Citar como: Jaime, A., Gutiérrez, A. (2016): El aprendizaje de conceptos geométricos en la Educación Primaria. En J. Carrillo y otros (Eds.), *Didáctica de las matemáticas para maestros de Educación Primaria* (pp. 197-215). Madrid: Paraninfo.

8. El Aprendizaje de Conceptos Geométricos en la Educación Primaria

Adela Jaime y Angel Gutiérrez. Dpto. de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia (Valencia, España).

¿Cómo aprenden los niños pequeños qué es un perro, un gato, una silla, una mesa...? ¿Cómo aprenden a diferenciar entre una bicicleta y una moto, entre un gallo y una gallina...? La respuesta a la primera pregunta es que este aprendizaje se basa en la repetida observación por los niños de esos seres u objetos y la identificación y memorización de características (casi siempre visuales) comunes a los diferentes ejemplares de la misma clase, al tiempo que los niños oyen a sus acompañantes pronunciar los correspondientes nombres. Si un niño escucha la palabra “perro” cuando mira a animales con características tan diferentes como las diversas razas que se pueden ver en la calle, se logra que desarrolle poco a poco una abstracción del concepto “perro” que le servirá para identificar estos animales y distinguirlos de otros.

En lo que respecta a la segunda pregunta, los niños aprenden a diferenciar seres u objetos parecidos pero pertenecientes a clases distintas también mediante la observación repetida. Pero, a diferencia del aprendizaje de qué es un perro, ahora no tienen que identificar características comunes, sino características diferenciadoras exclusivas de cada clase de objetos. Una bicicleta y una moto tienen en común que son medios de transporte de dos ruedas, pero esto no resulta útil para diferenciarlos. Lo que los niños aprenden como diferencia clave es que las bicicletas hay que moverlas con los pedales y las motos se mueven porque tienen un motor. Del mismo modo, aprenden a diferenciar los gallos de las gallinas por la esbeltez de sus cuerpos, la forma y tamaño de las crestas o las diferencias en sus cantos.

En el campo de las matemáticas, el aprendizaje de muchos conceptos elementales, especialmente de los conceptos geométricos, se produce de una manera parecida a como describíamos antes para conceptos del entorno infantil. En este capítulo vamos a presentar:

- Un modelo teórico que explica cómo se produce el aprendizaje de conceptos matemáticos que tienen un fuerte soporte gráfico.
- Una metodología de diseño de unidades para la enseñanza de este tipo de conceptos matemáticos, que se basa en presentar a los niños ejemplos para lograr que se acostumbren a ellos y en hacerles reflexionar sobre las características matemáticas de dichos ejemplos, con la finalidad de que los niños creen el concepto matemático correspondiente y puedan entender su definición verbal.

Aunque este modelo teórico se aplica a cualquier área de las matemáticas de Primaria y de Secundaria, contextualizamos este capítulo en ejemplos de conceptos geométricos de Primaria y en la información que hemos extraído de libros de texto de varias editoriales de amplia difusión en España.

8.1. El proceso de aprendizaje de conceptos geométricos

En las clases de matemáticas, los estudiantes reciben dos tipos de información, verbal y gráfica, transmitida por el profesor, el libro de texto, otros compañeros, etc. El investigador israelí S. Vinner plantea que el cerebro almacena estos dos tipos de información en dos lugares diferentes, de modo que, cuando un estudiante está aprendiendo un concepto geométrico, de acuerdo con Vinner (1991), se forman en su mente dos estructuras (Figura 8.1):

- La *imagen conceptual*, que está integrada por la información gráfica memorizada. En esta estructura se acumulan los ejemplos del concepto observados o dibujados por el estudiante. Por ejemplo, al aprender el concepto de rectángulo, los estudiantes memorizan los dibujos de rectángulos que ven en el libro de texto, en la pizarra, etc.
- La *definición conceptual*, que está formada por la información verbal memorizada. A pesar de su nombre, consideramos que esta estructura no solo incorpora la definición aprendida del concepto (coincida o no con la definición matemáticamente correcta), sino también formulaciones verbales de sus propiedades matemáticas. Por ejemplo, al aprender el concepto de rectángulo, los estudiantes memorizan su definición y también que tiene dos diagonales, su fórmula de cálculo del área, etc.

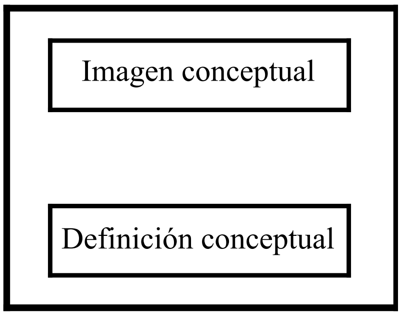


Figura 8.1. Componentes del modelo de aprendizaje de conceptos de Vinner.

En este contexto, el aprendizaje de un concepto matemático consiste en formar una imagen conceptual y una definición conceptual lo más completas posible y en aprender a utilizar una y otra de forma combinada y adaptable a las circunstancias de cada actividad. El profesor juega un papel fundamental en el aprendizaje de sus alumnos, pues es el encargado de preparar y organizar actividades ricas que ayuden a formar imágenes y definiciones conceptuales adecuadas.

8.1.1. Formación de la imagen conceptual

Para que una imagen conceptual de un concepto geométrico sea completa, debe incluir una amplia variedad de ejemplos gráficos del concepto, con diversidad de formas, posiciones, tamaños, etc., de manera que el estudiante pueda identificar correctamente si cualquier figura es o no un ejemplo de ese concepto.

En los libros de texto de Primaria es frecuente que los ejemplos gráficos de un concepto sean poco variados, tanto en sus formas como en sus posiciones. Se denominan *ejemplos prototípicos* a los ejemplos que se repiten con mucha frecuencia en libros de texto y pizarras. Como consecuencia de esa frecuencia, los ejemplos prototípicos tienen más peso en las imágenes conceptuales de los estudiantes que otros ejemplos diferentes que aparecen esporádicamente, pues son los que primero se recuerdan. En el caso de los polígonos y poliedros, casi todos los ejemplos prototípicos tienen la característica de que están "apoyados" en un lado o cara horizontal que actúa como base; además, las figuras suelen ser bastante similares a los casos regulares o los más próximos a estos, como triángulos equiláteros o isósceles, paralelogramos o trapecios, etc. La única excepción generalizada en los libros de texto de Primaria entre los polígonos es el ejemplo prototípico de los rombos, que no suelen tener un lado como base, sino que se dibujan situados verticalmente sobre un vértice. La Figura 8.2 muestra un ejercicio de un libro de texto en el que se practica con los conceptos de triángulo y cuadrilátero. Sólo hay un polígono que no es ejemplo prototípico, concretamente el triángulo dibujado en la derecha de la fila superior. Todos los cuadriláteros son ejemplos prototípicos, incluso el rombo. En este conjunto de ejemplos, se echan de menos un triángulo obtusángulo, un trapezoide y un cuadrilátero cóncavo. Lo mismo ocurre con los cuerpos espaciales pues, como muestra la Figura 8.3, los libros de texto casi siempre los representan sobre su base horizontal, salvo algún poliedro como el octaedro regular, que se representa habitualmente "apoyado" en un vértice.

