido completamente el primero, la realidad de la enseñanza hace que con cierta frecuencia aparezcan situaciones diferentes. En los párrafos anteriores hemos visto los perfiles de adquisición de los niveles más frecuentes entre los estudiantes testados, la mayoría de los cuales se ajustan completamente a la jerarquización propuesta por el modelo. De estos perfiles, aquéllos en los que como máximo hay un nivel con una adquisición incompleta (por ejemplo CCAN, CANN, INNN, etc.) corresponden a 228 estudiantes (73'8%).

Vamos a centrar ahora la atención en los perfiles que contradicen este enunciado de la secuencialidad de los niveles. Hay dos tipos de situaciones claramente diferentes:

1) Estudiantes que muestran una adquisición incompleta de varios niveles de razonamiento, pero siendo el grado de adquisición de cada nivel mayor que el del nivel siguiente. Ejemplos de este tipo son los perfiles CCAI, CAIB, CAIN, AIBN, IBNN, etc. En esta situación se encuentran 59 estudiantes (19'1%). Entre éstos, destacan los perfiles ABNN (con 18 estudiantes), CABN y CIBN (con 12 estudiantes cada uno).

2) Estudiantes que muestran una adquisición incompleta de varios niveles de razonamiento, pero siendo el grado de adquisición de un nivel igual o menor que el del nivel siguiente. Ejemplos de este tipo son los perfiles CCII, CAAI, CABI, CIIN, IANN, BIIN, etc. En esta situación se encuentran 22 estudiantes (7'1%). Entre éstos perfiles destacan BBNN (con 8 estudiantes) y CBBN (con 4 estudiantes).

Los perfiles más atípicos de este grupo son aquéllos en los que el grado de adquisición de un nivel es inferior al del nivel siguiente. En nuestra muestra han aparecido CABI, IANN, BIIN, BIBN y NBNN, con 1 estudiante en cada uno de ellos (1'6% en total), por lo que no suponen una cantidad relevante y podemos considerar que se trata de las anomalías inevitables cuando se trabaja con personas.

Los demás perfiles de este grupo son aquéllos en los que el grado de adquisición de un nivel es igual al del nivel siguiente. Han aparecido 7 de estos perfiles, entre los que destacan BBNN (con 8 estudiantes) y CBBN (con 4); los 5 perfiles restantes tienen 1 estudiante cada uno.

Estudio longitudinal en el Ciclo Superior de E.G.B.

Los estudiantes de cada grupo evaluado han tenido el mismo profesor de Matemáticas en los 3 cursos del Ciclo Superior, por lo que la enseñanza ha sido continua a lo largo del Ciclo, sin los desajustes (omisiones o repeticiones de contenidos) usuales debidos al cambio de profesor. El profesor del grupo evaluado en 6º, 7º y 8º ha sido diferente del profesor del grupo evaluado en 7º y 8º.

Para realizar el segundo de los objetivos planteados en esta sección, hay que observar la adquisición de los niveles de razonamiento por cada alumno en los distintos cursos en los que se le ha evaluado: En 6º, 7º y 8º en un caso y en 7º y 8º en el otro. Las gráficas del anexo VII muestran esas comparaciones.

Como hemos visto en el apartado anterior, en los cursos de E.G.B. no hay presencia significativa del tercer ni el cuarto nivel de razonamiento, por lo que centraremos nuestro análisis de los resultados en los niveles 1 y 2. Las tablas 3.11 y 3.12 presentan un resumen numérico de los resultados en estos cursos.

		Nivel 1		Nivel 2	
Adquis. Completa	7º	17	(51'52)	0	(0'00)
	8º	19	(76'00)	0	(0'00)
Adquis. Alta	7º	3	(9'09)	3	(9'09)
	8º	5	(20'00)	1	(4'00)
Adquis. Intermedia	7º	3	(9'09)	0	(0'00)
	8º	1	(4'00)	5	(20'00)
Adquis. Baja	7º	10	(30'30)	11	(33'33)
	8º	0	(0'00)	13	(52'00)
Adquis. Nula	7º	0	(0'00)	19	(57'58)
	8º	0	(0'00)	6	(24'00)
Media	7º	71'92	alta	18'96	baja
	8º	89'80	compl.	28'23	baja
Desv. Típica	7º	29'94		18'41	
	8º	16'44		15'22	

Tabla 3.11. Resultados de la administración del test en 7º y 8º de E.G.B.

		Nivel 1		Nivel 2	
	6º	9	(26'47)	0	(0'00)
Adquis. Completa	7º	15	(51'72)	0	(0'00)
	8º	17	(62'96)	0	(0'00)
	6º	7	(20'59)	0	(0'00)
Adquis. Alta	7º	3	(10'34)	0	(0'00)
	8º	2	(7'41)	0	(0'00)
	6º	10	(29'41)	0	(0'00)
Adquis. Intermedia	7º	2	(6'90)	2	(6'90)
	8º	6	(22'22)	2	(7'41)
	6º	7	(20'59)	7	(20'59)
Adquis. Baja	7º	6	(20'69)	7	(24'14)
	8º	1	(3'70)	12	(44'44)
	6º	1	(2'94)	27	(79'41)
Adquis. Nula	7º	3	(10'34)	20	(68'97)
	8º	1	(3'70)	13	(48'15)
	6º	60'39	alta	7'55	nula
Media	7º	67'64	alta	11'69	nula
	8º	78'83	alta	18'21	baja
	6º	26'26		8'54	
Desv. Típica	7º	34'41		13'03	
	8º	20'01		14'46	

Tabla 3.12. Resultados de la administración del test en 6º, 7º y 8º de E.G.B.

En cuanto a los perfiles de los estudiantes de estos cursos, están recogidos en la tabla 3.13. Si comparamos esta tabla con la 3.9, podemos apreciar que en E.G.B. no están presentes los perfiles correspondientes a las mejores formas de razonamiento. También se aprecia una mejora en el nivel de razonamiento de los estudiantes a lo largo de los años, como lo prueba que el porcentaje de estudiantes con los perfiles de razonamiento superiores va creciendo al ir subiendo de curso.

	Grupo de 6º, 7º y 8º			Grupo de 7º y 8º	
Perfil	6º E.G.B.	7º E.G.B.	8º E.G.B.	7º E.G.B.	8º E.G.B.
CA≤BN				9	4
CI≤BN		7	7		20
C≤BNN	26	45	56	42	52
A≤BNN	21	10	7	9	20
I≤BNN	29	7	22	9	4
B≤BNN	21	21	4	27	
NNNN	3	10	4		

Tabla 3.13. Porcentajes (redondeados) de estudiantes de E.G.B. en cada perfil.

La cuestión principal que hay que analizar es si ha habido progreso en los niveles de razonamiento de los estudiantes a lo largo de los 3 (2) años observados. Para ello hemos utilizado el test de Friedman (que analiza 3 ó más[1] muestras emparejadas basándose en una anova de 2 factores) para el grupo de 6º, 7º y 8º y el test de Wilcoxon (basado en un análisis de las medias de 2 muestras emparejadas) para el grupo de 7º y 8º. Aunque al hacer análisis globales de los cursos hemos utilizado todos los alumnos disponibles, en estos dos análisis se eliminan los estudiantes que han dejado de contestar el test en alguno de los cursos (el programa de ordenador utilizado hace esta eliminación automáticamente), por lo que las muestras válidas han sido de 25 estudiantes en cada grupo.

En ambos grupos se obtiene una diferencia global entre los cursos significativa para los niveles de Van Hiele 1 (p<0'01 de una cola) y 2 (p<0'0005 de una cola). En cuanto a los niveles 3 y 4, los grados de adquisición de casi todos los estudiantes son cero, por lo que no tiene sentido hacer ningún análisis estadístico. Por lo tanto, a lo largo de los 3 (2) años de 6º, 7º y 8º (7º y 8º) sí ha habido un progreso significativo en la adquisición de los niveles 1 y 2 pero no ha habido progreso significativo en la adquisición de los niveles 3 y 4.

El análisis de las correlaciones entre los grados de adquisición obtenidos por los estudiantes en los cursos sucesivos corrobora la conclusión anterior pues, como se observa en la tabla siguiente, se obtienen en casi todos los casos valores altos del coeficiente de correlación de Spearman (tabla 3.14). Los valores más bajos de este coeficiente corresponden al primer nivel de razonamiento, cosa razonable ya que la mayoría de los estudiantes tienen

[1] En Systat se puede usar el test de Friedman sólo con 2 muestras. En el caso de 7º y 8º, el resultado es análogo al del test de Wilcoxon.

una adquisición alta o completa de este nivel, por lo que el incremento a lo largo de los cursos es menor.

	6º E.G.B.		7º E.G.B.		8º E.G.B.	
	Niv. 1	**Niv. 2**	**Niv. 1**	**Niv. 2**	**Niv. 1**	**Niv. 2**
6º E.G.B.	1'000	1'000				
7º E.G.B.	0'546	0'596	1'000	1'000		
8º E.G.B.	0'455	0'693	0'329	0'634	1'000	1'000

	7º E.G.B.			8º E.G.B.		
	Niv. 1	**Niv. 2**	**Niv. 3**	**Niv. 1**	**Niv. 2**	**Niv. 3**
7º E.G.B.	1'000	1'000	1'000			
8º E.G.B.	0'691	0'755	0'834	1'000	1'000	1'000

Tabla 3.14. Matrices de coeficientes de correlación de Spearman entre los grados de adquisición de cada nivel en años sucesivos.

Otra cuestión que es útil analizar es si hay diferencias significativas entre los distintos grupos de cada curso (los 2 grupos de 7º ó los 3 grupos de 8º); de existir, se puede pensar en una diferencia de conocimientos o capacidad matemática entre los estudiantes de los diferentes grupos, en una metodología diferente de enseñanza, debido a que los profesores son distintos, o a ambos factores.

En nuestro estudio no hemos podido llevar a cabo una comprobación sobre posibles diferencias iniciales en cuanto a conocimientos o capacidad matemática entre los estudiantes de los diferentes grupos. Claramente, el análisis que presentamos sería más fiable si se dispusiera de tal información. De todas maneras, tal como señalamos en algún momento, pretendemos mostrar un ejemplo de aplicaciones del método de evaluación que proponemos, y no generalizar los resultados que obtengamos de este análisis a todo el colectivo de estudiantes. Así pues, asumimos la hipótesis de que el conocimiento y las capacidades iniciales de los alumnos son los mismos en todos los grupos. Ello conduce a que, en caso de aparecer diferencias, éstas se deberían fundamentalmente a los diferentes profesores y, por lo tanto, métodos de enseñanza.

Para analizar la existencia de diferencias entre los grados de adquisición de los niveles de Van Hiele por los estudiantes de los 2 grupos de 7º de E.G.B. o de los 3 grupos de 8º de E.G.B. que hemos testado, por tratarse ahora de muestras independientes hemos utilizado el test de Mann-Whitney en 7º y el test de Kruskal-Wallis, extensión del anterior, en 8º. Los resultados obtenidos son los siguientes:

- No hay diferencia significativa ($p>0'05$ de dos colas) entre los 2 grupos de estudiantes de 7º de E.G.B. en ningún nivel de razonamiento.

- Sí hay diferencia significativa entre los 3 grupos de estudiantes de 8º de E.G.B. en los niveles 1 ($p<0'0005$ de dos colas) y 2 ($p<0'05$), pero no la hay en los niveles 3 ni 4 ($p>0'1$). Estas diferencias se deben al grupo testado en 1992, cuyas medias de los grados de adquisición de dichos niveles son significativamente inferiores a las de los grupos de 8º de los años 1990 y 1991.

CAPÍTULO 4: RESUMEN FINAL Y CONCLUSIONES

En esta memoria hemos presentado varias contribuciones originales que afectan al modelo de razonamiento de Van Hiele. Las podemos dividir en dos partes, que corresponden a los contenidos de los capítulos 2 y 3, respectivamente: A) Una contribución a la aplicación del Modelo de Van Hiele a la enseñanza de la Geometría, mediante el diseño de una unidad de enseñanza de las Isometrías del Plano, y B) una contribución al desarrollo de la metodología de investigación sobre el Modelo de Van Hiele, mediante la caracterización del proceso continuo de adquisición de un nivel de razonamiento y la definición de un método para determinar el grado de adquisición de los niveles de Van Hiele por los estudiantes.

A) Como aportaciones prácticas, en esta memoria hemos dedicado un capítulo a desarrollar una propuesta concreta de enseñanza de las Isometrías del Plano, basada en el Modelo de Van Hiele y siguiendo las secuencias de los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje propuestas en este modelo.

En el capítulo 2 hemos expuesto nuestra visión particular sobre la forma de considerar las fases de aprendizaje de Van Hiele, que facilitan la organización de secuencias concretas de enseñanza. Hemos traducido a la realidad escolar las ideas expuestas en el modelo, puestas en práctica mediante la presentación detallada de una unidad de enseñanza formada por tres partes, centrada cada una de ellas en la enseñanza de las traslaciones, los giros y las simetrías, respectivamente.

Cada una de estas partes está dividida en bloques de actividades correspondientes a los niveles 1, 2 y 3 de Van Hiele y, a su vez, organizados de acuerdo con la secuencia de fases de aprendizaje. El resultado final son conjuntos de actividades, cada uno de los cuales tiene planteados sus objetivos específicos, que guardan una estrecha relación con el nivel de razonamiento y la fase de aprendizaje correspondiente para los que están diseñadas las actividades.

Otro aspecto de esta unidad en el que se refleja la influencia del Modelo de Van Hiele es la relación entre las diferentes isometrías durante su enseñanza: En las actividades del primer nivel de razonamiento, traslaciones, giros y simetrías se presentan como movimientos completamente independientes de los demás. Pero en las actividades del segundo nivel se presentan las relaciones básicas entre los tres movimientos, trabajo que se completa en las actividades del tercer nivel, que estudian con detalle las relaciones lógicas entre las isometrías o sus composiciones. De esta manera se sientan las bases para poder construir y entender la estructura algebraica del conjunto de las Isometrías del Plano, trabajo que, por su complejidad y abstracción, se debe completar cuando los estudiantes estén avanzando en la adquisición del cuarto nivel de razonamiento.

B) Como aportaciones más teóricas, en el capítulo 3 hemos presentado algunas reflexiones sobre diversas componentes centrales del Modelo de Van Hiele:

- Sobre la continuidad en la adquisición de los niveles de razonamiento, hemos partido de la idea de que la adquisición de un nivel de razonamiento es un proceso continuo que se prolonga en el tiempo y nuestra aportación ha consistido en proporcionar una interpretación de dicho proceso en términos del Grado de Adquisición de cada uno de los niveles. Esto supone un gran giro respecto a las visiones anteriores, en las que sólo se tenían en cuenta los estudiantes que mostraban un razonamiento homogéneo y uniforme, coherente con un determinado nivel de Van Hiele.

- Por lo que respecta a la evaluación del nivel de razonamiento de los estudiantes, la propuesta que formulamos permite traducir las actuaciones de los estudiantes en términos de consolidación de los niveles de razonamiento. A través de los Tipos de Respuesta, podemos analizar las respuestas de los estudiantes a cualquier test (oral o escrito) de respuesta libre, lo cual incrementa en gran medida la objetividad y la precisión de la evaluación respecto a los métodos anteriores, los cuales tenían como único objetivo asignar el nivel al que correspondiera el razonamiento predominante de los estudiantes.

- Como complemento a las propuestas anteriores, la forma de diseñar items escritos que sugerimos es también una idea original, que consigue acercar la estructura escrita a la oral, con el consiguiente incremento de información que se puede obtener sobre el razonamiento de los estudiantes a partir de sus respuestas.

