Citar como: Jaime, A., Gutiérrez, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano* (colección Educación matemática en secundaria, 13). Síntesis. ISBN: 84-7738-346-8.

EL GRUPO DE LAS ISOMETRÍAS DEL PLANO

DEL PLANO

EL GRUPO DE LAS ISOMETRÍAS DEL PLANO

ADELA JAIME PASTOR y ÁNGEL GUTIÉRREZ RODRÍGUEZ

Departamento de Didáctica de la Matemática.
Universidad de Valencia.

ÍNDICE

1

INTRODUCCIÓN

1.1. Resumen general

Las isometrías constituyen una de las áreas de las matemáticas con mayor variedad de aplicaciones, tanto en otras partes de las matemáticas como fuera de ellas. No es nuestra intención dedicar esta introducción a justificar la necesidad de enseñar las isometrías en Primaria y Secundaria recurriendo a presentar una serie de citas de autores conocidos que abogan por su estudio. Más bien, nos conformamos con transmitir al lector algunas reflexiones personales.

Para lograr una buena comprensión de las matemáticas y un aprendizaje productivo, en los currícula de todos los niveles educativos es necesario tener presentes dos cosas: 1) Las matemáticas son una ciencia herramienta, luego es necesario mostrar a los estudiantes las conexiones existentes entre las matemáticas y otros campos de conocimiento, así como entre unas áreas y otras de las propias matemáticas. 2) Con mucha frecuencia, los conceptos matemáticos tienen diferentes componentes, de diversos tipos, por lo que la enseñanza debe plantear diversas aproximaciones, desde distintas perspectivas, a cada concepto o red de ellos.

Estos dos puntos son particularmente válidos para las isometrías: Por una parte, es posible presentar su estudio en diferentes contextos, como el campo elemental de los materiales manipulativos tradicionales (espejo, plegado, regla y compás, etc.), el informático (operando en lenguajes de programación como el Logo, en programas construidos ex profeso, o en programas tipo "cad", "draw" o "paint"), el de los problemas reales (trabajando en situaciones relacionadas con la arquitectura, la publicidad, la industria, el arte, la química, etc.), o el puramente matemático (en el que se estudian las propiedades algebraicas que permiten organizar las diferentes isometrías). Cada uno de estos contextos destaca más algunas componentes de los conceptos que otras, por lo que todos ellos son útiles y, en cierto modo, necesarios.

Por otra parte, las isometrías pueden servir como herramienta en otras áreas de la geometría para clasificación de polígonos y cuerpos espaciales, construcción de representaciones planas, en trigonometría, geometría analítica, cálculo, etc. De esta manera, las isometrías, y de forma más general las semejanzas, se pueden utilizar como elemento unificador que ayuda a los estudiantes pues les permite disponer de un reducido conjunto de conceptos, propiedades, algoritmos y métodos de resolución de problemas que son comunes a numerosos temas de matemáticas que estudian a lo largo de los cursos y que, al mismo tiempo, dan continuidad a la asignatura de matemáticas.

Este libro está dividido en 7 capítulos. Los capítulos centrales son los 5, 6 y 7, en los que presentamos una unidad de enseñanza de las isometrías del plano dirigida, principalmente, a estudiantes de Enseñanza Secundaria, tanto E.S.O. como Bachillerato, pero también a estudiantes de los últimos cursos de Enseñanza Primaria. Después de este primer capítulo introductorio, los capítulo 2, 3 y 4 tienen como finalidad sentar las bases, de diversos tipos, que fundamentan la organización de dicha unidad de enseñanza y sus contenidos: Base matemática, base didáctica y base psicológica.

El capítulo 2 está integrado por los contenidos matemáticos que componen el objeto de estudio de este libro, es decir el conjunto de las isometrías del plano. En este capítulo se resumen las definiciones de las diferentes isometrías, sus operaciones, estructura, y los principales teoremas. La finalidad del capítulo 2 no es hacer una descripción matemática exhaustiva del tema, sino servir de recordatorio a los lectores y de guía para identificar los contenidos matemáticos que aparecen en la unidad de enseñanza y su organización formal.

El capítulo 3 presenta resultados de investigaciones que han abordado la problemática de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías desde diferentes puntos de vista, analizando los conceptos más difíciles, la forma de progreso de los estudiantes, y su comportamiento ante determinados problemas. En ningún momento se debe desperdiciar la experiencia acumulada por otras personas que han trabajado en este contexto antes que nosotros. Teniendo en cuenta sus resultados, estamos en condiciones de prever mejor las respuestas de nuestros alumnos, de ayudarles a evitar o superar algunas dificultades, o de responder mejor a sus necesidades, todo ello sin tener que esperar a acumular estos conocimientos didácticos a partir de nuestra propia experiencia.

El objetivo del capítulo 4 es la componente psicológica que siempre está presente en el aprendizaje de las matemáticas. Los profesores, además de presentar a sus alumnos los contenidos matemáticos bien organizados desde el punto de vista lógico-formal, deben presentárselos bien organizados desde el punto de vista psicológico. Esto ofrece ciertas dificultades pues, en ocasiones, ambas organizaciones son contrarias. Un ejemplo lo tenemos en las propuestas que se hacían en los años 60 y 70, en plena vigencia del movimiento de las "matemáticas modernas", en las que la organización de los contenidos de Primaria se basaba en su estructura lógico-formal, mientras que la experiencia ha demostrado que el funcionamiento psicológico de los niños sigue caminos diferentes. En el capítulo 4 hacemos una descripción del modelo de razonamiento matemático de Van Hiele, que representa el marco de referencia para la estructura de la unidad de enseñanza. En nuestro caso, la componente psicológica predomina sobre la matemática pues, en ocasiones, detenemos un proceso deductivo para reanudarlo cuando los estudiantes tengan la capacidad de razonamiento necesaria para poder comprenderlo y abordar el descubrimiento y la justificación de las propiedades más complejas.

Por último, los capítulos 5, 6 y 7 contienen las secuencias de actividades que conforman la unidad de enseñanza de las isometrías del plano que presentamos, correspondientes a las traslaciones, los giros y las simetrías, respectivamente. Aunque, por las inevitables limitaciones de espacio, algunas actividades están resumidas, los contenidos de estos capítulos están listos para ser utilizados por los profesores en sus clases, sin más preparación que la inclusión de algunas situaciones más en las actividades pues, por lo general, los estudiantes necesitan realizar varias actividades análogas para captar, comprender y generalizar la información que se les está presentando.

Las secuencias de actividades de cada capítulo 5, 6 y 7 están organizadas explícitamente de acuerdo con el progreso por los sucesivos niveles de razonamiento de Van Hiele e implícitamente de acuerdo con las fases de aprendizaje propugnadas por el modelo de Van Hiele. Por lo tanto, la enseñanza debe hacerse progresando en paralelo en el mismo nivel de razonamiento con las diferentes isometrías. Aunque esta organización de los contenidos pueda dar, a primera vista, la impresión de que traslaciones, giros y simetrías aparecen como independientes entre sí, esto no es cierto, pues ya en los bloques de actividades correspondientes al segundo nivel de Van Hiele empiezan a aparecer relaciones entre unas y otras, que se completan y profundizan en las actividades que pueden realizar los estudiantes de los niveles tercero y cuarto.

1.2. Las Isometrías y los cubrimientos regulares

Cuando, como es nuestro caso, se organiza la enseñanza de las isometrías con un soporte gráfico y manipulativo, los cubrimientos regulares planos son una aplicación de las isometrías que los profesores utilizan con mucha frecuencia como forma de aumentar el interés de los estudiantes por las isometrías, para hacer la enseñanza más amena, y como fuente de aplicaciones de los conocimientos adquiridos. Las estructuras matemáticas de los cubrimientos van desde las muy simples, como los grupos cíclicos (rosetones generados por un giro) o los frisos y mosaicos generados por traslaciones, hasta las muy complejas, como los mosaicos generados por simetrías en deslizamiento. Ello hace que los profesores puedan seleccionar cubrimientos para profundizar en el estudio de cada isometría y para graduar la dificultad de manera adecuada a todos sus alumnos.

Creemos que, en cualquier nivel de razonamiento, la construcción y análisis de cubrimientos planos es un buen complemento al estudio de las isometrías del plano desde una perspectiva como la que hemos adoptado en este libro. En particular, la obra gráfica de M. Escher brinda excelentes posibilidades a los profesores y es muy motivadora para los estudiantes. No obstante, no vamos a tratar aquí el tema de los cubrimientos planos de manera detallada, pues hay suficiente número de publicaciones, tanto españolas (ver Alsina, Pérez, Ruiz, 1989, ó Pérez, 1992 entre otras) como extranjeras (ver Martin, 1982, O'Daffer, Clemens, 1977, Ranucci, Teeters, 1977, ó Serra, 1989 entre otras) en las que pueden encontrarse propuestas de enseñanza que encajan fácilmente en nuestra unidad de enseñanza. Hemos incluido solamente algunas actividades de iniciación a su estudio para indicar a los lectores cuándo es un momento apropiado para trabajar con cubrimientos, arte, etc.

1.3. Las Isometrías en los currícula de Enseñanza Primaria y Secundaria

Un criterio, que generalmente tiene un peso decisivo, para que un profesor o centro valore la conveniencia de incluir o no un tema en los cursos de matemáticas es si dicho tema está contemplado o no en los currículos oficiales en vigor, por lo que creemos pertinente hacer aquí una revisión de la situación de las isometrías en los programas de matemáticas de las nuevas Primaria, Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Nos hemos basado para ello en los contenidos especificados en los reales decretos del Ministerio de Educación y Ciencia (M.E.C.) en los que se establecen las enseñanzas mínimas para los tres tramos educativos, y en los decretos de la Comunidad Valenciana, que es una de las comunidades autónomas con competencias en educación, en los que se establecen los currículos de las diferentes asignaturas en su primer nivel de concreción (los decretos del M.E.C. equivalentes a éstos no aportan ninguna novedad significativa respecto de los decretos de enseñanzas mínimas, por lo que no nos referiremos aquí a ellos). Para cada nivel educativo, los currículos oficiales de matemáticas consultados presentan diferencias interesantes en los contenidos propuestos, pero son bastante homogéneos en cuanto a sus concepciones de la enseñanza de las matemáticas y a las propuestas que plantean de metodología de trabajo para profesores y alumnos, actitudes, y formas de evaluación, en las que, por lo general, las diferencias son más de forma que de fondo. Algo que tienen en común los currículos oficiales consultados, como consecuencia del objetivo con el que están escritos estos documentos y del uso que se espera que hagan de ellos los centros docentes y sus profesores, es que son sumamente escuetos en el enunciado de los contenidos matemáticos que proponen que sean enseñados. Por lo tanto, en la revisión que hemos realizado, hemos observado si se citan o no las isometrías en los listados de los bloque de contenidos y hemos extraído algunas consecuencias sobre qué contenidos específicos pueden incluirse bajo los epígrafes correspondientes de dichos listados.

La propuesta de contenidos mínimos de Educación Primaria (M.E.C., 1991) tiene un bloque dedicado a la geometría:

> **Bloque 3**: Formas geométricas y situación en el espacio.
>
> Conceptos:
> 1. La situación en el espacio (distancias, ángulos y giros, y sistemas de coordenadas cartesianos).
> 2. Relación entre elementos geométricos (paralelismo, perpendicularidad).
> [......]
> 5. Regularidades y simetrías.
>
> Procedimientos:
> 1. Descripción de la situación y posición de un objeto en el espacio con relación a uno mismo y/o a otros puntos de referencia apropiados.
> [......]
> 3. Comparación y clasificación de figuras y cuerpos geométricos utilizando diversos criterios.
> 4. Formación de figuras planas y cuerpos geométricos a partir de otros mediante composición y descomposición.
> 5. Búsqueda de elementos de regularidad y simetría en figuras y cuerpos geométricos.
>
> Actitudes:
> [......]
> 2. Sensibilidad y gusto por la elaboración y por la presentación cuidadosa de las construcciones geométricas.
> 3. Precisión y cuidado en el uso de instrumentos de dibujo y disposición favorable para la búsqueda de instrumentos alternativos.
> [......]

Por su parte, en el currículo de Educación Primaria de la Comunidad Valenciana (G. Valenciana, 1992a) hay también un bloque de contenidos dedicado a la geometría, en el que se propone como objetivos primordiales la exploración del espacio, considerando los conceptos y procesos matemáticos que aparezcan como medios para organizarlo, la familiarización con los objetos geométricos presentes en la vida cotidiana, y el conocimiento de las propiedades geométricas elementales. Entre los contenidos de este bloque figuran:

Bloque 3: Geometría.

1. Descripción de posiciones y movimientos.
[......]
• Contexto geométrico: por medio de coordenadas, distancias, ángulos, giros, ...
2. Reconocer, describir, clasificar, nombrar y definir formas y configuraciones geométricas de tres, dos y una dimensiones.
• Al practicar los procesos indicados aparecerán elementos y relaciones geométricas: [......] ángulos, paralelismo, perpendicularidad, inclinación, incidencia, simetrías, [......]
3. Construir, dibujar, modificar y explorar las formas y configuraciones geométricas.
[......]
• Truncamientos, transformaciones. Composición y descomposición.
[......]

Las isometrías están presentes en estos bloques de contenidos dotadas de diversos significados. Por una parte, aparecen como movimientos (traslaciones y giros) y transformaciones (simetrías) en el espacio físico, útiles para describir posiciones y recorridos de objetos. Por otra parte, aparecen como propiedades geométricas de figuras planas o espaciales, que permiten describirlas, compararlas y clasificarlas. En la unidad de enseñanza que presentamos aquí, corresponden a estos objetivos y contenidos de Primaria las actividades del primer nivel de Van Hiele y la primera parte de las actividades del segundo nivel en cada isometría. Con esto no queremos dar a entender que dichas actividades no se puedan o deban utilizar en otros niveles educativos superiores. Por el contrario, es muy conveniente que los profesores de Secundaria comiencen la enseñanza de las isometrías desde el principio cuando sus alumnos no hayan estudiado nunca estos conceptos.

También en los currículos de Educación Secundaria Obligatoria hay un bloque de contenidos dedicado a la geometría que incluye la continuación del estudio de las isometrías. En la propuesta de contenidos mínimos (M.E.C., 1991) se aborda el estudio de los elementos característicos del plano y el espacio, así como las relaciones entre ambos, la medida de magnitudes, la semejanza y las isometrías. En concreto, se propone:

Bloque 3: Representación y organización en el espacio.

Conceptos:
[......]
2. Figuras y cuerpos geométricos: Elementos característicos y relaciones entre ellos.
[......]
4. Translaciones, giros y simetrías.

Procedimientos:
1. Utilización de la terminología y notación adecuadas para describir con precisión situaciones, formas, propiedades y configuraciones geométricas.
[......]
4. Búsqueda de propiedades, regularidades y relaciones en cuerpos, figuras y configuraciones geométricas.
[......]
6. Utilización de la composición, descomposición, intersección, movimiento, deformación y desarrollo de figuras, cuerpos y configuraciones geométricas para analizarlos u obtener otros.
[......]

Actitudes:
[......]
2. Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas.
3. Sensibilidad ante las cualidades estéticas de las configuraciones geométricas.
[......]

El currículo de la Comunidad Valenciana (G. Valenciana, 1992b) tiene unos objetivos y contenidos análogos a los detallados más arriba. Como sugerencias metodológicas específicas, se indica que "[......] serán objeto de estudio las simetrías, los giros y las traslaciones. El uso de tramas de distintos tipos ayudará a entender su construcción y permitirá hacer diseños personales. Los espejos, libros de espejos, transportadores, ... ayudarán en el trabajo con ángulos y simetrías. En general, es un bloque que se puede y debe trabajar con la ayuda de distintos materiales y juegos, lo que desarrollará, además, destrezas manipulativas importantes con algunos de esos materiales, como son manejar la regla, el compás, la cinta métrica, ... con soltura". Entre los contenidos de este bloque figuran:

Bloque 3: Geometría.

1. Elementos básicos.
[......]
• Simetrías y regularidades en las construcciones y configuraciones geométricas.
• Paralelismo y perpendicularidad.
[......]
4. Transformaciones.
• Traslaciones, giros y simetrías.
• Propiedades que se conservan con estas transformaciones.
• Composición de transformaciones en casos sencillos.

Analizando la metodología de trabajo propuesta en la E.S.O., tanto de manera general como específica para este bloque, se observa que hay un incremento del rigor y un estudio más detallado de los conceptos matemáticos respecto de Primaria, aunque sin llegar a la abstracción y métodos propios de las matemáticas formales. En el área concreta de las isometrías, se sigue teniendo en cuenta la característica de movimientos, aunque se potencia la característica de transformaciones. Estamos, pues ante una metodología correspondiente a los niveles 2 y 3 de Van Hiele. Los contenidos de la unidad de enseñanza que presentamos correspondientes a esta propuesta para la E.S.O. son las actividades de la segunda parte del nivel 2 de razonamiento y la primera parte del nivel 3 de cada isometría. En estas actividades la experimentación, manipulación de objetos concretos, y dibujo siguen siendo la base del trabajo de los estudiantes, pero se les pide una mayor capacidad de abstracción, de generalización y de rigor en sus razonamientos y justificaciones.

Repasemos, por último, los contenidos de los currículos de Bachillerato. La existencia de 4 especialidades en Bachillerato (Artes, Ciencias de la Naturaleza y Salud, Humanidades y Ciencias Sociales, y Tecnología) se traduce en notables diferencias entre los contenidos de los cursos de unas y otras. El Bachillerato de Artes no tiene ninguna asignatura de matemáticas generales, si bien la optativa "Matemáticas de la forma" se dedica a estudiar geometría, en particular diversos conceptos geométricos relacionados con las isometrías, las composiciones de isometrías y los cubrimientos regulares, todo ello tanto en el plano como en el espacio. Así mismo, las isometrías del plano están presentes en otras asignaturas de orientación más profesional como las de dibujo técnico o artístico, diseño, etc., algo que también ocurre en asignaturas análogas del Bachillerato de Tecnología. Centrándonos en los contenidos de las asignaturas de matemáticas, se observa un cambio de orientación respecto de los niveles educativos inferiores en los contenidos, objetivos y metodologías de trabajo, ya que en las diversas asignaturas de Bachillerato se abordan unos temas que, por su propia naturaleza, requieren de mayor abstracción y rigor.

En la propuesta de enseñanzas mínimas (M.E.C., 1992), hay bloques de contenidos dedicados a la geometría en las especialidades de C. de la Naturaleza y Salud, y de Tecnología (se trata de las mismas asignaturas en ambas especialidades). En estos bloques se propone estudiar trigonometría, ecuaciones de rectas, planos y otras formas geométricas, geometría vectorial, y cónicas.

Por su parte, en el currículo de la Comunidad Valenciana (G. Valenciana, 1994) sólo se propone estudiar las traslaciones y su composición para introducir y dar significado a los vectores en el espacio cartesiano y su suma.

Aunque no se contempla de manera explícita en ninguno de los dos casos el estudio de las isometrías, una opción interesante para los profesores de Bachillerato es continuar trabajando con las isometrías, no como objeto de estudio por sí mismas, sino como herramienta de demostración y resolución de problemas. Por ejemplo, son numerosas las relaciones trigonométricas que, interpretadas desde el punto de vista de las isometrías, pierden el carácter de incomprensibles que tienen habitualmente para los estudiantes. También el soporte de las isometrías es útil en la geometría vectorial, con mayor amplitud y de manera más significativa que el simple uso de la composición de traslaciones para dar sentido a la suma de vectores (¡algo contradictorio cuando, probablemente, se ha usado con anterioridad la suma de vectores para dar sentido a la composición de traslaciones!).

Dentro de nuestra unidad de enseñanza, las actividades propias del Bachillerato de las especialidades de Tecnología y Ciencias Naturales y Salud son las propuestas en la segunda parte del nivel 3 de razonamiento y, si lo permite el nivel de razonamiento alcanzado por los estudiantes, las del cuarto nivel de Van Hiele. Estas actividades sirven a los estudiantes para completar su conocimiento de las isometrías del plano y para ayudarles a iniciarse en los métodos de trabajo de las matemáticas formales, su notación y reglas de juego.

1.4. Características generales de la unidad de enseñanza

La propuesta que hacemos pretende facilitar a los estudiantes una comprensión progresiva de las isometrías del plano, de manera que, al alcanzar el tercer nivel de razonamiento de Van Hiele, se consiga una comprensión clara de los movimientos y de las relaciones existentes entre ellos, y posteriormente, en el cuarto nivel, los alumnos sean capaces de profundizar en la comprensión, de dar un enfoque formal a las demostraciones, propiedades y relaciones observadas y utilizadas con anterioridad, y de basarse en ese enfoque para llevar a cabo nuevos descubrimientos.

En el capítulo 4 hemos presentado la descripción de los niveles de Van Hiele en las isometrías del plano. Ello ha servido de base para diseñar la secuencia de actividades que proponemos. Hemos organizado nuestra propuesta por movimientos, en el siguiente orden: traslaciones, giros y simetrías. En cada uno de estos movimientos hemos seguido secuencialmente los niveles. No obstante hay que hacer algunas puntualizaciones:

En el primer nivel de Van Hiele se puede desarrollar cada movimiento independientemente de los demás, pero a partir del bloque de actividades del segundo nivel surgen interacciones entre ellos, por lo que su estudio no puede ser totalmente independiente. En nuestra propuesta, a partir del segundo nivel, la asimilación completa de los giros requiere el conocimiento de las traslaciones, y la asimilación de las simetrías exige conocer giros y traslaciones a ese nivel. En el tercer nivel sucede lo mismo, aunque de manera más intensa, y en el cuarto nivel sólo es posible estudiar en conjunto las tres isometrías, y lo presentamos en el bloque de simetrías.

En la figura 1.1 se pueden apreciar las interacciones que existen entre las diversas isometrías en los diversos niveles en la unidad de enseñanza que proponemos. Las flechas indican que son necesarios conocimientos del bloque en el origen de la flecha para completar las actividades del bloque en el final de la flecha. Evidentemente, el diagrama es transitivo.

$$\begin{tikzcd}
\text{Nivel 1} & \mathbf{T} \arrow[d] & \mathbf{G} \arrow[d] & \mathbf{S} \arrow[d] \\
\text{Nivel 2} & \mathbf{T} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{G} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{S} \arrow[d] \\
\text{Nivel 3} & \mathbf{T} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbf{G} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{S} \arrow[dl] \\
\text{Nivel 4} & & \mathbf{T + G + S} &
\end{tikzcd}$$

Figura 1.1.

Intercalados entre las actividades de la unidad de enseñanza, presentamos, escritos en cursiva, los objetivos que pretendemos conseguir en cada grupo de actividades y algunos comentarios para los profesores sobre metodología, materiales, etc. en esas actividades. De esta forma es posible entender mejor la progresión de las actividades y se facilita el seguimiento del hilo conductor de la unidad de enseñanza.

Por lo general, para que los estudiantes comprendan y asimilen correctamente un concepto o una propiedad, no es suficiente con que resuelvan una actividad de cada tipo, sino que en ocasiones el profesor debe proponerles varias actividades similares. Esto depende mucho de cada grupo específico de estudiantes, su edad, sus conocimientos previos, etc. Por lo tanto, es probable que los profesores tengan que ampliar las actividades que presentamos para que sus alumnos consigan los objetivos marcados. Los tipos de actividades que incluimos en nuestra propuesta cubren las necesidades de aprendizaje de los contenidos matemáticos y de los procesos de razonamiento objetivo del bloque de actividades de cada nivel, por lo que no le resultará difícil al profesor proponer actividades análogas cuando ello sea necesario.

Existen unidades de enseñanza de las isometrías basadas en espejos, ordenadores y otros tipos de materiales o aparatos que, a veces, son sofisticados, caros o difíciles de conseguir. Nosotros hemos optado por crear un entorno de trabajo lo más simple y barato posible, que esté fácilmente al alcance de cualquier profesor de Primaria o Secundaria. Este entorno se basa en la utilización de:

- Papel y lápiz, y los instrumentos de dibujo habituales.
- Piezas recortadas de papel con figuras iguales a las que aparecen en las láminas y pegamento. En el anexo hay modelos de estas piezas preparados para ser fotocopiados. Los estudiantes deben disponer de la cantidad necesaria de piezas de papel para realizar los movimientos requeridos en las actividades. Queremos potenciar, sobre todo en las actividades de los dos primeros niveles de razonamiento, la visión dinámica de las isometrías, por lo que, en numerosas ocasiones, las actividades piden que se realice físicamente determinada traslación, giro o simetría. Efectuado el movimiento, la pieza se pega en el lugar correspondiente. Con ello, además, evitamos errores debidos a una falta de dominio de dibujo y se puede avanzar más deprisa, centrando la atención en las características matemáticas que interesan y no en los problemas de dibujo técnico.
- Espejos y "miras" para las actividades de comienzo del estudio de las simetrías axiales. Un "mira" es una pieza rectangular plana de plástico rígido, con las caras brillantes, transparente, y de color oscuro, que se sitúa perpendicularmente sobre el eje de simetría, igual que el espejo. El mira refleja la figura como un espejo, por lo que se ve la figura imagen en el lugar correspondiente, pero, por ser transparente, además permite tanto "calcar" las imágenes o poner una pieza recortada "debajo" de ellas, como comprobar si es correcto o no el dibujo o la colocación de una pieza simétrica.
- Unos discos transparentes, de entre 15 y 20 cm. de diámetro, de plástico flexible (por ejemplo de una carpeta de archivador) para las actividades de comienzo del estudio de los giros. Estos discos deben tener marcado el centro y permiten observar el giro de una figura si se coloca una pieza recortada sobre el disco y se le da vueltas sujetándolo con un aguja por el centro. Esto es particularmente útil cuando el centro de giro no toca a la figura. Ver Jaime, Gutiérrez y otros (1989).

Como final de este capítulo de introducción, sólo nos queda expresar nuestro deseo y confianza de que este libro sea útil a los profesores de matemáticas de Secundaria, a los cuales va dirigido de manera preferente. Es un libro que puede servirles como referencia y cuya lectura les puede ayudar a comprender mejor a sus estudiantes, pero, por encima de todo, es un libro escrito para ser utilizado en clase.

2

LAS ISOMETRÍAS DEL PLANO: ELEMENTOS MATEMÁTICOS

Antes de iniciar el estudio didáctico de las isometrías del plano y su problemática de enseñanza y aprendizaje, vamos a dedicar este capítulo a revisar el tema desde la perspectiva matemática. Con ello pretendemos que quien no haya estudiado con anterioridad las isometrías, o tenga un conocimiento superficial de las mismas, pueda aprender los conceptos y las propiedades básicas de cada isometría, lo cual le ayudará a leer los restantes capítulos sin dificultad, y que quien ya conozca con detalle las características de la estructura algebraica del conjunto de las isometrías del plano, pueda recordar durante su lectura aquellos aspectos que haya olvidado. Quien no necesite este recordatorio puede pasar directamente al capítulo 3.

En todo caso, como la presentación de los conceptos de las isometrías del plano y la demostración de sus diversas propiedades pueden organizarse de varias maneras, en este capítulo resumimos la organizacion deductiva que hemos tomado como base para la elaboración de la secuencia de enseñanza que presentamos en capítulos posteriores. Así pues, no pretendemos hacer ahora un recorrido exhaustivo por las propiedades de las diferentes isometrías, sino que sólo mencionamos las que se estudian en la unidad de enseñanza del capítulo 5 y las que son imprescindibles para poder comprender las demostraciones. Tampoco realizaremos las demostraciones con todo detalle, sino que omitiremos la justificación de algunos teoremas, o partes de ella, que sean evidentes. El lector que quiera completar su conocimiento matemático de las isometrías del plano debe acudir a la bibliografía matemática, por ejemplo a Martin (1982).

Es importante observar que, en este tema, numerosas demostraciones son de tipo constructivo. Esta particularidad se puede utilizar en las clase de dos maneras: Por una parte, en una enseñanza como la que proponemos, basada en la manipulación, experimentación y observación como vía de acceso al razonamiento abstracto, la resolución de problemas concretos y la abstracción de las técnicas de trabajo usadas en ellos ayuda a los estudiantes que se están iniciando en el razonamiento deductivo (tanto informal como formal). Por otra parte, las demostraciones muestran a los estudiantes capaces de entenderlas diversas técnicas para resolver problemas concretos, basados en isometrías específicas.

2.1. El Grupo de las Isometrías del Plano

La palabra *isometría* tiene su origen en el griego ισος μετρον, que significa igual medida. Así pues, las isometrías del plano son transformaciones del plano que conservan las medidas de longitudes, ángulos y superficies de las figuras del plano. En lo sucesivo nos vamos a referir solamente a las isometrías del plano, por lo que, por lo general, las denominaremos simplemente isometrías. Análogamente, aunque no se indique explícitamente, todos los elementos geométricos que se utilicen (puntos, rectas, vectores, etc.) pertenecerán al plano. Por *transformación del plano* entendemos una aplicación biyectiva del plano en sí mismo. Entonces:

Definición 1. Una *isometría del plano* es una transformación del plano $f: \Pi \longrightarrow \Pi$ tal que $d(p,q) = d(f(p), f(q)) \;\; \forall\, p, q \in \Pi$.

Un caso particular de isometría del plano es la aplicación *identidad* $I: \Pi \longrightarrow \Pi$ tal que $I(p) = p \;\; \forall\, p \in \Pi$.

Definición 2. Dos isometrías f y g son *equivalentes* cuando $f(p) = g(p) \;\; \forall\, p \in \Pi$.

Matemáticamente, la definición de isometrías equivalentes es trivial pero, desde el punto de vista didáctico, se trata de un concepto importante cuando la enseñanza de las diferentes isometrías se basa en las ideas de movimientos físicos, como hacemos nosotros. En este contexto, que dos isometrías sean equivalentes significa que ambas mueven cada punto del plano a la misma posición final, aunque lo hagan siguiendo recorridos diferentes (figura 2.1).

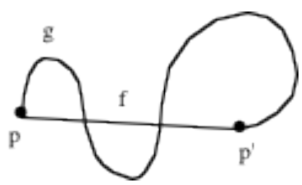


Figura 2.1. Isometrías equivalentes.

Definición 3. Un punto $p \in \Pi$ es *invariante* por una isometría f si se verifica que $f(p) = p$. Un subconjunto S del plano es *invariante* por una isometría f si se verifica que $f(S) = S$.

Al estudiar la invarianza de conjuntos por isometrías, se suele distinguir entre invarianza *global,* cuando se cumple la definición 3, e invarianza *puntual,* cuando cada punto de S es invariante. Por lo tanto, la invarianza puntual es un caso particular de invarianza global. En las secciones siguientes veremos que las invarianzas de una isometría permiten caracterizar el tipo de que se trata.

Definición 4. El *producto de dos aplicaciones* f, g: $\Pi \longrightarrow \Pi$ es la aplicación g°f: $\Pi \longrightarrow \Pi$ tal que g°f(p) = g(f(p)) $\forall$ p $\in \Pi$.

Esta definición es una particularización de la definición general de producto de aplicaciones. Por las propiedades generales de esta operación, sabemos que cuando f y g son transformaciones del plano, también g°f es una transformación del plano.

2.1.1. Traslaciones

Definición 5. Dado un vector libre $\vec{a}$, llamamos *traslación de vector* $\vec{a}$ a la transformación T_a: $\Pi \longrightarrow \Pi$ tal que $T_a(p)$ = p' si y sólo si $\overrightarrow{pp'} = \vec{a}$ $\forall$ p $\in \Pi$.

El vector $\vec{a}$ es el *vector de traslación*. En adelante, entenderemos siempre que los vectores son libres, salvo que se indique explícitamente lo contrario. Físicamente, una traslación corresponde al movimiento en línea recta realizado desde el origen hasta el final del vector de traslación (figura 2.2).

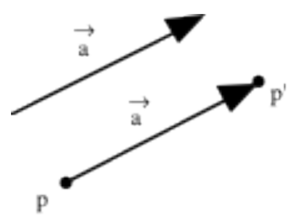


Figura 2.2.

Teorema 1. Dada una traslación T_a de vector no nulo, se tiene que:

1) Ningún punto es invariante: $T_a(p) \neq p$ $\forall$ p $\in \Pi$.

2) Las rectas invariantes globales son las paralelas al vector de traslación: $T_a(R) = R$ si y sólo si $R \,//\, a$, $\varnothing$.

<u>Teorema 2</u>. Toda traslación es una isometría.

Demostración. Sea T_a una traslación, sean p y q dos puntos diferentes y sean $p' = T_a(p)$ y $q' = T_a(q)$ (figura 2.3). Por la definición de traslación y las características de los vectores libres, los segmentos $\overrightarrow{pp'}$, y $\overrightarrow{qq'}$, son paralelos y de la misma longitud. Por el teorema de Tales, los segmentos $\overrightarrow{pq}$, y $\overrightarrow{p'q'}$, son también paralelos. Por lo tanto, pp'q'q es un paralelogramo y, entonces, $d(p,q) = d(p',q')$.

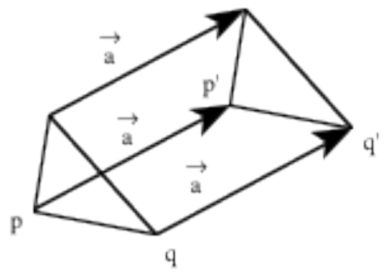


Figura 2.3.

<u>Teorema 3</u>. El conjunto de las traslaciones del plano es un grupo abeliano con la ley producto de aplicaciones.

Demostración. a) De las propiedades aritméticas de la suma de vectores resulta que el producto de dos traslaciones T_a y T_b es otra traslación, $T_b \circ T_a = T_{a+b}$ (figura 2.4), y que el producto de traslaciones es asociativo y conmutativo.

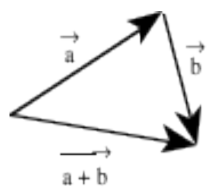


Figura 2.4.

b) La aplicación identidad, interpretada como traslación de vector nulo, T_0, es el elemento neutro: $T_0 \circ T_a = T_{a+0} = T_a$.

c) Para cada vector $\vec{a}$, existe el vector $-\vec{a}$, con el módulo y la dirección que $\vec{a}$, pero sentido contrario, por lo que $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$. Entonces, el elemento simétrico de T_a es T_{-a}.

2.1.2. Giros

<u>Definición 6</u>. Dados un punto $C \in \Pi$ y un ángulo orientado $\hat{\alpha}$, llamamos *giro de centro C y ángulo* $\hat{\alpha}$ a la transformación $G(C,\hat{\alpha}): \Pi \longrightarrow \Pi$ tal que $G(C,\hat{\alpha})(p) = p'$ si y sólo si $d(C,p) = d(C,p')$ y $\angle pCp' = \hat{\alpha}$, $\forall\, p \in \Pi$.

El punto C es el *centro de giro* y el ángulo $\hat{\alpha}$ es el *ángulo de giro*. Los ángulos de giro estarán siempre orientados, de acuerdo con el convenio usual según el cual los ángulos negativos corresponden a giros en el sentido de las agujas del reloj y los ángulos positivos a giros en el sentido contrario al de las agujas del reloj (figura 2.5). Físicamente, un giro corresponde al movimiento realizado sobre una circunferencia con centro en el centro de giro, recorriendo un arco cuya amplitud es igual al ángulo de giro (figura 2.6).

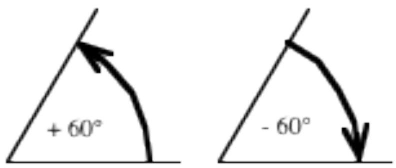


Figura 2.5.

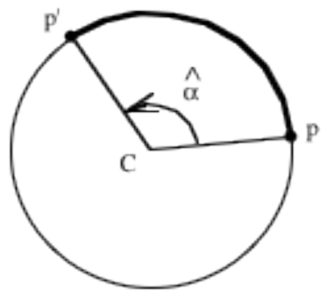


Figura 2.6.

<u>Teorema 4</u>. Dado un giro $G(C,\hat{\alpha})$ de ángulo no nulo, se tiene que:

1) El único punto invariante es el centro de giro: $G(C, \hat{\alpha})(p) = p$ si y sólo si $p = C$.

2) Toda circunferencia de centro C es invariante global.

<u>Teorema 5</u>. Todo giro es una isometría.

Demostración. Sea $G(C,\hat{\alpha})$ un giro, sean p y q dos puntos diferentes y sean $p' = G(C,\hat{\alpha})(p)$ y $q' = G(C,\hat{\alpha})(q)$. Cuando p = C, el resultado es evidente. Supongamos que p y q son distintos de C (figura 2.7). Por la definición de giro, los segmentos $\overline{Cp}$ y $\overline{Cp'}$ tienen la misma longitud, así como los segmentos $\overline{Cq}$ y $\overline{Cq'}$. Además, $\angle pCq = \hat{\alpha} - \angle qCp' = \angle p'Cq'$ (estas igualdades, con ángulos orientados, son independientes de la posición de los puntos considerados, pues $\hat{\alpha} - \angle qCp' = \hat{\alpha} + \angle p'Cq$). Por lo tanto, ΔpCq y $\Delta p'Cq'$ son congruentes, por tener iguales dos lados y el ángulo comprendido, luego $d(p,q) = d(p',q')$.

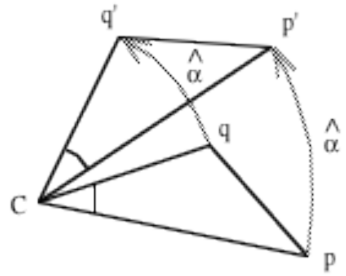


Figura 2.7.

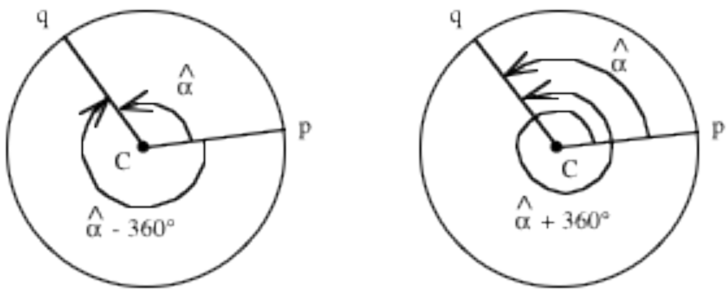
<u>Teorema 6</u>. Dado un punto $C \in \Pi$, el conjunto de los giros del plano con centro en C, $\{G(C,\hat{\alpha}), \forall \hat{\alpha}\}$, es un grupo abeliano con la ley producto de aplicaciones.

Demostración. a) El producto de dos giros con centro común es otro giro con el mismo centro y cuyo ángulo es la suma de los ángulos de los factores: $G(C,\hat{\alpha})\circ G(C,\hat{\beta}) = G(C,\hat{\alpha}+\hat{\beta})$. De las propiedades de la suma de números reales resulta que el producto de giros con el mismo centro es asociativo y conmutativo.

b) La aplicación identidad, interpretada como giro de centro C y 0°, $G(C,0°)$, es el elemento neutro: $G(C,\hat{\alpha})\circ G(C,0°) = G(C,\hat{\alpha}+0°) = G(C,\hat{\alpha})$.

c) Para cada ángulo $\hat{\alpha}$ existe el ángulo $-\hat{\alpha}$ con la misma amplitud que $\hat{\alpha}$ pero sentido contrario, por lo que $\hat{\alpha} + (-\hat{\alpha}) = 0°$. Entonces, el elemento simétrico de $G(C,\hat{\alpha})$ es $G(C,-\hat{\alpha})$.

Dados dos puntos p y q situados sobre una circunferencia de centro C, siempre hay dos giros con centro en C, de sentidos contrarios, que llevan p hasta q (figura 2.8-a). Así pues, para cualquier punto C y cualquier ángulo $\hat{\alpha} \geq 0°$, los giros $G(C,\hat{\alpha})$ y $G(C, \hat{\alpha}-360°)$ son equivalentes. Análogamente, para cualquier ángulo $\hat{\beta} \leq 0°$, los giros $G(C,\hat{\beta})$ y $G(C,\hat{\beta}+360°)$ son equivalentes. Por otra parte, si un punto da una vuelta completa a la circunferencia, es decir si gira ±360°, vuelve a su posición inicial (figura 2.8-b), por lo que, para cualquier punto C y cualquier ángulo $\hat{\alpha} \geq 0°$, los giros $G(C,\hat{\alpha})$ y $G(C,\hat{\alpha}+360°)$ son equivalentes. Análogamente, para cualquier ángulo $\hat{\beta} \leq 0°$, los giros $G(C, \hat{\beta})$ y $G(C, \hat{\beta}-360°)$ son equivalentes. Todos estos resultados se pueden resumir en el siguiente teorema:



- a - - b -

Figura 2.8. Equivalencia de giros.

Teorema 7. Para todo punto $C \in \Pi$ y todo ángulo $\hat{\alpha}$, el giro $G(C,\hat{\alpha})$ es equivalente a los giros $G(C,\hat{\alpha} + n360°)$, $\forall\, n \in Z$.

Diremos que dos ángulos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son *equivalentes* cuando los giros $G(C,\hat{\alpha})$ y $G(C,\hat{\beta})$ sean equivalentes. En las siguientes secciones de este capítulo se puede comprobar que la equivalencia de giros dista de ser una propiedad matemáticamente irrelevante, pues en diversas definiciones y demostraciones tiene una posición clave.

2.1.3. Simetrías

Definición 7. Dada una recta e, llamamos *simetría axial de eje e* a la transformación $S_e: \Pi \longrightarrow \Pi$ tal que $S_e(p) = p'$ si y sólo si $\overline{pp'} \perp e$ y $d(e,p) = d(e,p')$ $\forall\, p \in \Pi$.

La recta e es el *eje de simetría*. Físicamente, la simetría axial no es un movimiento plano, aunque normalmente se considere como tal, ya que, además de producir un cambio de posición de los objetos, las simetrías axiales invierten el sentido de los ángulos. Esto quiere decir que, a diferencia de lo que ocurre con las traslaciones y los giros, por lo general un objeto y su simétrico sólo son superponibles si se saca uno de ellos del plano en el que se trabaja. Por este motivo, es frecuente asociar la simetría axial del plano a la acción de "volver una hoja de un libro" (figura 2.9).

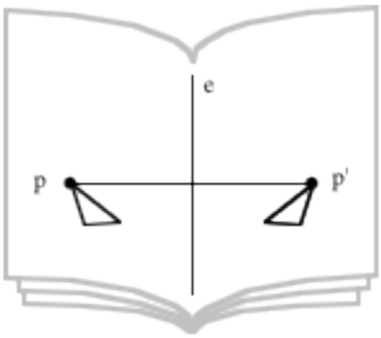


Figura 2.9.

Algunos autores introducen los conceptos de "simetría central", es decir simetría respecto de un punto, y "simetría axial", es decir simetría respecto de una recta. Cuando se estudian las isometrías del plano, el concepto de simetría central es irrelevante, a la vista del Teorema de Clasificación (teorema 25). Por otra parte, una simetría central se puede caracterizar como un giro de 180° con centro en el centro de simetría. Por estos motivos, nosotros hemos optado por no utilizar el concepto de simetría central y, en adelante, denominar a las simetrías axiales simplemente como simetrías.

Teorema 8. Dada una simetría S_e, se tiene que $S_e(p) = p'$ si y sólo si el eje de simetría e es la mediatriz del segmento pp', .

La demostración es inmediata, ya que las dos propiedades características de las simetrías son las que caracterizan también a la mediatriz de un segmento. Realmente, cuando se trabaja con las simetrías, ambas caracterizaciones son necesarias, ya que una presenta la situación desde la óptica de la isometría y la otra la presenta desde la óptica de los puntos y su imágenes.

Teorema 9. Dada una simetría S_e, se tiene que:

1) Los puntos invariantes son los que pertenecen al eje de simetría: $S_e(p) = p$ si y sólo si $p \in e$.

2) La única recta invariante puntual es el eje de simetría.

3) Las rectas invariantes globales son las perpendiculares al eje de simetría: Dada $R \neq e$, $S_e(R) = R$ si y sólo si $R \perp e$.

<u>Teorema 10</u>. Toda simetría es una isometría.

Demostración. Sea S_e una simetría, sean p y q dos puntos diferentes y sean $p' = S_e(p)$ y $q' = S_e(q)$. Para demostrar que $d(p,q) = d(p',q')$, vamos a considerar tres casos:

a) Alguno de los puntos p o q está en e. Esta demostración es inmediata por el teorema 9 y las propiedades de la mediatriz de un segmento.

b) Los puntos p y q están en el mismo semiplano, de los determinados por el eje e. Si $d(p,e) = d(q,e)$, entonces pqq'p' es un rectángulo, por lo que $d(p,q) = d(p',q')$.

Si las distancias de p y q al eje de simetría son diferentes, sea $d(p,e) < d(q,e)$. Sean los puntos a y a' las proyecciones, respectivamente, de p y p' sobre el segmento qq', (figura 2.10). Se tiene que Δpqa y $\Delta p'q'a'$ son congruentes, por ser rectángulos con los catetos iguales. Por lo tanto, $d(p,q) = d(p',q')$.

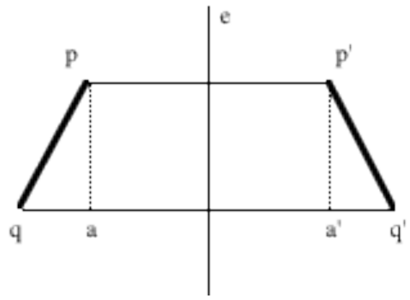


Figura 2.10.

c) Cada punto p y q está en un semiplano diferente, de los determinados por el eje e (figura 2.11). Si consideramos los puntos p, q' y sus respectivas imágenes por S_e, aplicando el caso b) tenemos que $d(p,q') = d(p',q)$. Por lo tanto pp'qq' es un trapecio isósceles, luego sus diagonales son iguales: $d(p,q) = d(p',q')$.

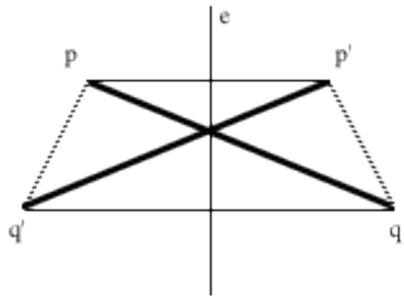


Figura 2.11.

<u>Teorema 11</u>. Las simetrías son aplicaciones idempotentes: $S_e \circ S_e = I$.

<u>Teorema 12</u>. El producto de dos simetrías diferentes, S_{e_1} y S_{e_2}, es:

a) Una traslación cuando e_1 y e_2 son paralelos.

b) Un giro cuando e_1 y e_2 se cortan.

Demostración. Consideremos el producto $S_{e_2} \circ S_{e_1}$. Sean p un punto cualquiera, $p' = S_{e_1}(p)$ y $p'' = S_{e_2}(p')$. Sean a el punto de corte de $\overline{pp'}$ con e_1 y b el punto de corte de $\overline{p'p''}$ con e_2 (figuras 2.12 y 2.13).

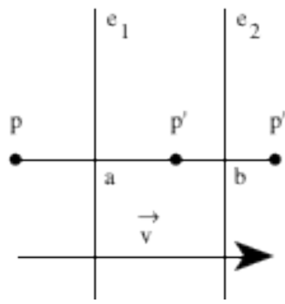


Figura 2.12.

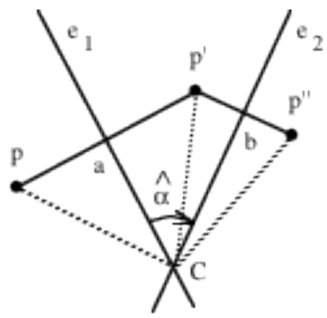


Figura 2.13.

a) Se tiene que $\overrightarrow{pp''} = \overrightarrow{pp'} + \overrightarrow{p'p''} = (\overrightarrow{pa} + \overrightarrow{ap'}) + (\overrightarrow{p'b} + \overrightarrow{bp''}) = 2\overrightarrow{ap'} + 2\overrightarrow{p'b} = 2(\overrightarrow{ap'} + \overrightarrow{p'b}) = 2\overrightarrow{ab}$. Por lo tanto, si llamamos $\vec{v}$, al vector $2\vec{ab}$, tenemos que $S_{e_2}°S_{e_1}(p) = T_v(p)\ \forall\ p \in \Pi$, luego $S_{e_2}°S_{e_1} = T_v$.

b) Sea C el punto de corte de e_1 y e_2. Se tiene que $\angle pCp'' = \angle pCp' + \angle p'Cp'' = (\angle pCa + \angle aCp') + (\angle p'Cb + \angle bCp'') = 2\angle aCp' + 2\angle p'Cb = 2\angle aCb$. Por lo tanto, si llamamos $\hat{\alpha}$, al ángulo formado por e_1 y e_2, hemos demostrado que $\angle pCp'' = 2\hat{\alpha}$. Por otra parte, de las propiedades de los ejes de simetría se deduce que $d(C,p) = d(C,p') = d(C,p'')$. Así pues, tenemos que $S_{e_2}°S_{e_1}(p) = G(C,2\hat{\alpha})(p)\ \forall\ p \in \Pi$, luego $S_{e_2}°S_{e_1} = G(C,2\hat{\alpha})$.

La demostración de este teorema nos permite, además, conocer las características de la traslación y del giro equivalentes al producto de dos simetrías diferentes:

* El producto $S_{e_2}°S_{e_1}$ de dos simetrías de ejes paralelos equivale a una traslación (figura 2.12) cuyo vector es perpendicular a los ejes, su módulo es el doble de la distancia entre los ejes y su sentido es el del desplazamiento desde e_1 hasta e_2.

* El producto $S_{e_2}°S_{e_1}$ de dos simetrías cuyos ejes se cortan equivale a un giro (figura 2.13) cuyo centro es el punto de corte de los ejes, su ángulo mide el doble del ángulo formado los ejes y el sentido de giro es el del desplazamiento desde e_1 hasta e_2. Se comprueba fácilmente que es indiferente elegir cualquiera de los dos ángulos que forman los ejes de simetría ya que, al ser ángulos suplementarios y de sentido contrario, los giros que generan son equivalentes.

2.1.4. Simetrías en deslizamiento

<u>Definición 8</u>. Dados una recta e y un vector $\vec{a}$, paralelo a dicha recta, llamamos *simetría en deslizamiento de eje e y vector $\vec{a}$,* a la transformación $D(e,\vec{a}): \Pi \longrightarrow \Pi$ tal que $D(e,\vec{a}) = S_e°T_a$.

Al igual que ocurre con las simetrías, las simetrías en deslizamiento tampoco son movimientos que se puedan realizar físicamente sin salir del plano. El modelo gráfico que suele utilizarse para representar las simetrías en deslizamiento son las marcas de los pies al andar (figura 2.14).

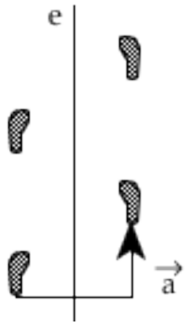


Figura 2.14.

En el lector puede surgir la duda de si la ordenación de la traslación y la simetría en el producto que define la simetría en deslizamiento es arbitraria o responde a alguna razón oculta. En general, el producto de una simetría y una traslación no es conmutativo, por lo que esta pregunta es muy legítima. Afortunadamente, cuando el vector es paralelo al eje de simetría, su producto sí es conmutativo, por lo que el orden en que intervenga cada movimiento no tiene importancia y puede cambiarse a conveniencia: $D(e,a,\varnothing) = S_e \circ T_a = T_a \circ S_e$.

<u>Teorema 13</u>. Dada una simetría en deslizamiento $D(e,a,\varnothing)$ de vector no nulo, se tiene que:

1) Ningún punto es invariante: $D(e,a,\varnothing)(p) \neq p \quad \forall\, p \in \Pi$.

2) La única recta invariante global es el eje de simetría: $D(e,a,\varnothing)(R) = R$ si y sólo si $R = e$.

2.1.5. Otros productos de isometrías

En las secciones anteriores hemos presentado los casos sencillos de productos de isometrías, cuyos resultados se pueden deducir directamente a partir de las definiciones. Ahora completamos el tema demostrando los demás casos importantes de productos de isometrías, que nos permitirán conocer la estructura algebraica de cada tipo de isometría.

<u>Teorema 14</u>. Toda traslación se puede descomponer, de infinitas maneras, en producto de dos simetrías cuyos ejes son paralelos.

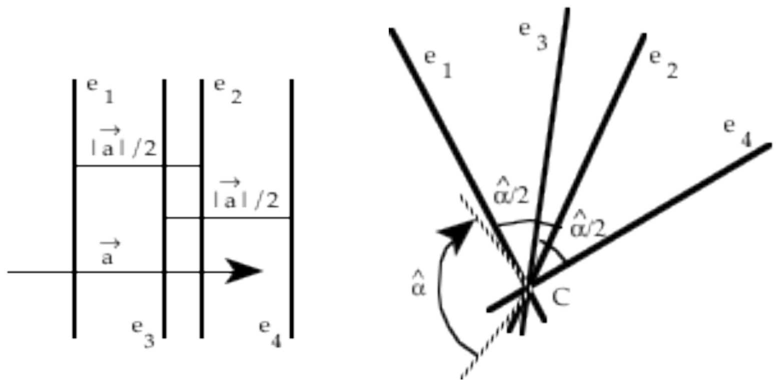
Teorema 15. Todo giro se puede descomponer, de infinitas maneras, en producto de dos simetrías cuyos ejes se cortan.

Los dos teoremas anteriores son consecuencias evidentes del teorema 12. La relación específica entre la traslación o el giro y las simetrías es, en este caso, la siguiente:

* Una traslación T_a se puede descomponer en el producto $S_{e_2} \circ S_{e_1}$ de dos simetrías tales que sus ejes sean perpendiculares a $\vec{a}$, (por lo tanto, paralelos entre sí) , la distancia entre los ejes sea la mitad del módulo de $\vec{a}$, y el sentido de $\vec{a}$, coincida con el del desplazamiento desde e_1 hasta e_2 (figura 2.12).

* Un giro $G(C,\hat{\alpha})$ se puede descomponer en el producto $S_{e_2} \circ S_{e_1}$ de dos simetrías tales que sus ejes se corten en C, formen un ángulo que sea la mitad de $\hat{\alpha}$, y el sentido de $\hat{\alpha}$, coincida con el del desplazamiento desde e_1 hasta e_2 (figura 2.13).

Estas reglas de descomposición no determinan por completo la posición de los ejes de simetría en el plano, sino que dejan cierta libertad para elegirlos. Así, vemos (figura 2.15-a) que los productos $S_{e_2} \circ S_{e_1}$ y $S_{e_4} \circ S_{e_3}$ verifican las condiciones marcadas antes, por lo que ambos son equivalentes a la traslación T_a. Así pues, cualquier traslación se puede descomponer en infinitos productos de dos simetrías. Análogamente, vemos (figura 2.15-b) que los productos $S_{e_2} \circ S_{e_1}$ y $S_{e_4} \circ S_{e_3}$ verifican las condiciones marcadas en el párrafo anterior, por lo que ambos son equivalentes al giro $G(C,\hat{\alpha})$. Así pues, también cualquier giro se puede descomponer en infinitos productos de dos simetrías.



- a - - b -

Figura 2.15. Descomposiciones de traslaciones y giros en producto de simetrías.

Teorema 16. Toda simetría en deslizamiento se puede descomponer, de infinitas maneras, en producto de tres simetrías.

Teorema 17. Dados dos puntos diferentes A y B del plano, el resultado del producto $G(A,\hat{\alpha})°G(B,\hat{\beta})$ es:

a) Una traslación T_a cuando $\hat{\alpha}+\hat{\beta}$ es equivalente a 0°.

b) Un giro $G(C,\hat{\alpha}+\hat{\beta})$ cuando $\hat{\alpha}+\hat{\beta}$ no es equivalente a 0°.

Demostración. Sea el producto $G(A,\hat{\alpha})°G(B,\hat{\beta})$. Podemos suponer que $-180° \leq \hat{\alpha}, \hat{\beta} \leq 180°$, sustituyéndolos por otros ángulos equivalentes si es necesario. Aplicando el teorema 15, podemos descomponer los giros en productos de simetrías: $G(A,\hat{\alpha})°G(B,\hat{\beta}) = (S_{e_4}°S_{e_3})°(S_{e_2}°S_{e_1})$. Tomando las simetrías S_{e_2} y S_{e_3} de manera que sus ejes coincidan con la recta que pasa por A y B ($e_2 = e_3$), se tiene que $G(A,\hat{\alpha})°G(B,\hat{\beta}) = S_{e_4}°S_{e_2}°S_{e_2}°S_{e_1} = S_{e_4}°S_{e_1}$.

a) La suma $\hat{\alpha}+\hat{\beta}$ es equivalente a 0° si y sólo si $\hat{\alpha} = -\hat{\beta}$ (en particular, puede ser $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = \pm 180°$) . Por lo tanto (figura 2.16), los ejes e_1 y e_4 son paralelos, luego $S_{e_4}°S_{e_1} = T_a$.

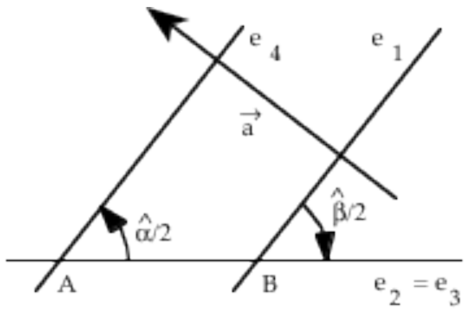


Figura 2.16. La suma $\alpha, ^\wedge +\beta, ^\wedge$ es equivalente a 0°.

b) La suma $\alpha, ^\wedge +\beta, ^\wedge$ no es equivalente a 0° cuando $\alpha, ^\wedge \neq -\beta, ^\wedge$. En este caso (figura 2.17), los ejes e_1 y e_4 forman con e_2 ángulos de amplitudes diferentes, luego e_1 y e_4 se cortan en un punto C, formando un ángulo igual a $(\alpha, ^\wedge +\beta, ^\wedge)/2$. Por lo tanto $S_{e_4}°S_{e_1} = G(C,\alpha, ^\wedge +\beta, ^\wedge)$.

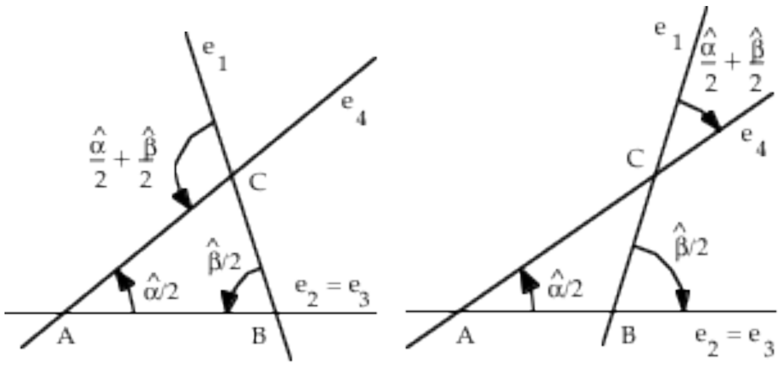


Figura 2.17. La suma $\alpha, ^\wedge +\beta, ^\wedge$ no es equivalente a 0°.

No hay ninguna manera de determinar automáticamente la posición del centro C o las características del vector a, ∅ , salvo en algunos casos particulares. Sin embargo, la demostración del teorema 17 es uno de los ejemplos de demostración de tipo constructivo a que aludíamos al comienzo de este capítulo, pues (figuras 2.16 y 2.17) nos proporciona el método para calcular el centro del giro o el vector de la traslación equivalentes al producto de dos giros cualesquiera.

Teorema 18. El producto de una traslación T_a y un giro $G(C,\alpha,\ \hat{}\ )$ es otro giro $G(D,\alpha,\ \hat{}\ )$.

La demostración es similar a la del teorema 17, tomando como eje común a las dos descomposiciones la recta perpendicular a a, $\varnothing$ que pasa por C.

Teorema 19. El conjunto de las traslaciones y los giros del plano es un grupo no abeliano con la ley producto de aplicaciones.

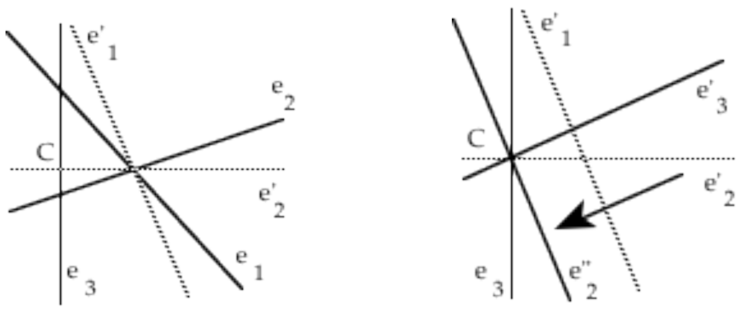
Demostración. Que el producto de aplicaciones es una ley de composición interna asociativa es consecuencia de los teoremas 3, 6, 17 y 18. La aplicación identidad es el elemento neutro. El elemento simétrico de T_a es T_{-a} y el de $G(C,\alpha,\ \hat{}\ )$ es $G(C,-\alpha,\ \hat{}\ )$. El producto de giros de distinto centro no es conmutativo, por lo que este grupo no es abeliano.

Teorema 20. El producto de tres simetrías es una simetría o una simetría en deslizamiento.

