Citar como: Jaime, A.; Gutiérrez, A. (2016): El razonamiento geométrico según el modelo de Van Hiele. En Carrillo, J. y otros (Eds.), *Didáctica de las matemáticas para maestros de Educación Primaria* (pp. 173-195). Madrid: Paraninfo.

# 7. El Razonamiento Geométrico Según el Modelo de Van Hiele

Adela Jaime y Angel Gutiérrez. Dpto. de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia (Valencia, España).

Las formas de hacer matemáticas, es decir de entender, describir, clasificar, definir y demostrar propiedades u objetos matemáticos, varían a lo largo del periodo escolar (y posteriormente), lo cual debe tener consecuencias en los tipos de tareas a proponer a los estudiantes y en los estilos de respuestas de éstos. El conocimiento por parte del profesor de las características del razonamiento matemático típico de cada momento del período de escolarización posibilita que el aprendizaje sea fructífero. En lo referente al aprendizaje de la geometría, el matrimonio de profesores holandeses Pierre Marie van Hiele y Dina van Hiele-Geldof elaboró un modelo que muestra las características de las diferentes formas de razonamiento habituales en las clases de geometría y, además, da pautas para organizar la enseñanza de la geometría de manera que se ayude a los estudiantes a mejorar sus formas de razonamiento. Este modelo viene mostrando, desde hace más de 50 años, su utilidad para analizar las formas de razonamiento de los estudiantes y para ayudar a los profesores a organizar mejor la enseñanza (NCTM, 2003).

Cuando las tareas a realizar por los estudiantes requieren un razonamiento geométrico más complejo que el que pueden desarrollar, estos no serán capaces de resolverlas correctamente, lo cual suele llevar a profesor y estudiantes al desaliento y la desmotivación. Pierre M. Van Hiele recuerda su propia experiencia como profesor:

> Cuando empecé mi carrera como profesor de matemáticas, muy pronto me di cuenta de que era una profesión difícil. Había partes de la asignatura que yo podía explicar y explicar, y aún así los alumnos no entendían. Podía ver que ellos lo intentaban realmente, pero no tenían éxito. Especialmente al comienzo de la geometría, cuando había que demostrar cosas muy simples, podía ver que ellos daban el máximo de sí mismos, pero la materia parecía ser demasiado difícil. ... De repente, parecía que comprendían la materia en cuestión: Podían hablar de ella con bastante sentido. Pero a menudo decían: “No es tan difícil, pero ¿por qué

> nos lo explicó usted de forma tan complicada?" En los años siguientes cambié mi explicación muchas veces, pero las dificultades se mantenían. Parecía como si siempre estuviera hablando en un idioma diferente. Y considerando esta idea descubrí la solución, los diferentes niveles del pensamiento. (Van Hiele, 1986: 39)

Lo que Van Hiele observó en sus clases es que hay distintas formas de razonar al resolver problemas de geometría, unas más simples y otras más sofisticadas, y que los estudiantes pueden mejorar su forma de razonamiento geométrico si sus profesores les proporcionan oportunidades para ello, que les permitan adquirir la experiencia suficiente para aprender una nueva forma de razonamiento geométrico. A partir de sus observaciones, Van Hiele definió un *modelo de razonamiento geométrico* que lleva su nombre. Este modelo está integrado por dos componentes: las diferentes formas de razonamiento, que conocemos como los *niveles de razonamiento* en geometría, y una propuesta metodológica a los profesores, conocida como las *fases de aprendizaje*, que les da indicaciones sobre cómo organizar los contenidos, actividades, problemas, etc. del tema en el que va a trabajar. Este capítulo lo dedicamos a presentar las ideas fundamentales del modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele.

## 7.1. Los niveles de Van Hiele de razonamiento en geometría

Un profesor que observe a estudiantes con distintas formaciones matemáticas puede identificar diferentes formas de razonar, que pueden ordenarse según la calidad matemática de cada una. El modelo de Van Hiele describe cinco *niveles de razonamiento* en geometría. El primer nivel lo encontramos en Educación Infantil y primeros cursos de Primaria y el quinto nivel sólo en algunos matemáticos expertos. A continuación describimos las características principales de los cinco niveles de razonamiento, con ejemplos de cada uno, si bien no estudiaremos el quinto nivel porque es muy superior al típico de los estudiantes de la enseñanza obligatoria. Se pueden encontrar descripciones más detalladas en diversas publicaciones, por ejemplo en Jaime y Gutiérrez (1990). Es conveniente remarcar que la etiqueta que se asigna a cada nivel de razonamiento (reconocimiento, análisis, etc.) alude a una de sus características, pero que esta característica no es ni la única ni necesariamente la más importante.

### *7.1.1. Nivel 1 (de reconocimiento)*

El tipo de razonamiento que corresponde a este nivel es fundamentalmente visual y táctil, basado en la experiencia física. Las principales características del razonamiento de nivel 1 son:

- Se tiene una **percepción global** de las figuras geométricas, por lo que no se identifican explícitamente sus partes o elementos matemáticos.
- Las descripciones o comparaciones de figuras u objetos se basan en **propiedades físicas**, con frecuencia no relevantes geométricamente, como posición, tamaño, etc.
- Se consideran los objetos geométricos de manera **individual**, es decir, lo observado en una figura no se suele generalizar a otras figuras diferentes de la misma familia.
- Al describir objetos geométricos se utilizan con frecuencia referencias a objetos físicos, como "*se parece a...*", "*tiene forma de...*", etc.

Veamos ejemplos de tareas de clasificación de figuras básicas del plano. El primero (Figura 7.1a) es la respuesta de un niño de 2º de Primaria al que habíamos pedido pintar de rojo (negro en la figura) los cuadrados, de azul (gris oscuro) los triángulos, de verde (gris claro) los círculos y de amarillo (gris muy claro) los rectángulos. Al preguntarle por qué no había coloreado el cuadrado de la esquina inferior derecha, dijo: *Como estaba así puesto...* Y, al preguntarle por qué había coloreado la figura , dijo: *Porque, se parece tanto a un triángulo, que lo pinté. Tiene su forma, con tres puntas.*

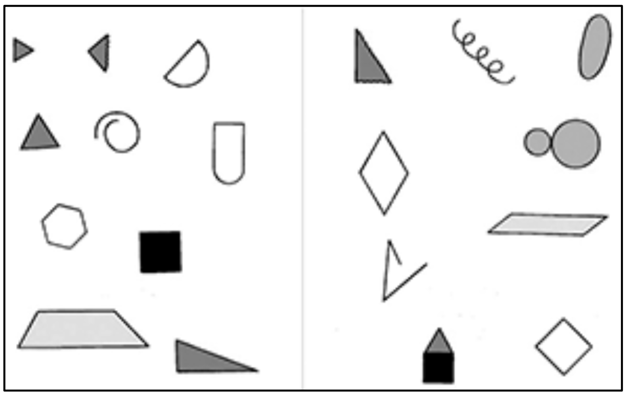
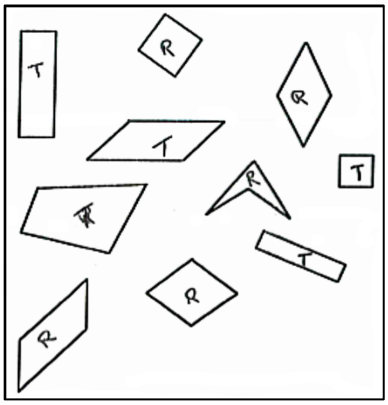
a)  b) 

Figura 7.1. Respuestas de estudiantes: a) de 2º de Primaria y b) de ESO.