- Finalmente, hemos aplicado las ideas resumidas en los párrafos precedentes mediante su utilización en dos situaciones en las que se muestran de forma práctica dicha ideas: El análisis de la evolución del razonamiento de estudiantes desde 6º de E.G.B. hasta C.O.U. y el seguimiento del razonamiento de dos grupos de estudiantes durante varios cursos del Ciclo

Superior de E.G.B.; en concreto hemos evaluado el nivel de razonamiento de un grupo al finalizar 6º, 7º y 8º de E.G.B. y del otro grupo al finalizar 7º y 8º de E.G.B. Los datos obtenidos indican que los estudiantes mejoran en su nivel de razonamiento a lo largo del Ciclo Superior de E.G.B. y la Enseñanza Media, pero que esta mejora es mucho menor de lo que sería deseable, pues al terminar C.O.U. son pocos los estudiantes que han adquirido completamente el segundo nivel de Van Hiele y muchos menos los que muestran siquiera una adquisición baja del tercer nivel. No obstante, no hemos pretendido generalizar los resultados obtenidos a los niveles educativos correspondientes, puesto que la finalidad no era ésta.

Resumiendo lo anterior, pensamos que en esta tesis doctoral se contemplan ideas originales que pueden afectar positivamente a la comprensión del Modelo de Van Hiele y a su aplicación, las cuales suponen un paso hacia adelante en las herramientas de que se disponen como material para mejorar la educación matemática.

Trabajo futuro

No obstante, somos conscientes del trabajo que queda por hacer y de las carencias o defectos de las propuestas que presentamos. Algunas propuestas para un trabajo futuro son:

- Implementar suficientes actividades para la enseñanza de las Isometrías del Plano, a partir de los modelos de ejercicios que se proponen en esta tesis, de manera que constituyan la unidad de enseñanza para aplicar en las aulas de Enseñanza Primaria y Secundaria.

- Diseñar unidades de enseñanza sobre otros temas tomando como fundamento el los niveles de razonamiento y las fases de enseñanza del Modelo de Van Hiele.

- Usar el método de evaluación que proponemos para hacer estudios sobre el nivel de razonamiento matemático de colectivos de estudiantes (comparaciones entre distintos colectivos, progreso de los mismos individuos, …). Esto, de hecho, ya ha empezado a realizarse, pues sabemos de estudiantes de doctorado de varios países que han utilizado o están utilizando dicho método de evaluación en sus investigaciones.

- Estudiar la conveniencia o no de modificar alguno de los Tipos de respuesta definidos en el capítulo 2. Asimismo, analizar qué valores de porcentaje son los más adecuados para la ponderación de los diferentes Tipos de respuesta.

- Diseñar tests escritos de respuesta libre para evaluar el nivel de razonamiento de los estudiantes en distintos campos o conceptos geométricos. Estos tests deben cumplir los requisitos de fiabilidad y validez y deben ser cómodos de administrar a colectivos grandes.

REFERENCIAS

Bobango, J.C. (1987): *Van Hiele levels of geometric thought and student achievement in standard content and proof writing: The effect of phased-based instruction.* (Univ. Microfilms: Ann Arbor, EE.UU.).

Burger, W.F.; Shaughnessy, J.M. (1986): Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry, *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 17 n° 1, pp. 31-48.

Burger, W.F.; Shaughnessy, J.M. (1990): *Assessing children's intellectual growth in geometry* (final report). (Oregon State University: Corvallis, EE.UU.).

Clements, D.H. (1992): Elaboraciones sobre los niveles de pensamiento geométrico, en *Gutiérrez, A. (1992): Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría.* (CINVESTAV-PNFAPM: México), pp. 16-43.

Clements, D.H.; Battista, M.T. (1988): *A Logo-based elementary school geometry curriculum*, manuscrito.

Clements, D.H.; Battista, M.T. (1992): Geometry and spatial reasoning, en *Grouws, D.A. (1992): Handbook of research on mathematics teaching and learning.* (Macmillan: N. York), pp. 420-464.

Corberán, R. y otros (1989): *Didáctica de la geometría: Modelo de Van Hiele.* (Universitat de València: Valencia).

Crowley, M.L. (1987): The Van Hiele Model of the development of geometric thought, en *N.C.T.M. (1987): Learning and teaching geometry, K-12* (1987 Yearbook). (N.C.T.M.: Reston, EE.UU.), pp. 1-16.

Crowley, M.L. (1989): *The design and evaluation of an instrument for assessing mastery Van Hiele levels of thinking about quadrilaterals* (Univ. Microfilms: Ann Arbor, EE.UU.).

Crowley, M.L. (1990): Criterion-referenced reliability indices associated with the Van Hiele geometry test, *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 21 n° 3, pp. 238-241.

Denis, L.P. (1987): *Relationships between stage of cognitive development and Van Hiele level of geometric thought among Puerto Rican adolescents.* (Univ. Microfilms: Ann Arbor, EE.UU.).

Fortuny, J.M. (1988): *Avaluació de la jerarquia de les habilitats de percepció espacial estructural.* (CIRIT: Barcelona).

Fortuny, J.M.; Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1988): *Van Hiele levels and visualization in three dimensions*, texto de la ponencia presentada en el Topic Group "Visualization" del 6º I.C.M.E., manuscrito.

Freudenthal, H. (1973): *Mathematics as an educational task.* (D. Reidel: Dordrecht).

Fuys, D. (1987): *Comunicación personal.*

Fuys, D.; Geddes, D.; Tischler, R. (1984): *English translations of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele.* (School of Education, Brooklyn College: N. York).

Fuys, D.; Geddes, D.; Tischler, R. (1988): *The Van Hiele Model of thinking in geometry among adolescents* (Journal for Research in Mathematics Education Monograph n° 3). (N.C.T.M.: Reston, EE.UU.).

Generalitat Valenciana (1990): *Diseño Curricular Base. Secundaria Obligatoria. Area de Matemáticas.* (Cons. de Cultura, Ed. i Ciencia: Valencia).

Grenier, D. (1988): *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième* (tesis doctoral). (Univ. J. Fourier, Grenoble I: Grenoble).

Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1986): *Traslaciones, giros y simetrías en el plano* (Monografía de "Papeles de Enseñanza de las Matemáticas" nº 2). (E.U. del Profesorado de E.G.B.: Valencia).

Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1987 a): Estudio sobre la adquisición del concepto de simetría, *Enseñanza de las Ciencias* n° extra, pp. 365-366.

Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1987 b): Estudio de las características de los niveles de Van Hiele, en *Proceedings of the XI International Conference for the P.M.E.* vol. 3, pp. 131-137.

Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1988): Errors when drawing symmetries, en *Compte Rendu de la 39e Rencontre Internationale de la C.I.E.A.E.M.*, pp. 400-404.

Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1989): Bibliografía sobre el Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, *Enseñanza de las Ciencias* vol. 7 n° 1, pp. 89-95.

Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1991): El Modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría. Un ejemplo: Los giros, *Educación Matemática* vol. 3 n° 2, pp. 49-65.

Gutiérrez, A.; Jaime, A.; Fortuny, J.M. (1991): An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels, *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 21 n° 3, pp. 237-251.

Gutiérrez, A.; Jaime, A.; Shaughnessy, J.M.; Burger, W.F. (1991): A comparative analysis of two ways of assessing the Van Hiele levels of thinking, en *Proceedings of the 15th P.M.E. Conference* vol. 2, pp. 109-116.

Gutiérrez, A. y otros (1991): *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en Enseñanza Media basada en el Modelo de razonamiento de Van Hiele* (Memoria final del Proyecto de Investigación). (C.I.D.E.: Madrid).

Hart, K. (1980): *Secondary school children's understanding of ratio and proportion.* (British Thesis Library: Londres).

Hershkowitz, R. (1990): Psychological aspects of learning geometry, en *Nesher, P.; Kilpatrick, J. (1990): Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (Cambridge U.P.: Cambridge, G.B.), pp. 70-95.

Hoffer, A. (1981): Geometry is more than proof, *The Mathematics Teacher* vol. 74 n° 1, pp. 11-18.

Hoffer, A. (1983): Van Hiele-based research, en *Lesh, R.; Landau, M. (1983): Acquisition of mathematics concepts and processes.* (Academic Press: N. York), pp. 205-227.

Jaime, A. (1992): La organización de una secuencia de enseñanza en geometría según el Modelo de Van Hiele, en *Gutiérrez, A. (1992): Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría.* (CINVESTAV-PNFAPM: México), pp. 60-75.

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1989 a): The learning of plane isometries from the viewpoint of the Van Hiele Model, en *Actes de la 13e Conférence Internationale de Psychology for Mathematics Education* vol. 2, pp. 131-138.

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1989 b): *Diseño de un programa de enseñanza progresiva de las isometrías del plano en E.G.B.* (Memoria final del Proyecto de Investigación). (Conselleria de Cultura, Ed. i C.: Valencia).

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1990 a): Study of the degree of acquisition of the Van Hiele levels by secondary school students, en *Proceedings of the 14th International Conference of the P.M.E.* vol. 2, pp. 251-258.

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1990 b): Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El Modelo de Van Hiele, en *Llinares, S.; Sánchez, M.V. (1990): Teoría y práctica en educación matemática* (colección "Ciencias de la Educación" n° 4). (Alfar: Sevilla), pp. 295-384.

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1990 c): *La evaluación del nivel de razonamiento de Van Hiele a través de tests escritos de respuesta libre*, texto de la comunicación presentada al I C.I.B.E.M. (Sevilla, 1990), manuscrito.

Jaime, A. y otros (1989): Introduciendo los giros del plano en E.G.B., *Suma* vol. 1 n° 2, pp. 55-59.

Johnson-Gentile, K. (1990): *The effects of computer and non-computer environments on fifth and sixth-grade students' conceptualizations of geometric motions (fifth-grade).* (Univ. Microfilm: Ann Arbor, EE.UU.).

Küchemann, D. (1981): Reflections and rotations, en *Hart, K. (1981): Children's understanding of mathematics: 11-16.* (John Murray: Londres), pp. 137-157.

Ludwig, S.C. (1986): *Indicators of growth within a logo/motion geometry curriculum environment* (tesis doctoral). (Univ. of Alberta: Canadá).

Martin, G.E. (1982): *Transformation geometry.* (Springer Verlag: Berlín).

Mayberry, J. (1981): *An investigation of the Van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers.* (Univ. Microfilms: Ann Arbor, EE.UU.).

Mayberry, J. (1983): The Van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers, *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 14 n° 1, pp. 58-69.

M.E.C. (1989): *Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria II.* (M.E.C.: Madrid).

Moyer, J.C. (1974): *An investigation into the cognitive development of euclidean transformations in young children.* (Univ. Microfilms: Ann Arbor, EE.UU.).

Moyer, J.C. (1978): The relationship between the mathematical structure of euclidean transformations and the spontaneously developed cognitive structures of young children, *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 9 n° 2, pp. 83-92.

N.C.T.M. (1989): *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* (N.C.T.M.: Reston, EE.UU.). (Traducido al español por la S.A.E.M. Thales).

Olson, A.T.; Kieren, T.E.; Ludwig, S. (1987): Linking logo, levels and language in mathematics, *Educational Studies in Mathematics* vol. 18, pp. 359-370.

Pyskalo, A.M. (1968): *Geometry in grades 1-4 (problems in the formation of geometric conceptions in pupils in the primary grades)* (Traducción por A. Hoffer). (Prosveshchenie Publishing House: Moscú).

Schultz, K.A. (1977): *Variables influencing the difficulty of rigid transformations during the transition between the concrete and formal operational stages of cognitive development* (tesis doctoral). (Univ. Microfilms: Ann Arbor, EE.UU.).

Schultz, K.A. (1978): Variables influencing the difficulty of rigid transformations during the transition between the concrete and formal operational stages of cognitive development, en *Lesh, R.; Mierkiewicz, D. (1978): Recent research concerning the development of spatial and geometrical concepts.* (ERIC: Columbus, EE.UU.), pp. 195-211.

Shaughnessy, J.M.; Burger, W.F.; Gutiérrez, A.; Jaime, A.; Fuys, D. (1991): Analyzing and describing students' thinking in geometry: Continuity in the Van Hiele levels, en *Proceedings of the 13th Annual Meeting of the P.M.E.-N.A.* vol. 1, pp. 183-188.

Soon, Y.-P. (1989): *An investigation of Van Hiele-like levels of learning in transformation geometry of secondary school students in Singapore.* (Univ. Microfilms: Ann Arbor, EE.UU.).

Treffers, A. (1987): *Three dimensions (a model of goal and theory description in mathematics instruction - the Wiskobas Project).* (D. Reidel: Dordrecht).

Usiskin, Z. (1982): *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry.* (ERIC: Columbus, EE.UU.).

Usiskin, Z.; Senk, S. (1990): Evaluating a test of Van Hiele levels: A response to Crowley and Wilson, *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 21 n° 3, pp. 242-245.

Van Hiele, P.M. (1957): *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría)* (tesis doctoral). (Universidad de Utrecht: Utrecht, Holanda). (Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991).

Van Hiele, P.M. (1959): La pensée de l'enfant et la géométrie, *Bulletin de l'A.P.M.E.P.* n° 198, pp. 199-205. (Traducción al inglés en *Fuys; Geddes; Tischler (1984)*, pp. 243-252).

Van Hiele, P.M. (1986): *Structure and insight. A theory of mathematics education.* (Academic Press: Londres).

Van Hiele-Geldof, D. (1957): *The didactics of geometry in the lowest class of Secondary School* (tesis doctoral). (Universidad de Utrecht: Utrecht, Holanda). (Traducción al inglés en *Fuys; Geddes; Tischler (1984)*, pp. 1-206).

Vinner, S.; Hershkowitz, R. (1983): On concept formation in geometry, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* vol. 83 n° 1, pp. 20-25.

Walter, M.I. (1973): *Entdecke neue bilder.* (Annette Verlag: Alemania).

Wilson, M. (1990): Measuring a Van Hiele geometry sequence: A reanalysis, *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 21 n° 3, pp. 230-237.

Wirszup, I. (1976): Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry, en *Martin, J.L.; Bradbard, D.A. (1976): Space and geometry.* (ERIC: Columbus, EE.UU.), pp. 75-97.

ANEXO IV: ÍTEMS USADOS PARA EVALUAR EL GRADO DE ADQUISICIÓN DE LOS NIVELES DE VAN HIELE (6º DE E.G.B. A C.O.U.).

Políg. Item P3 (1-2)

En las siguientes figuras,

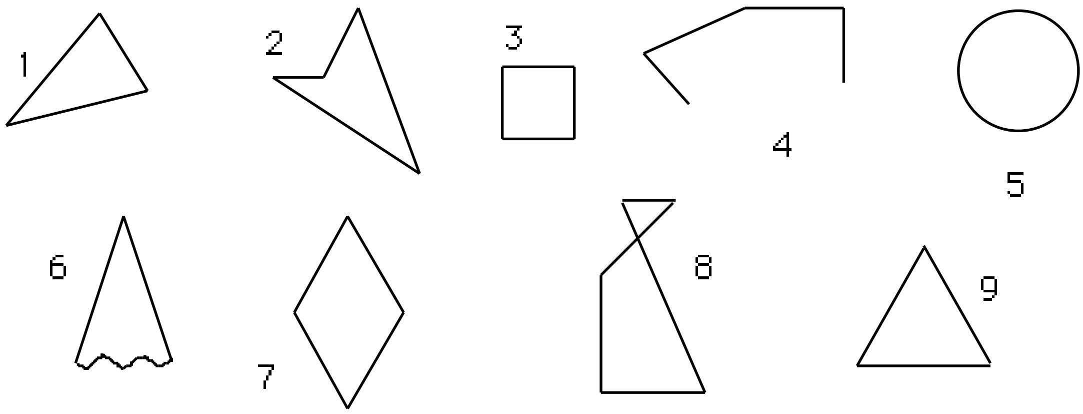
pon una **P** dentro de las que son polígonos,

pon una **X** dentro de las que no son polígonos,

pon una **T** dentro de las que son triángulos, y

pon una **C** dentro de las que son cuadriláteros.