Demostración. Sea el producto $S_{e_3}°S_{e_2}°S_{e_1}$. Supongamos, en el caso más general, que los tres ejes de simetría son diferentes. Existen cuatro posiciones relativas posibles para los ejes:

a) Los ejes se cortan en tres puntos diferentes. Tomemos los ejes e_1 y e_2. Aplicando sucesivamente los teoremas 12 y 15, tenemos que existen una simetría $S_{e'_2}$ de eje perpendicular a e_3 y una simetría $S_{e'_1}$ tales que $S_{e_3}°S_{e_2}°S_{e_1} = S_{e_3}°S_{e'_2}°S_{e'_1} = G(C,180°)°S_{e'_1}$ (figura 2.18 a).

El giro $G(C,180°)$ se puede descomponer en el producto $S_{e'_3}°S_{e''_2}$ tal que e''_2 sea paralelo a e'_1 (figura 2.18 b). Entonces, tenemos: $G(C,180°)°S_{e'_1}$ $= S_{e'_3}°S_{e''_2}°S_{e'_1} = S_{e'_3}°T_a = D(e'_3,a,\ \varnothing\ )$.



- a - - b -

Figura 2.18.

b) Dos ejes son paralelos y el tercero los corta. Supongamos que e_1 y e_2 se cortan (en caso contrario, se razona de manera análoga sobre e_2 y e_3). Aplicando la misma técnica que en el caso (a) se llega a que $S_{e_3} \circ S_{e_2} \circ S_{e_1} = D(e'_3, a, \varnothing)$.

c) Los tres ejes son paralelos. Aplicando sucesivamente los teoremas 12 y 14, existe una simetría $S_{e'_1}$, de eje paralelo a los anteriores, tal que $S_{e_3} \circ S_{e_2} \circ S_{e_1} = S_{e_3} \circ S_{e_3} \circ S_{e'_1} = S_{e'_1}$ (figura 2.19).

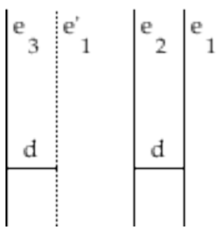


Figura 2.19.

d) Los tres ejes se cortan en el mismo punto. Aplicando la misma técnica que en el caso (c) se llega a que $S_{e_3} \circ S_{e_2} \circ S_{e_1} = S_{e'_1}$.

La demostración del teorema se completa considerando los casos en que algunas simetrías tengan el mismo eje, pero es inmediato comprobar que todos estos productos son equivalentes a una simetría, simplificando o aplicando la técnica de los casos precedentes.

2.1.6. Estructura algebraica de las isometrías del plano

En las secciones anteriores han ido apareciendo las estructuras algebraicas de diferentes conjuntos de isometrías. En esta sección se cierra el tema presentando las principales propiedades algebraicas del conjunto de las isometrías del plano y las consecuencias más destacadas de esta estructura, en particular el Teorema de Clasificación de las isometrías.

Definición 9. Se dice que una isometría f es *directa* cuando mantiene el sentido de los ángulos y se dice que una isometría f es *inversa* cuando cambia el sentido de los ángulos.

Teorema 21. Toda isometría queda caracterizada conociendo:

1) Tres puntos no alineados y sus respectivas imágenes, o

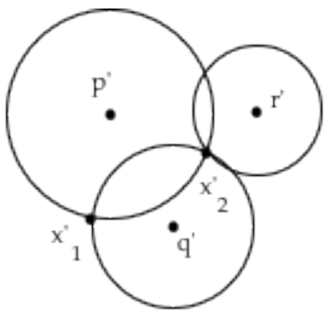
2) Dos puntos, sus respectivas imágenes y la condición de isometría directa o inversa.

Demostración. Sean p, q $\in \Pi$ dos puntos y sean p', q' sus respectivas imágenes mediante f. Sea x otro punto cualquiera del plano y sea x' = f(x). Veamos que es posible determinar unívocamente x' a partir de la información disponible:

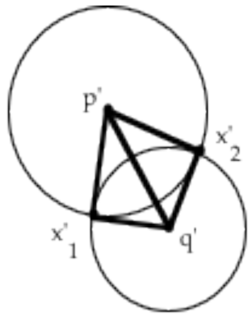
Como d(p,x) = d(p',x'), tenemos que x' pertenece a la circunferencia de centro p' y radio d(p,x). Análogamente, x' pertenece a la circunferencia de centro q' y radio d(q,x). Si estas dos circunferencias son tangentes, x' es el punto de tangencia. Si, por el contrario, son secantes, x' puede ser cualquiera de los dos puntos de corte. Llamaremos x'_1 y x'_2 a estos puntos. Entonces:

1) Conocemos un punto r, no alineado con p y q, y su imagen r' por f. Al no estar r' alineado con p' y q', resulta que $d(r',x'_1) \neq d(r',x'_2)$, por lo que x' será aquél de los dos puntos x'i tal que d(r,x) = d(r',x'i) (figura 2.20 a).

2) Sabemos si f es una isometría directa o inversa. Los triángulos $\Delta p'q'x'_1$ y $\Delta p'q'x'_2$ son congruentes pero con los ángulos orientados en sentido contrario. Por lo tanto, si f es una isometría directa (inversa), x' será aquél de los dos puntos x'i tal que Δp'q'x'i y Δpqx tengan los ángulos con la misma orientación (orientación contraria) (figura 2.20 b).



- a -



- b -

Figura 2.20.

<u>Teorema 22</u>. Toda isometría se puede descomponer en un producto de, a lo más, 3 simetrías.

Demostración. Dada una isometría f, sean p, q, r $\in \Pi$ tres puntos no alineados y sean p', q', r' sus respectivas imágenes por f.

Si $p \neq p'$, existe una simetría S_{e_1} tal que $S_{e_1}(p) = p'$ (e_1 es la mediatriz de pp',). Sean $S_{e_1}(q) = q_1$ y $S_{e_1}(r) = r_1$.

Si q_1 y r_1 coinciden, respectivamente, con q' y r', entonces, por el teorema 21, $f = S_{e_1}$. En caso contrario, podemos suponer que $q_1 \neq q'$. Existe una simetría S_{e_2} tal que $S_{e_2}(q_1) = q'$. Por ser f y S_{e_1} isometrías, $d(p',q') = d(p,q) = d(p',q_1)$. Entonces, p' pertenece a la mediatriz de qq_1, , es decir a e_2, y $S_{e_2}(p') = p'$. Sea $S_{e_2}(r_1) = r_2$.

Si r_2 coincide con r', entonces $f = S_{e_2} \circ S_{e_1}$. En caso contrario, $\Delta p'q'r'$ es congruente con $\Delta p'q'r_2$ y, si e_3 es la recta que pasa por p' y q', es evidente que $S_{e_3}(r_2) = r'$. Por lo tanto, $f = S_{e_3} \circ S_{e_2} \circ S_{e_1}$.

La figura 2.21 refleja los sucesivos pasos de la demostración.

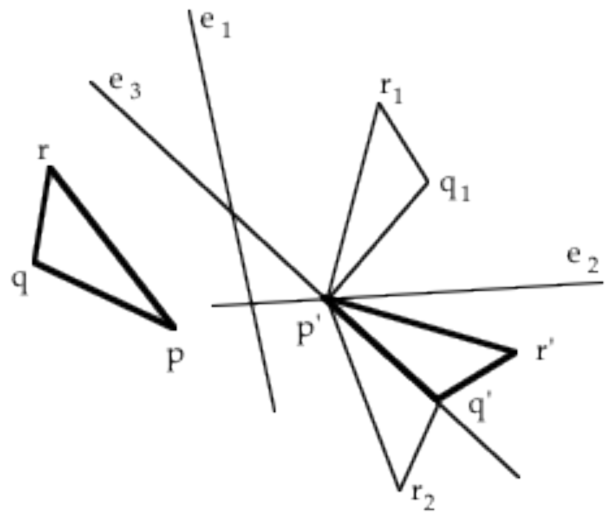


Figura 2.21.

Teorema 23. Toda isometría directa f es una traslación o un giro.

Demostración. Por el teorema 22, toda isometría directa se puede descomponer en producto de exactamente dos simetrías. Por el teorema 12, según la posición relativa de los ejes, este producto de simetrías es equivalente a una traslación o a un giro.

Teorema 24. Toda isometría inversa f es una simetría o una simetría en deslizamiento.

Demostración. Por el teorema 22, toda isometría inversa se puede descomponer en producto de exactamente tres simetrías. Por el teorema 20, este producto de simetrías es equivalente a una simetría o a una simetría en deslizamiento.

Teorema 25 (Teorema de Clasificación de las Isometrías del Plano). Toda isometría f pertenece a una de estas clases: Traslación, giro, simetría o simetría en deslizamiento.

Demostración. Es una consecuencia inmediata de los teoremas 23 y 24.

Teorema 26. Toda isometría queda caracterizada conociendo los puntos o rectas que deja invariantes.

Demostración. En los teoremas 1, 4, 9 y 13 hemos presentado condiciones necesarias de invarianza para las traslaciones, giros, simetrías y simetrías en deslizamiento, respectivamente. Queda sólo por demostrar que dichas condiciones necesarias son también condiciones suficientes. La demostración puede hacerse, en todos los casos, particularizando la demostración del teorema 21:

a) Supongamos que la isometría f no tiene ningún punto invariante.

a1) Si f tiene una sola recta r invariante global, se trata de una simetría en deslizamiento: Si tomamos 3 puntos distintos $p, q \in r$ y $t \notin r$, se comprueba que f debe invertir el sentido de los ángulos, pues en caso contrario, la recta que une t y f(t) es también invariante global. Por los teoremas 9 y 24, f debe ser una simetría en deslizamiento.

a2) Si f tiene más de una recta invariante global, dichas rectas invariantes deben ser paralelas, pues en caso contrario, el punto de corte de dos de estas rectas debería tener 2 imágenes. Además, toda recta paralela a una invariante es también invariante global. Esto lleva a la conclusión de que f mantiene el sentido de los ángulos y, por los teoremas 4 y 23, f debe ser una traslación.

b) Supongamos que la isometría f tiene un único punto invariante. De los teoremas 1, 9 y 13 se deriva que f no puede ser traslación, simetría ni simetría en deslizamiento. Por lo tanto, f debe ser un giro.

c) Supongamos que la isometría f tiene varios puntos invariantes. Es inmediato demostrar que si una recta tiene dos puntos invariantes, la recta es invariante puntual.

c1) Si f tiene una sola recta invariante puntual, por los teoremas 1, 4 y 13, tenemos que f debe ser una isometría.

c2) Si f tiene más de una recta invariante puntual, todo punto del plano es invariante, luego f es la aplicación identidad.

Los teoremas 21 y 26 ofrecen dos formas diferentes de caracterizar las isometrías. Es posible invertir sus posiciones en el esquema deductivo del conjunto de propiedades de las isometrías, si bien la demostración del teorema 21 es muy útil por tratarse de un proceso constructivo que los estudiantes pueden aplicar a la resolución de problemas concretos. Por otra parte, la demostración de algunas partes del teorema 26 sin el soporte del Teorema de Clasificación se complica de tal manera que resulta impracticable. Por estos motivos, creemos que la organización que presentamos en este capítulo es la más adecuada.

Teorema 27. El conjunto de las isometrías del plano es un grupo no abeliano con la ley producto de aplicaciones.

La demostración es inmediata a partir del Teorema de Clasificación y las propiedades del producto de aplicaciones. El elemento neutro es la aplicación identidad I. Los elementos simétricos son: $T_a^{-1} = T_{-a}$, $G(C,\alpha, \wedge)^{-1} = G(C,-\alpha, \wedge)$, $S_e^{-1} = S_e$ y $D(e,a, \varnothing)^{-1} = D(e,-a, \varnothing)$.

2.2. Representación Analítica de las Isometrías del Plano

La deducción y utilización de las ecuaciones de las isometrías es una continuación natural del estudio de las isometrías del plano cuando se entra en la geometría analítica. Este tipo de trabajo es interesante ya que proporciona a los estudiantes herramientas que les permitirán utilizar las isometrías en diversidad de situaciones y para resolver problemas de otras áreas de las Matemáticas. No obstante, hay que evitar que el aprendizaje de las ecuaciones se convierta en un trabajo puramente memorístico, para lo cual es necesario que los estudiantes hayan trabajado antes con las isometrías en el contexto manipulativo y dándoles la interpretación de movimientos. De esta manera, la deducción de las diferentes ecuaciones y el sentido de las mismas será más significativo para los estudiantes.

Aunque en la unidad de enseñanza que presentamos en este libro no hemos abordado el estudio analítico de las isometrías, incluimos en esta sección la deducción de sus ecuaciones, con el fin de dar en este capítulo una visión completa de las diferentes aproximaciones usuales desde las Matemáticas.

2.2.1. Ecuaciones de una traslación

Dada la traslación T_a de vector a, ∅ = (a,b), las coordenadas de la imagen p' = (x',y') de un punto p = (x,y) vienen dadas por las ecuaciones:

x' = x + a

y' = y + b

La obtención de las fórmulas es inmediata a partir de la figura 2.22.

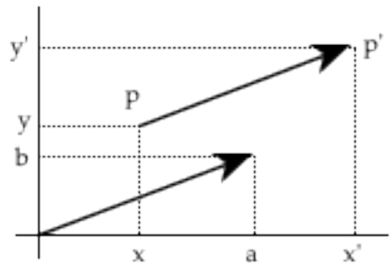


Figura 2.22.

2.2.2. Ecuaciones de un giro

Dado el giro G(C, α, ^), cuyo centro es C = (a,b), las coordenadas de la imagen p' = (x',y') de un punto p = (x,y) vienen dadas por las ecuaciones:

x' = a + (x - a)cos α - (y - b)sen α

y' = b + (x - a)sen α + (y - b)cos α

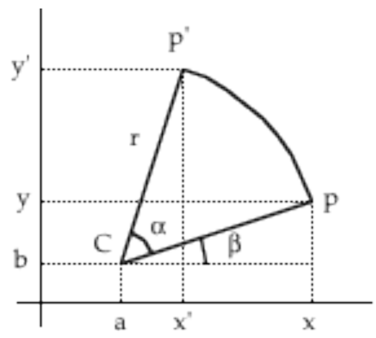


Figura 2.23.

En efecto, si llamamos r al radio de la circunferencia sobre la que gira el punto p y β al ángulo formado por $\overrightarrow{Cp}$, y la horizontal (figura 2.23), tenemos que:

x' = a + rcos (α + β) = a + r(cos α cos β - sen α sen β) = a + r(**¡Error!**cos α - **¡Error!**cos α) = a + (x - a)cos α - (y - b)sen α.

Análogamente, y' = b + (x - a)sen α + (y - b)cos α.

Un caso particular interesante es el de los giros de 180°. Haciendo las sustituciones correspondientes, quedan las ecuaciones siguientes:

x' = 2a - x

y' = 2b - y

2.2.3. Ecuaciones de una simetría

Dada la simetría S_e, cuyo eje tiene como ecuación aX + bY + c = 0, las coordenadas de la imagen p' = (x',y') de un punto p = (x,y) vienen dadas por las ecuaciones:

x' = x - **¡Error!**

y' = y - **¡Error!**

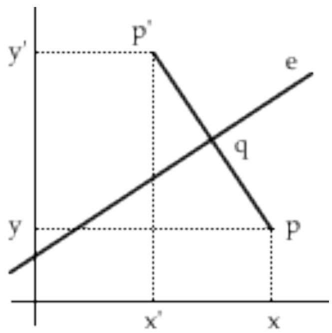


Figura 2.24.

La ecuación explícita del eje e es Y = **¡Error!**X - **¡Error!**. Entonces, la ecuación de la recta que contiene el segmento $\overrightarrow{pp'}$, es Y - y = **¡Error!**o, en forma implícita, bX - aY - (bx - ay) =0.

Las coordenadas del punto q = (q_1,q_2) de corte entre esta recta y el eje e son:

q_1 = **¡Error!**

q_2 = **¡Error!**

Aunque p' es el simétrico de p por S_e, también podemos obtenerlo mediante G(q,180°) (figura 2.24). Por lo tanto, las coordenadas de p' se obtienen a partir de las ecuaciones de este giro:

$x' = 2q_1 - x =$ **¡Error!**- x = **¡Error!=**

x - **¡Error!**. La última igualdad se obtiene sumando y restando $2a^2x$ en el numerador y simplificando.

Unas operaciones análogas permiten llegar a la fórmula de la ordenada y'.

2.2.4. Ecuaciones de una simetría en deslizamiento

Sea D(e,a, $\varnothing$) una simetría en deslizamiento cuyo eje tiene como ecuación aX + bY + c = 0 y cuyo vector tiene como coordenadas (v,w). Aplicando, sucesivamente, las ecuaciones de la traslación T_a y la simetría S_e, se llega a que las coordenadas de la imagen p' = (x',y') de un punto p = (x,y) vienen dadas por las ecuaciones:

x' = x + v - **¡Error!**

y' = y + w - **¡Error!**

2.3. Los cubrimientos regulares del plano

Cuando se buscan aplicaciones de las isometrías del plano, los cubrimientos regulares y semi-regulares del plano son unas de las más utilizadas por los profesores.

Dentro del ámbito escolar, los cubrimientos del plano tienen a su favor la componente gráfica y artística, que resulta muy atractiva para la mayoría de los estudiantes. El ejemplo prototípico es la obra del artista holandés Mauricio C. Escher. Por otra parte, matemáticamente, las estructuras de los distintos tipos de cubrimientos tienen una gran variedad de complejidades, que permiten a los profesores graduar los ejercicios que plantean a sus alumnos. En los siguientes párrafos nos proponemos hacer una incursión en este terreno, presentando los conceptos básicos, los diferentes tipos de cubrimientos del plano, sus principales propiedades, y sus conexiones con el grupo de las isometrías del plano.

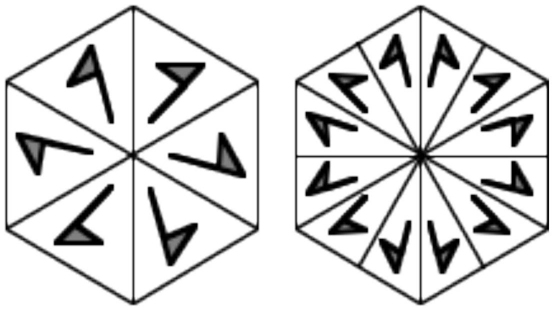
Definición 10. Dada una región R del plano, se llama *cubrimiento* de la región R a un conjunto de figuras geométricas (generalmente polígonos) que se pueden colocar de manera que todo punto de la región R pertenece a una y sólo una de dichas figuras.

Desde un punto de vista práctico, construir un cubrimiento de una región consiste en colocar figuras cubriéndola, de manera que éstas no se superpongan ni dejen huecos entre ellas. Los cubrimientos más interesantes son aquéllos formados por figuras congruentes a un polígono o a unos pocos polígonos diferentes y cuya construcción está sujeta a alguna regularidad, de manera que, a partir de un conjunto inicial de figuras y otro de isometrías, sea posible construir todo el cubrimiento. En adelante sólo nos referiremos a esta clase de cubrimientos. El conjunto inicial de figuras se llama el *motivo mínimo* del cubrimiento. Los conjuntos de isometrías que permiten construir cubrimientos son subgrupos del grupo de las isometrías del plano, por lo que siempre es posible encontrar un conjunto mínimo de isometrías que caracterice un cubrimiento, llamado *sistema generador* de ese cubrimiento. Así pues, matemáticamente, un cubrimiento queda caracterizado por un motivo mínimo y un sistema generador. Para la construcción práctica de cubrimientos, se comienza a partir de un conjunto mínimo de figuras, a las cual se aplican las isometrías de un sistema generador, sus composiciones y sus inversas. A continuación se reitera el proceso sobre las sucesivas imágenes que se vayan obteniendo, hasta cubrir completamente la región.

Hay tres tipos destacables de cubrimientos: Los rosetones, los frisos y los mosaicos.

Definición 11. Se llama *rosetón* a un cubrimiento de la región del plano formada por un polígono regular.

Como el sistema generador de un rosetón debe cubrir una superficie finita, el conjunto de isometrías diferentes (es decir, no equivalentes) de un rosetón debe ser finito. Ello implica que no puede haber ni traslaciones ni simetrías en deslizamiento. Se puede demostrar que hay infinitos rosetones diferentes, pero que todos ellos tienen sistemas generadores de uno de estos dos tipos: Un giro G(O, **¡Error!**), o dos simetrías cuyos ejes forman un ángulo de **¡Error!**, con $n \in N^*$. En otras palabras, los rosetones corresponden a los grupos cíclicos (figura 2.25-a) y dihédricos de orden n (figura 2.25-b). La figura base de un rosetón es el triángulo obtenido al unir el centro del polígono regular con dos vértices consecutivos (en el caso de los rosetones cíclicos) o con un vértice y el punto medio de uno de sus lados adyacentes (en el caso de los rosetones dihédricos).



- a - - b -

Figura 2.25. Los 2 tipos de rosetones.

Definición 12. Se llama *friso* a un cubrimiento de la región del plano limitada por dos rectas paralelas.

Los frisos son cubrimientos de regiones de longitud infinita pero anchura finita. Por ello, las únicas isometrías que pueden formar parte de los frisos son:

- Las traslaciones de vector paralelo a los bordes de la región.
- Los giros de 180° cuyo centro equidista de los bordes de la región.
- Las simetrías cuyos eje es la recta que equidista de los bordes de la región o es perpendicular a dicha recta.
- Las simetrías en deslizamiento cuyo eje es la recta que equidista de los bordes de la región.

Analizando las posibles combinaciones de estos movimientos, se puede demostrar que hay exactamente 7 frisos diferentes (figura 2.26).

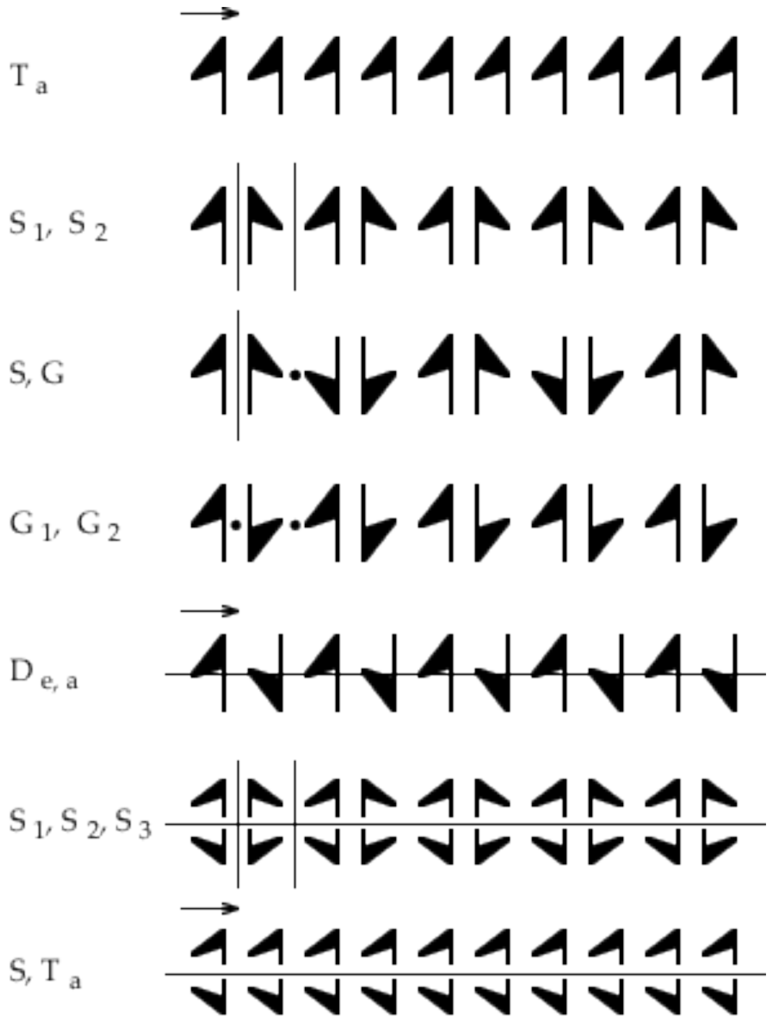


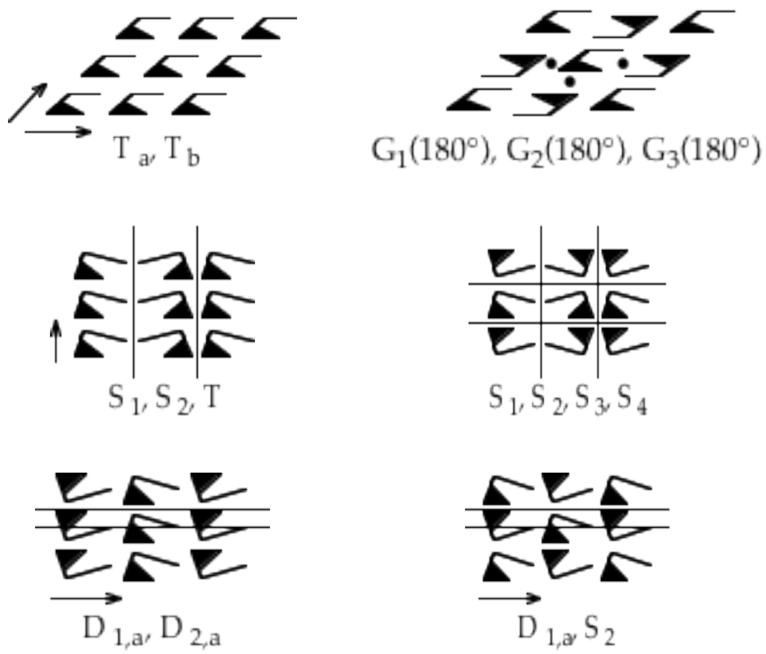
Figura 2.26. Los 7 tipos de frisos.

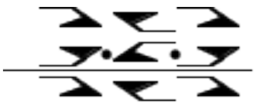
Definición 13. Se llama *mosaico* a un cubrimiento de todo el plano.

Ha dos tipos de mosaicos que son los que encontramos más frecuentemente en el arte, diseño, matemáticas, etc., debido principalmente a su belleza, tanto estética como matemática: Los *mosaicos regulares,* cuyo motivo mínimo es un polígono regular, y los *mosaicos semi-regulares,* cuyo motivo mínimo son dos o más polígonos regulares diferentes.

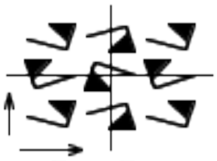
Es muy fácil justificar, tanto experimentalmente como de manera formal, que los únicos polígonos que se pueden usar para construir mosaicos regulares son los triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares, ya que éstos son los únicos polígonos regulares cuyo ángulo interior es divisor de 360°. En mosaicos semi-regulares, aunque sólo se pueden usar polígonos regulares, combinando adecuadamente diferentes formas y tamaños se obtiene una variedad mucho mayor de combinaciones posibles. Por lo que respecta a los mosaicos generales, pueden utilizarse cualquier triángulo, cualquier cuadrilátero, y determinados polígonos de 5 ó más lados. En Alsina, Pérez, Ruiz (1989) y en O'Daffer, Clemens (1977) pueden verse numerosos ejemplos.

Se puede demostrar que hay exactamente 17 mosaicos diferentes (figura 2.27). Los mosaicos se construyen sobre mallas de paralelogramos o mallas de triángulos derivadas de las anteriores añadiendo una de las diagonales de los paralelogramos. Las isometrías que componen el sistema generador de un mosaico determinan la forma del paralelogramo o el triángulo particular que son las celdas de la malla.

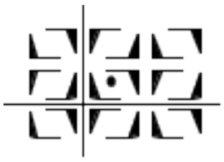




$G_1(180°)$, $G_2(180°)$, S

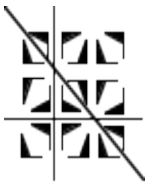


$D_{1,a}$, $D_{2,a}$

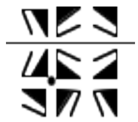


S_1, S_2, $G(180°)$

$G_1(180°)$, $G_2(90°)$



S_1, S_2, S_3

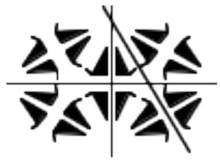


S, $G(90°)$

$G_1(120°)$, $G_2(120°)$

S, $G(120°)$

S_1, S_2, S_3



S_1, S_2, S_3

$G_1(180°), G_2(90°)$

Figura 2.27. Los 17 tipos de mosaicos.

3

LAS ISOMETRÍAS DEL PLANO: ELEMENTOS DIDÁCTICOS

La segunda mitad del siglo XIX fue un período de enorme trascendencia para llegar a la configuración de las matemáticas tal como se entienden actualmente y, de una manera indirecta, de la didáctica de las matemáticas. Durante esos años tuvieron lugar numerosas aportaciones que, bien han supuesto por sí mismas avances decisivos, bien han sentado las bases para iniciar procesos que han tenido su culminación en el siglo XX. Una de estas aportaciones fue la obra de Felix Klein sobre la caracterización y organización de las diferentes geometrías conocidas en ese momento, popularmente conocida como "el Programa de Erlangen" debido a que en 1872, con motivo de su admisión en la universidad de Erlangen, pronunció una conferencia en la que expuso sus ideas al respecto.

Para situar el trabajo de Klein en su contexto, es importante tener presente que, en tiempos de Klein, se conocían diversas geometrías, como la proyectiva, la afín, la euclídea, y otras geometrías métricas, o las no euclídeas de Gauss, Lobatchevsky y Bolyai. Como nos recuerda Kline (1992), la idea básica de Klein es que cada geometría se puede caracterizar por medio de un grupo de transformaciones, y que las propiedades y logros de una geometría se derivan de los invariantes por dicho grupo característico de transformaciones. La consecuencia inmediata de este resultado es la organización de las diversas geometrías conocidas y otras que se pudieran definir en el futuro, pues si el grupo de transformaciones de una geometría es subgrupo del grupo de transformaciones de otra (es decir, la primera es una subgeometría de la segunda), todos los teoremas demostrados para la geometría son automáticamente teoremas de la subgeometría.

En sus diversas publicaciones, Klein estudió numerosas geometrías, incluso considerando la topología como una de ellas. El siguiente esquema (figura 3.1) muestra las relaciones entre algunas de las geometrías más conocidas.

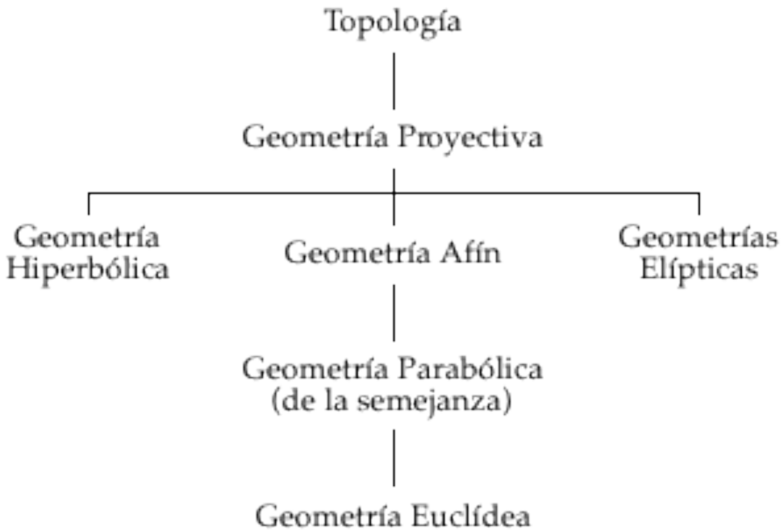


Figura 3.1.

El programa de Erlanger de F. Klein indujo un comprensible interés de los matemáticos por los diferentes conjuntos de transformaciones, y en particular por el conjunto de las isometrías, por ser el propio de la geometría euclídea. También los psicólogos y didactas de los años 60 y 70 se fijaron en la obra de Klein, lo cual les llevó al inicio de diversas investigaciones sobre la comprensión por los estudiantes de estos conceptos. Esta línea de investigación ha continuado activa hasta la actualidad, sufriendo variaciones, tanto en los objetivos como en la metodología, consecuentes con los puntos de vista predominantes en cada época.

En este capítulo resumimos las principales aportaciones que se han hecho desde la investigación en el campo de la didáctica de las isometrías durante los últimos 20 años, organizadas temporalmente para que, al mismo tiempo, se pueda percibir la evolución de los conocimientos y de las formas de trabajo. Presentamos los trabajos divididos en tres bloques, uno conteniendo estudios que han analizado diversos componentes matemáticos de las isometrías que pueden influir en la comprensión por los estudiantes de estos conceptos, otro en el que se describen los principales tipos de estrategias de los estudiantes y sus errores más frecuentes, y el tercero conteniendo estudios y experimentaciones de enseñanza de las isometrías.

Aunque algunos de los resultados que presentamos están referidos a estudiantes de Primaria, está comprobado que los comportamientos de los estudiantes de Secundaria y de la Universidad son análogos, pudiendo, como mucho, variar la incidencia de determinados errores que tienden a desaparecer con el desarrollo o la mayor formación matemática de los estudiantes.

3.1. Variables que Influyen en la Comprensión de las Isometrías

Los psicólogos y didactas de los años 60 y 70, en su mayoría seguidores de Piaget, consideraban que la obra de Klein apoyaba sus propuestas, pues, como hemos visto, la ordenación formal de las diferentes estructuras que se obtiene al considerar los respectivos conjuntos de propiedades invariantes sitúa en primer lugar a la topología, después a la geometría proyectiva y más adelante a la geometría euclídea. No obstante, como apunta Lesh (1976), los didactas matemáticos de esa época tendían a utilizar la teoría de Piaget para justificar el interés del enfoque de la enseñanza de la geometría basado en las transformaciones, pero tomando de las teorías de Piaget sólo aquellos aspectos que apoyaban sus ideas preconcebidas e ignorando otros elementos piagetianos que pudieran ser contrarios a sus puntos de vista.

Esta diferencia de posturas e intereses se observa en las investigaciones sobre la comprensión de las isometrías realizadas en esa época. Por una parte, su metodología de trabajo es la usual de esos años, basada en entrevistas clínicas individuales, con ejercicios generalmente simplistas (desde la óptica actual), muy controlados y con resultados de tipo cuantitativo. Por otra parte, estas investigaciones no producen conclusiones de tipo piagetiano pues no intentan definir etapas de desarrollo de las habilidades correspondientes, sino que miden la influencia de diferentes variables en el éxito de los estudiantes para realizar o identificar isometrías. No obstante, un criterio que se suele usar para organizar los resultados y para clasificar a los estudiantes es la etapa piagetiana de desarrollo en la que éstos se encuentran.

En los siguientes párrafos describimos los grandes rasgos de algunas investigaciones representativas de esta época, recogidas en Lesh, Mierkiewicz (1978) y otras fuentes.

Moyer (1978) entrevista a niños de entre 4 y 8 años de edad y les propone ejercicios basados en unos discos de plástico de 30 cm. de diámetro, como los que se ven en la Figura 3.2. Parte de estos discos son totalmente transparentes y los otros tienen la mitad de color rojo; además, tienen una marca que, según el caso, consiste en un diámetro y un radio o sólo un radio.

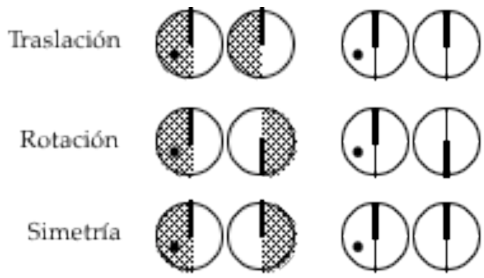


Figura 3.2.

El experimentador presenta al estudiante uno de estos pares de discos y le informa de que ha realizado un determinado movimiento con uno de los discos, acompañándose algunas veces de la realización física del movimiento con dicho disco. A continuación el experimentador marca un punto del disco que no se había movido y le pide al estudiante que marque el otro disco para que los dos sigan siendo iguales y las marcas coincidan si se deshace el movimiento mencionado antes. En esta investigación se evalúa la influencia de la isometría, el color del disco y la realización o no del movimiento con los discos en los 6 casos mostrados en la Figura 3.2. Los resultados indican que:

- La traslación es igual de fácil que la simetría.
- El giro es la isometría más difícil.
- La influencia del tipo de disco y de la realización física o no del movimiento es poco significativa.

No obstante, como el propio autor señala, "hay que interpretar con precaución estas conclusiones, pues los resultados, estrictamente hablando, están limitados a las transformaciones particulares usadas en la investigación. Extrapolar las conclusiones sería arriesgado" (Moyer, 1978, p. 91).

Thomas (1978) plantea a estudiantes de 6, 9 y 12 años de edad una serie de ejercicios parecidos a los anteriores, si bien con mayor variedad de movimientos y posiciones: Giros de ±90° y ±180° y traslaciones y simetrías verticales y horizontales. Partiendo de dos triángulos superpuestos, el investigador realiza una determinada isometría con uno de ellos, a continuación coloca una moneda en la base del triángulo que no se había movido, y le pide al estudiante que coloque otra moneda en la posición correspondiente del otro triángulo (Figura 3.3). De sus datos se desprende que:

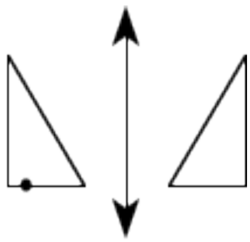


Figura 3.3.

- Las traslaciones son los movimientos más fáciles, seguidos de las simetrías y siendo los giros los más difíciles (no obstante, un test de contraste de hipótesis indica que la diferencia es poco significativa).

- Los estudiantes de 12 años realizan bien casi todos los ejercicios.

Por su parte, Schultz (1978) tiene en cuenta una lista más exhaustiva de variables que pueden influir en la realización correcta de una isometría: La isometría (traslación, giro o simetría), la dirección del movimiento (diagonal u horizontal), el tamaño del movimiento (largo, corto o con superposición), el tipo de figura usada (significativa o no significativa) y el tamaño de la figura (pequeña, de 8 cm., o grande, de 80 cm.). La Figura 3.4 recoge algunos ejemplos de los movimientos realizados: Traslación larga horizontal de una figura significativa, giro de 180° corto diagonal de una figura no significativa y simetría con superposición horizontal de una figura significativa.

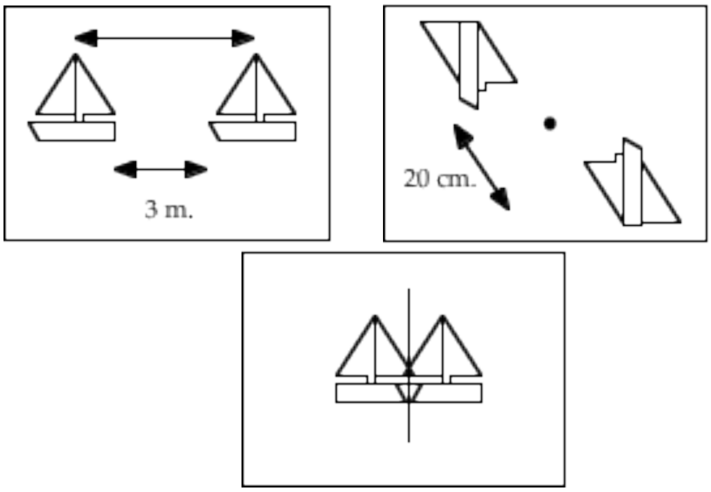


Figura 3.4.

El autor entrevista a estudiantes de entre 6 y 10 años de edad. A partir de un cuadrado de plástico con la figura modelo, el investigador realiza una isometría con otro cuadrado de plástico sin el modelo. Entonces el estudiante debe colocar la figura en la posición correcta en el cuadrado movido. Entre las conclusiones de este estudio destacan las siguientes:

- Las traslaciones son mucho más fáciles que las simetrías y los giros, y las dos últimas isometrías tienen una dificultad análoga.

- Para cualquier isometría, los movimientos en horizontal son más fáciles que en diagonal. Destaca la diferencia en el caso de las simetrías, en las que el 56'4% de los estudiantes realiza bien las simetrías horizontales mientras que sólo el 8'1% realiza bien las simetrías en diagonal. En cuanto a la longitud de los movimientos, no se percibe una influencia clara de esta variable.

- Los ejercicios con figuras grandes son más fáciles que los mismos con figuras pequeñas. Análogamente, son más fáciles los ejercicios con figuras significativas que con figuras abstractas.

Finalmente, mencionaremos un estudio realizado por Kidder (1978) en el que plantea a estudiantes de 9, 11 y 13 años unas actividades en las que deben construir la imagen de un triángulo por una isometría (Figura 3.5) seleccionando las varillas adecuadas de un conjunto de 7 varillas de longitudes diferentes. Aparte de que la mayoría de los estudiantes tienen problemas para seleccionar la varilla de la longitud adecuada, Kidder llega, entre otras, a la conclusión de que la isometría realizada y la complejidad de la figura son factores que influyen en la calidad de las respuestas de los estudiantes.

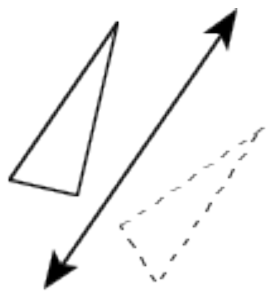
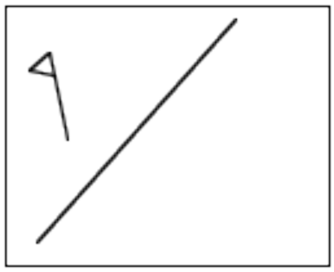


Figura 3.5.

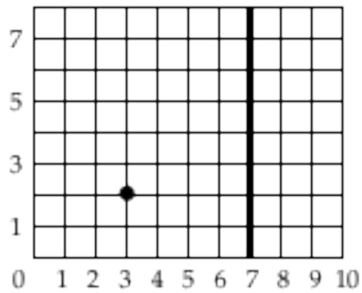
Como puede verse, los movimientos que se realizan en estos estudios distan de ser suficientemente variados como para permitir sacar conclusiones generales acerca de las tres isometrías básicas. No es de extrañar, por ejemplo, la contradicción de resultados sobre la mayor o menor dificultad de las simetrías respecto de los giros, ya que las conclusiones de estas investigaciones no permiten establecer una relación con carácter general, sino que dependen de las situaciones concretas planteadas en cada estudio: Hay unas simetrías que son más fáciles que algunos giros y otras simetrías que son más difíciles que algunos giros. También es importante la diferencia de edades de los estudiantes observados. En los siguientes párrafos veremos que las investigaciones modernas han prestado más atención a las variables matemáticas y han planteado a los estudiantes mayor variedad de situaciones, lo cual se ha traducido en una mayor homogeneidad y consistencia de las conclusiones de los diversos estudios. Hacemos primero descripciones de varias investigaciones y en la siguiente sección presentamos sus resultados para cada isometría de forma conjunta.

La primera de éstas investigaciones fue el proyecto inglés "Concepts in Secondary Mathematics and Science" (C.S.M.S.), cuyas aportaciones en diversas áreas de las Matemáticas, entre ellas las isometrías, han supuesto una importante fuente de información para profesores e investigadores, y un significativo avance para la Didáctica de las Matemáticas. El objetivo inicial de esta investigación es obtener información sobre la comprensión de once temas de Matemáticas por los estudiantes ingleses de final de Primaria y primeros años de Secundaria (con edades entre 11 y 16 años). No obstante, el análisis de los datos obtenidos acerca de los procedimientos de trabajo de los estudiantes y sus tipos de respuestas más frecuentes ha proporcionado una información que va más allá de los límites del país en el que se realizó el estudio (Hart, 1981).

La validez de los resultados del proyecto C.S.M.S. se debe, en buena medida, al tamaño de la muestra empleada, formada por unos 10.000 estudiantes, de los cuales 1.026, con edades entre 13 y 15 años, contestaron el test de isometrías (centrado en simetrías y giros). Este test (Hart y otros, 1985) está formado por tres partes dedicadas, respectivamente, a las simetrías, a los giros y a los productos de simetrías y/o giros. En la parte dedicada a las simetrías, hay varios ítems en los que, dados un eje y una figura, se pide dibujar la simétrica de la figura respecto del eje (Figura 3.6-a), dibujando unas veces a mano alzada y otras veces con regla. En otros ítems se dan dos figuras y se pide dibujar, cuando exista, el eje de simetría que las liga (Figura 3.6-b). En ambas partes se presentan casos con y sin cuadrícula, con los ejes de simetría y las figuras con diversas inclinaciones respecto de la horizontal, y con figuras de distintas complejidades. Por último, hay algunos ítems en los que se dan un punto y un eje sobre una cuadrícula con coordenadas y se pide calcular las coordenadas de la imagen del punto (Figura 3.6-c).



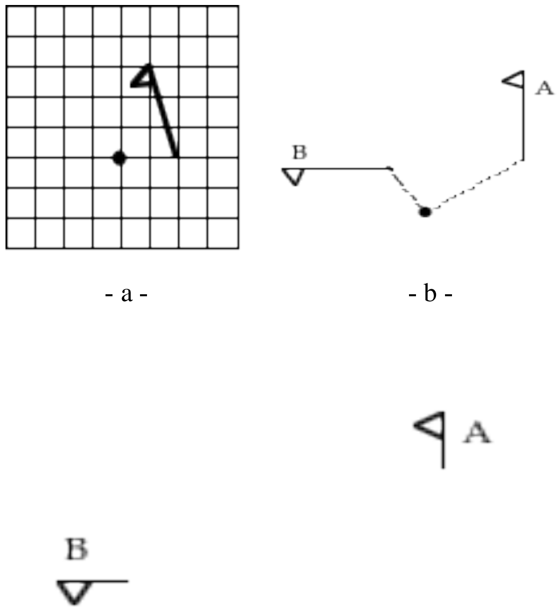
- a - - b -



- c -

Figura 3.6.

La parte dedicada a los giros está formada por ítems en los que se pide dibujar la imagen de una figura (Figura 3.7-a), decir si un punto es o no centro de giro de un par de figuras o explicar por qué (Figura 3.7-b), y dibujar el centro de giro de un par de figuras (Figura 3.7-c). Las variables del contexto que se tienen en cuenta (cuadrícula, tipo de figura, etc.) son las mismas que para las simetrías. Una importante limitación es que, en todos los casos, los giros son de +90°.

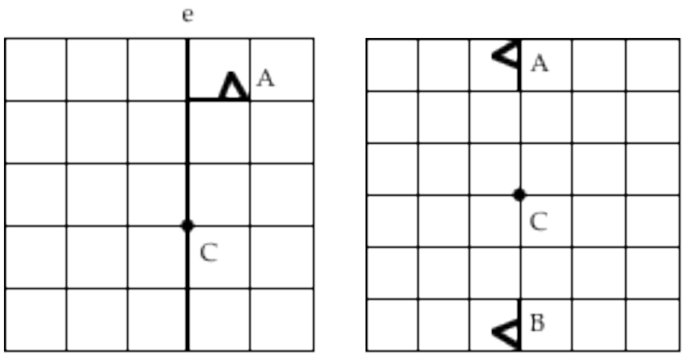


- a - - b -

- c -

Figura 3.7.

Finalmente, en los ítems dedicados al producto de simetrías y/o giros, se pide realizar un producto y encontrar la isometría simple equivalente (Figura 3.8-a) o identificar uno o los dos movimientos componentes de un producto conociendo el resultado (Figura 3.8-b).



- a - - b -

Figura 3.8.

Un aspecto importante que se identifica en los resultados del proyecto C.S.M.S. es la influencia de los elementos que integran los ítems en la corrección de las respuestas de los estudiantes. Como hemos comentado más arriba, ya Schultz (1978) había planteado la influencia de varios de estos elementos; Hart y otros (1985) tienen en cuenta otras variables: La complejidad de la figura a mover (un punto, un segmento o un triángulo), la presencia o no de cuadrícula, la posición del eje de simetría (vertical, horizontal, inclinado) y la distancia entre la figura y el eje de simetría o el centro de giro.

Han sido numerosos los estudios que han tomado como referencia el proyecto C.S.M.S. y sus resultados. La mayor parte de ellos han consistido en administrar los mismos tests en otros contextos (por ejemplo diferentes países, sistemas educativos o edades de los estudiantes), obteniéndose, por lo general, resultados coherentes con los de la investigación inicial y que confirman sus descubrimientos e interpretaciones. Un conjunto más reducido de investigaciones han tratado de completar o desarrollar la información proporcionada por el proyecto C.S.M.S., unas veces ampliando el campo de estudio y otras veces profundizando en el análisis del comportamiento de los estudiantes.

Por lo que respecta a las simetrías, Gutiérrez, Jaime (1987a) y Grenier (1988) han elaborado unos tests derivados del test del proyecto C.S.M.S. pero con objetivos más específicos y que incluyen mayor cantidad de ítems, por lo que aumentan el detalle y la fiabilidad de las conclusiones.

Nuestra investigación Gutiérrez, Jaime (1987a) se centra en la comprensión del concepto de simetría por estudiantes de E.U. de Magisterio. Estamos interesados en observar la influencia de las variables mencionadas en los párrafos anteriores (complejidad de la figura, presencia de cuadrícula, posición del eje de simetría y posición relativa eje - objeto) en la facilidad de los ejercicios y la influencia de la enseñanza en la modificación de las concepciones erróneas de los estudiantes. El test que hemos elaborado está formado por 38 ítems de dibujo de imágenes, dibujo de ejes de simetría y cálculo de las coordenadas de imágenes (análogos a los mostrados en la Figura 3.6). Dicho test fue administrado a 280 alumnos de primer curso de la Escuela de Magisterio de Valencia antes y después de un curso de enseñanza por descubrimiento de las isometrías del plano (Gutiérrez, Jaime 1986), de tipo inductivo y activo.

Por su parte, Grenier (1988) tiene como objetivos generales estudiar las causas de la permanencia de determinadas concepciones erróneas de la simetría axial en los estudiantes de Enseñanza Secundaria y averiguar si es posible elaborar unidades de enseñanza que desestabilicen esos errores y hagan evolucionar positivamente las concepciones de los estudiantes. Para ello, en primer lugar, determina de manera precisa, mediante la administración de un test, qué variables y qué valores de las mismas tienen un papel importante en esta situación. Después, a partir de la información obtenida, prepara y experimenta una secuencia de problemas orientados a luchar contra las concepciones erróneas y las variables relevantes detectadas como fuentes de dificultades.

En el diseño de este test, D. Grenier tiene en cuenta las mismas variables que el proyecto C.S.M.S. y el nuestro, pero aumentando el número de valores diferentes de algunas de ellas. Así, considera 4 posiciones relativas entre un segmento y un eje de simetría: Que el eje no toque al segmento, que lo toque en un extremo que lo toque en el punto medio y que lo toque en otro punto interior distinto del punto medio (Figura 3.9). También considera 7 valores diferentes del ángulo formado entre el eje y el segmento (Figura 3.10). La combinación de estas dos variables con la presencia o no de malla y las 4 posiciones del eje de simetría (0°, 45°, 90° y 135°) da un total de 192 ítems en los que los estudiantes deben dibujar, a mano alzada, la imagen de cierta figura.

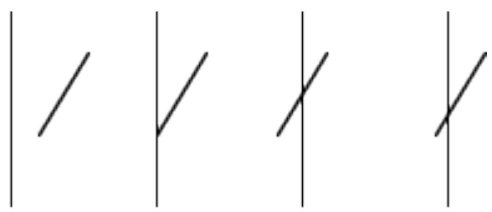


Figura 3.9.

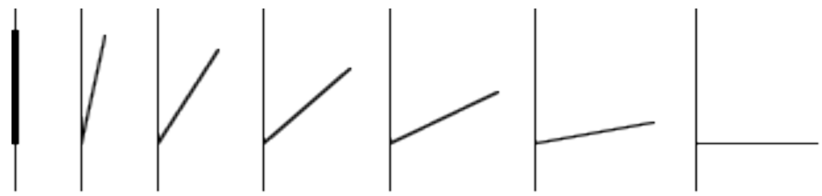


Figura 3.10.

Chien (1989) se centra en el análisis del comportamiento de los estudiantes al trabajar con los giros (siempre de +90°), para lo cual administra a un numeroso colectivo de estudiantes de Secundaria, con edades entre 13 y 15 años, una adaptación del sub-test de giros de Hart y otros (1985), descrito anteriormente (Figura 3.7). Entrevista a parte de los estudiantes para averiguar los motivos de sus respuestas. Hay 5 componentes que integran la comprensión del concepto de giro, para cada uno de los cuales se preparan diversos ejercicios:

1) Reconocimiento global, visual, de los giros, es decir ser capaz de estimar la posición de la figura imagen.

2) El ángulo de giro, formado por dos segmentos que unen el centro de giro con un punto y con su imagen, respectivamente.

3) La equidistancia al centro de giro de cualquier punto y su imagen.

4) El ángulo formado por cualquier segmento y su imagen, que coincide con el ángulo de giro.

5) La congruencia entre una figura y su imagen.

En este estudio se identifican diversas estrategias de los estudiantes para dibujar imágenes por giros o para determinar centros de giro, tanto correctas como erróneas. Una conclusión general a la que llega es que los componentes 2 a 5, que son características matemáticas de los giros, deben ser adquiridos por los estudiantes para poder manipular correctamente los giros.

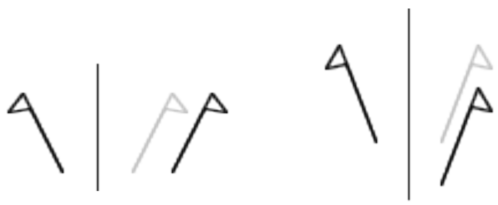
3.2. Estrategias y Errores de los Estudiantes

Aunque no hay que caer en la tentación de considerar la enseñanza de las matemáticas como una actividad de detección y persecución de los errores de los estudiantes, sí es importante que los profesores conozcan cuáles son las dificultades de cada tema, las reacciones de los estudiantes ante ellas, y las formas como la mayoría de los estudiantes interpretan los conceptos matemáticos, tanto las correctas como las erróneas. La investigación en didáctica de las matemáticas ofrece en este terreno y en el del diseño curricular las máximas posibilidades de colaboración con los profesores, ofreciéndoles resultados de estudios realizados en situaciones más controladas que las clases ordinarias, para aumentar su fiabilidad. La mayoría de los resultados de las investigaciones no se pueden trasladar directamente a las aulas normales, pero sí es posible que los profesores extraigan fragmentos o hagan modificaciones en las investigaciones de manera que les resulten útiles en sus clases. En las siguientes páginas resumimos los resultados más interesantes de la investigación sobre las estrategias de trabajo de los estudiantes con las diferentes isometrías y sobre los tipos de errores conceptuales y prácticos más frecuentes.

3.2.1. Estrategias y errores en las simetrías

Al dibujar los estudiantes imágenes de objetos por medio de simetrías aparecen diversos errores típicos, consecuencias de determinadas falsas concepciones. En todas las investigaciones mencionadas antes se han encontrado estos errores, independientemente del contexto en el que estuvieran trabajando los estudiantes observados, de su edad y del sistema educativo. Estos errores los podemos dividir en dos grupos:

1) Errores cuyo origen está en el concepto de simetría, ya que surgen cuando los estudiantes no aplican correctamente las dos propiedades que relacionan una figura y su imagen: Falta de equidistancia al eje de cada punto y su imagen (Figura 3.11-a; la imagen correcta aparece punteada), falta de perpendicularidad respecto del eje del segmento que une un punto y su imagen (Figura 3.11-b) y combinaciones de los dos errores anteriores. En todos los casos, los estudiantes olvidan alguna de las dos características de las simetrías, o ambas.

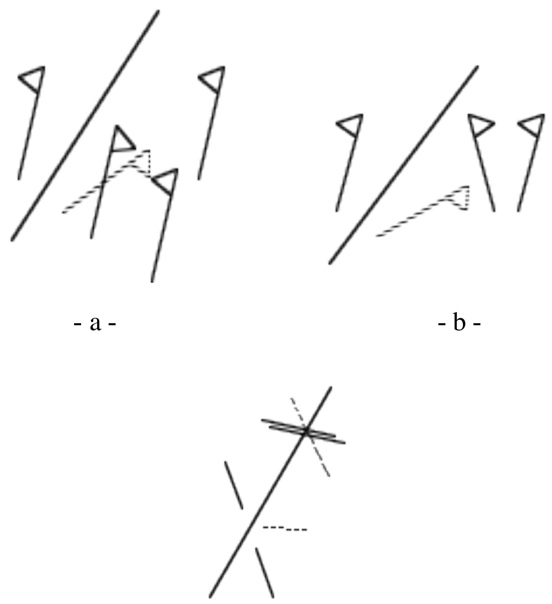


- a - - b -

Figura 3.11. Errores por mala comprensión de la definición de simetría.

2) Errores cuyo origen está en una interpretación reducida o deformada de la simetría, que surgen cuando los estudiantes utilizan concepciones erróneas de tipo visual: Dibujo de la imagen paralela a la figura original aunque ésta no sea paralela al eje (Figura 3.12-a), desplazamiento horizontal o vertical de la figura aunque el eje de simetría esté inclinado (Figura 3.12-b),

combinaciones de los dos errores anteriores, y dibujo de la imagen sobre la prolongación de la figura dada en alguna dirección específica (Figura 3.12-c). Estas respuestas tienen su origen en prototipos inducidos bien por una enseñanza pobre, en la que la mayoría de los ejemplos (o todos) presentados a los alumnos tenían ejes de simetría verticales, bien cuando no ha habido enseñanza previa, por lo que el único aprendizaje ha sido el inconsciente debido a la predominancia de ejes verticales y horizontales en el mundo y la cultura que nos rodean (espejos, edificios, puertas, etc.).



- a - - b -

- c -

Figura 3.12. Errores por interpretaciones visuales parciales de la simetría.

En los ítems que piden dibujar el eje de simetría, se detectaron errores correspondientes a los anteriores, especialmente cuando los estudiantes dibujaban ejes de pares de figuras que, realmente, no son simétricas, como los ejemplos incluidos en la Figura 3.13.

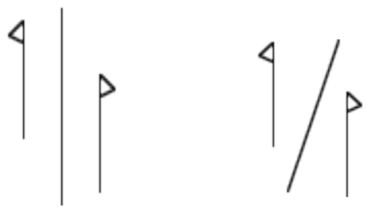
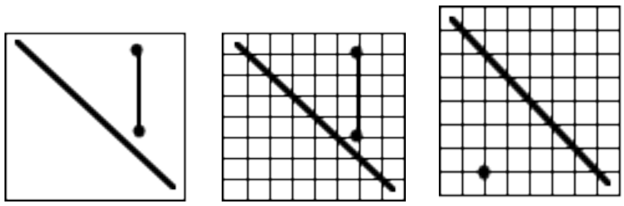


Figura 3.13.

La complejidad de la figura que se debe simetrizar es una variable que, intuitivamente, cualquier profesor tendrá en cuenta al plantear problemas a sus alumnos. Efectivamente, los resultados de Hart (1981) confirman esta intuición, si bien en investigaciones posteriores (Jaime, Gutiérrez y otros, 1988-89; Grenier 1988), al analizar más detalladamente esta variable, se llega a resultados más diferenciados, que muestran que la dificultad depende básicamente de la posición del eje de simetría y la posición relativa eje-objeto cuando éste no es un punto: En ciertos casos no hay diferencia significativa de dificultad al dibujar la imagen de un punto o una de figura formada por segmentos. En otros casos, determinadas combinaciones de posiciones de eje y segmentos inducen más errores, especialmente cuando el eje de simetría corta al objeto. Por último, los ejes de simetría inclinados fomentan el error de falta de perpendicularidad al dibujar imágenes de puntos.

Por otra parte, puede observarse que no es cierto que, siempre que un estudiante es capaz de dibujar correctamente la imagen de un punto, va a ser capaz de dibujar correctamente la imagen de un segmento. El motivo está en que se siguen varias estrategias para dibujar imágenes de objetos como segmentos, triángulos, etc. Una de ellas consiste en dibujar, independientemente, las imágenes de aquellos puntos significativos (vértices, extremos, etc.) que caracterizan la figura (por ejemplo, los 3 vértices de un triángulo) y, a continuación, unir esas imágenes para obtener la figura imagen completa. Otra estrategia menos elaborada consiste en dibujar sólo las imágenes de parte de esos puntos significativos (por ejemplo, 2 vértices de un triángulo), a continuación, unir las imágenes que han calculado y, por último, completar el dibujo visualizando mentalmente la posición de la figura imagen. Un caso extremo de esta estrategia consiste en calcular sólo la imagen de un punto de la figura. Cuantos menos puntos imagen se calculen, más fácil es cometer errores, pues las visualizaciones mentales suelen estar muy influidas por las experiencias de la vida diaria que comentábamos más arriba. Por el contrario, si se dibujan las imágenes de varios puntos, los errores cometidos al dibujar esas imágenes dan lugar a deformaciones en la figura imagen, por lo que los estudiantes pueden darse cuenta de que han hecho algo mal si comparan la figura y su imagen.

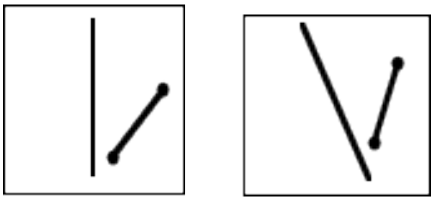
Un recurso usado con frecuencia para ayudar a los estudiantes cuando se inicia el estudio de las isometrías es trabajar sobre papel cuadriculado. En el caso de las simetrías, la cuadrícula constituye una herramienta que permite medir distancias con más facilidad, si bien no ofrece ninguna ventaja significativa frente a los otros tipos de errores descritos antes (Hart, 1981). Así, vemos cómo en el test de Gutiérrez, Jaime (1987a) los dos ítems que tienen mayor cantidad de errores por dibujar la figura imagen paralela a la original son los de las Figuras 3.14-a y 3.14-b, con un 20'7% y 21'4% de estudiantes que cometieron este error, respectivamente. Análogamente, el 28'9% de los estudiantes cometieron un error de falta de perpendicularidad en el ítem de la Figura 3.14-c. También es conveniente tener en cuenta que la cuadrícula privilegia determinadas posiciones del eje de simetría (sobre la cuadrícula o en diagonal), pero el número de errores crece sensiblemente si se dibujan ejes de simetría con inclinaciones diferentes de ésas, pues la cuadrícula pasa de ser una ayuda a ser un distractor.



