Citar como: Jaime, A., Gutiérrez, A. (1994). Analizando las reacciones de los estudiantes en clase de geometría. El modelo de Van Hiele, *Aula, 22*, 5-10.

Analizando las reacciones de los estudiantes en clase de Geometría: El Modelo de Van Hiele

Adela Jaime Pastor y Angel Gutiérrez Rodríguez
Depto. de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia.

Todo profesor de Matemáticas, de cualquier nivel educativo, tiene entre los primeros objetivos de sus cursos lograr que sus alumnos incrementen sus conocimientos y mejoren su forma de razonar, aproximándola cada vez más a lo que se entiende por razonamiento matemático. Es deseable que los estudiantes lleguen a interpretar, comprender y formular correctamente definiciones, a entender y realizar demostraciones formales, a comprender el papel de axiomas, propiedades, teoremas, implicaciones, ... a poseer, en resumen, una visión de la organización de las Matemáticas. A lo largo de las Enseñanzas Primaria y Secundaria son muy pocos los estudiantes que adquieren esa perspectiva y la mayoría consideran el mundo matemático como algo inalcanzable, confuso, creado solamente para desorientar y complicarles la existencia.

Entre los pasos que se han dado hacia adelante para ayudar a los profesores a comprender estas situaciones, figura la aportación de Pierre y de Dina Van Hiele. Eran éstos unos profesores de Matemáticas de Enseñanza Secundaria que, hace algunas décadas, observaron en sus alumnos los mismos errores y las mismas dificultades año tras año, aunque profesores y estudiantes se esforzaran, respectivamente, en explicar mejor e intentar comprender. Ello les condujo a la elaboración de una explicación para esta situación, conocida actualmente como el **Modelo de Van Hiele**, en la que describen cómo evoluciona en Geometría la forma de pensar de los estudiantes y dan a los profesores unas pautas prácticas a seguir en la organización de las clases para conseguir un progreso efectivo de sus alumnos.

El campo de aplicación más directa del Modelo de Van Hiele es la **Geometría**, pues es aquí donde los Van Hiele centraron principalmente sus observaciones, y es donde hay unas descripciones más detalladas del proceso de aprendizaje de los diferentes conceptos matemáticos. Pero esto no quiere decir que sea el único; los principios generales que inspiran el modelo de Van Hiele son válidos para organizar la enseñanza y comprender las reacciones de los estudiantes en cualquier área de las Matemáticas escolares. El Modelo de Van Hiele se ha usado tanto para trabajar en campos muy específicos (por ejemplo, el aprendizaje de los polígonos) como para organizar la enseñanza de la Geometría en todo el periodo de Enseñanza Primaria y Secundaria (por ejemplo, el currículum recientemente implementado en EE.UU., NCTM (1989)) e incluso el currículum completo de Matemáticas de esos tramos educativos (por ejemplo, en la URSS en los años 60, Wirszup (1976), o en Holanda en los 70, Treffers (1987)).

El aspecto descriptivo del Modelo de Van Hiele, de la forma de razonar los estudiantes, está constituido por los **cinco niveles de razonamiento**. El aspecto instructivo del modelo se especifica mediante las **fases de aprendizaje**. A continuación presentamos brevemente las características de los cinco niveles de razonamiento, cuyas descripciones más detalladas se pueden encontrar en Crowley (1987), Hoffer (1983) y Jaime, Gutiérrez (1990).

Los Niveles de Razonamiento.

Cada nivel de razonamiento supone una forma distinta de comprender los conceptos matemáticos, lo cual se traduce en una manera diferente de identificar, clasificar, demostrar, relacionar, etc. Los niveles de Van Hiele son secuenciales, se adquieren ordenadamente y no se puede saltar ninguno.

Primer nivel. Está caracterizado por poseer y utilizar una visión global de los conceptos: No se emplean sus elementos ni propiedades. Las justificaciones de los estudiantes de este nivel hacen referencia con frecuencia a objetos físicos o al nombre del concepto o incluyen características visuales. Por ejemplo, una figura se identifica como un rombo *porque se parece a un rombo* o *porque tiene un pico hacia arriba y otro hacia abajo.*

Segundo nivel. La comprensión y empleo de los conceptos se lleva a cabo a través de sus elementos y propiedades matemáticos, aunque sin establecer relaciones entre ellos, o sea, no se considera que unas propiedades son consecuencia necesarias de otras.