El segundo ejemplo (Figura 7.1b) corresponde a un estudiante de ESO. Debía marcar con una *R* los rombos y con una *T* los rectángulos. Después le preguntábamos por qué las figuras que había seleccionado son, respectivamente, rombos o rectángulos, a lo cual respondió: *Porque los rombos tienen una forma diferente a la de los rectángulos.*

<u>Actividad 7.1</u>. *Hay aspectos comunes a ambas respuestas. ¿Puedes decir cuáles? ¿En qué basan los estudiantes su clasificación? Piensa un momento sobre ello y luego continúa leyendo.*

A pesar de la diferencia de edad, ambos estudiantes juzgaron las figuras por su aspecto visual global, sin identificar propiedades matemáticas que las caractericen.

Otro ejemplo es una tarea de identificar en un conjunto de figuras las que son rectángulos o cuadrados. Una justificación típica de estudiantes de los primeros cursos de Primaria es que una figura es un rectángulo "*porque se parece a una puerta.*" Asimismo, ante un cuadrado colocado en la posición de la Figura 7.2, muchos estudiantes lo identifican como rombo y dicen que "*no es un cuadrado porque está doblado*" o *"si lo giramos sí es un cuadrado."*

Todas las repuestas anteriores son de nivel 1 porque se basan en una percepción global de las figuras, con predominio de características visuales o físicas llamativas y del parecido a objetos reales o a una imagen, prototípica en la mayoría de los casos, que se han formado.

En ocasiones, podemos encontrar estudiantes que han aprendido términos matemáticos y los utilizan al responder al profesor para dar una sensación de que comprenden, pero el conjunto de su verbalización muestra que utilizan esos términos de manera inadecuada y que, realmente, no les están dado significado geométrico. Este comportamiento es más frecuente en los últimos cursos de Primaria y en niveles educativos superiores.

### *7.1.2. Nivel 2 (de análisis)*

<u>Actividad 7.2</u>.*Considera las siguientes definiciones:*

*Cuadrado: cuadrilátero con los cuatro lados iguales y los cuatro ángulos rectos.*

*Rombo: cuadrilátero con los cuatro lados iguales.*

*Rectángulo: cuadrilátero con los cuatro ángulos rectos.*

*Di si el polígono que ves debajo (Figura 7.2) es un cuadrado, un rombo, un rectángulo o ninguna de esas figuras. Si piensas que puede ser de varios tipos, escribe todos los que correspondan. Usa las definiciones para justificar tu elección.*

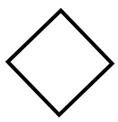
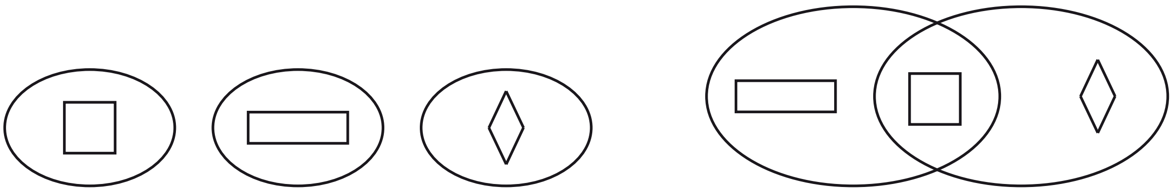


Figura 7.2. Identificar de qué tipo(s) es este cuadrilátero.

Una respuesta de estudiantes de Primaria podría ser: *"Es un cuadrado porque tiene los cuatro lados iguales y los cuatro ángulos rectos. No es un rombo porque no tiene los ángulos iguales dos a dos. No es un rectángulo porque no tiene los lados iguales dos a dos".* En el nivel 2, los estudiantes ya emplean propiedades matemáticas en sus razonamientos para realizar tareas o resolver problemas. En esta actividad, los estudiantes que razonan en el nivel 2 utilizan propiedades matemáticas para justificar su clasificación del polígono dado.

Para justificar la clasificación del polígono de esta manera, se han añadido condiciones que no están en las definiciones dadas (Figura 7.3.a), para mantener la idea de que rectángulos, cuadrados y rombos son familias disjuntas. Pero, según las definiciones dadas en el ejercicio, los cuadrados son rectángulos y rombos (Figura 7.3b) porque cumplen las definiciones de ambos cuadriláteros. Los estudiantes con nivel 2 de razonamiento pueden manejar clasificaciones simples, pero tienen dificultades con las clasificaciones basadas en definiciones complejas, como éstas.



a. Clasificación de los estudiantes b. Clasificación de las definiciones

Figura 7.3. Dos formas de clasificar cuadrados, rectángulos y rombos.

En los libros de texto de Primaria es posible encontrar definiciones diferentes de algunas figuras geométricas (en el capítulo 8 se presentan varias definiciones de polígono y de altura de un triángulo), por lo que es frecuente que los estudiantes tengan que cambiar de definición de un curso al siguiente. Otro rasgo del razonamiento del nivel 2 es la resistencia a este cambio: ante una definición diferente de la que han aprendido, los estudiantes rechazan la nueva y siguen utilizando la suya.

<u>Actividad 7.3.</u>*¿Cuánto mide la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero? Demuestra tu respuesta.*

Si se plantea este problema en Primaria como actividad de descubrimiento, parte de los estudiantes dibujan un cuadrado o un rectángulo y, midiendo los ángulos o recordando lo aprendido, escriben respuestas parecidas a esta: *"90º + 90º + 90º + 90º = 360º. Vemos que suman 360º. "*Otros estudiantes dibujan varios cuadriláteros diferentes (Figura 7.4), miden y suman los ángulos de cada uno y escriben respuestas similares a esta: *"He cogido un rectángulo y luego he dibujado otro cuadrilátero y he visto que también suman 360º."*

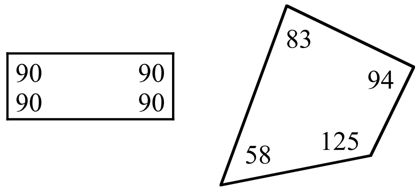


Figura 7.4. Suma de los ángulos de un cuadrilátero.

Estas demostraciones se basan en la medición de los ángulos de algunos cuadriláteros concretos, incluso sólo de uno, seguida de un generalización ya que los estudiantes se convencen, sin necesidad de más argumentos, de que esta propiedad es cierta para todos los cuadriláteros.

Los ejemplos mostrados en este apartado corresponden al nivel 2 de razonamiento, cuyas principales características son:

- Se reconoce de forma explícita que las figuras y cuerpos geométricos están formados por partes, propiedades y elementos matemáticos, pero no se establecen relaciones matemáticas entre ellos.
- La definición de un objeto geométrico consiste en una lista con muchas de las propiedades aprendidas.
- Es un razonamiento empírico, basado en la **manipulación de ejemplos** concretos. Las propiedades matemáticas se pueden descubrir mediante ejemplos y la demostración de dichas propiedades consiste en verificarlas en algunos ejemplos particulares.
- Se tiene capacidad para generalizar las propiedades observadas en unas pocas figuras u objetos a todos los de la misma familia.
- Sólo se pueden comprender las estructuras lógicas sencillas, pues hay dificultad para manejar correctamente partículas lógicas como *y*, *o*, *a veces*, *por lo menos/al menos*, *no*, etc.

Podemos interpretar el nivel 2 de razonamiento como el comienzo del razonamiento matemático. Durante algún tiempo los estudiantes mezclarán razonamientos de los niveles 1 y 2 pero, con la práctica y la ayuda de los profesores, abandonarán poco a poco los argumentos visuales hasta llegar a usar sólo las propiedades matemáticas.