- a - - b - - c -

Figura 3.14.

Todas las investigaciones modernas coinciden en que es más fácil dibujar imágenes de figuras cuando el eje de simetría es vertical u horizontal. Por ejemplo, en el test administrado en Gutiérrez, Jaime (1987a), incluimos pares de ítems con el que se ve en la Figura 3.15, en los que la posición relativa entre el eje y el punto o segmento es la misma y la única diferencia es la inclinación del conjunto. El diagrama de la Figura 3.16 muestra los porcentajes de respuestas correctas a diferentes ítems de dibujo de la imagen de un punto o un segmento, clasificados según la posición del eje de simetría. Como puede observarse, los ítems más fáciles son los de eje horizontal, seguidos por los que tienen el eje vertical, y siendo los más difíciles aquéllos en los que el eje tiene otra inclinación.



- a - - b -

Figura 3.15.

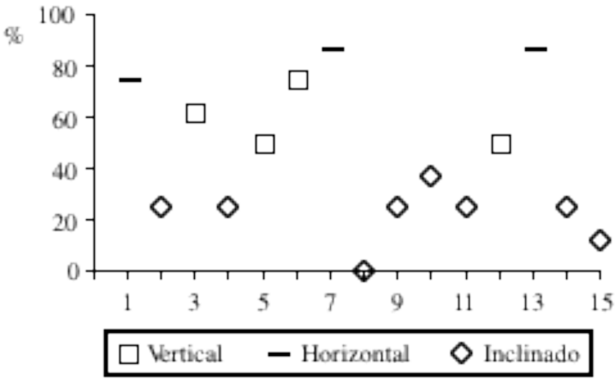


Figura 3.16.

Por su parte, Grenier (1988) permite completar la información anterior, pues los resultados de sus experiencias indican que son más fáciles los ítems en los que, para dibujar la figura imagen, sólo hay que considerar una inclinación diferente de la vertical u horizontal (la imagen de un punto o la imagen de un segmento cuando el eje o el segmento es vertical u horizontal), siendo más difíciles los dibujos en los que el ángulo entre eje y segmento no es 0°, 45° ni 90°.

3.2.2. Estrategias y errores en los giros

En principio, es necesario notar que tanto Hart (1981) como Chien (1989) se limitan a giros de +90°. Esto quiere decir que en sus análisis y conclusiones aparece sólo parte de la problemática relativa al trabajo con giros. Una conclusión válida para todo tipo de giros es que resulta más fácil girar una figura cuando ésta contiene el centro de giro que cuando está separada de él. Y otra conclusión presentada por Hart (1981), que sólo es válida para giros de 90°, es que la facilidad para dibujar correctamente la figura girada depende de la inclinación del segmento inicial, siendo el ejercicio más fácil cuando ese segmento es vertical.

Una dificultad importante de la mayoría de los estudiantes que terminan la enseñanza primaria es que no tienen un conocimiento operativo de los ángulos: Saben distinguir agudos, rectos y obtusos, y saben medir ángulos o manejar los grados cuando son datos de los problemas, pero difícilmente pueden estimar la amplitud de un ángulo, identificar el ángulo formado por dos figuras congruentes que no se tocan o comparar ángulos en diferentes posiciones. Esto se refleja en lo raramente que los estudiantes perciben giros incorrectos cuando el motivo es haber usado un ángulo distinto del ángulo de giro, frente a la facilidad con que perciben los giros incorrectos por falta de equidistancia al centro de giro (Hart, 1981).

En Jaime, Gutiérrez y otros (1988-89) analizamos esta problemática con detalle, observando que el desconocimiento de los ángulos por los estudiantes les impide reconocer y comprender el cambio continuo de inclinación que experimenta una figura al girar. Por este motivo, cuando pedimos a los estudiantes del ciclo superior de E.G.B. y de Magisterio que giren manualmente una figura recortada en papel A alrededor de un punto O, algunos realizan movimientos como el que se ve en la Figura 3.17. La mejor manera de ayudar a los estudiantes a superar este obstáculo es darles la posibilidad de que observen y realicen giros de manera automática, para que puedan observar ese cambio de inclinación de las figuras (Jaime, Gutiérrez y otros, 1989).

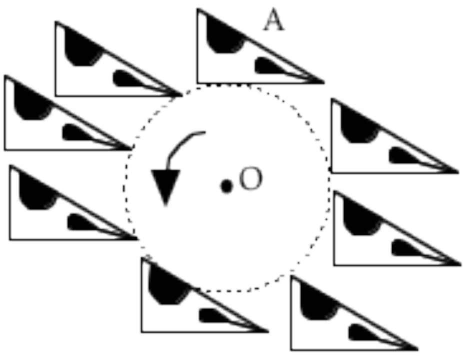


Figura 3.17.

Para comprender y usar correctamente el concepto de rotación de una figura, es necesario que los estudiantes apliquen bien las 5 características descritas al final de la sección anterior (reconocimiento global, ángulo de giro, equidistancia al centro, ángulo entre un punto y su imagen, y congruencia), en particular las 2ª a 5ª, que son de carácter matemático. Así, al dibujar la imagen del segmento A por el giro G(O,90°), cuyo centro es el punto marcado (Figura 3.18), en cada respuesta podemos reconocer la aplicación de parte de las características y la ausencia de otras (la respuesta correcta aparece punteada en la Figura 3.18-a): En la Figura -a- destaca el fallo del ángulo de giro, en la Figura -b- de la equidistancia al centro, en la Figura -c- de la perpendicularidad entre el objeto y su imagen y en la Figura -d- de la congruencia (Chien, 1989).

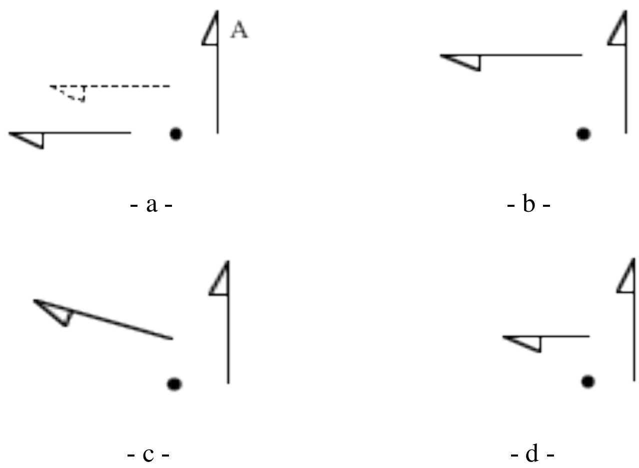


Figura 3.18. Causas de error al dibujar la imagen por un giro de 90°.

También describe esta investigación diversas estrategias empleadas por los estudiantes para determinar las imágenes. La más general (usada por el 24% de los estudiantes encuestados), consiste en unir algún punto de la figura con el centro de giro, es decir en transformar la figura dada, alejada del centro de giro, en otra que lo toque. Así, en la Figura 3.19, vemos cómo un estudiante une el extremo del segmento con el centro y después gira la figura ampliada, empezando por la línea auxiliar. El estudiante explica que "necesitaba un pivote para girar la figura", por lo que había dibujado el segmento punteado. De esta manera, puede hacer el giro fácilmente, pues la línea punteada y su imagen forman un ángulo recto. El resto de la figura la dibuja a continuación fijándose en las posiciones relativas.

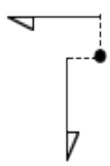


Figura 3.19.

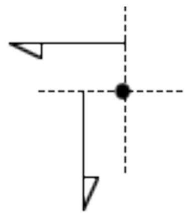


Figura 3.20.

Otros estudiantes (el 4% de la muestra) usaron el símil de un sistema de coordenadas (Figura 3.20), en el que el centro de giro es el origen y, al girar 90°, un eje va a parar sobre el otro.

Como conclusión general, podemos decir que, igual que ocurre con las simetrías, hay una tendencia natural a utilizar una concepción intuitiva visual de giro, apoyada casi siempre en imágenes mentales globales de la posición de la figura imagen. En una etapa intermedia del aprendizaje, semi-analítica, los estudiantes tienen en cuenta una o varias de las características de los giros (pero no todas), por lo que su éxito resolviendo ejercicios depende de qué características usen. Finalmente, los estudiantes proceden de forma analítica, aplicando correctamente las propiedades de los giros que necesitan en cada caso.

3.2.3. Estrategias y errores en las traslaciones

La traslación es la isometría más simple y, por lo tanto, la que plantea menos dificultades a los estudiantes de Primaria y, sobre todo, de Secundaria. Este es el motivo de que se le haya prestado tan poca atención en las investigaciones dirigidas a analizar los factores que influyen en la dificultad de las diferentes isometrías. En nuestra propia experiencia hemos podido constatar que los niños de los cursos superiores de Primaria pueden aprender con rapidez las características esenciales de las traslaciones, reconocerlas, y dibujarlas y que los estudiantes de Secundaria o universitarios captan muy rápidamente las características visuales y matemáticas de las traslaciones. Generalmente, las dificultades que surgen se superan en pocos minutos si el profesor plantea alguna actividad apropiada y dirige la atención de los estudiantes hacia el elemento clave. Estas dificultades suelen surgir en:

1) La comprensión del concepto de vector libre como vector asociado a una traslación. Los estudiantes que todavía no han encontrado este concepto en física, tienen la tendencia a pensar que una traslación consiste en llevar la figura hasta el extremo de la flecha dibujada como representante del vector de la traslación.

2) La realización de traslaciones cuando la figura tiene forma poligonal (especialmente si es rectangular) y el vector de la traslación es paralelo a uno de sus lados. Es muy frecuente el error consistente en dibujar el vector empezando en un extremo del lado inicial y terminando en el otro extremo del lado imagen (Figura 3.21). La causa de este error no está en una falta momentánea de atención, pues numerosos estudiantes, de todos los niveles educativos, lo cometen de manera sistemática al mismo tiempo que realizan correctamente traslaciones en las que el vector no es paralelo a ningún lado. El motivo está, más bien, en que los estudiantes se basan en las características visuales de la traslación para determinar la posición de la figura imagen, sin usar sus propiedades matemáticas, en particular que la distancia entre un punto y su imagen debe ser igual a la longitud del vector.

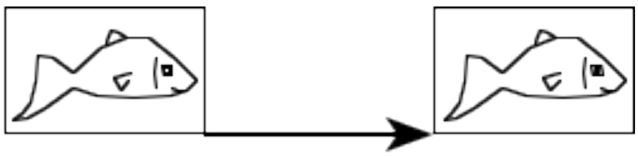


Figura 3.21

3.3. Experiencias de Enseñanza de las Isometrías

En la literatura se pueden encontrar bastantes descripciones de unidades de enseñanza de las isometrías. A grandes rasgos, se pueden clasificar en las que plantean aproximaciones intuitivas y dinámicas a las isometrías y las que, desde el primer momento, adoptan una posición matemática formal. Dentro del primer grupo, cabe diferenciar entre las unidades de enseñanza basadas en materiales manipulativos y las basadas en ordenadores. En los siguientes párrafos haremos un recorrido por las propuestas más interesantes que conocemos.

Un principio didáctico con el que nos identificamos, y que hemos aplicado en la unidad de enseñanza que presentamos en el capítulo 5, es que el estudio y la utilización formales de las isometrías pueden tener éxito sólo cuando previamente se ha permitido a los estudiantes descubrir y utilizar el sentido físico y dinámico de las isometrías. Por lo tanto, su estudio debe empezar en un contexto de manipulación, resolviendo problemas en los que prime el significado de "movimiento" sobre el de "isometría". Posteriormente, si ello es un objetivo del profesor, se pueden abstraer los significados y características de los distintos movimientos y abordar el estudio matemático de las isometrías y sus propiedades más formalmente.

Se han elaborado varias unidades de enseñanza de las isometrías que entran en estos parámetros. No obstante, es conveniente distinguir entre aquéllas en las que los estudiantes deben mover realmente objetos y las que plantean movimientos imaginarios pero que la actividad de los estudiantes se limita a dibujar la figura imagen.

3.3.1. Enseñanza por descubrimiento

Una metodología muy frecuente en la enseñanza de las matemáticas es la de "enseñanza por descubrimiento", basada en el planteamiento de ejercicios a los estudiantes para que éstos lleguen a descubrir determinados conceptos o propiedades y, con la ayuda del profesor, construyan sus redes de conocimientos. Aunque algunos didactas preconizan una enseñanza en la que los estudiantes descubran por sí mismos, sin ayuda del profesor, los conceptos matemáticos y sus propiedades, lo más frecuente es encontrar lo que podemos llamar "enseñanza por descubrimiento guiado", en la que el profesor ejerce la función de control, para evitar que los estudiantes dirijan sus energías en direcciones inapropiadas, y de árbitro, para indicar las definiciones, resultados, procedimientos, etc. correctos. Comentaremos algunos ejemplos de esta forma de enseñanza.

A modo de homenaje, mencionamos en primer lugar a P. Puig Adam, según el cual

> "es el doble juego de la percepción combinada con la acción el que genera el conocimiento matemático. ...... Y si es el binomio perceptivo-activo el que fecunda, en definitiva, el aprendizaje matemático, es natural que concibamos modernamente el material didáctico matemático no como simple colección de modelos estáticos destinados a ser contemplados pasivamente, sino como conjunto de elementos materiales capaces de sugerir o de traducir ideas matemáticas al *crear mediante ellas situaciones activas de aprendizaje*" (Puig Adam, 1956, pg. 84; la cursiva es del autor).

Uno de los ejemplos que propone en este libro es una lección de iniciación a las simetrías en el plano, basada en la utilización de figuras con ejes de simetría. Comienza dando a los estudiantes una plancha de madera o cartón en la que hay varios huecos con formas poligonales y las piezas recortadas de dichos polígonos. Los estudiantes empiezan a colocar los polígonos en sus huecos y pronto se dan cuenta de que algunos polígonos se pueden colocar de varias formas. A partir de aquí se inicia la actividad propiamente dicha, dirigida de analizar los polígonos para determinar la cantidad de posiciones diferentes que admite cada uno.

El siguiente ejercicio que plantea Puig Adam es el clásico de plegado de papel y recorte. Más adelante, como paso a la matematización del concepto adquirido en las actividades anteriores, el profesor dibuja en la pizarra una recta y un punto, y pide a los estudiantes que dibujen el punto simétrico. Cuando, algo después, repite el ejercicio con un eje inclinado, aparece el error de desplazamiento en horizontal que hemos analizado en una sección anterior de este capítulo. Por otra parte, la necesidad de determinar la exactitud de las respuestas (en especial cuando los ejes están inclinados) lleva a los estudiantes, guiados por el profesor, a formular la definición de puntos del plano simétricos respecto de una recta. La lección termina con otros ejercicios, siempre activos, en los que los estudiantes afianzan los conceptos y descubren algunas propiedades de las simetrías.

La inclusión del estudio de las isometrías en los contenidos de la E.S.O. hace suponer que éste será uno de los temas de los libros de texto que se publiquen cuando se produzca la implantación definitiva de este tramo educativo. Por el momento, nos sirven como ejemplos de cuál puede ser el tratamiento que se haga del tema de las isometrías en la E.S.O. algunos libros de texto correspondientes a los cursos 3º y 4º, que están siendo impartidos con carácter experimental en numerosos centros de toda España.

En Coriat y otros (1994) se dedica un bloque de dos temas al estudio de los movimientos y de la composición de movimientos. El primer tema tiene como objetivos, entre otros, la observación de situaciones en las que están presentes traslaciones, giros o simetrías, avanzar en la definición de cada movimiento, realizar movimientos y reconocer qué isometría relaciona dos figuras, y estudiar las invarianzas y otras propiedades. Para cada isometría (simetría, giro y traslación, por este orden) se plantean, en primer lugar, algunas situaciones prácticas de realización del movimiento, después se reflexiona sobre las propiedades características de la isometría y, finalmente, se enseña a determinar el eje de simetría, el centro de giro y el vector de traslación. El tema se completa con numerosos ejercicios y problemas.

El tema de composición de movimientos tiene una estructura análoga al anterior, con unos objetivos centrados en estudiar el producto y la descomposición de isometrías y en otras propiedades como invarianza, inversa de un isometría, etc. Los estudiantes realizan plegados para descubrir el resultado del producto de dos simetrías y después analizan el resultado buscando las relaciones entre los ejes del producto y el movimiento resultante. En la segunda parte del tema, se estudian diversas propiedades, comenzando siempre con situaciones concretas que dan lugar a generalizaciones y enunciados formalizados de las propiedades. Por último, se plantean ejercicios y problemas, muchos de los cuales obligan a los estudiantes a descubrir propiedades no estudiadas antes, como el producto de traslaciones y/o giros o la descomposición de giros y traslaciones en simetrías (!).

Desde el punto de vista del modelo de Van Hiele, este texto se sitúa a caballo entre los niveles 2 y 3 pues, por una parte, se basa en la obtención y generalización de conceptos y propiedades a partir de la actividad de los estudiantes y, por otra parte, se ofrecen explicaciones y demostraciones abstractas de las deducciones hechas.

En el currículum de Secundaria del S.M.P. 11-16 encontramos varias unidades dedicadas a las simetrías y a los giros (S.M.P., 1985a, 1985b, 1986a, 1986b). Aunque todas las unidades tienen una estructura común, hay una diferencia importante entre ellas en la manera como se introduce cada isometría:

1) Los primeros ejercicios de la unidad de giros (S.M.P., 1986a) plantean situaciones en las que hay que dar la vuelta (es decir, girar 180°) a alguna figura para verla correctamente o para verificar si coincide consigo misma o no (la Figura 3.22 muestra el primer ejercicio). No se empieza a hablar de giro, centro ni grados hasta después de haber afianzado el concepto. El resto de la unidad está dedicado a estudiar figuras invariantes por giros y, finalmente, invariantes por giros y simetrías.

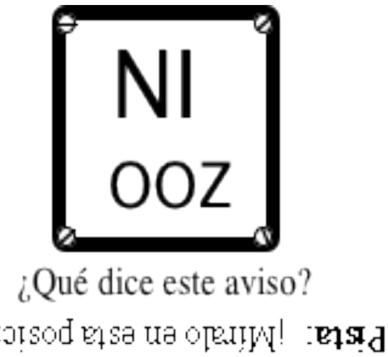


Figura 3.22.

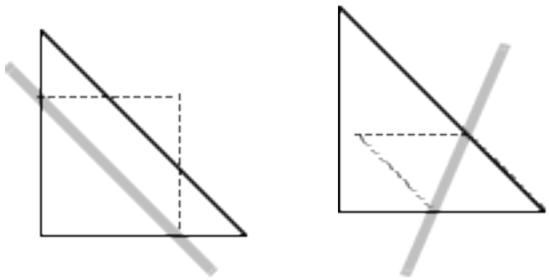
Algo similar ocurre en S.M.P. (1985b, 1986b), en los que el concepto de simetría se introduce a partir de los dos métodos clásicos (uso del espejo, y plegado y recorte de papel) y sólo después de realizadas varias actividades se introduce el término eje de simetría.

2) Por el contrario, S.M.P. (1985a) comienza asumiendo que los estudiantes conocen las simetrías y saben qué es un eje de simetría. Tras mostrar una figura en la que están marcados sus 2 ejes de simetría, la primera actividad pide identificar el número de ejes de simetría de varias figuras (Figura 3.23). A continuación se introducen los conceptos de centro de giro y de simetría rotacional y se plantean actividades en las que los estudiantes deben encontrar simetrías rotacionales y sus órdenes. La unidad continúa con actividades de construcción, con pequeños cuadrados, de figuras que tengan determinadas características. La última parte de la unidad está dedicada a la construcción y análisis de diversos frisos y mosaicos.

¿Cuántos ejes de simetría tiene esta figura?

Figura 3.23.

Arcidiacono (1994) es un curso de isometrías y semejanzas para profesores estadounidenses de matemáticas de Escuela Media (equivalente a la E.S.O. española). La iniciación a las isometrías se hace mediante actividades basadas en el uso de espejos y la investigación de las figuras que se generan cuando se mueve un espejo sobre una figura dada (Figura 3.24). La introducción se completa trabajando con otros materiales manipulativos (plegado, papel transparente, etc.) y técnicos (regla, transportador, etc.). La construcción de cubrimientos del plano y, sobre todo, la discusión por los estudiantes de las reglas de construcción permiten introducir las isometrías como movimientos en el plano.



¿Cómo se debe colocar el espejo para ver un cuadrado? ¿Y un rombo no cuadrado?

Figura 3.24.

A partir de aquí, mediante diferentes tipos de materiales didácticos, entre ellos el ordenador, se van presentando a los estudiantes las traslaciones, giros, simetrías y simetrías en deslizamiento, si bien se pasa pronto al uso casi exclusivo de dibujos y construcciones sobre papel. A continuación se profundiza en las propiedades, diferentes formas de caracterización o representación de un movimiento concreto (geométrica, algebraica, vectorial), productos de isometrías, y descomposiciones. Una característica de todos los temas de este curso es que siempre empiezan planteando una o varias situaciones nuevas cuya resolución incluye el manejo de los conceptos que se van a estudiar. Por otra parte, las explicaciones del profesor siempre surgen a partir de los resultados y comentarios de los estudiantes.

3.3.2. Enseñanza por diagnóstico

En muchas partes de las matemáticas, los estudiantes tienen un desconocimiento total de los temas antes de empezar su estudio formal en las aulas. Sin embargo, hay otras partes, entre las que se encuentran las isometrías, de los cuales los estudiantes tienen algunas ideas intuitivas, adquiridas debido a la utilización inconsciente de esos conceptos en su actividad cotidiana antes de empezar su estudio en las clases de matemáticas. Por otra parte, también es normal encontrar en la Enseñanza Secundaria temas cuyo estudio se ha iniciado unos años antes, en Primaria o primeros cursos de Secundaria. En estos casos, los profesores deben ser conscientes de que no parten de cero, sino que sus alumnos ya tienen ciertos conocimientos, unas veces correctos y otras erróneos, que deben ser tenidos en cuenta por el profesor porque los estudiantes los van a utilizar. Un método de enseñanza, que recibe el nombre de "enseñanza por diagnóstico", preconiza que es necesario hacer una evaluación inicial de los conocimientos de los estudiantes para detectar cuáles son éstos y qué errores contienen. De esta manera, la enseñanza comienza planteando a los estudiantes actividades que les hagan ser conscientes de sus errores y sigue con otras actividades que muestren los conceptos correctos y faciliten el abandono de las ideas erróneas. Tenemos varios ejemplos de esta metodología.

En el Shell Centre (Universidad de Nottingham, G.B.) se ha investigado y experimentado durante muchos años con la enseñanza por diagnóstico, llegando a convertirla en la metodología de la mayoría de los materiales curriculares que han producido para la Enseñanza Secundaria. Un ejemplo es la unidad de enseñanza de las simetrías presentada en Birks (1987), que su autor utilizó con estudiantes de 1º de Secundaria que el curso anterior habían estudiado simetrías. Tomando como punto de partida los resultados del proyecto C.S.M.S., descritos en una sección anterior de este capítulo, y de otros estudios parecidos más recientes (A.P.U.), Birks preparó un test para evaluar las concepciones de simetría presentes entre sus alumnos y los errores más frecuentes al dibujar imágenes o ejes. Entre estos errores se encuentran, además de los mencionados anteriormente en este capítulo, la idea de que los ejes de simetría son rectas que dividen a las figuras en dos partes iguales (Figura 3.25-a), la idea de que una figura puede tener dos imágenes por una misma simetría, y la relación entre el concepto de figuras simétricas y pares de palabras con sentidos contrarios (delante/detrás, arriba/abajo, izquierda/derecha, etc.) de manera que la posición de la figura inicial determina la posición de la imagen independientemente del eje de simetría (Figura 3.25-b).

- a - - b -

Figura 3.25.

La unidad de enseñanza tiene unos objetivos instructivos bastante limitados, pues sólo se ocupa de perfeccionar la habilidad de los estudiantes al dibujar imágenes por simetrías o identificar ejes. Para conseguirlos se plantean tres tipos de actividades: a) La simetría como plegado, que trata de eliminar los errores derivados de la interpretación de la simetría como reflejo en el espejo. b) Obtención de reglas y algoritmos para dibujar imágenes, para eliminar errores como el de la Figura 3.25-b. c) Dibujo de ejes de simetría de una figura o entre dos figuras, para corregir errores como el de la Figura 3.25-a o la idea de que, para encontrar ejes de simetría, el perfil de las figuras es importante pero su contenido interior no lo es.

Las lecciones están organizadas siguiendo el esquema clásico de la enseñanza por diagnóstico: 1) Unas actividades iniciales preparadas para familiarizar a los estudiantes con el tema de trabajo y para detectar sus errores. 2) Una discusión sobre los resultados anteriores en la que se intenta provocar el conflicto de ideas al poner de relieve las inconsistencias de las respuestas erróneas. 3) Nuevas actividades con el fin de estabilizar las nuevas concepciones y permitir a los estudiantes una comprensión más profunda de los conceptos.

En anteriores secciones de este capítulo hemos descrito la primera parte de Grenier (1988), en la que observa los errores cometidos por los estudiantes de Enseñanza Secundaria al trabajar con la simetría axial y estudia las causas de la permanencia de estos errores. En la segunda parte de la investigación, teniendo en cuenta los resultados de la primera fase, se elaboran grupos de actividades con el objetivo de desestabilizar esos errores y hacer evolucionar positivamente las concepciones de los estudiantes. Aunque su autora no sitúa este estudio explícitamente en el marco de la enseñanza por diagnóstico, se puede considerar situado en este paradigma por su estructura y objetivos.

La organización de las actividades se hace, por una parte, desde los parámetros constructivistas, basada en la interacción de los estudiantes con los problemas planteados y la interacción de unos estudiantes con otros, y, por otra parte, basada en la "teoría de las situaciones" de Brousseau (en Brousseau, 1981 y Centeno, 1988 se describe con detalle esta teoría). Comenzando con la definición de simetría axial mediante plegado, se plantean ejercicios de tipo diagnóstico para conocer las concepciones iniciales de los estudiantes: Se presenta un conjunto de figuras y se pide a cada estudiante que identifique (sin doblar la hoja) las que son simétricas (en la Figura 3.26 se ven algunos ejemplos).

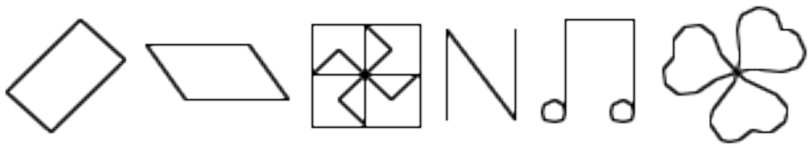


Figura 3.26.

A continuación se repite el ejercicio con otro conjunto de figuras, iguales o parecidas a las anteriores, cuyas características fomentan la aparición de los errores detectados anteriormente. Ahora se trabaja en grupos, pues el objetivo de esta actividad es que los estudiantes discutan sus soluciones entre ellos y se llegue a crear conflictos que desestabilicen las creencias erróneas. Finalmente, la discusión se amplía a todo el grupo bajo el control del profesor, que debe terminar con una fase de institucionalización, en la que se resumen los aspectos más importantes que deben ser recordados y comprendidos.

Después de esta fase inicial de dibujo a mano alzada, se entra en una fase de dibujo exacto con instrumentos (regla, compás, etc.), lo cual hace que los estudiantes deban hacer uso explícito de las propiedades características de las simetrías. La Figura 3.27 muestra algunos ejemplos. En cada caso hay que usar unos instrumentos de dibujo especificados por el profesor, lo cual se traduce en la necesidad de trabajar con determinadas propiedades de las simetrías. Por ejemplo (Figura 3.27), el eje de simetría del trapecio isósceles se puede dibujar con una regla no graduada y una escuadra (usando la invarianza de los puntos del eje y la perpendicularidad respecto del eje), pero el eje del par de circunferencias no se puede dibujar con estos instrumentos, sino que hace falta una regla graduada y una escuadra (usando la visión del eje de simetría como mediatriz).

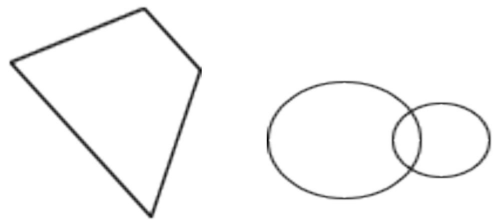


Figura 3.27.

Las siguientes actividades son de verbalización: Se da a un par de estudiantes A un esquema (la Figura 3.28 muestra dos ejemplos) y a otro par de estudiantes B el mismo esquema pero de otro tamaño y *sin* el segmento interior. La pareja A debe escribir instrucciones para que la pareja B pueda dibujar el segmento que falta en su esquema, y la pareja B debe interpretar esas instrucciones para completar su esquema. Finalmente, la unidad termina con actividades de completar, con instrumentos de dibujo, figuras simétricas de las que sólo se ve la mitad. En Grenier (1988) se hace una descripción completa de esta investigación y se analizan el desarrollo y los resultados de las experimentaciones realizadas.

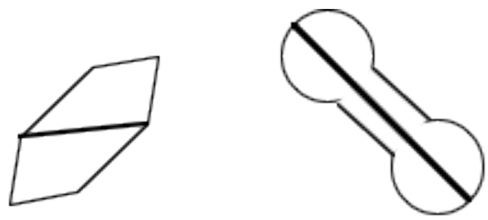
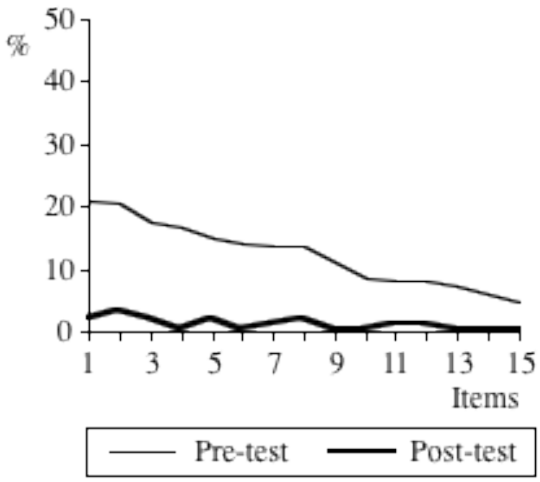
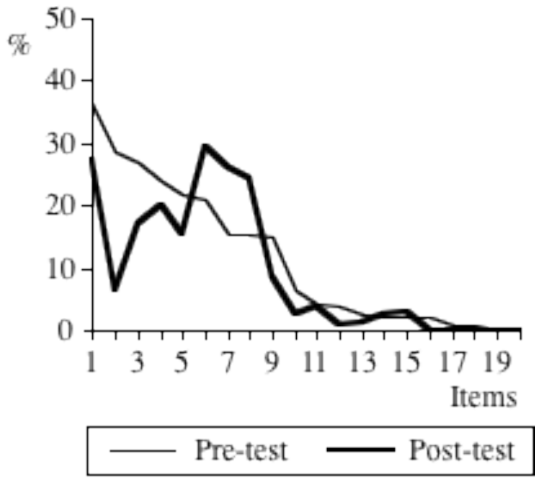


Figura 3.28.

En secciones anteriores de este capítulo hemos descrito un test desarrollado para identificar la influencia de ciertas variables en el dibujo de simetrías (Gutiérrez, Jaime 1987a). Este test nos ha permitido también identificar los errores más frecuentes en varios grupos completos de Magisterio y valorar la eficacia de un curso de isometrías (Gutiérrez, Jaime 1986) mediante su administración como pre-test y post-test. A la vista de los resultados obtenidos en el pre-test, durante el curso se hizo énfasis especial en la observación y corrección de los errores más frecuentes en los estudiantes. La comparación de los resultados de cada estudiante en el pre-test y el post-test muestra, en primer lugar, que en el post-test se han seguido cometiendo los mismos tipos de error que en el pre-test, si bien en menor cantidad. Un análisis más detenido permite ver que la disminución en la cantidad de errores no es homogénea, pues el error de dibujar la imagen paralela a la figura original casi ha desaparecido (Figura 3.29-a; los ítems están ordenados de mayor a menor dificultad en el pre-test) pero los errores de falta de perpendicularidad (Figura 3.29-b) o de equidistancia han disminuido poco.



- a -



- b -

Figura 3.29. Porcentajes de errores en el pre-test y el post-test.

Estos resultados ponen de relieve, una vez más, que los procesos cognitivos y de razonamiento seguidos por los estudiantes no son siempre iguales, que distintos alumnos reaccionan de diferentes maneras ante un curso de matemáticas, aunque todos reciban la misma información y realicen el mismo trabajo, y que los profesores deben ser conscientes de esta diversidad presente en sus clases.

3.3.3. Enseñanza formalizada

Algunos autores de materiales de enseñanza se han inclinado por una presentación más formal que las que hemos descrito hasta ahora de los contenidos matemáticos y de la estructura algebraica del conjunto de las isometrías. Este tipo de enseñanza es apropiada para los estudiantes del Bachillerato o la Universidad que ya hayan desarrollado una capacidad de razonamiento formal y que, por lo tanto, estén en condiciones de poder seguir esta forma de enseñanza y de comprender los conceptos presentados (razonamiento correspondiente al cuarto nivel de Van Hiele). No obstante, como señalábamos al comienzo de esta sección, la enseñanza formal sólo proporciona una comprensión profunda de las isometrías cuando previamente se ha dotado a los estudiantes de la interpretación dinámica de cada isometría.

En Colera y otros (1995) se dedica un tema al estudio de los movimientos en el plano y el espacio. Este texto empieza con una introducción intuitiva y mediante actividades dinámicas exploratorias, en las que, mediante planteamientos explícitos se dirige la atención de los estudiantes hacia las propiedades de cada movimiento que serán desarrolladas en las páginas siguientes. A continuación, trabajando simultáneamente en el plano y el espacio, se pasa a una forma de enseñanza más formalizada en la que, sucesivamente, se definen traslaciones giros y simetrías, y se presentan los elementos invariantes para cada isometría. La última parte del tema se dedica a plantear ejercicios de aplicación y problemas. Este texto se sitúa en el nivel 3 de Van Hiele, pues utiliza terminología matemática formal pero en un contexto de actividad informal y basada en situaciones concretas.

En Santos y otros (1995) se ha optado por una aproximación bastante diferente, que también puede situarse en el nivel 3 de razonamiento. Estos autores han tomado el plano cartesiano como entorno base para el tema, presentando las situaciones con y sin cuadrícula. Es fácil notar aquí las ventajas y las dificultades del uso de la cuadrícula a que hacíamos referencia en el apartado 3.2.1, pues sólo se utilizan ejes de simetría verticales u horizontales y giros de 90°.

En los libros de texto correspondientes a B.U.P. y C.O.U. es difícil encontrar el tema de las isometrías, debido a su exclusión de los currícula oficiales, si bien hay algunos casos. Martínez y otros (1990) plantea un estudio de las isometrías totalmente formal, que incluye la obtención de las ecuaciones de las diferentes isometrías, el uso de matrices y la representación de giros mediante números complejos. Este tema es un representante claro de la enseñanza del nivel 4, en el que se usan representaciones de las isometrías no intuitivas y se trabaja de manera totalmente formal, en coherencia con las destrezas que, supuestamente, los estudiantes ya han adquirido o van a adquirir durante el C.O.U.

En una publicación con objetivo y estructura diferentes de los libros de texto, Alsina, Pérez, Ruíz (1989) han elaborado una propuesta de enseñanza de las isometrías que está más cerca del tratamiento matemático formal que del intuitivo, aunque sin olvidar el segundo, pues hacen un recorrido por las principales propiedades algebraicas y métricas que hemos mencionado en el capítulo 2, de las isometrías en general y de cada uno de sus 4 tipos en particular. En esta publicación también se presenta una variedad de materiales didácticos que resultan útiles para el aprendizaje de las isometrías, pues son poco costosos y fáciles de manejar por los estudiantes, incluso de Primaria; la elección por un profesor de cualquiera de estos materiales puede ser la clave para que las lecciones pasen de ser abstractas, sobre isometrías, a manipulativas y activas, sobre movimientos. En tercer lugar, este libro hace una revisión completa de los diferentes tipos de cubrimientos regulares planos (rosetones, frisos y mosaicos) abordando tanto la faceta matemática como la gráfica.

Coxford, Usiskin (1984) es un libro de texto escrito para los cursos de geometría de Enseñanza Secundaria en EE.UU. en el que las isometrías juegan el papel de unificar y simplificar los contenidos matemáticos del curso. Su estructura es la típica de la mayoría de los textos de geometría de Secundaria de ese país, con una primera parte en la que se estudian los conceptos y se introducen y verifican sus principales propiedades mediante ejemplos, y una segunda parte en la que se pasa a realizar demostraciones formales.

En primer lugar, en la parte informal del libro, se introduce la simetría axial y se estudian las imágenes de puntos, rectas, ángulos y polígonos. Sólo al final del capítulo se introduce la notación simbólica de las simetrías. En el siguiente capítulo se introduce el producto de simetrías y, a partir de ejemplos concretos, se obtienen y definen los conceptos de traslación y giro como el producto de dos simetrías de ejes, respectivamente, paralelos o que se cortan.

En la segunda parte se utilizan de manera sistemática las isometrías como herramienta de demostración. Por ejemplo, la Figura 3.30 es la base para demostrar las igualdades de ángulos formados en dos rectas paralelas, l y m, cortadas por una transversal t: Las mediatrices de los segmentos PS y PR, a y b respectivamente, son los ejes de simetría del rectángulo PSQR. Transformando los ángulos por medio de esas simetrías se deduce su igualdad. Análogamente, los criterios de congruencia de triángulos se demuestran construyendo un producto de isometrías que transforma un triángulo en el otro. También se estudian las isometrías de los diferentes tipos de cuadriláteros, de los polígonos regulares, las circunferencias, etc.

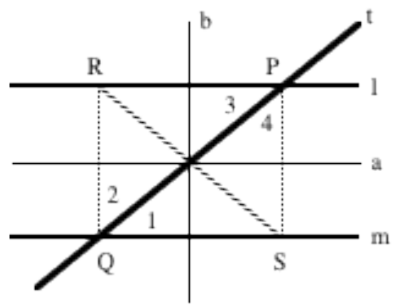


Figura 3.30.

Martin (1982) es un ejemplo de libro de texto matemático, para estudiantes universitarios, en el que se combinan los métodos de trabajo y deducción y las formas de notación de la geometría analítica, la geometría sintética, y el álgebra para ofrecer diferentes puntos de vista o, simplemente, para presentar los teoremas y sus demostraciones de la manera más conveniente. En los primeros capítulos se introducen traslaciones, giro de 180° y simetrías del plano analíticamente, mediante sus respectivas ecuaciones, para después pasar al contexto sintético para demostrar propiedades de paralelismo, equidistancia, etc. y al algebraico para estudiar productos de estas isometrías. Un detalle curioso de este libro tan formal es que la introducción de los giros, a partir del producto de dos simetrías cuyos ejes se cortan, se realiza mediante actividades de plegado de papel, aunque inmediatamente vuelve al contexto formal dando la definición algebraica de giro.

Después de estos resultados básicos, el estudio de la estructura algebraica de las isometrías se completa con una serie de propiedades que concluyen con el teorema de que toda isometría se puede descomponer en un producto de, a lo más, 3 simetrías y con otra serie de teoremas que conducen al teorema de clasificación de las isometrías del plano. Finalmente, se hace un estudio sistemático de diferentes tipos de cubrimientos (rosetones, frisos, mosaicos regulares, "reptiles", etc.). La segunda parte del libro, que no vamos a comentar aquí, está dedicada a las semejanzas, las transformaciones afines, y las isometrías y semejanzas en el espacio.

3.3.4. Enseñanza basada en ordenadores

La mayoría de las unidades de enseñanza basadas en los ordenadores constan de un micromundo en el cual se desarrollan las actividades propuestas a los estudiantes. No obstante, estas unidades suelen contener también actividades para realizar en otros contextos no informáticos (activos, de dibujo, formales, etc.).

El tipo de micromundos ha evolucionado paralelamente a la potencia de los ordenadores disponibles en las aulas. En Jaime, Gutiérrez (1985) presentamos un programa que permite realizar isometrías y homotecias: El estudiante introduce, como datos, las coordenadas de determinados puntos para caracterizar la isometría, y el valor del ángulo para los giros, y las coordenadas de los vértices de una figura. A continuación, el ordenador desplaza la figura dando varios saltos a lo largo de su recorrido hasta la posición final. El programa también permite realizar varios movimientos consecutivos con la misma figura, por lo que es útil para estudiar los productos de isometrías. Hay otros programas con las mismas características generales de éste, si bien difieren en algunos elementos. Por ejemplo, los presentados en Shilgalis (1982) y en Edwards (1991) dibujan directamente la figura imagen, sin producir ninguna sensación de movimiento.

El enorme avance en la capacidad de los ordenadores de los últimos años hace que los programas actuales sean mucho más sofisticados y permitan una mayor interacción de los estudiantes. Por ejemplo, con Cabri (Baulac y otros, 1990) o Geometer's Sketchpad (Jackiw, 1992) es posible construir una figura y su imagen por determinada isometría de manera que se ve instantáneamente el efecto que se produce en la imagen al modificar algún parámetro de la isometría (por ejemplo, la posición del centro de giro) o al cambiar la posición de la figura inicial.

Una diferencia importante, desde la óptica educativa, entre los programas creados hace una década y los actuales es la forma de introducir los datos: Los primeros necesitan las coordenadas de los puntos, lo cual requiere un conocimiento previo de las coordenadas y las isometrías por parte de los estudiantes. Por el contrario, en los programas actuales se marcan los puntos en la pantalla con el ratón y se activan comandos de la barra de menú, por lo que estos programas pueden ser usados por estudiantes sin ningún conocimiento previo.

Hay tres tipos principales de actividades de isometrías planteadas en el ordenador: Dada una figura, determinar su imagen por cierta isometría. Dadas una figura y su imagen, determinar una secuencia de isometrías (una sola cuando sea posible) que lleven la primera hasta la segunda. Dada una isometría, determinar la isometría inversa. En cada caso, se pueden plantear distintas actividades; por ejemplo, las actividades de Gallou-Dumiel (1987) descritas a continuación son del primer tipo, así como otra planteada por

Edwards (1991) que consiste en, dado un cuadrado, buscar simetrías que lo dejen invariante.

Gallou-Dumiel (1987) presenta una forma de uso del ordenador para el aprendizaje de las simetrías diferente de las anteriores, pues utiliza el lenguaje Logo. En las actividades propuestas se dan una figura y un eje de simetría y se pide a los estudiantes que dibujen la figura simétrica usando los comandos estándar de movimiento en Logo (avanza, retrocede, etc.), con algunas restricciones: No se pueden usar el comando "posxy", que permite desplazar la tortuga hasta un punto del plano dando sus coordenadas, ni otros comandos relacionados con éste, por lo que el uso de coordenadas queda imposibilitado.

Es interesante observar las restricciones (algunas positivas, otras negativas) que impone a los estudiantes cada entorno de aprendizaje. Si comparamos el entorno Logo creado en esta investigación con el entorno papel y lápiz, la pantalla es la hoja de papel y la tortuga hace las veces de lápiz. Pero, a diferencia del lápiz, la tortuga, además de una posición, tiene un sentido de movimiento. En el entorno Logo se pone de relieve la inversión de los ángulos de la figura dada y su imagen, importante propiedad que en el contexto de papel y lápiz no aparece explícitamente. También cambian los procedimientos de dibujo pues, por ejemplo, en papel es posible determinar las imágenes de dos puntos y dibujar el segmento que los une con la regla, pero en Logo esto es demasiado complicado sin usar coordenadas. En una figura sobre papel, los estudiantes pueden conocer cualquier longitud o ángulo que deseen, usando regla o transportador, pero en este entorno Logo no es posible (sin un esfuerzo desproporcionado) determinar ninguna medida que no sea dada en el enunciado del problema.

Los objetivos de esta unidad de enseñanza son bastante limitados, pues sólo incluyen el aprendizaje de las simetrías y, en particular, reconocer la presencia o ausencia de eje de simetría en una figura y saber construir la simétrica de una figura (Gallou-Dumiel, 1987, p. 11). Las figuras son cuadrados, triángulos, una combinación de triángulo y rectángulo y un árbol, situados en diferentes posiciones respecto del eje de simetría y con diferentes inclinaciones de las figuras y del eje.

Los errores cometidos por los estudiantes son análogos a los cometidos con papel y lápiz, a pesar de las diferencias entre ambos entornos: Dibujo de una figura trasladada o girada 180°, falta de perpendicularidad, desplazamiento horizontal, etc.

4

EL MODELO DE RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO DE VAN HIELE

En el contexto de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, existen numerosos modelos que intentan describir determinadas componentes de los procesos que, globalmente, tienen que ver con el aprendizaje o la enseñanza de las matemáticas. Nos encontramos con unos modelos que se centran en los procesos mentales de los estudiantes cuando hacen matemáticas, con otros que describen la actividad en el aula y las interacciones sociales que tienen lugar entre los miembros del grupo, y con otros que ofrecen a los profesores guías para la organización y el desarrollo coherentes de sus clases. Algunos de estos modelos son locales, centrados en determinada área de las matemáticas, como aritmética elemental, geometría, ecuaciones, álgebra, etc. Otros modelos tienen aplicación más amplia, en todas las áreas de las matemáticas escolares o, incluso, fuera de las matemáticas. Entre los modelos, de uno u otro tipo, más conocidos están: El constructivismo, el procesamiento de la información, los dominios conceptuales de Greeno, los niveles de Van Hiele y las imágenes conceptuales de Vinner, que hacen más énfasis en el aprendizaje, analizando las componentes psicológicas de los estudiantes puestas en juego durante el aprendizaje. La investigación acción, la enseñanza por diagnóstico, la enseñanza por descubrimiento y la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, que se centran en la enseñanza, observando la influencia del currículum o de la actividad del profesor en el aula.

Ninguna de estas teorías produce siempre resultados totalmente satisfactorios, ni describe claramente el comportamiento de todos los estudiantes, por lo que no podemos decir que haya ninguna propuesta, teórica o práctica, que sea la mejor. La elección de una u otra depende, principalmente, de los gustos personales y del área de las matemática en que se esté trabajando.

En geometría, como en las demás áreas matemáticas, durante bastantes años se ha considerado el constructivismo como la principal teoría para organizar la enseñanza, desde los currícula completos de un nivel educativo hasta los contenidos específicos de un conjunto de lecciones en un curso. Sin embargo, desde hace 10 ó 15 años, el modelo de razonamiento matemático de Van Hiele se ha utilizado con un creciente éxito para la enseñanza de la geometría y para el análisis de la actividad de los estudiantes. En la actualidad dicho modelo está presente en los currícula de la enseñanza no universitaria de las matemáticas de diversos países. En cuanto a España, aunque no se han tenido en cuenta explícitamente los niveles de razonamiento de Van Hiele, al leer las directrices metodológicas de los currículos oficiales de Primaria, Secundaria y Bachillerato, es fácil reconocer que éstas siguen una línea paralela a la del modelo de Van Hiele, por lo que no presenta dificultad compaginar ambas propuestas, en particular en los temas de geometría.

El Modelo de Van Hiele está integrado por dos componentes:

1) Descripción de los procesos de razonamiento matemático de los estudiantes: El modelo de Van Hiele identifica diferentes formas de pensamiento matemático de los individuos, que van desde la más simple, propia de los estudiantes de los primeros cursos de Primaria (pero no exclusiva de ellos) hasta la más compleja, propia de los matemáticos profesionales. Son los denominados "niveles de razonamiento". Cada nivel está caracterizado por una forma distinta de comprensión y utilización de los conceptos geométricos, lo cual se refleja en una manera diferente de interpretarlos, definirlos, clasificarlos, y hacer demostraciones.

2) Sugerencia de unas pautas a los profesores para favorecer el avance de los estudiantes en su nivel de razonamiento geométrico. Estas pautas indican cómo organizar la enseñanza y cómo estructurar el trabajo de los estudiantes, de manera que éstos puedan adquirir nuevos conocimientos y nuevas experiencias de forma adecuada a su capacidad actual. Son las denominadas "fases de aprendizaje". Cada fase supone el planteamiento a los estudiantes de un tipo de actividad con unos objetivos educativos específicos.

4.1. Los Niveles de Razonamiento

La teoría de Van Hiele está en evolución. Esto quiere decir que, a medida que nuevas investigaciones van proporcionando más información sobre las características y estructura de los niveles de razonamiento, la manera como la comunidad de didactas matemáticos los interpreta sufre variaciones. Así, el número de niveles de razonamiento definidos ha variado con el tiempo, desde los 3 caracterizados por P.M. Van Hiele en sus trabajos iniciales, pasando por los 4 niveles definidos por él mismo en trabajos posteriores (Hiele, 1986, cap. 8), hasta los 5 que se consideran actualmente.

A continuación presentamos una descripción resumida de las principales características generales de los 5 niveles de razonamiento. Esta descripción la completamos en las siguientes páginas con otra descripción de los niveles en el contexto específico de las isometrías del plano. Es posible encontrar descripciones de los niveles de Van Hiele de tipo general más detalladas en diversas publicaciones, como Burger, Shaughnessy (1986), Clements, Battista (1992), Fuys, Geddes, Tischler (1988), Hershkowitz (1990), Hoffer (1981), o Jaime, Gutiérrez (1990). Por último, es necesario indicar que no hay unanimidad en cuanto a la numeración de los niveles, pues algunas publicaciones hablan de los niveles 0 a 4, mientras que otras hablan de los niveles 1 a 5. Nosotros seguimos la segunda opción, pues es más cómoda y evita confusiones, al hacer coincidir la etiqueta de cada nivel con su posición ordinal.

4.1.1. Nivel 1 (Reconocimiento)

a) Percepción global de las figuras: En las descripciones se incluyen atributos irrelevantes, generalmente referidos a la forma, tamaño o posición de figuras específicas o sus elementos destacados.
b) Percepción individual de las figuras: Cada figura es considerada como un objeto, independiente de otras figuras de la misma clase. No se generalizan las características de una figura a otras de su misma clase, en particular si sus formas son bastante diferentes.
c) Uso de propiedades imprecisas para identificar, comparar, ordenar, o caracterizar figuras.
d) Aprendizaje de un vocabulario matemático básico para hablar de las figuras, describirlas, etc., acompañado de otros términos de uso común que sustituyen a los matemáticos.
e) No se suelen reconocer explícitamente las partes que componen las figuras ni sus propiedades matemáticas.

4.1.2. Nivel 2 (Análisis)

a) Reconocimiento de que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y están dotadas de propiedades matemáticas. Se describen las partes que integran una figura y se enuncian sus propiedades. Se es capaz de analizar las propiedades matemáticas de las figuras.
b) La definición de un concepto consiste en el recitado de una lista de propiedades, lo más exhaustiva posible, pero en la que puede haber omisiones de características necesarias.
c) No se relacionan diferentes propiedades de una figura entre sí o con las de otras figuras. No se establecen clasificaciones a partir de relaciones entre propiedades.
d) La deducción de propiedades se hace mediante experimentación. Se generalizan dichas propiedades a todas las figuras de la misma familia.
e) La demostración de una propiedad se realiza mediante su comprobación en uno o pocos casos.

4.1.3. Nivel 3 (Clasificación)

a) Capacidad para relacionar propiedades de una figura entre sí o con las de otras figuras.
b) Comprensión de lo que es una definición matemática y sus requisitos. Se definen correctamente conceptos y familias de figuras.
c) La demostración de una propiedad se basa en la justificación general de su veracidad, para lo cual se usan razonamientos deductivos informales.
d) Comprensión y realización de implicaciones simples en un razonamiento formal. Comprensión de los pasos de una demostración explicada por el profesor. Capacidad para repetir tal demostración y adaptarla a otra situación análoga.
e) Incapacidad para realizar demostraciones formales completas. No se logra una visión global de las demostraciones y no se comprende su estructura.

4.1.4. Nivel 4 (Deducción Formal)

a) Realización de las demostraciones mediante razonamientos deductivos formales.
b) Capacidad para comprender y desarrollar demostraciones formales. Capacidad para adquirir una visión global de las demostraciones y para comprender la misión de cada implicación simple en el conjunto.
c) Aceptación de la posibilidad de demostrar un resultado mediante diferentes formas de demostración o a partir de distintas premisas.
d) Aceptación de la existencia de definiciones equivalentes de un concepto y uso indistinto de ellas.
e) Capacidad para comprender la estructura axiomática de las matemáticas: Significado y uso de axiomas, definiciones, teoremas, términos no definidos, etc.

4.1.5. Nivel 5 (Rigor)

a) Posibilidad de trabajar en sistemas axiomáticos distintos del usual de la geometría euclídea.
b) Capacidad para realizar deducciones abstractas basándose en un sistema de axiomas determinado.
c) Capacidad para establecer la consistencia de un sistema de axiomas. Capacidad para comparar sistemas axiomáticos diferentes y decidir sobre su equivalencia.
d) Comprensión de la importancia de la precisión al tratar los fundamentos y las relaciones entre estructuras matemáticas.

Aunque, en su forma actual más general, se considera el modelo de Van Hiele formado por los 5 niveles de razonamiento que acabamos de describir, también se utiliza con frecuencia una restricción que sólo considera los niveles de razonamiento 1 a 4. Esta interpretación del modelo es la que utilizamos aquí para organizar la unidad de enseñanza de las isometrías, por varios motivos:

1) La unidad de enseñanza que hemos diseñado está preparada para la Enseñanza Primaria, la Secundaria y la Formación de Profesores de estos niveles educativos. Todas las investigaciones llevadas a cabo en estos contextos, tanto en España como en otros países, coinciden en señalar que son pocos los alumnos que logran una adquisición alta del cuarto nivel de razonamiento, y éstos sólo surgen al final de la Secundaria.

2) Un análisis teórico de las características del quinto nivel, junto a los resultados de investigaciones propias y de otros autores, nos han llevado a una posición de escepticismo respecto a las validez de dichas características del quinto nivel y a la posibilidad de testarlas.

4.2. Las Fases de Aprendizaje

Las cinco fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele representan una forma de organizar la enseñanza que ayude a los estudiantes a pasar de su nivel de razonamiento actual al siguiente. Las fases no están por tanto asociadas a un nivel determinado, sino que en cada nivel la instrucción comienza con actividades de la fase primera y continúa con actividades de las siguientes fases. Aplicando adecuadamente la secuencia de fases y permitiendo que los alumnos realicen una cantidad suficiente de actividades, al finalizar la fase quinta, éstos deben haber alcanzado el nivel de razonamiento siguiente.

Al comienzo del párrafo anterior hemos usado la palabra "ayudar" a los estudiantes a progresar en su capacidad de razonamiento. Es importante tener en cuenta una premisa central del modelo de Van Hiele: El progreso en la capacidad de razonamiento viene de la propia experiencia en un contexto educativo apropiado. Frente a teorías, como la de Piaget, que ligan el desarrollo intelectual al biológico, Van Hiele afirma que la instrucción es un factor básico para avanzar en el nivel de razonamiento. Por una parte, Van Hiele dice que

> la maduración que lleva a un nivel superior … debe considerarse, por encima de todo, como un proceso de aprendizaje y no como una maduración de tipo biológico (Fuys, Geddes, Tischler, 1984).

Además, señala que

> la transición de un nivel al siguiente no es un proceso natural; tiene lugar bajo la influencia de un programa de enseñanza-aprendizaje. La transición no es posible sin el aprendizaje de un nuevo lenguaje (Hiele, 1986, p. 50).

Y también nos previene de que,

> sin embargo, es posible que ciertas formas de enseñanza no permitan alcanzar los niveles superiores, pues los métodos de pensamiento usados en esos niveles permanecen inaccesibles a los estudiantes (Fuys, Geddes, Tischler, 1984).

Las características principales de las fases de aprendizaje son las siguientes:

4.2.1. Fase 1 (Información)

a) En esta fase se procede a tomar contacto con el nuevo tema objeto de estudio. El profesor tiene la oportunidad de identificar los conocimientos previos que puedan tener sus alumnos sobre este nuevo campo de trabajo y su nivel de razonamiento en el mismo.
b) Los alumnos deben recibir información para conocer el campo de estudio que van a iniciar, los tipos de problemas que van a resolver, los métodos y materiales que utilizarán, etc.

La primera fase se puede obviar en algunos casos pues, dado que su finalidad es que el profesor obtenga información sobre los conocimientos y el nivel de razonamiento de sus alumnos y que éstos la obtengan sobre el campo de estudio, cuando existe con anterioridad esa información no es necesario realizar el trabajo específico de esa fase. Ello sucede generalmente cuando se produce una enseñanza continua que incluye el paso de un nivel al siguiente. Por ejemplo, una situación bastante frecuente en los centros de Primaria es que un grupo de estudiantes tenga el mismo profesor de Matemáticas en todos los cursos de un Ciclo. Otra situación posible es que, dentro del mismo curso, y sin que haya ruptura en la continuidad de las clases dedicadas a un tema de Matemáticas, se produzca el paso de los estudiantes de un nivel al siguiente. En ambos casos, puede ocurrir que la primera fase sea innecesaria.

4.2.2. Fase 2 (Orientación Dirigida)

a) Se guía a los alumnos mediante actividades y problemas (dados por el profesor o planteados por los propios estudiantes) para que éstos descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicas de la red de conocimientos que deben formar.
b) Los problemas propuestos han de llevar directamente a los resultados y propiedades que los estudiantes deben entender y aprender. El profesor

tiene que seleccionar cuidadosamente estos problemas y actividades y debe orientar a sus alumnos hacia la solución cuando lo necesiten.

Esta fase es fundamental, ya que en ella se construyen los elementos básicos de la red de relaciones del nivel correspondiente. Hiele (1986), p. 97, señala que "las actividades [de la segunda fase], si se seleccionan cuidadosamente, constituyen la base adecuada del pensamiento de nivel superior". El trabajo se ha de presentar a los alumnos de forma que aparezcan de manera progresiva los conceptos, las propiedades, y las estructuras que deben estudiar y en los que deben basar su nueva forma de razonamiento. Para ello, el profesor debe seleccionar problemas que planteen situaciones en cuya resolución aparezca alguno de dichos elementos y debe guiar a sus alumnos para que adquieran correctamente las estructuras básicas del nivel.

4.2.3. Fase 3 (Explicitación)

a) Los estudiantes expresan de palabra o por escrito los resultados que han obtenido, intercambian sus experiencias y discuten sobre ellas con sus compañeros y el profesor, con el fin de que lleguen a ser plenamente conscientes de las características y relaciones descubiertas y afiancen el lenguaje técnico que corresponde al tema objeto de estudio.

El tipo de trabajo que se debe realizar en esta fase es de discusión y comentarios sobre la forma de resolver los ejercicios anteriores, elementos, propiedades, relaciones, etc. que se han observado o utilizado. En esta fase no se produce un aprendizaje de conocimientos nuevos, sino una revisión del trabajo llevado a cabo con anterioridad, un contraste de las conclusiones obtenidas. Los estudiantes tienen que utilizar el vocabulario adecuado para describir la estructura sobre la que están trabajando, pues deben aprender y afianzar el vocabulario y perfeccionar su forma de expresarse, todo lo cual origina un afianzamiento de los nuevos conocimientos que se están formando.

Es importante tener en cuenta que la tercera fase no debe interpretarse como fijada temporalmente después de la segunda fase y antes de la cuarta, sino más bien como una actitud permanente de diálogo y discusión en todas las actividades de las diferentes fases de aprendizaje. Por ello, en la unidad de enseñanza de las isometrías que proponemos no hay actividades diseñadas expresamente para esta fase, sino que en todo momento debe haber la justificación y discusión entre los alumnos o entre profesor y alumnos.

4.2.4. Fase 4 (Orientación Libre)

a) En esta fase se debe producir la consolidación del aprendizaje realizado en las fases anteriores. Los estudiantes deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores y, generalmente, más complejos.

b) Los problemas que se planteen en esta fase no deben ser una simple aplicación directa de una definición o un algoritmo conocidos, sino que contendrán nuevas relaciones o propiedades. Estos problemas serán más abiertos que los de fases anteriores, preferiblemente con varias vías de resolución, y con una, varias, o ninguna soluciones. Por otra parte, el profesor debe limitar al máximo su ayuda a los estudiantes en la resolución de los problemas.

Los alumnos deberán aplicar los conocimientos y lenguaje que acaban de adquirir en otras situaciones nuevas. Estas deben obligar a los estudiantes a combinar sus conocimientos y aplicarlos a situaciones diferentes de las propuestas anteriormente. La intervención del profesor en la resolución de las tareas debe ser lo menor posible, pues son los alumnos quienes tienen que encontrar el camino adecuado a partir de lo aprendido en la segunda fase.

4.2.5. Fase 5 (Integración)

a) Los estudiantes establecen una visión global de todo lo aprendido sobre el tema y de la red de relaciones que están terminando de formar, integrando estos nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente.
b) El profesor debe dirigir resúmenes o recopilaciones de los contenidos estudiados, que ayuden a los estudiantes a lograr esta integración y a diferenciar los conceptos, propiedades, etc. principales de los secundarios. Las actividades que se propongan no deben implicar la aparición de nuevos conocimientos, sino sólo la organización de los ya adquiridos.