Los estudiantes del segundo nivel trabajan sobre casos concretos, generalizando los resultados obtenidos en uno o dos ejemplos y considerándolos válidos para todos los ejemplos de ese concepto o propiedad. Ello hace que las demostraciones se entiendan como verificaciones en uno o pocos casos concretos.

Las definiciones se entienden como listas de propiedades ciertas para ese concepto, en las que con frecuencia se incluyen más condiciones de las suficientes o se omite alguna necesaria, pero que, sin embargo, sí se tiene en cuenta. Por ejemplo, un estudiante puede definir un rectángulo como *un cuadrilátero con dos* *pares de lados paralelos, unos más largos que los otros, y con dos diagonales,* exigiendo, sin embargo, implícitamente, al dibujar e identificar rectángulos, que los ángulos sean rectos.

Las clasificaciones de figuras que se comprenden en este nivel son las disjuntas, existiendo problemas con las inclusivas. Por ejemplo, si a un estudiante del segundo nivel el profesor le presenta las definiciones de cuadrado y rectángulo según las cuales los cuadrados son un subconjunto de los rectángulos, el estudiante no comprenderá plenamente esta relación entre cuadrado y rectángulo, independientemente de que sí sea capaz de memorizar y recitar las definiciones y la relación correctas.

Tercer nivel. Está caracterizado por la comprensión y utilización de las relaciones entre las propiedades. Ello hace que los estudiantes:

Entiendan lo que es una definición matemática como conjunto de condiciones necesarias y suficientes, de manera que no haya más ni menos de las imprescindibles.

Comprendan y efectúen clasificaciones inclusivas cuando corresponda, y puedan entender la variación en el tipo de clasificación que se produce cuando se modifica alguna de las definiciones originales. Por ejemplo los estudiantes de este nivel deben reconocer que, con la definición usual de paralelogramo, si definimos los trapecios como los "cuadriláteros con dos lados paralelos", todo paralelogramo es un trapecio, mientras que si definimos los trapecios como los "cuadriláteros con sólo dos lados paralelos", los paralelogramos y los trapecios son familias disjuntas.

Comprenden la necesidad de demostrar las afirmaciones y pueden realizar demostraciones informales. Para ello se suelen basar en ejemplos o situaciones concretas, pero dándole al ejemplo un sentido de generalidad muy diferente del que le da un estudiante del segundo nivel.

Pueden efectuar y comprender implicaciones simples, pero todavía no tienen la experiencia suficiente para poder organizar la secuencia de implicaciones necesaria para llevar a cabo una demostración formal completa, aunque sí pueden comprender demostraciones formales cortas cuando se les dan hechas, y repetirlas.

Cuarto nivel. La característica básica de este nivel es que los estudiantes adquieren plenamente la capacidad de razonamiento lógico formal típico de las matemáticas. Además:

Pueden entender los razonamientos lógicos y las demostraciones formales, teniendo una visión global de las mismas.

Entienden el papel de las demostraciones formales, así como el de los demás elementos de un sistema axiomático formal (términos no definidos, axiomas, definiciones, etc.).

Admiten la posibilidad de realizar una demostración por varios caminos diferentes y también la existencia de distintas definiciones equivalentes de un mismo concepto.

Quinto nivel. Este nivel cae por completo fuera del alcance de los estudiantes usuales de Enseñanza Secundaria. Su característica central es la capacidad para manejar diferentes sistemas axiomáticos (es decir, diferentes geometrías), comparando sus axiomas, conceptos y propiedades.

Las personas que se encuentran en este nivel también son capaces de estudiar una determinada geometría sin utilizar ningún modelo concreto que la represente.

♦ – ♦ – ♦ – ♦ – ♦

Es muy frecuente encontrar profesores, especialmente de Secundaria, que intentan desarrollar sus clases de Matemáticas, y en particular de Geometría, con un nivel de razonamiento superior al que poseen los alumnos. Ello produce una incomprensión total, ya que cada nivel posee su propio lenguaje y para dos personas de distintos niveles incluso las mismas palabras poseen distinto significado.

Veamos algunos ejemplos en los cuales mostramos cómo estudiantes de los diferentes niveles de razonamiento reaccionan de distintas maneras ante las mismas situaciones. Todos ellos son representativos de un amplio colectivo de estudiantes, puesto que contestaciones similares aparecen con frecuencia en grupos de alumnos de distintos Centros, ciudades y paises y es posible que si usted, lector, se dedica a la enseñanza, también las encuentre en sus clases de cualquiera de los niveles educativos, incluso en la Universidad.