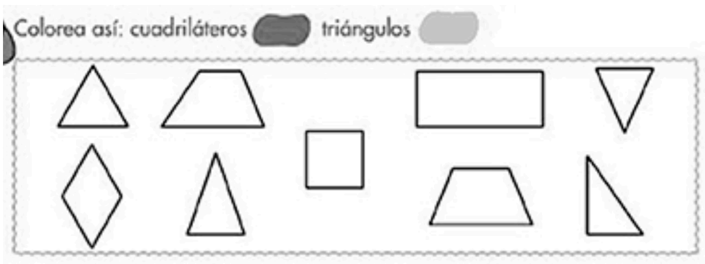


Figura 8.2. Ejemplos prototípicos de triángulo y cuadrilátero (1º de Primaria).

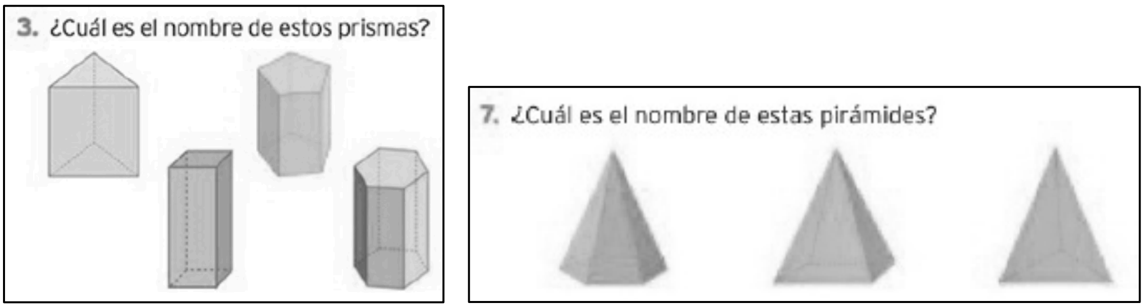


Figura 8.3. Ejemplos prototípicos de prisma y pirámide (3º de Primaria).

Cuando los estudiantes de Primaria deben decidir si una figura geométrica que están viendo pertenece o no a un determinado tipo, comparan esa figura con los ejemplos que tienen en la parte de su memoria correspondiente a la imagen conceptual de ese tipo de figuras. Si la figura se parece suficientemente a alguno de los ejemplos que recuerdan, identifican la nueva figura como perteneciente al mismo tipo. Si la figura no es suficientemente parecida a ninguno de los ejemplos, identifican dicha figura como no perteneciente a ese tipo. El problema de las imágenes conceptuales basadas en ejemplos prototípicos es que son muy pobres, porque contienen muy pocos ejemplos y estos tienen unas características de posición, forma, tamaño, número de partes, etc. muy particulares. Ello hace que los estudiantes con estas imágenes conceptuales clasifiquen mal muchas figuras y, en consecuencia, sufran dificultades de aprendizaje. Este problema se puede identificar en los resultados de una investigación experimental en la que pedimos a estudiantes de 2º de Primaria colorear los triángulos (gris claro), cuadrados (gris oscuro), rectángulos y círculos que había en dos láminas que tenían una variedad de dibujos. La Figura 8.4 muestra la parte de la respuesta de un estudiante correspondiente a los triángulos. Descartó correctamente los dibujos *c* y *e* porque sus lados no son rectos y descartó, ahora erróneamente, el dibujo *d* “porque está demasiado de punta”. El análisis de esta respuesta indica quela imagen conceptual de triángulo de este niño le había permitido aprender que los triángulos deben tener los lados rectos. Pero el análisis nos dice también que su imagen conceptual estaba basada en unos pocos ejemplos prototípicos, que eran triángulos equiláteros o con formas próximas a los equiláteros, que no le permitió identificar correctamente el triángulo *d* porque lo consideró demasiado diferente de los triángulos que había visto hasta ese momento.

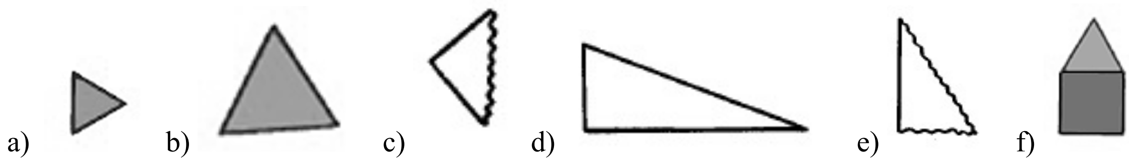


Figura 8.4. Identificación de triángulos por un estudiante de 2º de Primaria.

Este tipo de dificultades no son exclusivas de los primeros cursos de Primaria. Cuando los estudiantes forman una imagen conceptual pobre, ésta se mantiene a lo largo de los años y sigue causando problemas. La figura 8.5 muestra la respuesta de un estudiante de 3º de ESO al que se pidió marcar con la letra T los rectángulos y con la R los rombos que hay en ese conjunto de polígonos.

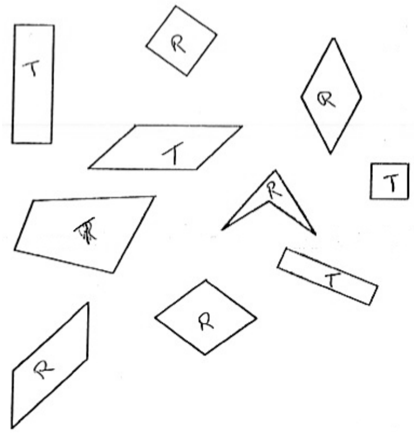


Figura 8.5. Identificación de rectángulos (T) y rombos (R) por un estudiante de 3º de ESO.

El criterio de clasificación que empleó este estudiante muestra una imagen conceptual muy pobre, ya que está basado en rasgos básicos del aspecto visual de los rectángulos (figuras alargadas en horizontal) y los rombos (figuras puntiagudas en vertical). Ello explica por qué clasificó de forma diferente los dos romboides, que son la misma figura en dos posiciones diferentes, y los dos cuadrados. También explica por qué clasificó como rombo el cuadrilátero cóncavo y por qué tuvo dificultades en clasificar la figura en la que escribió las dos letras, primero una R y luego una T, ya que esta figura tiene algunos rasgos que el estudiante asoció al rombo y otros que asoció al rectángulo.

El modelo de análisis del aprendizaje de conceptos geométricos que estamos presentando es coherente y compatible con el modelo de los niveles de razonamiento de Van Hiele (capítulo 7). Así, esta respuesta claramente muestra un estilo de razonamiento que corresponde al nivel 1 de Van Hiele. En general, el progreso en el nivel de razonamiento de un estudiante es paralelo a su progreso en la construcción de imágenes conceptuales más ricas y completas y en el establecimiento de vínculos más complejos entre las imágenes conceptuales y las definiciones de los conceptos.

Actividad 8.1: Analiza los temas de geometría de libros de texto de varios cursos de Primaria para observar la variedad de formas, tamaños y posiciones de los triángulos dibujados y valorar la abundancia de ejemplos prototípicos. Haz el mismo tipo de análisis para los cuadriláteros, polígonos regulares, prismas, pirámides, conos y cilindros.

Para evitar la influencia negativa de los ejemplos prototípicos en la formación de las imágenes conceptuales de los estudiantes, los profesores deben completar la información gráfica proporcionada por los libros de texto con actividades en las que los niños vean, manipulen, describan y analicen una amplia variedad de formas, tamaños, posiciones, etc. de figuras correspondientes al concepto que están aprendiendo. El objetivo de aprendizaje que pretende este tipo de actividades es que los estudiantes recuerden muchas formas, tamaños, posiciones, etc. diferentes, para que lleguen a abstraer solamente las propiedades matemáticas que realmente posee el concepto geométrico que están aprendiendo. En la sección 8.2 volveremos sobre este tema para mostrar cómo se pueden diseñar actividades que ayuden a formar imágenes conceptuales lo más completas posible.