Si es necesario, puedes escribir varias letras en cada figura.



Escribe los números de las figuras que no son polígonos y explica, para cada una de ellas, por qué no son polígonos.

Escribe los números de las figuras que son triángulos y explica, para cada una de ellas, por qué son triángulos.

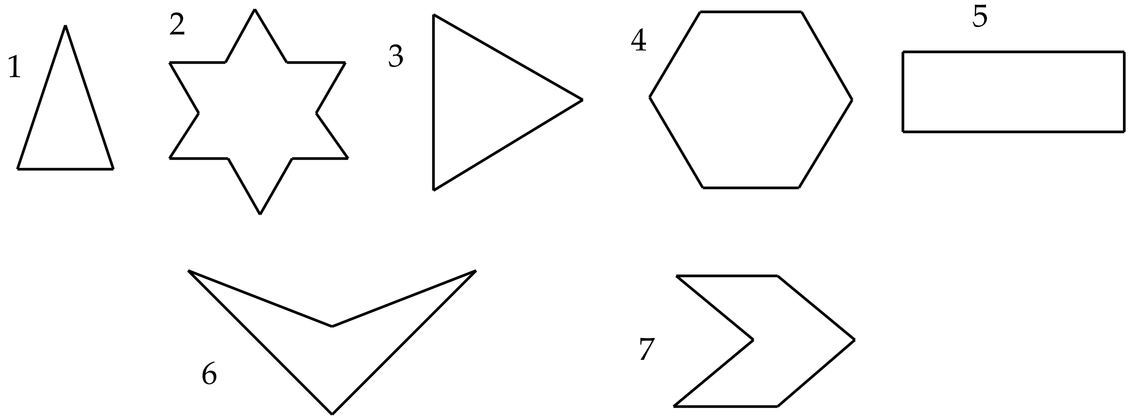
Escribe los números de las figuras que son cuadriláteros y explica, para cada una de ellas, por qué son cuadriláteros.

¿Es **un** polígono la figura 8? ¿Por qué?

¿Es un triángulo la figura 2? ¿Por qué?

Políg. Item P5 (1-2)

En los siguientes polígonos pon una **R** dentro de los regulares, una **I** dentro de los irregulares, una **V** dentro de los cóncavos y una **X** dentro de los convexos. Si es necesario, puedes poner varias letras en cada figura.



Explica para cada una de las figuras números 2, 4, 5 y 7 por qué le has puesto esas letras (o por qué no has escrito ninguna):

Figura 2:

Figura 4:

Figura 5:

Figura 7:

Políg. Item P7.1 (1-3)

A) Escribe todas las propiedades importantes comunes a los cuadrados y los rombos:

Escribe todas las propiedades importantes que cumplen los cuadrados pero **no** los rombos:

Escribe todas las propiedades importantes que cumplen los rombos pero **no** los cuadrados :

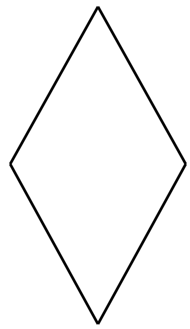
B) Escribe todas las propiedades importantes comunes a los triángulos equiláteros y los triángulos acutángulos:

Escribe todas las propiedades importantes que cumplen los triángulos equiláteros pero **no** los triángulos acutángulos:

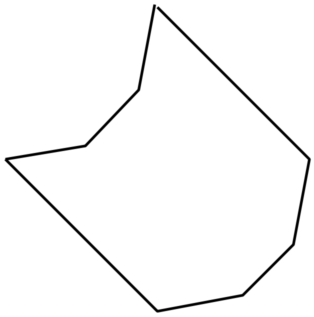
Escribe todas las propiedades importantes que cumplen los triángulos acutángulos pero **no** los triángulos equiláteros:

Políg. Item P12 A (1-2)

Aquí ves una figura (un rombo). Haz una lista con todas las propiedades de la figura que puedas encontrar (si quieres, puedes dibujar para explicar las propiedades).



Aquí ves otra figura. Haz una lista con todas las propiedades de la figura que puedas encontrar (si quieres, puedes dibujar para explicar las propiedades).



Políg. Item P15.1 (2-4)

Recuerda que una diagonal de un polígono es un segmento que une dos vértices no consecutivos del polígono.

¿Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados? Demuéstralo.

¿Habías estudiado ya ese resultado con anterioridad?

En caso afirmativo, ¿te acordabas de la forma de realizar la demostración? (contesta sólo sí o no).

Políg. Item P15.2 (2-4)

Completa estos enunciados:

En un polígono de 5 lados la cantidad de diagonales que se pueden trazar desde cada vértice es . . . . . y la cantidad total de diagonales es . . . . .

En un polígono de 6 lados la cantidad de diagonales que se pueden trazar desde cada vértice es . . . . . y la cantidad total de diagonales es . . . . .

En un polígono de n lados la cantidad de diagonales que se pueden trazar desde cada vértice es . . . . .

Justifica tu respuesta.

Utilizando la respuesta a la pregunta anterior, calcula la cantidad de diagonales que tiene un polígono de n lados. Demuestra tu respuesta.

Políg. Item P17 A.1 (2-4)

Trata de demostrar que la suma de los ángulos de cualquier triángulo acutángulo es 180°.

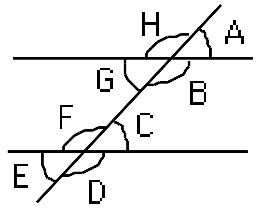
Políg. Item P17 A.2 (2-3)

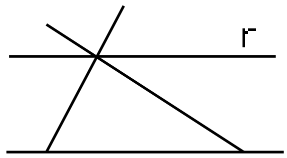
Propiedad: Cuando hay dos rectas paralelas cortadas por una transversal,

Los ángulos alternos internos son iguales entre sí (En la figura, B = F; G = C).

Los ángulos alternos externos son iguales entre sí (En la figura, A = E; D = H).

Los ángulos opuestos por el vértice son iguales (En la figura, A = G, B = H, C = E y F = D).





Teniendo en cuenta la figura de la derecha (la recta r es paralela a la base del triángulo) y las propiedades anteriores, demuestra que la suma de los ángulos de cualquier triángulo acutángulo es 180°.

Políg. Item P17 B (2-3)

Aquí tienes una demostración completa de que la suma de los ángulos de cualquier triángulo **acutángulo** es 180°; leela y trata de entenderla:

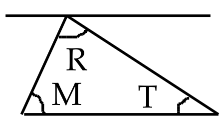


Fig. 1

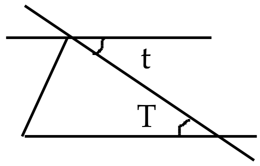


Fig. 2

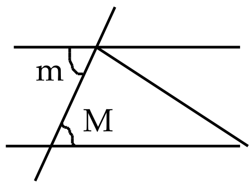


Fig. 3

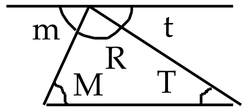


Fig. 4

• La suma que debemos calcular es R + M + T (figura 1).

• Trazamos una paralela a la base del triángulo por el vértice opuesto R (figura 1). Prolongando uno de los lados, tenemos dos rectas paralelas cortadas por una transversal, por lo que T = t (ángulos alternos internos; figura 2).

• Prolongando el otro lado, tenemos de nuevo dos líneas paralelas cortadas por una transversal, por lo que M = m (ángulos alternos internos; figura 3).

• Por lo tanto, R + M + T = R + m + t = 180°, ya que forman un ángulo llano (figura 4).

Acabas de ver una demostración de que la suma de los ángulos de un triángulo **acutángulo** es 180°.

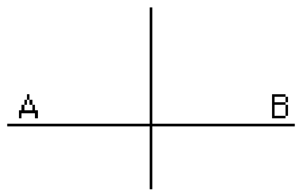
¿Es cierta la propiedad de que la suma de los ángulos de un **triángulo rectángulo** es 180°? Demuestra tu respuesta (puedes seguir escribiendo por detrás de la hoja).

Dí cuánto vale la suma de los ángulos de un **triángulo obtusángulo**: Exactamente 180°, más de 180°, o menos de 180°. Demuestra tu respuesta.

Políg. Item P19 (2-4)

1) Demuestra que las dos diagonales de cualquier rectángulo tienen la misma longitud.

2) La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento que pasa por el punto medio de ese segmento (en la figura ves la mediatriz del segmento AB).



Demuestra que cualquier punto de la mediatriz equidista (está a la misma distancia) de los dos extremos del segmento.

Políg. Item P24 (3-4)

Se suele definir paralelogramo como un cuadrilátero convexo con los lados paralelos dos a dos.

¿Se puede definir también paralelogramo como un cuadrilátero convexo en el que la suma de cualquier par de ángulos consecutivos es 180°?

Justifica tu respuesta (en caso de que tu respuesta sea afirmativa, demuestra que las dos definiciones son equivalentes).

ANEXO V: DESCRIPTORES DE LOS ITEMS

En las páginas siguientes incluimos, para cada ítem de los tests administrados en el estudio longitudinal, la relación completa de los descriptores utilizados en la asignación de nivel de razonamiento y tipo de respuesta a las contestaciones de los estudiantes.

Las columnas de la derecha ("justificación" y "ejemplo") tienen como finalidad facilitar la lectura, explicando los motivos por los que hemos hecho tal asignación de nivel y tipo y presentando ejemplos reales de respuestas extraídas de los grupos de estudiantes analizados en esta memoria.

En algunos casos, el motivo de la asignación está suficientemente claro, por lo que hemos dejado en blanco la correspondiente celda de la columna de justificaciones.

En otros casos, no hemos encontrado ninguna respuesta de los estudiantes testados que corresponda a un descriptor, por lo que hemos dejado en blanco la correspondiente celda de la columna de ejemplos. No obstante, hemos incluido estos descriptores en la lista con el fin de dar una visión completa de las posibilidades de evaluación de las respuestas.

Cuando a un descriptor se le asocian varios tipos de respuesta, la elección entre uno u otro debe hacerse teniendo en cuenta la tabla 3.2, dependiendo de la calidad matemática de la respuesta (por ejemplo si la asignación de tipos es "5, 6, 7"), de la perfección en el uso del nivel de razonamiento asignado (por ejemplo si la asignación de tipos es "2, 5"), o de ambos factores (por ejemplo si la asignación de tipos es "≤6").

ÍTEM P3 (niveles 1 y 2)

Descriptor	Nivel	Tipo	Justificación	Ejemplo
A1) Hace una sola clasificación de cada figura, acompañada de justificaciones de nivel 2.	2	2, 3		Identifica así las figuras: *1 → T; 2 → C; 3 → C; 4 → X; 5 → X; 6 → X; 7 → C; 8 → P; 9 → T.* Y justifica que 2 no es triángulo porque *tiene cuatro ángulos y cuatro lados y para ser triángulo debería tener tres lados y tres ángulos.*
A2) Hace dos clasificaciones de cada figura, acompañadas de justificaciones de nivel 2.	2	5, 6, 7		Identifica así las figuras: *1 → P,T; 2 → P; 3 → P,C; 4 → X; 5 → X; 6 → X; 7 → P,C; 8 → P; 9 → P,T.* El criterio para la selección de los triángulos es que tengan *tres lados y tres ángulos.*
B) Contesta sólo a la primera parte del ítem, o sea, realiza las asignaciones a las figuras, pero no da explicaciones.	--	1	La respuesta puede haberse basado en la forma de las figuras (nivel 1) o en sus propiedades matemáticas (nivel 2).	El ejemplo está contenido en el descriptor.

C) Dominan las explicaciones visuales. Si hay alguna justificación matemática, es puntual e incorrecta.	1	2, 3		Identifica así las figuras: *1 → T; 2 → T; 3 → C; 4 → X* [P está tachado]; *5 → P; 6 → T; 7 → C; 8 → C* [C está tachado]; *9 → T*. Explica que no son polígonos *1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 porque son de distinta forma*. Son triángulos *1, 2, 6, 9 porque tienen tres lados*. Son cuadriláteros *3, 7, 4 porque tienen cuatro lados*. La 8 no es polígono *porque no se parece a nada*. La 2 sí es triángulo *porque se parece a algo*.
D) Explicación de nivel 2 y no se identifica la figura 2 como cuadrilátero, o se identifica la figura 6 como triángulo.	2	2, 5		Identifica así las figuras: *1 → T,P; 2 → P; 3 → P,C; 4 → X; 5 → P; 6 → X; 7 → P,C; 8 → X; 9 → P,T*. El criterio de selección de los cuadriláteros es: *3 → línea cerrada, cuatro lados y cuatro ángulos iguales (cuadrado); 7 → línea cerrada, cuatro lados y cuatro ángulos (rombo)*. La justificación de que 2 no es triángulo es que *tiene cuatro lados*.

E) Justificaciones de tipo matemático, referentes a número e igualdad de lados y/o ángulos, existiendo claras inconsistencias entre lo que se afirma y la realidad. A veces se incluye en algún apartado una justificación visual.	1	5, 7	La utilización de vocabulario matemático obedece a que se ha oído en el aula, pero no a su comprensión o aplicación. El criterio real de clasificación del alumno se basa en la visión global de la figura.	Hace una clasificación doble correcta. La justificación de que las figuras 4, 5, 6 y 8 no son polígonos es *porque no tienen todos los lados.* La justificación de que 1 y 9 son triángulos es *porque tienen los tres ángulos iguales.* Los cuadriláteros no los justifica.

ÍTEM P5 (niveles 1 y 2)

Descriptor	**Nivel**	**Tipo**	**Justificación**	**Ejemplo**
A1) Se hace una sola clasificación de las figuras y se utiliza un solo atributo de la regularidad (lados o ángulos).	2	2, 3		Marca así los polígonos: *1 → I; 2 → R; 3 → R; 4 → R; 5 → I; 6 → I; 7 → R.* Justifica los polígonos regulares porque *todos los lados son iguales* y los irregulares porque *los lados son desiguales.*

A2) Se hace una sola clasificaciones de las figuras y se utilizan los dos atributos de la regularidad.	2	4, 5, 6		Marca así los polígonos: *1 → I; 2 → R; 3 → R; 4 → R; 5 → R; 6 → I; 7 → R.* Justifica que los polígonos 2 y 4 son regulares *porque sus lados son iguales y sus ángulos también.* Justifica que el polígono 5 es regular *porque sus lados no son iguales, pero sus ángulos sí.*
A3) Se hacen dos clasificaciones de las figuras y se utiliza un solo atributo de la regularidad.	2	4, 5, 6		Marca así los polígonos: *1 → I,X; 2 → R,V; 3 → R,X; 4 → R,X; 5 → I,X; 6 → I, V; 7 → X,V.* Justifica siempre la regularidad o irregularidad *porque tiene/no tiene todos los lados iguales.*
A4) Se hacen dos clasificaciones de las figuras y se utilizan los dos atributos de la regularidad.	2	4, 5, 6, 7		Se hace una clasificación doble, correcta, en las figuras y las justificaciones son: 2 → I,V *porque tiene ángulos obtusos, luego es irregular y cóncavo.* 4 → R,X *porque todos los ángulos y lados son iguales.* 5 → I,X *porque no son iguales los lados.* 7 → I,V *porque no son iguales los ángulos ni los lados.*

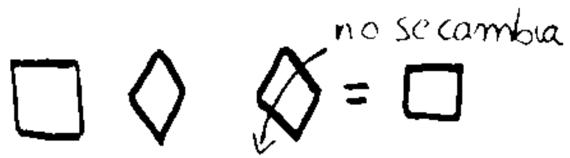
B) Justificación de la concavidad o convexidad basada en el aspecto físico del polígono (tiene lados, o vértices, "hacia dentro" o "hacia fuera").	1, 2		Esta respuesta, por sí sola, podría ser indicadora del nivel 1, pero se trata de una propiedad especial. Por lo tanto, hay que evaluar ésta respuesta junto con las otras del ítem, dependiendo el nivel asignado de si el resto de respuestas reflejan el nivel 1 ó 2.	El ejemplo está contenido en el descriptor.
C) Se hace la clasificación de las figuras pero no se justifica.	--	1	La respuesta puede haberse basado en la forma de las figuras (nivel 1) o en sus propiedades matemáticas (nivel 2).	El ejemplo está contenido en el descriptor.
D) Respuesta del tipo "la figura n° 3 es regular porque los hexágonos son (suelen ser) polígonos regulares".	1	2 a 7	Se pone de manifiesto un conocimiento superficial de los polígonos, pues las propiedades están asociadas al nombre de la familia. Por lo tanto la visión del polígono es global.	El ejemplo está contenido en el descriptor.

