APROXIMACIÓN FORENSE AL RAZONAMIENTO EN GEOMETRÍA: EL MODELO DE VAN HIELE

Adela Jaime Pastor
Ángel Gutiérrez Rodríguez

Profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultat de Magisteri. Universitat de València

El detective MatematicsG tiene fama de sabueso. Sólo un caso se le ha resistido en su trayectoria profesional –25 años ejerciendo– por un descuido que se tradujo en una mayor meticulosidad en los casos posteriores.

MatematicsG es un geómetra (de ahí la letra G de su apodo). Gran lector de los griegos, está convencido de que la geometría se encuentra detrás de todo. ¡Pobres de sus ayudantes si no dominan esa materia!

El sr. MatematicsG (MG en adelante) no cabe en sí de gozo. El caso que le han propuesto desprende geometría por todos lados y, por si fuera poco, le recuerda sus años juveniles, haciendo pinitos con cartas y espejos para conseguir efectos ópticos que deslumbraran al sufrido público ante sus actuaciones de magia.

El Súper Mago de los espejos (SM), el más famoso en estos momentos, el que deja boquiabiertos a los espectadores con sus imágenes, apariciones múltiples y desapariciones en cuestión de centésimas de segundo, ha desaparecido hoy, dos días antes de una actuación que prometía revolucionar las presentaciones. En su casa se ha encontrado el cadáver de un hombre joven, que algunos identifican como su nuevo ayudante.

En la central de policía se ha recibido un vídeo en el que aparece la víctima en dos ocasiones.

MG tiene unas hipótesis de lo sucedido y sólo se le escapan algunos detalles, por lo que se dirige al domicilio del supermago para dejar todo claro, como a él le gusta, sin resquicio de duda.

Le acompañan su experto ayudante (EX) y una camarilla de aprendices que siempre pulula a su alrededor.

MG muestra el vídeo y describe los hechos: En el vídeo se aprecia claramente la silueta de la víctima en el salón, de pie junto a la chimenea, se pierde la imagen debido a un corte de luz, después se ve de nuevo a la misma persona, exactamente en la misma posición, pero junto al escritorio que hay en la sala. Momentos más tarde la víctima se desploma, casi al mismo tiempo que retumba la casa debido al fragor de un trueno.

MG: *¿Y bien?*

UU: [quiere hacer ver que es muy perspicaz] *La víctima está desplazada la segunda vez. Igual que en la primera imagen, pero corrida de sitio.*

MG: *Correcto. ¿Cómo podemos describir ese cambio?*

UU: *Está igual que antes, a... uno, dos, tres, a tres pasos.*

MG: *Más precisión. ¿Qué es igual que antes? ¿Qué es a tres pasos?*

TT: *Se ha trasladado, con sentido matemático. Si miramos la cuadrícula de los ladrillos del suelo, se ha trasladado 5 ladrillos a la derecha y 3 ladrillos hacia abajo.*

MG: *Usted, sr. Mario, me ha dicho que quiere aprender, ¿no? Pues comience bosquejando un esquema en papel de la situación, pasando a dos dimensiones, especificando la traslación realizada mediante un vector. ¡Y no ponga el vector pegado a la víctima!*

El novato Mario tiene idea de cómo representar lo que se le pide, excepto eso de poner el vector *separado* de la víctima, pero, por suerte para él, otro de los aprendices le echa una mano con lo de "vectores libres". Así puede seguir adelante en el caso. Sabe que quien no resuelve las cuestiones que el sr. MG plantea debe abandonar la investigación.

MG: *¿Cómo creen ustedes que se ha realizado el movimiento? Y piensen sólo en transformaciones matemáticas.*

UU: *Un empujón. Una traslación con esa fuerza.*

TT: *También pueden haber sido dos traslaciones, o tres. Teóricamente, pueden haber realizado muchas, infinitas. El supermago aparecía en el escenario multiplicado por 3 ó 5 veces, y se dice que el nuevo espectáculo iba a dejar atrás todo lo hecho hasta ahora. O sea, que quizá, contemplaba en su nuevo truco repetirse 20 ó 30 veces.*

MG: *Bien, bien. ¿Y si interviene una simetría? ¿Puede ser?*

UU: *No, porque le daría la vuelta.*

TT: *Sí. Pero si son dos, o cuatro, o seis, o ...*

MG: *Hay que buscar pistas, pistas, pistas. Aquí, en el suelo se ven restos de tiza. Aunque muy débil, se puede intuir la existencia de una recta. ¿Qué tal si probamos a hacer esta simetría?*

DD: *Con la simetría de la tiza se queda así. ¡Y sí que hay otra simetría que lleva al sr A hasta esa posición! ¡Es la solución!*