8.1.2. Formación de la definición conceptual

La capacidad de abstracción de los estudiantes de Primaria es bastante reducida, incluso en los últimos cursos de este nivel educativo. Ello hace que, en el aprendizaje de la geometría, el componente gráfico y visual domine sobre el componente verbal. No obstante, la enseñanza de los conceptos geométricos no se puede limitar a su componente gráfico, sino que es necesario que los estudiantes comprendan y aprendan también sus definiciones y propiedades básicas, de manera que su definición conceptual vaya desarrollándose en paralelo a su imagen conceptual. Un objetivo de aprendizaje que los profesores deben tener presente es que las definiciones conceptuales de sus alumnos incluyan formulaciones correctas de la definición y las propiedades que se vayan estudiando.

Pero, para aprender geometría de forma comprensiva, no basta con lograr que los estudiantes sepan repetir de memoria definiciones y propiedades correctamente. El resultado de la formación de definiciones conceptuales puramente memorísticas es que los estudiantes utilizan de forma independiente las informaciones ubicadas en su imagen conceptual y en su definición conceptual. Un caso bastante frecuente en las aulas de Primaria, que también hemos observado en los estudiantes de Magisterio (Gutiérrez y Jaime, 1996), es el de estudiantes que recitan correctamente la definición de altura de un triángulo (la altura de un triángulo es el segmento trazado perpendicularmente desde un vértice hasta el lado opuesto o su prolongación) pero, al mismo tiempo, al trazar alturas de triángulos, cometen errores de manera sistemática. La Figura 8.6 muestra las respuestas de un estudiante que debía trazar las alturas sobre el lado *a*, pero que trazó la mediana en vez de la altura cuando ésta no es interior al triángulo.

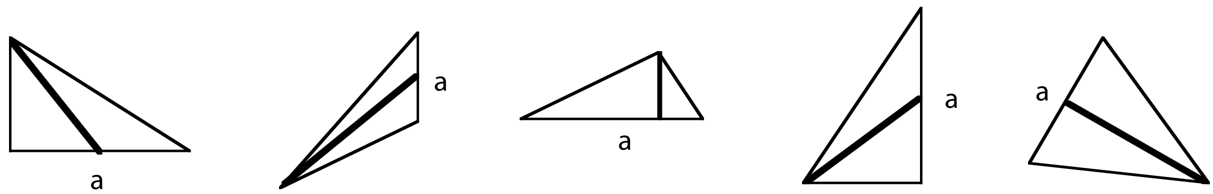


Figura 8.6. Desconexión entre la imagen conceptual y la definición conceptual de altura de un triángulo de un estudiante (Gutiérrez y Jaime, 1996).

Se pueden observar casos similares a propósito de otros conceptos geométricos, como el de polígono regular: son numerosos los estudiantes de Primaria que recitan la definición correcta (polígono regular es el polígono que tiene todos sus lados iguales y todos sus ángulos iguales) pero identifican como polígonos regulares el rectángulo (porque tiene su ángulos iguales) o polígonos regulares “aplastados” que mantienen los lados iguales pero no sus ángulos, o los polígonos que les resultan más familiares (cuadrado, rectángulo, rombo, etc.).

Vinner (1991) explica esta aparente contradicción entre recitar correctamente la definición y realizar o identificar ejemplos erróneamente señalando que los estudiantes que muestran este comportamiento no han aprendido a establecer conexiones entre su imagen conceptual y su definición conceptual, de manera que las utilizan independientemente una de la otra, es decir que, cuando utilizan una de ellas, dejan inactiva e ignoran la otra (Figura 8.7a): cuando se les plantea un problema en el que perciben que deben usar la definición, recurren a su definición conceptual (línea negra) y recitan la definición aprendida y, cuando el problema les pide actuar sobre figuras u objetos, recurren a su imagen conceptual para responder (línea gris). Esta falta de conexión explica que los estudiantes no notan las contradicciones entre sus respuestas gráficas y verbales.

Para combatir este problema, los profesores, además de lograr que sus alumnos aprendan y entiendan los nuevos contenidos matemáticos, deben procurar también que aprendan a relacionar su imagen conceptual y su definición conceptual y a utilizar una u otra de manera combinada, planteando actividades en las que sus alumnos deban utilizar ambas de forma indistinta (Figura 8.7b).

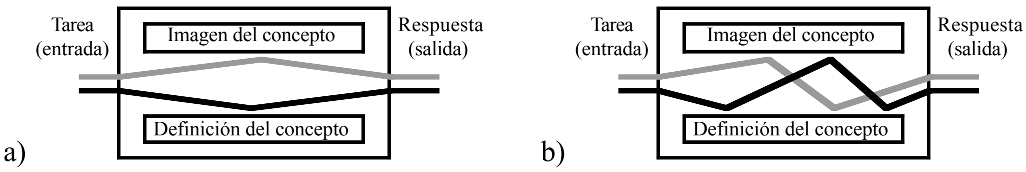


Figura 8.7. Modelos de resolución de tareas (Gutiérrez y Jaime, 1996).

Una forma de lograr esa integración es, por ejemplo, plantear actividades de clasificación o identificación de figuras geométricas que incluyan preguntas sobre los motivos de la respuesta dada y peticiones de verbalizar y utilizar explícitamente la definición para confirmar si la respuesta dada es correcta (o no) porque cumple (o no) lo que dice la definición.

8.2. La enseñanza de conceptos geométricos mediante ejemplos y contra-ejemplos

Para completar este capítulo dedicado al aprendizaje de los conceptos geométricos en Primaria, vamos a presentar, basándonos en un caso concreto, una metodología de diseño de actividades para propiciar el aprendizaje por descubrimiento de dichos conceptos y la formación de imágenes conceptuales y definiciones conceptuales completas y correctas. El objetivo de enseñanza es presentar actividades mediante las cuales los estudiantes vayan descubriendo las características básicas de un concepto nuevo para ellos y lleguen, finalmente, a ser capaces de enunciar una definición de dicho concepto. Esta metodología se basa en mostrar a los estudiantes ejemplos del concepto y contra-ejemplos del mismo, es decir, unas figuras que corresponden a ese concepto y otras que no corresponden.

Para conseguir un conjunto de ejemplos y contra-ejemplos adecuado, que logre un buen aprendizaje, no se pueden escoger las figuras de manera intuitiva, sino que hay que hacerlo teniendo en cuenta las características matemáticas y los aspectos visuales o manipulativos más llamativos del concepto que se quiera enseñar. Los siguientes apartados muestran los pasos a seguir para crear un buen conjunto de ejemplos y contra-ejemplos de un concepto geométrico, basándonos en el concepto de *altura de un triángulo*.