### *7.1.3. Nivel 3 (de clasificación)*

Un estudiante de nivel 3 podría contestar de la siguiente forma a la actividad 7.2: *"Según las definiciones que nos han dado, la figura corresponde a la definición de cuadrado, ya que tiene*

*4 lados iguales y 4 ángulos rectos; también a la definición de rectángulo, ya que tiene 4 ángulos rectos; y también a la definición de rombo porque tiene 4 lados iguales."*

A diferencia de los estudiantes del nivel 2, los que razonan en el nivel 3 sí utilizan las propiedades mencionadas en las definiciones que se proporcionan, para relacionar las de una definición con las de las otras y concluir que los cuadrados también se identifican como rombos y como rectángulos (Figura 7.3b), aunque ello no se corresponda con la clasificación que habían aprendido con anterioridad.

<u>Actividad 7.4.</u> *Sabes que los ángulos interiores de un triángulo suman 180º. ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un polígono convexo cualquiera (cuadrilátero, pentágono, hexágono, etc. convexo)? Completar la tabla te puede ayudar. Demuestra tu respuesta.*

Un estudiante de nivel 2 resolverá el ejercicio completando la Tabla 7.1.

**Tabla 7.1. Suma de los ángulos de un polígono**

| *Nº de lados del polígono* | *Nº de diagonales desde un vértice* | *Nº de triángulos* | *Suma de los ángulos* |
|---|---|---|---|
| *3* | *0* | *1* | *180º* |
| *4* | *1* | *2* | *2x180 = 360º* |
| *5* | *2* | *3* | *3x180 = 540º* |
| *6* | *3* | *4* | *4x180 = 720º* |
| *20* | *17* | *18* | *18x180 = 3240º* |
| *100* | *97* | *98* | *98x180 = 17640º* |

Un estudiante del nivel 3, además, verbalizará la relación general, válida para cualquier polígono convexo: *"La cantidad de diagonales que salen de un vértice es 3 menos que el número de lados. Esto es porque desde cada vértice se pueden trazar diagonales a todos los vértices del polígono menos a sí mismo y a los dos consecutivos. Se forma un triángulo más que diagonales y por eso salen 2 triángulos menos que lados."*

En esta respuesta se relacionan diversos elementos y propiedades de los polígonos para demostrar que la fórmula obtenida a partir de los ejemplos es cierta. A diferencia de los estudiantes del nivel 2, los del nivel 3 utilizan los ejemplos como un apoyo para descubrir o recordar propiedades o definiciones pertinentes y, después, dar el salto a la deducción. La expresión algebraica 180($n$-2), siendo $n$ el número de lados del polígono, la podrán escribir los estudiantes familiarizados con el uso de expresiones algebraicas de este tipo.

Los ejemplos mostrados en este apartado corresponden al nivel 3 de razonamiento, cuyas principales características son:

- Se reconoce que las partes, propiedades y elementos matemáticos que integran las figuras y cuerpos geométricos están ligados mediante relaciones matemáticas. Se realizan implicaciones lógicas simples en un contexto matemático abstracto.
- Se hacen clasificaciones lógicas de familias de objetos matemáticos, siendo estas clasificaciones inclusivas (e.g. Figura 7.3.b) o disjuntas (e.g. Figura 7.3.a), dependiendo de las definiciones usadas.
- Se usan correctamente las partículas lógicas habituales. Esto permite definir objetos geométricos correctamente mediante listas de propiedades necesarias y suficientes.
- Se pueden deducir propiedades de objetos geométricos mediante la manipulación de ejemplos y también de manera deductiva abstracta. La demostración de estas propiedades se hace mediante argumentos abstractos deductivos informales.
- Imposibilidad de realizar demostraciones formales de manera autónoma, pero se pueden entender sus pasos con la guía del profesor.

### *7.1.4. Nivel 4 (de deducción formal)*

El rasgo distintivo del cuarto nivel de razonamiento es que se trata del razonamiento típico de los matemáticos profesionales. Sus principales características son:

- Es un razonamiento deductivo formal. Se comprende la estructura axiomática de las matemáticas (términos no definidos, axiomas, definiciones, hipótesis, tesis, etc.).
- Se realizan demostraciones formales de manera autónoma, planteando un encadenamiento de implicaciones que constituye el proceso de demostración.
- Se comprende la posibilidad de que existan varias definiciones (equivalentes o no) de un mismo concepto.
- Se admite la existencia de distintas demostraciones de la misma propiedad (este aspecto enlaza con lo tratado en el capítulo 11).

### *7.1.5. Nivel 5 (de rigor)*

El quinto nivel de razonamiento se distingue por la capacidad para comprender que la geometría es un mundo basado en un conjunto de axiomas arbitrarios y que, con conjuntos diferentes de axiomas, se pueden crear mundos distintos. Los principales características de este nivel de razonamiento son:

- Se comprende la necesidad de un razonamiento formal riguroso que base las demostraciones en un determinado conjunto de axiomas.
- Se puede operar con sistemas axiomáticos diferentes, siendo capaz de realizar demostraciones formales en cada uno de ellos.
- Se pueden analizar y comparar geometrías basadas en distintos sistemas axiomáticos.

### *7.1.6. Síntesis de los niveles de razonamiento*

Después de habernos familiarizado con las características de cada nivel del modelo de Van Hiele, vamos a analizar los niveles desde un punto de vista transversal: cualquier actividad matemática que se realice incluye uno o más de los procesos de descripción (o reconocimiento), definición (uso y formulación de definiciones), identificación, clasificación y demostración. Es interesante comparar cómo es cada uno de estos procesos en los diferentes niveles de razonamiento; es decir, en qué se diferencia cada proceso de razonamiento cuando se utiliza en dos niveles de razonamiento distintos (Gutiérrez y Jaime, 1998). La Tabla 7.2 nos permite hacer este ejercicio al leerla en horizontal.

**Tabla 7.2. Los procesos de razonamiento matemático**

| *Procesos de razonamiento* | *Nivel 1* | *Nivel 2* | *Nivel 3* | *Nivel 4* |
|---|---|---|---|---|
| *Reconocimiento* | *Propiedades físicas* | *Propiedades matemáticas* | ----------- | ----------- |
| *Uso definiciones* | | *Se usan definiciones con estructura simple* | *Se usa cualquier definición* | *Se admiten definicio-nes equivalentes* |
| *Formulación de definiciones* | *Lista de propiedades físicas* | *Lista de propiedades matemáticas* | *Conjunto de propie-dades necesarias y suficientes* | *Se demuestra la equi-valencia de definiciones* |
| *Clasificación* | *Disjunta, basada en propiedades físicas* | *Disjunta, basada en propiedades matemáticas* | *Puede oscilar entre inclusiva y disjunta* | ----------- |
| *Demostración* | ----------- | *Verificación en ejemplos* | *Deductivas informales abstractas* | *Deductivas formales* |

## 7.2. Propiedades de los niveles de razonamiento

Además de la caracterización de cada nivel de razonamiento que hemos visto en el apartado anterior, es necesario que los profesores sean conscientes de algunas propiedades globales de los niveles de Van Hiele, que resumimos en los siguientes párrafos. En Jaime y Gutiérrez (1990) presentamos un análisis más detallado de estas propiedades y en Papademetri (2012) se realiza un análisis crítico de algunas de ellas.