TT: *¿Cómo no había caído? La traslación descompuesta en dos simetrías. De nuevo hay infinitas posibilidades. Pero si utilizamos la recta de tiza... hay dos posibilidades, según si esa recta se ha utilizado en primer o en segundo lugar (Figura 1).*

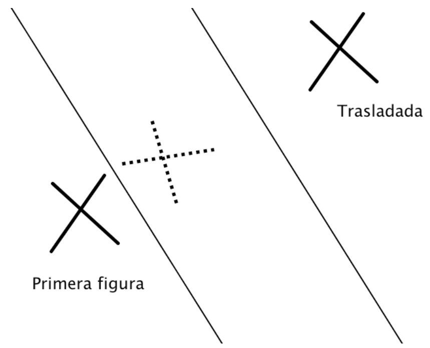

Figura 1.

MG: *Bien, muy bien. Pero hay que estrujarse un poco más el seso para encontrar todas las posibilidades. Tenemos una traslación como resultado y hay que utilizar esa recta. Busquen más.*

UU: *No puede ser un giro porque entonces el Sr. A tendría que estar girado al final.*

MG: *Eso es. Y si combinamos más movimientos, existen muchas más soluciones. Hay que esforzarse, señores, y considerar todas las posibilidades. Pero también es importante descartar luego las que no son razonables.*

TT: *Estoy viendo ahora que hay tantas posibilidades que me resulta imposible saber cómo seguir: Composiciones de traslaciones, de simetrías, de giros, de varios de esos movimientos...*

MG: *Pues, señores, en este caso la solución está clara. Hay que mirar las pistas reales. El fulgor del relámpago deja a la vista la colocación de varios lápices, desde la pared de la ventana hacia... Continúe sr. EX.*

EX: *Es la evidencia de un segundo eje de simetría, lo cual cierra el caso al...*

SM *Sí. Soy yo. Un reto fácil para quien observa, descubre y relaciona. Enhorabuena sr. MG. De nuevo ha resuelto el caso.*

MG: *Esperaba verle por aquí. Fue divertido recordar las composiciones de isometrías.*

SM *Sólo hay que coordinar eso con los efectos de proyecciones que muestran esas imágenes virtuales. Vine avisado por mi hermana, que vive en el piso de enfrente e hizo una grabación al ver luz y a alguien ensayando con todas las cortinas subidas. Cuando llegué, mi nuevo ayudante estaba desplomado en el suelo, sin vida.*

MG: *Una subida de la tensión eléctrica originada por el rayo que cayó a 100 metros de aquí y el mando de los aparatos en la mano...*

SM *Efectivamente. Hay que tomar ciertas precauciones cuando se trabaja con tomas eléctricas...*

Como en otras ocasiones, el sr. MG aconseja a la camarilla de aprendices que asistan a clases de geometría, pues hay muchos conocimientos y deducciones lógicas que se les escapan. Para el sr. MG, el razonamiento deductivo es la clave de su trabajo y ve un paralelismo entre el proceso seguido en una demostración geométrica formal y el procedimiento seguido en una investigación forense:

INVESTIGACIÓN FORENSE	DEMOSTRACIÓN GEOMÉTRICA
1) Determinar el asunto a investigar.	1) Determinar la conjetura a demostrar.
2) Buscar elementos relacionados con el objetivo de la investigación (documentos, etc.).	2) Buscar elementos relacionados con el objeto de la demostración (hipótesis, etc.)
3) Establecer relaciones entre esos elementos y el objetivo de la investigación.	3) Establecer relaciones entre las hipótesis u otros datos y la tesis.
4) Presentar la secuencia lógica de conclusiones que lleva de los datos disponibles a los hechos que se han producido.	4) Presentar la secuencia lógica de deducciones que lleva de las hipótesis a la tesis.

El caso resuelto por el sr. MG se puede traducir al lenguaje geométrico:

1) Cómo llegar de una figura A a su trasladada B.
2) Utilizando rectas para realizar los movimientos.
3) Composiciones de isometrías: Varias posibilidades de composiciones que dan lugar a una traslación.
4) Paso de A a B mediante la composición de dos simetrías de ejes paralelos fijados.

Podemos notar que los ayudantes UU, DD y TT enfocan de diferentes maneras las peticiones de análisis de las pistas que les hace el sr. MG:

- UU realiza una aproximación básicamente visual dando importancia a aspectos como la posición o el número de pasos que se ha movido la víctima, y física, ya que interpreta una traslación como *"un empujón"*.
- DD, en su única intervención, muestra que se ha fijado en la pista concreta (la raya de tiza) sugerida por el sr. MG y ha realizado gráficamente la composición de simetrías sugerida.
- Y TT hace un análisis matemático profundo y detallado, que va más allá de los datos concretos, poniendo de relieve las relaciones entre las composiciones de simetrías y las traslaciones.