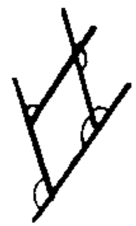
<u>Observaciones al ítem P5:</u>

A veces los estudiantes confunden los términos "cóncavo" y "convexo". No se debe tener en cuenta este error ya que sólo es una cuestión de memoria.

Los alumnos de nivel 1 no podrán justificar la regularidad, pues este concepto requiere manejar elementos de los polígonos (igualdad de lados y/o ángulos).

ÍTEM P7.1 (niveles 1 a 3)

Descriptor	Nivel	Tipo	Justificación	Ejemplo
A1) Hay un predominio de las propiedades visuales, aunque también hay referencia al número de lados y/o ángulos y, puntualmente, a la igualdad o desigualdad de lados y/o ángulos.	1	5, 6, 7		Como propiedades comunes a cuadrados y rombos se dan: *Tiene cuatro lados; los lados son agudos; cambiando de sentido parecen un cuadrado.* Como propiedades de los cuadrados, pero no de los rombos: *Su forma no es igual hasta que no lo cambiamos.* El resto del ítem no se contesta. 

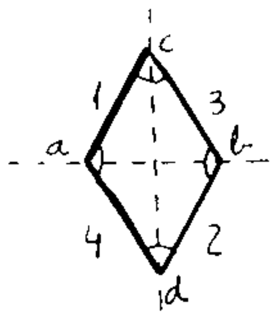
A2) Además de hacer referencia a (des)igualdades de lados y/o ángulos, se incluyen otras propiedades matemáticas, como paralelismo, diagonales, perpendicularidad, simetría, etc.	2	4, 5, 6, 7		Como propiedades comunes a cuadrados y rombos se dan: *Lados paralelos, los lados opuestos; 4 lados.* Como propiedades de los cuadrados, pero no de los rombos: *Lados perpendiculares y paralelos los lados opuestos; perpendiculares los lados contiguos.* Como propiedades de los rombos, pero no de los cuadrados: *Lados opuestos paralelos; los ángulos de los lados contiguos son suplementarios.* 

A3) Las propiedades enunciadas se refieren sólo a (des)igualdades y número de lados y/o ángulos. También puede que se enuncie alguna propiedad matemática, referente a diagonales, perpendicularidad, paralelismo, simetría, etc., pero predominando las pimeras.	2	2, 3		Como propiedades comunes a cuadrados y rombos, el estudiante da: *4 ángulos, 4 lados.* Como propiedades de los cuadrados, pero no de los rombos, da: *Todos los ángulos son iguales, de 90°.* Como propiedades de los rombos, pero no de los cuadrados, da: [Angulos] *iguales 2 a 2.*
B) Las propiedades que diferencian unas figuras de otras indican una clasificación disjunta (lados, ángulos o diagonales desiguales).	<3	2 a 7		Propiedades de los cuadrados, pero no de los rombos: *4 lados iguales; los 4 ángulos iguales (de 90°).* Propiedades de los rombos, pero no de los cuadrados: *2 ángulos agudos y 2 obtusos; los lados paralelos han de ser iguales.* Propiedades de los triángulos equiláteros, pero no de los acutángulos: *3 lados iguales; 3 ángulos iguales.* Propiedades de los triángulos acutángulos, pero no de los equiláteros: *Lados desiguales; 3 ángulos desiguales.*

C) Se enuncian sólo propiedades comunes a los dos polígonos, que se repiten en los distintos apartados. Las propiedades son matemáticas.	2	2, 3	Inicio de la comprensión de que las propiedades matemáticas son importantes en la descripción de los polígonos.	En el apartado de propiedades comunes a cuadrados y rombos, el alumno dibuja un cuadrado y un rombo y escribe 2 veces, junto a cada figura: *Tienen 4 lados; sus lados son iguales; sus lados se juntan.* En los apartados de propiedades de los cuadrados pero no de los rombos y de propiedades de los rombos pero no de los cuadrados, escribe lo anterior y, además: *La suma de los ángulos no es la misma.*
D) Análogo a C, pero las propiedades empleadas son visuales.	1	2, 3		

ÍTEM P12A (niveles 1 y 2)

Descriptor	Nivel	Tipo	Justificación	Ejemplo
A1) La lista de propiedades matemáticas sólo se refiere al número de lados y/o ángulos; si hay más propiedades, se derivan de la simple observación de las figuras (puede que descomponiéndolas) y son visuales, o hacen referencia a igualdad de lados y/o ángulos, utilizada en algún momento de manera incorrecta. Hay estudiantes que dicen que el rombo tiene los ángulos iguales. Si ésta es el única propiedad incorrecta, asignar el tipo 6.	1	5, 6, 7	Es probable que los estudiantes que dicen que el rombo tiene los ángulos iguales se fijen solamente en la igualdad de los ángulos opuestos, que es más visual, pero no comparen los ángulos contiguos.	Un alumno dice del rombo: *Es un polígono; es un cuadrilátero; tiene todos sus lados iguales.* Y del octógono dice: *Es un polígono; no tiene sus lados iguales.* Otro ejemplo: Un alumno dice del rombo: *Es un polígono; es un cuadrilátero; tiene 4 lados; tiene 4 ángulos; los lados miden lo mismo; los ángulos miden lo mismo.* Y del octógono dice: *Es un polígono; es un octógono; tiene 8 lados; tiene 8 ángulos; los lados miden lo mismo; los ángulos miden lo mismo.*

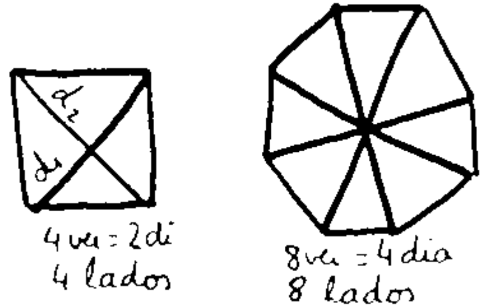
A2) La lista de propiedades matemáticas es corta pero incluye alguna propiedad importante (igualdad, paralelismo, perpendicularidad, simetría, …). La lista suele estar formada por el número de lados y/o ángulos y alguna propiedad más.	2	2, 3	Esto refleja el paso del nivel 1 al 2: El estudiante ya es consciente de que las propiedades visuales no sirven, pero no es capaz de encontrar propiedades matemáticas no mostradas explícitamente por la figura.	Un alumno dice del rombo: *Es un cuadrilátero; sus lados son iguales; es un polígono; sus ángulos dos a dos tienen los mismos grados.* Y del octógono dice: *Es un octógono; es un polígono; sus lados dos a dos miden lo mismo* [en el dibujo indica las medidas de los lados].
A3) La lista de propiedades matemáticas incluye las propiedades importantes (igualdad, paralelismo, perpendicularidad, simetría, etc.).	2	5, 6, 7		Un alumno dice del rombo: *ángulo a = ángulo b; ángulo c = ángulo d; los cuatro lados miden lo mismo; el lado 1 es paralelo al lado 2; el lado 3 es paralelo al lado 4; tiene dos ejes de simetría.* Para el octógono da una lista con referencia al mismo tipo de propiedades. 

ÍTEM P15 (niveles 2 a 4)

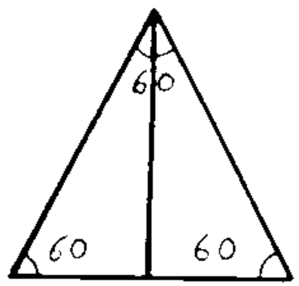
Descriptor	Nivel	Tipo	Justificación	Ejemplo
A1) Se cuenta el número de diagonales en algunos ejemplos, pero sin llegar a ninguna generalización.	2	2, 3		En P15.1 hace los dibujos y en P15.2 sólo contesta a los dos primeros párrafos, sin generalizar. 
A2) Se cuenta el número de diagonales en algunos ejemplos, generalizando el número de diagonales que salen de cada vértice, pero sin justificar el resultado o basándose en la relación numérica de los casos considerados.	2	5, 6, 7		En P15.2 obtiene la cantidad correcta de diagonales desde cada vértice y el número total de diagonales para el pentágono y el hexágono. Para un polígono de n lados afirma que la cantidad de diagonales desde cada vértice es n-3, siendo la justificación: *5 – 3 = 2; 9-3.*

B1) Se cuenta el número de diagonales en algunos ejemplos, generalizando el número de diagonales que salen de cada vértice, pero no se generaliza o no se justifica el número total de diagonales de un polígono.	3	2, 3		En P15.1 el alumno traza bien las diagonales de uno de cada uno de los polígonos de 4 a 9 lados. Hace una tabla, pero no encuentra la relación numérica. En P15.2 responde bien a las preguntas formuladas, escribe la fórmula correcta del número total de diagonales, pero no la justifica. La justificación que da para el número de diagonales desde un vértice es: *Un polígono de n lados tiene n ángulos. Si tomamos un ángulo como punto de partida, los dos ángulos que le rodean no tendrán diagonal con él. Entonces sería n - 2, pero como el ángulo que tomamos no tiene diagonal consigo mismo, será n - 3.*

B2) Se cuenta el número de diagonales en algunos ejemplos, llegando a generalizar el número de diagonales del polígono, justificándola en P15.2.	3	5, 6, 7		En P15.1 dibuja todas las diagonales en un polígono de 4 lados, uno de 5 y uno de 6, y escribe la fórmula $\frac{n!}{(n - 1)!} = \frac{n(n - 1)(n - 2)}{(n-1)!}$ En P15.2 generaliza el número de diagonales desde cada vértice (n - 3) *porque para cada polígono el número de diagonales que sale de cada vértice es tres veces menos al número de lados:* *4 --> 1; 5 --> 2; 6 --> 3; 7 --> 4.* Y generaliza: El número total de diagonales es n(n - 3) *porque si para cada polígono salen tres veces menos, para un polígono de n lados saldrán n(n - 3) diagonales.* *n lados; cada vértice (n - 3) diagonales. Total diagonales n(n - 3).*

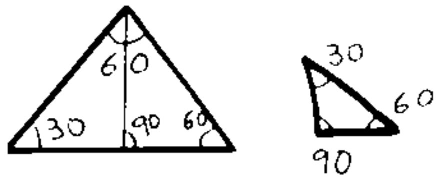
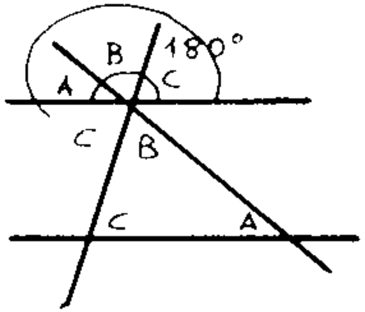
B3) Se cuenta el número de diagonales en algunos ejemplos, llegando a generalizar mal el número de diagonales del polígono, pero se hacen mal los dibujos y/o no se justifica el resultado erróneo obtenido.	2	2, 5	No se cuenta bien y generalmente algunos casos contradicen la fórmula propuesta. Tampoco se sabe qué es la diagonal o no se aplica la definición correctamente.	A partir de los dibujos deduce la fórmula *n lados* = $\frac{n}{2}$ *diagonales,* pero no la justifica. 
C) En P15.1 se da un argumento formal para la fórmula del número total de diagonales.	4	2 a 7		En P15.1 dibuja polígonos de 3, 4, 5, 6 y 7 lados, dibuja sus diagonales y las cuenta. Escribe la fórmula $\frac{n(n-3)}{2}$ y la justifica diciendo que *cada lado va a todos los vértices menos 2 consecutivos y a sí mismo (n(n-3)). Luego como los vértices se repiten, hay que dividirlo por 2.* En P15.2 también contesta bien, repitiendo la demostración anterior.

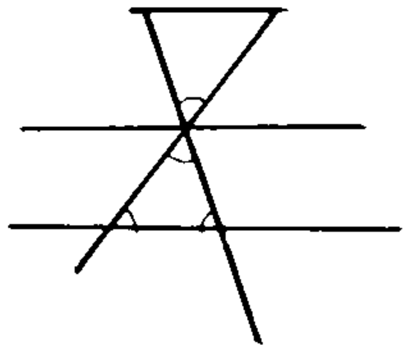
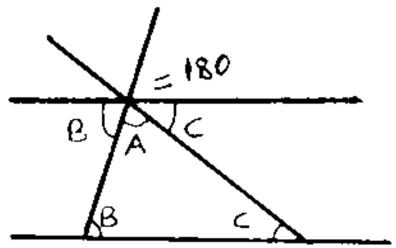
ÍTEM P17A (niveles 2 a 4)

Descriptor	Nivel	Tipo	Justificación	Ejemplo
A1) En P17A.1, el estudiante dibuja un triángulo acutángulo, mide los ángulos interiores y los suma para comprobar si suman 180°; en P17A.2 hace lo mismo con el triángulo dado o con uno suyo. El (los) triángulo(s) que dibuja puede(n) ser equilátero(s). Si alguno de los triángulos no es acutángulo, asignar el tipo 2.	2	2, 3		 El estudiante escribe al lado del dibujo: *60º + 60º + 60º = 180º*

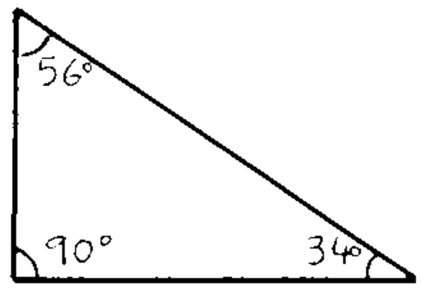
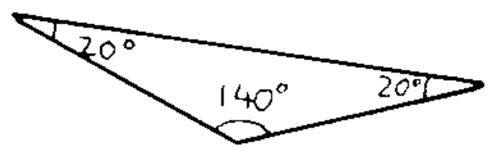
A2) En P17A.1, el estudiante dibuja varios triángulos acutángulos, en cada uno mide los ángulos interiores y los suma para comprobar si suman 180°. Si deja P17A.2 en blanco, asignar los tipos 5 ó 6. Si alguno de los triángulos no es acutángulo, asignar el tipo 5.	2	5, 6, 7		 El estudiante explica en P17A.1 que *siempre que se sumen todos los ángulos de un triángulo acutángulo resultará 180°.* En P17A.2 da explicaciones parecidas.
A3) En P17A.1 el estudiante dice que los ángulos interiores de los triángulos acutángulos miden 60° (o dibuja un triángulo no equilátero y marca los ángulos con 60°). En P17A.2 hace lo mismo o la deja en blanco.	2	2		El ejemplo está contenido en el descriptor.

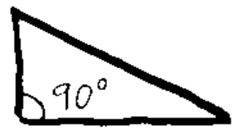
B) Respuesta del tipo "cada ángulo del triángulo puede medir lo que quiera, luego la suma de sus ángulos no será 180°".	2	2	No es capaz de relacionar unas propiedades con otras (tamaño de un ángulo y de otro), luego no está en el nivel 3. Tampoco aprovecha la posibilidad de comprobar la validez dibujando un ejemplo, luego está empezando a adquirir el nivel 2.	El ejemplo está contenido en el descriptor.