- **Lenguaje específico**: Cada nivel de razonamiento tiene asociado un tipo de lenguaje. Esto se refleja en que dos personas que se expresen con razonamientos de diferentes niveles, con mucha frecuencia no podrán entenderse (Van Hiele, 86: 95). El problema radica en que los términos matemáticos suelen tener significados diferentes para personas que razonan en niveles diferentes. Por ejemplo, cuando un profesor de 5º de Primaria pide a sus alumnos que le digan propiedades de los prismas, espera respuestas del segundo nivel, que hagan referencia al número de caras y su forma, al paralelismo entre las bases, etc. Si un estudiante está en el primer nivel, dirá que un prisma es alargado y que es como un brick de zumo. El profesor no acepta como buena esta respuesta, pero el estudiante no entiende el motivo. La falta de entendimiento se debe a que el estudiante (nivel 1) y el profesor (nivel 2) entienden de formas diferentes qué es una "propiedad" de un prisma.
- **Secuencialidad**: No es posible alterar el orden de adquisición de los niveles, ni saltarse niveles: para alcanzar un nivel de razonamiento, es necesario haber adquirido antes todos los niveles inferiores. Por ejemplo, si queremos empezar a estudiar geometría esférica y las relaciones de perpendicularidad, paralelismo, etc. en este contexto, empezaremos manipulando una esfera y viendo qué objetos geométricos se pueden dibujar en su superficie. Es decir, empezaremos razonando en el primer nivel de Van Hiele. Sólo cuando hayamos adquirido suficiente conocimiento visual de la esfera y de los objetos que hay en ella, podremos iniciar el estudio de sus propiedades matemáticas, es decir el paso al razonamiento de nivel 2. Del mismo modo, podremos empezar a razonar en el nivel 3 cuando tengamos un conocimiento suficientemente completo de las propiedades de los polígonos, ángulos, etc. esféricos.
- **Continuidad**: El paso de un nivel de razonamiento al siguiente no es rápido, sino pausado, continuo y progresivo. Hay periodos de transición, durante los cuales los estudiantes muestran comportamientos de dos niveles consecutivos, generalmente dependiendo de la dificultad o complejidad de los problemas que tratan de abordar. Por ejemplo, un estudiante que esté empezando a razonar en el nivel 3 puede comenzar a resolver un problema de manera deductiva pero, si tiene dificultad para encontrar los

argumentos deductivos, pasará a explorar ejemplos y resolver el problema de manera experimental, es decir razonando en el nivel 2.

- **Localidad**: Una persona puede encontrarse en diferentes niveles de razonamiento al trabajar en distintas áreas de la geometría. Esto es más evidente cuando se empieza a trabajar en un tema nuevo que no se había estudiado antes.
- **Escalonamiento**: En cada nivel, los elementos que se manejan son los núcleos que constituyen el nivel anterior: en el nivel 2 se trabaja descomponiendo el todo (todo - nivel 1) en partes. En el nivel 3 se trabaja estableciendo las relaciones entre las partes (partes - nivel 2). En el nivel 4 se trabaja organizando las relaciones (relaciones - nivel 3) de manera formal, mediante las reglas de un sistema axiomático. En el nivel 5 (de rigor) se trabaja con las reglas de varios sistemas axiomáticos (reglas de un sistema axiomático - nivel 4) para comparar o relacionar las geometrías generadas.

Estas propiedades de los niveles de razonamiento constituyen una herramienta útil para analizar la actividad docente en las clases de geometría y para comprender mejor los motivos por los que los estudiantes resuelven los problemas de la manera como lo hacen.

### 7.3. Evaluación del nivel de razonamiento de los estudiantes

Una de las bases del modelo de Van Hiele, que lo diferencia de otras teorías como la de Piaget, es que el progreso del razonamiento matemático de los estudiantes no está vinculado a su edad, sino a la experiencia que haya adquirido en el uso de las habilidades propias de un determinado nivel de razonamiento. Es normal que el nivel de razonamiento de un estudiante progrese con el paso de los años de escolarización, pero esto es debido principalmente a la influencia de la instrucción recibida, no a su edad. Cualquier profesor de Primaria o de niveles educativos superiores sabe que, entre sus alumnos de un curso, hay algunos con un razonamiento más sofisticado que otros, es decir que no se debe pensar que los estudiantes de un determinado curso de Primaria estarán todos en un mismo nivel de razonamiento predeterminado. Por lo tanto, el profesor debe empezar las clases averiguando el nivel de razonamiento de sus alumnos.

Para evaluar el nivel de razonamiento de los estudiantes no hay ningún test estandarizado, sino que las preguntas a plantear dependen de los contenidos geométricos que se van a estudiar. La investigación didáctica muestra que la mejor manera de evaluar el nivel de razonamiento de los estudiantes es plantear problemas o actividades para basar la evaluación en sus resoluciones: la forma de resolver los problemas es lo que dará información sobre el nivel de cada estudiante, pues no son útiles las preguntas de elección múltiple ni tampoco las preguntas sobre definiciones, procedimientos algorítmicos, etc. en las que se pueda responder de memoria. Por otra parte, conviene utilizar problemas que puedan resolverse empleando diferentes niveles de razonamiento, ya que, como hemos visto en el apartado 7.1, estudiantes en diferentes niveles de razonamiento resolverán el mismo problema de formas diferentes.

Una vez el profesor ha realizado la evaluación del nivel de Van Hiele de sus alumnos, dispondrá de información para adecuar su forma de trabajar en clase a los niveles de razonamiento de sus alumnos. Por ejemplo, el lenguaje empleado por el profesor al explicar contenidos, formular problemas, o responder a las preguntas de sus alumnos podrá estar en concordancia con el nivel de los estudiantes.

Entrar a fondo en la problemática de la evaluación (cómo diseñar cuestionarios, cómo valorar respuestas, cómo asignar niveles de razonamiento) queda fuera del objetivo de este capítulo. En Gutiérrez y Jaime (1998) se puede ver un ejemplo de un cuestionario elaborado para identificar los niveles de Van Hiele de estudiantes desde 6º de Primaria hasta final del Bachillerato, junto a los criterios utilizados para evaluar las respuestas.

## 7.4. Los niveles de Van Hiele para los cuadriláteros

En este apartado vamos a llevar a la práctica las ideas teóricas que hemos presentado en las páginas anteriores. Al aplicar el modelo de Van Hiele para organizar la enseñanza de un tema concreto, primero hay que particularizar las descripciones generales de los niveles a ese tema y a los contenidos y los objetivos de aprendizaje programados. Hemos elegido el tema de los cuadriláteros porque es uno de los más importantes de la geometría de Primaria y vamos a desarrollarlo en los niveles 1 a 3 porque los niveles superiores al 3 están demasiado alejados del razonamiento típico de los alumnos de Primaria, incluso de los que tienen gran talento matemático. Aunque el razonamiento de nivel 3 no es propio de Primaria, los profesores de los últimos cursos sí deben tenerlo en cuenta ya que podrían tener algún alumno con altas capacidades matemáticas en condiciones de empezar a hacer razonamiento deductivo informal.

### *7.4.1. El nivel 1 en los cuadriláteros*

Las características generales del razonamiento de nivel 1 que presentamos en el apartado 7.1.1 se particularizan para los cuadriláteros de la siguiente manera:

- Se tiene una percepción global y visual de cuadrados, rectángulos, trapecios, etc. con predominio de atributos físicos. Son típicas expresiones como "*es alargado*", "*es puntiagudo*", "*tiene picos*", "*está torcido*", "*es como una puerta*"...
- La percepción individual de los cuadriláteros hace que los estudiantes no reconozcan algunas figuras como cuadriláteros de cierto tipo, debido a que la posición o la forma de esas figuras difieren demasiado de las que han visto anteriormente o de los ejemplos prototípicos (ver el capítulo 8). Así, algunos estudiantes no reconocen el cuadrado, el rectángulo y el rombo de la Figura 7.5a como pertenecientes a los respectivos tipos porque su posición no es la habitual. También es posible que no consideren el rectángulo de la Figura 7.5b como tal "*porque es demasiado fino*".

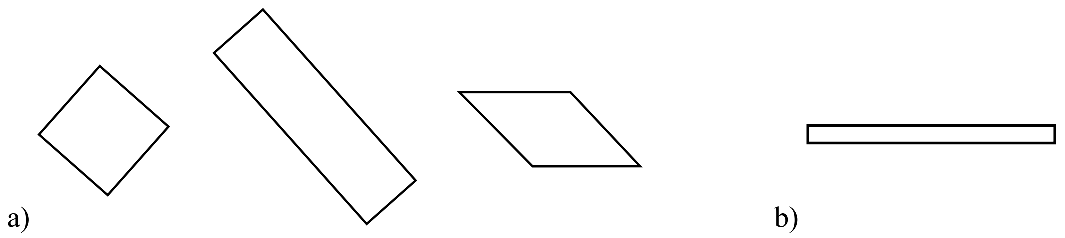


Figura 7.5. Cuadriláteros con formas o posiciones infrecuentes no se reconocen como tales.