El primer ejemplo que presentamos es una tarea de identificación y clasificación de polígonos, análoga a las presentes en todos los libros de E.G.B. de los cursos correspondientes. Se trata de un profesor que se ha estado esforzando para lograr que sus alumnos utilicen correctamente las definiciones que aparecen en el libro de texto. En concreto, estas definiciones son las siguientes:

Cuadrado: Cuadrilátero con los 4 ángulos rectos y los 4 lados iguales.
Rectángulo: Cuadrilátero con los 4 ángulos rectos.

Rombo: Cuadrilátero con los 4 lados iguales.

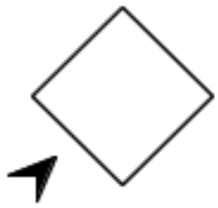

Figura 1.

El profesor presenta a los estudiantes un conjunto de polígonos, entre los cuales se encuentra el que mostramos en la figura 1, y ellos deben identificar todo lo que puede ser cada figura. A continuación exponemos varias respuestas que denotan grados de razonamiento de diversos niveles.

Alumno 1: *Como está es un rombo, porque* ***parece*** *un rombo.* ***Tiene forma de*** *diamante. Si se mira desde el lado* (el marcado por la flecha) *es un cuadrado, pero así* (como está colocado) *es un rombo.*

Alumno 2: *Es un rombo y un cuadrado porque los cuadrados son rombos aunque no lo parezcan.*

Alumno 3: *Es un cuadrado porque tiene los cuatro ángulos rectos y todos los lados iguales. No es un rombo porque los rombos tienen los ángulos iguales dos a dos. No es un rectángulo porque los rectángulos tienen dos lados más largos que los otros dos.*

Alumno 4: *Es las tres cosas porque los cuadrados son rombos y rectángulos* (en su justificación se sirve de las propiedades explicitadas en las definiciones).

A un profesor que conozca el Modelo de Van Hiele y analice esas contestaciones desde este punto de vista, cada respuesta le proporciona información interesante sobre lo que pueden comprender sus alumnos y cómo debe plantear las clases para que entiendan lo que dice. Así, el alumno 1 todavía necesita instrucción en el primer nivel de razonamiento, puesto que tanto su vocabulario como la solución que da se basan en el aspecto visual de la figura. No se debe pensar que respuestas como ésta sean exclusivas de la Enseñanza Primaria, pues incluso estudiantes de Secundaria y de Magisterio la proporcionan (ver, por ejemplo, Jaime, Gutiérrez (1990), pg. 380, nota 5). Esto indica que los estudiantes no asimilan los planteamientos que sus profesores hacen en clase, que siempre son de niveles superiores al suyo, y suelen recurrir a **memorizar** los resultados.

Una de tales actitudes la vemos en la respuesta del estudiante 2. En este caso el estudiante recuerda que un polígono puede ser cuadrado y rombo a la vez, pero utiliza de manera incorrecta esta relación lógica y, además, incluye una referencia visual, "aunque no lo parezca", que muestra que donde se siente seguro es en el primer nivel de razonamiento.

El estudiante 3 está trabajando en el segundo nivel, puesto que emplea las propiedades matemáticas de las figuras. Sin embargo, no sabe analizar las definiciones y se decanta por la concepción previa que tenía de cuadrados y rectángulos, exigiendo que se cumplan propiedades diferenciadoras que, sin embargo, no son necesarias según las definiciones que se presentan. En concreto, exige la existencia de ángulos y lados diferentes en rombos y rectángulos, respectivamente.

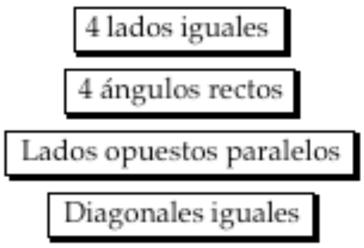

Figura 2.

En estos casos, el trabajo del profesor no puede consistir en repetir las relaciones inclusivas existentes entre las diversas clases, sino que debe proponer tareas de identificación de propiedades y de identificación de polígonos a partir las propiedades requeridas, hacer listas y compararlas. El uso de cartulinas en las que están escritas (o los alumnos escriben) las diversas propiedades (figura 2) puede resultar eficaz (Fuys, Geddes, Tischler 1988).

Por último, el estudiante 4 sí utiliza correctamente las definiciones, por lo que razona en el tercer nivel. A estudiantes como éste sí se les pueden proponer relaciones inclusivas, y habría que determinar si están ya en condiciones de iniciar el cuarto nivel, para proceder a impartir la enseñanza formal, propia de ese nivel.