8.2.1. Elegir una definición adecuada del concepto

Muchos conceptos geométricos elementales se pueden definir de varias maneras. Esto se ve reflejado en los libros de texto, porque en unos se puede leer una definición diferente de la presentada en otros. Esta variedad de definiciones plantea a los profesores, al empezar a preparar el tema, la necesidad de decidir qué definición van a utilizar en sus clases. Por ello, el primer paso en el proceso de diseño de actividades basadas en ejemplos y contra-ejemplos es elegir la definición que se va a enseñar. Los criterios didácticos que se pueden adoptar para tomar esta decisión son variados, por ejemplo:

- Elegir la misma definición que mis nuevos alumnos han estudiado en años anteriores, para no generarles confusión y dificultades.
- Elegir la definición diferente de la que mis nuevos alumnos han estudiado en años anteriores, para aumentar sus conocimientos matemáticos.
- Elegir la definición que me gusta más, porque me siento más cómodo trabajando con ella.
- Elegir la definición que, a largo plazo, es matemáticamente más útil, para que cuando mis nuevos alumnos pasen a Secundaria o la universidad no tengan problemas.
- Elegir la definición que, dado el grado de madurez matemática de mis nuevos alumnos, les resultará más fácil de entender y aplicar.
- Rechazar una definición porque es matemáticamente errónea.
- Rechazar una definición porque es matemáticamente muy compleja.
- Rechazar una definición porque su estructura gramatical es muy compleja.

Un aspecto muy importante que los profesores de Primaria deben tener en cuenta es la corrección matemática de las definiciones presentadas por los libros de texto. El concepto de polígono es un ejemplo de la presencia de esta problemática en Primaria. Hemos encontrado las tres definiciones siguientes en libros de texto de Primaria:

a) Los **polígonos** son figuras planas limitadas por rectas.

b) Un **polígono** es una superficie plana limitada por segmentos de recta.

c) Un **polígono** es una línea poligonal cerrada y su interior.

La definición a) es matemáticamente errónea, por dos motivos: i) Los polígonos no están limitados por rectas, sino por segmentos. ii) Los polígonos son figuras acotadas, es decir con superficie finita, pero esta definición admite como polígonos superficies planas no acotadas, por ejemplo la figura limitada por dos rectas que se cortan (es decir, la superficie de un ángulo).

A primera vista, la definición b) es correcta, si bien tiene el inconveniente de que deja implícita la característica de que los segmentos que forman un polígono deben estar encadenados y unidos por sus extremos. Esta imprecisión no es razonable para un libro de texto de Primaria, pues los estudiantes de este nivel educativo no tienen la capacidad de abstracción necesaria para entender propiedades implícitas.

La definición c) describe fielmente el concepto de polígono, pues presenta explícitamente sus dos características principales, la referida a cómo es su frontera (una línea poligonal cerrada) y la referida a que el polígono está formado por la línea poligonal y por la superficie rodeada.

En la actualidad hay una tendencia generalizada a buscar en internet cualquier tipo de información. En referente a la enseñanza de las matemáticas, esto es bastante delicado, pues hay numerosas páginas web que ofrecen contenidos con errores matemáticos o didácticos.

Actividad 8.2: Busca en internet definiciones del concepto de *polígono* y analízalas para determinar su corrección matemática. Para cada definición, escribe un comentario justificando la conclusión de que la definición es o no correcta.

Al analizar los libros de texto de Primaria que hemos consultado, hemos constatado que la mayoría de ellos no define el concepto de *altura*, ni para los cuadriláteros ni para los triángulos, sino que se limitan a dibujar las alturas de los polígonos (siempre en la posición vertical prototípica) cuando presentan sus fórmulas de cálculo de áreas, aunque, en algún caso, ni siquiera se dibuja la altura (Figura 8.8). Intentar que los estudiantes de Primaria aprendan un concepto geométrico de manera implícita, a partir sólo de algunos casos (dibujos específicos), es un error didáctico ya que se suelen generar en los estudiantes imágenes conceptuales erróneas, como la mostrada en la Figura 8.6. Es más eficaz que el profesor incluya en su clase una actividad de enseñanza mediante ejemplos cuidadosamente escogidos, como la que presentamos en las próximas páginas.

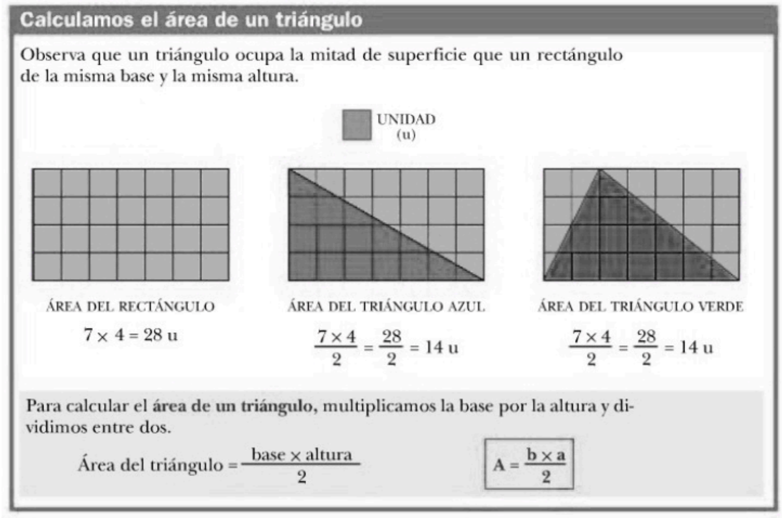


Figura 8.8. Enseñanza didácticamente incorrecta del concepto de altura de un triángulo.

La única definición que hemos encontrado de altura de un triángulo es la que muestra la Figura 8.9.

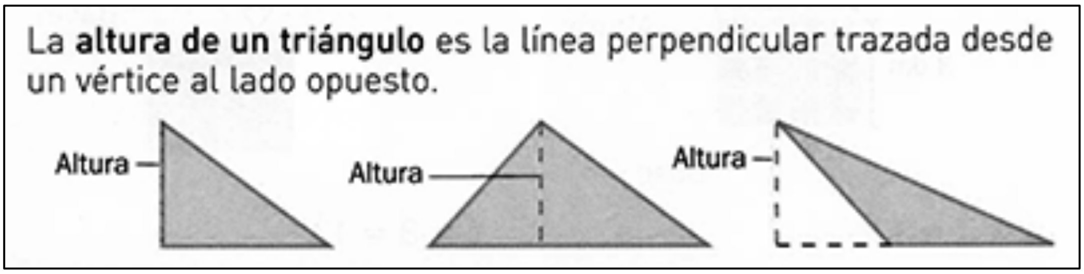


Figura 8.9. Definición de altura de un triángulo en un libro de texto de 6º de Primaria.

Otra definición de altura de un triángulo de uso frecuente es: *La altura de un triángulo es el segmento trazado perpendicularmente desde un vértice hasta el lado opuesto o su prolongación*.

De una página web hemos tomado esta definición de altura de un triángulo: *Una altura es cada una de las rectas perpendiculares trazadas desde un vértice al lado opuesto (o su prolongación)*.

Las tres definiciones son matemáticamente correctas, pero no son equivalentes. Veamos diferencias matemáticas y didácticas importantes entre estas tres definiciones:

- El tipo de objeto geométrico que es la altura: una línea, un segmento y una recta. El término *línea* es ambiguo, por lo que no conviene usarlo. A largo plazo, el concepto de altura como recta es más general y más útil, completado con la idea de que, para calcular el área de un triángulo hay que medir el segmento de altura cuyos extremos son el vértice y el lado opuesto o su prolongación. Sin embargo, para los estudiantes de Primaria, es más fácil de comprender y utilizar el concepto de altura como segmento.

- La mención a la necesidad de prolongar la base del triángulo: la primera definición no lo hace, aunque sí dibuja un ejemplo de altura exterior en el que se ve la prolongación de la base. La investigación en didáctica de la matemáticas ha probado suficientemente que no mencionar explícitamente la necesidad de prolongar la base es una fuente de errores conceptuales ya que muchos estudiantes forman una imagen conceptual de alturas interiores al triángulo porque creen que, si la perpendicular desde un vértice no termina en su lado opuesto, entonces no hay altura desde ese vértice o la altura no tiene que ser perpendicular (recordar la Figura 8.6 y otros ejemplos mostrados en Gutiérrez y Jaime, 1996). Por lo tanto, es didácticamente más conveniente una definición que mencione explícitamente la prolongación de la base.