- La forma de clasificar que se entiende es la disjunta, es decir, en conjuntos sin elementos comunes, por ejemplo cuadriláteros cóncavos y convexos; paralelogramos y no paralelogramos; cuadrados y rectángulos; etc. En general, cada tipo de cuadriláteros se identifica como una familia independiente de las demás (Figura 7.6).

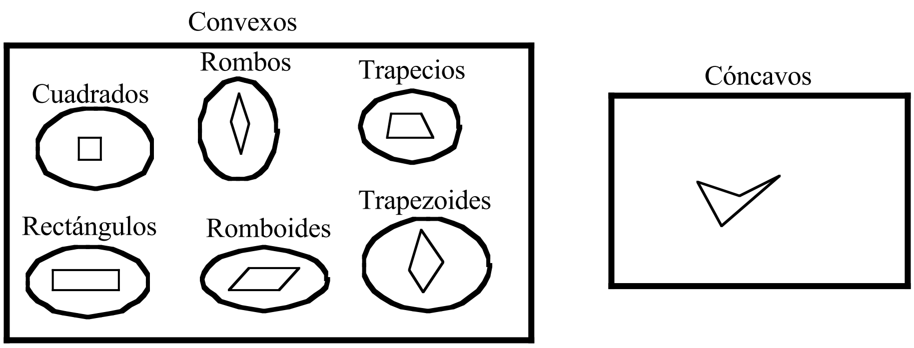


Figura 7.6. Clasificación de los cuadriláteros en el nivel 1.

- Se pueden reconocer en diversos contextos los diferentes tipos conocidos de cuadriláteros y se pueden dibujar, recortar o construir esos cuadriláteros.
- La demostración matemática no existe en este nivel, dado que no se trabaja con propiedades matemáticas. Las justificaciones son describir lo observado o manipulado.

No tiene sentido intentar demostrar matemáticamente, por ejemplo, la igualdad de las diagonales de un cuadrado. La justificación de que las diagonales miden lo mismo es que se ve en una figura de un cuadrado con sus diagonales.

### *7.4.2. El nivel 2 en los cuadriláteros*

Las características generales del razonamiento de nivel 2 que presentamos en el apartado 7.1.2 se particularizan de la siguiente forma para los cuadriláteros:

- Las definiciones de los tipos de cuadriláteros que no son recitadas de memoria son listas de propiedades matemáticas, sin entender cuántas ni cuáles son imprescindibles o redundantes. Por ejemplo, se puede definir el rectángulo como *"un polígono de 4 lados, paralelos dos a dos, con dos lados más largos que los otros dos y los cuatro ángulos rectos"* (tiene propiedades redundantes), o también *"cuadrilátero con los lados paralelos dos a dos y dos lados más largos que los otros dos"* (propiedades redundantes y falta especificar que los ángulos son rectos).
- No se relacionan todas las familias de cuadriláteros, sino que algunas de ellas se siguen percibiendo como clases disjuntas, en especial las familias de cuadrados, rectángulos, rombos y romboides. Generalmente usan la clasificación en familias disjuntas de cuadrados y rectángulos, cuadrados y rombos, etc., a veces incluyendo propiedades que no se mencionan ni se desprenden de las definiciones dadas. Sin embargo, sí asumen sin dificultad que todas estas familias son paralelogramos.
- Las demostraciones son, en general, comprobaciones en uno o pocos casos seguidas de la generalización cuando los estudiantes están convencidos de que la propiedad es cierta. En el apartado 7.1.2 hemos mostrado una demostración de la suma de los ángulos de un cuadrilátero: Después de haber medido varios cuadriláteros, los estudiantes quedan convencidos de que los ángulos siempre sumarán 360º y enuncian este resultado como propiedad general. Del mismo modo, para demostrar que las diagonales del rectángulo tienen la misma longitud, los estudiantes miden con la regla las diagonales de uno o dos rectángulos y dan por cierta la propiedad.

### *7.4.3. El nivel 3 en los cuadriláteros*

Las características generales del razonamiento de nivel 3 que presentamos en el apartado 7.1.3 se particularizan de la siguiente forma para los cuadriláteros:

- La facultad de establecer relaciones permite deducir unas propiedades a partir de otras y dar demostraciones abstractas deductivas informales. Por ejemplo, se justifica que los lados opuestos de un rectángulo son paralelos porque ambos lados son perpendiculares a la base (Figura 7.7).


Figura 7.7. Demostración de que los lados opuestos de un rectángulo son paralelos.

- Al entender y utilizar relaciones entre propiedades, se emplean definiciones matemáticas, es decir conjuntos mínimos de condiciones necesarias y suficientes, y se entiende que no es necesario, ni mejora la definición, añadir otras propiedades.
- Se clasifican las familias de cuadriláteros basándose en sus propiedades matemáticas y se pueden establecer relaciones de inclusión de familias cuando las definiciones utilizadas lo requieren. Por ejemplo, si la definición de rombo es "cuadrilátero con los cuatro lados iguales", se entiende que, como los cuadrados cumplen esta condición, todos los cuadrados son rombos, pero hay rombos que no son cuadrados. Algo similar ocurre si la definición de rectángulo es "cuadrilátero con los cuatro ángulos rectos". La Figura 7.8 muestra las propiedades de cada familia de cuadriláteros que rigen estas relaciones de inclusión, representadas gráficamente por el diagrama de la Figura 7.3b.

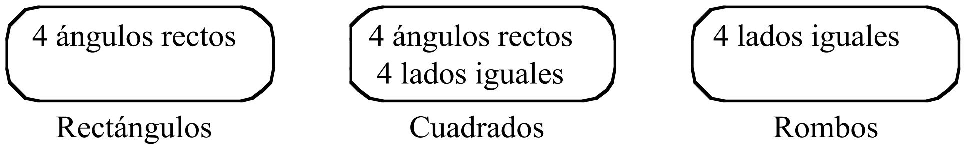



Figura 7.8. Propiedades de rectángulos, cuadrados y rombos.

- Al entender las relaciones de dependencia lógica, los estudiantes pueden realizar implicaciones de un paso y, realizar demostraciones cortas en las que sea necesario encadenar varias implicaciones.

<u>Actividad 7.5</u>. *Analiza la relación entre trapecios y paralelogramos a partir de las siguientes definiciones: "Paralelogramo es el cuadrilátero que tiene los lados opuestos paralelos". "Trapecio es el cuadrilátero que tiene al menos dos lados paralelos".*

*Actividad 7.6. Analiza la relación entre trapecios y paralelogramos a partir de las siguientes definiciones: "Paralelogramo es el cuadrilátero que tiene los lados opuestos paralelos". "Trapecio es el cuadrilátero que tiene sólo dos lados paralelos".*

Las claves para resolver estas dos actividades son, primero, entender que las dos definiciones de trapecio no son equivalentes, por lo que generan familias de polígonos diferentes, y, después, saber cómo influye en la clasificación de los paralelogramos dicha diferencia. La definición de trapecio de la actividad 7.5 dice que estos polígonos tienen al menos dos lados paralelos, mientras que la definición de la actividad 7.6 indica que los trapecios tienen sólo dos lados paralelos. Esto hace que, en el primer caso, los paralelogramos sean un caso particular de trapecio, pues cumplen las condiciones de esa definición de trapecio, mientras que, en el segundo caso, los paralelogramos no pueden ser trapecios.