La finalidad de esta última fase es adquirir una visión general de los contenidos del tema objeto de estudio, integrada por los nuevos conocimientos adquiridos en este nivel y los que ya tenían los estudiantes anteriormente. Las actividades de esta fase deben favorecer dicha integración y permitirle al profesor comprobar si se ha conseguido ya. Parte del trabajo que debe realizar el profesor en la quinta fase es la confección y presentación a sus alumnos de resúmenes de los contenidos estudiados. En cuanto a los estudiantes, es importante que memoricen los resultados más importantes y adquieran destreza y agilidad en el uso de los nuevos algoritmos, procedimientos de resolución de problemas o métodos de trabajo.

Para concluir esta sección de análisis de las fases de aprendizaje de Van Hiele, es importante destacar que, en general, una actividad, por sí misma y fuera de un contexto determinado, no corresponde a un nivel de razonamiento y una fase de aprendizaje concretos. No es posible analizar una actividad aislada, sino que hay que hacerlo dentro del contexto en el que se encuentre y teniendo en cuenta el trabajo realizado previamente y el que se planea realizar con posterioridad. Por ejemplo, si organizamos la enseñanza de manera que la propiedad P2 se deduce a partir de la P1, en la fase 2 de un cierto nivel plantearemos una actividad A para descubrir la propiedad P1, y en la fase 4 otra actividad B para obtener la propiedad P2 basándose en el uso de P1. Pero si modificamos la organización de la enseñanza de manera que P1 se deduzca a partir de P2, la actividad B pasará a la fase 2 y la actividad A a la fase 4, posiblemente con algunos retoques en sus enunciados.

Del mismo modo, una actividad no tiene por qué corresponder a un nivel de razonamiento determinado, pues generalmente las actividades propuestas se pueden resolver utilizando métodos de trabajo y formas de razonamiento propias de distintos niveles. Es el contexto el que marca el nivel de razonamiento que los estudiantes deben usar para resolverla.

En la unidad de enseñanza de las isometrías que presentamos en el capítulo 5 hemos diferenciado explícitamente las actividades pertenecientes a cada nivel de razonamiento. Sin embargo, no hemos marcado las fronteras entre unas fases y otras de cada nivel. No obstante, un análisis de los enunciados de las actividades y sus objetivos permitirá al lector identificar las sucesivas fases con bastante exactitud (en Jaime, 1993 puede verse esta división).

4.3. Propiedades del Modelo de Van Hiele

Junto a las características particulares de cada nivel de razonamiento o fase de aprendizaje, es necesario tener en cuenta algunas características globales del modelo de Van Hiele para su adecuada comprensión y utilización.

4.3.1. Localidad y secuencialidad de los niveles de razonamiento

Por localidad de los niveles se entiende que un individuo puede razonar en diferentes niveles al trabajar en distintos campos de la geometría. Esta característica ha sido ampliamente confirmada por las investigaciones (por ejemplo, Gutiérrez, Jaime, 1987b y Mayberry 1983). En la práctica, esto significa que, cuando un estudiante aborda el aprendizaje de un tema desconocido hasta ese momento, empezará trabajando y razonando en el primer nivel y, si la enseñanza es adecuada, progresará por los niveles siguientes. Este progreso puede ser rápido, pues una vez que se ha alcanzado un nivel de razonamiento en un área de la geometría, requiere menos tiempo y esfuerzo alcanzar ese mismo nivel en otras áreas.

La localidad del razonamiento matemático es reconocida por diversos autores, además de Van Hiele, que han analizado el aprendizaje de la geometría desde diferentes perspectivas. Así, Freudenthal (1973) plantea la idea de las "organizaciones locales" de la geometría, según la cual los estudiantes forman en su mente "localidades", es decir redes de conceptos disconexas entre sí. A medida que aumentan la capacidad de los estudiantes y sus conocimientos, estas localidades se van integrando para dar lugar a otras localidades mayores. Por su parte, Dieudonné (citado en Barbin, 1987) habla de "islotes deductivos" cuando plantea que la enseñanza de la geometría en los primeros cursos de Secundaria debería ser una mezcla de experiencias geométricas y de razonamientos parciales sobre los resultados de esas experiencias, y que los profesores no deben sacrificar la comprensibilidad para lograr que todos los contenidos se fundamenten en un único conjunto de axiomas.

La secuencialidad de los niveles de Van Hiele hace referencia a que para alcanzar un nivel de razonamiento, es necesario haber adquirido previamente los niveles anteriores. Hiele (1986), p. 51, afirma que "el pensamiento del segundo nivel no es posible sin el del nivel básico; el pensamiento del tercer nivel no es posible sin el pensamiento del segundo nivel".

Al elaborar la unidad de enseñanza de las isometrías hemos tenido en cuenta estas características: En primer lugar, hemos diseñado bloques de actividades para los niveles 1 y 2 independientes para cada isometría (traslaciones, giros, simetrías). En el nivel 2, al investigarse la composición de giros y la de simetrías, comienzan a aparecer relaciones entre las tres isometrías. Posteriormente, al llegar al nivel 3 surgen las propiedades que relacionan unas isometrías con otras, por lo que se produce la necesaria integración de conocimientos de las distintas isometrías. Esto supone, en términos prácticos, que, por ejemplo, para poder trabajar correctamente en el tercer nivel de las simetrías, es necesario haber adquirido también en las traslaciones y los giros, como mínimo, el nivel 2.

4.3.2. Continuidad de los niveles de razonamiento

La formulación inicial del modelo hecha por el propio Van Hiele indicaba que el paso de los estudiantes desde un nivel al siguiente se produce de manera brusca, como un salto, discreta. Sin embargo, investigaciones posteriores, por ejemplo Corberán y otros (1994), Fuys, Geddes, Tischler (1988) y Shaughnessy y otros (1991), han mostrado que esto no permite explicar ciertas situaciones, bastante frecuentes, de alumnos que razonan simultánea o alternativamente en dos niveles consecutivos. Así pues, el paso de un nivel al siguiente se produce de una manera pausada y continua, con un período de transición durante el cual se entremezclan momentos de razonamiento de los dos niveles consecutivos. Este proceso puede llevar bastante tiempo (incluso años para alcanzar el cuarto nivel, pues la cantidad de experiencia que necesitan los estudiantes para ser capaces de realizar razonamiento formal es muy grande).

4.3.3. Relación entre el lenguaje y los niveles de razonamiento

Cada nivel de razonamiento tiene un lenguaje propio, entendiendo por ello no sólo las palabras o construcciones gramaticales empleadas, sino también el significado que se les da. Por ejemplo, para un estudiante del segundo nivel de razonamiento, demostrar una propiedad consiste en comprobar su veracidad en algunos casos, muchas veces uno solo. Para un estudiante del tercer nivel, demostrar esa propiedad consiste en buscar algún tipo de justificación lógica intuitiva de la propiedad, que frecuentemente se apoya en ejemplos específicos, pero que es de carácter general. Por último, para un estudiante del cuarto nivel, demostrar la propiedad consiste en aplicar el razonamiento lógico formal para obtener una demostración matemáticamente correcta y aceptable.

Esta característica explica la incomprensión entre dos personas que empleen lenguajes de distintos niveles. Este es un fenómeno que se produce con frecuencia en las aulas de Enseñanza Secundaria o la Universidad entre profesor y alumno cuando el profesor plantea un problema del cual espera una respuesta correspondiente al cuarto nivel (es decir una resolución formal del problema) pero el estudiante está todavía en el segundo o tercer nivel de razonamiento y resuelve el problema mediante un ejemplo o un razonamiento intuitivo.

4.4. Los Niveles de Van Hiele en las Isometrías del Plano

Al comienzo de este capítulo hemos hecho una descripción de las características generales de los niveles de Van Hiele. Ahora vamos a centrarnos en el área de las isometrías y a analizar con detalle las características específicas de los niveles en este campo. Este análisis es necesario para poder llegar al grado de detalle que permita hacer una correcta organización de los objetivos de la unidad de enseñanza y una secuenciación apropiada de las actividades. Al mismo tiempo, el análisis particularizado de los niveles ayudará a los profesores a comprender y evaluar las respuestas de los estudiantes, pues frecuentemente las descripciones generales de su comportamiento resultan demasiado ambiguas cuando se pretende aplicarlas en una situación real concreta. Ya hemos explicado anteriormente por qué nos centramos en los niveles 1 a 4.

La unidad de enseñanza que presentamos en el capítulo siguiente está desarrollada alrededor de las 3 isometrías principales, traslación, giro y simetría. La simetría en deslizamiento se presenta como una isometría compuesta; por este motivo, cuando aludimos a las isometrías o los movimientos de forma general, solemos referirnos a las isometrías principales, en particular en los dos primeros niveles de razonamiento.

4.4.1. Nivel 1 (Reconocimiento)

Los estudiantes razonando en este nivel son capaces de:

a) Considerar los movimientos (traslaciones, giros y simetrías) de manera global.
b) Reconocer la característica de isometría (conservación del tamaño y la forma de las figuras) de los movimientos.
c) Reconocer los movimientos cuando se ven objetos en acción o sus resultados. Describir los movimientos, por ejemplo como recorrido en línea recta, circular, o paso al otro lado del eje.
d) Realizar movimientos (traslaciones, giros y simetrías) sirviéndose de materiales auxiliares, como una regla, un disco, un espejo, etc., en diferentes direcciones y con diferentes posiciones relativas de las figuras y el vector, centro o eje.
e) Utilizar propiedades visuales para identificar o describir los movimientos, como la "colocación igual" de las figuras en las traslaciones, la disposición circular de las figuras en los giros, y la visión del eje de simetría como separador "por la mitad" de las dos figuras simétricas, junto con el cambio de orientación en éstas.
f) Aprender y utilizar el vocabulario elemental de las isometrías: Traslación, giro, simetría, centro de giro, eje de simetría, etc.

4.4.2. Nivel 2 (Análisis)

En este nivel de razonamiento, los estudiantes son capaces de:

a) Considerar los movimientos mediante sus elementos matemáticos.
b) Utilizar de forma explícita los elementos propios de cada movimiento: Módulo, dirección y sentido del vector en las traslaciones, centro y ángulo en los giros, y eje en las simetrías.
c) Identificar en casos concretos las características de traslaciones (componentes del vector), giros (centro, sólo cuando está sobre la figura girada, ángulo, y equidistancia al centro) y simetrías (eje, perpendicularidad, y equidistancia respecto del eje).
d) Descubrir nuevas propiedades de los movimientos a partir de su verificación en casos concretos y utilizarlas para resolver otros problemas. En particular, generalizar los resultados de composiciones de movimientos (excepto de giros de distinto centro).
e) Realizar simetrías en deslizamiento.
f) Utilizar explícitamente las definiciones de traslación, giro y simetría en las explicaciones de las actividades realizadas.
g) Utilizar las coordenadas del vector de traslación en situaciones concretas.

h) Aprender y utilizar notación y vocabulario matemáticos asociados a las isometrías y sus elementos: p, p', T_a, S_e, G(O,a°), perpendicularidad, mediatriz, módulo, dirección, sentido, etc.

4.4.3. Nivel 3 (Clasificación)

Los estudiantes del tercer nivel adquieren capacidad para:

a) Identificar las características de cualquier giro (centro, mediante corte de mediatrices de segmentos, y ángulo). Generalizar y justificar los resultados de composiciones de giros de distinto centro.

b) Completar el estudio de las simetrías en deslizamiento, sus propiedades y sus relaciones con las otras isometrías.

c) Establecer relaciones entre las propiedades de las isometrías y descubrir o deducir nuevas propiedades. Comprender planteamientos y argumentaciones generales para demostrarlas.

d) Comprender y utilizar la posibilidad de descomposición, de infinitas formas, de traslaciones y giros en producto de dos simetrías o en producto de dos giros de distinto centro.

e) Utilizar las propiedades de las composiciones de isometrías para justificar:
  - Qué características se puedan conocer del resultado de una composición particular de isometrías.
  - La posibilidad de transformar una figura en otra congruente por una composición de isometrías.

f) Establecer relaciones generales, sin soporte de figuras o traslaciones concretas, entre las coordenadas de un punto, las de su imagen y el vector de la traslación aplicada.

g) Enunciar definiciones de las isometrías como conjunto de condiciones necesarias y suficientes. Comprender las definiciones formales usuales.

h) Comprender demostraciones formales sencillas que se presentan hechas o explicadas por el profesor. Hacer demostraciones formales simples que sólo supongan la adaptación de una demostración ya conocida.

i) Pasar de un caso concreto a una situación general realizando una demostración basada en argumentos informales.

4.4.4. Nivel 4 (Deducción Formal)

En el cuarto nivel de razonamiento los estudiantes tienen capacidad para:

a) Razonar formalmente, prescindiendo de todo soporte concreto, para demostrar tanto propiedades nuevas como ya estudiadas con anterioridad.

b) Comprender y utilizar la estructura algebraica de las isometrías del plano y sus propiedades más importantes.

c) Hacer y comprender demostraciones formales completas. Identificar las hipótesis, la tesis y la red de implicaciones lógicas que llevan al resultado.

Con esta descripción de las características de los niveles de Van Hiele en el campo de las isometrías completamos la caracterización del marco teórico didáctico hecha en los capítulos 3 y 4. A continuación, en el capítulo 5, pasamos a la acción presentando una propuesta concreta de enseñanza de las isometrías del plano.

5

UNA UNIDAD DE ENSEÑANZA DE LAS ISOMETRÍAS DEL PLANO. ENSEÑANZA DE LAS TRASLACIONES.

Como inicio de la enseñanza de las traslaciones, correspondiente a la primera fase de aprendizaje del modelo de Van Hiele, el profesor debe procurar que sus alumnos recuerden o aprendan ciertos conceptos y técnicas de trabajo que no son específicas de las traslaciones, pero cuyo dominio será necesario para poder avanzar adecuadamente en la realización de las actividades que presentamos a continuación. En particular, es necesario afianzar los métodos y materiales para trazar paralelas que resulten más adecuados para los estudiantes. Por lo general, los estudiantes usan bien la regla, la escuadra y el cartabón, pero si algunos estudiantes (de Primaria) tienen dificultad en el uso de estos instrumentos, pueden utilizar dos reglas, siempre que al menos una de ellas sea ancha.

Por otra parte, cuando los alumnos ya hayan estudiado las traslaciones con anterioridad, los profesores deben centrar su actividad inicial en determinar el nivel de razonamiento de sus alumnos al trabajar con traslaciones y sus conocimientos sobre:

- Los números enteros y las operaciones de suma y resta en este conjunto.
- Utilización de los vectores gráficamente y mediante coordenadas.
- Manipulación y propiedades básicas de las traslaciones.
- Cuando los estudiantes estén en el segundo nivel o superior, los conocimientos de las otras isometrías necesarios para continuar el estudio de las traslaciones.

En relación con estos puntos, si los alumnos conocen el tema pero tienen alguna carencia concreta, es conveniente darles una instrucción específica adecuada antes de empezar a trabajar con actividades nuevas de traslaciones.

5.1. Actividades del nivel 1

NOTA: Los objetivos del las actividades del nivel 1 son los siguientes:
- Asimilación visual de la posición relativa de las figuras trasladadas.

- Forma del desplazamiento directo que permite trasladar figuras.

T-1.1 Observa las dos láminas siguientes. Dí qué te parece que es una traslación y cómo han de estar colocadas las figuras para que unas sean trasladadas de la otras.

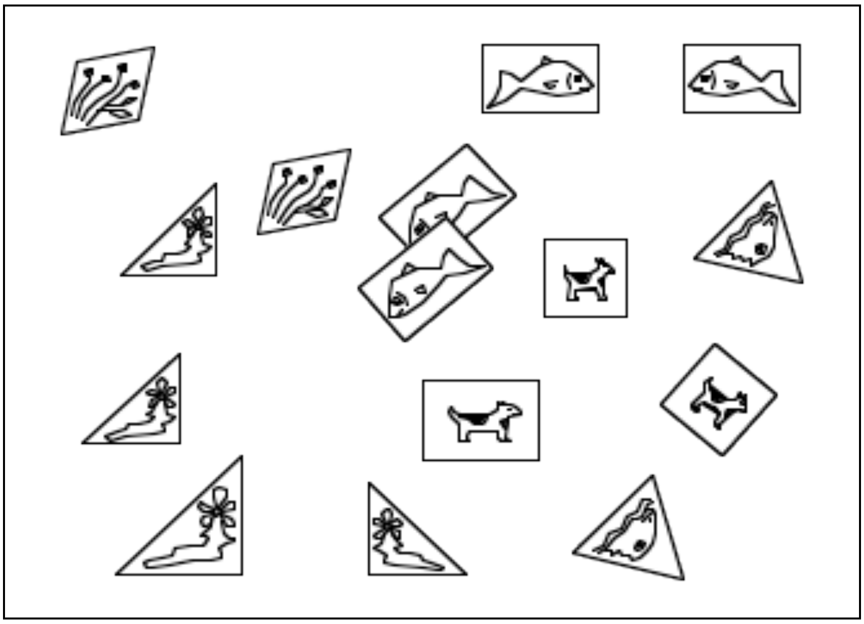
En la lámina 1, coge una pieza igual a alguna figura de los ejemplos y trasládala hasta colocarla sobre su pareja.

Repite la actividad con los ejemplos de la lámina 2, trasladando la pieza de unas figuras a otras del grupo.

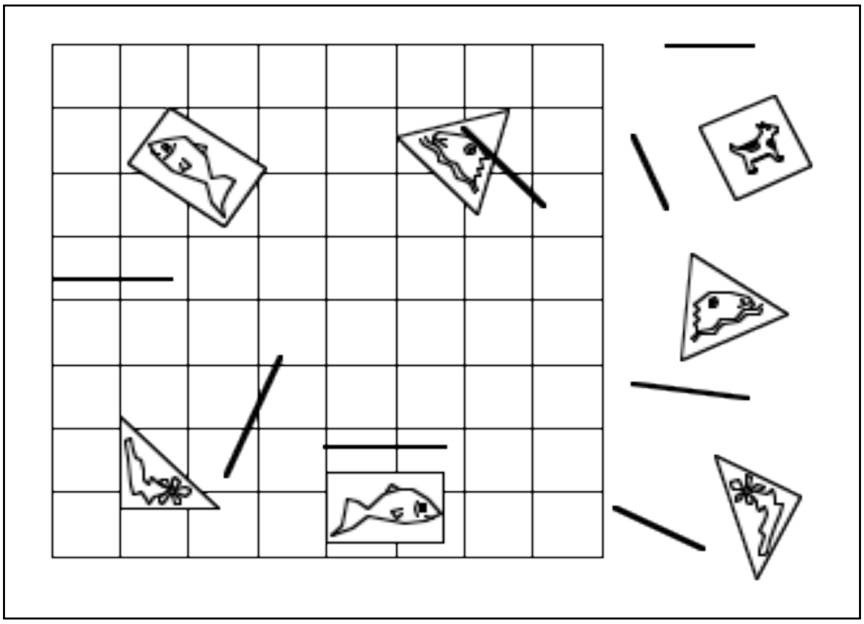

1
ESTAS SON TRASLACIONES
ESTAS NO SON TRASLACIONES


2
ESTAS SON TRASLACIONES
ESTAS NO SON TRASLACIONES

T-1.2 Identifica las figuras de la lámina siguiente que se corresponden mediante una traslación. Explica en los casos negativos por qué no hay traslación. Haz el recorrido de la traslación con una pieza en los casos afirmativos.



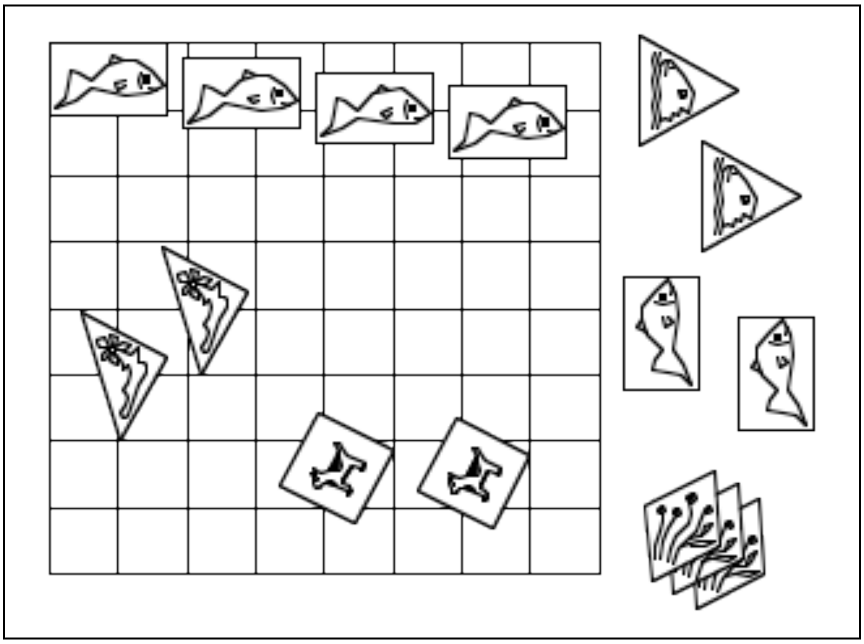
T-1.3 Cada figura de la lámina se ha trasladado de manera que uno de sus lados se ha desplazado hasta el segmento más próximo a esa figura, pero se han borrado las imágenes. Pega piezas en la lámina para que se vean las imágenes completas (ten en cuenta que no siempre existe solución y que en algún caso hay varias soluciones).



T-1.4 Diseña una lámina con tres casos parecidos a los de la actividad anterior para que tus compañeros la resuelvan.

NOTA: En las actividades siguientes se hace una primera toma de contacto con los frisos. Probablemente sea conveniente, antes de realizarlas, presentar a los estudiantes algunos frisos reales o en fotografías y hablar sobre sus características.

T-1.5 Los peces de la parte superior de la lámina siguiente te dan una idea de lo que es un friso: Un friso es una banda de figuras que se prolonga indefinidamente. Pega piezas en la lámina para continuar los frisos.



T-1.6 Diseña un friso generado por una traslación para que tus compañeros lo continúen.

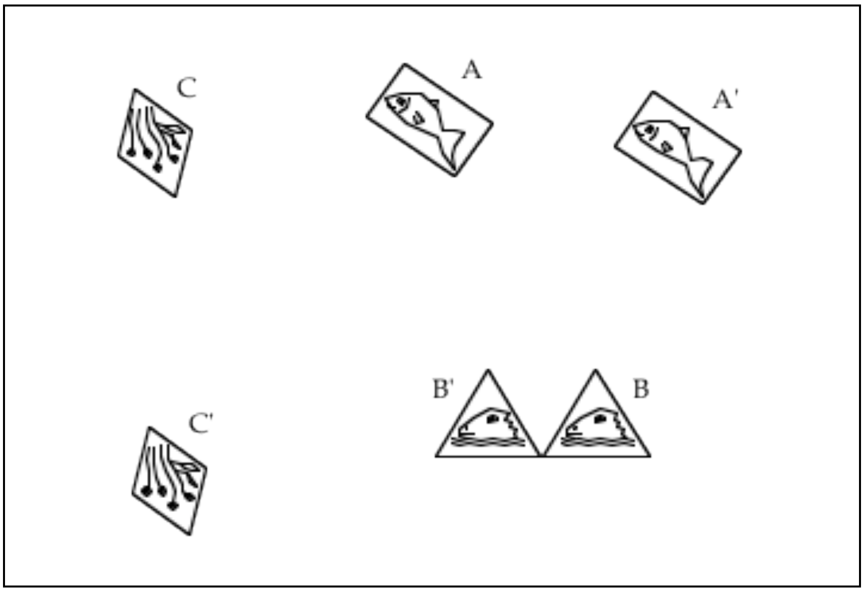
5.2. Actividades del nivel 2

NOTA: Los objetivos del las actividades T-2.1 a T-2.3 del nivel 2 son los siguientes:

- *Descubrimiento, utilización y aprendizaje de las características matemáticas de las traslaciones.*
- *Introducción y uso del vector libre como representante de una traslación.*

T-2.1 La figura A se ha trasladado hasta la A'. Une mediante flechas varios puntos de A con sus imágenes en A'. Dí qué observas en esas flechas, indicando lo que tienen igual y en lo que se diferencian. Copia una de las flechas en la parte derecha de la lámina.

Repite la actividad con las figuras B y B' y con C y C'.



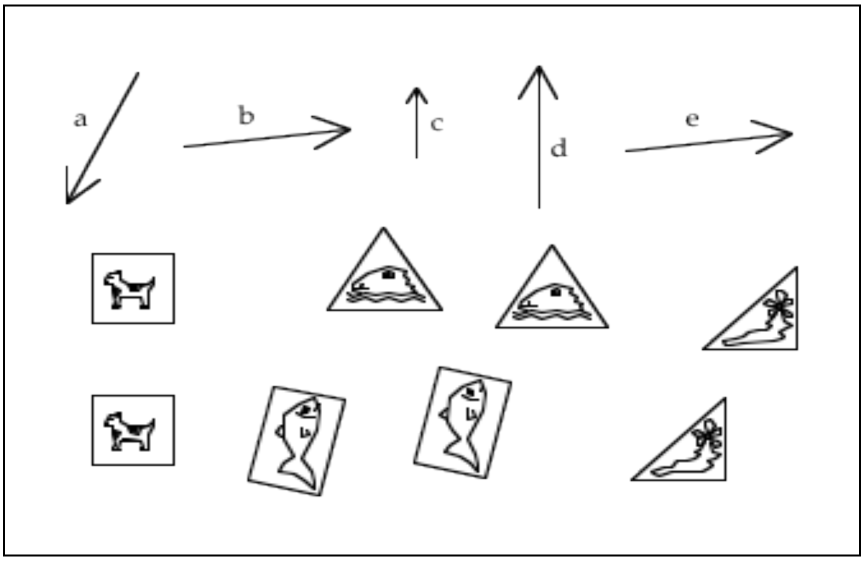
NOTA: Conviene que en este momento el profesor introduzca el concepto de vector libre asociado a una traslación, sus características (módulo, dirección y sentido) y la notación correspondiente para las traslaciones. Nosotros denotaremos por Tv a la traslación de vector v.

T-2.2 Para cada figura de la lámina, dí qué vector o vectores de la parte superior de la lámina definen la traslación que transforma esa figura en otra trasladada.

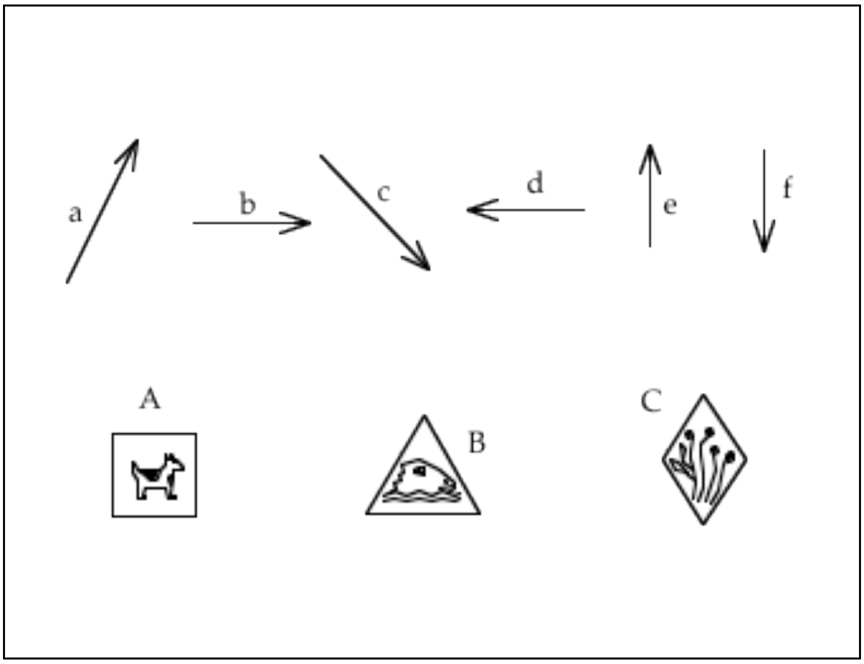
¿Hay algún par de figuras trasladadas para las que no esté en la lámina su vector de traslación? En caso afirmativo dibújalo.

¿Es posible que dos vectores definan la misma traslación, o sea, sirvan para el mismo par de figuras? ¿Por qué?

A los vectores que representan la misma traslación los llamaremos vectores equivalentes.



T-2.3 Obtén las imágenes de A por las traslaciones de vectores a, d y f.
Obtén las imágenes de B por las traslaciones de vectores a, b y f.
Obtén las imágenes de C por las traslaciones de vectores c y e.

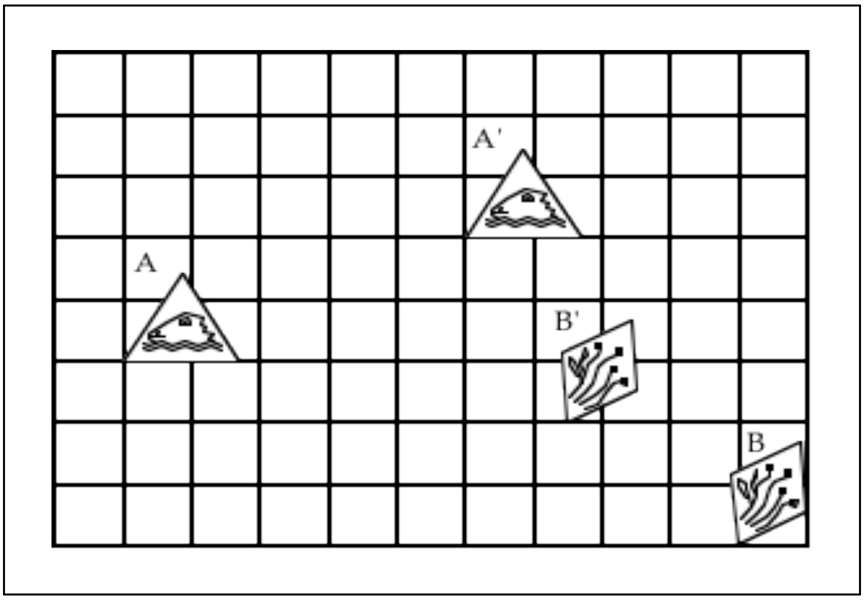


NOTA: En las actividades siguientes se introducen las coordenadas como forma de representar una traslación. Si los estudiantes saben trabajar con números enteros, se sustituirá lo antes posible la notación de direcciones por números positivos y negativos, presentando este cambio como un convenio para economizar esfuerzo.

T-2.4 Marca un punto de la figura A (por ejemplo, el vértice inferior izquierdo) y su imagen en la figura A'. Indica cuánto se desplaza ese punto en horizontal (derecha/izquierda) y en vertical (arriba/abajo) cuando la figura A se traslada hasta A'.
Repite la actividad con otros puntos de la figura A. Compara los resultados.
Dibuja el vector de la traslación que transforma A en A' y anota la cantidad de cuadrados que hay, en horizontal (derecha/izquierda) y en vertical (arriba/abajo), desde el origen hasta el final del vector.

Compara este resultado con los que obtuviste en la primera parte de esta actividad.

Haz de nuevo toda la actividad con las figuras B y B'.

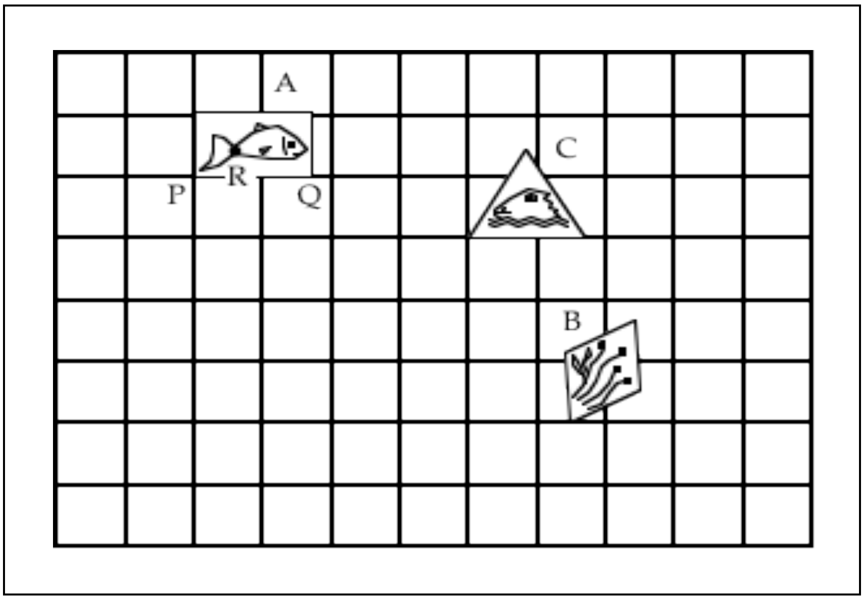


T-2.5 Aplícale a la figura A la traslación que la mueve 3 cuadros hacia la derecha y 5 cuadros hacia abajo, usando el vértice P como punto de partida.

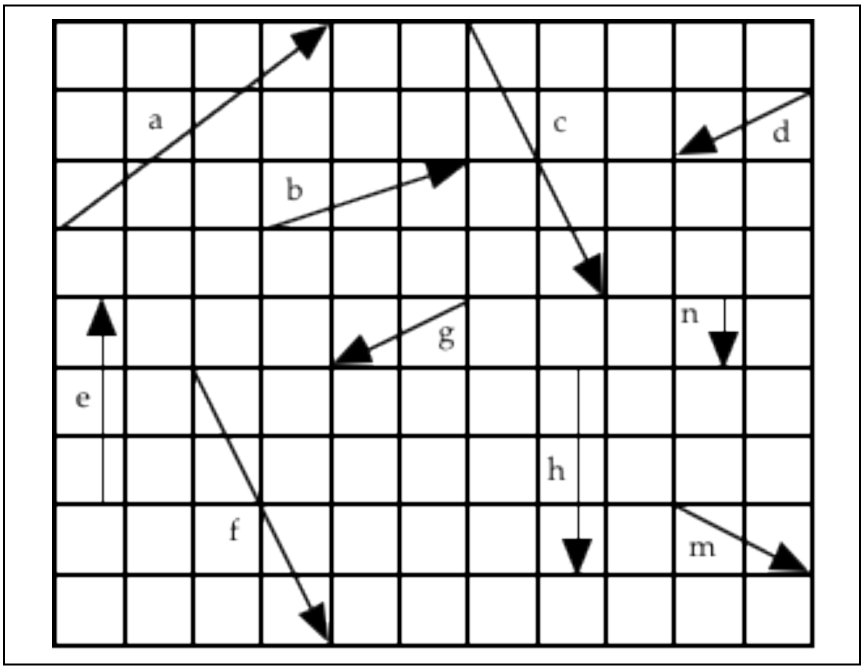
Conjetura dónde se situará la imagen de A si usas el vértice Q como punto de partida. Comprueba tu respuesta. ¿Y si cuentas desde el punto R?

Dibuja el vector de esa traslación.

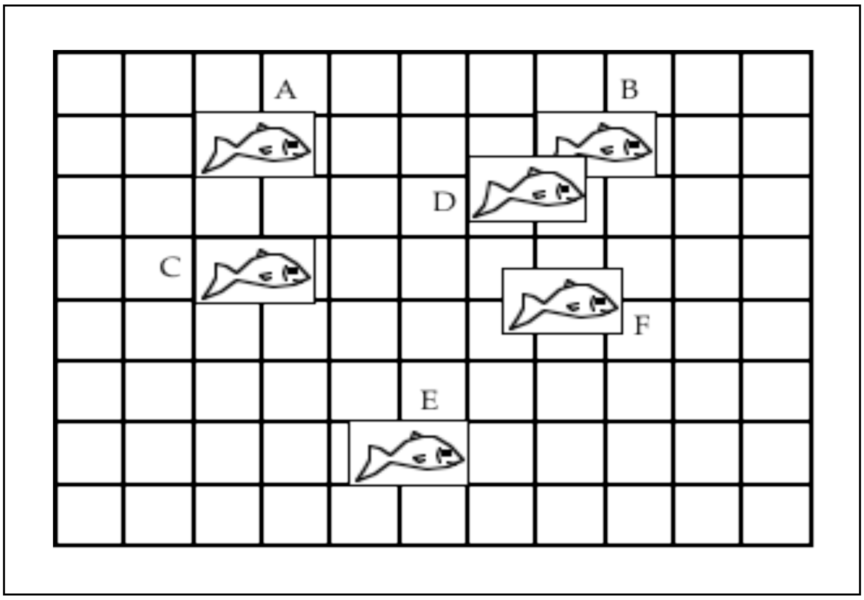
Dibuja los vectores de las traslaciones siguientes: a) 2 a la izquierda, 5 abajo; b) 4 a la derecha, nada en vertical; c) Nada en horizontal, 6 abajo; d) 6 a la derecha, 2 arriba. Aplica cada una de estas traslaciones a alguna de las figuras de la lámina.


A
C
P
R
Q
B

T-2.6 Da las coordenadas de cada uno de los vectores que hay en la lámina. Dí cuáles corresponden a la misma traslación y explica por qué (recordar el concepto de vectores equivalentes).



T-2.7 Da las coordenadas de los vectores de las traslaciones que llevan la figura A hasta cada una de las otras figuras de la lámina.



NOTA: En la actividad siguiente, el profesor debe modificar el enunciado si sus alumnos no conocen los números negativos, continuando con la notación de direcciones que hemos utilizado en las actividades precedentes.

T-2.8 Pega una figura A sobre una hoja cuadriculada y sitúa su imagen por medio de la traslación de vector (3, -1). Coloca en otro lugar de la misma lámina otra figura B y su imagen por esta misma traslación.

Repite la actividad con las traslaciones de vectores (-4, -4), (0, 5) y (-3, 0).

NOTA: Los objetivos del las actividades T-2.9 a T-2.13 del nivel 2 son los siguientes:

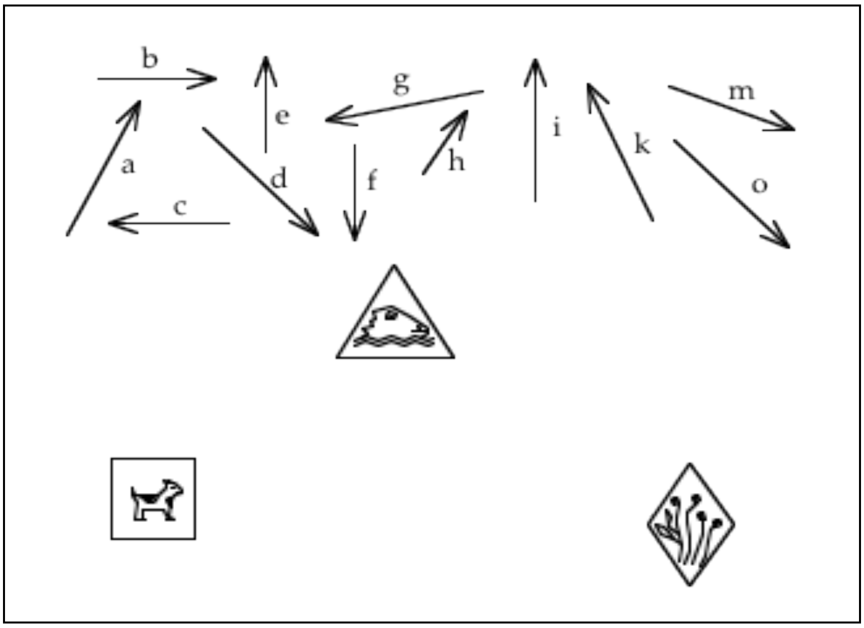
- *Introducir la composición de traslaciones y descubrir el movimiento equivalente.*
- *Descubrir la conmutatividad de la composición de traslaciones.*

Según la capacidad de abstracción de los estudiantes, este grupo de actividades se puede resolver realizando físicamente los movimientos con piezas recortadas o dibujando en la lámina.

T-2.9 Sin utilizar coordenadas, mueve una figura de la lámina siguiente con la traslación T_a. Después, mueve la figura imagen con la traslación T_c. Determina las características del movimiento que permite pasar directamente desde la figura inicial hasta la segunda imagen obtenida.

Lo que has hecho ha sido aplicar la composición o producto de las traslaciones T_a y T_c a la figura. Para indicar esta composición escribiremos $\mathbf{T_c \circ T_a}$. Fíjate que se escribe en el orden inverso al usual: La primera traslación que actúa (T_a) la colocamos a la derecha de la otra.

Repite la actividad componiendo otras traslaciones y moviendo otras figuras. Generaliza el resultado que has obtenido: "Al componer dos traslaciones el movimiento resultante es ......"



NOTA: En la actividad anterior, el profesor debe explicar e ilustrar con detalle la composición de traslaciones y recalcar la notación, para que los estudiantes comprendan bien la idea de que, en un producto, cada movimiento actúa sobre el resultado del anterior. Generalmente resulta útil recurrir a algún modelo o ejemplo físico. Además, se debe repetir la actividad anterior con composiciones de más de dos traslaciones.

El objetivo de la actividad siguiente, es hacer entender a los estudiantes que el vector de la traslación resultante de una composición de traslaciones siempre se puede obtener gráficamente, aunque los estudiantes *no hayan estudiado la suma de vectores. Si los estudiantes conocen la suma de vectores, se puede establecer directamente el resultado de que el vector de la traslación resultante de una composición de traslaciones es la suma de los vectores de las traslaciones de dicha composición.*

T-2.10 [*Utilizar la misma lámina de la actividad anterior*] Sin utilizar coordenadas, aplícale a una de las figuras de la lámina la composición $T_g \circ T_m$, o sea, mueve la figura primero T_m y después mueve la imagen por T_g. Copia los vectores m, g y el vector de la traslación resultante.

Elige un punto de la figura inicial y llámalo P, llama P' a su imagen por T_m y llama P'' a la imagen de P' por T_g. Observa que m = $\overrightarrow{PP'}$, g = $\overrightarrow{P'P''}$ y el vector resultante de la composición es $\overrightarrow{PP''}$. Dibuja estos vectores a partir de P y P'.

Repite esta actividad con otros puntos de la figura que has elegido y también con otras figuras y otros vectores. Obtén cada vez, en primer lugar, el vector de la composición gráficamente, después aplica esa traslación resultante, y por último haz la composición paso por paso para comprobar que la figura final es la misma.

T-2.11 [*Utilizar la misma lámina de la actividad T-2.6*] Halla las coordenadas de los vectores a y b. Aplícale a una figura de la lámina la composición $T_b \circ T_a$. Dibuja el vector de la traslación resultante y calcula sus coordenadas.

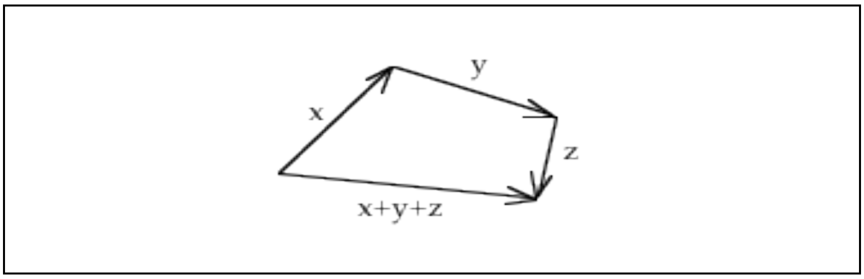
Repite la actividad con las composiciones $T_c \circ T_a$, $T_a \circ T_d$, y con otras composiciones.

Generaliza el resultado que has obtenido: "Las coordenadas del vector resultante de una composición de traslaciones se obtienen ......"

T-2.12 [*Utilizar la misma lámina de la actividad T-2.6*] Aplícale a una figura de la lámina la composición $T_c \circ T_b \circ T_a$. Dibuja el vector de la traslación resultante. Escribe las coordenadas de cada uno de los vectores de la composición y las del vector de la traslación resultante.

Repite la actividad con otros productos de tres traslaciones.

Generaliza el procedimiento para obtener, gráficamente y mediante coordenadas, el vector resultante de una composición de traslaciones (en la lámina siguiente te mostramos gráficamente la composición $T_z \circ T_y \circ T_x$).

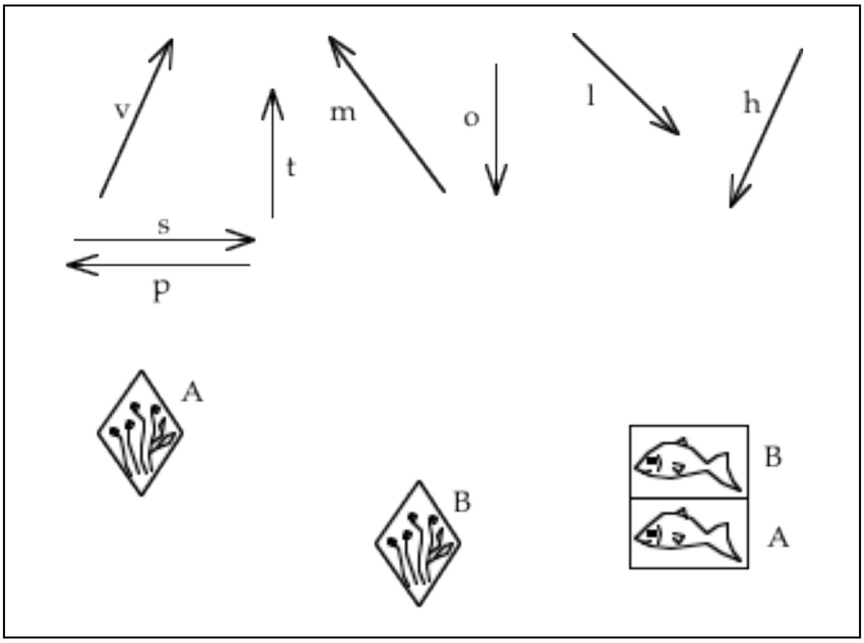


T-2.13 Realiza varias de las composiciones de traslaciones de las actividades T-2.11 y T-2.12 pero cambiando el orden de las traslaciones; haz unos casos sin cuadrícula y otros con cuadrícula.

Compara los resultados de esta actividad con los de las actividades anteriores y extrae conclusiones acerca de la <u>conmutatividad</u> de la composición de traslaciones.

NOTA: El objetivo de las dos actividades siguientes es introducir el concepto de descomposición de una traslación en producto de varias, es decir, la operación inversa a la que se ha estudiado en las últimas actividades.

T-2.14 Para mover la figura A hasta la B, se ha utilizado la composición de dos traslaciones T_v y T_r. El vector de la traslación T_v está dibujado en la lámina. ¿Puedes dibujar el vector de la traslación T_r?



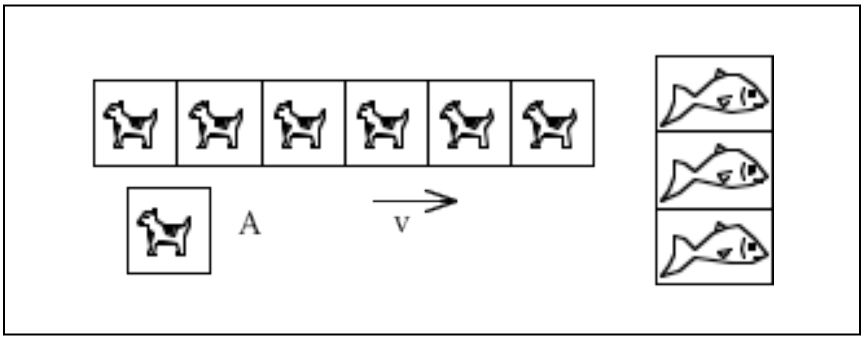
T-2.15 [*Utilizar la misma lámina de la actividad anterior*] Para mover la figura A hasta la B, se ha utilizado la composición de dos traslaciones T_a y T_b, pero se ha perdido el rastro del recorrido. Dibuja los vectores de dos traslaciones que puedan corresponder a esa composición.

Si es posible, encuentra otra solución diferente de la anterior, es decir con dos traslaciones distintas a las que has usado antes. ¿Cuántas posibilidades diferentes hay?

NOTA: En las últimas actividades del bloque del nivel 2 se vuelven a utilizar los frisos y se toma contacto, por primera vez, con los mosaicos. Igual que se hizo en las actividades del nivel 1 con los frisos, ahora es conveniente presentar a los estudiantes algunos mosaicos y hablar sobre sus características antes de realizar las actividades. Los frisos y mosaicos que se construyan o analicen deben estar generados sólo por traslaciones.

T-2.16 Para construir el primer friso de la lámina, hemos utilizado la figura A como modelo y dos traslaciones, la de vector v y su opuesta, la traslación de vector -v. Ambas traslaciones hay que hacerlas actuar indefinidamente sobre las figuras que se van añadiendo para seguir completando el friso y saber dónde hay que pegar nuevas figuras.

Identifica una traslación que permita generar el otro friso de la lámina, o sea, que al aplicar indefinidamente esa traslación y su opuesta se pueda generar el friso.



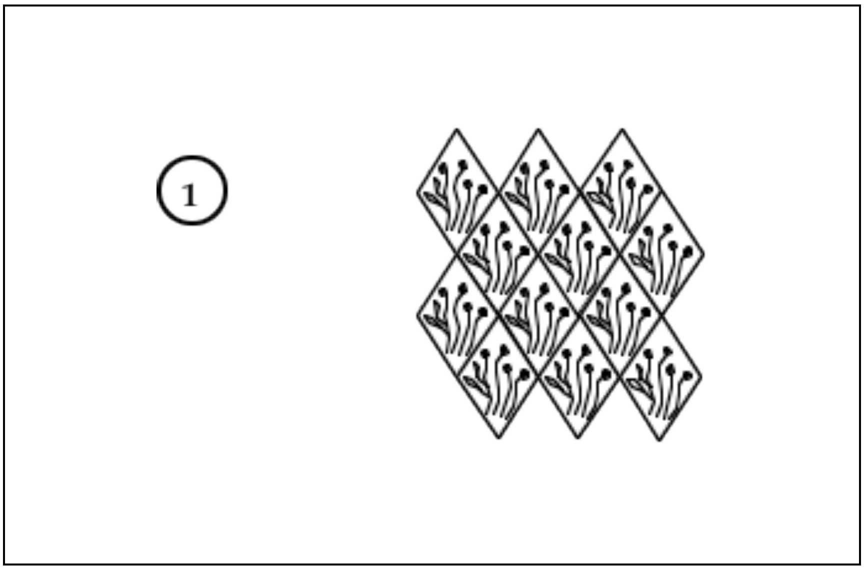
NOTA: Los frisos generados sólo por traslaciones son demasiado simples para que los estudiantes puedan captar el concepto de sistema generador. Por ello, los frisos sirven como introducción al tema, para completarlo con la actividad siguiente, sobre mosaicos, en los que sí es posible obtener varios sistemas generadores diferentes. En realidad, en esta actividad es suficiente con que los estudiantes obtengan conjuntos generadores, aunque tengan más isometrías de las suficientes.

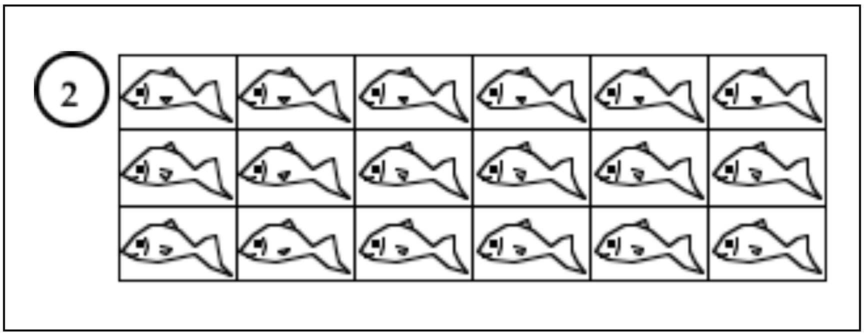
T-2.17 Las figuras de las láminas siguientes te dan una idea de lo que es un mosaico: Un mosaico es un cubrimiento del plano con figuras iguales, cuyas posiciones siguen unas reglas fijas, y que no dejan huecos ni se solapan. O sea, es parecido a un friso, pero cubriendo todo el plano y no sólo una banda.

Completa el mosaico de la lámina 1.

Da un conjunto de traslaciones que permita generar el mosaico de la lámina 2 al actuar sobre una de sus celdas.

Identifica un conjunto de traslaciones que permita construir un mosaico a partir del rectángulo de la lámina 2, es decir que, al componer esas traslaciones o sus opuestas, se forme un mosaico.





5.3. Actividades del nivel 3

NOTA: El objetivo de las primeras actividades del bloque del nivel 3 es continuar la caracterización de las traslaciones mediante coordenadas:

- *Relación entre las coordenadas de un punto, las de su imagen y las del vector de la traslación. Las actividades T-3.1 a T-3.3 plantean las tres posibles incógnitas en el cálculo de coordenadas por una traslación. La actividad T-3.4 plantea la generalización del resultado anterior y, cosa importante, pide a los estudiantes que expliciten alguna demostración (seguramente informal, pues estamos empezando a trabajar en el nivel 3). Es posible que en el primer momento los estudiantes necesiten el apoyo del papel cuadriculado, pero en la segunda parte de cada actividad hemos elegido las coordenadas grandes para inducirles a razonar en vez de contar.*
- *Uso de coordenadas en la composición y descomposición de traslaciones. La actividad T-3.5 plantea el caso de la composición de traslaciones y las actividades T-3.6 y T-3.7 plantean la descomposición de una traslación en producto de varias y la existencia de infinitas soluciones.*

T-3.1 Las coordenadas de un punto P son (2,3). Si se le aplica a P la traslación de vector (5,2), ¿cuáles son las coordenadas de su imagen P'? ¿Cuáles son las coordenadas de la imagen del punto Q = (-1,5)? ¿Y las coordenadas de la imagen de R = (20,-30)?

Repite la actividad con los puntos anteriores y la traslación que tiene como vector (-40,50).

T-3.2 El punto P', de coordenadas (10,14), es la imagen del punto P por la traslación T_v, siendo (5,6) las coordenadas del vector v. ¿Cuáles son las coordenadas de P?

Si Q' tiene de coordenadas (0,-7) y es la imagen de Q por la misma traslación T_v, ¿cuáles son las coordenadas de Q?

Repite la actividad con la traslación de vector r = (8,-10) y con los puntos S y M cuyas imágenes son S' = (-10,70) y M' = (50,-80).

T-3.3 Las coordenadas de un punto P son (3,9) y las de su imagen P' por una traslación T_v son (5,7). ¿Cuáles son las coordenadas del vector v?

Repite la actividad con el punto Q = (30,-40) y su imagen Q' = (-20,60).

T-3.4 Si T_a es la traslación de vector (a_1, a_2) y P' es la imagen del punto P = (p_1, p_2) por T_a, ¿cuáles son las coordenadas de P'? Justifica tu respuesta de manera general.

Si P' = (p'_1, p'_2) es la imagen de un punto P = (p_1, p_2) por la traslación T_a, ¿cuáles son las coordenadas del vector a? Justifica tu respuesta de manera general.

Si T_a es la traslación de vector (a_1, a_2) y P' = (p'_1, p'_2) es la imagen del punto P por T_a, ¿cuáles son las coordenadas de P? Justifica tu respuesta de manera general.

T-3.5 A una figura F hay que aplicarle la composición de traslaciones $T_v \circ T_r \circ T_s \circ T_w$. Las coordenadas de los vectores de estas traslaciones son: $v = (v_1, v_2)$, $r = (r_1, r_2)$, $s = (s_1, s_2)$, $w = (w_1, w_2)$. ¿Cuáles son las coordenadas del vector de la traslación resultante de la composición?

Aplica la relación que has encontrado en el apartado anterior para obtener el vector de la traslación resultante cuando las coordenadas son: v = (4,-2), r = (3,-5), s = (-1,0), w = (0,2).

Para comprobar si el resultado es correcto, pega en una hoja cuadriculada una pieza y muévela por la traslación que has obtenido como resultado de la composición; después mueve la misma pieza, paso a paso, por cada traslación de la composición. Si has resuelto bien la actividad, la imagen final debe ser la misma en ambos casos.

T-3.6 Dada la traslación T_a de vector a = (3,1), ¿es posible descomponerla en un producto de dos traslaciones? En caso afirmativo, ¿qué coordenadas tienen los vectores de estas dos traslaciones? Si es posible descomponer T_a, ¿puedes dar cuatro soluciones diferentes?

¿Es posible que el vector de una traslación de la descomposición de T_a tenga de coordenadas (5,2)? ¿Y que tenga de coordenadas (-7,6)?

T-3.7 Dada una traslación T_v de vector $v = (v_1, v_2)$, ¿de cuántas formas se puede descomponer esta traslación en producto de dos traslaciones? Dí qué condiciones deben cumplir las coordenadas de las traslaciones de la descomposición: Si $T_v = T_r \circ T_s$, siendo $r = (r_1, r_2)$ y $s = (s_1, s_2)$ los vectores de las traslaciones que intervienen en la descomposición, expresa la relación entre los vectores (v_1, v_2), (r_1, r_2) y (s_1, s_2).

Si queremos descomponer una traslación T_v en producto de tres, cuatro, ... traslaciones, explica cuántas soluciones diferentes hay en cada caso. Da ejemplos concretos descomponiendo la traslación T_v de vector v = (1,0) en productos de 3 y de 4 traslaciones.

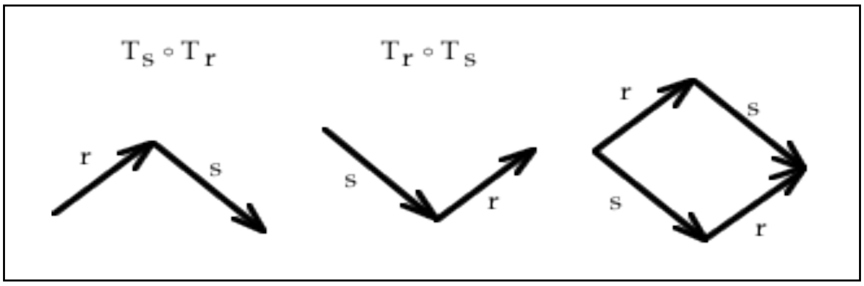
En general, dada una traslación cualquiera T_V de vector v = (v_1, v_2), ¿qué condiciones deben cumplir las coordenadas de los vectores $r = (r_1, r_2)$, $s = (s_1, s_2)$ y $t = (t_1, t_2)$ para que sea cierto que $T_V = T_r{\circ}T_S{\circ}T_t$?

NOTA: Las siguientes actividades plantean realizar dos demostraciones de propiedades de las traslaciones, la primera ya conocida y la segunda nueva. Todos los profesores de Secundaria saben que la iniciación a la demostración es difícil para los estudiantes, pues deben aprender nuevos métodos de trabajo y un nuevo lenguaje, por lo que con frecuencia se pierden y no saben cuándo ha finalizado la demostración. Por ello, al principio hay que presentar en cada paso la hipótesis de ese momento y la propiedad a utilizar, recordando el punto final de la demostración al que hay que llegar. Una vez construida así la demostración, los estudiantes van adquiriendo progresivamente agilidad y comprendiendo el proceso deductivo, siendo capaces de repetir o transformar ligeramente una demostración para un caso análogo.

En las siguientes actividades proporcionamos dos ejemplos de situaciones adecuadas para estos comienzos. El profesor debe orientar a sus alumnos en cada paso y procurar que, al final, hagan un resumen de la demostración completa. Por otra parte, éstas no son las únicas demostraciones que se pueden plantear; cada profesor puede decidir si quiere trabajar más o no en este tipo de actividad.

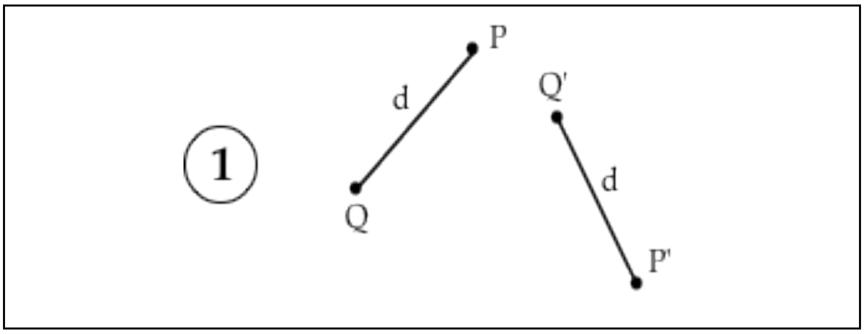
T-3.8 Demuestra que la composición de dos traslaciones es conmutativa, o sea que, para cualquier par de traslaciones, $T_r{\circ}T_S = T_S{\circ}T_r$. Haz la demostración basándote en la representación gráfica de los vectores de las traslaciones. Para ello, completa el diagrama que te damos en la lámina trazando el vector resultante de cada composición. Después haz otros diagramas semejantes con varios pares de vectores diferentes y justifica por qué no influye el orden de las traslaciones de la composición en el vector resultante que se obtiene.

Demuestra esta propiedad también mediante el uso de coordenadas: Si $r = (r_1, r_2)$ y $s = (s_1, s_2)$, dí cuáles son las coordenadas de los vectores resultantes de las composiciones $T_r{\circ}T_S$ y $T_S{\circ}T_r$.



NOTA: En la siguiente actividad planteamos un posible esquema, basado en el teorema 2 del capítulo 2, para guiar a los estudiantes a realizar la demostración de que las traslaciones son isometrías. Este es sólo un ejemplo, que los profesores pueden cambiar si creen que a sus alumnos les resultará más fácil otra organización de la demostración.