Lo que el sr. MG exige a sus ayudantes es que lleguen a tener una profundidad en el razonamiento que les permita ir más allá de los elementos concretos encontrados en la escena del crimen. Lograr esta capacidad de razonamiento no es cuestión de un día, ni siquiera de un mes. Aprender a razonar en matemáticas requiere una maduración que, según el individuo y el nivel del que parte, puede ser más o menos larga, y la mayoría de personas no alcanzan el nivel más alto.

Es importante que los profesores de matemáticas tengan información sobre ese proceso, pues resulta frustrante, tanto para el estudiante como para el profesor, la incomprensión de la materia y de los modos de proceder en las clases de matemáticas.

Pierre M. Van Hiele era un profesor de matemáticas de secundaria en Holanda a mediados del siglo XX que tenía los mismos problemas que siguen teniendo los profesores actuales para lograr que sus alumnos entendieran y aprendieran sus clases de geometría. Un extracto de una publicación suya refleja esta situación:

Pierre M. Van Hiele

Había partes de la materia que yo podía explicar y explicar, y aún así los alumnos no entendían. Podía ver que ellos lo intentaban realmente, pero no tenían éxito... … De pronto parecía que comprendían la materia en cuestión. Podían hablar de ella con bastante sentido y a menudo decían: No es tan difícil, pero ¿por qué nos lo explicó usted de forma tan complicada? (Van Hiele, 1986, p. 39)

A cualquier profesor de matemáticas le resultará familiar este comentario de Van Hiele sobre la forma de comportarse de sus alumnos en las clases de geometría. Esto llevó a Van Hiele a estudiar a fondo el problema y a concebir un modelo de razonamiento en geometría con dos componentes:

Por una parte, el modelo explica cómo evoluciona el razonamiento de los estudiantes, planteando una secuencia de 5 *niveles de razonamiento* geométrico. La idea central del modelo de los niveles de razonamiento es que la forma que tiene un estudiante de procesar información geométrica y de utilizar sus recursos es diferente según el nivel de razonamiento en el que se encuentre. Conocer los niveles de Van Hiele, y utilizarlos en sus clases, es beneficioso para los profesores de matemáticas ya que le aportan un marco de referencia para valorar el progreso de sus alumnos.

Por otra parte, el modelo de Van Hiele hace una propuesta sobre qué tener en cuenta en la organización de la materia en las clases para ayudar a los estudiantes a avanzar en su capacidad de razonamiento matemático. Esta propuesta está formada por 5 *fases de aprendizaje* que sugieren cómo organizar los contenidos para facilitar el progreso de los estudiantes no sólo en su aprendizaje de los contenidos de geometría, sino también en su capacidad de razonamiento geométrico.

En el cuento anterior, el sr. MG recibe respuestas que corresponden a formas muy diversas de considerar los conocimientos geométricos implicados, es decir que corresponden a diferentes niveles de razonamiento.

Las características básicas de cada nivel de razonamiento de los estudiantes al enfrentarse a un nuevo campo de la geometría son las siguientes (en Jaime y Gutiérrez, 1990, presentamos una descripción más detallada del modelo de Van Hiele):

NIVEL 1.

La forma de razonar de los estudiantes sobre los conceptos geométricos es física y global. Consideran los objetos geométricos en su totalidad, como objetos físicos. Las descripciones o propiedades que verbalizan los estudiantes suelen hacer referencia a objetos o propiedades reales con cierto parecido a la figura geométrica que se quiere describir. Expresiones como *"es más largo que ancho"*, *"se parece a... (una puerta, un cucurucho, ...)"* son usuales. Al ser global el razonamiento que hacen, los estudiantes no utilizan de forma explícita los elementos matemáticos que integran el concepto, lo cual no permite descubrir, utilizar ni analizar las propiedades del concepto, ni sus elementos. La demostración matemática no existe en este nivel de razonamiento, pues cualquier justificación que den los estudiantes se reduce a describir los conceptos o propiedades como objetos concretos.

NIVEL 2.

La característica fundamental de los estudiantes que razonan en este nivel es que son conscientes de la existencia de componentes y propiedades de los conceptos geométricos y los utilizan explícitamente para resolver problemas o justificar sus conclusiones. Ello les permite descubrir nuevas propiedades de elementos y trabajan sobre éstas. No obstante, los estudiantes todavía no perciben ni entienden las interrelaciones entre unos y otros elementos o propiedades de los conceptos geométricos, pues los estudiantes no poseen todavía la destreza necesaria de razonamiento lógico. Esto hace que las definiciones que verbalizan sean listados, generalmente redundantes, de características o propiedades de los conceptos. Demostrar consiste en explorar uno o pocos ejemplos concretos para verificar si se cumple o no la conjetura enunciada y su posterior generalización a toda la familia correspondiente. Las demostraciones son empíricas, basadas siempre en casos concretos.