Un estudiante que razone en el nivel 3 utiliza correctamente cualquiera de las dos definiciones de trapecio propuestas anteriormente, adaptándose a una definición u otra y estableciendo las relaciones entre trapecios y paralelogramos adecuadas en cada caso.

*Actividad 7.7. Resuelve el siguiente problema y escribe un análisis de tu resolución en términos del nivel de razonamiento de Van Hiele que has empleado:*

*"Dibuja dos segmentos que sean perpendiculares y se corten en sus puntos medios. Une secuencialmente los extremos de estos segmentos. ¿Qué tipo de cuadrilátero se forma? Demuestra tu respuesta."*

Si llamamos *AC* y *BD* a los segmentos del enunciado, se forma el cuadrilátero *ABCD*, que parece un rombo, cuyas diagonales son *AC* y *BD* (Figura 7.9). Para demostrar que *ABCD*, efectivamente, es un rombo, hay que demostrar que sus lados son iguales. Hay dos estilos de soluciones:

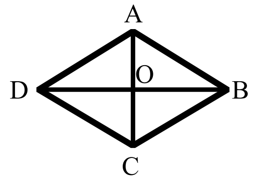



Figura 7.9.

a) Construir en un programa de geometría dinámica los segmentos *AC* y *BD* de forma que cumplan las condiciones del enunciado, crear el polígono *ABCD* y medir las longitudes de sus lados. Después, arrastrando los extremos de los segmentos, observamos cómo varían las longitudes de los lados del polígono. Si la construcción está bien hecha, se observa que, independientemente de cómo se arrastre, los cuatro lados de *ABCD* tienen siempre la misma longitud, por lo que se demuestra (experimentalmente) que es un rombo.

b) Si llamamos *O* al punto de corte de *AC* y *BD* (Figura 7.9), podemos demostrar que *AB* = *AD*, observando los triángulos *AOB* y *AOD*: Aplicando el criterio de congruencia lado-ángulo-lado, deducimos que estos triángulos son congruentes. Por lo tanto, *AB* = *AD*.

De la misma manera, se puede demostrar que *AB* =*BC* y que *AD*=*CD*. Por tanto, los cuatro lados del cuadrilátero *ABCD* son iguales, luego se trata de un rombo.

En relación con el razonamiento requerido para resolver este problema, la resolución *a)* es experimental, pues se basa en observar ejemplos: se construye un ejemplo de rombo y, al arrastrar, se van mostrando otros (muchos) ejemplos. La demostración consiste en mostrar que, en todos estos ejemplos, los cuatro lados del polígono *ABCD* miden lo mismo. Se trata de una demostración empírica propia del nivel 2 de razonamiento.

La resolución *b)* consiste en organizar una cadena de implicaciones para verificar la congruencia de triángulos. El razonamiento necesario para hacer la demostración correcta de forma autónoma es de inicio del nivel 4. Pero los estudiantes con razonamiento del nivel 3 que hayan estudiado los criterios de congruencia de triángulos pueden realizar la demostración usando algún ejemplo específico como guía y con ayuda del profesor.

*Actividad 7.8. Escribir listados de características de los niveles 1 a 3 de Van Hiele para los triángulos y para los polígonos regulares.*

## 7.5. Las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele

Además de describir cómo evoluciona el razonamiento matemático de los estudiantes, como profesores que eran, los esposos Van Hiele estaban interesados en desarrollar en sus cursos una metodología de enseñanza eficaz, que ayudara a los estudiantes a progresar en su nivel de razonamiento. Así, dieron unas directrices sobre cómo organizar la enseñanza de la geometría para fomentar dicho progreso, denominadas las *fases de aprendizaje* del modelo de Van Hiele. Son 5 fases, que organizan el trabajo de profesor y alumnos desde el comienzo hasta el final de cualquier tema de geometría. Estas fases son las mismas para todos los niveles de razonamiento de los estudiantes y para todos los temas de estudio. Lo que varía son los contenidos específicos y qué debe considerar el profesor como respuesta correcta o incorrecta.

- Fase 1, de información. Es la toma de contacto con el tema de estudio. El profesor obtiene información sobre los conocimientos y niveles de razonamiento de sus alumnos en el tema que van a empezar a estudiar. Los estudiantes reciben información sobre el nuevo campo de estudio, materiales, tipos de problemas, etc.

- Fase 2, de orientación dirigida. El profesor guía a los estudiantes para descubrir y aprender los contenidos básicos del tema que se está estudiando y la forma de razonar en el nivel en el que trabajarán. Las actividades planteadas deben tener esa finalidad y deben llevar a los estudiantes de forma directa a los resultados que el profesor quiere que entiendan y aprendan, incluyendo la ayuda del profesor cuando sea necesario.
- Fase 3, de explicitación. Los estudiantes deben explicar los resultados que han obtenido, intercambiar experiencias, discutir y comentar con el profesor y otros estudiantes sus resoluciones y conclusiones. Deben utilizar y afianzar el vocabulario propio del nivel y de los contenidos que estudian. No es una fase de aprendizaje de contenidos nuevos, sino de verbalización del trabajo hecho con anterioridad, de puesta en común y de perfeccionamiento de la forma de expresarse, todo lo cual origina un afianzamiento de la nueva red de conocimientos que se está formando.

  La tercera fase no debe estar fijada temporalmente entre la segunda y la cuarta, sino que debe estar siempre presente, superpuesta a las demás. El profesor debe proponer la verbalización y discusión en todas las actividades de las diferentes fases de aprendizaje.
- Fase 4, de orientación libre. El objetivo de esta fase es consolidar el aprendizaje realizado en las fases precedentes. Para ello, los estudiantes deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades diferentes de las anteriores y, probablemente, más complejas. Se plantearán problemas abiertos, que pueden tener una, ninguna o varias soluciones, que pueden resolverse de distintas formas.

  Los problemas de esta fase no pueden ser aplicaciones directas de fórmulas, datos memorizados o algoritmos conocidos, sino que han de servir para aprender nuevas relaciones o propiedades. Al contrario de la fase 2, ahora el profesor debe limitar al máximo su ayuda en la resolución de los problemas. Los estudiantes tienen que encontrar autónomamente la resolución a partir de lo aprendido previamente.
- Fase 5, de integración. El objetivo de esta fase es lograr que los estudiantes se formen una visión global de lo aprendido sobre el tema y que terminen de formar su nueva red de relaciones integrando estos nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que ya tenían. El profesor debe dirigir la realización de resúmenes o recopilaciones de la información que ayuden a los estudiantes a lograr

esta integración. Las actividades de esta fase no deben implicar la aparición de nuevos conocimientos, sino sólo la organización de los ya estudiados.

## 7.6. Las fases de aprendizaje en las simetrías del plano

En este apartado presentamos ejemplos de actividades para la enseñanza de las simetrías en los últimos cursos de Primaria, adecuadas para estudiantes de nivel 2 de razonamiento (típicos de dichos cursos) y organizadas según las fases de aprendizaje. Asumimos que los lectores conocen la definición de simetría axial y las propiedades de la composición de simetrías.

Antes de empezar a plantear actividades específicas, vamos a particularizar los niveles de Van Hiele para los objetivos de enseñanza y contenidos concretos de las simetrías del plano.

### *7.6.1. Los niveles de Van Hiele para las simetrías del plano*

Los comentarios del comienzo del apartado 7.4 son válidos también ahora, aplicados a la simetría. El objetivo es diseñar actividades para la enseñanza de las simetrías en los últimos cursos de Primaria. Estarán centradas en el nivel 2 de Van Hiele, por lo que necesitamos tener en cuenta los niveles 1 y 2 (y el nivel 3 si algún estudiante con talento matemático superior estuviera en condiciones de usarlo).