Por lo tanto, el análisis matemático y didáctico anterior nos lleva a la conclusión de que la mejor definición para los estudiantes de 5º o 6º de Primaria es la segunda: *La altura de un triángulo es el segmento trazado perpendicularmente desde un vértice hasta el lado opuesto o su prolongación*. No obstante, esta definición hay que presentarla paso a paso, condición a condición, para que los estudiantes la comprendan más fácilmente.

8.2.2. Identificar las propiedades características del concepto

Después de haber seleccionado una definición de altura de un triángulo, el paso siguiente es analizarla para identificar las partes importantes que la forman. En Gutiérrez y Jaime (1996) veíamos, tras analizar resultados de experimentos con estudiantes de Primaria y futuros profesores de Primaria, que muchos de ellos no habían aprendido correctamente un concepto matemático porque no habían formado una definición conceptual correcta, ya que no conocían algunos de los sub-conceptos que forman parte de la definición que han aprendido de ese concepto. En consecuencia, para conseguir que los estudiantes de Primaria entiendan y aprendan correctamente el concepto de altura de un triángulo, formando una definición conceptual correcta, los profesores deben asegurarse de que sus alumnos entienden y aprenden cada sub-concepto que forma parte de su definición y de que son conscientes de la necesidad de cada concepto. Así pues, descomponemos la definición de altura de un triángulo en las partes matemáticamente relevantes que la forman. La definición elegida se puede descomponer de la siguiente manera en sub-conceptos: La altura de un triángulo es

- el *segmento*
- trazado *perpendicularmente*
- *desde* un *vértice*
- *hasta* el *lado opuesto*
- o su *prolongación*.

Cada sub-concepto mencionado es una propiedad necesaria característica de las alturas del triángulo, por lo que, para el aprendizaje correcto de la altura de un triángulo, es necesario tenerlas todas en cuenta. Ignorar cualquiera de ellos supone que, en algún momento, se cometerá un error al identificar o dibujar una altura o al calcular su longitud.

Al enseñar un concepto complejo, como el de altura de un triángulo, es necesario recurrir a sub-conceptos que forman parte de la definición. Estos sub-conceptos son, en muchas ocasiones, conceptos que se han estudiado antes, en este caso los de segmento, perpendicular y vértice. Es necesario que los estudiantes recuerden correctamente estos sub-conceptos pues, en caso contrario, el aprendizaje será deficiente o ni siquiera habrá aprendizaje. También encontramos otros sub-conceptos no estudiados antes que es necesario aprender al mismo tiempo, en este caso los de lado opuesto y prolongación de un lado.

Actividad 8.3: Descomponer las definiciones de otros conceptos geométricos escolares, como bisectriz, ángulos suplementarios, trapecio, polígono regular, prisma, pirámide, etc. para identificar las propiedades características que lo forman. Para cada definición, mostrar claramente sus partes matemáticamente relevantes.

8.2.3. Identificar atributos no necesarios del concepto que pueden llevar a confusión

Otro motivo por el que muchos estudiantes no han aprendido correctamente un concepto matemático es que su imagen conceptual es errónea, porque incorpora como propiedades características del concepto algunos atributos que realmente no lo son. Ello es debido a la presencia de ejemplos prototípicos que han ocupado de manera dominante los libros de texto y las pizarras de las clases (o el software o las webs empleados por el profesorado).

En el caso de la altura de un triángulo, veíamos en Gutiérrez y Jaime (1996) que con frecuencia los estudiantes han incluido como necesarios atributos como que la altura debe ser vertical, que la altura debe ser interior al triángulo, y otras, que son motivos muy frecuentes de errores. Por lo tanto, para conseguir que los estudiantes de Primaria entiendan y aprendan correctamente el concepto de altura de un triángulo, formando una imagen conceptual correcta, los profesores deben asegurarse de que sus alumnos no incorporan atributos no característicos como son formas, posiciones, tamaños, etc. particulares. Una manera de lograrlo es plantear de forma explícita discusión sobre estos atributos y mostrar ejemplos en los que los estudiantes vean que esos atributos no tienen por qué estar presentes o que lo están de diferentes maneras.

Los atributos no característicos que más frecuentemente se incorporan a las imágenes conceptuales de altura de un triángulo y generan errores son:

- la altura es vertical
- la altura es interior al triángulo
- la altura termina en el punto medio del lado (confusión con la mediana)
- los triángulos sólo tienen una altura

Los profesores deben tener en cuenta esta lista de atributos no característicos de la altura para incidir en ellos mostrando que no son necesarios para tener una altura.

También hay que prestar atención a algunos atributos visuales no característicos, para que sean lo más variados posible, como:

- los tamaños de las alturas y de los triángulos
- las formas de los triángulos

Los profesores deben incidir en estos atributos mostrando que pueden adoptar una variedad de valores (tamaños, formas, etc.) y conseguir que sus alumnos aprendan a verlos como algo accesorio e irrelevante.

Actividad 8.4: Para cada uno de los conceptos analizados en la actividad 8.3, escribe una lista de atributos no característicos. Explica, para cada atributo, por qué no es característico del concepto analizado.

8.2.4. Seleccionar los ejemplos y los contra-ejemplos

El último paso en el proceso de diseño de actividades para enseñar el concepto de altura de un triángulo mediante ejemplos y contra-ejemplos es dibujar las figuras que serán esos ejemplos y contra-ejemplos. Estas figuras sirven para:

- Mostrar que las propiedades identificadas en 8.2.2 son necesarias y deben formar parte de todas las alturas. Para cada **propiedad necesaria**, el profesor propondrá a sus alumnos **comparar un ejemplo**, es decir una figura que incluye una altura correcta de un triángulo, **y un contra-ejemplo**, es decir otra figura que incluye una línea que no es altura de un triángulo porque no tiene esta propiedad. La comparación debe llevar a los estudiantes (tal vez con ayuda del profesor) a darse cuenta de que la principal diferencia entre ambas figuras es que el ejemplo sí tiene esta propiedad necesaria pero el contra-ejemplo no la tiene.

Por ejemplo, para mostrar que la altura tiene que ser un segmento y no puede ser una línea curva, podemos comparar los dos triángulos de la Figura 8.10. La única diferencia entre ellos es que el ejemplo de altura incluye un segmento (recto) mientras que el contra-ejemplo incluye una línea curva. La conclusión que deben explicitar los estudiantes es que las alturas son segmentos rectos.

- Mostrar que los atributos identificados en 8.2.3 no son característicos y no hace falta que formen parte de todas las alturas o que pueden tener valores variados. Para cada **atributo no necesario**, el profesor propondrá a sus alumnos **comparar dos ejemplos**, es decir dos figuras que incluyen una altura correcta de un triángulo, pero **que se diferencian en dicho atributo**. La comparación debe llevar a los estudiantes (tal vez con ayuda del profesor) a reconocer que la principal diferencia entre ambas figuras es que el atributo está presente en una altura y no en la otra, o que el atributo está presente en ambas alturas pero con valores diferentes.