NIVEL 3.

El salto a este nivel se produce cuando los estudiantes descubren la existencia de relaciones lógicas entre propiedades y son capaces de entender y utilizar esas conexiones para formular argumentos deductivos. Esto tiene como consecuencia que pueden depurar las definiciones, convirtiendo los listados de propiedades propios del nivel 2 en conjuntos mínimos de condiciones necesarias y suficientes. Esta nueva capacidad de razonamiento lógico de los estudiantes también hace que se produzca un salto importante en su forma de demostrar: relacionar conlleva formular implicaciones simples, de un solo paso, por lo que pueden comenzar a utilizar estas implicaciones para organizar una cadena deductiva, que es la base del razonamiento deductivo matemático. Se trata de demostraciones deductivas abstractas informales, que ya no están formadas por ejemplos, sino que los utilizan como ayuda externa.

NIVEL 4.

Es el nivel en el que se desarrolla el razonamiento matemático formal. Los estudiantes que razonan en este nivel saben encadenar las implicaciones de manera compleja. Además, ya conocen, aunque sea de forma elemental, la estructura de los sistemas axiomáticos y sus principales elementos (postulados, definiciones, teoremas) y son capaces de entender y usar el lenguaje matemático formal. Por tanto, en este nivel, los estudiantes ya trabajan formalmente, entendiendo y utilizando la demostración matemática como cadena de implicaciones lógicas.

NIVEL 5.

La principal característica de este nivel es la capacidad para ver la geometría *"desde fuera"* y para admitir la existencia de diversos sistemas axiomáticos que dan lugar a diferentes mundos geométricos. Los estudiantes pueden comparar dos geometrías diferentes (por ejemplo, la euclidiana del plano y la esférica) y analizar propiedades geométricas para ver si se verifican en ambas geometría o solo en una de ellas (por ejemplo, la suma de los ángulos de un triángulo en las geometrías euclidiana del plano y la esférica).

Es evidente que el nivel 5 queda fuera del alcance de los estudiantes de educación secundaria quienes, como mucho, si ya están en el nivel 4, pueden hacer pequeñas exploraciones sencillas guiadas por el profesor. La *Figura 2* resume las características más destacables de cada nivel de razonamiento que es posible encontrar en las clases de geometría de Primaria y Secundaria.

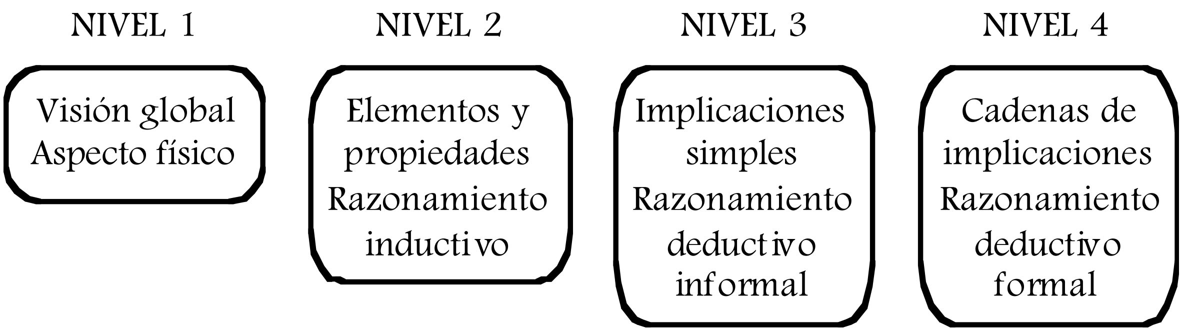

Figura 2. Las características básicas de los niveles 1 a 4 de Van Hiele.

Conocer el modelo de Van Hiele le facilita al profesor la forma de plantear los contenidos en el aula, pues puede averiguar el nivel de razonamiento de sus estudiantes y ajustar sus exposiciones, problemas, planteamiento de tareas y demostraciones de manera comprensible para sus alumnos. Van Hiele decía que dos personas que hablen desde diferentes niveles no pueden entenderse. Con ello nos indica que, para que un estudiante entienda a su profesor, éste debe hablarle desde el nivel de razonamiento en el que se encuentra el estudiante, no desde el nivel al que el profesor quiere que llegue el estudiante ni desde el nivel de razonamiento del profesor. En particular, saber en qué nivel es capaz de razonar un estudiante permite al profesor hacer una evaluación equilibrada de sus respuestas pues, por ejemplo, si un estudiante está en el nivel 2, su profesor no debe esperar que sea capaz de resolver los problemas por procedimientos abstractos que utilicen elementos como variables (x, y) o números generales (m, n), sino que el profesor debe tener en cuenta que el estudiante utilizará ejemplos y casos específicos.