T-3.9 A) Una <u>isometría</u> es una transformación que conserva las distancias entre los puntos de las figuras, es decir (lámina 1): Si P y Q son dos puntos y P' y Q' son sus imágenes por una isometría, entonces la distancia entre P y Q es la misma que la distancia entre P' y Q'.

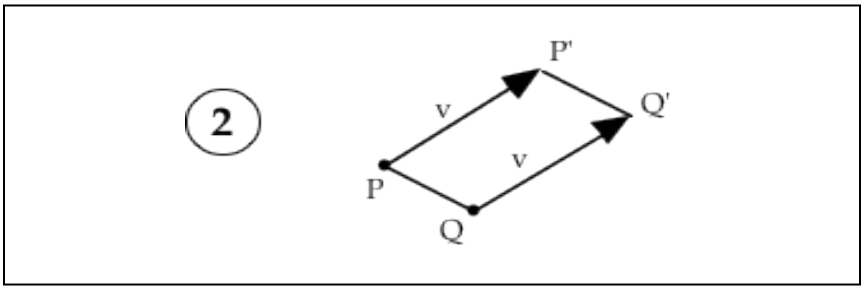


Vamos a demostrar que las traslaciones son isometrías, es decir, que conservan las distancias, esto es: Dados dos puntos cualquiera P y Q, y sus imágenes P' y Q' por una traslación cualquiera T_V, hay que justificar que los segmentos PQ y P'Q' tienen la misma longitud. Antes de empezar la demostración, escribe en tu libreta qué es lo que hay que demostrar.

B) Para la demostración vamos a emplear la definición de traslación y también la siguiente propiedad, consecuencia del teorema de Tales: Cualquier par de vectores representantes del mismo vector libre son paralelos y tienen la misma longitud, luego al unir sus orígenes y sus extremos, respectivamente, se obtienen dos segmentos que son paralelos e iguales entre sí.

Explica gráficamente el significado de esta propiedad que acabamos de enunciar: Haz un dibujo e indica sobre él lo que se dice el enunciado.

C) La figura de la lámina 2 te ayudará a entender la demostración planteada en esta actividad:



Tenemos el segmento PQ y la traslación T_V.

La imagen de PQ se obtiene aplicando la traslación T_V a sus extremos P y Q: P' es la imagen de P y Q' es la imagen de Q. Tenemos que demostrar que PQ mide lo mismo que P'Q'.

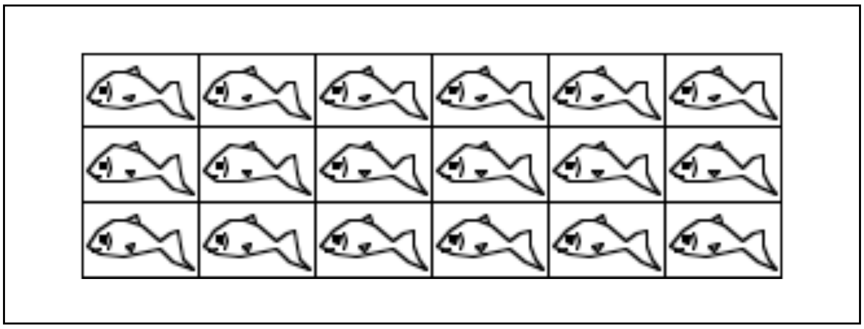
Completa tú la demostración teniendo en cuenta el apartado B) anterior.

D) Repite la demostración completa. Sírvete de otro dibujo con otro segmento y otra traslación.

NOTA: Continuamos el trabajo con frisos y mosaicos hecho en las actividades T-2.16 y T-2.17 refinando el concepto de sistema generador. En las actividades del nivel 2 sólo se pedían conjuntos generadores. Ahora se trabaja sobre la idea de conjuntos mínimos, es decir de sistemas generadores.

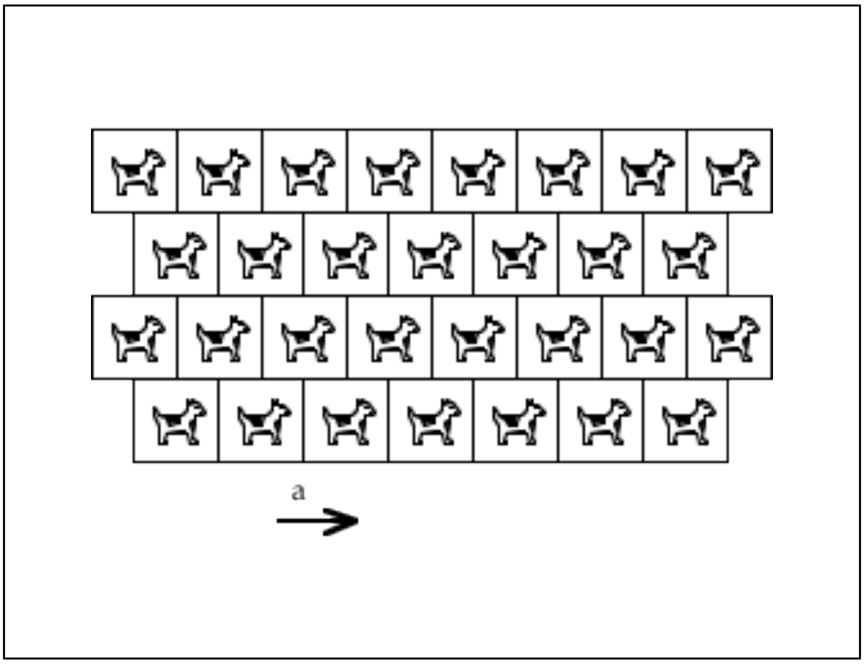
T-3.10 Busca un conjunto lo más pequeño posible de traslaciones, tal que al utilizar esas traslaciones indefinidamente se obtenga el mosaico de la lámina. Este conjunto mínimo se llama <u>sistema generador</u> del mosaico.

Busca varios sistemas generadores distintos para este mosaico.



T-3.11 Añade la menor cantidad posible de traslaciones al conjunto {Ta} para obtener un sistema generador del mosaico de la lámina.

Busca otros sistemas generadores distintos de ese mosaico.



5.4. Actividades del nivel 4

NOTA: El trabajo de nivel 4 debe realizarse tomando como base el conjunto completo de las isometrías del plano, por lo que no hemos *planteado actividades específicas para las traslaciones ni los giros. Las actividades de nivel 4 están organizadas en un solo bloque en el capítulo 7.*

6

UNA UNIDAD DE ENSEÑANZA DE LAS ISOMETRÍAS DEL PLANO. ENSEÑANZA DE LOS GIROS.

Al comezar la enseñanza de los giros, correspondiente a la primera fase de aprendizaje del modelo de Van Hiele, el profesor debe procurar que sus alumnos recuerden o aprendan ciertos conceptos y técnicas de trabajo que no son específicas de los giros, pero cuyo dominio será necesario para poder avanzar adecuadamente en la realización de las actividades que presentamos a continuación. En particular, para los estudiantes que estén en el nivel 2 de razonamiento o superior, o que previsiblemente vayan a progresar rápidamente hacia estos niveles, es necesario afianzar los métodos y materiales para trazar circunferencias o arcos (con el compás) y para medir ángulos (con el transportador). Por lo general, los estudiantes de Secundaria saben usar correctamente estos instrumentos, si bien generalmente han olvidado algo el uso del transportador, por lo que es necesario recordárselo para evitar el error de colocar mal el centro del transportador o el de leer la escala inadecuada.

La problemática de los estudiantes de los cursos superiores de Primaria suele ser similar a la de los de Secundaria. En cuanto a los primeros cursos de Primaria, cuando empiecen a realizar las actividades del segundo nivel de Van Hiele, el profesor puede limitarse a usar ángulos fáciles, como son los de 0°, 45°, 90°, 135°, etc., que se pueden medir con transportador o con materiales alternativos, como cuña de cartón de las amplitudes adecuadas. Del mismo modo, el uso del compás puede sustituirse por el de otros materiales (Jaime, Gutiérrez y otros, 1989) si ello le resulta más fácil a los niños.

Por otra parte, cuando los alumnos ya hayan estudiado los giros con anterioridad, los profesores deben centrar su actividad inicial en determinar el nivel de razonamiento de sus alumnos al trabajar con los giros y sus conocimientos sobre:

- Los números enteros y las operaciones de suma y resta en este conjunto.
- Utilización de la circunferencia, los ángulos orientados y los grados.
- Manipulación y propiedades básicas de los giros.

- Cuando los estudiantes estén en el segundo nivel o superior, los conocimientos de las otras isometrías necesarios para continuar el estudio de los giros.

En relación con estos puntos, si los alumnos conocen el tema pero tienen alguna carencia concreta, es conveniente darles una instrucción específica adecuada antes de empezar a trabajar con actividades nuevas de giros.

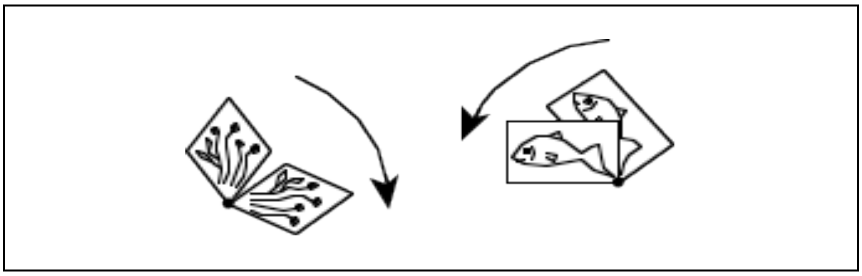
6.1. Actividades del nivel 1

NOTA: Los objetivos del las actividades del nivel 1 son los siguientes:
- *Asociar la noción primaria de giro que poseen los estudiantes con lo que se va a trabajar.*
- *Poner en contacto a los estudiantes con la visión dinámica de los giros en el entorno en el que se trabajará.*

G-1.1 Las manecillas del reloj giran. En un tiovivo, los caballitos giran alrededor del centro del tiovivo. ¿Se te ocurre algún otro ejemplo de algo que gire? ¿Cómo expresarías lo que es girar? ¿Cómo se mueve un objeto cuando gira alrededor de algo?

G-1.2 Pincha en un vértice una pieza recortada y dale vueltas, parando en diversas posiciones a lo largo del recorrido y pegando piezas iguales en el lugar y con la inclinación correspondientes. Completa los recorridos de las figuras que hay en la lámina pegando varias piezas.

Repite la actividad, pero pinchando en otro punto del contorno de la pieza. Después haz de nuevo la actividad, pinchando en un punto interior de otra pieza.

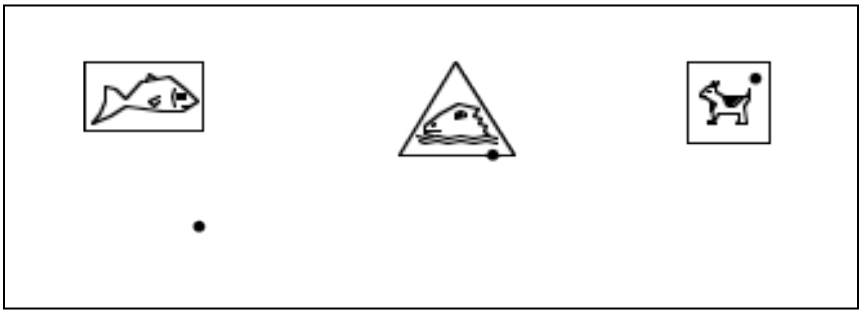


G-1.3 Pega una pieza sobre un círculo transparente, en el que está marcado el centro. Coloca el círculo sobre una hoja de papel en blanco y dale vueltas, pinchando por su centro. Pega en la hoja varias piezas a lo largo del recorrido que coincidan con la pieza que da vueltas. Explica cómo se va moviendo la pieza.

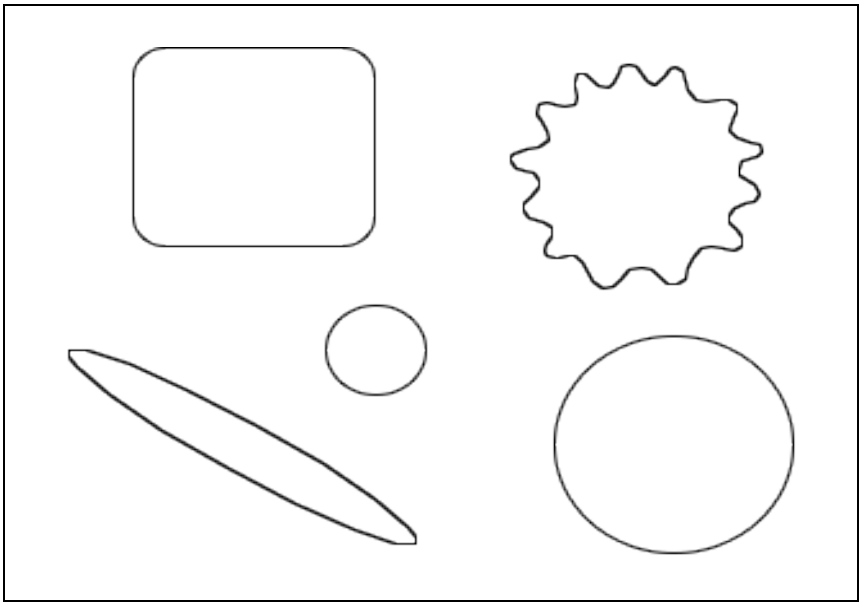
NOTA: En las siguientes actividades se hace énfasis en las características visuales de los giros: Desplazamiento circular y conservación de la distancia al centro. Ello se hace desde una perspectiva global, sin llegar a la precisión matemática propia del razonamiento en el nivel 2

G-1.4 Gira el pez de la lámina, tomando como centro de giro el punto marcado junto a él. Utiliza para ello algún material auxiliar, dale vueltas, parando en diversas posiciones a lo largo del recorrido y pegando piezas iguales en el lugar y con la inclinación correspondientes.

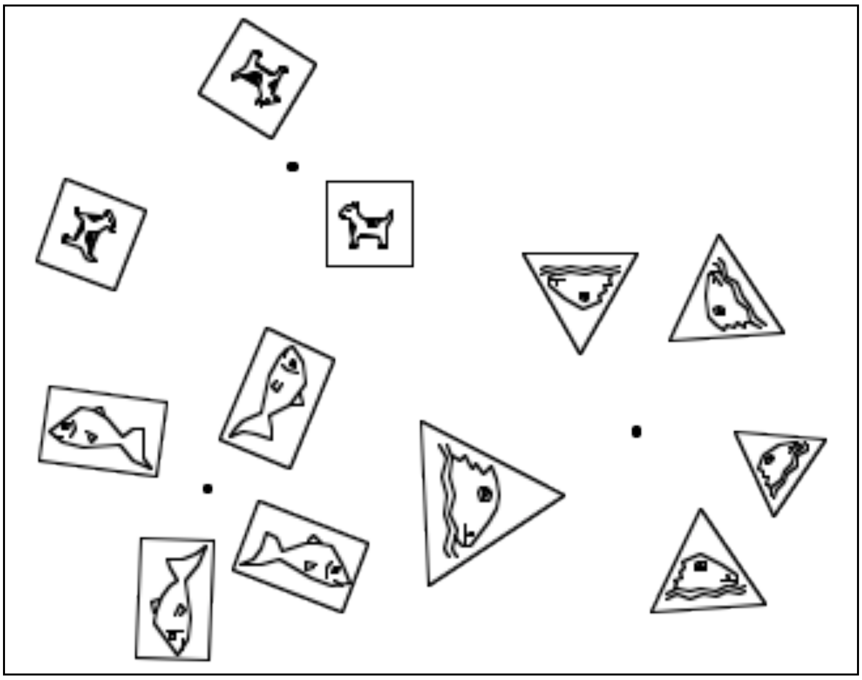
Repite la actividad con las demás figuras de la lámina.

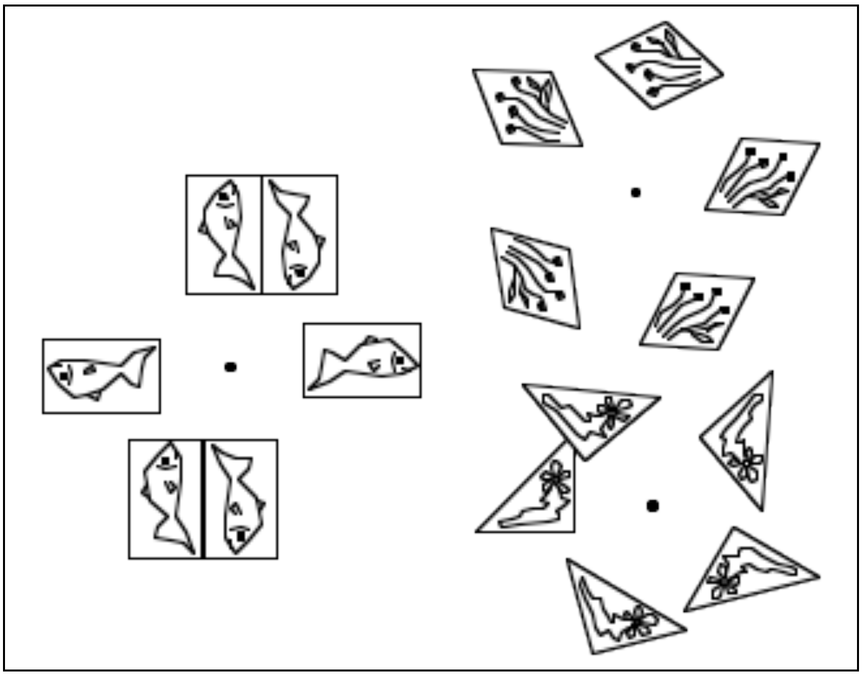


G-1.5 Dí cuáles de estas líneas corresponden a recorridos de giros y cuáles no.

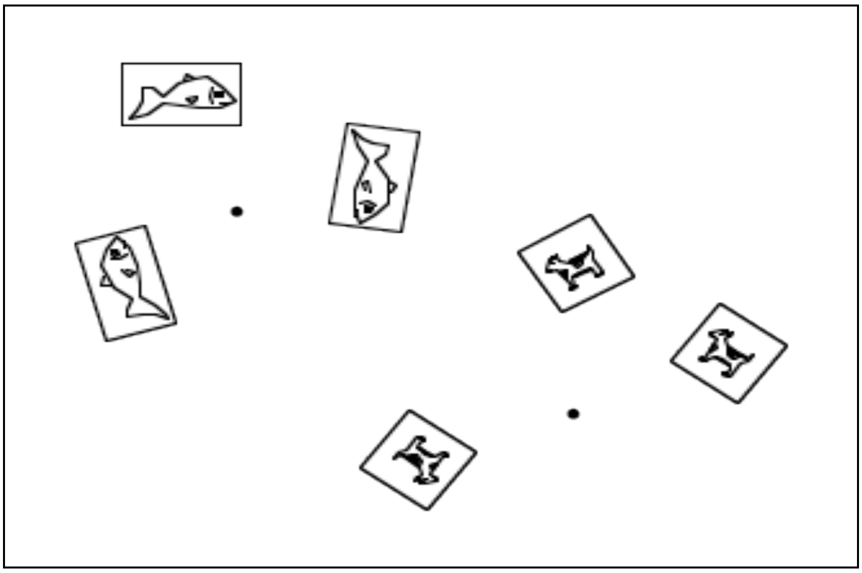


G-1.6 En cada lámina, identifica las figuras que se corresponden mediante un giro con centro en el punto marcado.

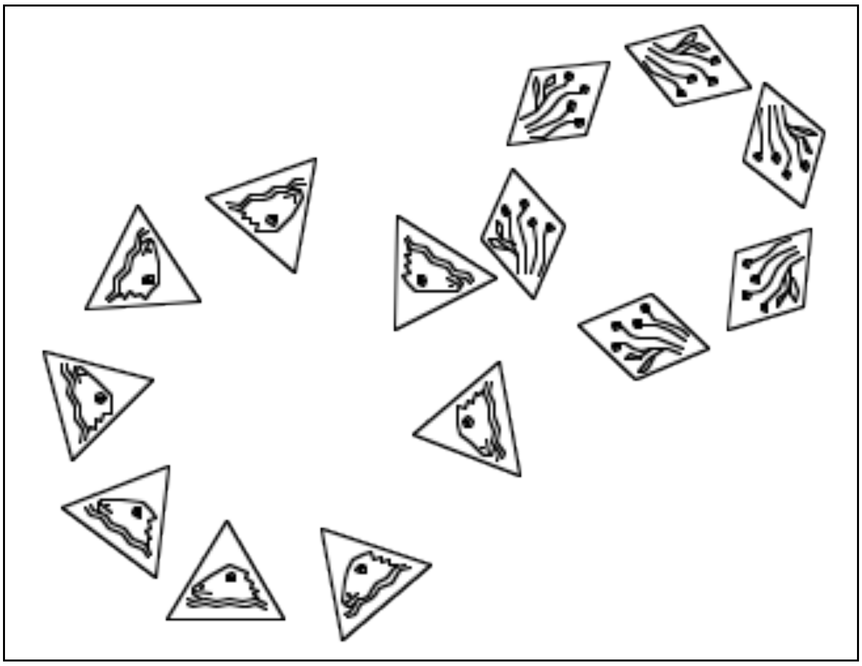




G-1.7 Coge una figura igual a alguna de la lámina y muévela con la mano siguiendo el recorrido completo del giro a lo largo de toda la circunferencia. Pega piezas como ésta en algunos lugares del recorrido. Con algún material auxiliar comprueba si las has colocado correctamente.



G-1.8 Señala aproximadamente dónde se encuentra el centro de giro de cada grupo de figuras. Para eso no utilices ningún material auxiliar. Una vez marcada tu solución, comprueba con algún material.

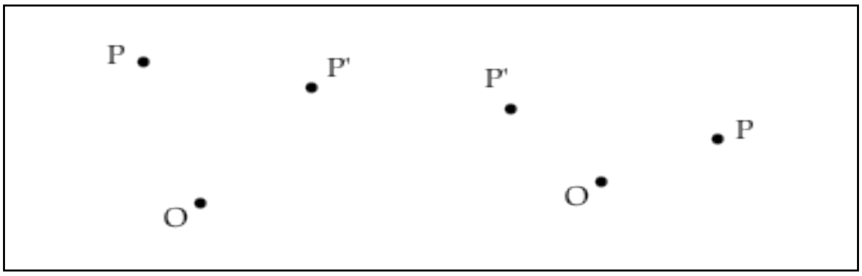


6.2. Actividades del nivel 2

NOTA: El objetivo de este primer grupo de actividades del nivel 2 es afianzar la visión del ángulo que se genera al girar un segmento, y la medida de ese ángulo.

Antes de comenzar la actividad siguiente, el profesor debe proponer algunos ejercicios dirigidos al trazado, la estimación, y la medida de ángulos de diversas amplitudes.

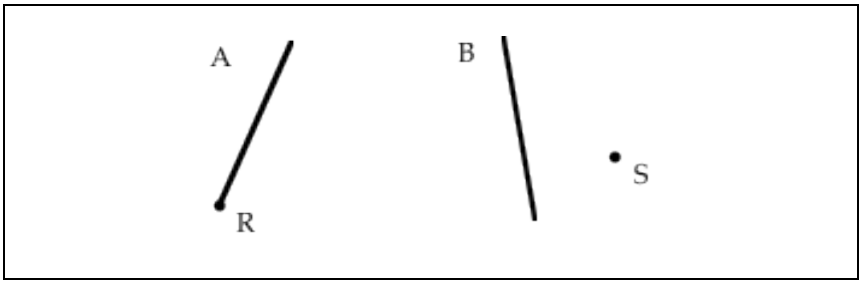
G-2.1 P' es la imagen de P por un giro con centro en O. Marca el ángulo que se forma y mídelo.



G-2.2 Gira el segmento A de la lámina un ángulo de aproximadamente -45°, tomando como centro el punto R. No utilices material de medida. Comprueba luego el resultado con un instrumento de medida.

Repite la actividad con ángulos de +90°, -120°, +30°, -270°, +60°, y -200°.

Repite toda la actividad con el segmento B y centro de giro S.



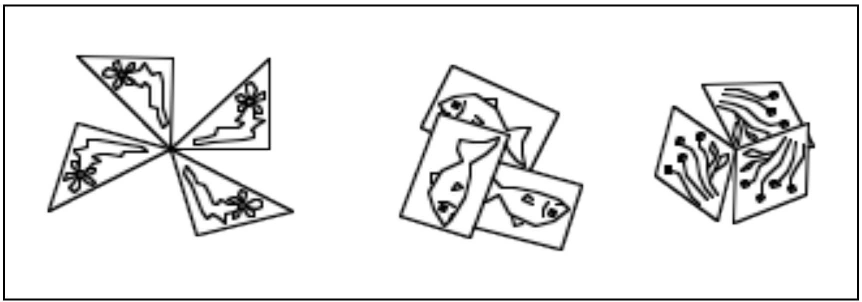
NOTA: Los objetivos de las actividades G-2.3 a G-2.10 son:

- *Que los estudiantes tengan en cuenta de manera explícita y con rigor las características que determinan un giro: Equidistanca al centro e invarianza del ángulo girado por todos los puntos.*
- *Que desarrollen y utilicen procedimientos que les permitan obtener con exactitud la imagen de una figura mediante un giro. En particular, aquéllos que incluyen la medición del ángulo y el trazado de circunferencias con compás o la medida de la distancia al centro.*

En estas primeras actividades de determinación de imágenes por giros, el profesor deberá guiar bastante y ayudar a los estudiantes para que adquieran las destrezas y algoritmos necesarios para determinar y medir ángulos, calcular la imagen de un punto, etc.

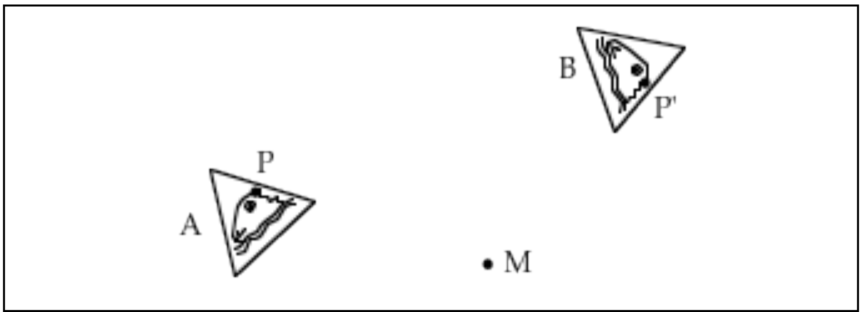
NOTA: En la actividad G-2.3, el profesor debe hacer énfasis en la invarianza del centro de giro, y en que éste es el único punto que permanece invariante por el giro.

G-2.3 Determina la posición exacta del centro de giro en cada grupo de figuras iguales. Explica cómo lo has obtenido.

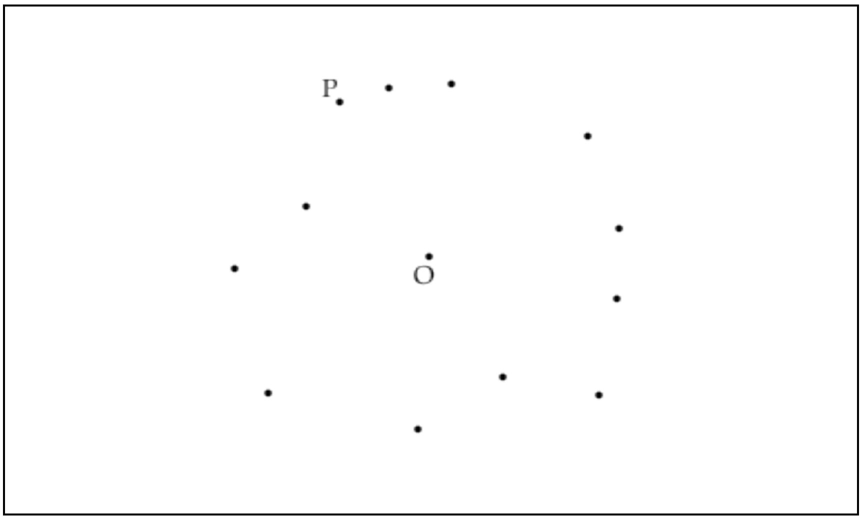


G-2.4 Al aplicarle a A un giro con centro M, hemos obtenido la figura B. La imagen del punto P es P'. Dibuja el arco de circunferencia recorrido por P y los lados del ángulo PMP' (trazando los respectivos radios). Mide ese ángulo (PMP'). Elige dos puntos más de la figura A y haz lo mismo con ellos. ¿Qué sucede con las medidas de los ángulos?

Generaliza lo que acabas de observar: Cuando giramos una figura, el ángulo girado por todos sus puntos ...



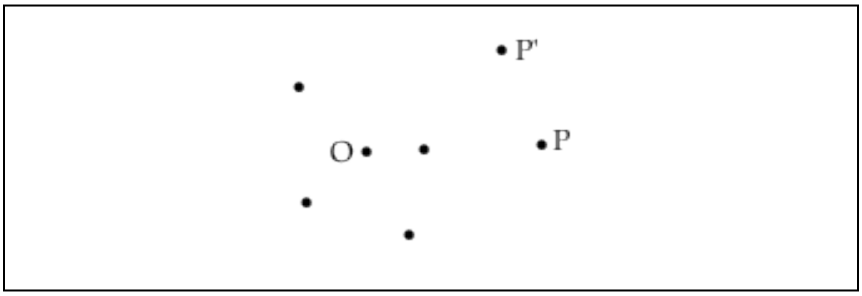
G-2.5 Determina con rigor sin trazar circunferencias (midiendo con una regla la distancia al centro de giro) cuáles de los puntos de la lámina pueden ser imágenes de P cuando este punto va girando con O como centro de giro. Para cada punto imagen, marca y mide el ángulo de giro.



G-2.6 P' es la imagen de P por un giro con centro en O. Mide el ángulo de giro. Escribe ese giro con la nomenclatura estándar G(centro, ángulo). Ejemplo: G(A,30°) indica el giro con centro en el punto A y ángulo de +30°.

Utilizando un disco transparente, calca en él los lados del ángulo anterior (POP') y, sin ningún otro instrumento, halla las imágenes de otros dos puntos de la lámina por ese mismo giro.

Ahora, sin utilizar el disco transparente, obtén las imágenes de los demás puntos de la lámina. Para ello, usa compás o regla y transportador. Explica cómo lo haces.

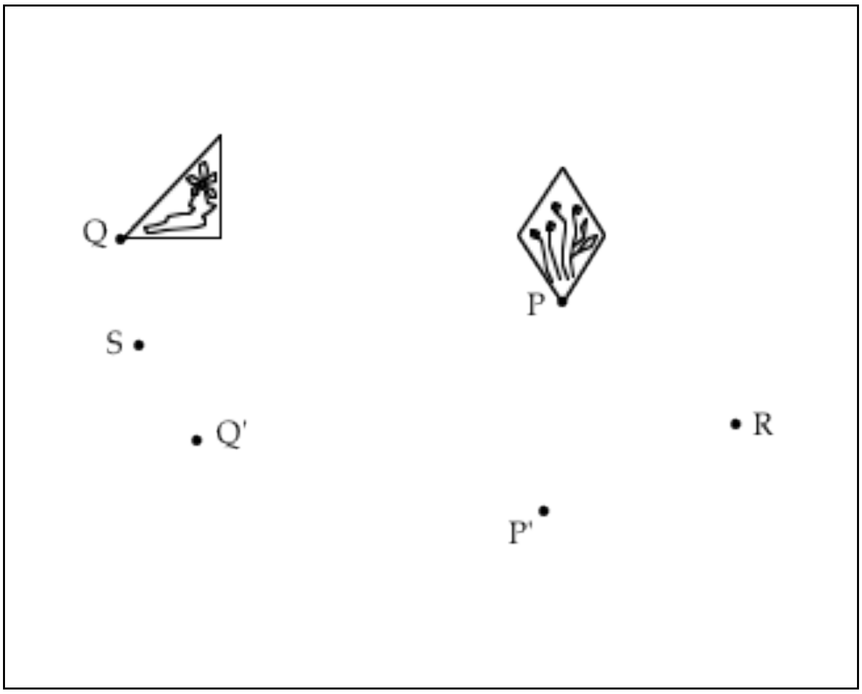


G-2.7 P' es la imagen de P por un giro con centro en R. ¿Puedes colocar la imagen del rombo directamente, sin hacer más cálculos? Si lo has resuelto, comprueba con un disco si es correcta tu solución.

Si te ha salido bien antes la actividad, seguramente es por casualidad. Para no resolverla por tanteo, te proponemos lo siguiente:

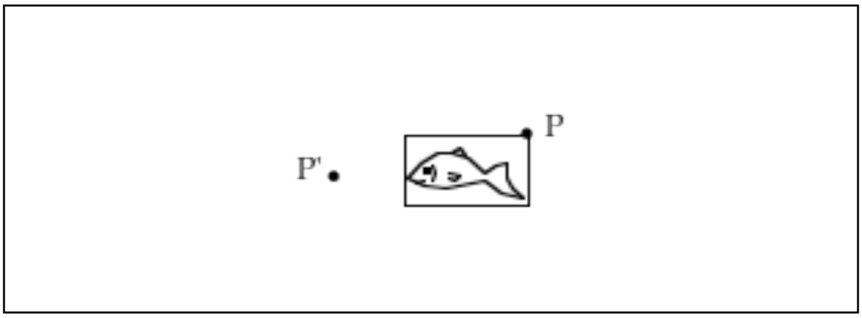
Determina el ángulo de giro (POP'). Halla las imágenes de otros puntos del rombo. Coloca la figura imagen sobre los puntos que has calculado.

Utiliza el procedimiento que te hemos indicado antes para colocar la imagen del triángulo por un giro con centro de giro en S, sabiendo que Q' es la imagen de Q.



G-2.8 P' es la imagen de P por un giro con centro en el ojo del pez. ¿Puedes colocar la imagen del rectángulo por ese giro, pero sin obtener la imagen de más puntos? Comprueba con un disco si es correcta tu solución.

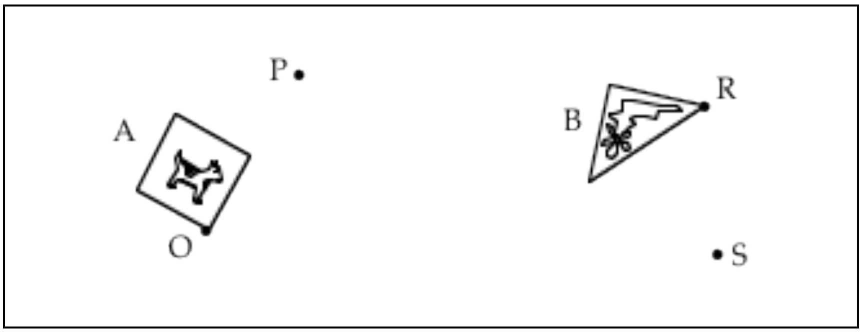
Al contrario que en la actividad anterior, ahora sí que está determinada la imagen del rectángulo. ¿Por qué en este caso no hace falta hallar la imagen de otro punto, pero en la actividad anterior sí hacía falta?



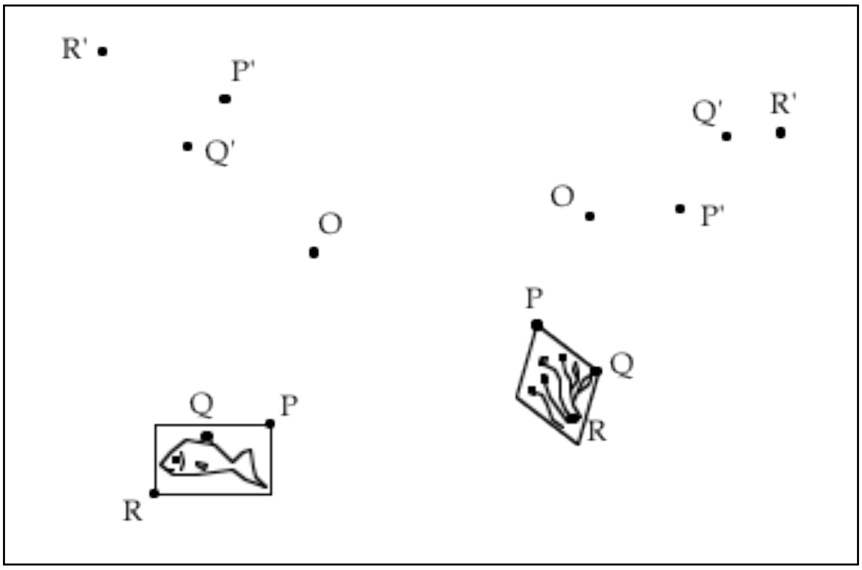
G-2.9 Obtén la imagen de la figura A por el giro G(O,50°). Para ello, halla la imagen de los puntos que sea necesario utilizando sólo compás, regla y transportador. ¿Puedes determinar la posición de la figura imagen usando menos puntos? Repite la actividad con el giro G(P,-120°).

Repite la actividad con la figura B y los giros G(R,-90°) y G(S,+70°).

Piensa y justifica cuál es la cantidad mínima de puntos imagen que te ha hecho falta obtener en cada caso: Cuando el centro de giro es exterior a la figura ...... Cuando el centro se encuentra sobre la figura ......



G-2.10 ¿Pueden ser los puntos P', Q' y R' las imágenes de P, Q y R, respectivamente, por medio de un mismo giro de centro O? No hay que obtener la figura imagen para resolver la actividad.

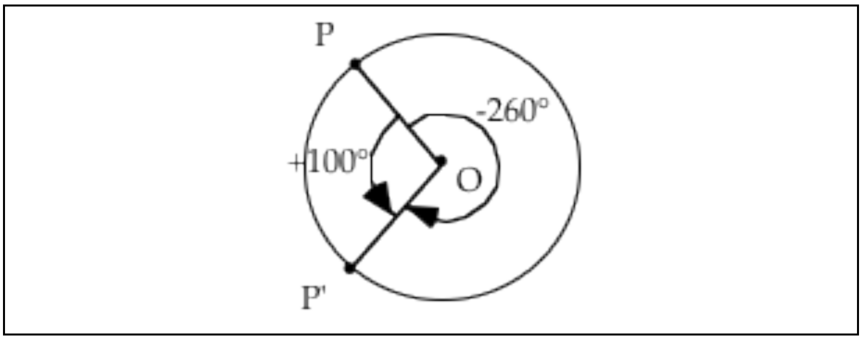


NOTA: Los objetivos de las actividades G-2.11 a G-2.14 son:

- *Comprender el concepto de giros equivalentes. Aprender a determinar los giros equivalentes y la relación entre sus ángulos.*
- *Estudiar el caso particular de los giros de 180°. Realizar giros de 180° usando sólo una regla.*

NOTA: En la siguiente actividad, el profesor debe explicar con más detalle qué significa que dos movimientos sean equivalentes, incluyendo algunos ejemplos concretos.

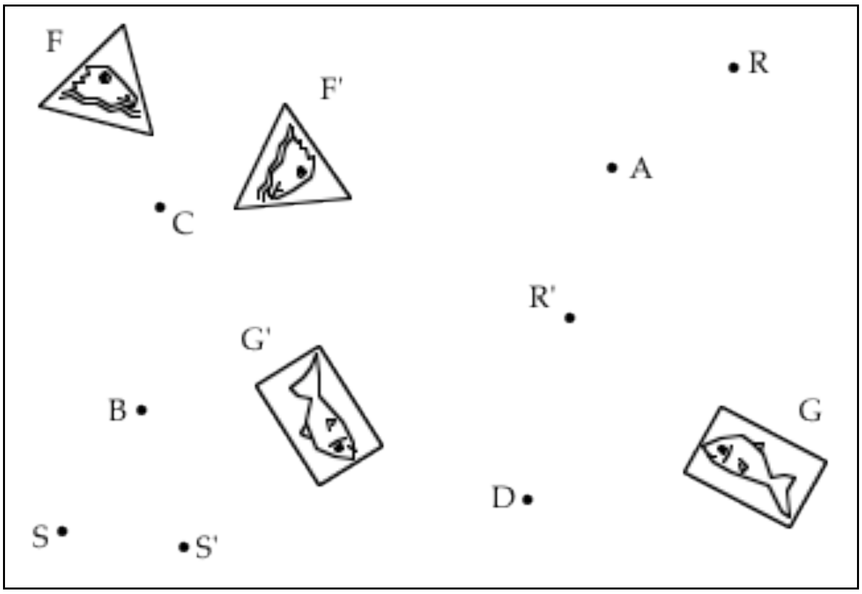
G-2.11 Hay un giro con centro en O que mueve P hasta P'. En la figura de la lámina siguiente hemos marcado dos recorridos desde P hasta P'. Uno tiene el ángulo de 100° y el otro tiene el ángulo de 260°, pero el movimiento del punto P es, en cada caso, en sentido contrario al otro. Para diferenciar estos dos giros, por convenio, siempre se consideran positivos los ángulos con sentido contrario a las agujas del reloj, y negativos los ángulos con el sentido de las agujas del reloj. Luego un giro es de +100° y el otro es de -260°.



Traza tú los dos posibles recorridos de los giros de los puntos R (con centro en A) y S (con centro en B) de la lámina inferior. Escribe los ángulos de giro orientados (con signo) correspondientes. Haz lo mismo con las figuras F y G, que han girado alrededor de los centros C y D respectivamente. Realiza manualmente el desplazamiento de las figuras en cada giro.

Los dos giros de cada caso son equivalentes porque producen el mismo resultado, es decir mueven cada punto hasta la misma posición, aunque los recorridos sean diferentes.

¿Qué relación existe entre los ángulos de dos giros equivalentes? Identifica los giros, de ángulo menor que 360°, equivalentes a los siguientes: G(A,-90°), G(B,-100°), G(C,+70°), G(D,+180°).

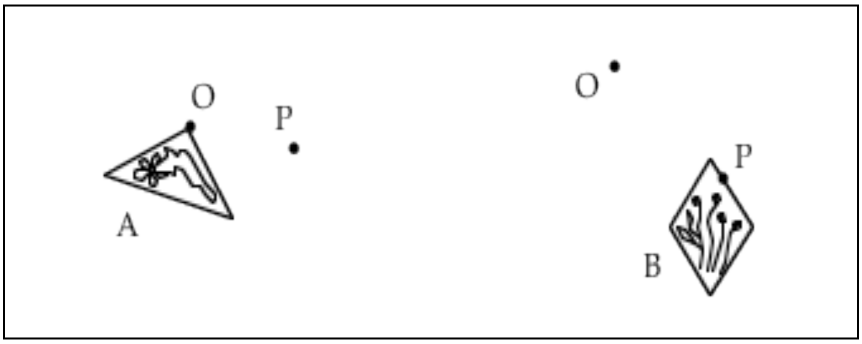


G-2.12 [*Utilizar la misma lámina de la actividad anterior*] En la lámina anterior, ¿qué quiere decir que el punto R gire +575° con centro en A? ¿Y -505°? Haz el recorrido del punto con la mano. ¿Qué valor tendrían los ángulos de giro si el punto da una vuelta completa más en el mismo sentido?

Da tres giros equivalentes a cada uno de los siguientes: G(A,-420°), G(B,+45°). Da también dos giros, de centro en C y ángulo mayor que +360° o menor que -360°, que transformen F en F'. Desplaza la figura con la mano, dando en cada caso las vueltas que corresponda.

Como has visto, hay muchos giros equivalentes, o sea, que producen el mismo resultado. Por comodidad se tienen en cuenta sólo los menores de 360° en valor absoluto, o sea, los comprendidos entre -360° y +360°.

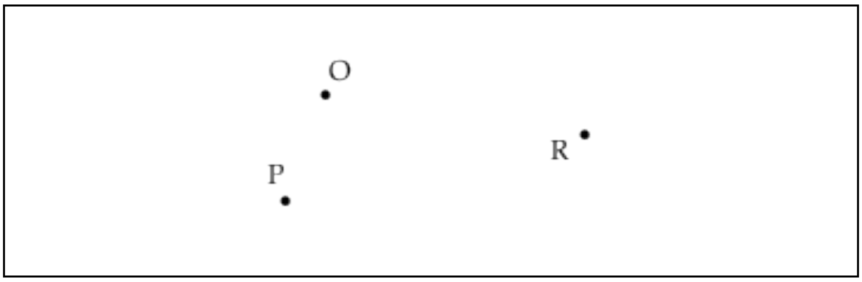
G-2.13 Aplícale a las figuras A y B los giros G(O,180°), G(O,-180°) y G(M,-180°). Fíjate en la posición de la figura imagen, respecto la posición de la figura original: Los lados son ......

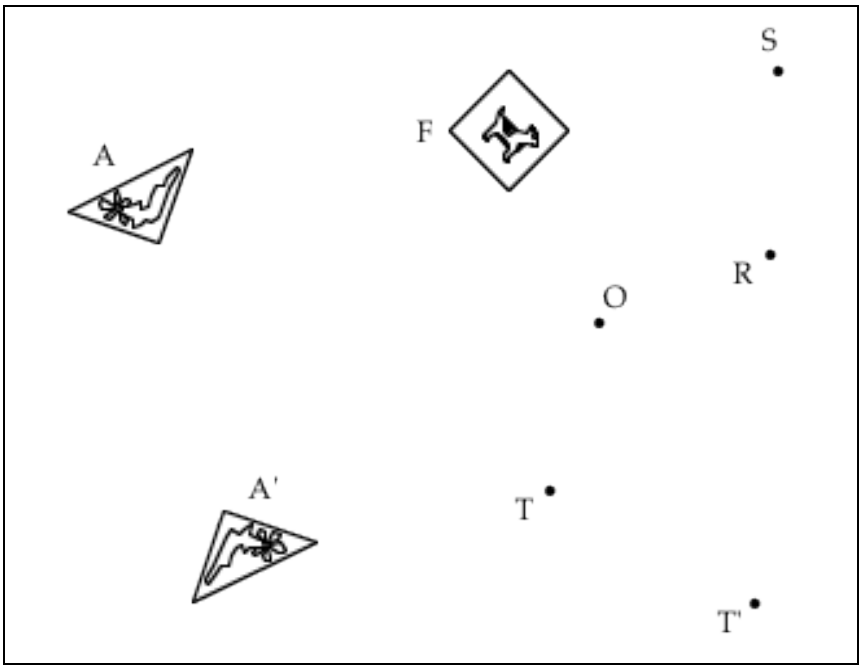


G-2.14 Aplícale a los puntos P y R de la primera lámina el giro G(O,180°). Oserva que los puntos P, O y P' (imagen de P) están ...... y que los puntos R, O y R' (imagen de R) también están ......

Aplicando esta propiedad en la segunda lámina, calcula las imágenes de los puntos R y S y de la figura F por el giro G(O,-180°) utilizando sólo una regla graduada.

Sirviéndote sólo de una regla graduada, halla también el centro del giro de 180° que transforma la figura A en A' y del giro que transforma el punto T en T'.





NOTA: En las dos actividades siguientes se estudia la composición de giros del mismo centro y la conmutatividad.

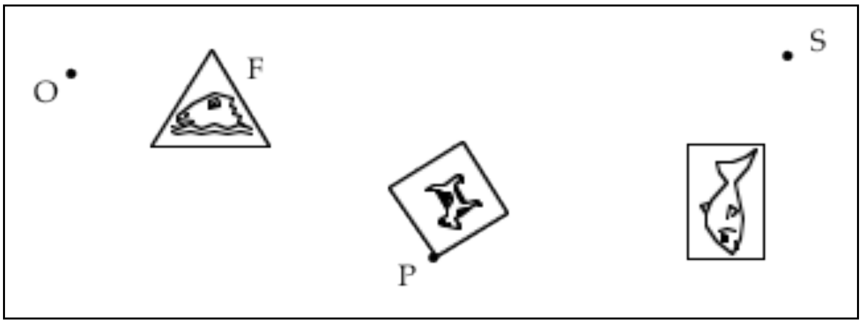
Hay una gran diferencia en la dificultad y en los requisitos cognitivos de las composiciones de giros del mismo centro o de centros diferentes. En el segundo caso el movimiento resultante puede ser de dos tipos. Además, cuando es un giro, no hay ninguna forma elemental de determinar el centro de giro, por lo que, incluso verificar cuál es el ángulo de giro resulta demasiado difícil de entender para los estudiantes del segundo nivel. Por este motivo, el estudio de la composición de giros se completa en el bloque de actividades del nivel 3 de Van Hiele.

Si los estudiantes ya han realizado actividades de composición de traslaciones, el profesor debe sugerirles usar esos conocimientos para resolver las siguientes actividades, de manera que los estudiantes establezcan conexiones entre ambas isometrías.

G-2.15 Aplícale a la figura F el giro G(O,+45°). A la figura imagen, aplícale el giro G(O,+100°). Identifica un movimiento simple que permita pasar directamente desde la figura F hasta la última imagen obtenida, e indica las características de dicho movimiento.

Lo que has hecho ha sido aplicar la <u>composición</u> o <u>producto</u> del giro G(O,+45°) con el giro G(O,+100°) a la figura F. Para indicar esta composición escribiremos **G(O,+100°)°G(O,+45°)**. Fíjate que se escribe en el orden inverso al usual: El primer giro que actúa, G(O,+45°), lo colocamos a la derecha del otro.

Repite la actividad con las otras figuras de la lámina y las composiciones: G(P,-30°)°G(P,-60°); G(S, 110°)°G(S,-50°). Generaliza el resultado que has obtenido: "Al componer dos giros del mismo centro, el movimiento resultante es ......"



G-2.16 [*Utilizar la misma lámina de la actividad anterior*] Aplícale a una figura de la lámina la composición de giros G(O,-180°)°G(O,-45°)°G(O,+45°), pero simplifica el trabajo aplicando la propiedad que has descubierto en la actividad anterior. Después, comprueba que es correcto lo que has hecho, realizando la composición paso a paso.

Amplía la propiedad que ya conocías: Al componer varios giros del mismo centro, el resultado es ......

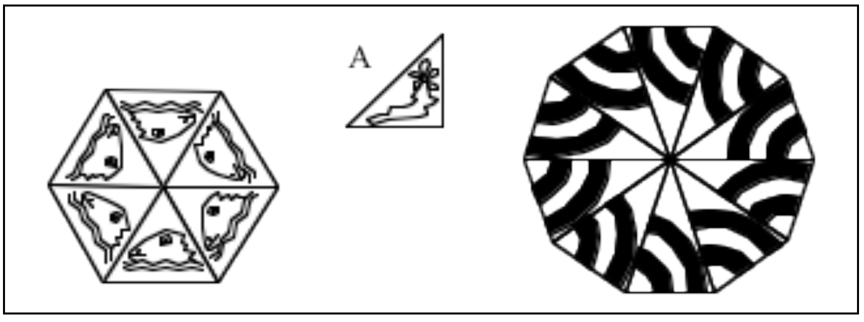
G-2.17 [*Utilizar la misma lámina de la actividad anterior*] Haz varias composiciones utilizando las mismas figuras y giros de la actividad anterior, pero cambiando el orden de los giros. Compara los resultados obtenidos y generaliza la propiedad: "La composición de giros del mismo centro es <u>conmutativa</u>: G(O,a°)°G(O,b°) = G(O,b°)°G(O,a°)".

NOTA: En la siguiente actividad se toma contacto, por primera vez, con los rosetones. Además del aspecto artístico, se trabaja en la relación entre el ángulo de giro y la cantidad de celdas del rosetón. Se utilizan rosetones generados sólo por giros.

G-2.18 Identifica el centro y el ángulo de giro que permite pasar de una celda a la siguiente en cada caso. Halla también el ángulo que permite pasar de una celda a otra no contigua.

Da el valor del ángulo de un giro que permita generar un rosetón a partir de la pieza A e indica, además, la cantidad de celdas que tendrá el rosetón.

Si queremos generar un rosetón a partir de un giro, ¿qué ángulo debe tener el giro para que el rosetón esté formado por 10 celdas? Generaliza los resultados de esta actividad referentes a la relación entre el número de celdas del rosetón y el valor del ángulo del giro que lo genera.

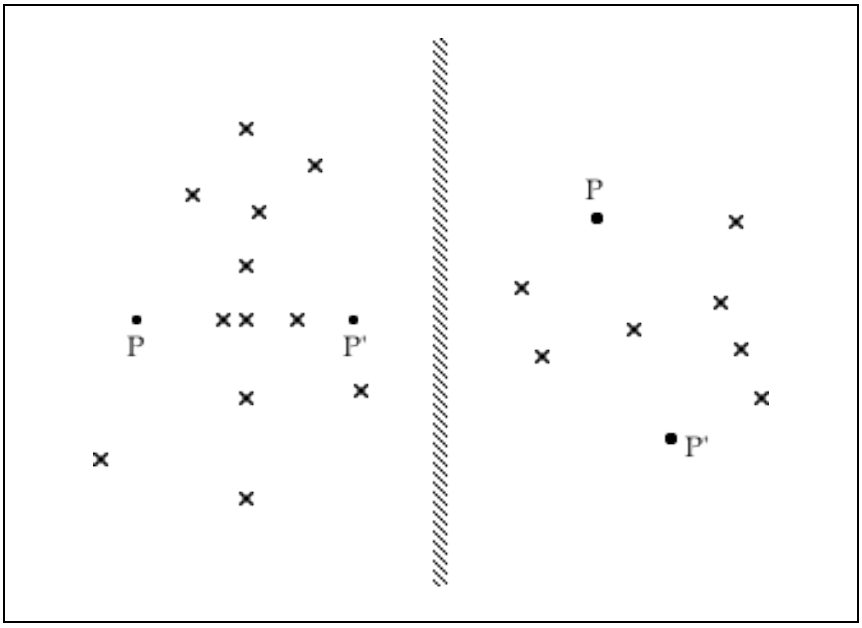


NOTA: Las actividades siguientes inician el trabajo, que se completará cuando los estudiantes hayan alcanzado el nivel 3, de cálculo el *centro de un giro mediante corte de mediatrices. Aunque cualquier estudiante de los últimos cursos de Primaria o de Secundaria puede memorizar y aplicar fácilmente este procedimiento para encontrar el centro de un giro, pretendemos que, además, entiendan correctamente por qué este algoritmo funciona, para lo cual se necesita cierta capacidad de deducción lógica y de coordinar varias propiedades. Esta capacidad no es propia del nivel 2 de razonamiento, sino del nivel 3; por eso la segunda parte del trabajo se realiza en el bloque de actividades del tercer nivel y aquí nos limitamos al objetivo de que los estudiantes descubran que la mediatriz de PP' es el lugar geométrico de los centros de los giros que mueven el punto P hasta el P'.*

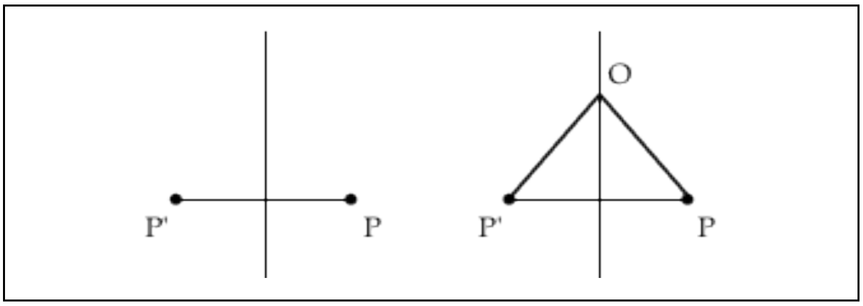
G-2.19 Indica qué puntos pueden ser centros de giros que transformen P en P'. Busca otros puntos, no dibujados en la lámina, que también puedan ser centros de giro. ¿Hay más posibilidades?

Determina el ángulo de giro para algunos de los centros de giro que has encontrado. ¿Cuál es el mayor/menor? ¿Qué giros son positivos/negativos?

Si se quiere realizar un giro con un ángulo pequeño/grande, ¿dónde estará el centro? Y si se quiere realizar un giro positivo/negativo, ¿dónde estará el centro?

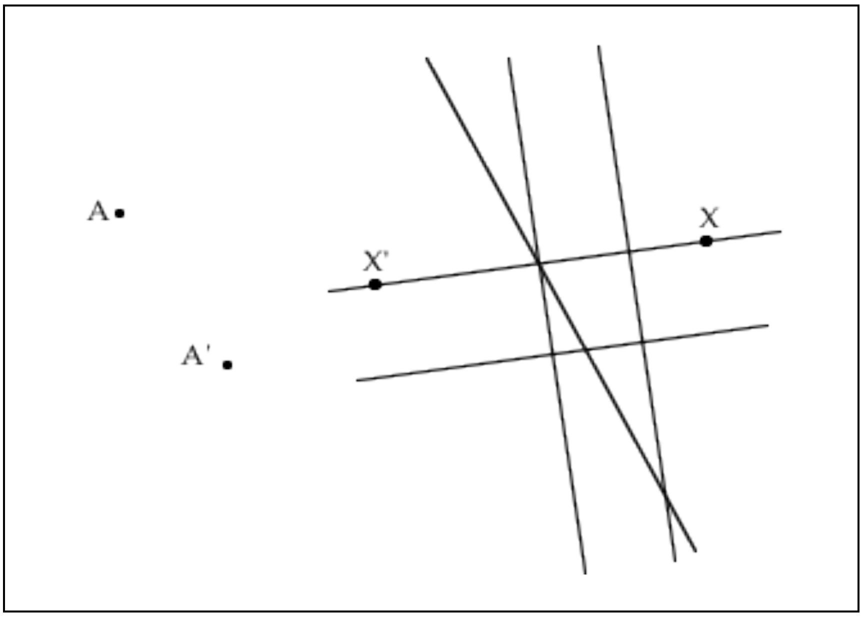


G-2.20 Busca, en la figura de la izquierda, el centro de un giro de -80° que transforme P en P'. Si no se te ocurre otro procedimiento mejor, prueba por tanteo y después fíjate en la figura de la derecha: ¿Qué tipo de triángulo es POP'? ¿Cuánto miden sus ángulos P y P'?



G-2.21 Da centros de giros que lleven el punto A hasta el A'.

Justifica cuál o cuáles de las rectas de la lámina contienen los centros de los giros que transforman X en X'.

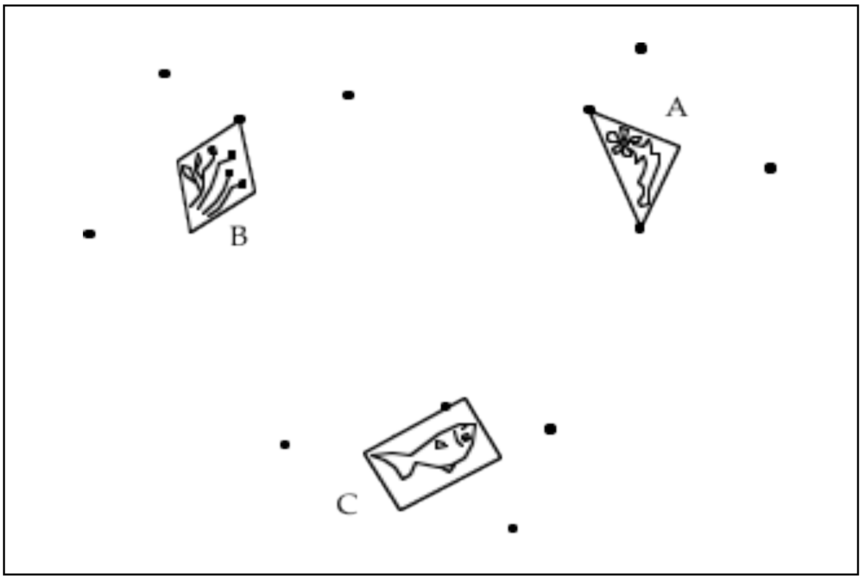


NOTA: Conviene recordar o definir qué es la mediatriz de un segmento. Una vez obtenida la propiedad de que la mediatriz es la recta que contiene los centros de giro, es conveniente que el profesor recuerde el *procedimiento para trazar la mediatriz con compás. Si los alumnos tienen problemas con el procedimiento estándar, conviene sustituirlo por otro más rudimentaria, por ejemplo, con regla y escuadra.*

En las siguientes actividades se analiza de qué manera influyen la posición del centro del giro y la amplitud del ángulo en la posición de una figura después de haber sido girada. La principal conclusión es que las imágenes de una figura por giros del mismo ángulo están relacionadas mediante traslaciones.