  Por ejemplo, para mostrar que no hace falta que la altura sea vertical, sino que puede estar en cualquier posición, podemos comparar los dos triángulos de la Figura 8.14. En ambos casos se trata de alturas, cuya única diferencia es que están en distintas posiciones. La conclusión que deben explicitar los estudiantes es que las alturas no tienen por qué ser verticales.

A continuación proponemos conjuntos de ejemplos y contra-ejemplos para poner de relieve cada una de las propiedades necesarias enunciadas en 8.2.2.

- La altura es un segmento: Figura 8.10.

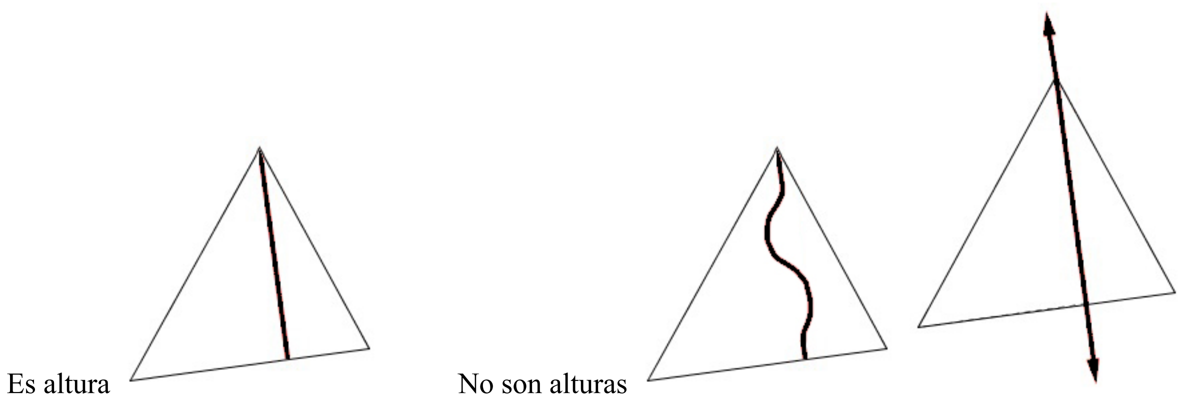


Figura 8.10. Ejemplo y contra-ejemplo de que la altura tiene que ser un segmento.

- La altura es perpendicular al lado sobre el que se traza: Figura 8.11.

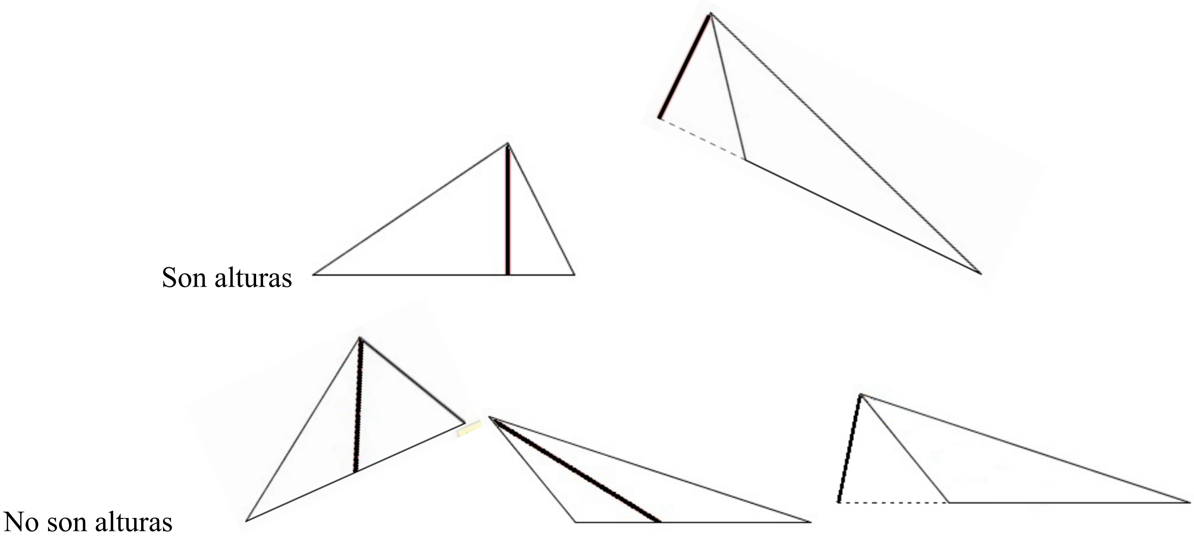


Figura 8.11. Ejemplos y contra-ejemplos de que la altura tiene que ser perpendicular a la base.

- La altura se traza desde un vértice del triángulo: Figura 8.12.

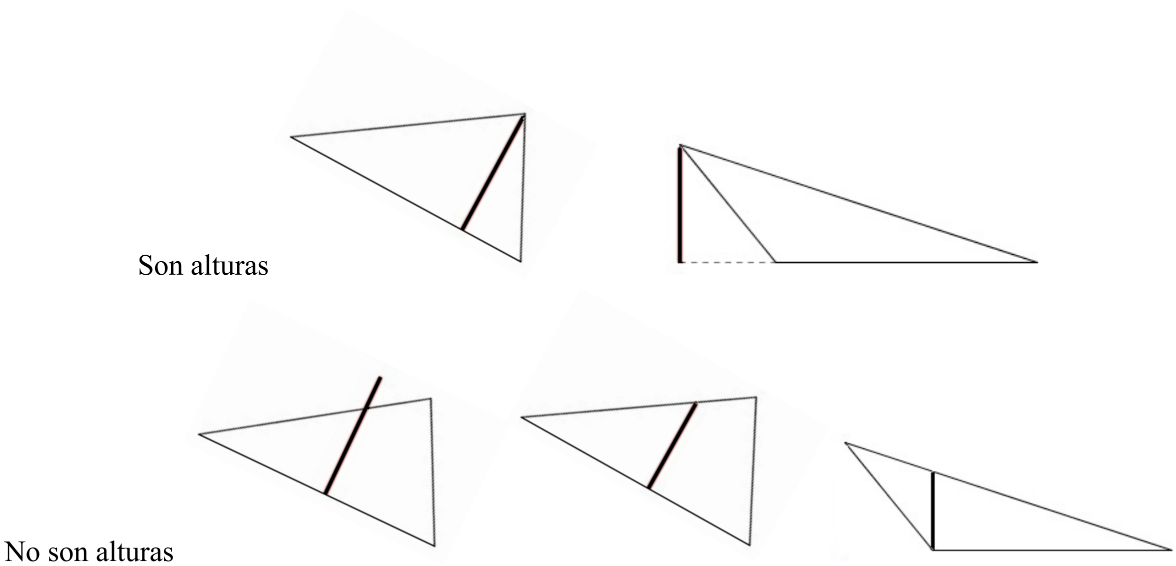
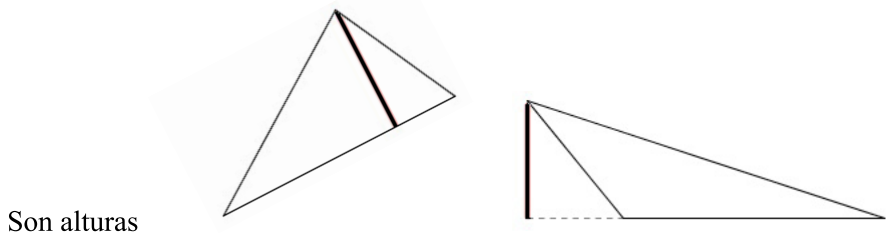
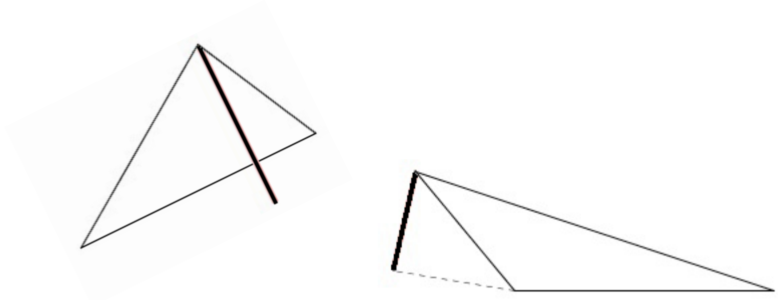


Figura 8.12. Ejemplos y contra-ejemplos de que la altura se traza desde un vértice.