Del mismo modo que hemos mostrado un paralelismo entre el trabajo de investigación forense y el de demostración en matemáticas, también hay un paralelismo entre el trabajo del investigador forense y el del profesor de matemáticas:

INVESTIGADOR FORENSE	PROFESOR DE MATEMÁTICAS
1) Determina el asunto a investigar.	1) Determina lo que quiere observar (razonamiento del estudiante).
2) Busca elementos relacionados con el objetivo de la investigación (documentos, etc.).	2) Busca elementos relacionados con el razonamiento del estudiante (respuestas, resoluciones, etc.).
3) Establece relaciones entre esos elementos y el objetivo de la investigación.	3) Establece relaciones entre lo observado y las características de los niveles de Van Hiele.
4) Presenta la secuencia lógica de conclusiones que lleva de los datos disponibles a los hechos que se han producido.	4) Organiza la información obtenida que le lleva a identificar el nivel de razonamiento del estudiante y, como consecuencia, a plantear una línea de actuación.

Veamos ahora algunos ejemplos de respuestas concretas de estudiantes mientras están resolviendo problemas y del análisis de las mismas que permite asignar el nivel de Van Hiele correspondiente. Con ello pretendemos ayudar a los lectores a entender mejor los niveles de Van Hiele y mostrarles su utilidad cuando se aplican para tomar decisiones en clase.

Comenzamos con un problema cuya demostración no es compleja pero puede dar lugar a una variedad de respuestas de estudiantes de diferentes niveles de razonamiento:

Calcular la cantidad de diagonales de un polígono de n lados.

La *Figura 3* muestra la respuesta escrita por un estudiante de Secundaria. Es un típico ejemplo de respuesta de nivel 2 básico, pues, a partir de un único ejemplo, el estudiante generaliza (y obtiene una relación incorrecta).

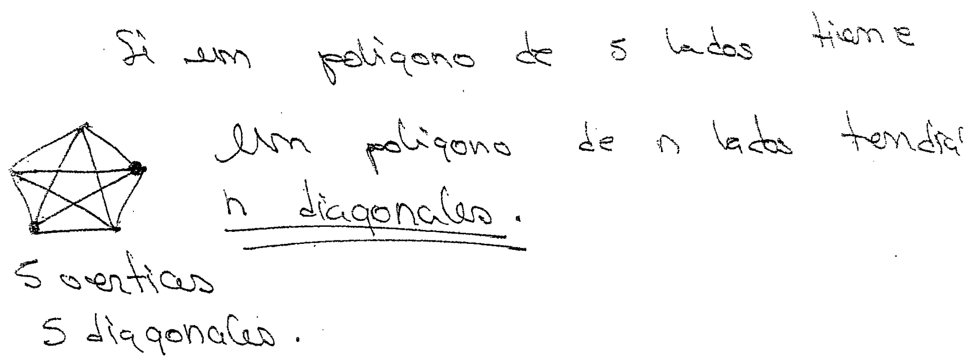

Figura 3. Calcular el número de diagonales de un polígono de n lados.

La *Figura 4* recoge la respuesta escrita por otro estudiante de Secundaria. Y usando técnicas forenses, podemos hacer una reconstrucción plausible de su proceso de resolución:

- Empezó dibujando varios polígonos con sus diagonales y escribiendo al lado el número de diagonales (razonamiento de nivel 2).
- Esperaba encontrar un patrón que le permitiera adivinar la expresión general para el *n*-gono, pero este patrón no es fácil de identificar empíricamente, pues la relación es cuadrática.
- Cambió de estrategia y buscó una relación local entre el número de diagonales desde un vértice y el número de lados del polígono, relación que sí encontró y escribió a la derecha de los polígonos (razonamiento de nivel 2).
- A partir de aquí, dio el salto al razonamiento deductivo, pues dejó de utilizar ejemplos concretos y empezó a escribir la fórmula general y la demostración deductiva de la misma, que reproduce, con lenguaje abstracto y encadenando, las relaciones particulares, los casos particulares anteriores.

Nuestra valoración global es que se trata de un estudiante que intenta resolver el problema con poco esfuerzo (razonando en el nivel 2) pero que, al no lograrlo, necesita utilizar razonamiento de nivel 3 para realizar una demostración de tipo deductivo informal.