♦ – ♦ – ♦ – ♦ – ♦

Como segundo ejemplo proponemos la búsqueda y demostración de una propiedad: "El número de diagonales que tiene un polígono de *n* lados". En este caso vamos a comentar formas de trabajo adecuadas para los diversos niveles de razonamiento.

El trabajo de los alumnos del <u>primer nivel</u> puede consistir en la identificación y trazado de diagonales en diversos polígonos concretos; ello no necesariamente dibujando sobre papel, puesto que también es adecuada, por ejemplo, la utilización de geoplanos, varillas, etc. El trabajo y las discusiones en grupo permiten descubrir algunas diagonales que habían quedado olvidadas y, progresivamente, se mejora la calidad de las soluciones, en cuanto que se omiten menos cada vez.

En este nivel de razonamiento, el ejercicio que planteamos como enunciado se reduce a un recuento del número de diagonales que se obtiene cada vez.

En el no tiene sentido todavía plantear un enunciado en el que figure una variable "*n* ", puesto que los estudiantes sólo trabajan y entienden situaciones concretas, aunque sí pueden generalizar a casos análogos. Se les puede proponer una limitación del problema general a polígonos con un número concreto de lados. Por ejemplo, observar qué sucede con los cuadriláteros, con los pentágonos, etc.

Para llegar a la relación general, resulta adecuada la utilización de tablas, que los alumnos deben completar. Por ejemplo, en la que mostramos a continuación las columnas segunda y cuarta se obtienen mediante el recuento en casos concretos; después, la visión de los valores numéricos permite establecer la relación entre las dos últimas columnas y, si ello interesa, la relación entre el número de lados y el de diagonales desde cada vértice.

nº de lados del polígono	nº de diagonales desde un vértice	nº de diagonales x nº de lados	nº de diagonales del polígono
3			
4	1	1 x 4 = 4	2
5			
40	37		
63			

Los estudiantes del tercer nivel también parten de situaciones concretas, pero ahora están encaminadas a la obtención de algún tipo de justificación general, no basada en el simple recuento de las diagonales en algunos polígonos. En las generalizaciones pueden incluir la utilización de variables, n en este caso.

Resulta adecuado que los estudiantes procedan al recuento de diagonales en diversos polígonos y que intenten obtener la relación general pedida. Dado que ésta no es evidente, se puede guiar la búsqueda y posterior demostración, pidiéndoles que obtengan el número de diagonales desde un vértice para un polígono de n lados. La justificación del resultado no debe limitarse a detallar la relación numérica observada (4-3, 5-3, 6-3, ... n -3), sino que los estudiantes también deben explicar la razón de esa fórmula, basándose en el proceso de construcción de las diagonales (cada vértice se une con todos menos consigo mismo y con los dos adyacentes).

La visión de estos últimos datos permite obtener de inmediato la fórmula general, $\frac{\text{nº de diag. desde un vértice x nº de vértices}}{2}$, ya que la relación numérica (dividir entre 2) es evidente. Pero de nuevo se debe promover una demostración basada en la construcción de las diagonales, para lo cual con frecuencia es necesario que el profesor proporcione una orientación muy directa. Para terminar la actividad, es conveniente que los estudiantes repitan la demostración completa, explicando cada una de las implicaciones.

En el cuarto nivel hay que proponer que los alumnos elaboren por sí mismos demostraciones formales. No obstante, en ocasiones se requiere una "idea feliz" para elegir un camino adecuado. Por ello, se pueden dar indicaciones que eviten esas ideas fortuitas. por ejemplo, en este ejercicio se les puede indicar a los estudiantes que piensen en el número de diagonales que salen desde cada vértice, sin más indicaciones. Al contrario que en los niveles anteriores, ahora no es necesario hacer referencia a polígonos concretos, de cierto número de lados.

♦ – ♦ – ♦ – ♦ – ♦

Como último ejemplo de aplicación de los niveles de Van Hiele, vamos a mostrar algunas ideas generales sobre la presentación y el desarrollo en las aulas de las isometrías del plano. Por una parte, los conceptos de traslación, giro y simetría son sencillos, por lo que pueden empezar a estudiarse en el primer nivel de razonamiento pero, por otra parte, la estructura del grupo de las isometrías del plano es lo suficientemente compleja como para que su estudio no se pueda completar hasta haber alcanzado el cuarto nivel de Van Hiele. A continuación enunciaremos algunas actividades apropiadas para el aprendizaje de este importante tema a lo largo de los diferentes niveles de razonamiento.