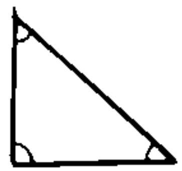
C) En P17A.1 se da una respuesta del nivel 2 (se miden uno o más triángulos) y en P17A.2 se hace una demostración (la sugerida u otra).	3	4		 En P17A.1 escribe junto al primer dibujo: *Acutángulo = lados agudos. No podrá ser ningún ángulo = 90°, por lo que los 3 ángulos serán < 90°.* Y junto al segundo dibujo: *Si un* [tri]*ángulo acutángulo lo divido en 2 de manera que me queden 2 triángulos rectángulos, seguirán sumando 180°.*  En P17A.2 completa el dibujo dado y explica: *A + B + C + 180° por ser ángulos complementarios, por lo que queda demostrado.*

D) En P17A.1 se hace una demostración incorrecta de nivel 3 ó 4 y en P17A.2 se hace bien la demostración sugerida.	3	6, 7		
E) En P17A.1 no se hace nada coherente (o se deja en blanco) y en P17A.2 se hace una demostración de nivel 3.	3	≤6		 En P17A.1 hace el dibujo superior y en P17A.2 completa el dibujo dado (inferior). 

ÍTEM P17B (niveles 2 y 3)

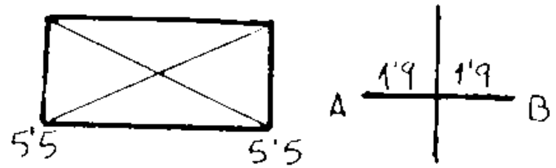
Descriptor	Nivel	Tipo	Justificación	Ejemplo
A1) El estudiante dibuja un triángulo rectángulo y otro obtusángulo, mide sus ángulos y los suma para comprobar si suman 180°. Si alguno de los triángulos no es de la clase adecuada, asignar el tipo 2.	2	2, 3		 El estudiante escribe al lado del dibujo:*56° + 90° + 34° = 180°*  El estudiante escribe al lado del dibujo:*20° + 20° + 140° = 180°*

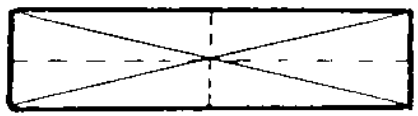
A2) El estudiante dibuja varios triángulos rectángulos y obtusángulos, mide sus ángulos y los suma para comprobar si suman 180°. Si alguno de los triángulos no es de la clase adecuada, asignar el tipo 5.	2	5, 6, 7		Un ejemplo similar al del descriptor A1 pero con varios triángulos rectángulos y obtusángulos.
A3) El estudiante dice que los ángulos interiores de los triángulos rectángulos miden 90° y 45° (o dice algo parecido para los obtusángulos).	2	2		 El estudiante, junto al dibujo, explica que la propiedad *sí se cierta porque como siempre tiene un ángulo de 90°, los otros dos son de 45°.*
A4) El estudiante dibuja un triángulo rectángulo y otro obtusángulo e indica los grados de cada ángulo, pero no hace mención explícita de la suma ni da ninguna explicación.	2	2		El ejemplo está contenido en el descriptor.

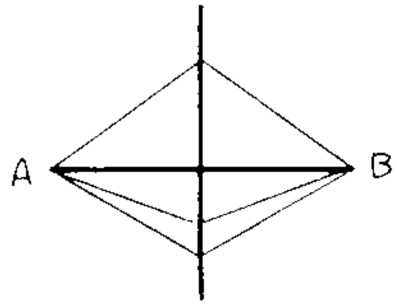
B) Se afirma que todos los ángulos de un triángulo rectángulo (obtusángulo) miden (más de) 90°.	2	1	El estudiante conoce la propiedad característica de esos triángulos pero no la aplica bien (posiblemente se confunde porque los acutángulos tienen todos los ángulos menores que 90°) ni considera otras propiedades, como que, al dibujar triángulos, siempre hay ángulos agudos.	Para los triángulos rectángulos, un estudiante dice: *Si cada lado de un triángulo mide 60° y entre los tres suman 180° y si fuera un ángulo recto, cada lado 90° y entre los tres 270°* (No hace ningún dibujo).
C) Respuesta basada en que el aumento del valor de un ángulo produce un aumento en la suma total. O bien lo contrario: El aumento del valor de un ángulo produce una disminución en el valor de la suma total, "ya que los otros ángulos serán muy pequeños".	2	2, 3	No aprovecha la posibilidad de comprobar la validez dibujando un ejemplo, luego está empezando a adquirir el segundo nivel.	 El estudiante, junto al dibujo, dice: *No es cierta, ya que en un triángulo rectángulo siempre la suma de sus ángulos es menos de 180°, porque tiene menos grados que el acutángulo. (90°)* En el caso del triángulo obtusángulo, hace un dibujo de un obtusángulo análogo al anterior y dice: *Vale más de 180°, ya que tiene más grados en sus ángulos que el acutángulo.*

D) En P17A ha hecho su propia demostración de nivel 3 y ahora adapta esa demostración a los triángulos rectángulo y obtusángulo.	3	2 a 7	El estudiante sabe que su demostración es válida para todos los triángulos y sigue usándola.	 El estudiante explica: *Por la misma demostración anterior,* $A = C$ *y* $D = 90°$. *La suma de los tres* $D + B + C = 180°$ | | $90° + B + A = 180°$ Para los triángulos obtusángulos da una contestación análoga.
E) Se adapta la demostración dada a una de las dos clases de triángulo (rectángulo u obtusángulo) pero no a la otra clase.	3	2, 3	Esto indica que se es capaz de generalizar a una figura con forma parecida a la dada pero no a una bastante diferente.	El ejemplo está contenido en el descriptor.

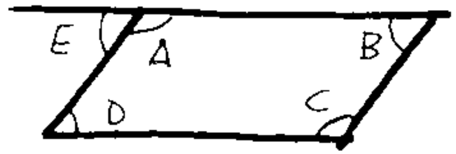
ÍTEM P19 (niveles 2 a 4)

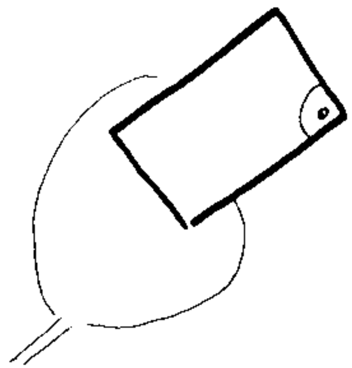
Descriptor	Nivel	Tipo	Justificación	Ejemplo
A1) El estudiante dibuja una figura apropiada en cada caso y mide longitudes para comprobar si es cierta la propiedad.	2	2, 3		 El estudiante mide las diagonales del rectángulo que ha dibujado y los segmentos desde A y B hasta la mediatriz.
A2) El estudiante dibuja varias figuras apropiadas en cada caso y mide longitudes para comprobar si es cierta la propiedad.	2	2, 3		Las respuestas son análogas al ejemplo del descriptor A1 pero midiendo varios casos diferentes.

B) Se justifica la igualdad a partir de alguna propiedad de la figura, pero de forma verbal.	3	2 a 7		 El estudiante hace el dibujo y explica: *Al ser los lados paralelos iguales y tener 2 ejes de simetría, tienen por fuerza que ser las 2 diagonales iguales.* Su respuesta a la segunda parte del ítem es el ejemplo del descriptor D2.
C) Se contesta bien una de las partes y la otra se contesta mal o se deja en blanco.	2, 3, 4	2, 3		El ejemplo está contenido en el descriptor.
D1) Una de las partes está contestada en el nivel N, con tipo 5, 6 ó 7, y la otra parte está contestada en el nivel N+1, con tipo 5, 6 ó 7. Evaluación global.	N+1	4		El ejemplo está contenido en el descriptor.

D2) Una de las partes está contestada en el nivel N, con tipo 5, 6 ó 7, y la otra parte está contestada en el nivel N+1, con tipo 2 ó 3.	N	5, 6		La respuesta del estudiante a la primera parte del ítem es el ejemplo del descriptor B.  El estudiante hace el dibujo y explica: *Para poder formar el triángulo equilátero tienen que ser iguales todos los lados, por lo tanto la distancia es igual.*

ÍTEM P24 (niveles 3 a 4)

Descriptor	Nivel	Tipo	Justificación	Ejemplo
A) Se demuestra formalmente sólo una implicación.	4	2, 3		 La demostración del estudiante es: *Los lados son paralelos dos a dos. A = C; B = D* *Por la regla del triángulo, D = E. Por lo tanto A + E = 180°, A + D = 180°, etc., cualquier serie de ángulos.*

B) Se particulariza a los rectángulos.	3			 La demostración de este estudiante es: *Puesto que son paralelos 2 a 2, los lados son perpendiculares entre sí y forman 90°, luego las dos definiciones son equivalentes y verdaderas, luego la suma de 2 ángulos de 90 es siempre 180.*
C) Se demuestra o se intenta demostrar formalmente la doble implicación.	4	2 a 7		

ANEXO VI: TABLAS DE LOS GRADOS DE ADQUISICIÓN DE LOS ESTUDIANTES (6º A C.O.U.)

Curso: 6º de E.G.B.; Año: 1990.

NOTA: Estos son los mismos estudiantes de los cursos de 7º de 1991 y 8º de 1992.

Alumno	Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4	
EGB6- 1	16'67	Baja	0	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB6- 2	26'67	Baja	0	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB6- 3	65	Alta	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB6- 4	100	Completa	20	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB6- 5	91'67	Completa	6'67	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB6- 6	26'67	Baja	0	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB6- 7	35	Baja	0	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB6- 8	66'67	Alta	6'67	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB6- 9	85	Completa	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB6- 10	66'67	Alta	19'17	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB6- 11	66'67	Alta	16'67	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB6- 12	100	Completa	11'67	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB6- 13	46'67	Intermedia	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB6- 14	60	Intermedia	12'5	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB6- 15	38'33	Baja	0	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB6- 16	41'67	Intermedia	0	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB6- 17	51'67	Intermedia	0	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB6- 18	21'67	Baja	13'33	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB6- 19	83'33	Alta	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB6- 20	26'67	Baja	0	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB6- 21	46'67	Intermedia	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula

EGB6- 22	91'67	Completa	6'67	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB6- 23	66'67	Alta	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB6- 24	58'33	Intermedia	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB6- 25	50	Intermedia	0	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB6- 26	60	Intermedia	6'67	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB6- 27	48'33	Intermedia	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB6- 28	100	Completa	20'83	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB6- 29	66'67	Alta	32'5	Baja	6'25	Nula	0	Nula
EGB6- 30	58'33	Intermedia	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB6- 31	91'67	Completa	23'33	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB6- 32	6'67	Nula	0	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB6- 33	91'67	Completa	23'33	Baja	5	Nula	0	Nula
EGB6- 34	100	Completa	6'67	Nula	0	Nula	0	Nula

Curso: 7º de E.G.B.; Año: 1990.

NOTA: Estos son los mismos estudiantes del curso de 8º de 1991.

Alumno	Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4	
EGB7- 1	66'67	Alta	36'67	Baja	6'25	Nula	0	Nula
EGB7- 2	100	Completa	21'67	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB7- 3	100	Completa	10'83	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB7- 4	93'33	Completa	11'67	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB7- 5	100	Completa	38'33	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB7- 6	33'33	Baja	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB7- 7	100	Completa	17'5	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB7- 8	66'67	Alta	13'33	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB7- 9	50	Intermedia	7'5	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB7- 10	93'33	Completa	19'17	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB7- 11	100	Completa	29'17	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB7- 12	100	Completa	32'5	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB7- 13	100	Completa	63'33	Alta	20	Baja	0	Nula
EGB7- 14	60	Intermedia	10	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB7- 15	33'33	Baja	6'67	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB7- 16	100	Completa	22'5	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB7- 17	58'33	Intermedia	6'67	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB7- 18	33'33	Baja	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB7- 19	100	Completa	75'83	Alta	0	Nula	0	Nula
EGB7- 20	33'33	Baja	0	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB7- 21	26'67	Baja	0	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB7- 22	100	Completa	61'67	Alta	38'75	Baja	0	Nula
EGB7- 23	31'67	Baja	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB7- 24	75	Alta	14'17	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB7- 25	93'33	Completa	10'83	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB7- 26	33'33	Baja	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB7- 27	100	Completa	13'33	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB7- 28	100	Completa	10	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB7- 29	33'33	Baja	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula

EGB7- 30	25	Baja	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB7- 31	33'33	Baja	23'33	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB7- 32	100	Completa	28'33	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB7- 33	100	Completa	20'83	Baja	0	Nula	0	Nula

Curso: 7º de E.G.B.; Año: 1991.

NOTA: Estos son los mismos estudiantes de los cursos de 6º de 1990 y 8º de 1992.

Alumno	Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4	
EGB67- 1	33'33	Baja	6'67	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB67- 2	33'33	Baja	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB67- 3	93'33	Completa	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB67- 4	100	Completa	48'33	Intermedia	0	Nula	0	Nula
EGB67- 5	66'67	Alta	20	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB67- 6	26'67	Baja	0	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB67- 7								
EGB67- 8	100	Completa	11'67	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB67- 9	100	Completa	14'17	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB67- 10	100	Completa	23'33	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB67- 11	100	Completa	20'83	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB67- 12	100	Completa	35	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB67- 13	100	Completa	6'67	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB67- 14	100	Completa	40'83	Intermedia	0	Nula	0	Nula
EGB67- 15	26'67	Baja	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB67- 16	33'33	Baja	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB67- 17	85	Completa	0	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB67- 18	40	Intermedia	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB67- 19								
EGB67- 20	91'67	Completa	7'5	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB67- 21	58'33	Intermedia	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB67- 22								
EGB67- 23	100	Completa	22'5	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB67- 24	25	Baja	0	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB67- 25	66'67	Alta	0	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB67- 26	100	Completa	6'67	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB67- 27	15	Nula	0	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB67- 28	100	Completa	23'33	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB67- 29								

EGB67- 30								
EGB67- 31	66'67	Alta	24'17	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB67- 32	6'67	Nula	0	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB67- 33	0	Nula	0	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB67- 34	93'33	Completa	7'5	Nula	0	Nula	0	Nula

Curso: 8º de E.G.B.; Año: 1990.

Alumno	Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4	
EGB8- 1	100	Completa	35'83	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB8- 2	100	Completa	66'67	Alta	12'5	Nula	0	Nula
EGB8- 3	100	Completa	20'83	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB8- 4	100	Completa	20	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB8- 5	100	Completa	13'33	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB8- 6	100	Completa	65'83	Alta	37'5	Baja	0	Nula
EGB8- 7	100	Completa	88'33	Completa	57'5	Intermedia	0	Nula
EGB8- 8	100	Completa	25'83	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB8- 9	66'67	Alta	10'83	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB8- 10	100	Completa	24'17	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB8- 11	33'33	Baja	23'33	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB8- 12	100	Completa	24'17	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB8- 13	100	Completa	19'17	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB8- 14	100	Completa	25'83	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB8- 15	100	Completa	24'17	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB8- 16	100	Completa	38'33	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB8- 17	66'67	Alta	22'5	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB8- 18	100	Completa	24'17	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB8- 19	100	Completa	31'67	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB8- 20	100	Completa	26'67	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB8- 21	100	Completa	45	Intermedia	31'25	Baja	0	Nula
EGB8- 22	100	Completa	56'67	Intermedia	0	Nula	0	Nula
EGB8- 23	66'67	Alta	10	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB8- 24	100	Completa	17'5	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB8- 25	100	Completa	32'5	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB8- 26	100	Completa	23'33	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB8- 27	100	Completa	27'5	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB8- 28	100	Completa	15'83	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB8- 29	100	Completa	71'67	Alta	25	Baja	0	Nula
EGB8- 30	93'33	Completa	32'5	Baja	25	Baja	0	Nula
EGB8- 31	100	Completa	15'83	Baja	0	Nula	0	Nula

Curso: 8º de E.G.B.; Año: 1991.