- La altura termina en el lado opuesto al vértice o en su prolongación: Figura 8.13.





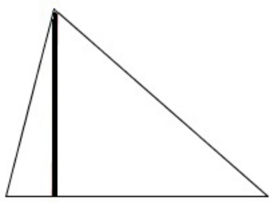
No son alturas

Figura 8.13. Ejemplos y contra-ejemplos de que la altura termina en la base o su prolongación.

Y, por último, proponemos conjuntos de ejemplos para poner de relieve cada uno de los atributos no necesarios enunciados en 8.2.3.

- La altura no tiene por qué ser vertical: Figura 8.14.

Es altura



Es altura

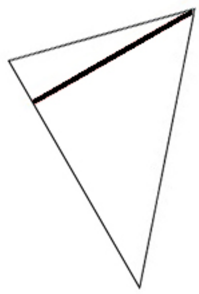


Figura 8.14. Dos ejemplos de alturas con diferentes inclinaciones respecto de la vertical.

- La altura no tiene por qué estar dentro del triángulo: Figura 8.15.

Son alturas

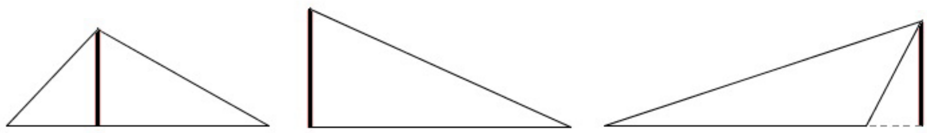


Figura 8.15. Ejemplos de alturas en diferentes posiciones (dentro, etc.) respecto del triángulo.

- La altura puede terminar en cualquier punto de la base: Figura 8.16.

Son alturas

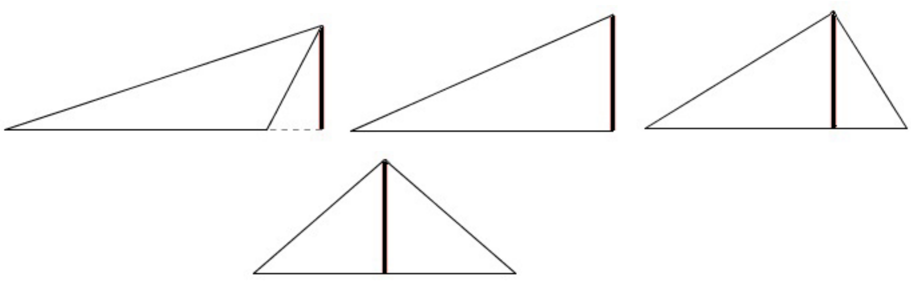
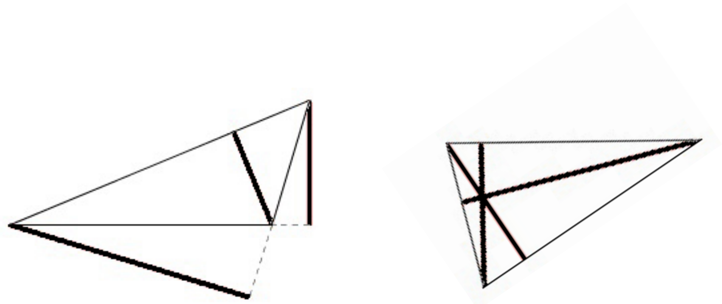


Figura 8.16. Las alturas pueden terminar en cualquier punto de la base.

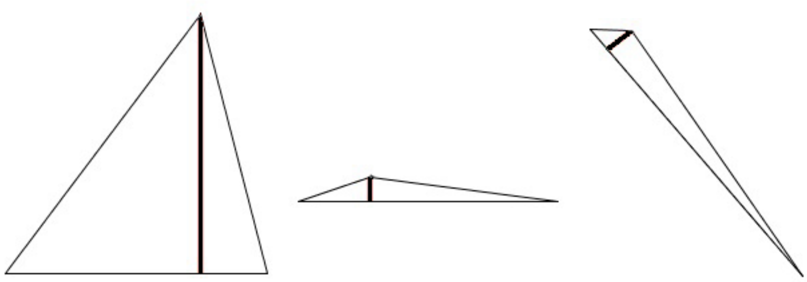
- Los triángulos tienen tres alturas: Figura 8.17.



Tienen 3 alturas

Figura 8.17. Los triángulos tienen tres alturas.

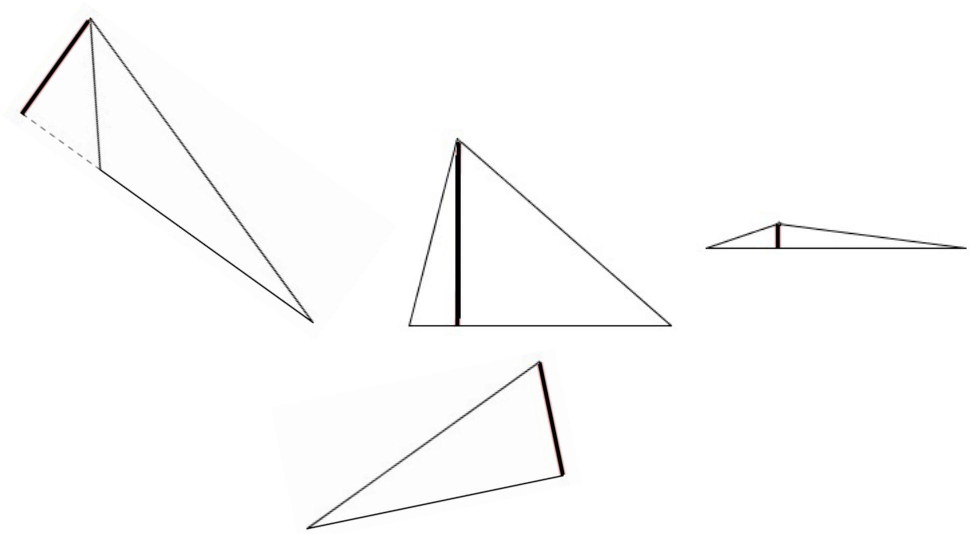
- Las alturas y los triángulos pueden tener cualquier tamaño: Figura 8.18.



Son alturas

Figura 8.18. Ejemplos de alturas y triángulos de diferentes tamaños.

- Todos los triángulos tienen alturas, independientemente de su forma: Figura 8.19.



Son alturas

Figura 8.19. Ejemplos de alturas en triángulos de diferentes formas.

Una vez dibujados todos estos ejemplos y contra-ejemplos, el profesor debe organizarlos de la manera que le parezca más adecuada para su presentación en clase. Aquí no hay ninguna directriz sobre cómo hacerlo, sino que hay muchas posibilidades, con la única condición de que el profesor guie a sus alumnos para que comparen los grupos de figuras que corresponden a cada propiedad necesaria o cada atributo no relevante.