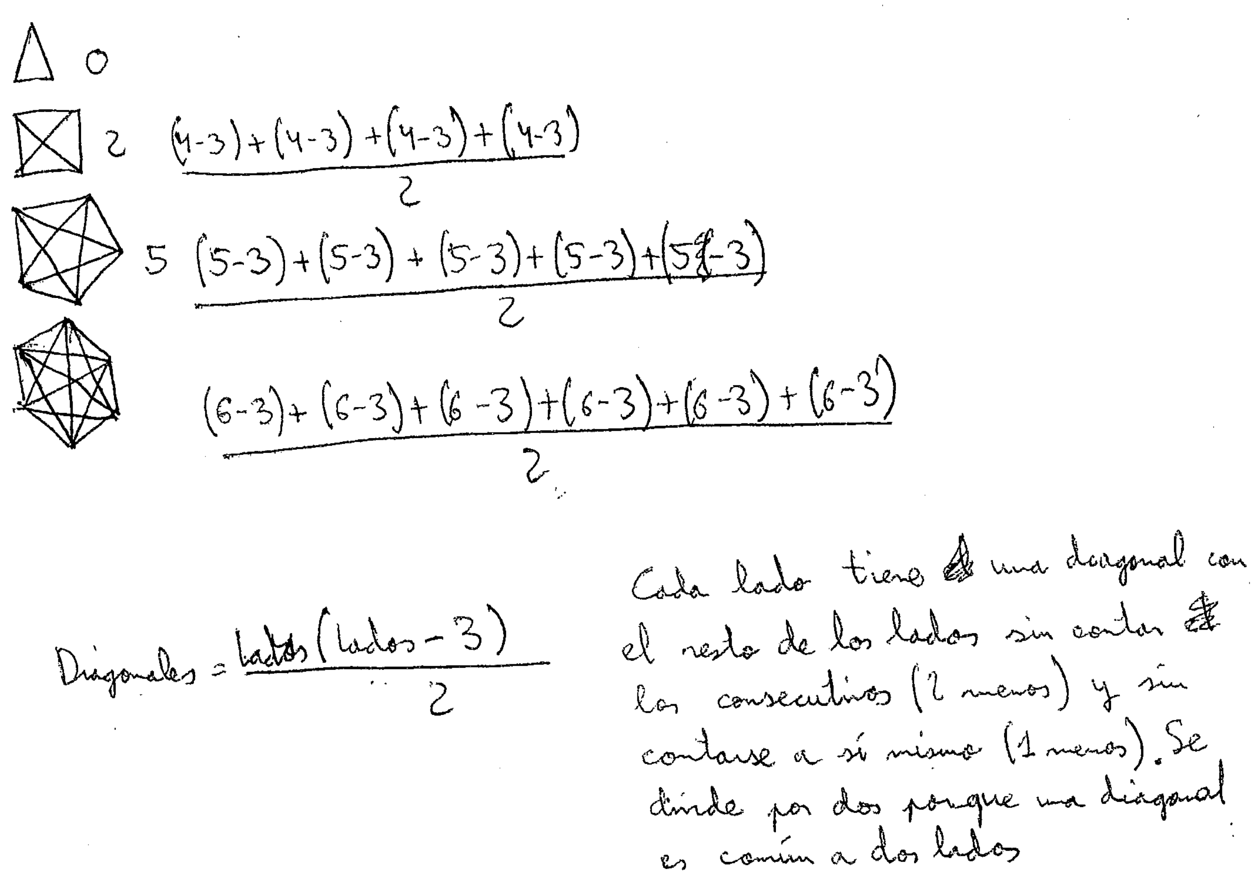

Figura 4. Calcular el número de diagonales de un polígono de n lados.

Para completar esta introducción a los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele, presentamos un ejemplo que muestra el trabajo de una pareja de estudiantes en dos momentos de un curso de trigonometría diseñado de acuerdo con el modelo de Van Hiele (Fiallo, 2001; Gutiérrez y Fiallo, 2009). Se puede observar el progreso en el nivel de razonamiento de los estudiantes desde el primer problema al segundo, señal de que el curso cumplía uno de sus objetivos, que los estudiantes aprendieran a hacer razonamientos de nivel 3 y demostraciones deductivas.

Actividad 1.2.1.

¿Qué sucede con los valores de las razones cuando varía el ángulo Â entre 0º y 90º?

Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado.

Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

Explica ***por qué*** *es verdadera tu conjetura.*

Los estudiantes disponían de un ordenador con un programa de geometría dinámica (PGD) y un archivo con la construcción que se ve en la *Figura 5*: Las semirrectas **m** y **n** pueden girar alrededor del punto **A**, modificando la amplitud de **Â** y las longitudes de **AB** y **BC** pero manteniendo constante la longitud de **AC.** El punto **C** se puede desplazar sobre **n**, modificando los lados de **ABC** pero no sus ángulos.