- Razonamiento de nivel 1 en las simetrías. Se caracteriza por:
  - La consideración global de las figuras que intervienen en los movimientos.
  - Reconocer que, al hacer simetrías, se conservan el tamaño y la forma de las figuras.
  - Reconocer la simetría en diseños gráficos (Figura 7.10) y hacer simetrías con material auxiliar, como espejos ordinarios o transparentes o plegado de papel (Figura 7.11).
  - Utilizar propiedades visuales para identificar simetrías, como que el eje de simetría "divide por la mitad" las figuras simétricas. Usar ejes de simetría con inclinaciones variadas respecto de la horizontal.
  - Emplear el vocabulario elemental de las simetrías: simetría, eje, imagen, etc.

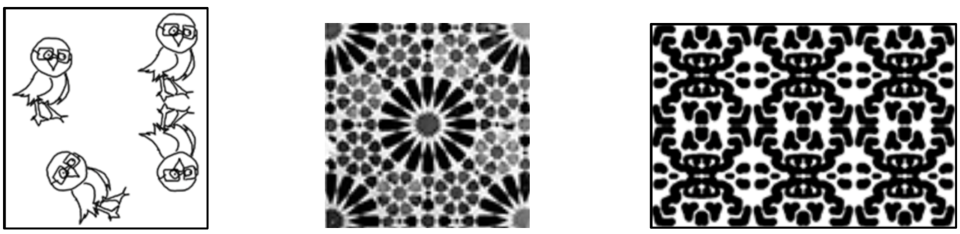


Figura 7.10. Identificación de simetrías.

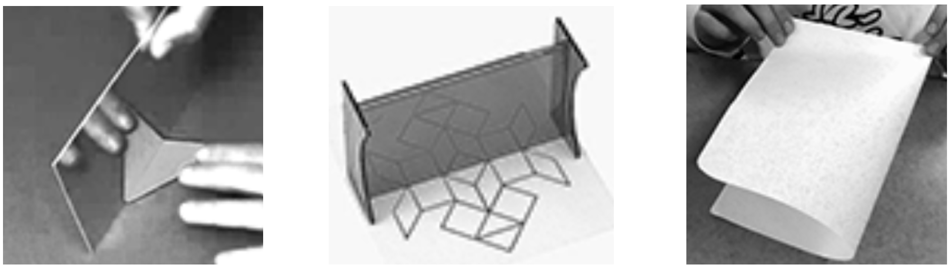


Figura 7.11. Realización de simetrías con material auxiliar.

- Razonamiento de nivel 2 en las simetrías. Se caracteriza por:
  - Identificación y uso explícito de los elementos de las simetrías (eje de simetría, pares de puntos o segmentos simétricos, etc.) y sus propiedades matemáticas básicas.
  - Reconocimiento del eje de simetría como el elemento que caracteriza la simetría. Utilizar ejes de simetría en posiciones variadas respecto de la horizontal.
  - Descubrir experimentalmente, verificando casos concretos, y utilizar las propiedades características de las simetrías, es decir (Figura 7.12) la equidistancia respecto del eje de simetría de cada punto y su simétrico y la perpendicularidad al eje del segmento con extremos en cada punto y su simétrico.

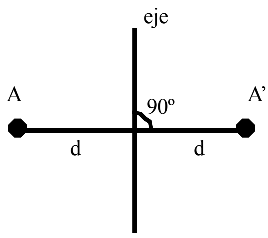



Figura 7.12. Características de las simetrías.

  - Verbalizar la definición de simetría y utilizarla en actividades de reconocimiento y de realización de simetrías.
  - Realizar sobre figuras concretas, manipulativamente o dibujando, composiciones de dos simetrías y, a continuación, identificar el movimiento resultante.
  - Emplear notación y vocabulario matemáticos asociados a las simetrías: A, A', $S_e$, perpendicular, mediatriz, etc.

### *7.6.2. Las fases de Van Hiele para la enseñanza de las simetrías del plano*

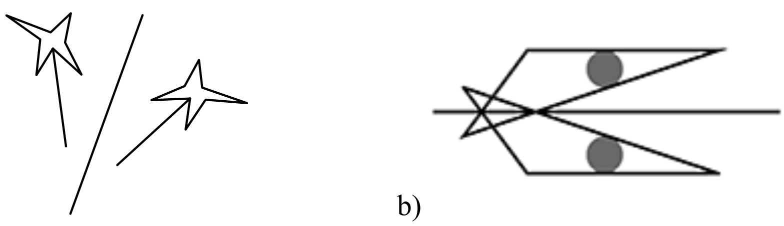
Una vez definidos los objetivos de aprendizaje, los contenidos matemáticos objeto de estudio y las características específicas de los niveles de razonamiento, estamos en condiciones de diseñar actividades. Se presentarán ejes de simetría con una diversidad de inclinaciones para evitar que su posición prototípica vertical (ver el capítulo 8) induzca en los estudiantes conocidos errores (Jaime y Gutiérrez, 1996). La tercera fase estará superpuesta a las demás aunque no la mencionemos, pues, siempre que haya ocasión, el profesor pedirá a los estudiantes que expresen sus ideas, verbalmente o por escrito. Resolver las actividades en parejas o pequeños grupos también es una ayuda interesante para ello. A continuación proponemos modelos de actividades para cada fase (extraídos de Jaime y Gutiérrez, 1996):

- <u>Fase 1, de información</u>. El profesor empieza mostrando a sus alumnos varias figuras (o pares de figuras) y les pide que identifiquen visualmente las que tienen simetrías. Esto debe llevar al grupo a discutir sobre qué es una simetría, qué son figuras simétricas y cómo se reconocen, o cómo se identifican figuras que parecen simétricas pero no lo son. Después, el profesor pide dibujar los ejes de simetría en las figuras simétricas.

  El profesor presenta a sus alumnos diversas figuras y les pide que dibujen sus simétricas respecto de los ejes dados. También les pide que identifiquen y tracen rectas o segmentos perpendiculares y mediatrices de segmentos.

  Un objetivo de esta fase es identificar los conocimientos previos de los estudiantes. Por ello, el profesor debe instruir a los alumnos que lo necesiten en el uso de instrumentos de dibujo y otras herramientas auxiliares. También debe identificar las carencias que pueda haber en relación con conceptos como perpendicular y mediatriz y preparar actividades complementarias para los estudiantes que necesiten corregirlas.
- <u>Fase 2, de orientación dirigida</u>. Se pueden proponer actividades como esta:

  (Se entrega una lámina con un par de figuras simétricas y su eje de simetría, Figura 7.13a) *Marca dos puntos simétricos y únelos mediante un segmento. Repítelo con otros puntos de la figura. ¿Qué observas sobre los segmentos y el eje? Repite la actividad en otras figuras* (Figura 7.13b).



a) b)

Figura 7.13. Unir mediante segmentos varios puntos y sus simétricos.

Si los dibujos están bien hechos (Figura 7.14), es muy fácil para los estudiantes de nivel 2 darse cuenta de varias propiedades: los segmentos que unen los puntos simétricos son paralelos entre sí y perpendiculares al eje de simetría. Estos segmentos pueden tener diferentes longitudes, pero el eje de simetría los divide a todos en dos partes iguales. Este conjunto de propiedades puede sintetizarse diciendo que el eje de simetría es la mediatriz de los segmentos que unen cada punto con su imagen.

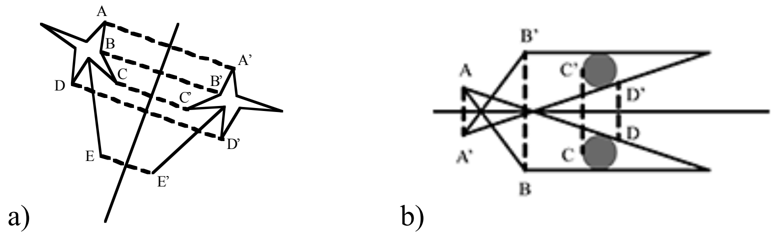



Figura 7.14. Propiedades de las simetrías.