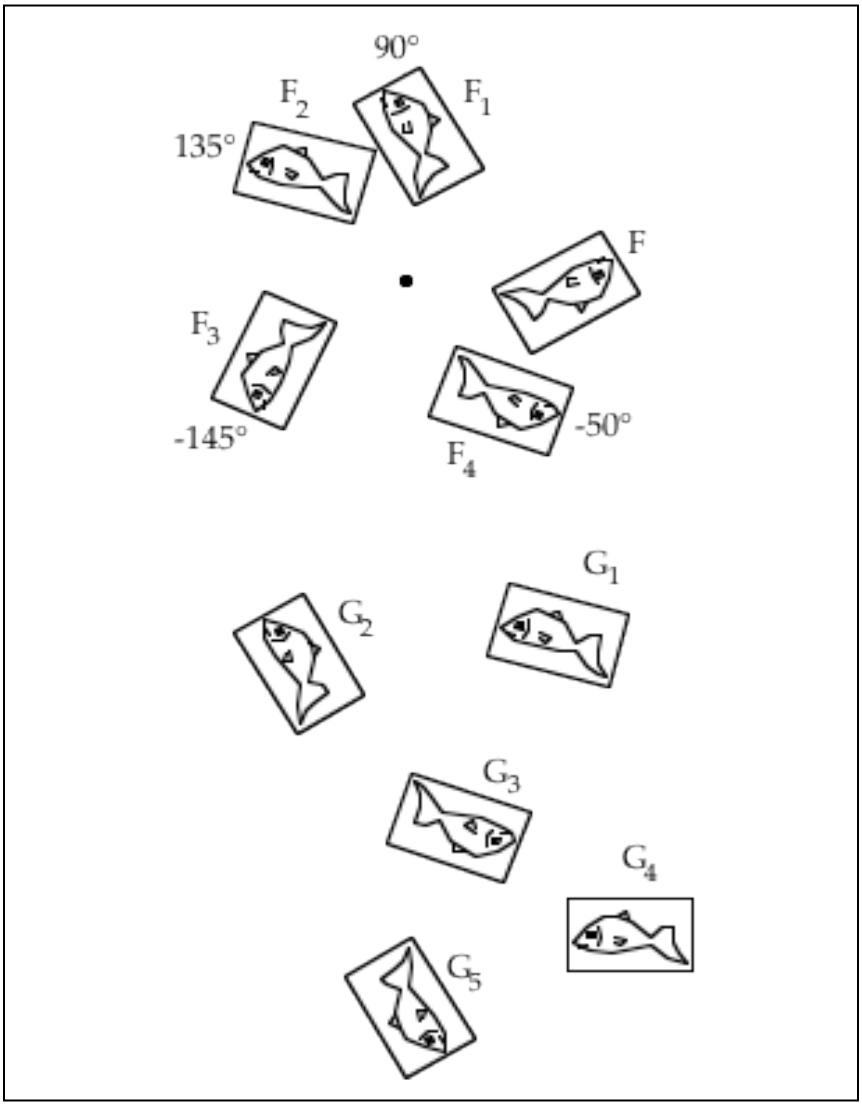
G-2.22 Aplica a la figura A giros de +45° con centro en los 4 puntos marcados junto a ella o sobre ella en la lámina. Observa lo que sucede con las imágenes.

Repite la actividad en la figura B con giros de -60°, y en la figura C con giros de -180°. Generaliza el resultado: "Cuando a una figura se le aplican varios giros del mismo ángulo, aunque el centro sea distinto, la inclinación ...... De una imagen a otra se puede pasar mediante ......"



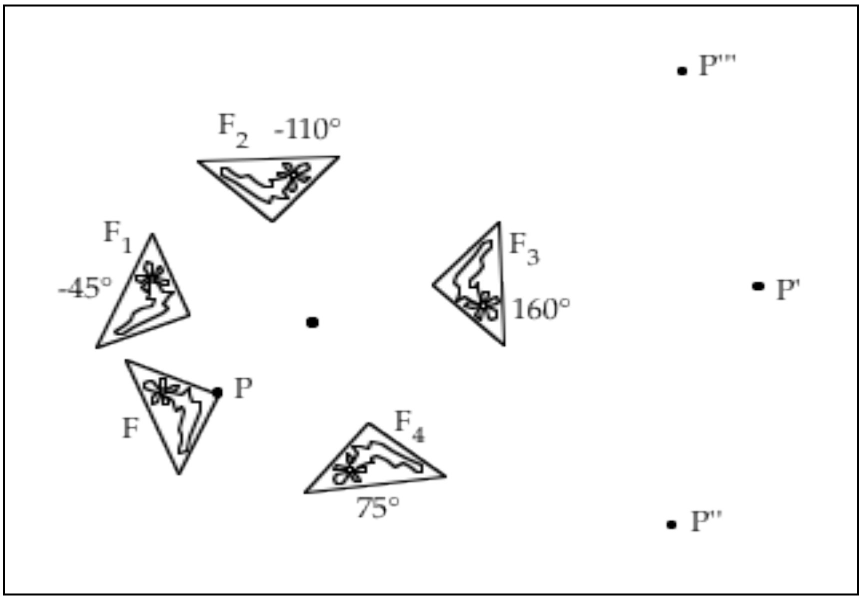
G-2.23 A la figura F se le han aplicado distintos giros, todos con centro en el punto marcado en la lámina, y se han obtenido las imágenes F_1, F_2, F_3 y F_4. El ángulo de cada giro está indicado junto a la imagen correspondiente.

A la figura F se le han aplicado otros giros, unos con los mismos ángulos que los giros anteriores y otros no. Las imágenes por estos giros son las figuras G_1, G_2, G_3, G_4 y G_5. Sólo observando las figuras de la lámina, dí si el ángulo del giro que pasa de F a G_1 es 90°, 135°, -145°, -50° ó ninguno de esos. Contesta de nuevo a esta pregunta, para G_2, G_3, G_4 y G_5. Justifica tus respuestas.



G-2.24 A la figura F se le han aplicado distintos giros, todos con centro en el punto marcado en la lámina, y se han obtenido las imágenes F_1, F_2, F_3 y F_4. El ángulo de cada giro está indicado junto a la imagen correspondiente. Halla la imagen de la figura F mediante un giro de -110°, sabiendo que el punto P de F se desplaza hasta P'.

Repite la actividad en los siguientes casos:
El giro es de -45° y P se desplaza hasta P''.
El giro es de -75° y P se desplaza hasta P'''.
El giro es de 160° y el centro de la flor se desplaza hasta P'.

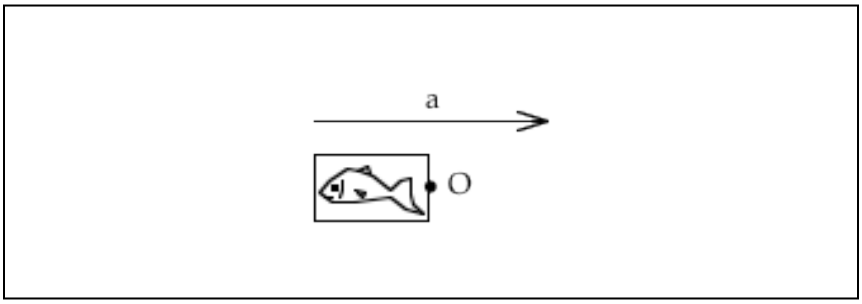


NOTA: Las últimas actividades de giros del nivel 2 están dedicadas a la construcción de frisos a partir de sistemas generadores formados por giros y traslaciones. Con ellas se ayuda a relacionar e integrar ambas isometrías. Por otra parte, el análisis de los giros que permiten pasar de una celda determinada a otras celdas del friso permite profundizar en el conocimiento de los giros y sus composiciones.

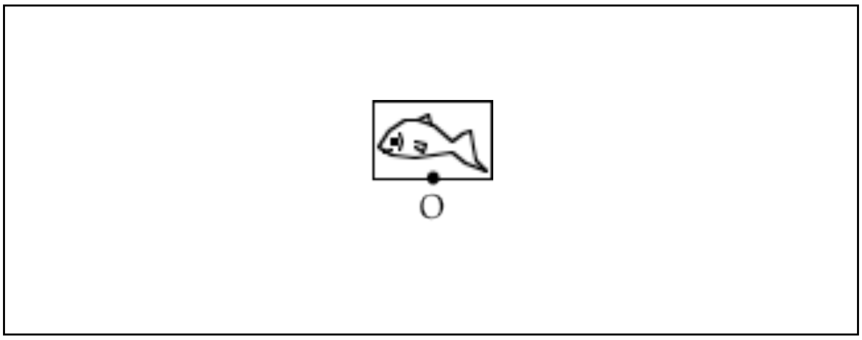
G-2.25 Construye un friso a partir del rectángulo de la lámina, tomando como sistema generador {G(O,180°), T_a}. Para ello, aplica esos dos movimientos y T_{-a} a la celda inicial y a cada una de las nuevas celdas que vas llenando.

Una vez construido el friso, fija una celda y explica dónde y cómo se situará la imagen de esa celda al aplicarle el giro G(O,180°).

Fija una celda y señala las celdas desde las cuales alguno de los movimientos generadores permite llegar hasta ella directamente.



G-2.26 Determina el vector $\vec{a}$ para que se pueda construir un friso a partir del rectángulo de la figura, tomando como sistema generador G(O,180°) y T_a.



6.3. Actividades del nivel 3

NOTA: La primera actividad del nivel 3 está dirigida a enseñar de manera comprensiva el método de determinación del centro de giro por medio de corte de mediatrices. Con ella se completa el trabajo iniciado en las actividades del segundo nivel de razonamiento. Es importante que los estudiantes comprendan bien este procedimiento, pues será la base técnica del trabajo que realizarán en muchas actividades posteriores.

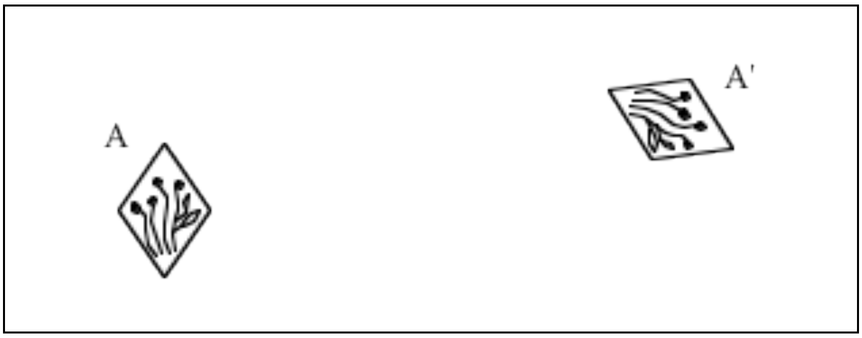
G-3.1 Halla el centro y el ángulo del giro que transforma la figura A en A'. Para encontrar el centro de giro:

- Primero marca un punto P de A y su imagen P'. ¿Qué puntos que pueden servir como centros de giros que transformen P en P' (recuerda lo que ya sabes sobre la mediatriz)?

- Después haz lo mismo con otros puntos de la figura A y sus imágenes en la figura A'.

¿Qué punto es el centro de giro? ¿Por qué se cortan todas las mediatrices en ese punto? ¿Puede haber algún giro para el cual no se corten todas las mediatrices en el mismo punto?

¿Cuántas mediatrices es imprescindible trazar para determinar el centro de un giro? Es decir, ¿cuál es la cantidad mínima de mediatrices que permite obtener el centro de un giro?



NOTA: Las dos actividades siguientes empiezan a preparar a los estudiantes para demostrar el Teorema de Clasificación de las isometrías del plano (ver el capítulo 2, teorema 25), mediante el descubrimiento y justificación de los dos resultados siguientes:

- Existencia siempre de giro o traslación entre dos figuras congruentes con la misma orientación de ángulos (teorema 23).

- Entre dos figuras congruentes con distinta orientación de ángulos, o hay una simetría o no hay ninguna isometría simple (parte del teorema 24,

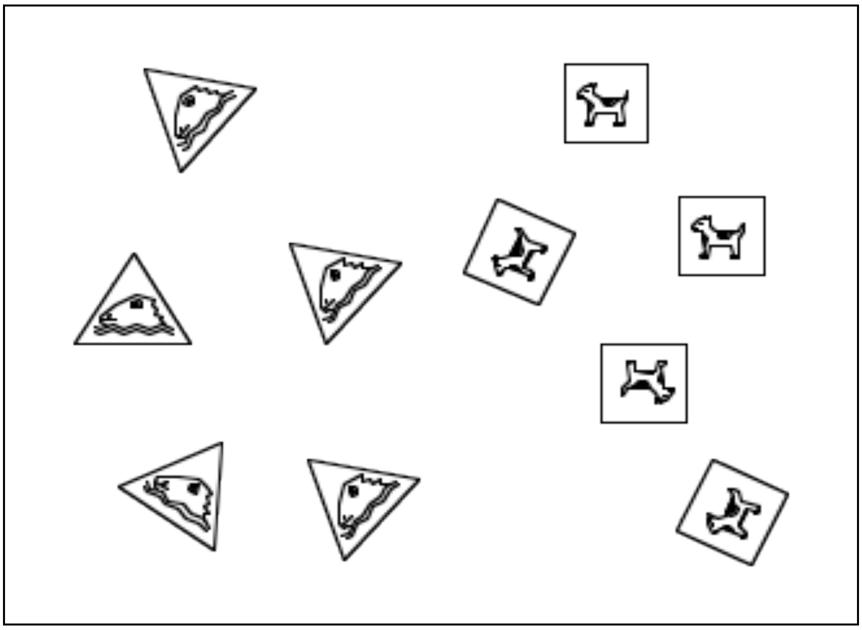
pues no se considera la simetría en deslizamiento como isometría independiente).

En la actividad G-3.2, probablemente el profesor tendrá que explicar qué significa que dos figuras congruentes tengan los ángulos con la misma orientación.

G-3.2 Marca con las letras A y A' dos figuras de la lámina que tengan el mismo dibujo. Averigua si existe algún giro que permita pasar de la figura A a la A', determinando su centro y su ángulo en caso afirmativo. Haz lo mismo con otros pares de figuras.

¿Hay en la lámina pares de figuras iguales tales que no se pueda pasar de una a la otra mediante un giro? ¿Qué movimiento permite pasar de una figura a la otra?

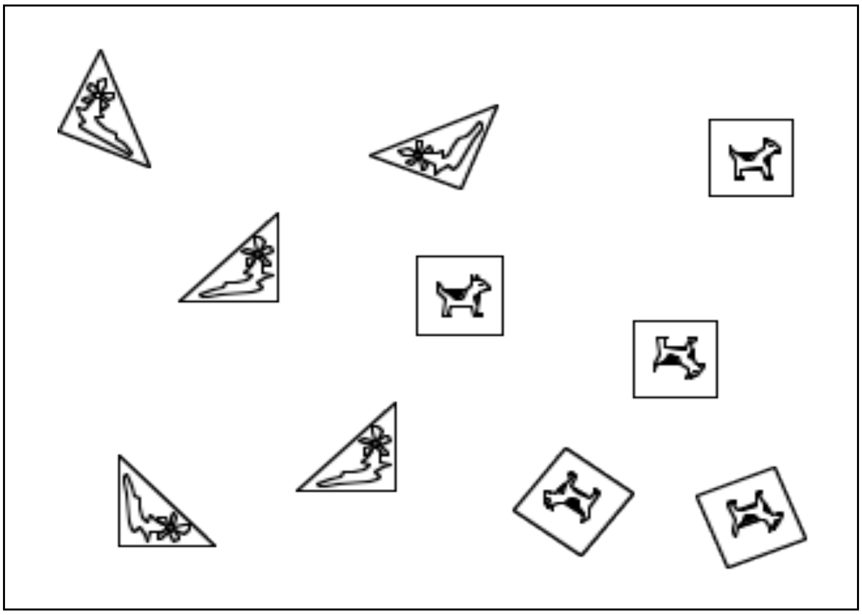
Generaliza el resultado anterior: "Dadas dos figuras congruentes, con la misma orientación de ángulos, ..."



G-3.3 Determina cuándo hay una isometría simple (traslación, giro o simetría) que pasa de una figura a otra igual que ella. Comprueba cada caso positivo determinando por completo la isometría correspondiente (vector en las traslaciones, centro y ángulo en los giros, eje en las simetrías).

Pega en una hoja varios pares de piezas congruentes y repite la actividad.

Generaliza el resultado anterior: "Dadas dos figuras congruentes, de la misma orientación de ángulos, siempre existe entre ellas ...... o ...... Dadas dos figuras congruentes, con distinta orientación de ángulos, o existe entre ellas ...... o no hay ninguna isometría simple."



NOTA: En las actividades G-3.4 a G-3.8 se estudia la composición de giros de distinto centro, pues ahora los estudiantes ya deben disponer de las habilidades mecánicas y de razonamiento necesarias para poder resolver y comprender estas composiciones.

G-3.4 Aplícale a la figura F la composición G(P,-40°)°G(Q,125°). Llama F' a la primera imagen de F y F'' a la segunda imagen por esta composición.

Sólo con mirar las figuras F y F'', inicial y final de este movimiento, ya puedes darte cuenta de qué tipo de isometría que permite pasar directamente de una a otra. Comprueba que, efectivamente existe tal isometría y determínala por completo.

El valor del ángulo de giro también se podría haber calculado sin dibujar nada: Ya has visto en una actividad anterior (G-2.22) que la variación de inclinación por un giro es la de su ángulo. Según esto, al girar F por G(Q,125°), la imagen F' tiene una inclinación de 125°

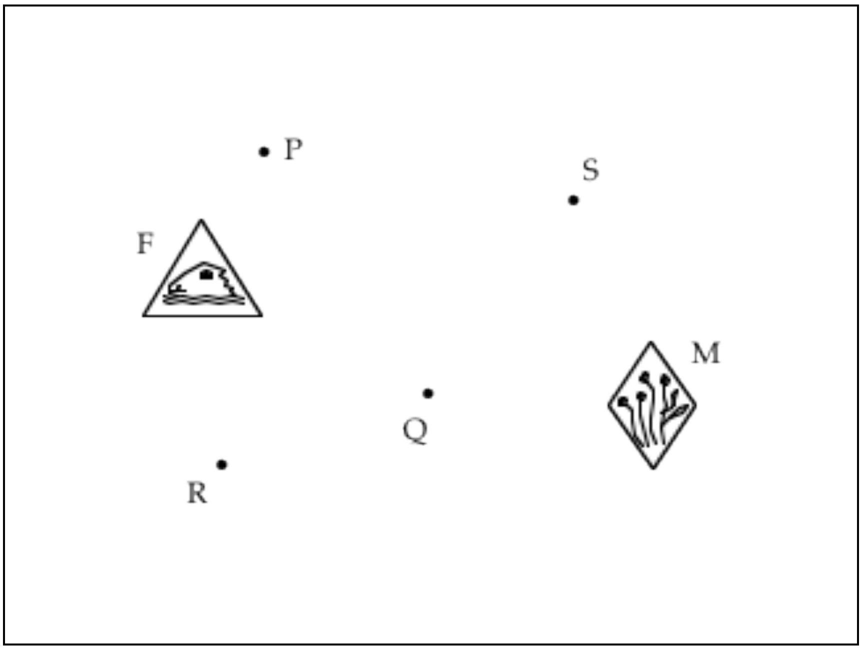
respecto de F, y al girar F' por G(P,-40°) se obtiene la figura F'' con una inclinación de -40° respecto de F'. Por tanto, F'' está girada un ángulo de 125° + (-40°) = 85° respecto F. Esto significa que el giro resultante de la composición G(P,-40°)°G(Q,125°) tiene un ángulo de 85°. Esquemáticamente lo podemos indicar así:

F ---> F' (a 125° respecto de F) y

F' ---> F'' (a -40° respecto de F'). Por tanto,

F -----------> F'' (a 85° respecto de F).

Repite la actividad aplicándole a la figura M la composición G(R,-100°)°G(Q,-170°). Repite la actividad, aplicándole a la figura F la composición G(R,90°)°G(Q,60°)°G(S,30°). Antes de resolverla, dí cuál es el ángulo del giro resultante.



G-3.5 [*Utilizar la misma lámina de la actividad anterior*] Aplícale a la figura F la composición G(P,-70°)°G(Q,70°). Pero, antes de realizarla, dí lo que se puede conocer del ángulo del giro resultante.

Repite la actividad con la figura M y la composición G(Q,125°)°G(S,235°).

¿Qué significa que la suma de los ángulos sea 0°? ¿Y que la suma sea 360°? ¿Qué movimiento permite pasar directamente de F a la imagen final F''? ¿Y de M a M''?

¿Qué isometría crees que equivale a la composición $G(R,80^\circ)\circ G(P,160^\circ)\circ G(S,120^\circ)$? Aplícale esta composición a la figura M y comprueba tu respuesta.

G-3.6 Repite las composiciones de las actividades G-3.4 y G-3.5, pero cambiando el orden de los giros. ¿Qué semejanzas y diferencias hay entre cada par de resultados? ¿Se obtienen giros con el mismo centro? ¿Y con el mismo ángulo? ¿Es conmutativa la composición de giros de distinto centro?

G-3.7 Generaliza los resultados de las actividades anteriores: ¿Qué movimiento es el resultante de la composición de giros de distinto centro? ¿Por qué se obtiene unas veces un giro y otras una traslación? ¿Qué sucede si los giros que se componen tienen el mismo centro? Completa los enunciados siguientes:

"El movimiento resultante de la composición de giros de distinto centro $G(P,b^\circ)\circ G(Q,a^\circ)$ es un giro de ángulo ...... cuando ...... y es ...... cuando ....."

"El movimiento resultante de la composición de giros del mismo centro $G(C,b^\circ)\circ G(C,a^\circ)$ es ......"

G-3.8 Dí cuándo se obtiene un giro y cuándo una traslación en las composiciones siguientes, y da el ángulo para los giros:

$G(R,-80^\circ)\circ G(P,120^\circ)\circ G(S,-40^\circ)$; $G(R,50^\circ)\circ G(P,75^\circ)$; $G(R,-240^\circ)\circ G(P,+60^\circ)$; $G(P,95^\circ)\circ G(Q,135^\circ)\circ G(R,-80^\circ)\circ G(S,210^\circ)$.

NOTA: El siguiente grupo de actividades está enfocado a estudiar la descomposición de una isometría directa (giro o traslación) en giros. Se trata de la relación inversa de la formulada en las últimas actividades, por lo que es importante, para facilitar la comprensión e integración de conocimientos, que el profesor haga referencia a la relación directa, de producto de dos giros, en caso de que los estudiantes no la pongan en acción por sí mismos.

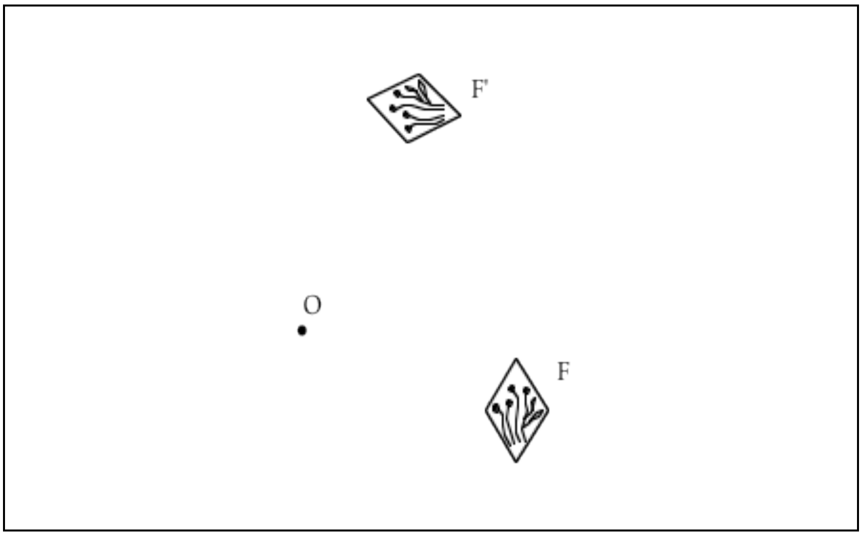
G-3.9 Para mover la figura F hasta la F' se han aplicado dos giros con centro en O, cuya composición equivale al giro $G(O,80^\circ)$ pero, en lugar de hacer este giro directamente, tienes que utilizar los dos giros:

Si el primer giro empleado es $G(O,50^\circ)$, ¿cuál es el segundo giro?

Si el segundo giro es $G(O,-60^\circ)$, ¿cuál es el primero?

Si el primer giro empleado es $G(O,a^\circ)$, ¿cuál es el segundo? (indica su centro y su ángulo, éste en función de 80° y de a°).

Si el segundo giro es $G(O,b^\circ)$, ¿cuál es el primero?

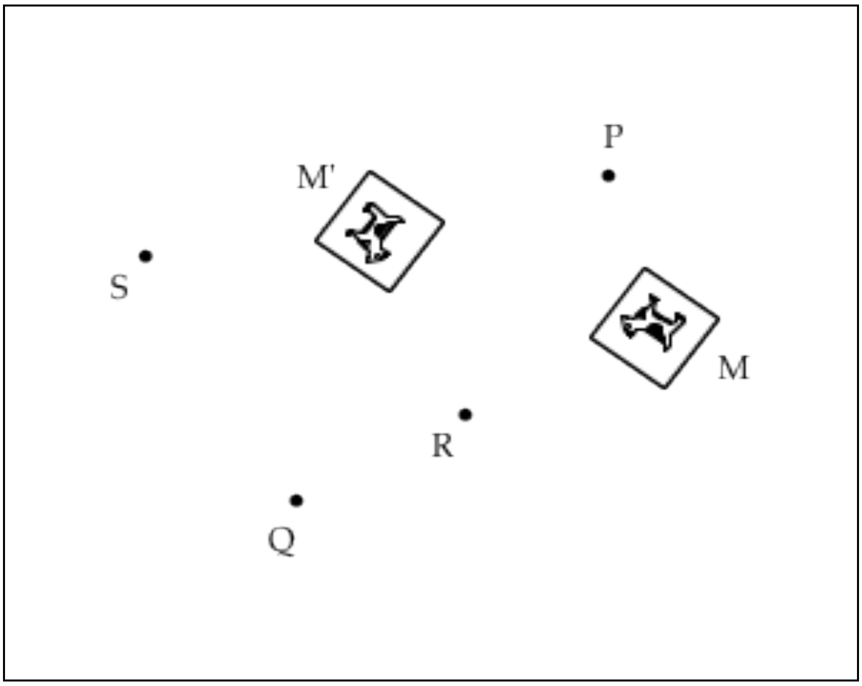


G-3.10 Para pasar de la figura M a la M' se ha efectuado el giro G(R,90°). Ahora queremos utilizar dos giros de distinto centro que produzcan ese mismo resultado, o sea, que transformen M en M'. Si el primer giro que se aplica es G(P,20°), ¿cuál es el ángulo del segundo giro? (Sugerencia: Aplícale G(P,20°) a M y determina por completo el segundo giro). ¿Cuántas soluciones hay?

Si el primer giro que se aplica es G(S,-60°), ¿cuál es el ángulo del segundo giro?

Si el segundo giro que se aplica es G(Q,135°), ¿cuál es el ángulo del primer giro? (Sugerencia: Para determinar el primer giro, conviene transformar la actividad, pensando cómo pasar de M' a M por dos giros. siendo el primero G(Q,-135°). Atención al sentido de los ángulos).

Generaliza los resultados anteriores: Dado un giro, G(O,a°), de manera que $G = G_2 \circ G_1$, y se conoce uno de estos dos giros, explica cómo se puede determinar el centro y el ángulo del otro giro.



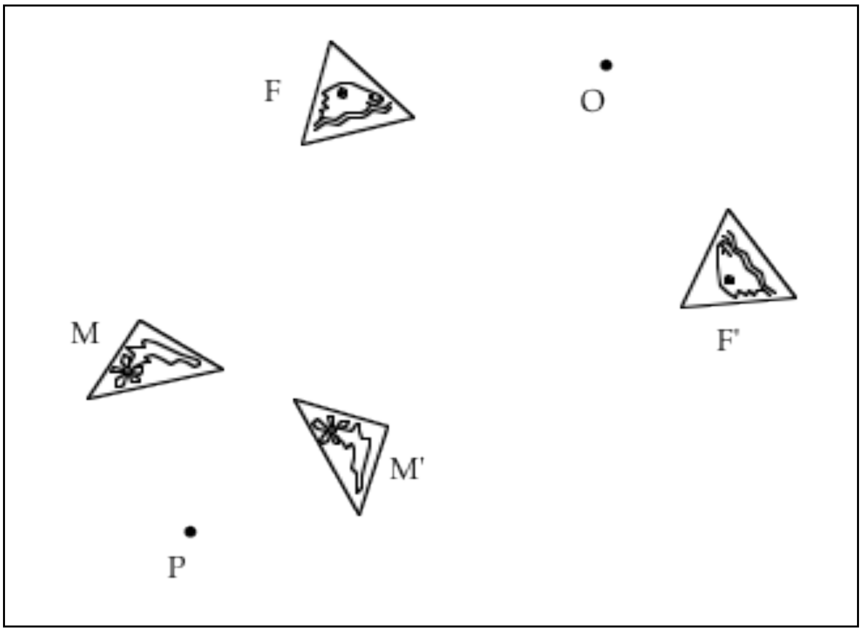
NOTA: La siguiente actividad presenta la existencia de infinitas posibilidades diferentes para descomponer un giro en producto de otros dos. No obstante, los estudiantes suelen tener dificultades para reconocer que, cuando se ha elegido uno de los dos giros de la descomposición, el otro giro sólo admite una posibilidad.

G-3.11 De F hemos pasado a F' mediante el giro G(O,110°). Queremos descomponer este giro en un producto de dos giros de distinto centro. ¿Dónde se puede situar el centro del primer giro de la composición? ¿Qué ángulo puede tener? ¿Cuántas posibilidades hay para elegir el primer giro?

Una vez fijado el primer giro de la composición, ¿dónde se puede situar el centro del segundo giro? ¿Qué ángulo puede tener? ¿Cuántas posibilidades hay para elegir el segundo giro, una vez fijado el primero?

Repite la actividad con G(P,-75°) y las figuras M y M'.

Describe un procedimiento general para descomponer un giro conocido G(O,a°) en producto de otros dos giros. Explica cómo determinar los centros y los ángulos de esos giros.

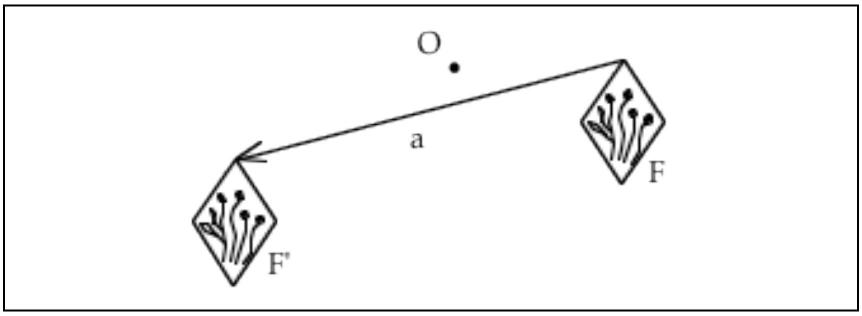


G-3.12 Para pasar de la figura F a la F' se ha aplicado la traslación T_a. Ahora queremos utilizar dos giros para producir el mismo resultado, o sea, para pasar de F a F'. Como primer giro hemos empleado G(O,120°). ¿Qué ángulo debe tener el segundo giro? (Sugerencia: Aplícale G(O,120°) a la figura F y determina por completo el segundo giro).

Si el primer giro que se aplica es G(O,-80°), ¿cuál es el ángulo del segundo giro?

Si el segundo giro que se aplica es G(O,-60°), ¿cuál es el ángulo del primer giro?

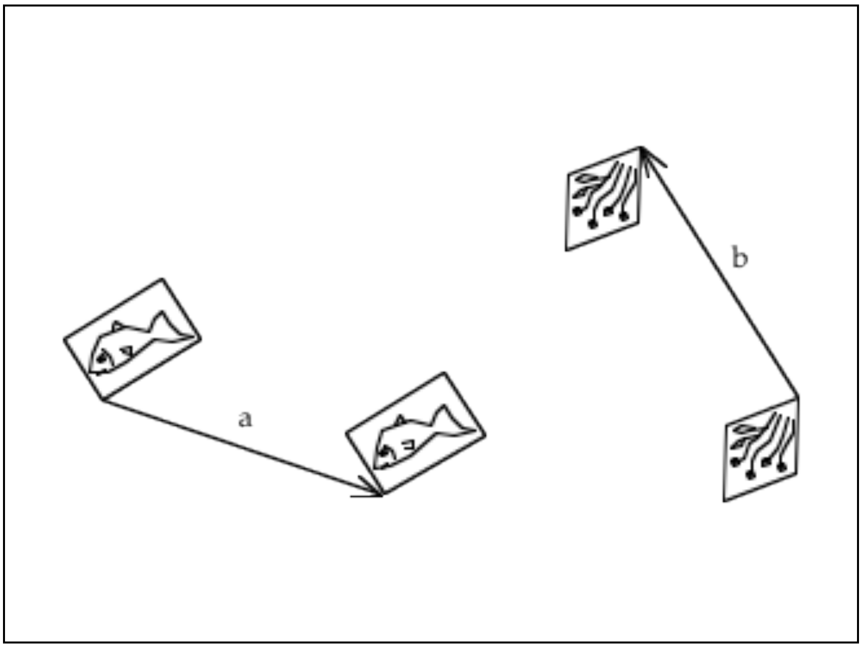
Generaliza los resultados anteriores: Dada una traslación T_a, de manera que $T_a = G_2 \circ G_1$, y se conoce uno de estos dos giros, explica cómo se puede determinar el ángulo del otro giro.



G-3.13 Queremos descomponer la traslación T_a en producto de dos giros de distinto centro, ¿Dónde se puede situar el centro del primer giro de la composición? ¿Qué ángulo puede tener? ¿Cuántas posibilidades hay para elegir el primer giro?

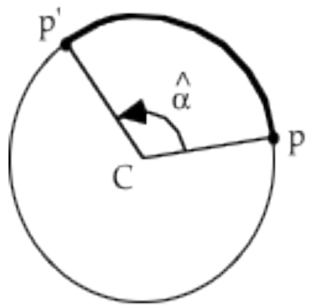
Una vez fijado uno de los giros de la composición, ¿dónde se puede situar el centro del otro giro? ¿Qué ángulo puede tener? ¿Cuántas posibilidades hay para elegir un giro, una vez que está fijado el otro?

Repite la actividad descomponiendo la traslación Tb.



NOTA: En la siguiente actividad se pide demostrar una propiedades de los giros. Todos los profesores de Secundaria saben que la iniciación a la demostración es difícil para los estudiantes, pues deben aprender nuevos métodos de trabajo y un nuevo lenguaje, por lo que con frecuencia se pierden y no saben cuándo ha finalizado la demostración. Por ello, al principio hay que presentar en cada paso la hipótesis de ese momento y la propiedad a utilizar, recordando el punto final de la demostración al que hay que llegar. Una vez construida así la demostración, los estudiantes van adquiriendo progresivamente agilidad y comprendiendo el proceso deductivo, siendo capaces de repetir o transformar ligeramente una demostración para un caso análogo.

G-3.14 El giro $G(C,\hat{\alpha})$ se define como la aplicación del plano en sí mismo que a cada punto P del plano le asigna un punto imagen P' del plano, de manera que se cumplen las dos condiciones siguientes (ver la lámina):



1) d(C,P) = d(C,P').

2) $\angle$ PCP' = $\hat{\alpha}$.

Recuerda el resultado de la composición de dos giros del mismo centro: G(O,b°)°G(O,a°) = G(O,a° + b°). Demuestra que la propiedad es cierta, para lo cual debes verificar que se cumplen las dos condiciones de la definición de giro. Para facilitarte el trabajo, a continuación te proporcionamos las líneas generales de la demostración:

Sea P un punto cualquiera, sea P' su imagen por G(O,a°), y sea P'' la imagen de P' por G(O,b°). Por tanto, P'' es la imagen de P por G(O,b°)°G(O,a°). ¿Es P'' la imagen de P por G(O, a°+ b°)?

Hay que demostrar: 1) d(O,P) = d(O,P'') y 2) $\angle$ POP'' = a° + b°.

Para demostrar 1) tenemos que fijarnos en que d(O,P) = d(O,P') = d(O,P''). Justifica tú estas igualdades.

Para demostrar 2) tenemos que fijarnos en que $\angle$ POP'' = $\angle$ POP' + $\angle$ P'OP'' = ... Completa esta línea y justifica las igualdades.

Si has utilizado un dibujo en el que los dos giros G(O,a°) y G(O,b°) tienen el mismo sentido, haz otro dibujo con giros de sentidos opuestos, e ilustra, sobre ese dibujo, los pasos seguidos en la demostración. Observa que las igualdades anteriores, tanto para i) como para ii) son independientes del dibujo que hayas hecho, son válidas siempre.

NOTA: El estudio de las composiciones de isometrías directas se completa en las siguientes actividades, en las que se trabaja con las composiciones de giros y traslaciones. Además, se comprueba, mediante contraejemplos, la ausencia, en general, de conmutatividad en esas composiciones.

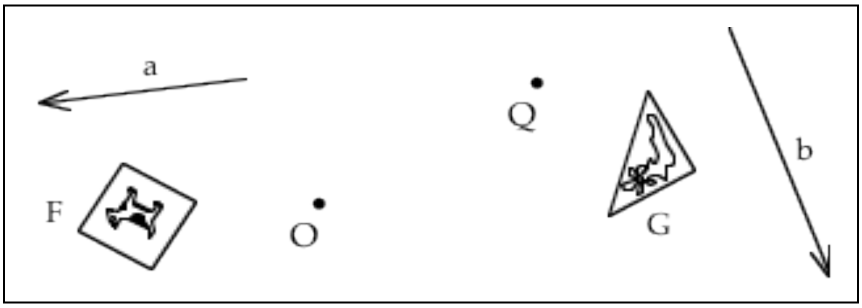
G-3.15 Queremos aplicarle a la figura F la composición G(O,-145°)°T_a. Antes de efectuar estos movimientos con las piezas recortadas, piensa en propiedades que ya conoces y trata de determinar algunos datos del resultado:

¿Cuál es la variación de inclinación de la figura final F'' respecto de F? *(NOTA: Si es necesario, recordar a los estudiantes los resultados de las actividades G-2.22 y siguientes)*

¿Qué tipo de isometría (traslación, giro, simetría o ninguno de estos movimientos) es equivalente a la composición? *(NOTA: Si es necesario, recordar a los estudiantes los resultados de las actividades G-3.2 y G-3.3)*

Mueve la figura F por la composición G(O,-145°)°T_a y comprueba si has contestado correctamente a las preguntas anteriores.

Repite la actividad aplicándole a la figura G la composición T_b°G(Q,75°).



G-3.16 [*Utilizar la misma lámina de la actividad anterior*] Aplícale a la figura F la composición T_a°G(O,-145°). ¿Qué hay de común y qué de diferente en los resultados de estas dos últimas composiciones?

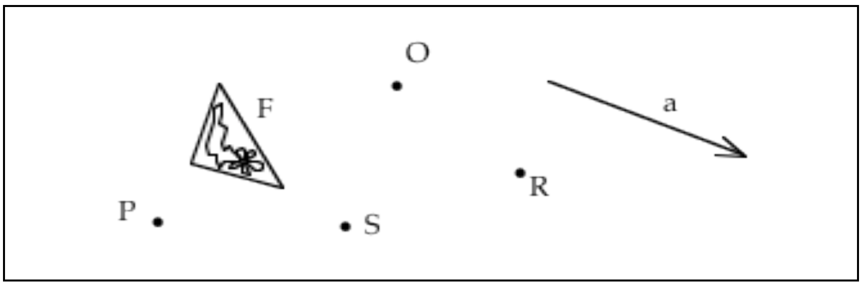
Repite la actividad con la figura G y la composición G(Q,75°)°T_b. ¿Es conmutativa la composición de un giro y una traslación?

Generaliza los resultados obtenidos en las dos últimas actividades: "La isometría resultante de la composición de un giro G(O,a°) con una traslación T_v es ...... (indica el tipo de isometría), con ...... (indica las características de esa isometría)".

G-3.17 Fíjate en la composición G(O,60°)°G(O,-50°)°G(P,80°)°G(P,-100°). Sin mover ninguna figura concreta por los giros de la composición, simplifica al máximo esta expresión, dí qué tipo de isometría equivale a la composición y da todas las características posibles del movimiento resultante. Para responder, recuerda las propiedades que ya has estudiado sobre el resultado de la composición de giros.

Comprueba después las respuestas que has dado, aplicando esa composición a la figura F.

Repite la actividad con las siguientes composiciones: G(P,60°)°G(R,30°)°T_a; G(R,30°)°T_a°G(P,60°); G(P,60°)°G(R,-40°)°T_a°G(S,-20°).



NOTA: Las siguientes actividades tienen como objetivo estudiar la descomposición de una isometría directa (giro o traslación) en producto de giros y traslaciones.

En la G-3.18 pretendemos que los estudiantes hagan razonamientos como el siguiente: De F a F' hay un giro porque son figuras con la misma orientación de ángulos y tienen distinta inclinación. Sí es posible utilizar una traslación y dos giros porque: i) ninguno de los movimientos cambia el sentido de los ángulos y ii) la traslación no modifica la inclinación, pero los giros sí. La suma de los ángulos de los dos giros debe ser igual al ángulo del giro que pasa directamente de F a F'.

Soluciones concretas hay muchas. Por ejemplo, dos giros cualesquiera, de manera que la suma de sus ángulos sea igual al ángulo entre F y F', seguidos por una traslación, ya que la imagen tendrá la misma inclinación que F'. Las soluciones concretas variarán de unos alumnos a otros.

G-3.18 Mueve la figura F hasta la F' mediante la composición de una traslación y dos giros. Antes de dar las soluciones concretas, explica por qué crees que la actividad tiene solución. Una vez resuelta, busca otras soluciones para la misma actividad.

Explica, de forma general, qué hay que tener en cuenta para resolver esta actividad y da un procedimiento que permita resolver situaciones análogas.

G-3.19 Sigue los pasos que has explicado en la actividad anterior para cada uno de los casos siguientes, donde el orden de aplicación de las isometrías de la composición lo eliges tú:

1) Mueve G hasta G' mediante la composición de dos giros del mismo centro.

2) Mueve G hasta G' mediante la composición de dos giros de distinto centro.

3) Mueve G hasta G' mediante la composición de un giro no nulo y dos traslaciones.

4) Mueve G hasta G' mediante la composición de tres giros de distinto centro.

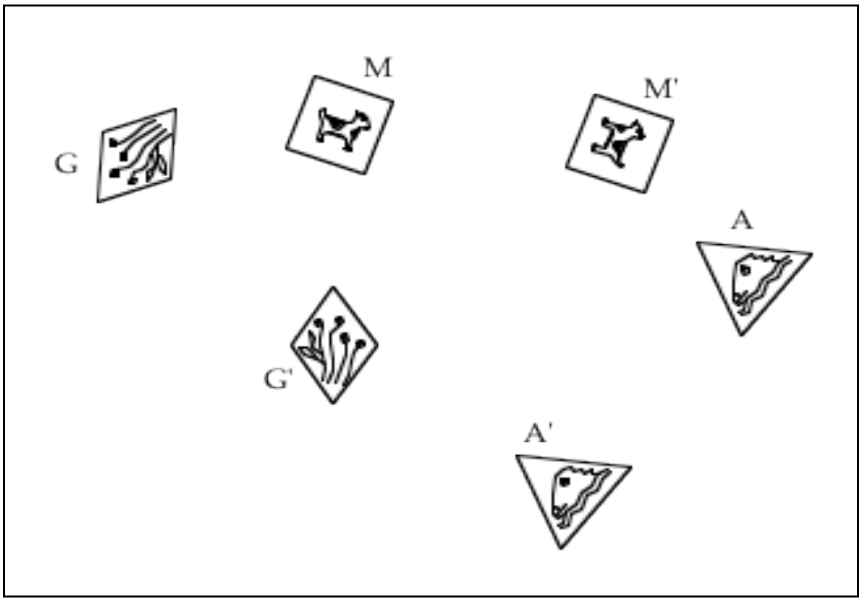
5) Mueve M hasta M' mediante la composición de un giro y una traslación.

6) Mueve M hasta M' mediante la composición de dos giros de distinto centro

7) Mueve A hasta A' mediante la composición de dos giros del mismo centro y una traslación.

8) Mueve A hasta A' mediante la composición de una traslación y dos giros de distinto centro.

9) Mueve A hasta A' mediante la composición de tres giros de distinto centro.

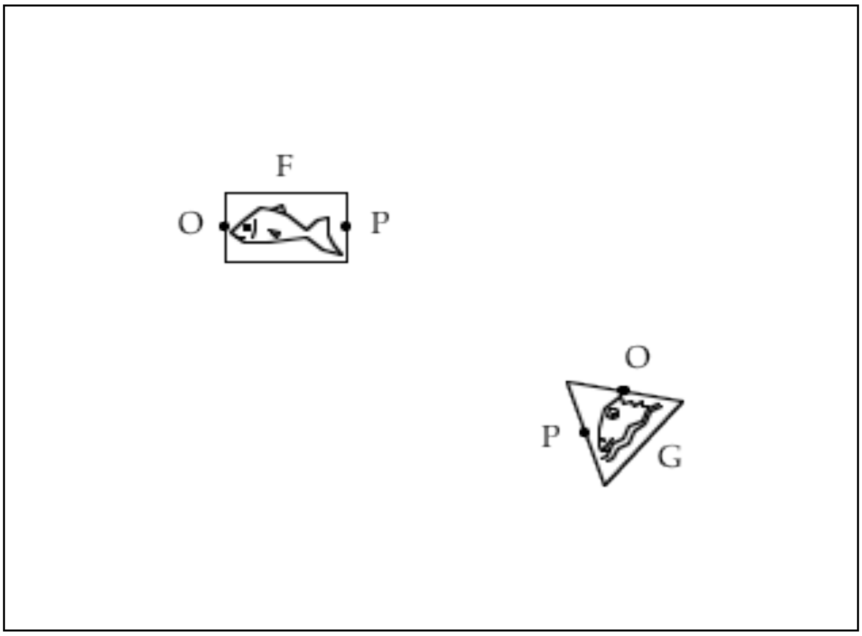


NOTA: En la siguiente actividad se pide construir y analizar frisos y mosaicos generados por giros y traslaciones, así como identificar las otras isometrías presentes en el cubrimiento una vez completado.

G-3.20 A partir de la figura F, construye el friso cuyo sistema generador está formado por los giros G(O,180°) y G(P,180°). Repite la actividad con la figura G.

Una vez construidos los frisos anteriores, selecciona dos celdas cualesquiera A y B de uno de esos frisos y encuentra una isometría simple que permita pasar de A a B. Encuentra también varias composiciones de isometrías que permitan pasar de A a B. Repite la actividad con varios pares de celdas de ambos frisos.

Repite la actividad construyendo otros frisos y mosaicos cuyos sistemas generadores estén formados sólo por giros y/o traslaciones.



NOTA: Las últimas actividades del nivel 3 están dirigidas a la realización de varias demostraciones formales. La metodología de trabajo debe continuar siendo la propia del nivel 3 de Van Hiele, si bien se puede aumentar el nivel de exigencia a los estudiantes y la dificultad de las actividades en relación con otras actividades de demostración realizadas con anterioridad.

Los tipos de ejercicios planteados en estas actividades son: Completar una demostración con alguna implicación. Repetir una demostración, que el profesor ha explicado previamente, identificando la línea general de razonamiento y justificando cada uno de los pasos. Modificar una demostración ya conocida adaptándola a otro enunciado análogo al anterior. Leer e interpretar enunciados de propiedades escritas en lenguaje matemático formal.

En la actividad G-3.21, el profesor puede utilizar la actividad T-3.9 para enseñar o recordar a sus alumnos el concepto de isometría.

G-3.21 Resume el planteamiento general de la siguiente demostración después de que el profesor la haya explicado:

Teorema: Los giros son isometrías.

Hay que demostrar que la distancia entre dos puntos no varía al aplicarles un giro, es decir que, dados dos puntos cualesquiera P y Q, y sus imágenes P' y Q' por el giro $G(C,\alpha,\hat{\ })$, los segmentos PQ y P'Q' tienen la misma longitud.

Para demostrarlo usaremos la definición de giro (actividad G-3.14) y un criterio de igualdad de triángulos: "Si dos triángulos tienen iguales, respectivamente, dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, entonces los triángulos son iguales".

Observa la figura 1 de la lámina: P' es la imagen de P y Q' es la imagen de Q. Hay que ver que PQ mide lo mismo que P'Q'. Fíjate en los dos triángulos sombreados de la figura:

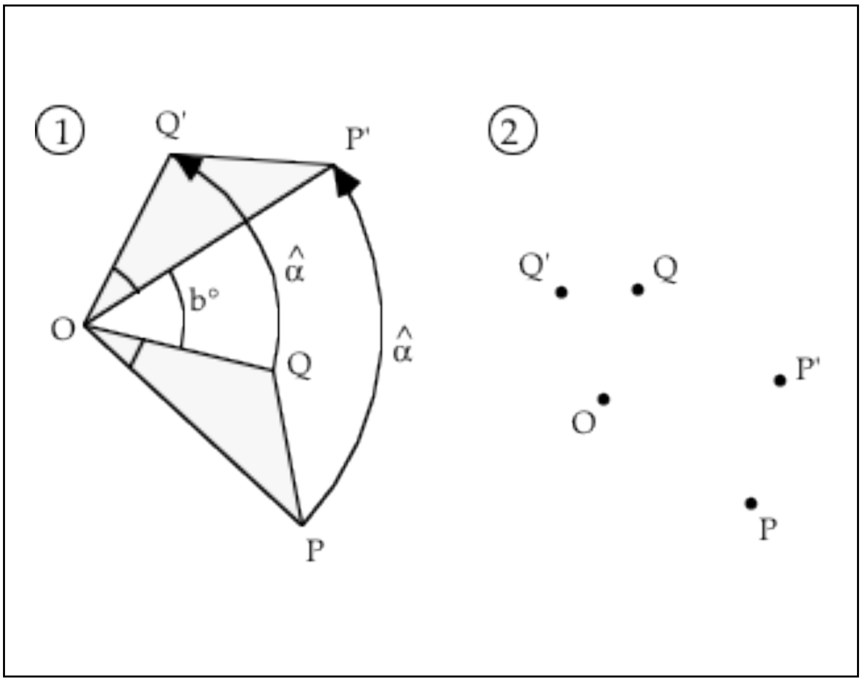
• $OP = OP'$ y $OQ = OQ'$ por la definición de giro.

• $\angle$ POQ mide $\alpha,\hat{\ } - b°$ (el ángulo de giro menos $\angle$ QOP')

• $\angle$ P'OQ' también mide $\alpha,\hat{\ } - b°$ (el ángulo de giro menos $\angle$ QOP')

Por tanto, aplicando el criterio de igualdad de triángulos mencionado antes, los dos triángulos sombreados son iguales y, consecuentemente, $PQ = P'Q'$.

Intenta repetir la demostración sirviéndote de la figura 2 de la lámina.



G-3.22 Dado G(O,a°), sean dos puntos P y Q, y sean P' y Q' sus imágenes por el giro. Explica el significado de cada uno de los siguientes enunciados, dí si son ciertos o no, y justifica tu respuesta (para ello, dibuja unos cuantos casos para cada situación y, cuando creas que un enunciado es cierto, demuéstralo).

1) Para todo par de puntos P y Q, d(P,P') = d(Q,Q').
2) Para todo par de puntos P y Q, d(P,Q) = d(P',Q').
3) Para todo par de puntos P y Q, d(P,Q') = d(P',Q).
4) Para todo punto P ≠ O, se cumple que P ≠ P'.

6.4. Actividades del nivel 4

NOTA: El trabajo de nivel 4 debe realizarse tomando como base el conjunto completo de las isometrías del plano, por lo que no hemos planteado actividades específicas para las traslaciones ni los giros. Las actividades de nivel 4 están organizadas en un solo bloque en el capítulo 7.

7

UNA UNIDAD DE ENSEÑANZA DE LAS ISOMETRÍAS DEL PLANO. ENSEÑANZA DE LAS SIMETRÍAS.

Al comienzo de la enseñanza de las simetrías, igual que con las otras isometrías, es necesario dedicar algún tiempo al tipo de actividad de profesor y alumnos propia de la primera fase de aprendizaje del modelo de Van Hiele: El profesor debe procurar que sus alumnos recuerden o aprendan ciertos conceptos y técnicas de trabajo que no son específicas de las simetrías, pero cuyo dominio será necesario para poder avanzar adecuadamente en la realización de las actividades que presentamos a continuación. Por otra parte, cuando los alumnos ya hayan estudiado las simetrías con anterioridad, los profesores deben centrar su actividad inicial en determinar el nivel de razonamiento de sus alumnos al trabajar con simetrías y sus conocimientos. En todo caso, la actividad cotidiana de cualquier niño le ha puesto en contacto, desde edades muy tempranas, con las simetrías, representadas por espejos, edificios, monumentos, figuras geométricas, etc. Como apuntábamos en el capítulo 3, es difícil encontrar un estudiante de los últimos cursos de Primaria o de Secundaria que, aunque no haya tenido ninguna enseñanza formal de las simetrías, desconozca por completo este concepto y no sea capaz de dibujar correctamente algunas simetrías.

Entre los conocimientos de los alumnos que es necesario afianzar antes de comenzar las actividades del nivel 2, son importantes los métodos y materiales para trazar paralelas y perpendiculares que resulten más adecuados para los estudiantes. Por lo general, los estudiantes usan correctamente la regla y el compás, pero si algunos estudiantes (de Primaria) tienen dificultad en el uso de estos instrumentos, pueden utilizar la escuadra y el cartabón, aunque éstos pueda ser menos exacto.

Al avanzar en las actividades del segundo nivel de razonamiento, se empezará a estudiar la composición de simetrías, para lo cual los estudiantes deberán haber asimilado previamente ciertos conocimientos de traslaciones y giros, como la determinación de una traslación por su vector o de un giro por su centro y ángulo. Por lo tanto, antes de iniciar la resolución de dichas actividades de simetrías, es necesario haber completado las actividades correspondientes de los bloques del nivel 2 de traslaciones y a giros (recordar el diagrama que aparece en las primeras páginas de este capítulo). La determinación exacta del centro de un giro no se aprende hasta el nivel 3 de giros; por lo tanto, si en las actividades del nivel 2 de simetrías es necesario verificar que el centro del giro resultante de un producto de dos simetrías es el punto de corte de sus ejes, habrá que limitarse a verificarlo por algún procedimiento informal como es usando un disco o trazando circunferencias con el compás.

En el bloque de actividades del nivel 3 de simetrías será necesario conocer la utilización de los instrumentos de dibujo para trazar mediatrices, las características básicas de la simetría en deslizamiento (que deben aprenderse en el bloque de actividades del nivel 2), y las propiedades básicas de las traslaciones, de los giros, y de sus composiciones.

En relación con estos puntos, si los alumnos conocen el tema pero tienen alguna carencia concreta, es conveniente darles una instrucción específica adecuada antes de empezar a trabajar con las simetrías.

7.1. Actividades del nivel 1

NOTA: Las primeras actividades pretenden, simplemente, producir la toma de contacto con la simetría y con los materiales que se utilizarán a lo largo de este bloque del nivel 1 para obtener imágenes de manera directa y automática: Espejos y "miras". Ya hemos descrito con anterioridad, en la introducción de este capítulo, qué es un mira.

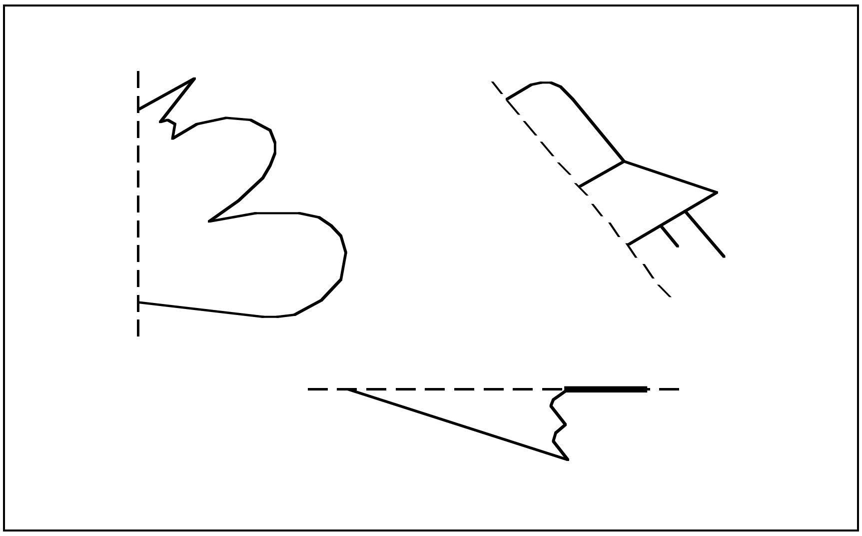
S-1.1 Elige algún dibujo que te guste de uno de tus libros, libretas o cromos. Coloca el mira como te dirá el profesor y dí qué ves al otro lado del mira. Cada figura decimos que es <u>simétrica</u> de la otra.

Coge una hoja de papel blanco, sitúala en el lado en el que ves la copia de la figura y márcala con lápiz.

Sitúa un espejo en los mismos lugares donde pusiste antes el mira. Dí lo que se ve y observa si ahora puedes copiar la nueva figura como antes, o sea, pasando el lápiz por encima de la imagen que produce el espejo.

Coloca el espejo y el mira en distintos lugares y compara sus imágenes.

S-1.2 Completa las figuras de la lámina plegando por la línea señalada y recortando.



NOTA: Para la actividad siguiente, el profesor entregará a cada alumno, o grupo, varias piezas recortadas, teniendo cuidado de que haya de todos los diseños y, para cada uno, varias piezas de cada orientación.

S-1.3 Agrupa las figuras que te ha dado el profesor poniendo juntas las que te parecen iguales.

En cada uno de esos grupos, fíjate más y dí si observas alguna diferencia entre las piezas. Intenta poner una encima de la otra para que coincidan sus figuras. Verás que algunas veces coinciden y otras no, porque están al revés.

Coge dos piezas con el mismo dibujo pero que no coincidan al superponerlas. Ponte en el cristal de la ventana y calca el dibujo de una de ellas por el otro lado de la pieza. Comprueba ahora que sí coincide con la otra pieza.

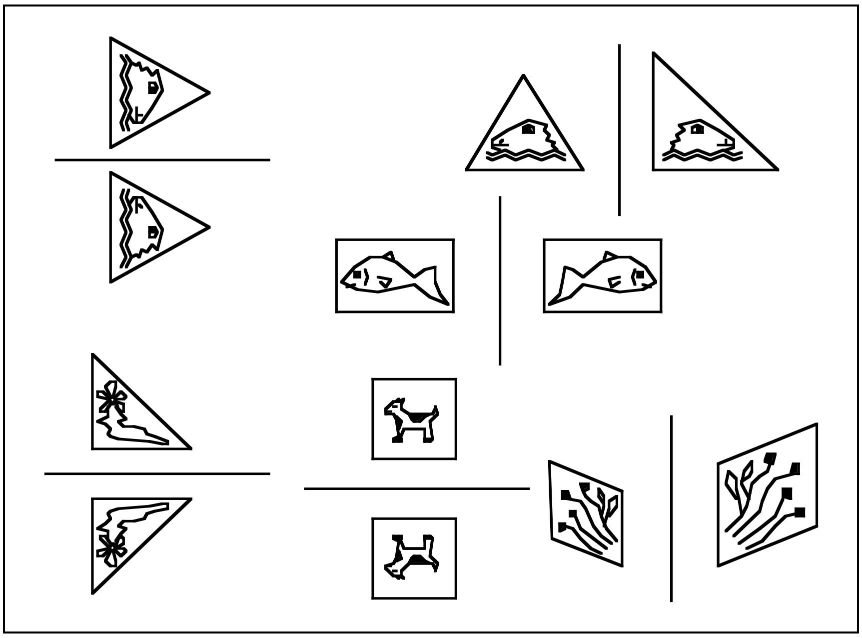
Llamaremos inversas entre sí a las piezas en las que ocurre esto: Coinciden cuando se copian por el otro lado del papel.

Coge dos piezas inversas entre sí, sitúa el mira entre ellas y desplaza una hasta que sea el reflejo de la otra. Haz eso varias veces.

NOTA: El resto de actividades de este bloque tienen como objetivo poner de manifiesto la existencia del eje de simetría y las características visuales básicas de la relación entre dos figuras simétricas y entre éstas y el *eje de simetría: Mismo tamaño, inversión de la figura, equidistancia al eje, cambio de semiplano, etc. En estas actividades todavía no es necesario obtener los resultados con total precisión, sino que los estudiantes las resolverán con ayuda de material auxiliar.*

S-1.4 Observa los pares de figuras de la lámina, dí cuáles crees que son simétricos respecto del segmento que hay entre las figuras y cuáles no lo son, y explica por qué.

Comprueba con mira o mediante plegado tus respuestas para todos los pares.



NOTA: Las láminas que presentamos para la actividad S-1.5 están inspiradas en o extraídas de Walter (1973).

S-1.5 A) Colocando el espejo o el mira sobre cada figura de la lámina, intenta que la figura se vea completa.

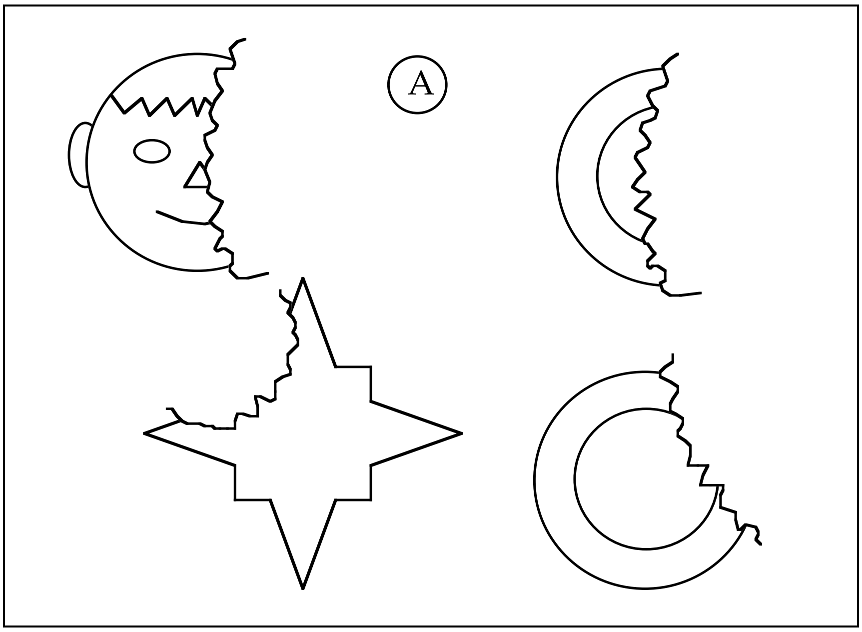
B) Colocando el espejo o el mira sobre la lámina, haz que se vean dos coches. Desplazando el espejo o el mira, haz que los dos coches se acerquen y se alejen.