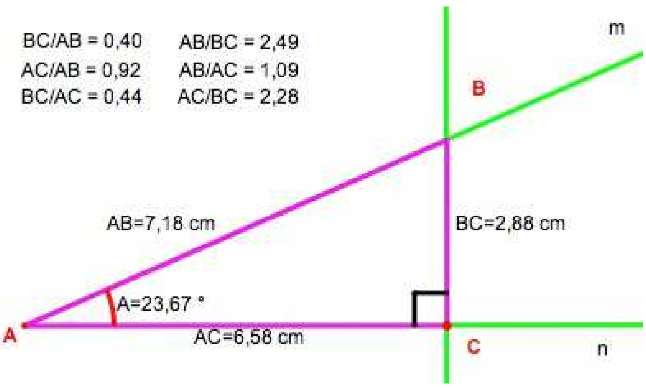

Figura 5. Archivo de geometría dinámica utilizado por los estudiantes.

El siguiente diálogo alude a interacciones de los dos estudiantes entre ellos y con el profesor para responder a la pregunta planteada.

Est. 1: [la otra estudiante está girando *m*] *Todos* [los lados] *cambian. No… Ese* [*AC*] *no cambia.*

....

Est. 1: *¿Cómo varían las razones? A medida que va agrandándose el ángulo, las razones… Por ejemplo, las razones de… de AC y BC* [señala *AC/BC*] *van disminuyendo, ¿Cuál otra va disminuyendo? ¿La otra también va disminuyendo?, sigue subiendo, sigue subiendo. Con calma, primero AB y BC.*

....

Est. 2: *Cuando sube, disminuye.*

Est. 1: *O sea, cuando aumenta el ángulo, se disminuye.*

Est. 1 y 2: *Listo, ahora BC, CA* [señalan la razón *BC*/A*C*]. *Súbela.*

Est. 2: *Esa sí aumenta.*

....

Est. 1: *Ajá… Ahora toca sacar… Toca decir por qué, entonces sería… Supongamos...*

Est. 2: *Poner, por ejemplo, los ángulos…*

Est. 1: *Poner BC… ¿Cuál es la hipotenusa?, poner AB y… AB… no se por qué. ¿Ponemos solamente que unas aumentan y otras disminuyen?*

Est. 1 y 2: *O sea que a medida que el ángulo aumenta, las razones… bueno ahí las nombramos, AB, BC* [se refieren a *AB*/*BC*]… *CA*, *AB* [*CA*/*AB*] y *CA*, *BC* [*CA*/*BC*] *disminuyen.*

....

Est. 1 y 2: *A pesar de que el lado AC no varía, las razones al estar compuestas de dos lados siempre van a variar. Las razones que aumentan son: BC/CA, AB/CA, BC/AB. Las razones que disminuyen al aumentar el ángulo A son: CA/BC, AB/BC, CA/AB.*

- Las estudiantes han observado, una tras otra, cómo varían las seis razones entre pares de lados del triángulo al aumentar el valor de $\hat{A}$ y han anotado si sus valores aumentan o disminuyen.
- Saben que, a continuación, tienen que dar por escrito una justificación de sus afirmaciones, pero no se les ocurre nada.
- Finalmente, después de discutir un rato, acuerdan escribir una justificación que es muy deficiente, porque, realmente, dan como argumento que, en la pantalla, se ve cómo varía cada razón cuando gira la semirrecta m.

Nos encontramos ante un caso típico del razonamiento avanzado de nivel 2, pues las estudiantes han realizado ejemplos de manera cuidadosa y sistemática (en este caso los arrastres de m mientras observaban cada una de las razones), han identificado una regularidad en el conjunto de ejemplos observados (la variación de esa razón) y han formulado una afirmación general inducida a partir de los ejemplos.

Para los estudiantes que razonan en el nivel 2, los ejemplos tienen tal poder de convicción (en especial cuando se trata de manipulaciones con un PGD) que no necesitan más justificaciones y, por eso, es difícil que sientan la necesidad de formular una justificación abstracta y que se les ocurra cómo hacerla.

La programación cuidadosa de la enseñanza permitió a los estudiantes ir ganando experiencia en diferentes formas de razonamiento y progresar hacia el nivel 3. El mismo grupo de estudiantes, varias clases después, se enfrentó a esta actividad:

Actividad 2.6.1.

Busca relaciones entre los valores de las razones trigonométricas para los ángulos A, A–90, 90–A.
Demuéstralas utilizando propiedades matemáticas.

Los estudiantes abrieron un archivo con la construcción que se muestra en la *Figura 6.*

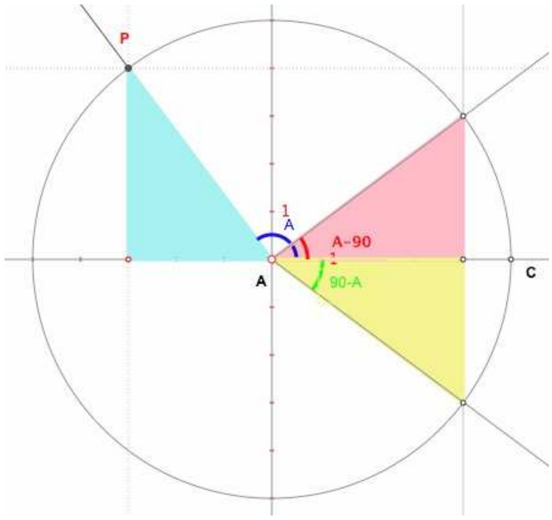

Figura 6. Archivo de geometría dinámica usado por los estudiantes.