NOTA: Estos son los mismos estudiantes del curso de 7º de 1990.

Alumno	Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4	
EGB78- 1	100	Completa	35'83	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB78- 2								
EGB78- 3	100	Completa	15	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB78- 4	93'33	Completa	12'5	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB78- 5	100	Completa	27'5	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB78- 6								
EGB78- 7	100	Completa	29'17	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB78- 8								
EGB78- 9	66'67	Alta	12'5	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB78- 10	100	Completa	18'33	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB78- 11	100	Completa	28'33	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB78- 12	100	Completa	41'67	Intermedia	0	Nula	0	Nula
EGB78- 13	100	Completa	55	Intermedia	5	Nula	0	Nula
EGB78- 14	93'33	Completa	23'33	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB78- 15	66'67	Alta	22'5	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB78- 16	100	Completa	45	Intermedia	0	Nula	0	Nula
EGB78- 17								
EGB78- 18	100	Completa	26'67	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB78- 19								
EGB78- 20								
EGB78- 21	66'67	Alta	23'33	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB78- 22	100	Completa	66'67	Alta	12'5	Nula	0	Nula
EGB78- 23	66'67	Alta	23'33	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB78- 24	93'33	Completa	27'5	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB78- 25	100	Completa	17'5	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB78- 26	66'67	Alta	12'5	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB78- 27								
EGB78- 28	91'67	Completa	10	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB78- 29								

EGB78- 30	40	Intermedia	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB78- 31	100	Completa	54'17	Intermedia	0	Nula	0	Nula
EGB78- 32	100	Completa	42'5	Intermedia	0	Nula	0	Nula
EGB78- 33	100	Completa	31'67	Baja	0	Nula	0	Nula

Curso: 8º de E.G.B.; Año: 1992.

NOTA: Estos son los mismos estudiantes de los cursos de 6º de 1990 y 7º de 1991.

Alumno	Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4	
EGB678- 1								
EGB678- 2	58'33	Intermedia	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB678- 3	91'67	Completa	13'33	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB678- 4	100	Completa	58'33	Intermedia	5	Nula	0	Nula
EGB678- 5	100	Completa	40	Intermedia	0	Nula	0	Nula
EGB678- 6	58'33	Intermedia	6'67	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB678- 7								
EGB678- 8	100	Completa	31'67	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB678- 9	93'33	Completa	22'5	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB678- 10	100	Completa	27'5	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB678- 11	100	Completa	10	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB678- 12	100	Completa	32'5	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB678- 13								
EGB678- 14	66'67	Alta	33'33	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB678- 15	91'67	Completa	20	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB678- 16	93'33	Completa	10'83	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB678- 17	60	Intermedia	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB678- 18	93'33	Completa	15'83	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB678- 19	86'67	Completa	20	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB678- 20	93'33	Completa	7'5	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB678- 21								
EGB678- 22	41'67	Intermedia	6'67	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB678- 23	0	Nula	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB678- 24	33'33	Baja	0	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB678- 25								
EGB678- 26	93'33	Completa	19'17	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB678- 27	93'33	Completa	7'5	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB678- 28	60	Intermedia	24'17	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB678- 29								

EGB678- 30								
EGB678- 31	100	Completa	37'5	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB678- 32	58'33	Intermedia	0	Nula	0	Nula	0	Nula
EGB678- 33	93'33	Completa	33'33	Baja	0	Nula	0	Nula
EGB678- 34	68'33	Alta	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula

Curso: 1º de B.U.P.; Año: 1990.

Alumno	Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4	
BUP1- 1	93'33	Completa	23'33	Baja	6'25	Nula	0	Nula
BUP1- 2	100	Completa	53'33	Intermedia	11'25	Nula	0	Nula
BUP1- 3	100	Completa	79'17	Alta	70	Alta	50	Intermedia
BUP1- 4	33'33	Baja	12'5	Nula	0	Nula	0	Nula
BUP1- 5	66'67	Alta	30	Baja	0	Nula	0	Nula
BUP1- 6	33'33	Baja	35'83	Baja	6'25	Nula	0	Nula
BUP1- 7	100	Completa	50	Intermedia	25	Baja	0	Nula
BUP1- 8	66'67	Alta	18'33	Baja	0	Nula	0	Nula
BUP1- 9	66'67	Alta	36'67	Baja	0	Nula	0	Nula
BUP1- 10	66'67	Alta	48'33	Intermedia	5	Nula	0	Nula
BUP1- 11	66'67	Alta	59'17	Intermedia	11'25	Nula	0	Nula
BUP1- 12	33'33	Baja	12'5	Nula	0	Nula	0	Nula
BUP1- 13								
BUP1- 14	100	Completa	40	Intermedia	6'25	Nula	0	Nula
BUP1- 15	33'33	Baja	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula
BUP1- 16	100	Completa	23'33	Baja	0	Nula	0	Nula
BUP1- 17	93'33	Completa	19'17	Baja	0	Nula	0	Nula
BUP1- 18	66'67	Alta	10'83	Nula	0	Nula	0	Nula
BUP1- 19	33'33	Baja	20	Baja	0	Nula	0	Nula
BUP1- 20	93'33	Completa	27'5	Baja	0	Nula	0	Nula
BUP1- 21	86'67	Completa	28'33	Baja	0	Nula	0	Nula
BUP1- 22	33'33	Baja	20	Baja	0	Nula	0	Nula
BUP1- 23	66'67	Alta	29'17	Baja	0	Nula	0	Nula
BUP1- 24	66'67	Alta	45	Intermedia	18'75	Baja	0	Nula
BUP1- 25	33'33	Baja	12'5	Nula	0	Nula	0	Nula
BUP1- 26	33'33	Baja	12'5	Nula	0	Nula	0	Nula
BUP1- 27	66'67	Alta	15'83	Baja	0	Nula	0	Nula
BUP1- 28	33'33	Baja	15'83	Baja	0	Nula	0	Nula
BUP1- 29	33'33	Baja	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula
BUP1- 30	33'33	Baja	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula

BUP1- 31	100	Completa	62'5	Alta	30	Baja	50	Intermedia
BUP1- 32	33'33	Baja	20	Baja	0	Nula	0	Nula
BUP1- 33	91'67	Completa	20	Baja	0	Nula	0	Nula
BUP1- 34	66'67	Alta	10	Nula	0	Nula	0	Nula
BUP1- 35	100	Completa	41'67	Intermedia	20	Baja	0	Nula
BUP1- 36	58'33	Intermedia	6'67	Nula	0	Nula	0	Nula

Curso: 2º de B.U.P.; Año: 1990.

Alumno	Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4	
BUP2- 1	66'67	Alta	33'33	Baja	6'25	Nula	0	Nula
BUP2- 2	66'67	Alta	46'67	Intermedia	25	Baja	10	Nula
BUP2- 3	66'67	Alta	40'83	Intermedia	12'5	Nula	0	Nula
BUP2- 4	100	Completa	67'5	Alta	43'75	Intermedia	0	Nula
BUP2- 5	66'67	Alta	45	Intermedia	6'25	Nula	0	Nula
BUP2- 6	100	Completa	25	Baja	0	Nula	0	Nula
BUP2- 7	66'67	Alta	10'83	Nula	0	Nula	0	Nula
BUP2- 8	66'67	Alta	60	Intermedia	32'5	Baja	0	Nula
BUP2- 9	66'67	Alta	20	Baja	0	Nula	0	Nula
BUP2- 10	100	Completa	92'5	Completa	80	Alta	40	Intermedia
BUP2- 11	100	Completa	35'83	Baja	6'25	Nula	0	Nula
BUP2- 12	100	Completa	43'33	Intermedia	31'25	Baja	0	Nula
BUP2- 13	100	Completa	26'67	Baja	6'25	Nula	0	Nula
BUP2- 14	100	Completa	69'17	Alta	50	Intermedia	0	Nula
BUP2- 15	33'33	Baja	33'33	Baja	25	Baja	0	Nula
BUP2- 16	66'67	Alta	15	Nula	0	Nula	0	Nula
BUP2- 17	33'33	Baja	45'83	Intermedia	18'75	Baja	0	Nula
BUP2- 18	100	Completa	88'33	Completa	50	Intermedia	40	Intermedia
BUP2- 19	100	Completa	3'33	Nula	0	Nula	0	Nula
BUP2- 20	100	Completa	32'5	Baja	0	Nula	0	Nula
BUP2- 21	100	Completa	20	Baja	0	Nula	0	Nula
BUP2- 22	100	Completa	20'83	Baja	0	Nula	0	Nula
BUP2- 23	100	Completa	20	Baja	0	Nula	0	Nula
BUP2- 24	100	Completa	34'17	Baja	0	Nula	0	Nula
BUP2- 25	91'67	Completa	23'33	Baja	0	Nula	0	Nula
BUP2- 26	100	Completa	36'67	Baja	6'25	Nula	0	Nula
BUP2- 27	100	Completa	37'5	Baja	25	Baja	0	Nula
BUP2- 28	100	Completa	38'33	Baja	25	Baja	0	Nula
BUP2- 29	100	Completa	54'17	Intermedia	25	Baja	0	Nula
BUP2- 30	100	Completa	31'67	Baja	0	Nula	0	Nula

BUP2- 31	100	Completa	36'67	Baja	18'75	Baja	0	Nula
BUP2- 32	66'67	Alta	6'67	Nula	0	Nula	0	Nula
BUP2- 33	33'33	Baja	45'83	Intermedia	50	Intermedia	0	Nula
BUP2- 34	66'67	Alta	15	Nula	0	Nula	0	Nula
BUP2- 35	100	Completa	39'17	Baja	6'25	Nula	0	Nula
BUP2- 36	33'33	Baja	19'17	Baja	0	Nula	0	Nula

Curso: 3º de B.U.P.; Año: 1991.

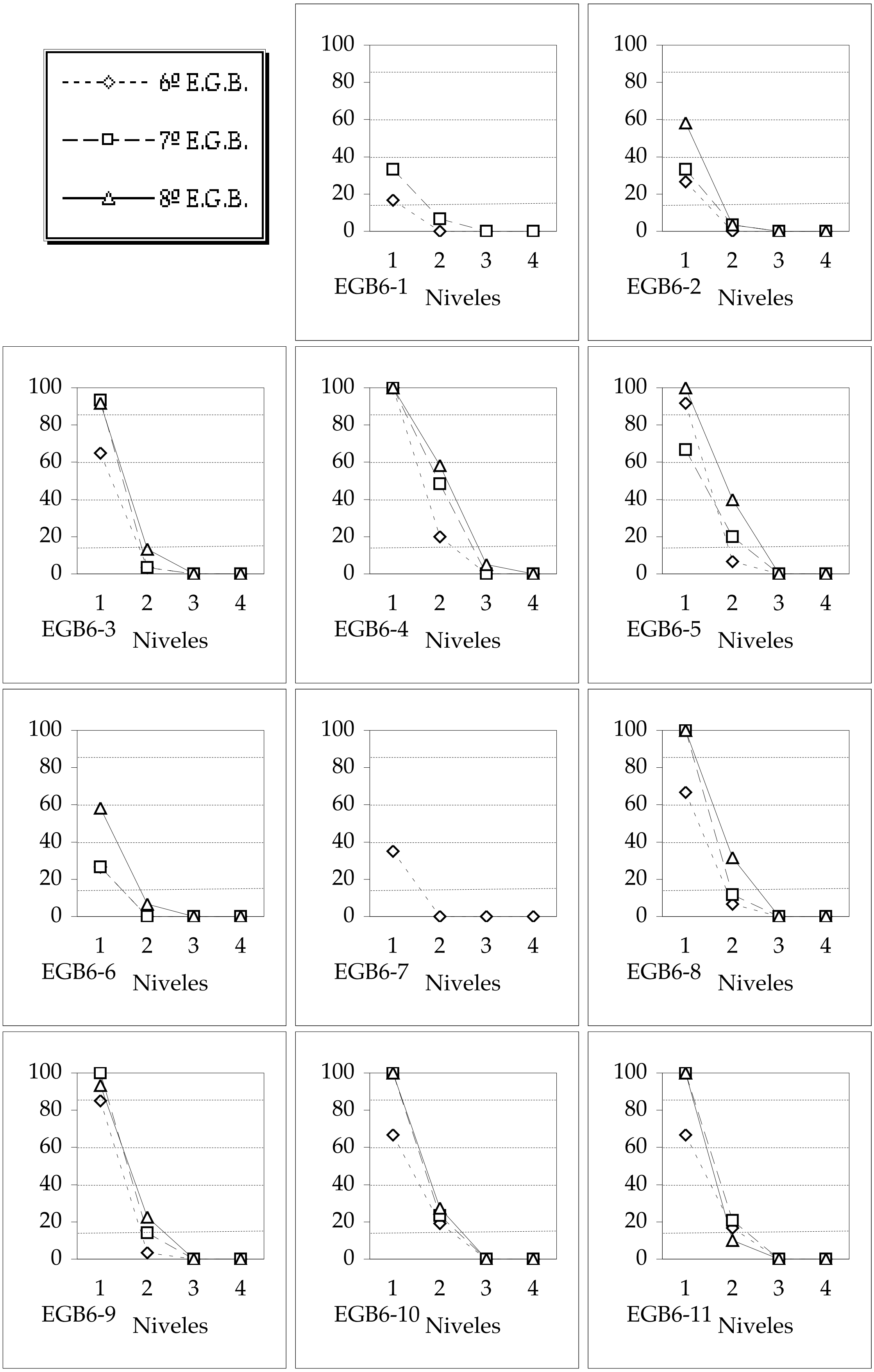
Alumno	Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4	
BUP3- 1	50	Intermedia	4	Nula	0	Nula	0	Nula
BUP3- 2	100	Completa	12	Nula	0	Nula	0	Nula
BUP3- 3	50	Intermedia	8	Nula	0	Nula	0	Nula
BUP3- 4	100	Completa	23	Baja	0	Nula	0	Nula
BUP3- 5	100	Completa	8	Nula	0	Nula	0	Nula
BUP3- 6	87'5	Completa	48	Intermedia	21	Baja	0	Nula
BUP3- 7	100	Completa	80	Alta	20	Baja	0	Nula
BUP3- 8	50	Intermedia	14	Nula	0	Nula	0	Nula
BUP3- 9	100	Completa	32	Baja	10	Nula	0	Nula
BUP3- 10	100	Completa	38	Baja	0	Nula	0	Nula
BUP3- 11	100	Completa	75	Alta	25	Baja	0	Nula
BUP3- 12	100	Completa	80	Alta	20	Baja	0	Nula
BUP3- 13	100	Completa	76	Alta	36	Baja	0	Nula
BUP3- 14	100	Completa	80	Alta	35	Baja	0	Nula
BUP3- 15	100	Completa	25	Baja	0	Nula	0	Nula
BUP3- 16	100	Completa	81	Alta	56	Intermedia	25	Baja
BUP3- 17	100	Completa	20	Baja	0	Nula	0	Nula
BUP3- 18	100	Completa	76	Alta	25	Baja	0	Nula
BUP3- 19	50	Intermedia	13	Nula	0	Nula	0	Nula
BUP3- 20	100	Completa	36	Baja	0	Nula	0	Nula
BUP3- 21	100	Completa	71	Alta	9	Nula	0	Nula
BUP3- 22	100	Completa	39	Baja	10	Nula	0	Nula
BUP3- 23	100	Completa	53	Intermedia	16	Baja	0	Nula
BUP3- 24	100	Completa	28	Baja	15	Nula	0	Nula
BUP3- 25	100	Completa	76	Alta	24	Baja	33'33	Baja
BUP3- 26	100	Completa	13	Nula	0	Nula	0	Nula
BUP3- 27	100	Completa	17	Baja	0	Nula	0	Nula
BUP3- 28	100	Completa	87	Completa	40	Intermedia	6'67	Nula

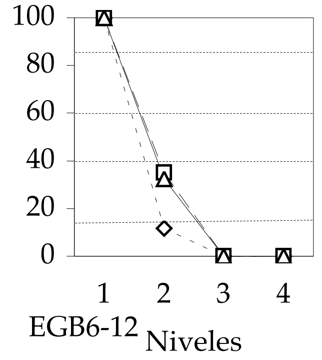
Curso: C.O.U.; Año: 1990.