La actividad es del nivel 2 porque consiste en experimentar con ejemplos para descubrir y generalizar propiedades matemáticas de las simetrías. Y es de la fase 2 porque tiene como objetivo el aprendizaje de propiedades básicas, necesarias para avanzar en el estudio de las simetrías. Además, el enunciado guía a los estudiantes de forma directa hacia esas propiedades.

- <u>Fase 4, de orientación libre</u>. Se pueden proponer actividades como esta:

  *a) En la hoja ves la figura F1 y dos rectas A y B* (Figura 7.15). *Dibuja la figura simétrica de F1 respecto del eje A. Llama F2 a la figura imagen. A continuación, dibuja la figura simétrica de F2 respecto del eje B. Llama F3 a la figura imagen.*

  *¿Qué relación ves entre la figura inicial F1 y la última imagen F3? Determina el movimiento que permite pasar directamente de F1 a F3. Haz mediciones para asegurarte de que es correcta tu respuesta.*

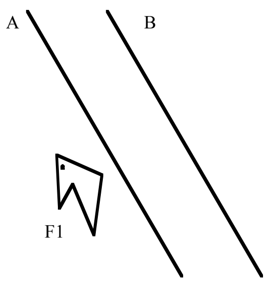



Figura 7.15.

  *b) En una hoja nueva, dibuja la figura simétrica de F1 respecto del eje B. Llama F4 a la figura imagen. A continuación, dibuja la figura simétrica de F4 respecto del eje A. Llama F5 a la figura imagen.*

*¿Qué relación ves entre la figura original F1 y la última imagen F5? Determina el movimiento que permite pasar directamente de F1 a F5. Haz mediciones para asegurarte de que es correcta tu respuesta.*

*c) Compara los resultados que has obtenido en los apartados a) y b). ¿Qué tienen en común? ¿En qué se diferencian? ¿A qué crees que se debe la diferencia?*

Una vez resuelta esta actividad, se puede plantear una actividad similar pero con ejes que se corten. Son actividades del nivel 2 porque se resuelven realizando simetrías con figuras y ejes específicos para descubrir y generalizar el resultado de la composición de dos simetrías.

Además, son actividades de la fase 4 porque presentan un contexto nuevo para los estudiantes (la composición de dos simetrías) con el objetivo de que profundicen en su conocimiento de este movimiento y que integren las simetrías con los otros movimientos que se estudian en Primaria, traslaciones y giros: el resultado de componer dos simetrías es una traslación cuando los ejes son paralelos (Figura 7.16) y es un giro cuando los ejes se cortan (ver el capítulo 10). Al comparar los resultados obtenidos en los apartados *a)* y *b)*, se observa que la composición de simetrías no es conmutativa, pues las traslaciones resultantes tienen sentido contrario (Figura 7.16a y b).

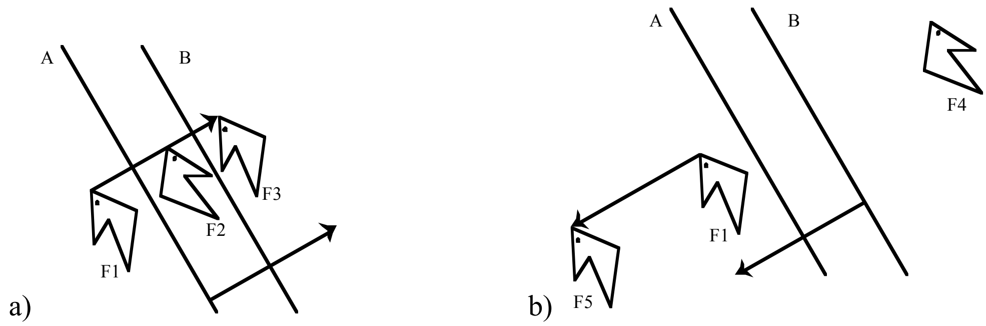



Figura 7.16. Soluciones de la actividad.

- <u>Fase 5, de integración</u>. Se pueden proponer actividades como esta:

  *a) Describe todos los métodos que conoces para obtener la imagen de una figura al aplicarle una simetría axial. Para cada método, detalla las propiedades matemáticas que has de tener en cuenta para obtener la figura simétrica.*

  *b) Di qué relación hay entre los segmentos que unen puntos simétricos. Haz un dibujo que lo muestre.*

  Esta actividad sintetiza parte de los objetivos de aprendizaje, y debe ir acompañada de otras actividades que resumen los resultados correspondientes a los otros objetivos. Este tipo de actividades corresponden a la fase 5 porque son el final de la unidad de enseñanza de las simetrías y no presentan nuevos conocimientos, sino que repasan y organizan lo aprendido por los estudiantes en las actividades de las fases anteriores. Son actividades del nivel 2 ya que las respuestas se apoyarán en la actividad experimental realizada y en la identificación de elementos y propiedades matemáticos.

*Actividad 7.9. Tomando como ejemplo el contenido del apartado 7.6, diseñar una secuencia de actividades para algún tema de geometría del currículo de Primaria que se imparta a lo largo de varios cursos.*

Como sugerencia, algunos temas adecuados pueden ser la enseñanza de propiedades de los polígonos, como las relativas a concavidad-convexidad o a las diagonales. Otros temas pueden ser propiedades de familias de sólidos, como los prismas, las pirámides o los polígonos regulares. En Corberán y otros (1994) pueden verse varias propuestas de aplicación de los niveles y las fases del modelo de Van Hiele a temas de Primaria y primeros cursos de Secundaria.

## 7.7. Conclusión

En las páginas anteriores hemos mostrado, de manera resumida, las principales características del Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele. En la actualidad este modelo es el marco de referencia más utilizado para el diseño curricular de los contenidos de geometría de los diferentes niveles educativos (véase, por ejemplo, la parte dedicada a los estándares de geometría en NCTM, 2003) y para la evaluación del avance del razonamiento matemático de los estudiantes. En los diferentes apartados hemos combinado partes de descripción teórica de los componentes del modelo (los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje) con partes de aplicación práctica al currículo de geometría de Primaria.

Existen diversas publicaciones en las que se puede profundizar en el estudio y la utilización del modelo de Van Hiele, tanto para la práctica docente como para la investigación didáctica. Hemos mencionado Jaime y Gutiérrez (1990), en la que se puede profundizar en las características generales. Por otra parte, en Corberán y otros (1994), Jaime y Gutiérrez (1996) y NCTM (2003) se pueden estudiar con detalle propuestas de utilización del modelo de Van Hiele para la práctica de enseñanza de las matemáticas.

## 7.8. Referencias

Corberán, R. y otros, *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en Enseñanza Secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*, C.I.D.E., M.E.C., Madrid, 1994. Disponible en <https://sede.educacion.gob.es/publiventa/descarga.action?f_codigo_agc=1379_19>.

Gutiérrez, A.; Jaime, A., "On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning", *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 1998, vol. 20-2/3, pp. 27-46.

Jaime, A.; Gutiérrez, A., "Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele", en S. Llinares; M.V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática,* Alfar, Sevilla, 1990, pp. 295-384. Disponible en <http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf>.

Jaime, A.; Gutiérrez, A., *El grupo de las isometrías del plano*, Síntesis, Madrid, 1996.

NCTM, *Principios y estándares para la educación matemática*. N.C.T.M., Reston, VA, EE.UU, 2003.

Papademetri, C., "Revisiting Van Hiele", *For the Learning of Mathematics*, 2012, vol. 32-3, pp. 2-7.

Van Hiele, P.M., *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Academic Press, Londres, 1986.