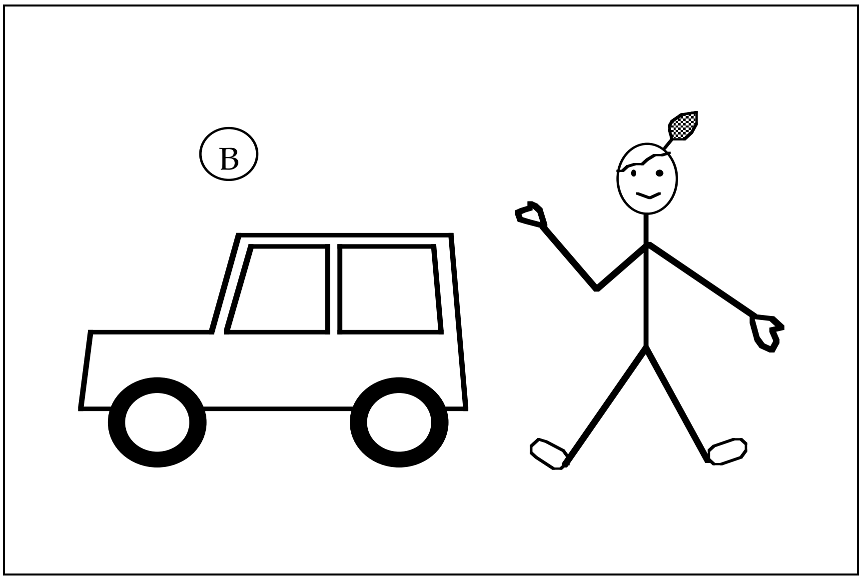
Repite la actividad con el hombre. Consigue también ver un hombre sin pluma o con 2 plumas, ver 2 hombres, verlos de manera que uno de ellos esté con los pies hacia arriba, o que se toquen por la cabeza.

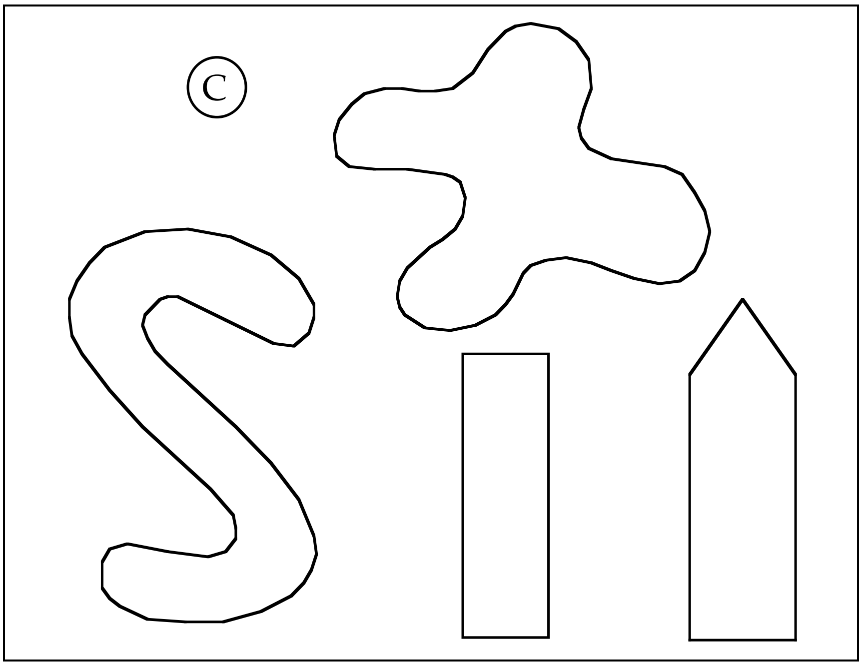
C) Colocando el espejo o el mira sobre la lámina, consigue algunas transformaciones de las figuras. Por ejemplo: Un palo más/menos largo o grueso, un lápiz más delgado/grueso, un lápiz con 2 puntas, un gusano igual de largo que el de la lámina, pero más grueso/delgado, etc.

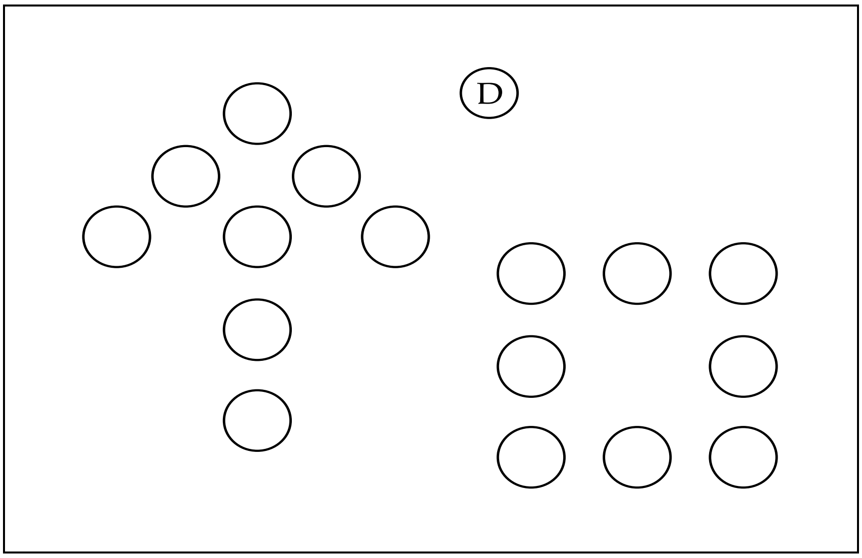
En algunos de los casos anteriores no hay solución. ¿En cuáles? Propón tú otras modificaciones para que las resuelvan tus compañeros.

D) Colocando el espejo o el mira sobre la lámina, intenta que se vean sólo 1, 2, 3, … puntos en cada configuración. Averigua cuál es el número máximo de puntos que se puede obtener en cada caso.




B

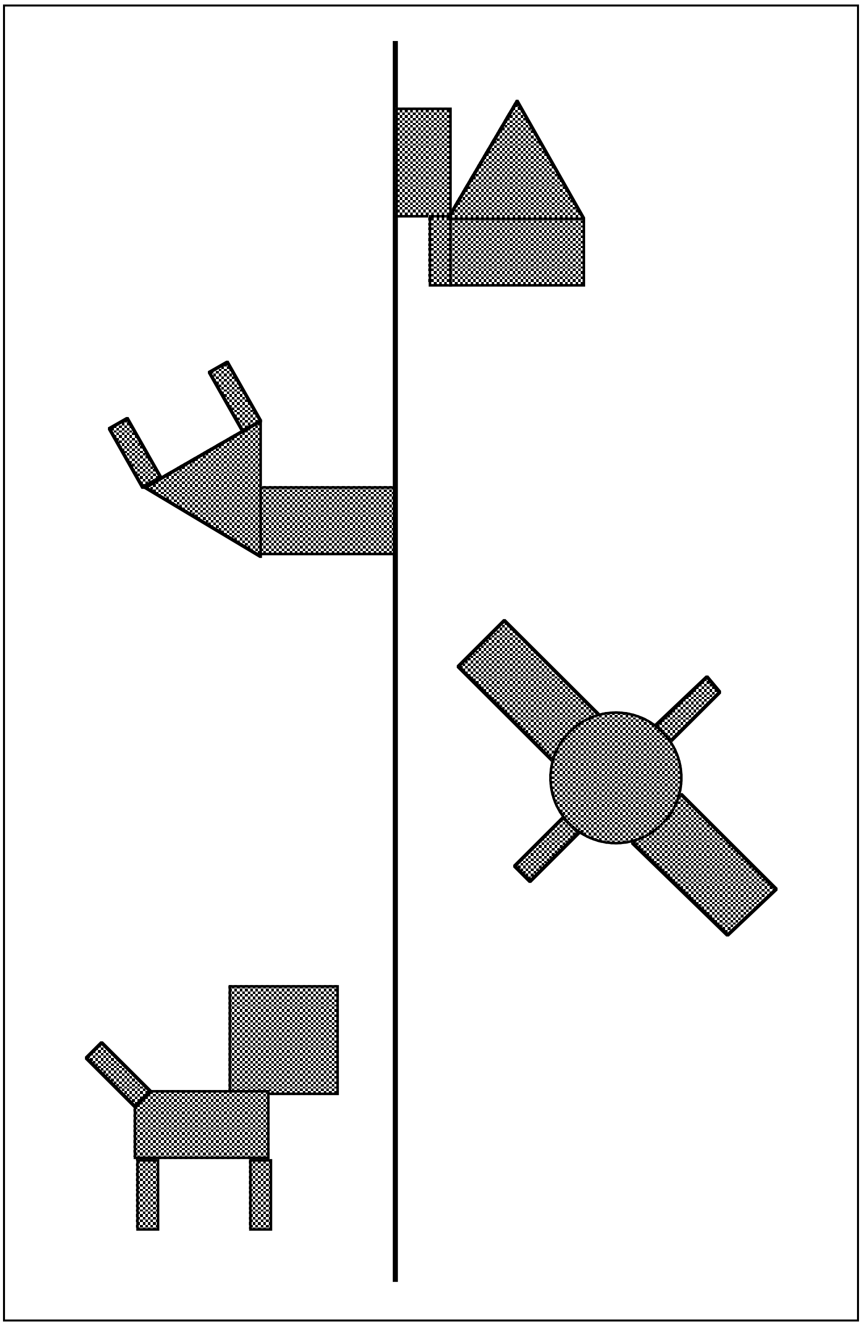

C



S-1.6 Las dos figuras superiores de esta lámina no están completas. Pon el espejo sobre la línea dibujada de manera que veas la figura completa. Quita el espejo y, unas veces mediante plegado y otras con el mira, dibuja la parte de la figura que falta.

Las dos figuras inferiores de la lámina sí están completas. Pon el espejo sobre la línea para ver la figura imagen, después retira el espejo y, unas veces mediante plegado y otras con el mira, dibuja la figura imagen.

La línea donde se pone el espejo, el mira o por donde se pliega se llama <u>eje de simetría</u>.



NOTA: Las dos preguntas a) y b) formuladas en la siguiente actividad son las características de la simetría que pretendemos que comprendan y asimilen. No es necesario pedir total precisión en el lugar en que colocan la pieza, pero sí que la posición de la pieza que colocan los estudiantes sea clara respecto de la propiedad por la que se está preguntando.

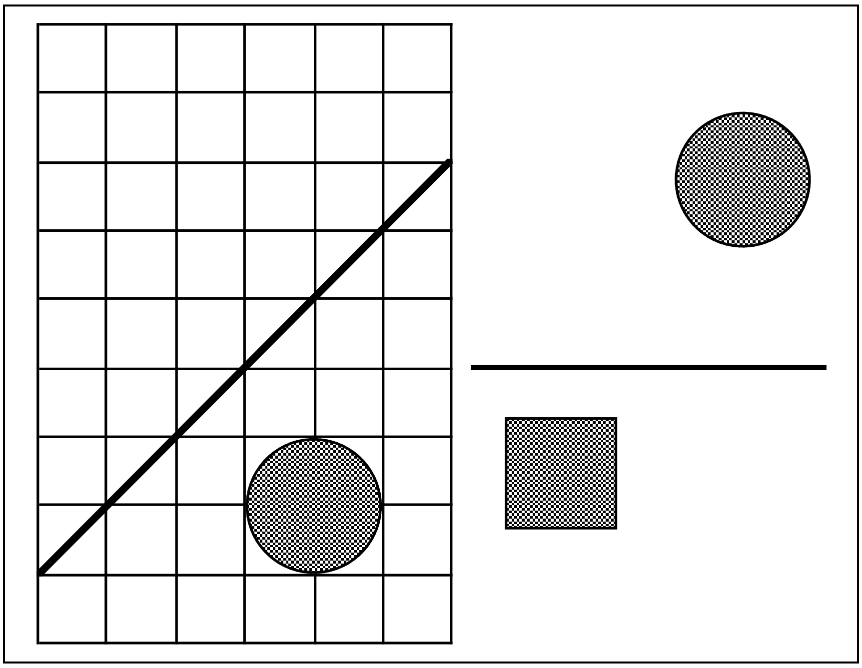
Para facilitar la tarea a los estudiantes, aquí no usamos las piezas recortadas habituales, sino otras sin dibujo interior. De esta manera, no se rompe la simetría del borde de la figura.

S-1.7 Para cada caso, coge una pieza como la de la lámina. Colócala donde creas que está su imagen cuando el eje de simetría es la recta dibujada, o sea, donde se verá la imagen si pones el mira en la línea dibujada o pliegas por ella. Piensa, en particular:

a) A qué lado del eje debes colocar la pieza, y

b) Si la pieza debe o no tocar el eje de simetría.

Comprueba después, mediante plegado o con el mira, si tus respuestas son correctas.



NOTA: En la siguiente actividad, la inversión de la figura y las dos preguntas a) y b), las mismas de la actividad anterior, son las características de la simetría que pretendemos que comprendan y asimilen. Tampoco ahora es necesario pedir total precisión en el lugar en que colocan la pieza, pero sí que la posición de la pieza que colocan los estudiantes sea clara respecto de la propiedad por la que se está preguntando.

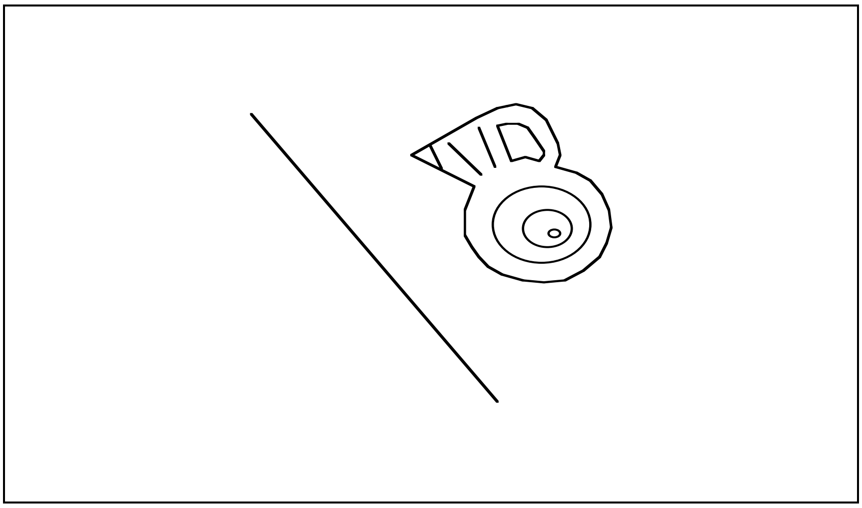
El profesor debe entregar a cada estudiante, o grupo, varias piezas recortadas, congruentes con la figura de la lámina, y decoradas sólo por un lado, de manera que sólo se puedan poner de una forma sobre la lámina.

S-1.8 Las piezas que tienes para esta actividad no son todas exactamente iguales. Dí cuáles puedes utilizar para colocarlas como imagen de la figura de la lámina por la simetría cuyo eje está dibujado. Fíjate, además en:

a) A qué lado del eje colocas la pieza, y

b) Si la pieza debe o no tocar el eje de simetría.

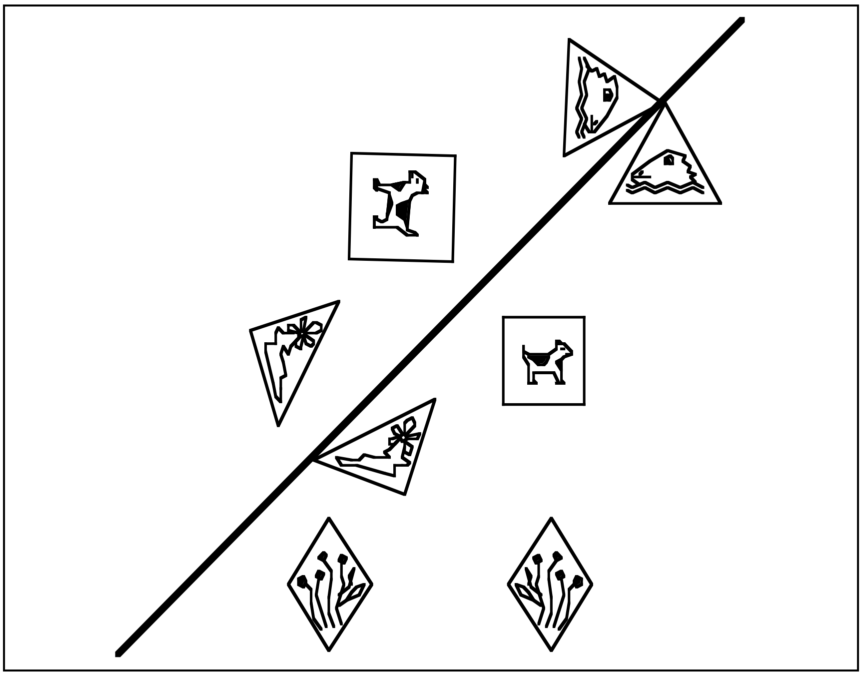
Comprueba después, mediante plegado o con el mira, si tu respuesta es correcta.



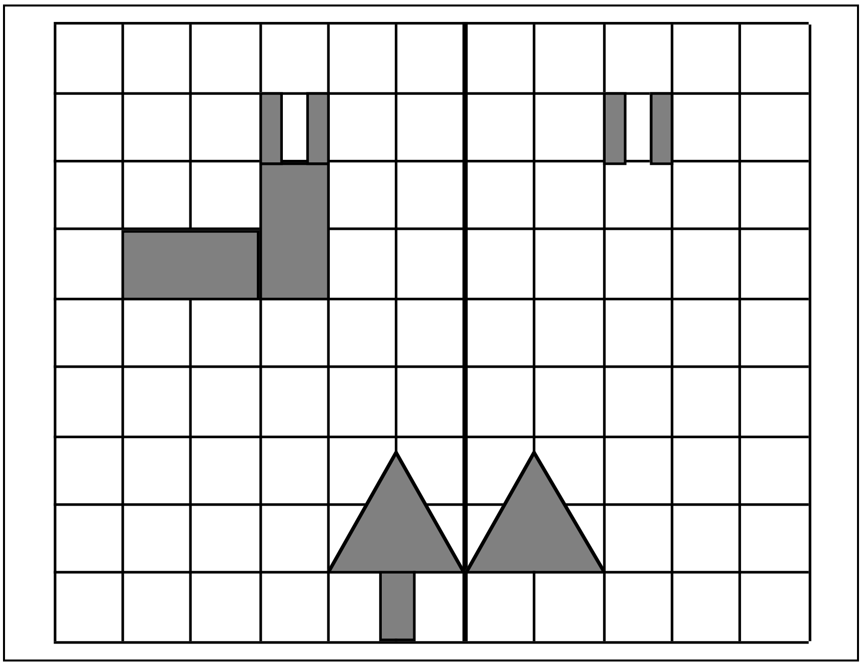
NOTA: Hay bastantes motivos para que dos figuras no sean simétricas. En la actividad siguiente, los casos negativos deben corresponder a modificaciones de la figura (ya sea en forma o en tamaño), a ausencia de cambio de semiplano, o a no tener en cuenta si la imagen debe o no tocar el eje.

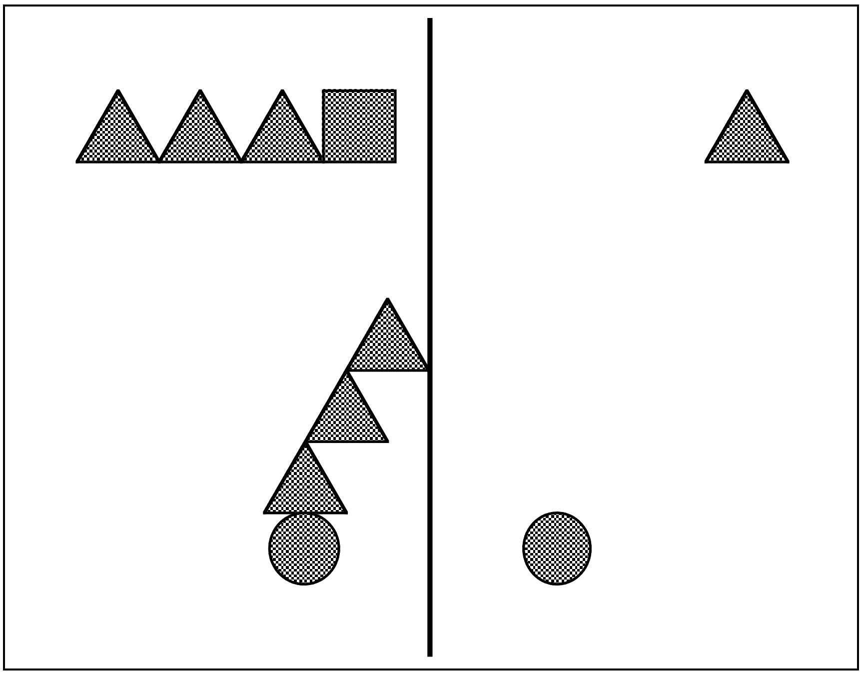
S-1.9 Mira la lámina, dí qué pares de figuras crees que son simétricas respecto al eje dibujado, y explica tus respuestas.

Con mira o mediante plegado, comprueba en todos los pares de figuras si has contestado correctamente o no.

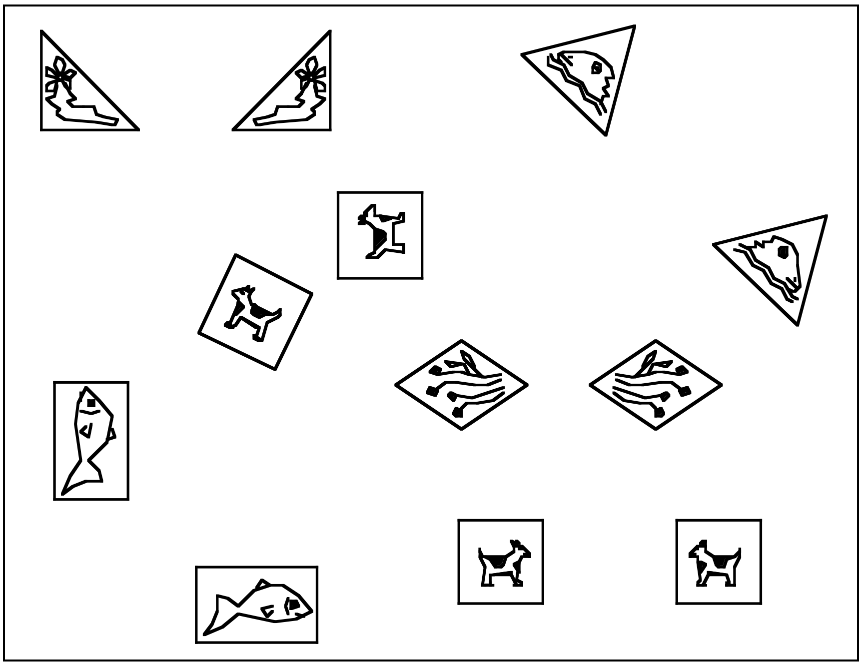


S-1.10 Completa las figuras simétricas colocando las piezas que faltan. Las herramientas auxiliares (mira, espejo, plegado) puedes usarlas sólo algunas veces, para ver cómo continuar.

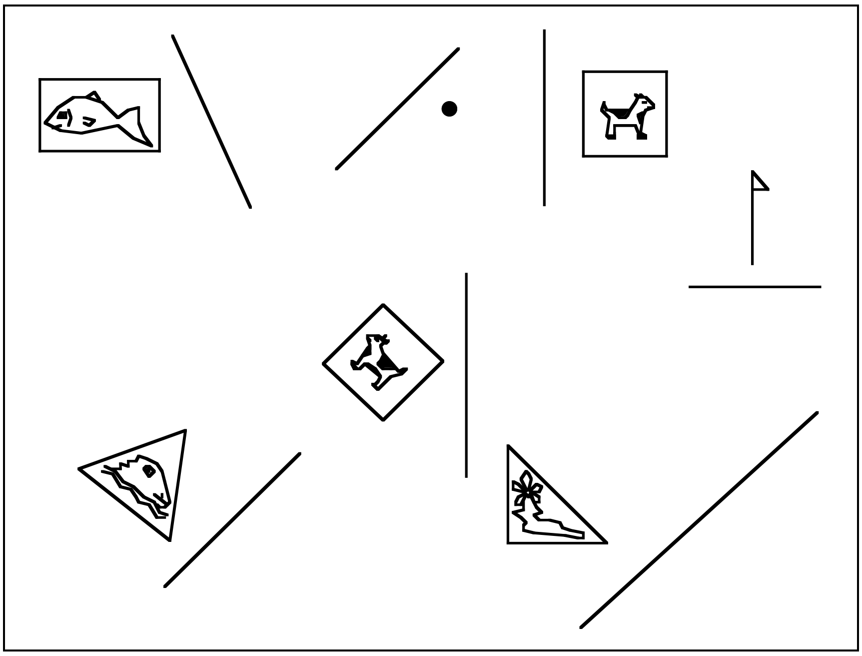




S-1.11 Dibuja, con la ayuda del mira o plegando el papel, el eje de simetría de cada par de figuras.

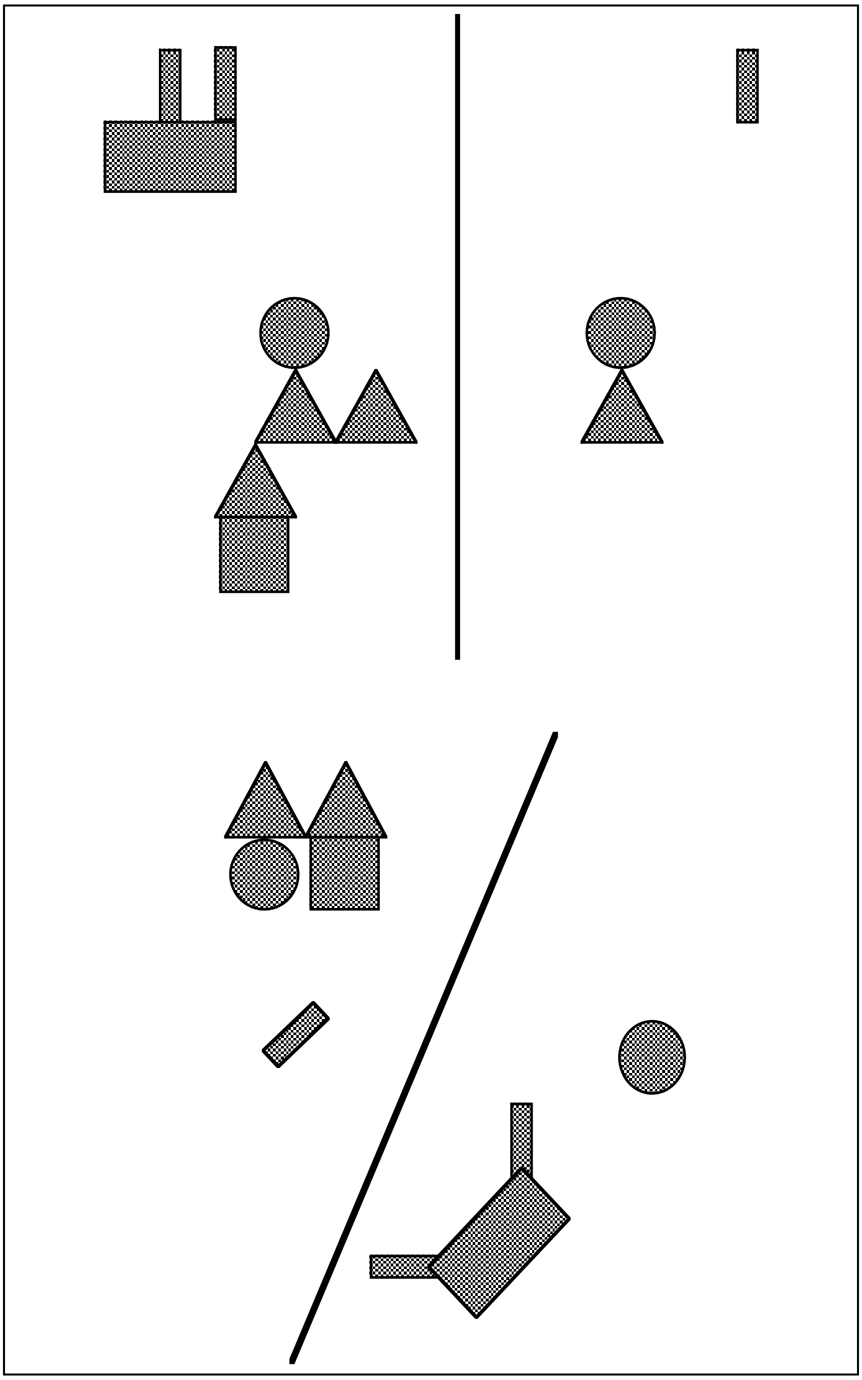


S-1.12 En cada caso, coloca la pieza simétrica a la de la lámina respecto del eje de simetría dibujado. Utiliza los materiales auxiliares sólo después de dar la solución, para comprobar si es correcta.

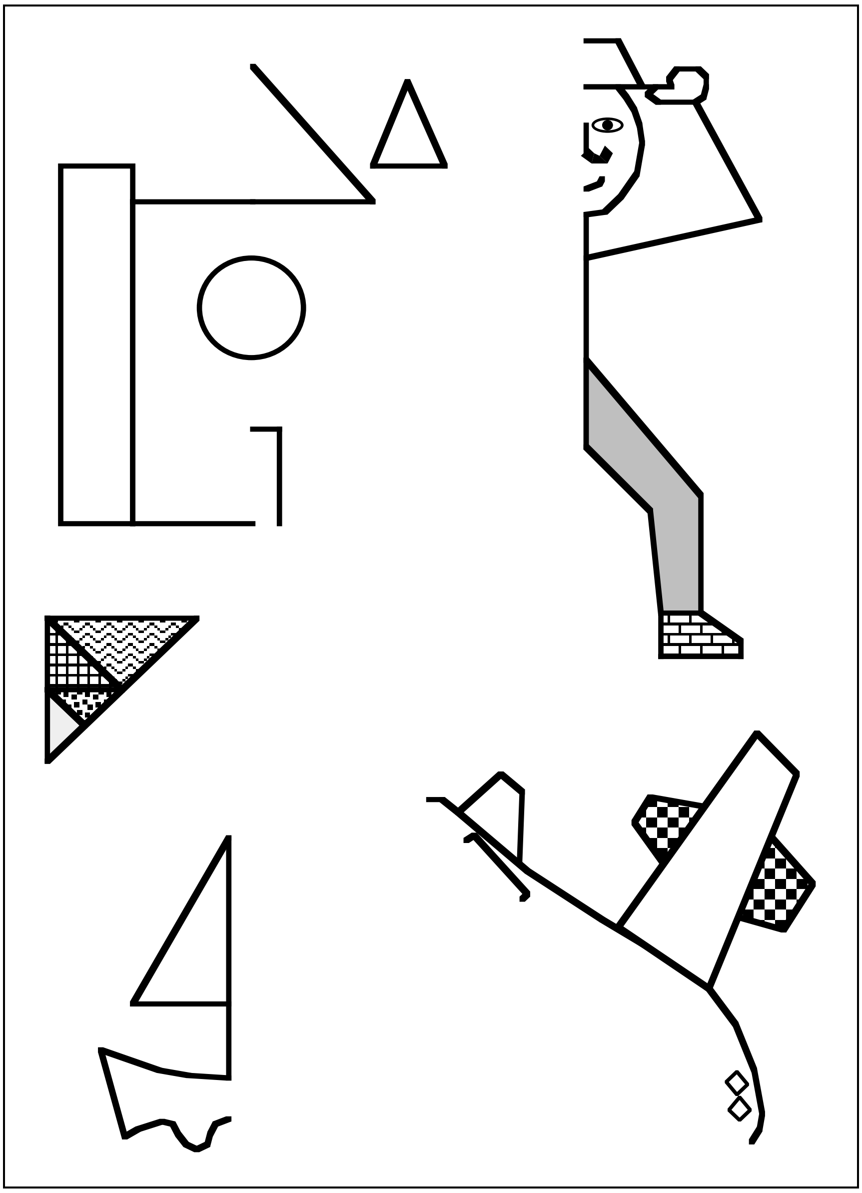


NOTA: Además de las características en las que se insistía en actividades anteriores (cambio de semiplano y si la figura debe tocar o no al eje), en las dos últimas actividades también pretendemos que los alumnos tengan en cuenta la distancia al eje, desde un enfoque global, por lo que no se pide precisión, pero sí que visualmente no se acuse una diferencia muy grande. La perpendicularidad al eje no es necesario tenerla en cuenta de momento.

S-1.13 Completa las figuras imagen colocando las piezas que faltan. Las herramientas auxiliares (mira, espejo, plegado) puedes usarlas sólo algunas veces, para ver cómo continuar.



S-1.14 Completa cada figura de la lámina, dibujando la parte simétrica de la que damos. Utiliza los materiales auxiliares sólo después de dar la solución, para comprobar si es correcta.



7.2. Actividades del nivel 2

NOTA: Los objetivos de las actividades S-2.1 a S-2.5 son:

- *Considerar la relación entre un punto, su simétrico, y el eje de simetría, investigando las propiedades matemáticas básicas: Equidistancia al eje y perpendicularidad entre el eje y el segmento que une los puntos.*
- *Descubrir el paralelismo entre los segmentos que unen puntos simétricos.*
- *Utilizar las propiedades anteriores para reconocer y dibujar puntos y figuras simétricos respecto de un eje, así como para determinar el eje de simetría de un par de figuras o puntos.*

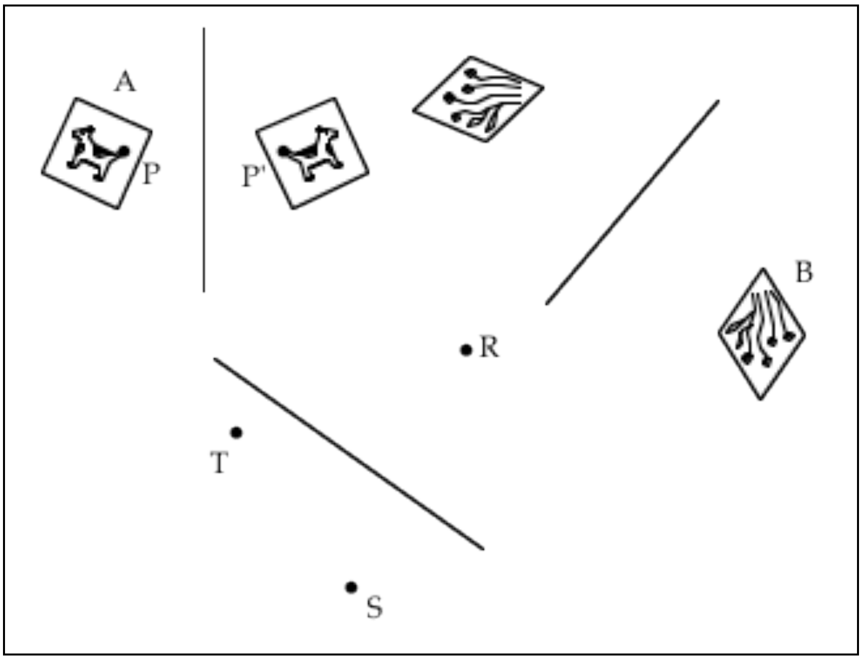
Un resultado importante que se debe obtener de las dos primeras actividades es que el eje de simetría es la mediatriz de los segmentos que unen puntos y sus simétricos. Probablemente los estudiantes no recuerden la mediatriz (o no la conecten con esta situación), en cuyo caso el profesor deberá dirigirles adecuadamente.

S-2.1 En la lámina hemos marcado un punto P de la figura A, y su imagen P' mediante la simetría cuyo eje está dibujado. Une los puntos P y P'. Elige otro punto de la figura A y únelo con su imagen. Repite esto con varios puntos de la figura A.

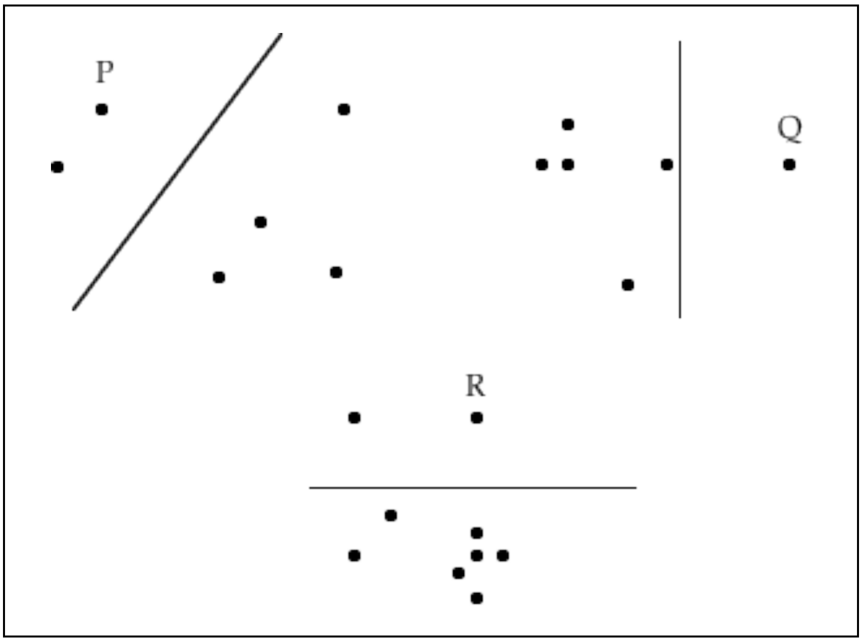
Repite la actividad con la figura B y su imagen.

Dibuja los puntos simétricos de R, S y T respecto el eje de simetría dado (puedes usar el mira o plegado). Une, mediante un segmento, cada punto con su imagen. Repite la actividad con otros ejes de simetría (trazados por tí) y otros puntos que tú debes marcar.

Enuncia la propiedad que hayas observado a partir de los resultados de esta actividad: ¿Qué relación hay entre unos segmentos y otros? ¿Qué relación hay entre los segmentos y el eje de simetría? ¿Qué puedes decir de un punto y de su imagen en relación con el eje de simetría?

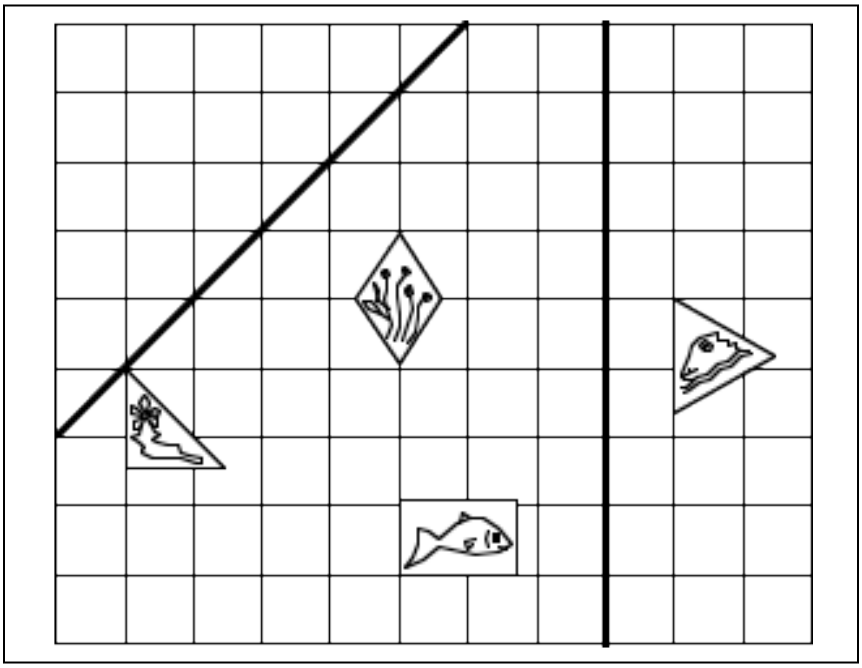


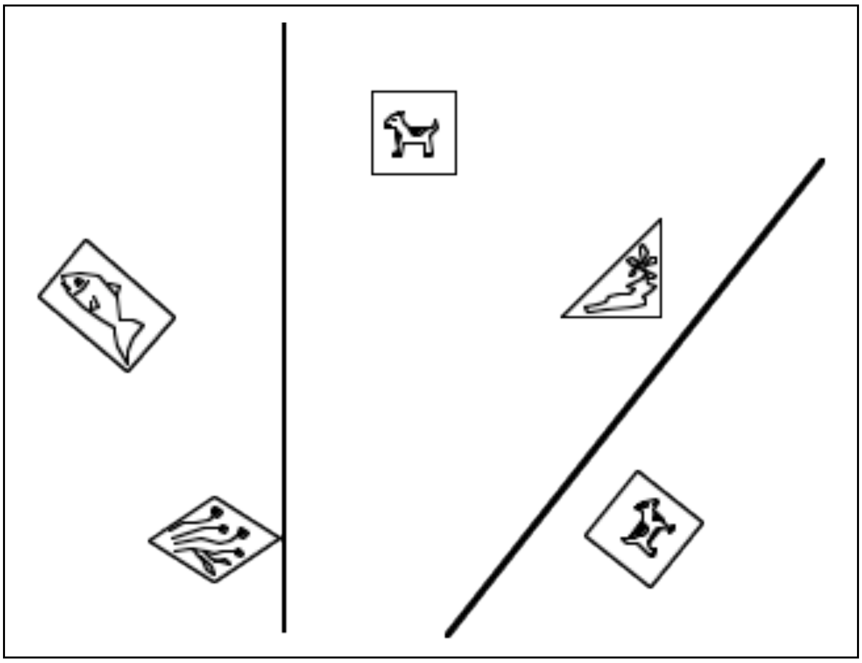
S-2.2 Para cada punto P, Q, y R, identifica su imagen mediante la simetría cuyo eje está dibujado cerca de cada punto. El único material del que te puedes servir es una regla. Utiliza después el mira o plegado para comprobar tus respuestas.

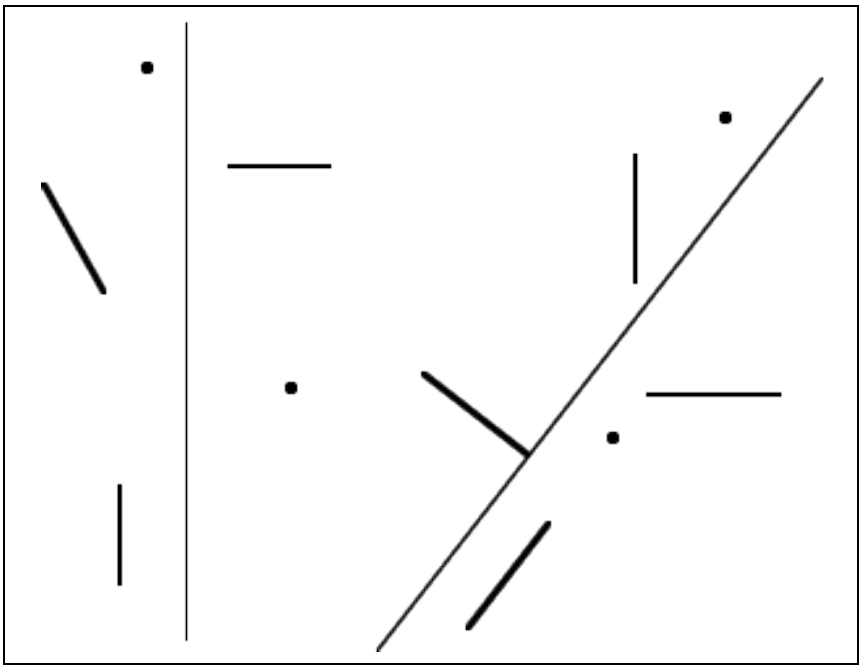


S-2.3 Obtén las imágenes de las figuras, puntos y segmentos que aparecen en las láminas por la simetría cuyo eje aparece dibujado junto a ellos (Sugerencia: Dibuja las imágenes de algunos puntos especiales de cada figura o segmento usando las propiedades que has descubierto en las actividades anteriores).

Una vez resuelta la actividad, emplea unas veces el mira y otras el plegado para comprobar el resultado.

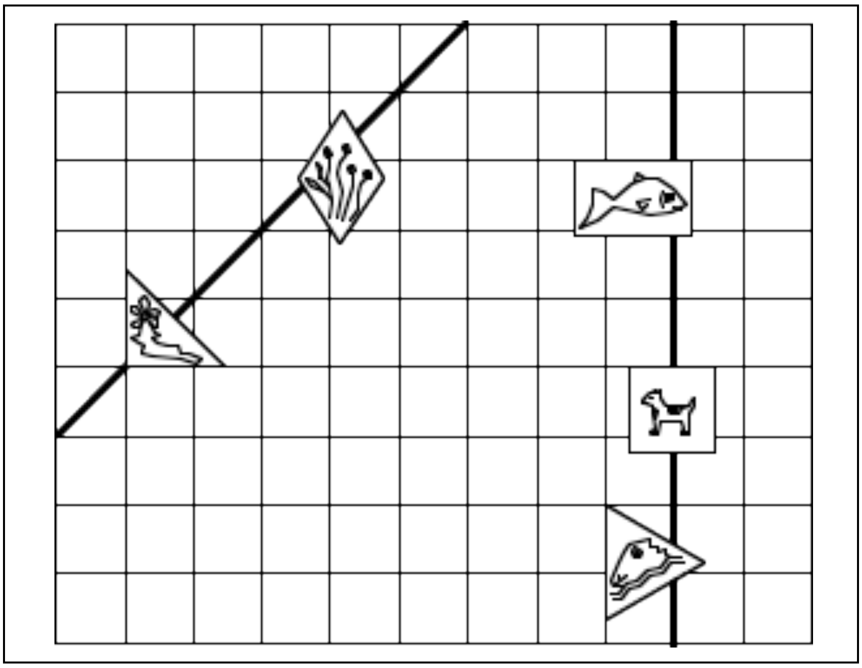


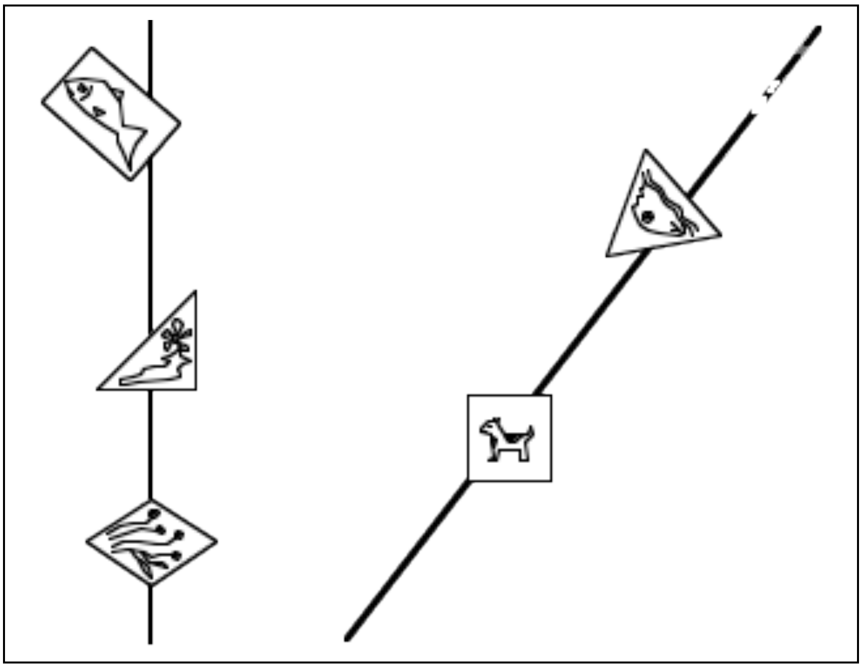


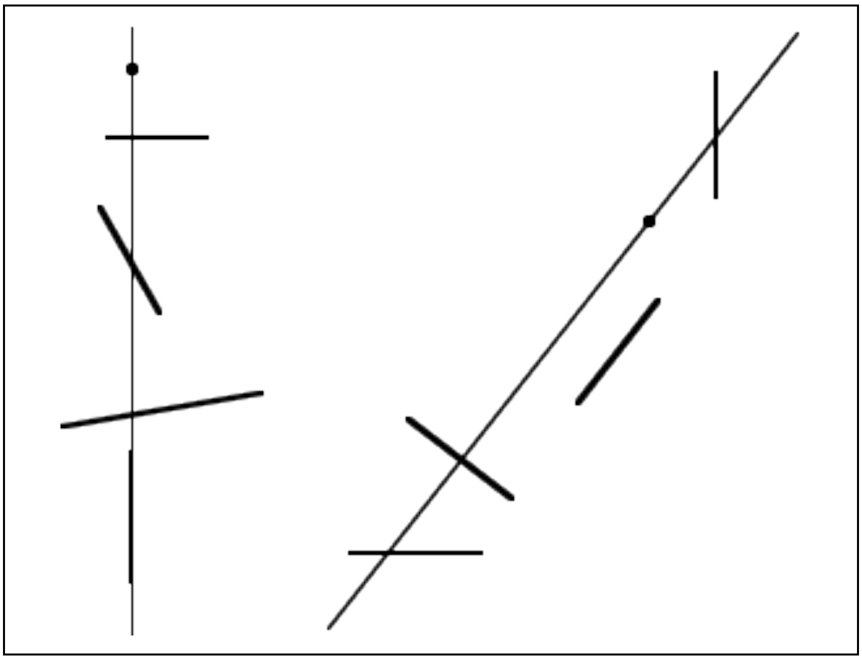


NOTA: El dibujo de imágenes de figuras o segmentos que cortan el eje, planteado en la siguiente actividad, es un obstáculo para casi todos los estudiantes. Algunos no admiten la posibilidad de que la imagen pueda superponerse con la figura original (cosa que también sucede al realizar giros y traslaciones). Otros sí comprenden esta posibilidad, pero no son capaces de dibujar la imagen porque no saben cómo modificar la técnica de dibujo para adaptarla a este caso en el que hay puntos a cada lado del eje y, por tanto, deben dibujar en los dos sentidos.

S-2.4 Obtén las imágenes de las figuras, puntos y segmentos que aparecen en las láminas por la simetría cuyo eje aparece dibujado junto a ellos (Sugerencia: Imagina que cada figura está dividida en dos partes, una a cada lado del eje, y halla la imagen de cada parte).

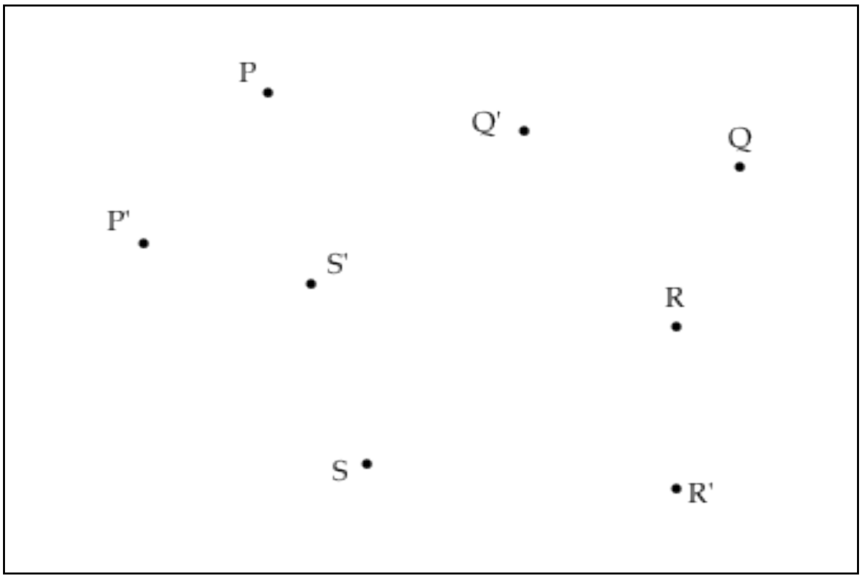


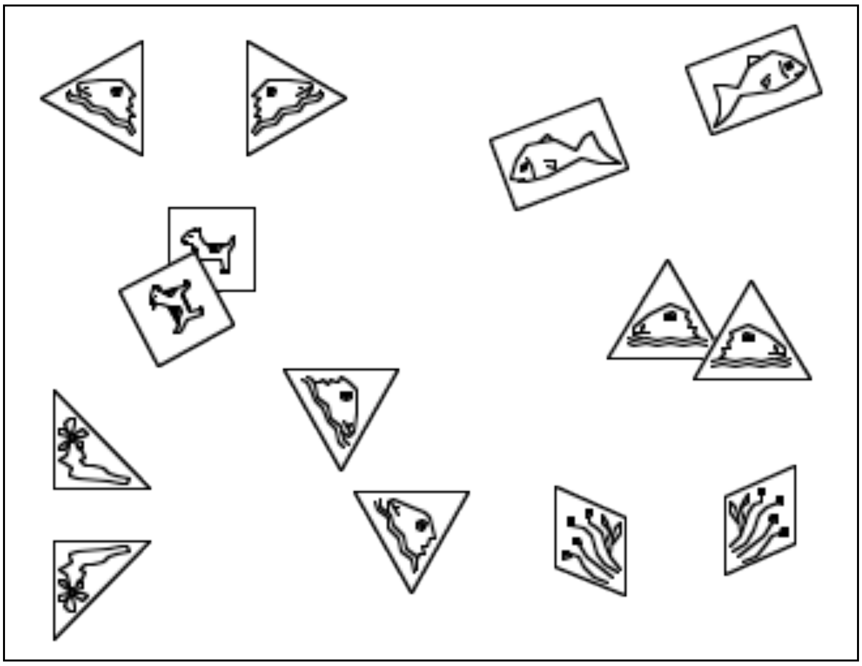




NOTA: Para la justificación de los casos negativos en la actividad siguiente, los estudiantes deben emplear la falta de paralelismo entre los segmentos que unen puntos simétricos o la existencia de más de una mediatriz para esos segmentos. No es necesario que ambas propiedades se enuncien siempre, pero sí que se observe que, si falla cualquiera de ellas, ya no hay eje de simetría.

S-2.5 Traza, cuando sea posible, el eje de simetría de cada par de puntos y figuras de las láminas (Sugerencia: Recuerda que el eje de simetría es la mediatriz de los segmentos que unen puntos simétricos). Explica cómo obtienes el eje de simetría y por qué no hay eje de simetría en algunos casos.





NOTA: En la siguiente actividad se investiga el caso particular de composición de una simetría consigo misma n veces. Si es necesario, el *profesor recordará antes de empezar la actividad el concepto de composición de isometrías haciendo referencia a las composiciones de traslaciones y giros ya estudiadas.*

S-2.6 Coloca una figura en una hoja y traza un eje de simetría cerca de ella. Aplícale a la figura esa simetría y, después, aplícale a la imagen obtenida la misma simetría. ¿Qué figura has obtenido la segunda vez? Lo que has hecho ahora es la composición S°S.

¿Qué figura se obtiene si le aplicas de nuevo la simetría a la última figura que has obtenido antes? Lo que has hecho ahora es la composición S°S°S.

Repite la actividad con otras figuras y ejes, aplicando composiciones de 2, 3, 4, 5, … veces la misma simetría.

Observa los resultados y enuncia la propiedad general que has descubierto: "Al componer una simetría consigo misma, si la componemos es 2, 4, 6, ... veces (o sea, un número par de veces), el resultado es ...... y si la componemos 3, 5, 7, ... veces (o sea, un número impar de veces), entonces el resultado es ......"

La propiedad de dejar las figuras donde estaban al componer una aplicación consigo misma se llama <u>idempotencia</u>. Por tanto, las simetrías son idempotentes: Mover una figura por S°S es lo mismo que no hacer nada.

NOTA: Más adelante el profesor puede dar una definición más matemática de idempotencia, considerando la aplicación identidad: S°S = I. Esto será necesario en las actividades de los niveles 3 y 4, pues los estudiantes de estos niveles deben simplificar adecuadamente (substituir S°S por I) y hacer conversiones, para lo cual es necesario en ocasiones añadir la aplicación identidad en forma de un par de simetrías.

Las siguientes actividades presentan situaciones en las que se trabaja con la composición de dos simetrías, con ejes paralelos o secantes. Los estudiantes no deberían tener ninguna dificultad para identificar el movimiento resultante en cada caso, si bien encontrar la relación entre las características de cada traslación o giro y las posiciones de los ejes de simetría es más laborioso. No obstante, a la larga resulta beneficioso dedicar a estos conceptos todo el tiempo necesario para que los estudiantes los comprendan bien, pues son básicos para construir la estructura algebraica de las isometrías que se desarrolla en los niveles 3 y 4.

También se proponen algunos ejemplos que demuestran la ausencia de conmutatividad en la composición de dos simetrías.

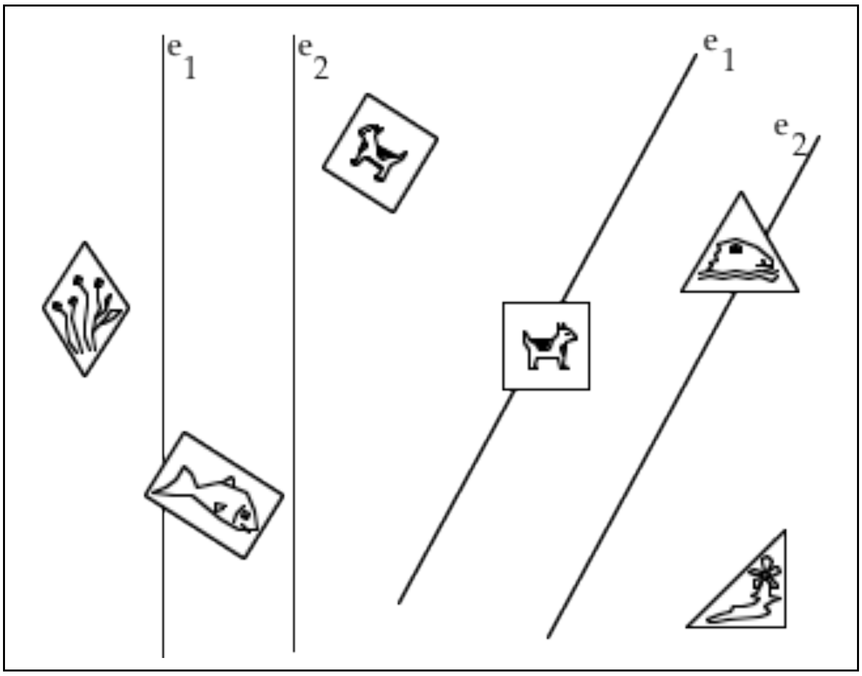
S-2.7 Aplícale a cada figura la composición $S_2°S_1$ (es decir la simetría S_1 y a su imagen la simetría S_2. Recuerda que, al indicar una composición, se escribe a la derecha el primer movimiento que actúa). Los ejes son, para cada figura, los que están más cerca de ella.

En cada caso, determina el movimiento que permite pasar directamente desde la figura inicial hasta la segunda imagen obtenida, indicando las características de dicho movimiento.

En cada caso, observa la relación que pueda haber entre las características del movimiento resultante de la composición y los dos ejes de simetría. Fíjate en las posiciones y en las distancias.

Repite la actividad con otras figuras y pares de ejes paralelos.

Generaliza el resultado de esta actividad: "La composición de dos simetrías de ejes paralelos equivale a ...... cuya dirección es ...... (relaciona la dirección del vector con la de los ejes), su sentido es ...... (relaciona el sentido del vector con el orden en el que intervienen las simetrías), y su módulo es ...... (relaciónalo con la distancia entre los ejes)".



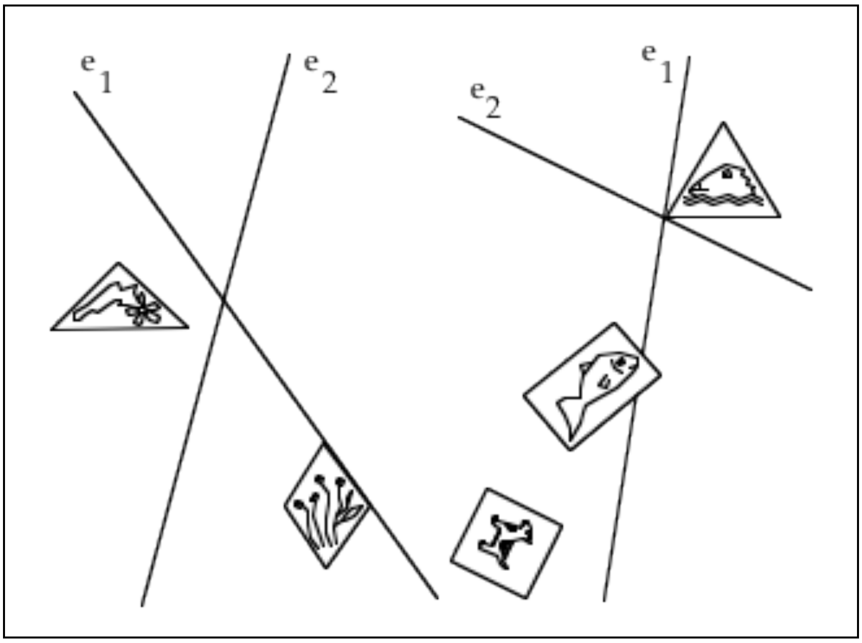
S-2.8 Aplícale a cada figura la composición $S_2°S_1$. Los ejes son, para cada figura, los que están más cerca de ella.