Alumno	Nivel 1		Nivel 2		Nivel 3		Nivel 4	
COU- 1	100	Completa	65	Alta	15	Nula	0	Nula
COU- 2	50	Intermedia	31	Baja	0	Nula	0	Nula
COU- 3	100	Completa	96	Completa	45	Intermedia	8'33	Nula
COU- 4	100	Completa	26	Baja	0	Nula	0	Nula
COU- 5	50	Intermedia	76	Alta	13	Nula	0	Nula
COU- 6	100	Completa	49	Intermedia	10	Nula	0	Nula
COU- 7	100	Completa	59	Intermedia	40	Intermedia	0	Nula
COU- 8	100	Completa	67	Alta	5	Nula	0	Nula
COU- 9	100	Completa	96	Completa	70	Alta	41'67	Intermedia
COU- 10	100	Completa	44	Intermedia	19	Baja	0	Nula
COU- 11	100	Completa	90	Completa	51	Intermedia	8'33	Nula
COU- 12	100	Completa	48	Intermedia	4	Nula	0	Nula
COU- 13	100	Completa	13	Nula	0	Nula	0	Nula
COU- 14	100	Completa	65	Alta	24	Baja	0	Nula
COU- 15	100	Completa	95	Completa	68	Alta	15	Nula
COU- 16	100	Completa	80	Alta	45	Intermedia	0	Nula
COU- 17	100	Completa	37	Baja	5	Nula	0	Nula
COU- 18	100	Completa	91	Completa	34	Baja	0	Nula
COU- 19	100	Completa	59	Intermedia	20	Baja	0	Nula
COU- 20	100	Completa	80	Alta	56	Intermedia	0	Nula
COU- 21	100	Completa	81	Alta	55	Intermedia	0	Nula
COU- 22	100	Completa	55	Intermedia	24	Baja	6'67	Nula
COU- 23	100	Completa	66	Alta	16	Baja	0	Nula
COU- 24	100	Completa	44	Intermedia	16	Baja	0	Nula
COU- 25	100	Completa	23	Baja	0	Nula	0	Nula
COU- 26	100	Completa	41	Intermedia	36	Baja	8'33	Nula
COU- 27	100	Completa	14	Nula	0	Nula	0	Nula
COU- 28	0	Nula	36	Baja	0	Nula	0	Nula
COU- 29	100	Completa	30	Baja	0	Nula	0	Nula
COU- 30	100	Completa	16	Baja	0	Nula	0	Nula
COU- 31	100	Completa	41	Intermedia	0	Nula	0	Nula

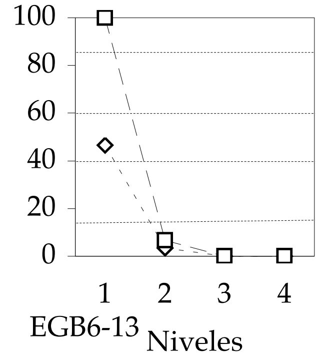
ANEXO VII: GRÁFICAS DEL ESTUDIO LONGITUDINAL DE 6º A 8º DE E.G.B.

Gráficas de los grados de adquisición de los niveles de Van Hiele por los estudiantes en 6º (año 1990), 7º (año 1991) y 8º (año 1992) de E.G.B.

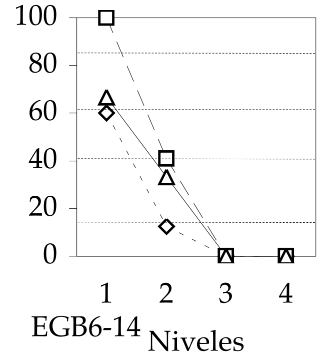

6º E.G.B.
7º E.G.B.
8º E.G.B.
EGB6-1 Niveles
EGB6-2 Niveles
EGB6-3 Niveles
EGB6-4 Niveles
EGB6-5 Niveles
EGB6-6 Niveles
EGB6-7 Niveles
EGB6-8 Niveles
EGB6-9 Niveles
EGB6-10 Niveles
EGB6-11 Niveles