Primer nivel: Los estudiantes deben ser encaminados al descubrimiento de las características visuales de cada isometría y del desplazamiento seguido por una figura en su recorrido. Para esto, resulta adecuado el empleo de piezas recortadas para moverlas sobre un camino recto (traslaciones) o circular (giros), o mirarlas con un espejo y darles la vuelta (simetrías). También es conveniente servirse de herramientas auxiliares que produzcan las isometrías deseadas, como reglas para deslizar las piezas en las traslaciones, discos de papel transparente para los giros, o espejos y "miras" (rectángulos de plexiglás transparente de color oscuro, que permite ver la imagen simétrica a su través) para las simetrías; para estas últimas, el plegado es también un método eficaz.

Los ejercicios que los estudiantes deben hacer para desarrollar el primer nivel de razonamiento tienen como objetivo el reconocimiento de figuras isométricas (no cambia la forma ni el tamaño), trasladadas, giradas y simétricas a partir de la realización de los movimientos correspondientes y de la identificación de sus características visuales, mediante desplazamientos manuales aproximados o con la ayuda de los soportes mencionados en el párrafo anterior. También resulta útil para completar el trabajo en este nivel presentar a los estudiantes ejemplos y contraejemplos de cada movimiento, para que diferencien unos de los otros y expliquen sus razones.

Segundo nivel: El objetivo inicial de la enseñanza en este nivel es proceder al descubrimiento y empleo de las características matemáticas de cada isometría, a identificarla y aplicarla a partir de sus elementos característicos (vector de la traslación, centro y ángulo del giro y eje de la simetría) y a servirse de la notación y vocabulario matemáticos para puntos y movimientos.

Un segundo objetivo es proponer a los estudiantes actividades dirigidas a descubrir algunas propiedades básicas de cada isometría a partir de la consideración de ejemplos. En particular, se debe resaltar la igualdad de longitud, dirección y sentido en el desplazamiento efectuado por todos los puntos de una figura en una traslación, e introducir y emplear el concepto de vector de la traslación. En los giros, la equidistancia al centro de giro y la invarianza del ángulo girado por todos los puntos de la figura. En las simetrías, la equidistancia de puntos simétricos respecto del eje y la perpendicularidad al eje del segmento que los une.

Entre las propiedades a descubrir y emplear destacan el paralelismo y la igualdad de los segmentos que unen puntos homólogos por una traslación, la idempotencia de las simetrías, la relación de equivalencia de giros, ... También entra en el trabajo de este nivel iniciar el estudio de la composición de movimientos: Traslaciones, giros del mismo centro, simetrías, planteadas en situaciones concretas, esto es, sobre una figura dada y con unas isometrías específicas.

Figura 3.

Por ejemplo, aplicarle a la figura A (fig. 3) las composiciones $T_a \bullet T_b \bullet T_c$ y $S_e \bullet S_e \bullet S_e \bullet S_e$. La conmutatividad de las traslaciones y los giros del mismo centro es también una propiedad a descubrir, generalizar y emplear en este nivel, así como otras propiedades, no menos interesantes, como la peculiaridad de los giros de 180°, la invarianza de la inclinación de las imágenes de una figura por giros del mismo ángulo y centros diferentes, etc.

Tercer nivel: Se adquiere la visión general de las relaciones entre las isometrías, trabajando sobre situaciones generales de composiciones y descomposiciones, de manera que las propiedades descubiertas en el nivel anterior permiten comprender las características de figuras y movimientos resultantes.

Se descubren y emplean algunas propiedades que requieren para su justificación el empleo de implicaciones o la relación y combinación de propiedades, tales como el cálculo del centro de giro mediante corte de mediatrices. Ello permite completar los casos de composición de isometrías que no se realizaron en el segundo nivel (por ejemplo, composición de giros de distinto centro) y proceder a realizar composiciones y descomposiciones de cualquier tipo de isometrías. Las justificaciones son generales, basadas en propiedades descubiertas con anterioridad, de acuerdo con el estilo propio del tercer nivel de razonamiento.

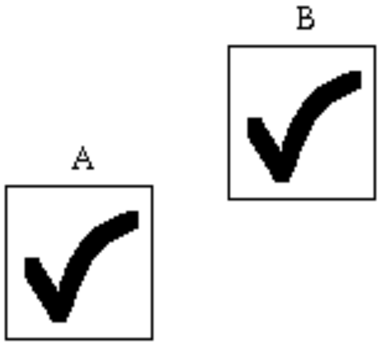

Figura 4.