Prof.: *¿Qué relaciones encontrasteis?*

Est. 1: *sen(A) = –cos(A–90).*

Prof.: *¿Estáis seguras?*

....

Est. 1: *¿Cuánto es coseno de –30?*

Est. 2: *Lo mismo que coseno de 30.*

Prof.: *¿Por qué?*

Est. 2: *Porque coseno se relaciona con x. Entonces en el primero y el cuarto* [cuadrantes] *son iguales.*

Est. 1: *¿Entonces, cuánto da coseno de –30?*

Prof.: *Eso da √3/2, y seno de 60 es √3/2.*

Est. 1: *Que la razón de seno de A es igual a la razón de coseno de 90–A y coseno de A–90.* [Escriben en la hoja de trabajo: sen(A) = cos(A–90)]

....

Prof.: *¿Cómo la demostráis?*

Est. 1: *¿Ésta la podemos dejar así? Ésta ya está demostrada* [se refiere a la identidad sen(A) = cos(90–A)]

....

Est. 1: *¿Entonces podemos decir simplemente que es por que, en el caso del coseno, el ángulo con signo positivo o negativo da el mismo valor de la razón coseno?* [se refiere a cos(90–A) = cos(A–90)]

....

Est. 1 y 2: [Escriben en la hoja de trabajo] *cos(90–A) = cos(A–90)* ⇒
⇒ *sen(A) = cos(A–90) (Propiedad transitiva)*

Prof.: *Esa sería la demostración, esa sería una forma de demostrar, como ya aceptamos que hay relaciones verdaderas, entonces por la propiedad transitiva, si a es igual a b…*

Est. 1: *Como ésta* [señala sen(A)] *es igual a ésta* [señala cos(90–A)] *y ésta* [señala cos(90–A)] *es igual a ésta* [señala cos(A–90)]. *Entonces, ésta* [señala sen(A)] *es igual a ésta* [señala cos(A–90)].

- Ahora las estudiantes tenían una figura dinámica en la pantalla del ordenador pero no la manipularon, sino que la utilizaron para identificar los signos del coseno en cada cuadrante.
- Esta figura había perdido el carácter de ejemplo específico (con valores numéricos concretos) y había pasado a ser un diagrama que les permitía visualizar las relaciones que buscaban.
- En su conversación se ve que la conjetura que elaboraron ya no procedía de la generalización a partir de ejemplos particulares, pues el ejemplo de cos(–30) y sen(60) surgió después de que hubieran enunciado una conjetura, porque las estudiantes buscaban verificarla.
- Además, cuando empezaron a organizar la demostración, utilizaron identidades que ya se habían estudiado antes en la clase.

Nos encontramos ante un caso típico de razonamiento de nivel 3, pues los estudiantes han desarrollado una demostración deductiva basada en propiedades generales y en una identidad que había sido demostrada en una actividad anterior. El papel del profesor es fundamental para guiar a los estudiantes a que aprendan a elaborar argumentos deductivos. En este caso se ve cómo, al final del diálogo, el profesor validó la demostración de las estudiantes y les explicó que la forma correcta de demostrar es basarse en propiedades ya aceptadas como verdaderas.

Para terminar, sólo nos queda reafirmar nuestro convencimiento de que los profesores de matemáticas deben adoptar algo del espíritu del trabajo forense, pues es necesario que investiguen y descubran pistas sobre cómo razonan sus alumnos cuando resuelven problemas para, con esas pistas adecuadamente organizadas con ayuda de los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele, llegar a conclusiones válidas sobre qué son o no capaces de hacer sus alumnos y qué es lo más adecuado para mejorar su formación matemática.

■

BIBLIOGRAFÍA

1. FIALLO, Jorge. *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica* (tesis doctoral no publicada). Universidad de Valencia, Valencia, 2011.

2. GUTIÉRREZ, Ángel y FIALLO, Jorge. Enseñanza de la trigonometría con ayuda de SGD. En Tomás Recio (Ed.), *Geometría dinámica* (pp. 147-171). Colección Lemniscata nº 7. Anaya, Madrid, 2009.

3. JAIME, Adela y GUTIÉRREZ, Ángel. Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. En Salvador Llinares y María Victoria Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Alfar, Sevilla, 1990. Documento accesible en:
<www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf>.

4. Van HIELE, Pierre Marie. *Structure and insight. A theory of mathematics education.* Academic Press, Londres, 1986.