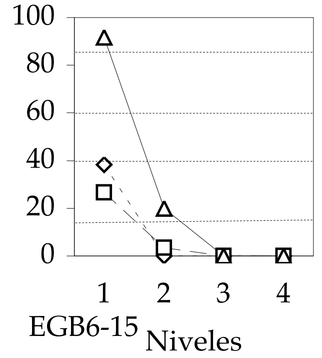
EGB6-12



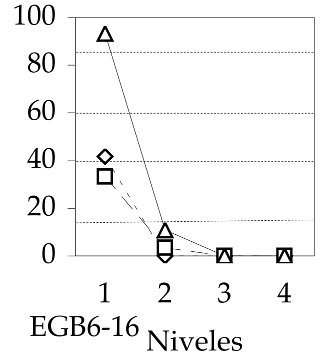
EGB6-13



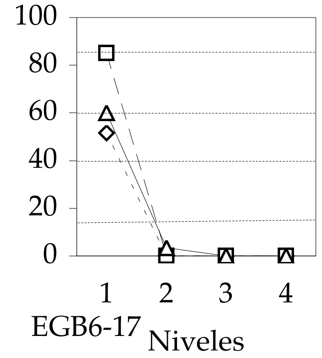
EGB6-14



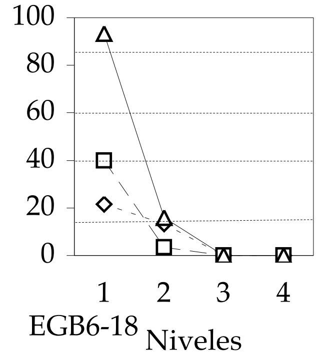
EGB6-15



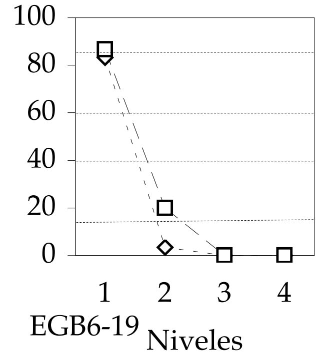
EGB6-16



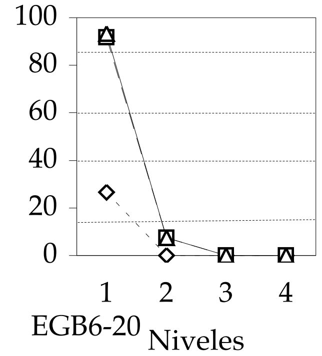
EGB6-17



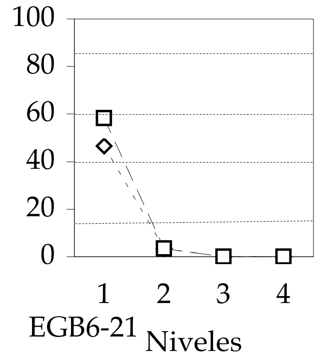
EGB6-18



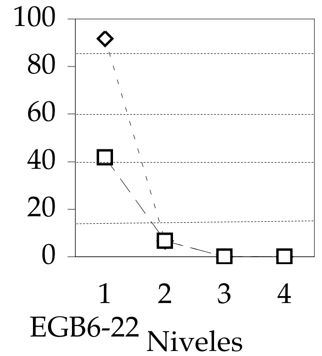
EGB6-19



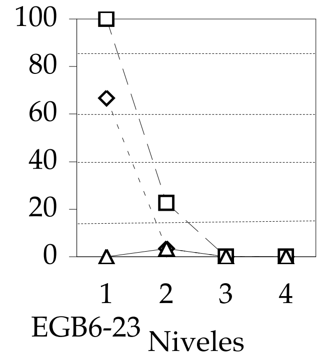
EGB6-20



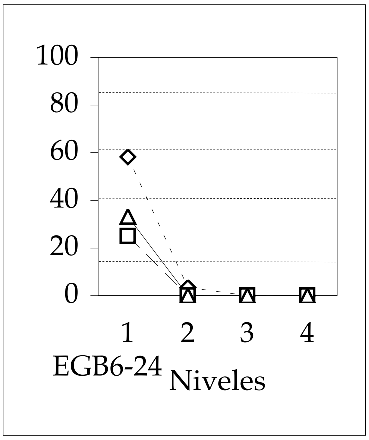
EGB6-21

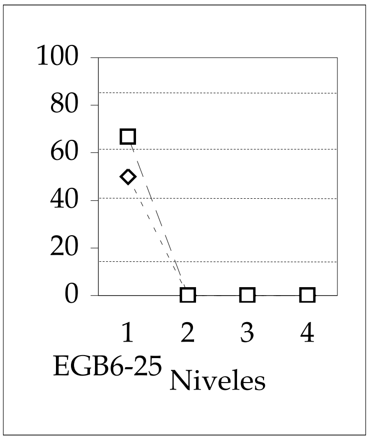


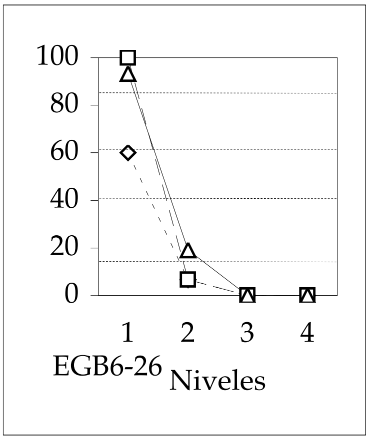
EGB6-22

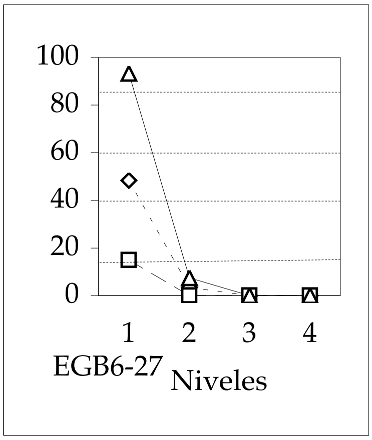


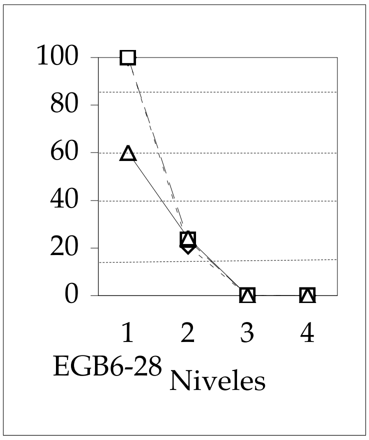
EGB6-23

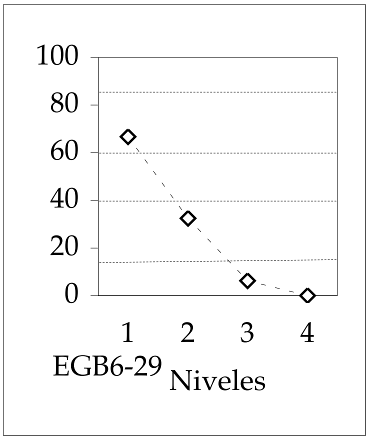

100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB6-24
Niveles

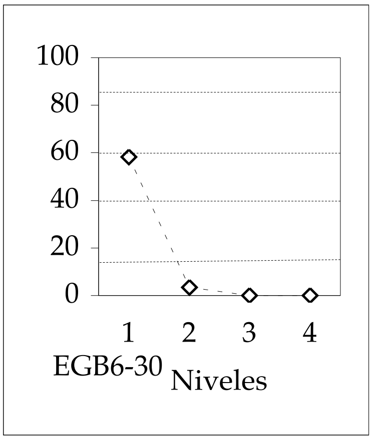

100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB6-25
Niveles

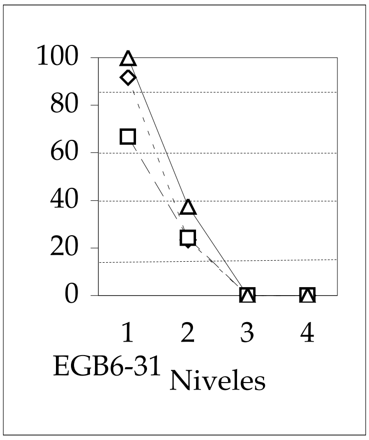

100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB6-26
Niveles

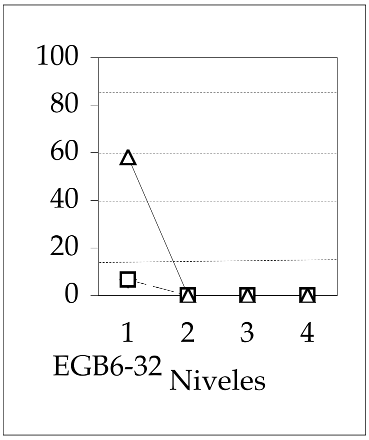

100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB6-27
Niveles

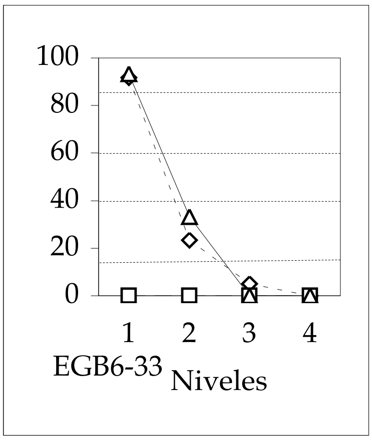

100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB6-28
Niveles

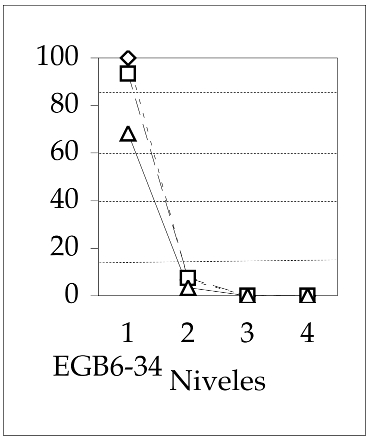

100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB6-29
Niveles


100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB6-30
Niveles

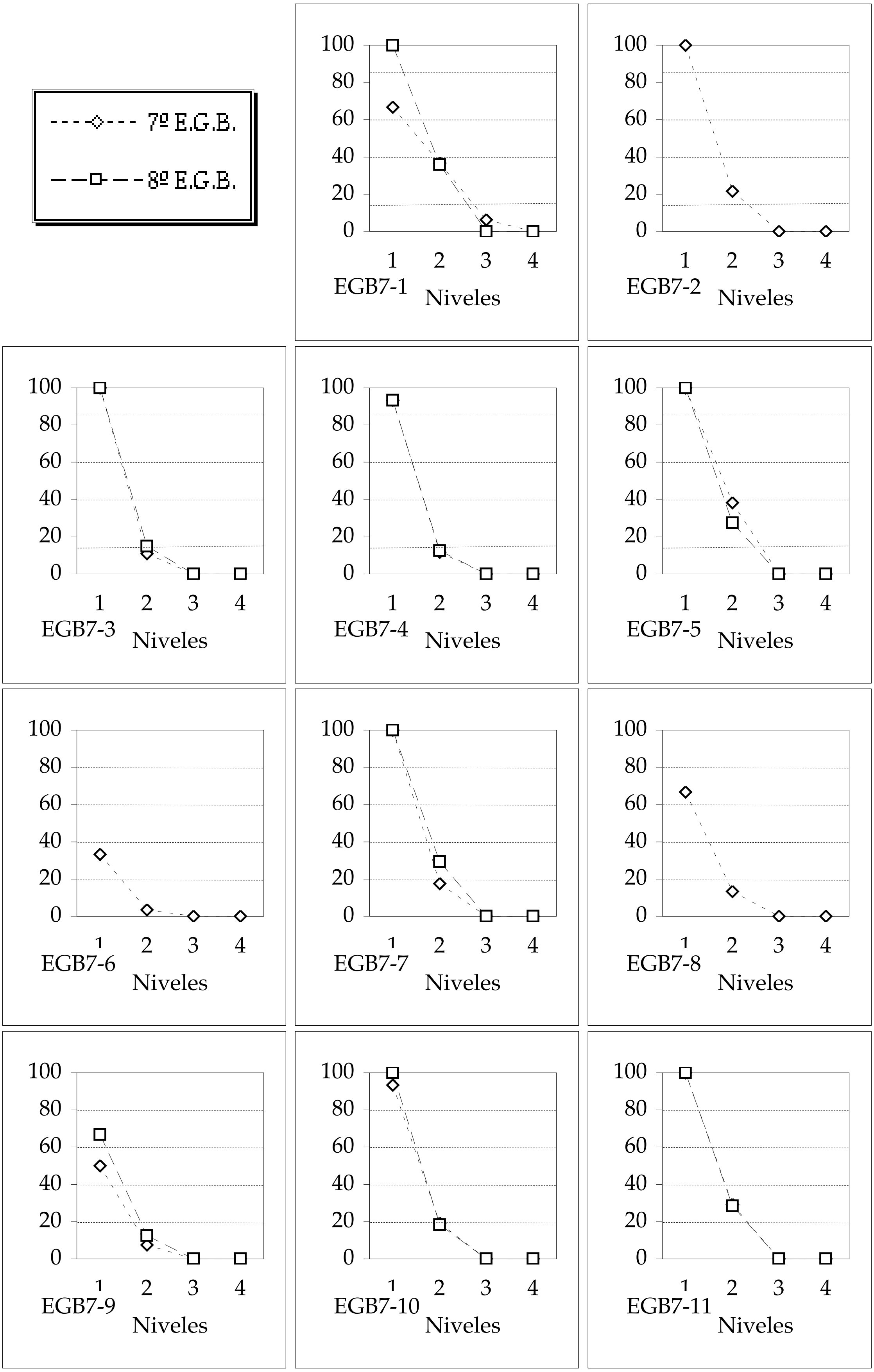

100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB6-31
Niveles

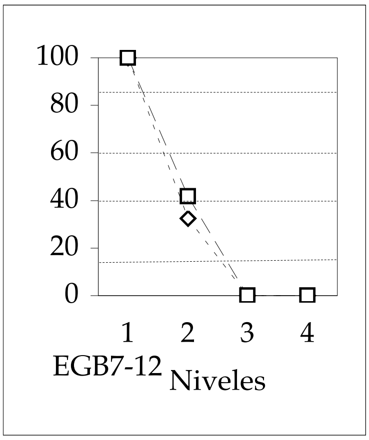

100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB6-32
Niveles

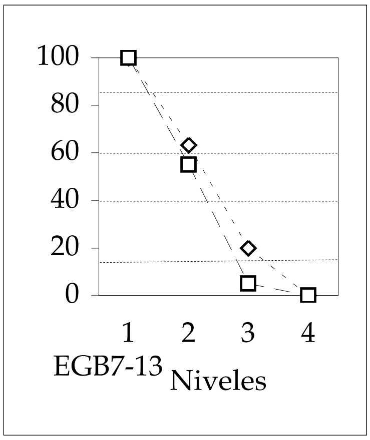

100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB6-33
Niveles

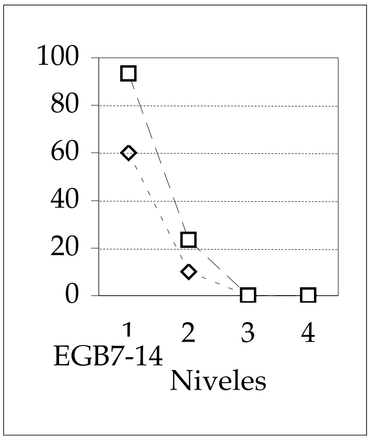

100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB6-34
Niveles

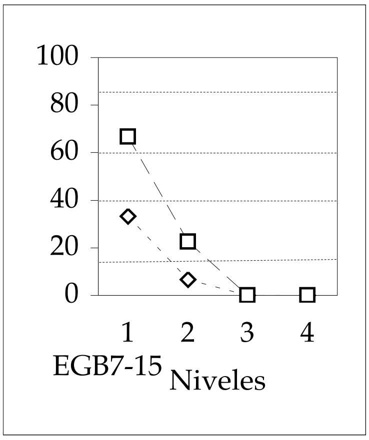
Gráficas de los grados de adquisición de los niveles de Van Hiele por los estudiantes en 7º (año 1990) y 8º (año 1991) de E.G.B.

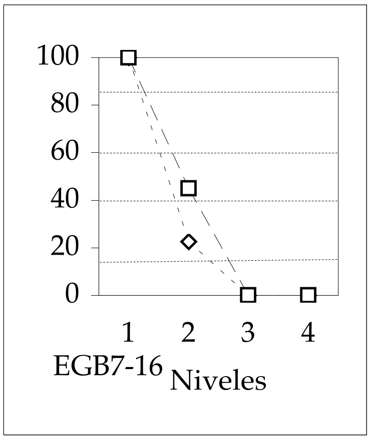

7º E.G.B.
8º E.G.B.
EGB7-1
EGB7-2
EGB7-3
EGB7-4
EGB7-5
EGB7-6
EGB7-7
EGB7-8
EGB7-9
EGB7-10
EGB7-11
Niveles
0
20
40
60
80
100
1
2
3
4

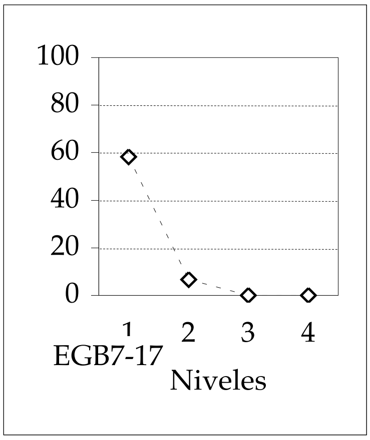

100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB7-12
Niveles

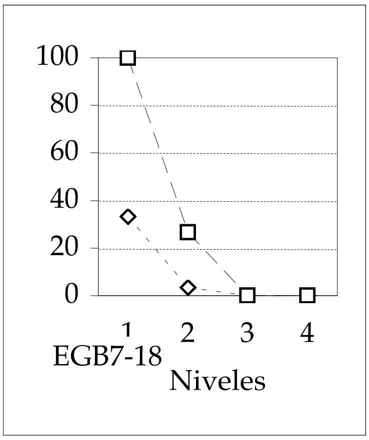

100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB7-13
Niveles

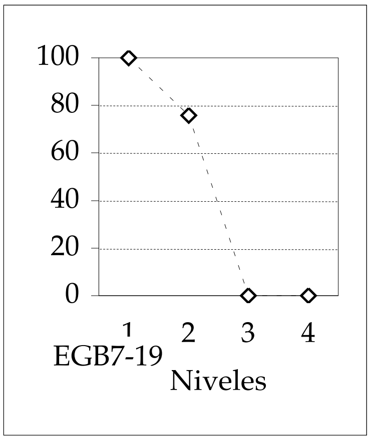

100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB7-14
Niveles

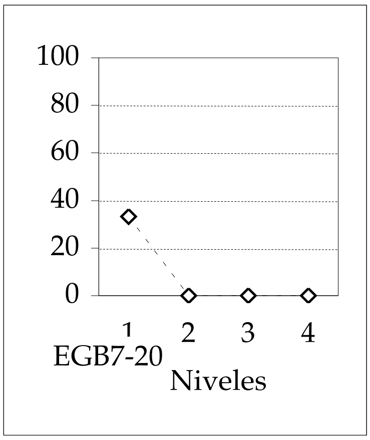

100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB7-15
Niveles

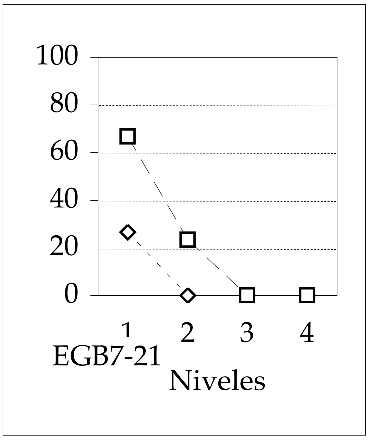

100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB7-16
Niveles

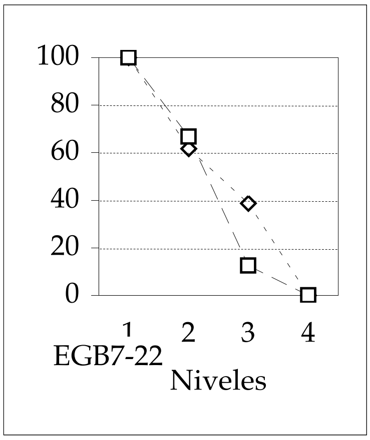

100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB7-17
Niveles

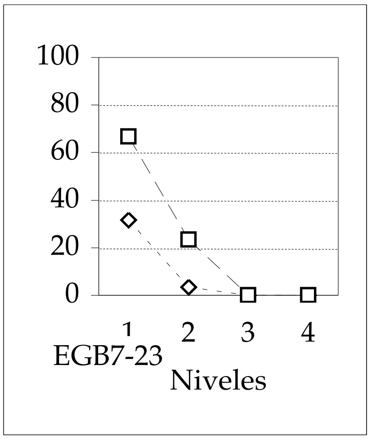

100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB7-18
Niveles

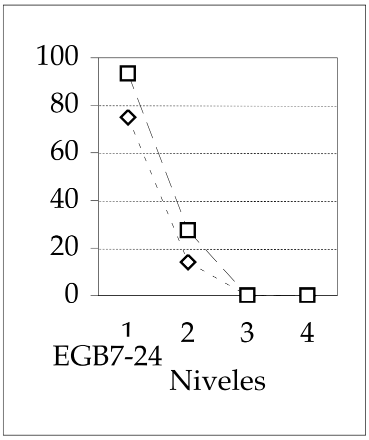

100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB7-19
Niveles

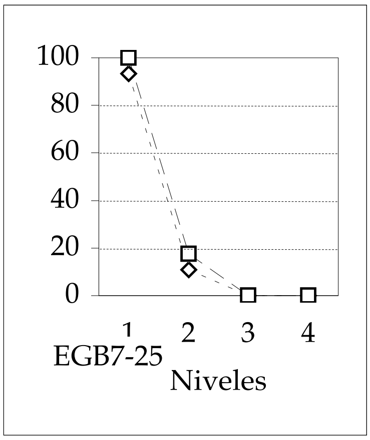

100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB7-20
Niveles

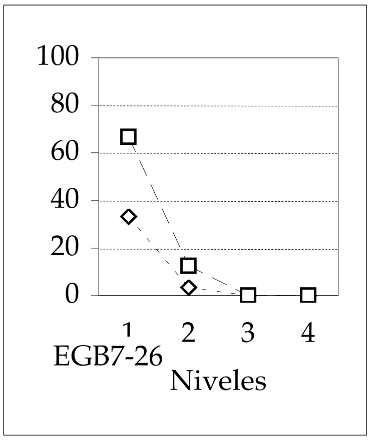

100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB7-21
Niveles

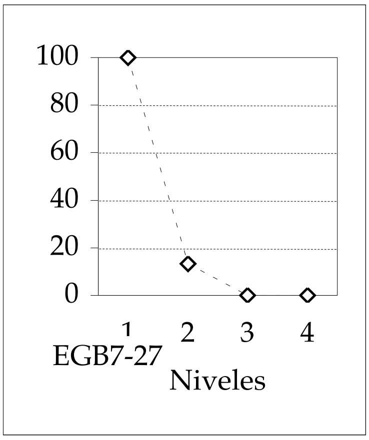

100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB7-22
Niveles

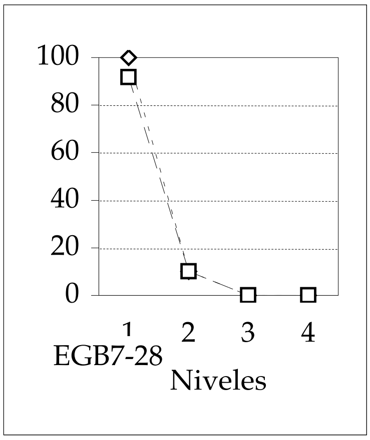

100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB7-23
Niveles

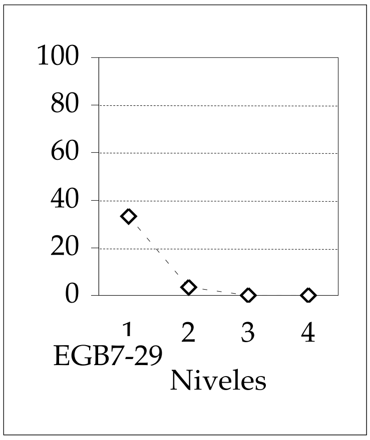

100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB7-24
Niveles

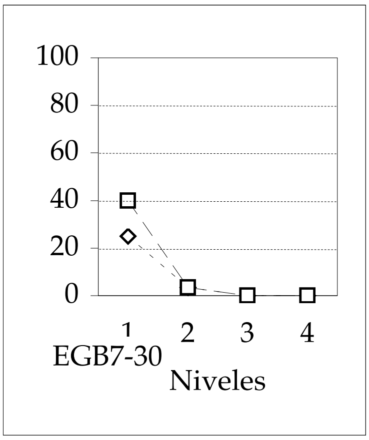

100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB7-25
Niveles

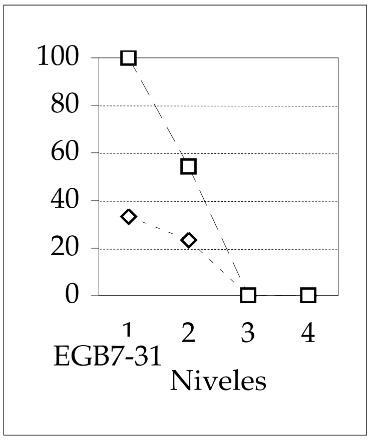

100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB7-26
Niveles

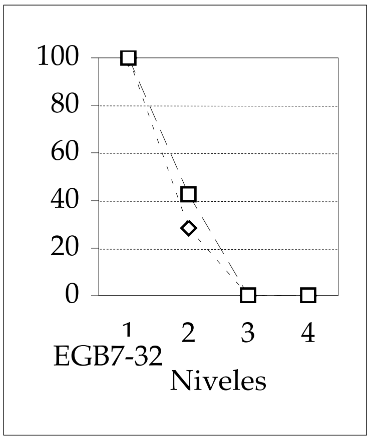

100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB7-27
Niveles

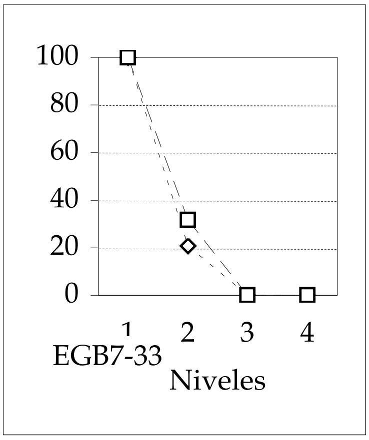

100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB7-28
Niveles


100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB7-29
Niveles


100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB7-30
Niveles


100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB7-31
Niveles


100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB7-32
Niveles


100
80
60
40
20
0
1 2 3 4
EGB7-33
Niveles