Ejemplo: "Simplemente con mirar las figuras A y B (figura 4), justificar si se puede pasar de A a B mediante: Dos traslaciones. Dos giros de distinto centro. Cuatro simetrías. Tres simetrías. ... En los casos afirmativos, indicar cuántas soluciones hay, explicar el proceso que se puede seguir para obtener una solución y después darla".

Una forma de resolver este problema consiste en basarse en la igualdad de inclinación de las figuras A y B, por lo que hay una traslación entre ellas. Por tanto, descomposiciones en dos traslaciones, en dos giros de distinto centro con suma de ángulos múltiplo de 360°, y en cuatro simetrías (tomando dos pares de ejes de simetría de manera que cada par produzca una traslación o un giro, con lo cual el ejercicio es equivalente al anterior) son posibles. No es factible servirse de tres simetrías puesto que la figura imagen sería inversa de la original.

Otro tipo de ejercicios a desarrollar incluye la orientación de los estudiantes hacia la comprensión de demostraciones formales y la realización de algún paso. Por ejemplo, con alguna indicación, los estudiantes pueden desarrollar la demostración formal de la conmutatividad de la composición de traslaciones o de giros del mismo centro.

<u>Cuarto nivel:</u> Se organizan y efectúan demostraciones formales. El trabajo de este nivel debe comenzar por situaciones sencillas, a partir de las cuales los estudiantes vayan afianzando gradualmente su comprensión de la organización de una demostración y del significado de elementos como hipótesis, tesis, axioma, teorema, etc. Por ello, el paso de las demostraciones informales (nivel 3) a las formales (nivel 4) debe hacerse con suavidad y sin prisas; especialmente en las primeras demostraciones que se estudien, conviene pedirles a los alumnos que lleven a cabo esquemas con las partes de la demostración, las propiedades que van a utilizar y el momento en que las emplean.

Como ejemplo de demostración a proponer cuando los estudiantes ya han establecido los fundamentos de este nivel, señalamos la propiedad de que "toda isometría del plano se puede descomponer como producto de tres o menos simetrías axiales".

♦ – ♦ – ♦ – ♦ – ♦

Para finalizar este artículo queremos señalar que el progreso hasta conseguir un razonamiento de cuarto nivel requiere varios **años**. No se puede pretender pasar del primer nivel al cuarto mediante unas cuantas actividades organizadas para un curso escolar. Por otra parte, son muchos los estudiantes que cuando finalizan sus estudios de E. Secundaria se encuentran todavía en el segundo nivel. Asimismo hay que destacar que el nivel de razonamiento de un mismo individuo puede diferir de una parte de las Matemáticas a otra, puesto que la experiencia y la instrucción recibida son un factor importante en su desarrollo. Al comenzar un campo, el aprendizaje comienza por el primer nivel, y continúa de manera ordenada por los siguientes. Pero también sucede que si un estudiante tiene un alto nivel de razonamiento en otros campos de las Matemáticas, su ascenso en el nuevo será más rápido.

Referencias

Crowley, M.L. (1987): The van Hiele model of the development of geometric thought, en *N.C.T.M. (1987): Learning and teaching geometry, K-12* (1987 Yearbook) (N.C.T.M.: Reston, USA), pp. 1-16.

Fuys, D.; Geddes, D.; Tischler, R. (1988): *The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents* (Journal for Research in Mathematics Education Monograph n° 3). (N.C.T.M.: Reston, USA).

Hoffer, A. (1983): Van Hiele based research, en *Lesh, R.; Landau, M. (1983): Acquisition of mathematics concepts and processes* (Academic Press: N. York), pp. 205—227.

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1990): Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele, en *Llinares, S.; Sánchez, M.V. (1990): Teoría y práctica en educación matemática* (Alfar: Sevilla), pp. 295-384.

N.C.T.M. (1989): *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* (N.C.T.M.: Reston, VA, USA). (Traducido al español por S.A.P.M. Thales).

Treffers, A. (1987): *Three dimensions (a model of goal and theory description in mathematics instruction - the Wiskobas Project).* (D. Reidel: Dordrecht).

Wirszup, I. (1976): Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry, en *Martin, J.L.; Bradbard, D.A., ed. (1976): Space and geometry* (ERIC: Columbus, Ohio, USA), pp. 75-97.