Aquí hemos mostrado una cantidad mínima de ejemplos y contra-ejemplos, pero es probable que los estudiantes necesiten analizar grupos con más cantidad de figuras para afianzar sus conclusiones, por lo que los profesores decidirán cuántos ejemplos y contra-ejemplos deben presentar a sus alumnos.

8.3. Conclusión

Acabamos de presentar un modelo teórico que explica cómo se desarrollan los procesos de aprendizaje de los conceptos geométricos elementales, típicos de los cursos de Primaria, y que, además, propone una metodología de enseñanza para guiar a los estudiantes hacia un aprendizaje comprensivo de la geometría. Aunque en este capítulo nos hemos centrado en la geometría, esta forma de trabajo es válida para cualquier otra área de las matemáticas de Primaria y Secundaria, con una adaptación adecuada, si bien esta metodología es más eficaz cuando los conceptos que se estudian tienen un soporte gráfico destacado.

No es difícil encontrar en los libros de texto de Primaria adaptaciones de la metodología de enseñanza basada en el uso de ejemplos y contra-ejemplos para formar imágenes conceptuales ricas y definiciones conceptuales correctas. La Figura 8.20 muestra fragmentos de libros de texto que usan ejemplos y contra-ejemplos para enseñar diversos conceptos de geometría. En los tres casos, los contra-ejemplos ponen el énfasis en cada una de las propiedades características de la definición correspondiente. Así, algunos contra-ejemplos de polígonos tienen todo su borde curvilíneo y los otros tienen su borde combinando segmentos rectos y curvos, con uno de ellos cuya forma es muy similar a la de un polígono ya que sólo tiene un lado curvado. Entre los contra-ejemplos de paralelogramo, algunos tienen dos lados paralelos y dos no paralelos mientras que otros no tienen ningún par de lados paralelos. Del mismo modo, algunos contra-ejemplos de poliedro tienen la superficie total o casi totalmente curva, mientras que uno de estos sólidos (con forma de puente) es muy parecido visualmente a los poliedros porque la mayoría de sus caras son polígonos.

No obstante, se observa en estos tres casos que la definición se ha dado siempre antes de mostrar los ejemplos y contra-ejemplos, cosa que impide que los niños descubran por sí mismos las propiedades características de los ejemplos y establezcan conexiones fuertes entre su imagen conceptual y su definición conceptual. La estrategia más interesante es presentar a los estudiantes las figuras mezcladas y pedirles que las distribuyan en dos grupos atendiendo a alguna propiedad geométrica para, finalmente, dar nombre y definir el conjunto de las figuras que tienen las propiedades adecuadas.

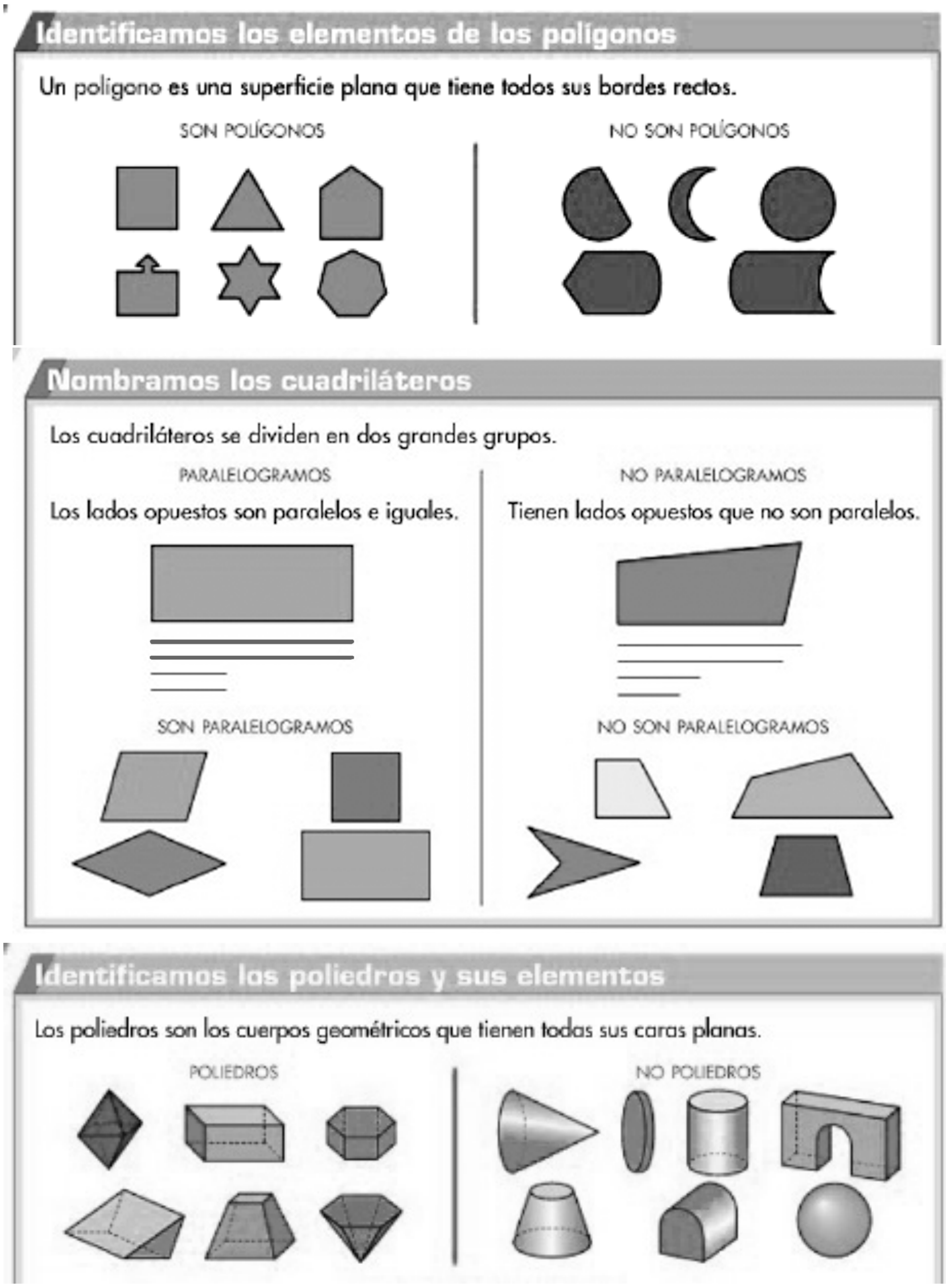


Figura 8.20. Uso de ejemplos y contra-ejemplos en libros de texto de 3º y 4º de Primaria.

Actividad 8.5: Como ejercicio final, de aplicación de todas las ideas presentadas en este capítulo, crea conjuntos de ejemplos y contra-ejemplos para la enseñanza de otros conceptos estudiados en los temas de geometría de los diversos cursos de Primaria y, si es posible, lleva a cabo esta metodología de enseñanza durante las prácticas de enseñanza.

9.4. Referencias

Gutiérrez, A.; Jaime, A., "Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio", en J. Giménez; S. Llinares; M.V. Sánchez (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*, Comares, Granada, 1996, pp. 143-170.

Vinner, S., "The role of definitions in the teaching and learning of mathematics", en D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*, Kluwer, Dordrecht (Holanda), 1991, pp. 65-81.