En cada caso, determina el movimiento que permite pasar directamente desde la figura inicial hasta la segunda imagen obtenida, indicando las características de dicho movimiento.

En cada caso, observa la relación que pueda haber entre las características del movimiento resultante de la composición y los dos ejes de simetría. Fíjate en las posiciones y en los ángulos.

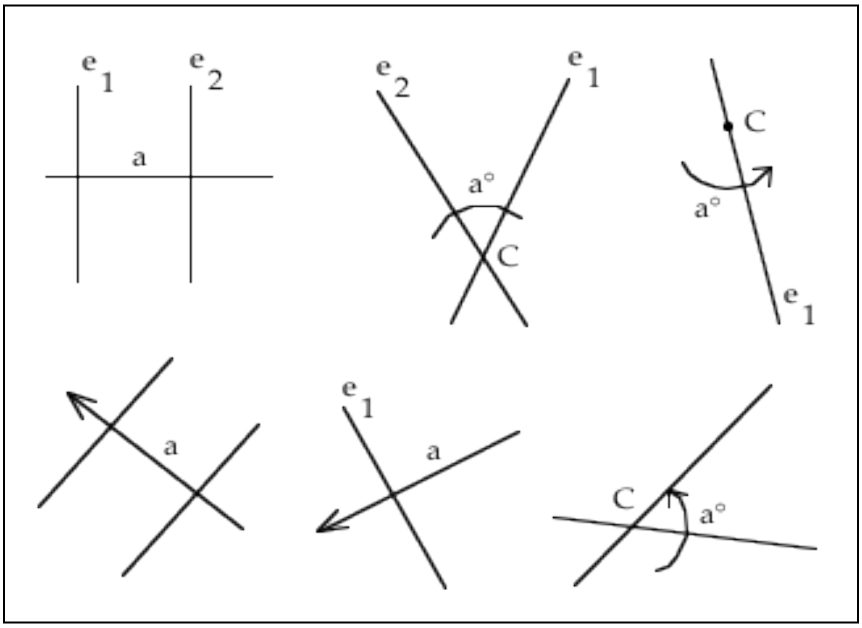
Repite la actividad con otras figuras y pares de ejes no paralelos.

Generaliza el resultado de esta actividad: "La composición de dos simetrías cuyos ejes se cortan equivale a ...... con centro ......, su ángulo es ...... (relaciónalo con el ángulo que forman los ejes), y su sentido es ...... (relaciona el sentido del ángulo con el orden en el que intervienen las simetrías)".



S-2.9 [*Utilizar las mismas láminas de las actividades S-2.7 y S-2.8*] Repite las dos últimas actividades, pero aplicando la composición $S_1 \circ S_2$. ¿Es conmutativa la composición de simetrías? ¿Qué se mantiene y qué cambia cuando los ejes de simetría son paralelos? ¿Y cuando los ejes se cortan?

S-2.10 En la lámina se dan algunas características de las simetrías S_1 y S_2 y del movimiento (traslación o giro) resultante de la composición $S_2 \circ S_1$. Completa las características que faltan de dichos movimientos, para que cada uno de ellos quede completamente identificado.

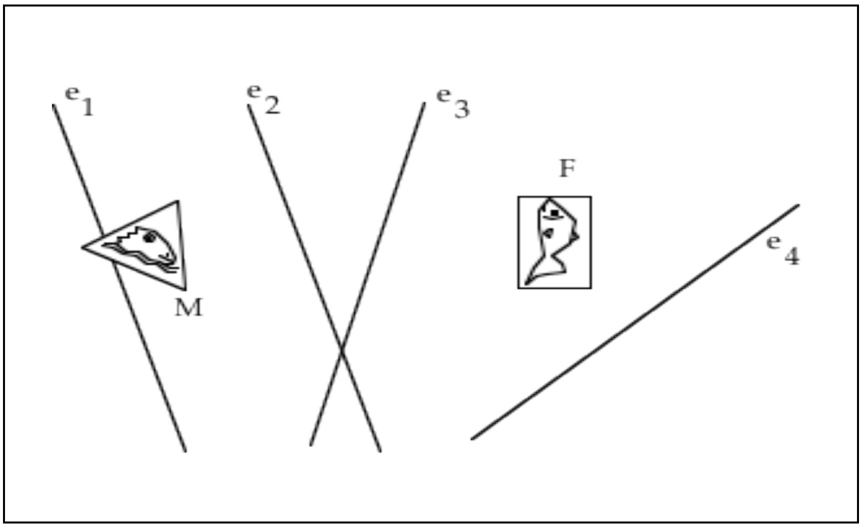


NOTA: Una dificultad en esta actividad para algunos estudiantes está en que, muchas veces, consideran que las rectas que no se cortan <u>*dentro*</u> *de la hoja son paralelas. Por lo tanto, en algunos casos pensarán que el resultado de la composición es una traslación, cuando realmente es un giro. Aunque el profesor debe ayudar a sus alumnos si se quedan bloqueados, es interesante esperar a ver cómo reaccionan ante la aparición de las primeras contradicciones (por ejemplo, ¿a qué eje es perpendicular el vector de la supuesta traslación?).*

S-2.11 Aplícale a la figura M directamente el movimiento resultante de la composición $S_2°S_1$. Comprueba luego que el resultado es correcto realizando la composición paso a paso, o sea, moviendo la figura por las dos simetrías.

Aplícale a M el movimiento resultante de $S_1°S_4$.

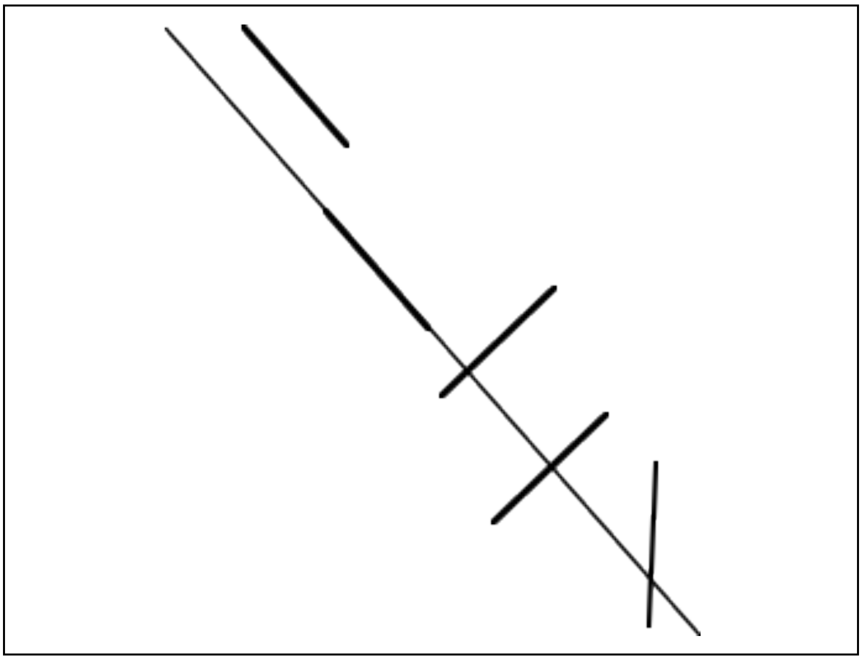
Aplícale a F el movimiento resultante de $S_2°S_3$ y también el de $S_4°S_2$.



NOTA: El objetivo de la siguiente actividad es desarrollar algún criterio de clasificación y generalización al universo al cual se aplica. Al mismo tiempo, esta actividad sirve para seguir combatiendo el problema mencionado en la actividad S-2.4.

S-2.12 Dibuja las imágenes de los segmentos de la lámina por la simetría cuyo eje está dibujado.

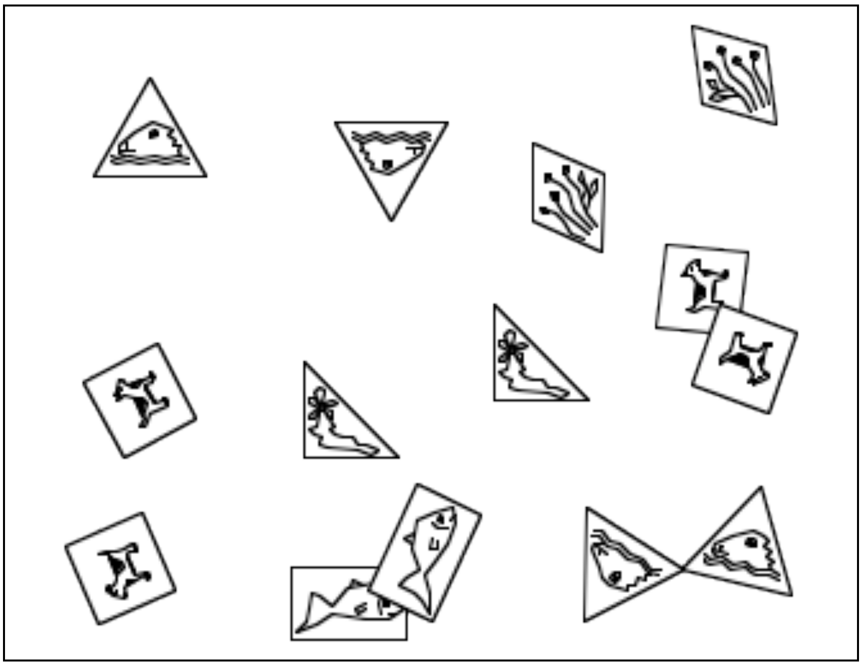
Generaliza el resultado sobre las posibles posiciones relativas de un segmento y su imagen según la posición del segmento respecto del eje de simetría.



NOTA: En la actividad S-2.13 se deben aplicar, primero, las propiedades visuales de cada isometría para determinar la existencia o no de una isometría simple (traslación, giro o simetría) ligando cada par de figuras. Después, los estudiantes deben confirmar esta primera respuesta utilizando las propiedades matemáticas adecuadas.

A continuación, en la actividad S-2.14 se toman los casos que no han tenido solución para introducir, a partir de ellos, la simetría en deslizamiento.

S-2.13 Determina cuándo es posible pasar de una figura a la otra congruente con ella mediante una isometría simple (traslación, giro o simetría).



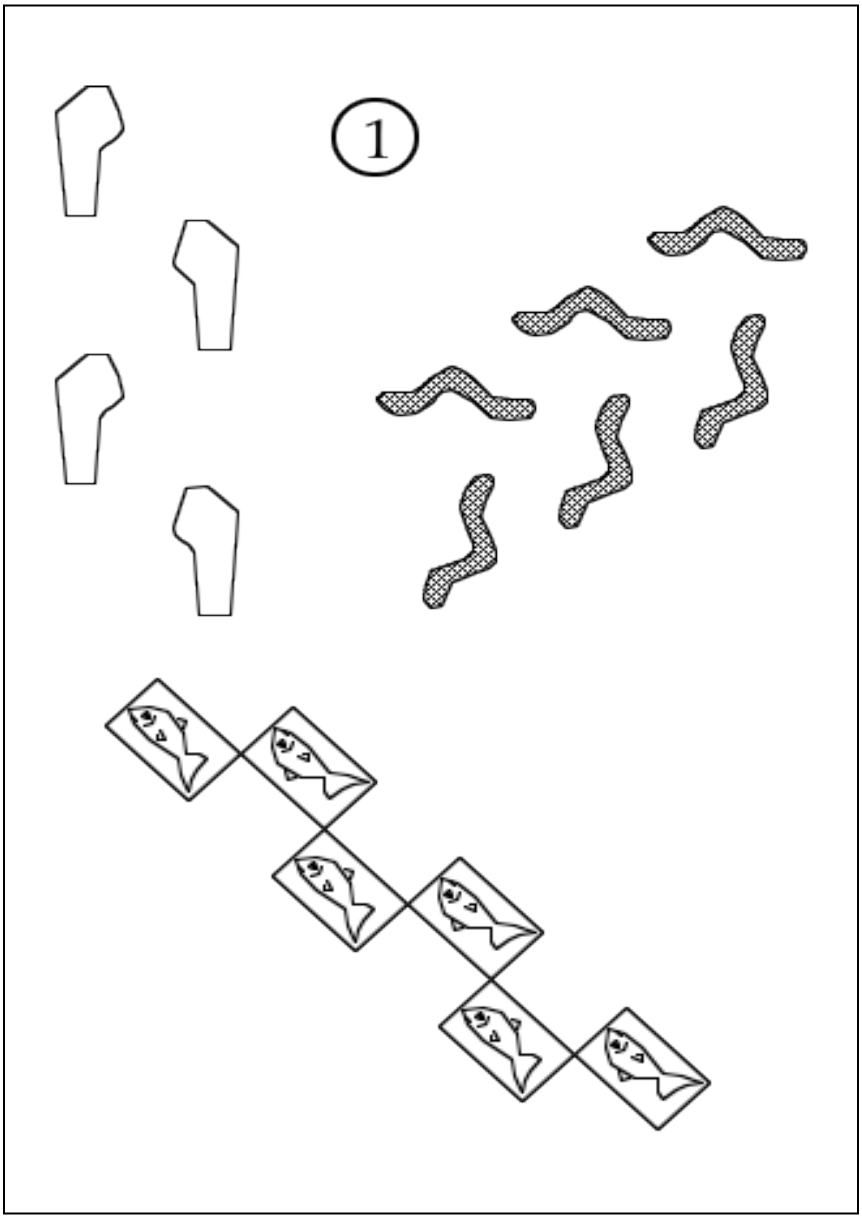
S-2.14 En la lámina 1 ves las huellas dejadas por una persona al andar. Determina si existe alguna isometría simple (traslación, giro o simetría) que transforme una huella en la siguiente.

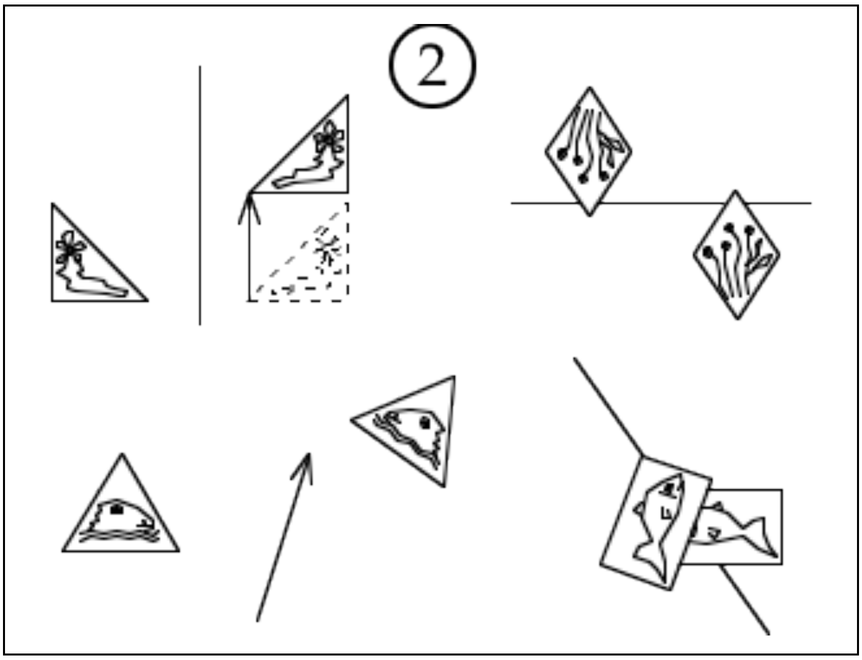
En esta lámina hay otras situaciones análogas. Pero en todas se puede pasar de una figura a la otra mediante la composición de una simetría con una traslación de vector paralelo al eje de la simetría.

En la lámina 2 tienes dibujadas en algunos casos la simetría y la traslación, en otros sólo uno de esos movimientos, y en otros ninguno de los dos. Determina los que faltan cada vez.

Esta isometría compuesta, definida como $T_v \circ S_e$ (la composición de una simetría con una traslación), con el vector v paralelo al eje e, se llama <u>simetría en deslizamiento</u> y la denotaremos por D(e,v).

Dibuja o coloca tú algunos pares de figuras entre los que haya una simetría en deslizamiento. Indica cuál es el eje y cuál el vector de la traslación.


1

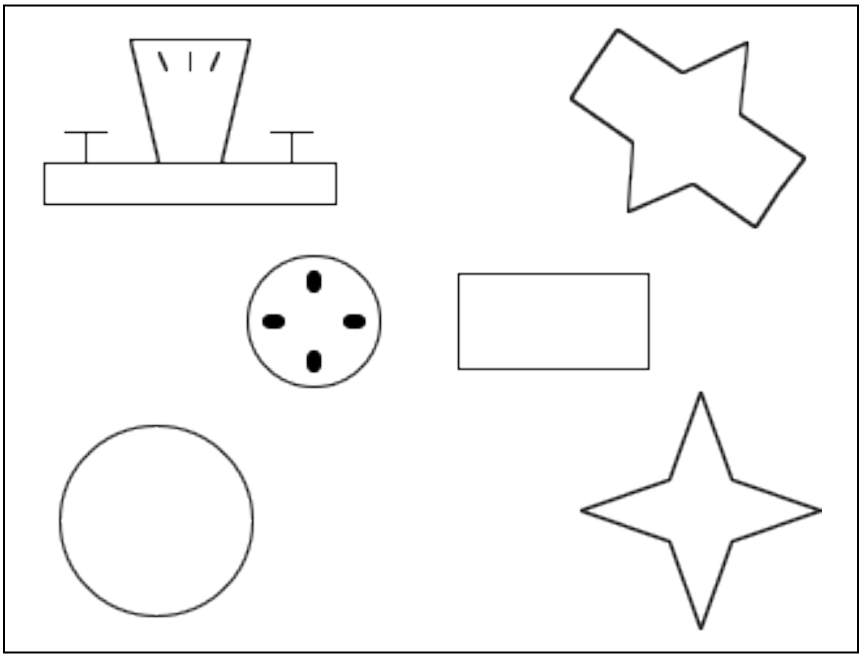


NOTA: Aunque se han realizado bastantes actividades de simetría, sólo en las primeras actividades del nivel 1 han aparecido los conceptos de figura simétrica y de eje de simetría de una figura. En las siguientes actividades se introduce el eje de simetría de una figura y se aprende a determinar y utilizar los ejes de simetría de figuras.

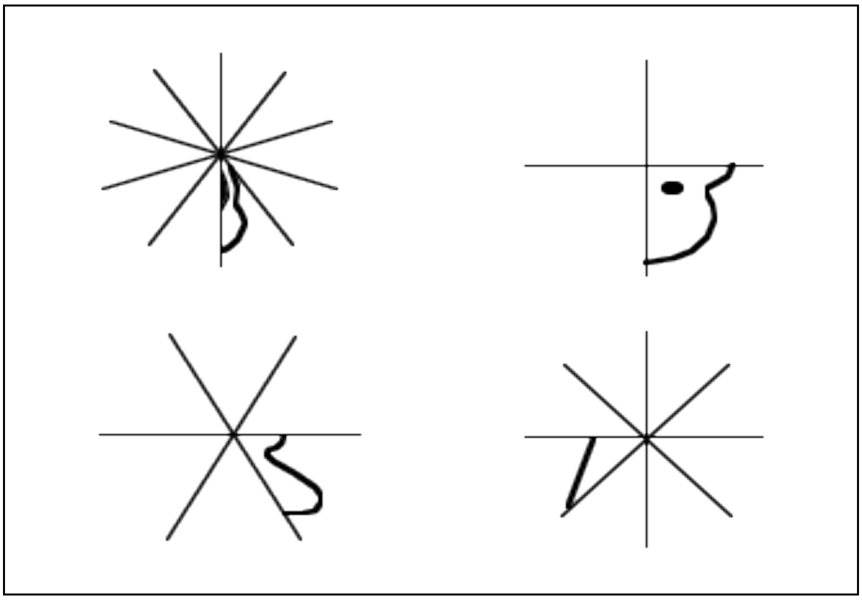
S-2.15 En la lámina hay varias figuras que, si las doblas por la mitad, coinciden las dos partes, luego si tienes sólo la mitad de la figura, puedes reconstruir la figura completa haciendo la simetría de esa mitad. O sea, al obtener la imagen por una simetría axial de media figura se obtiene la figura completa. Ese eje de la simetría es un <u>eje de simetría de la figura</u>.

Dibuja todos los ejes de simetría de cada figura de la lámina. Explica cómo los has encontrado, o por qué algunas figuras no tienen ninguno.

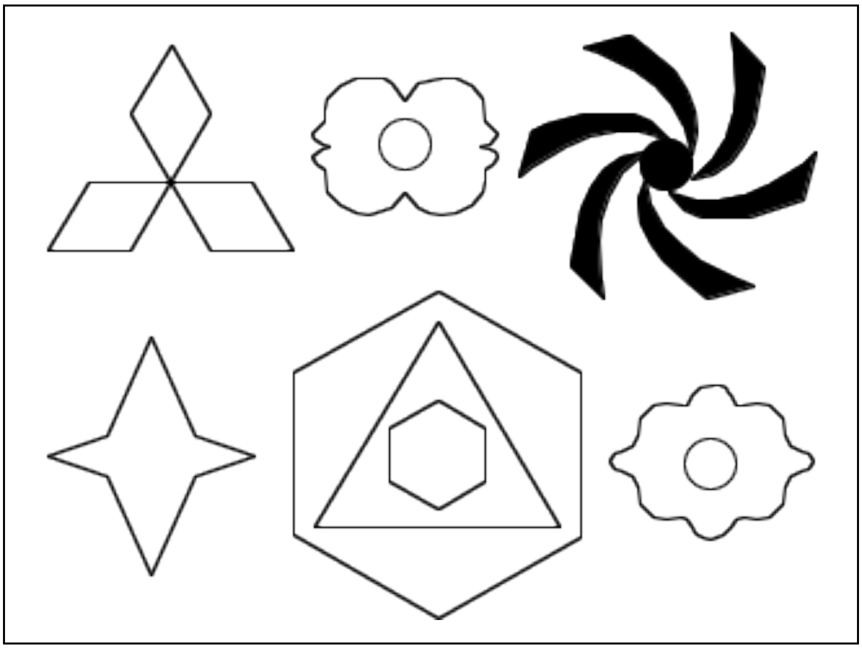
Escribe las letras mayúsculas del abecedario y dí cuáles tienen ejes de simetría.



S-2.16 En cada dibujo de la lámina hay una parte de una figura y los ejes de simetría de esa figura. Dibuja la figura completa y explica cómo lo haces.



S-2.17 Esta actividad es la contraria de la anterior: Para cada figura, determina el motivo mínimo que, mediante la aplicación de las simetrías de la figura, permite la reconstrucción de la figura completa.



S-2.18 Dibuja, o construye con piezas recortadas, figuras que tengan 1, 2, 3 ó 4 ejes de simetría. Explica algún procedimiento para obtener figuras con más ejes de simetría.

¿Pueden cortarse todos los ejes de simetría de una figura en un mismo punto? ¿Pueden ser paralelos dos ejes de simetría de una figura? Explica y justifica tus respuestas.

NOTA: En las siguientes actividades se propone la construcción de rosetones, frisos y mosaicos en cuyos sistemas generadores hay simetrías. También se plantea la situación inversa, de análisis de cubrimientos ya construidos en los que hay que identificar el motivo mínimo y las isometrías que lo componen.

Estas actividades pueden ir acompañadas del trabajo con diapositivas o fotografías de obras de arte en las que estén presentes las mismas estructuras.

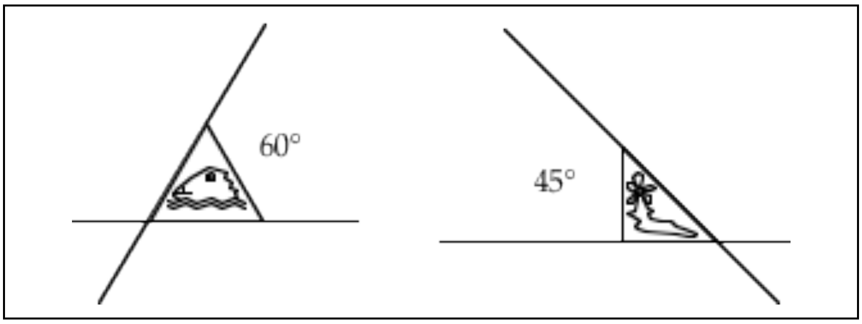
S-2.19 En cada figura de la primera lámina, construye el rosetón generado por las simetrías cuyos ejes están dibujados en la lámina (Sugerencia:

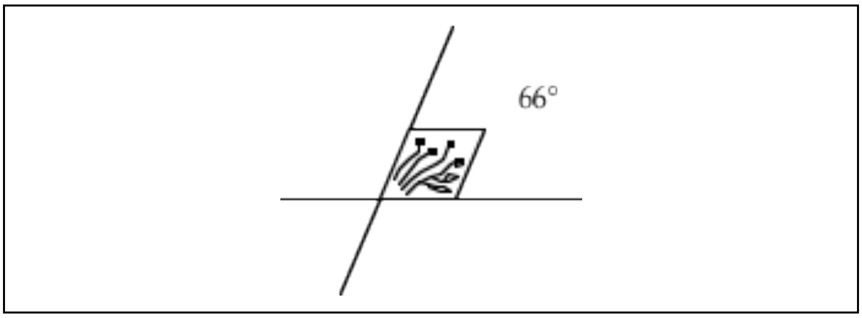
Recuerda que los movimientos de un sistema generador se aplican tanto a la figura original como a cada imagen que se va obteniendo).

¿Hay alguna relación entre la cantidad de celdas de un rosetón y el ángulo entre los ejes de simetría que lo generan? ¿Qué ángulo debe haber entre los ejes de simetría para que un rosetón tenga 5 celdas? ¿Y para que tenga 7 celdas? ¿Y para que tenga 15 celdas?

Repite esta la actividad con la figura de la segunda lámina. ¿Por qué no se forma un rosetón?

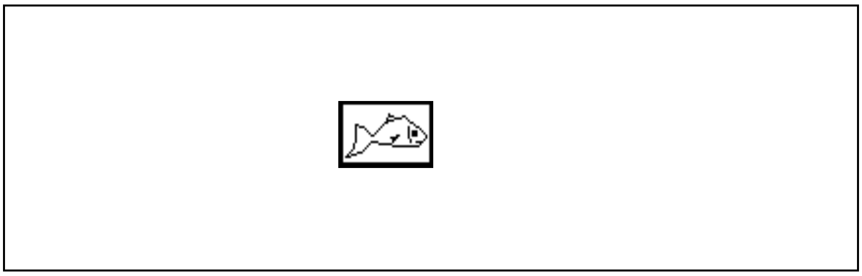
Numera 1, 2, 3, etc., consecutivamente, las celdas de cada rosetón de la lámina 1. ¿Qué isometría permite pasar directamente de la celda 1 a la 3? Determínala por completo. ¿Y de la 2 a la 4? ¿Y de la 3 a la 5? ¿Y de la 1 a la 5? Justifica por qué se obtiene un giro con el centro que has descubierto.





S-2.20 Construye un friso a partir del rectángulo de la lámina tomando como sistema generador $\{S_e, T_a\}$ (Sugerencia: Recuerda que también debes usar la traslación T_{-a}).

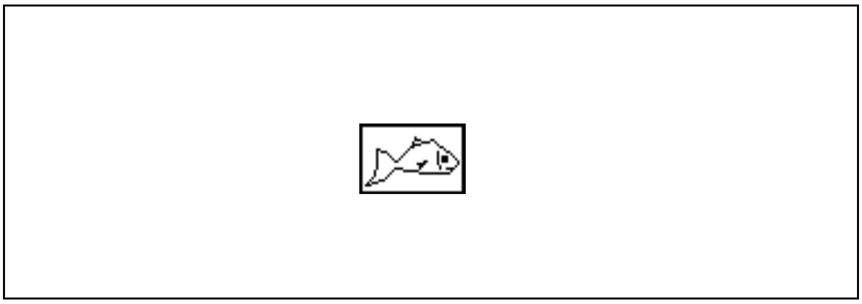
Después de construido el friso, fija una celda, alejada como mínimo dos celdas de la original, y señala las celdas desde las cuales alguno de los movimientos generadores (la simetría, la traslación T_a o la traslación T_{-a}) permite llegar hasta ella.



S-2.21 Construye un friso a partir del rectángulo de la lámina tomando como sistema generador $\{S_1 , S_2\}$.

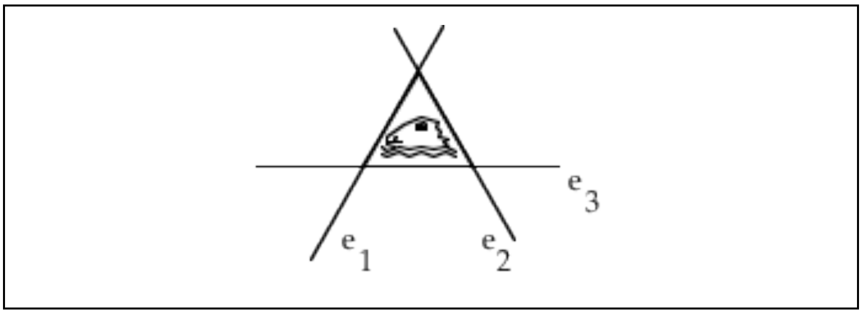
Después de construido el friso, numera consecutivamente 1, 2, 3, etc. las celdas desde un extremo hasta el otro. ¿Qué isometría permite pasar directamente de la celda 1 a la 3? ¿Y de la celda 4 a la 6? ¿Y de la celda 5 a la 3? Justifica por qué aparecen esos movimientos.

Fija una celda, alejada como mínimo dos celdas de la original, y señala las celdas desde las cuales alguna de las simetrías S_1 ó S_2 permite llegar hasta ella directamente.



S-2.22 Construye un mosaico a partir del triángulo equilátero de la lámina tomando como sistema generador $\{S_1, S_2, S_3\}$.

Una vez construido el mosaico, busca otras isometrías, que no sean simetrías, que permitan pasar de unas celdas a otras. Justifica por qué aparecen esos movimientos en el mosaico.


e
1
e
2
e
3

7.3. Actividades del nivel 3

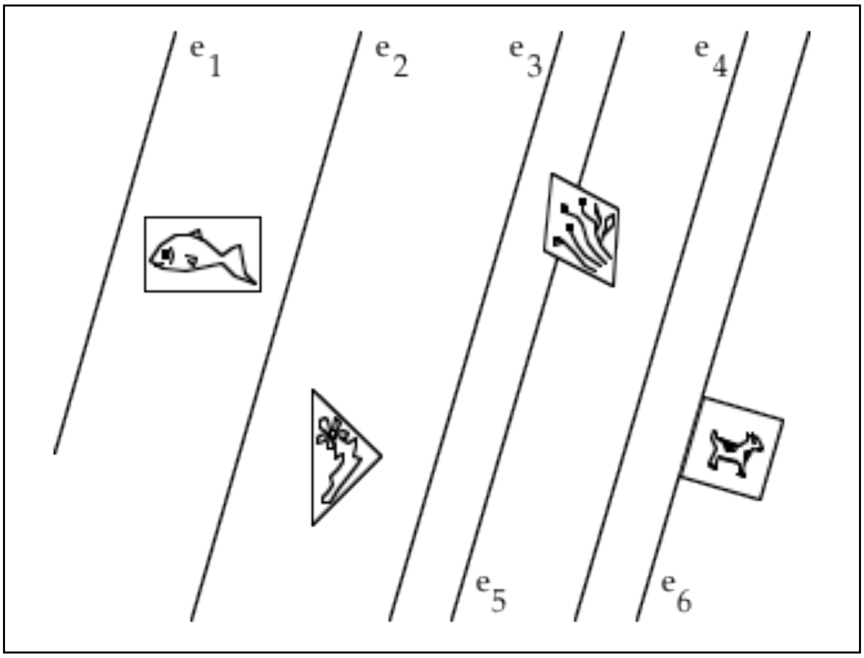
NOTA: El grupo formado por las 6 primeras actividades de este bloque tiene como objetivo continuar la enseñanza iniciada en las últimas actividades del bloque del nivel 2, estudiando la forma de descomposición de una traslación o un giro en producto de dos simetrías.

Es importante, que los estudiantes sean conscientes de la existencia de infinitas soluciones y que sean capaces de usar de manera operativa esta propiedad, pues será la base para la técnica de realización de numerosas demostraciones más adelante. Una ayuda para entender mejor dicha propiedad es asociarla a la propiedad equivalente, ya estudiada, de descomposición de una traslación o un giro en producto de dos giros.

S-3.1 A cada figura de la lámina aplícale directamente el movimiento resultante de cada una de las siguientes composiciones: $S_2 \circ S_1$, $S_4 \circ S_3$, $S_6 \circ S_5$. Explica por qué la figura final siempre es la misma. ¿Qué isometría simple (traslación, giro o simetría) permite pasar directamente desde la figura inicial hasta la última imagen? ¿Por qué es esa isometría el resultado?

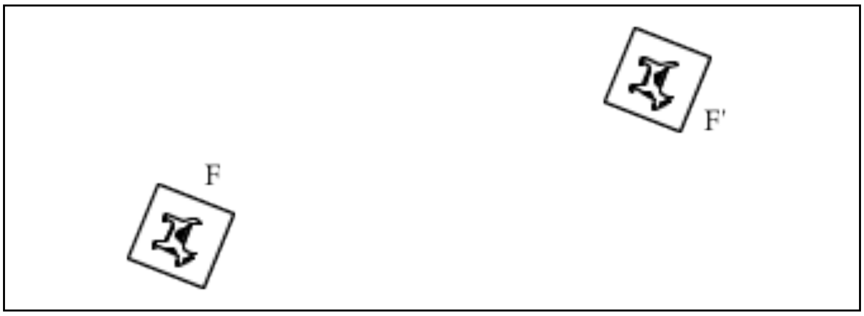
Dibuja otros pares de simetrías cuya composición sea equivalente a las anteriores. Explica cómo decides la posición de los ejes.

Dibuja otros pares de simetrías cuya composición **no** sea equivalente a las anteriores. Explica por qué no producen el mismo resultado.



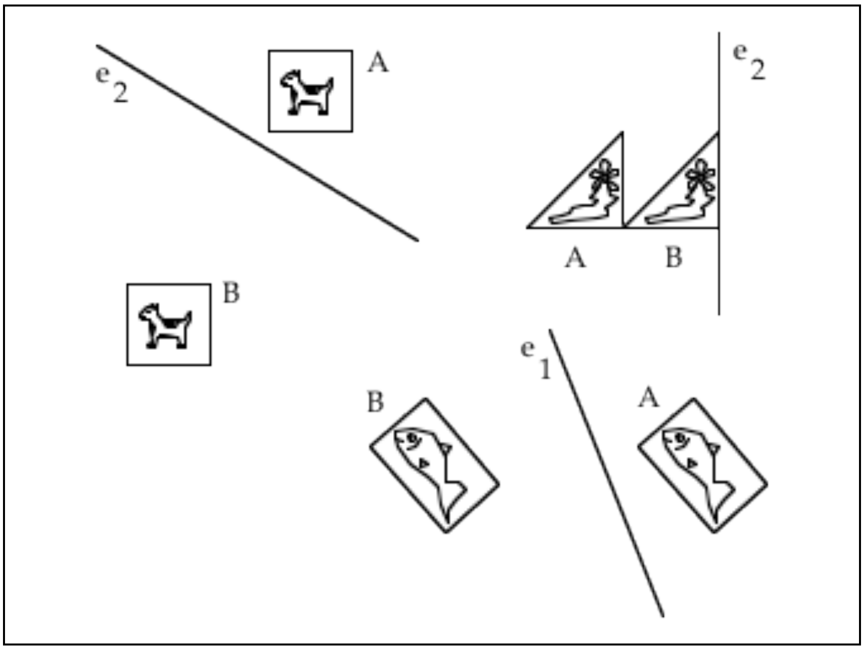
S-3.2 De F a F' puedes pasar directamente mediante una traslación. Pero ahora queremos pasar mediante dos simetrías: Dibuja un par de ejes de simetría cuya composición transforme la figura F en la F'. Expresa matemáticamente la composición realizada.

Dibuja otros pares de simetrías cuya composición sea equivalente a la anterior. ¿Cuántas soluciones posibles hay? Explica el motivo.



S-3.3 Del triángulo A al triángulo B puedes pasar directamente mediante una traslación. Pero ahora queremos pasar mediante dos simetrías. Uno de los ejes está dibujado. Dibuja tú el otro. Explica y justifica cómo lo haces. ¿Cuántas soluciones diferentes hay?

Repite la actividad con los cuadrados y después con los rectángulos. Antes de resolver la actividad, dibuja el vector de la traslación. Justifica por qué en alguno de los casos no existe solución.

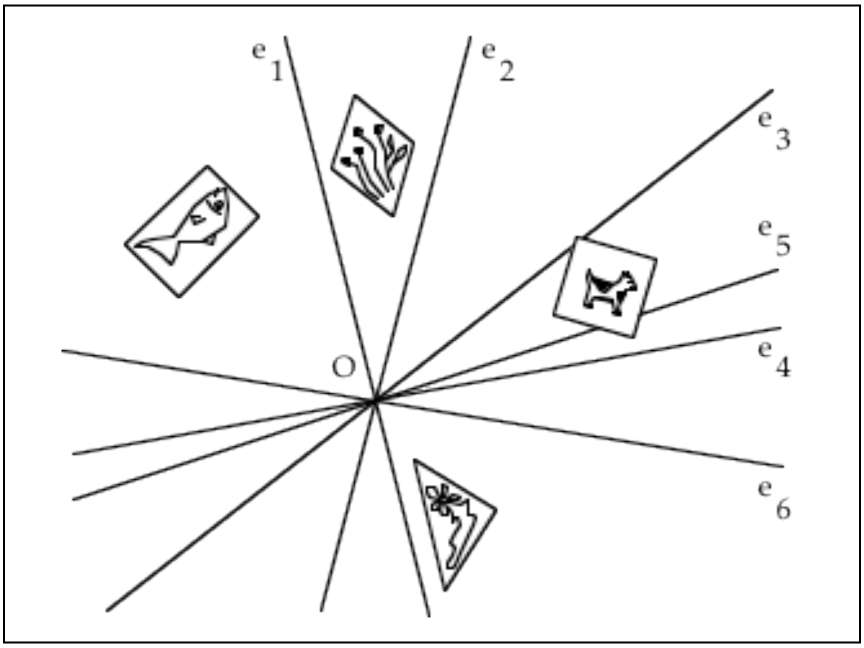


S-3.4 A cada figura aplícale directamente el movimiento resultante de cada una de las siguientes composiciones: $S_2 \circ S_1$, $S_4 \circ S_3$, $S_6 \circ S_5$.

Justifica por qué la figura final siempre es la misma. ¿Qué isometría simple (traslación, giro o simetría) permite pasar directamente desde la figura inicial hasta la última imagen? ¿Por qué es esa isometría el resultado?

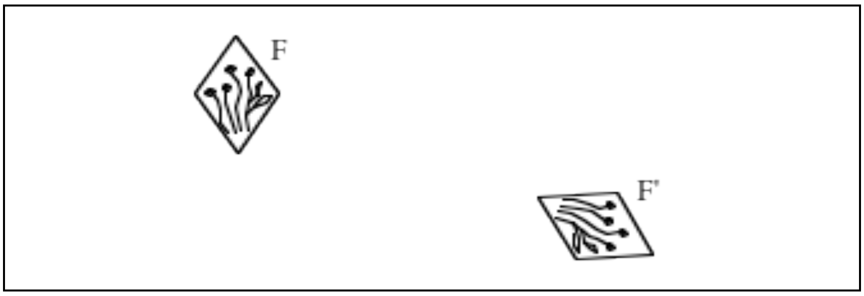
Dibuja otros pares de simetrías cuya composición sea equivalente a las anteriores. Explica cómo sitúas los ejes.

Dibuja otros pares de simetrías cuya composición no sea equivalente a las anteriores. Explica por qué no producen el mismo resultado.



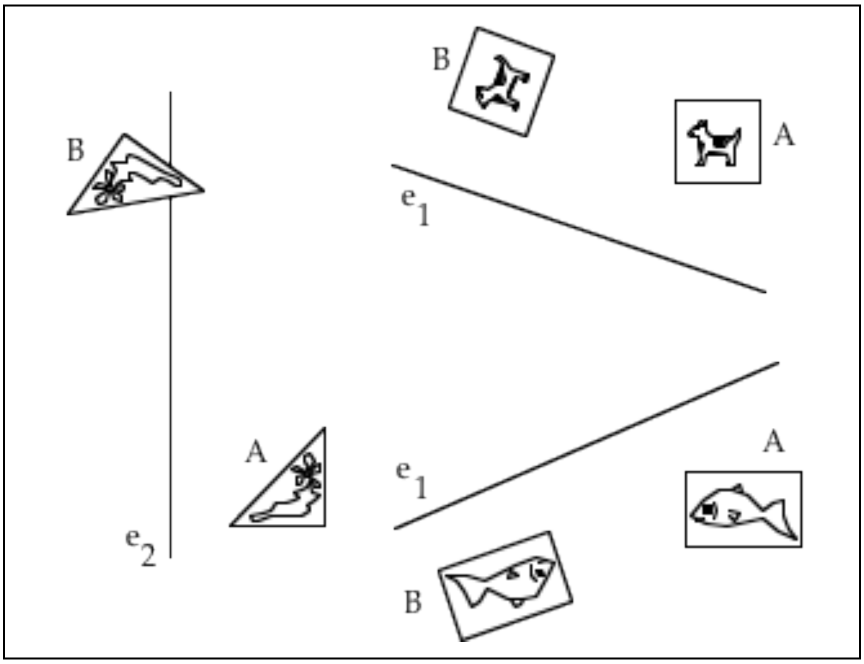
S-3.5 De F a F' puedes pasar directamente mediante un giro. Pero ahora queremos pasar mediante dos simetrías: Dibuja un par de ejes de simetría cuya composición transforme la figura F en la F'.

Dibuja otros pares de simetrías cuya composición sea equivalente a la anterior. ¿Cuántas soluciones posibles hay? Explica el motivo.



S-3.6 Del triángulo A al triángulo B puedes pasar directamente mediante un giro. Pero ahora queremos pasar mediante dos simetrías. Uno de los ejes está dibujado. Dibuja tú el otro. Explica y justifica cómo lo haces. ¿Cuántas posibilidades hay?

Repite la actividad con los cuadrados y después con los rectángulos. Antes de resolver cada caso, halla el centro del giro. Justifica por qué en alguno de los casos no existe solución.



NOTA: El siguiente grupo de actividades tiene como objetivo completar el estudio del Teorema de Clasificación de las isometrías del plano (ver el capítulo 2, teorema 25), iniciado en la actividad G-3.2.

Para ello, en la actividad S-3.7, se recuerda, en primer lugar, el resultado demostrado entonces (la existencia de un giro o una traslación para pasar de una figura a otra congruente de la misma orientación). Después, se empieza el estudio de la existencia o no de simetría, según el caso, entre dos figuras congruentes con distinta orientación, y se completa viendo que, en caso negativo, siempre hay la composición de una simetría con una traslación y de una simetría con un giro.

S-3.7 Recuerda la propiedad, que estudiaste en la sección dedicada a los giros, de que, dadas dos figuras congruentes de la misma orientación, siempre existe una traslación o un giro que permite pasar de una figura a la otra.

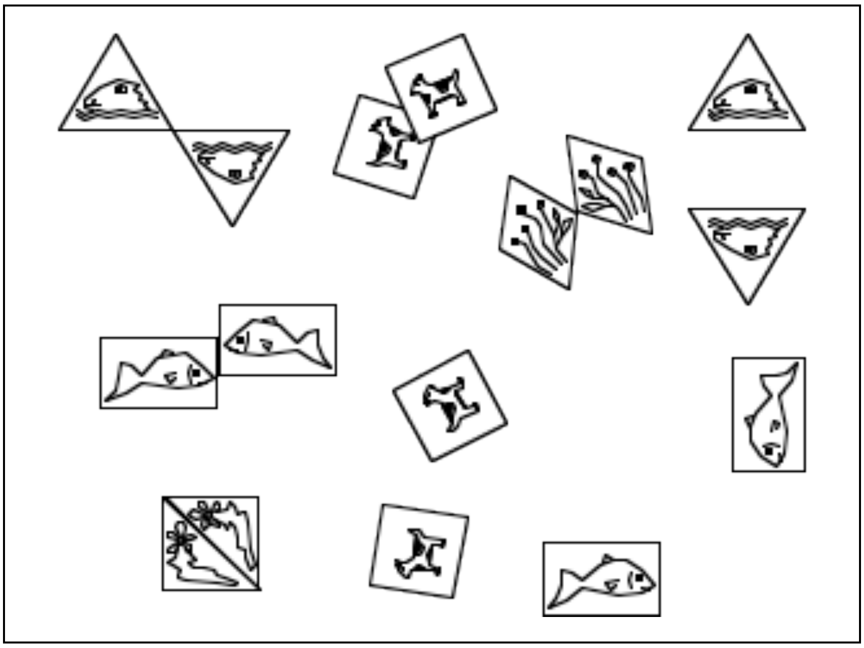
Ahora vamos a estudiar lo que sucede cuando hay dos figuras congruentes de distinta orientación (o sea, cuando hay que dar la vuelta a una de ellas para que coincidan al superponerse). Para ello te presentamos varios casos en la lámina. ¿Existe siempre una isometría simple (traslación, giro o simetría) que transforme una figura en la otra que hay junto a ella?

¿Qué sucede si las figuras están situadas de forma que coinciden 1 punto y su imagen? ¿Y si coinciden 2/3/infinitos puntos y sus respectivas imágenes? ¿Y si las figuras no tienen ningún punto en común? Coloca varios pares de figuras inversas en una lámina, de manera que cumplan esos requisitos y observa si sucede lo mismo que con los pares de la lámina que también cumplen esas condiciones. Explica las razones para tus respuestas a las preguntas anteriores.

Enuncia unas conclusiones generales que resuman los resultados obtenidos en esta actividad:

"Para pasar de una figura a otra congruente con distinta orientación, puede que exista ...... o que no haya ninguna isometría simple.

Si las figuras están colocadas de forma que coinciden uno o más puntos y sus correspondientes imágenes, entonces siempre hay ......"



S-3.8 En la actividad anterior has visto que entre dos figuras congruentes con distinta orientación no siempre existe una simetría. Ahora vamos a ver que, en estos casos, siempre es posible pasar de una figura a la otra mediante la composición de una simetría con una traslación o un giro.

A) Intenta pasar de la figura A a la A' mediante la composición de una simetría y una traslación. (Sugerencia: Es más fácil si buscas primero una traslación T_a que lleve un punto de A, por ejemplo el punto P, hasta su correspondiente en A'). Así, seguro que a continuación encuentras una simetría S_e que lleva la figura trasladada hasta A'. Ya tienes, por tanto, una solución: $S_e°T_a$.

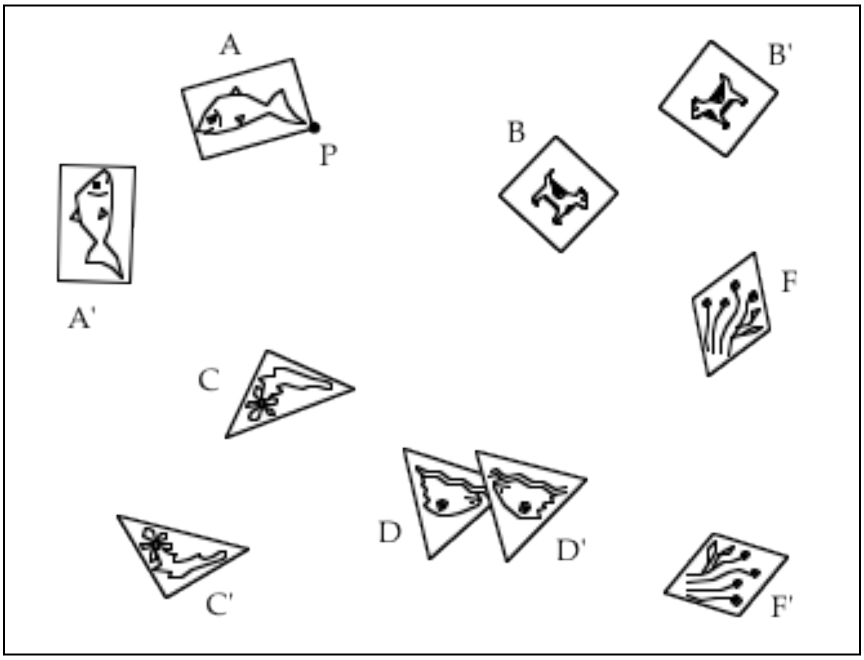
Repite la actividad trasladando otro punto de A hasta su punto correspondiente de A'. Repite la actividad con los otros pares de figuras de la lámina. Explica y justifica el método de resolución que utilizas.

B) Intenta pasar de la figura A a la A' mediante la composición de una simetría y un giro. (Sugerencia: Es más fácil si usas la misma técnica del caso anterior, pero ahora empezando por una simetría que lleve un punto de A, por ejemplo el punto P, hasta su correspondiente P'). Ya tienes, por tanto, una solución: $G(P',b°)°S_e$.

Repite la actividad moviendo otro punto de A hasta su punto correspondiente de A'. Repite la actividad con los otros pares de figuras de la lámina. Explica y justifica el método de resolución que utilizas.

Resume las propiedades que has descubierto en esta actividad:

"Para pasar de una figura a otra congruente con distinta orientación, siempre existe una simetría axial o una composición de ......"



NOTA: En las siguientes actividades se hace una revisión global de la composición y descomposición de isometrías, mediante:

- *La determinación de las características de la isometría resultante de una composición a partir de las características de los factores.*
- *La determinación de los tipos de isometrías en que se puede descomponer una isometría dada, y de las características de las isometrías en que se descompone.*

Con S-3.9 y S-3.10 pretendemos que, además de utilizar propiedades que los estudiantes deben haber aprendido anteriormente, la experiencia obtenida a partir del manejo de figuras les permita razonar sobre algunas de las características de una composición. En particular sobre las siguientes:

- *Cuando hay simetrías o simetrías en deslizamiento, la cantidad de éstas indica si la composición invierte o no el sentido de los ángulos: Número impar sí invierte, número par no.*
- *Cuando sólo hay giros y/o traslaciones, la suma de los ángulos de los giros indica si la composición equivale a un giro (esa suma no es múltiplo de 360°) o a una traslación (esa suma sí es múltiplo de 360°).*
- *Cuando en la composición hay dos simetrías consecutivas, se pueden substituir por un giro, una traslación, o la identidad, según la posición relativa de los ejes.*
- *En general, la composición de isometrías no es conmutativa, luego no se pueden reordenar los factores ni simplificar isometrías no consecutivas.*

S-3.9 Analiza cada composición que te presentamos a continuación sin aplicar ninguna de las isometrías de la composición. Para ello:

1º) Indica si la orientación de la imagen de una figura por esa composición será igual o inversa de la orientación de la figura inicial.

2º) Determina el mayor número posible de características del movimiento resultante de la composición.

3º) Cuando sea posible, especifica cuál será la inclinación relativa (el ángulo) de la imagen final respecto de la figura inicial.

4º) Pega una pieza recortada en una hoja de papel, aplícale la composición y verifica las respuestas que has dado a los tres apartados anteriores.

a) $S_1 \circ S_2 \circ G(O,50°)$; $S_3 \circ S_2 \circ G(O,50°)$; $S_3 \circ S_1 \circ G(O,50°)$

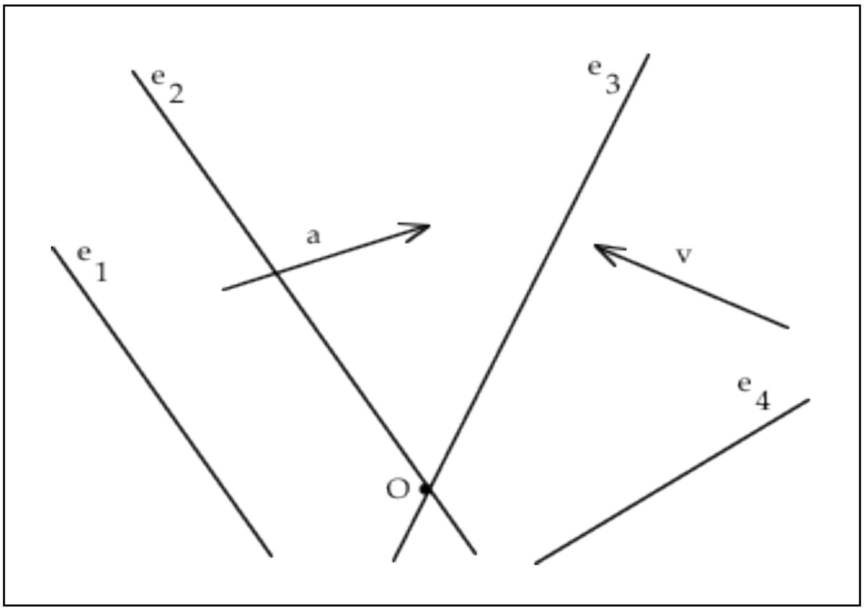
b) $S1 \circ S2 \circ S3$; $S3 \circ S4 \circ S1$

c) $S_1 \circ S_2 \circ T_a$; $S_1 \circ T_a \circ S_2$; $S_2 \circ S_1 \circ T_a$

d) $S_1 \circ S_4 \circ T_a$; $S_1 \circ T_a \circ S_4$

e) $S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ S_4$

f) $D(e_1,v) \circ T_{-v}$; $D(e_1,v) \circ S_2$, donde $D(e_1,v)$ representa la simetría en deslizamiento con eje de simetría e_1 y vector de traslación v.



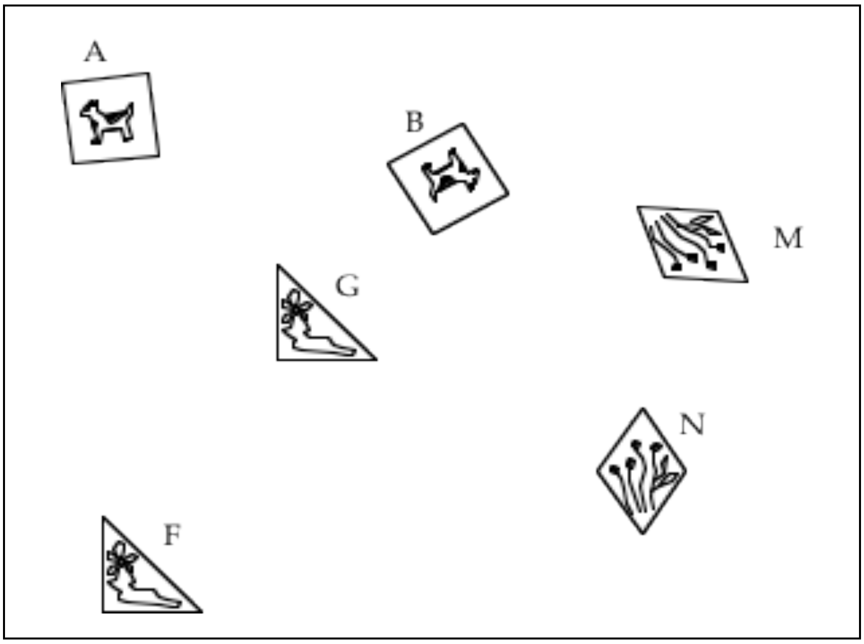
S-3.10 Basándote en las propiedades de la composición de isometrías que conoces, pero sin llegar a obtener isometrías concretas, justifica si es o no posible pasar de A a B mediante cada una de las composiciones siguientes (el orden de aplicación de las isometrías lo puedes elegir tú):

a) Composición de 2 traslaciones.
b) Composición de 3 traslaciones.
c) Composición de 2 simetrías.
d) Composición de 2 simetrías y 1 traslación.
e) Composición de 1 simetría y 2 traslaciones.
f) Composición de 2 giros.
g) Composición de 3 simetrías.
h) Composición de 1 giro y 1 simetría.

En los casos a) a h) anteriores en los que sí es posible pasar de A a B, determina una solución específica, es decir una composición de isometrías concretas (el orden de aplicación de las isometrías lo puedes elegir tú).

Finalmente, determina una isometría (traslación, giro, simetría o s. en deslizamiento) que lleve la figura A hasta la figura B.

Repite la actividad para pasar de la figura F a la G y para pasar de la M a la N.



NOTA: En el primer ejercicio de la actividad anterior pretendemos que los estudiantes utilicen un razonamiento abstracto, sin apoyo de isometrías concretas, mientras que en el segundo y tercer ejercicios les pedimos, por el contrario, la identificación de isometrías particulares. La siguiente es un ejemplo, resumido, de respuesta a la primera parte de la actividad:

- Las figuras A y B están giradas, pues tienen la misma orientación de ángulos pero inclinación distinta. Por lo tanto, no es posible llevar A hasta B mediante a), b) (pues las traslaciones no cambian la inclinación de las figuras), e), g), ni h) (pues un número impar de simetrías invierte el sentido de los ángulos). Sí es posible llevar A hasta B mediante c) (un giro se descompone en producto de dos simetrías cuyos ejes se cortan ... y cuyo ángulo es ...), d) (los ejes como en el caso anterior pero cortándose en un punto distinto del centro de giro; la imagen de A por esa composición de simetrías tendrá la misma inclinación de B, por lo que la traslación completará el recorrido sin cambiar la inclinación de la figura), y f) (un giro se descompone en producto de dos giros cuyos ángulos suman ... y cuyos centros ...).

En la actividad siguiente pretendemos algo análogo en cuanto al tipo de respuestas.

S-3.11 Simplifica todo lo posible las composiciones siguientes. Especifica también el mayor número posible de características de la isometría resultante de cada composición. Justifica y explica las respuestas (Sugerencia: No se trata de isometrías concretas, ni hay figuras que mover, luego básate en los tipos de isometría que hay y en las propiedades que conoces de ellas):

a) $S_1 \circ S_2 \circ T_a \circ T_b$, con los ejes de las simetrías paralelos y los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de igual módulo y dirección, pero sentidos opuestos.

b) $S_1 \circ S_2 \circ T_a \circ T_b$, con los ejes de las simetrías secantes y los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de igual módulo y dirección, pero sentidos opuestos.

c) $S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ T_a$, con los ejes e_1 y e_2 distintos y perpendiculares al eje e_3.

d) $S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ T_a$, con los tres ejes que se cortan en un punto.

e) $S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ T_a$, con los tres ejes distintos y paralelos.

f) $S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ T_a$, con los ejes $e_1 = e_2$ paralelos al eje e_3.

g) $S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ T_a$, con los ejes $e_1 = e_3$ paralelos al eje e_2.

h) $G(O,a°) \circ T_v$.

i) $G(O,a°) \circ S_1 \circ G(R,b°) \circ S_2$.

j) $G(O,a°) \circ S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ G(O,b°)$.

NOTA: Las siguientes actividades tienen como objetivo que los estudiantes determinen conjuntos suficientes de condiciones. En la actividad S-3.12 se trata de caracterizar una isometría simple por medio de las mediatrices de uno o más segmentos que unen puntos y sus respectivas imágenes.

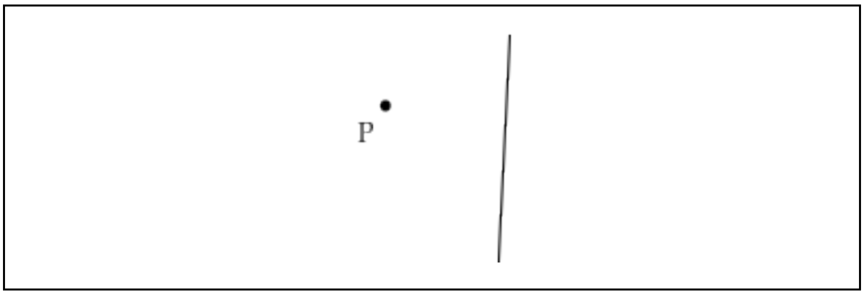
S-3.12 A) En la lámina ves un punto P y la mediatriz del segmento que une ese punto con su imagen P' por cierta isometría simple (traslación, giro, o simetría), pero no sabemos de qué isometría se trata. ¿Es posible determinar P' y la imagen de cualquier otro punto Q por esa isometría?

Si, además de los datos del apartado anterior, sabemos que la isometría es una traslación, ¿se puede determinar esa traslación? ¿Se pueden encontrar P' y la imagen de cualquier otro punto Q?

Si en vez de ser una traslación se trata de un giro, ¿se puede determinar ese giro? ¿Se pueden encontrar P' y la imagen de cualquier otro punto Q?

Si sabemos que se trata de una simetría, ¿se puede determinar esa simetría? ¿Se pueden encontrar P' y la imagen de cualquier otro punto Q?

B) Si se conocen las mediatrices de los segmentos que unen dos puntos y sus respectivas imágenes por cierta isometría, ¿se puede saber siempre de qué isometría se trata? ¿Qué relaciones debe haber entre estas mediatrices para que la isometría sea una traslación? ¿Y para que sea una simetría? ¿Y para que sea un giro?

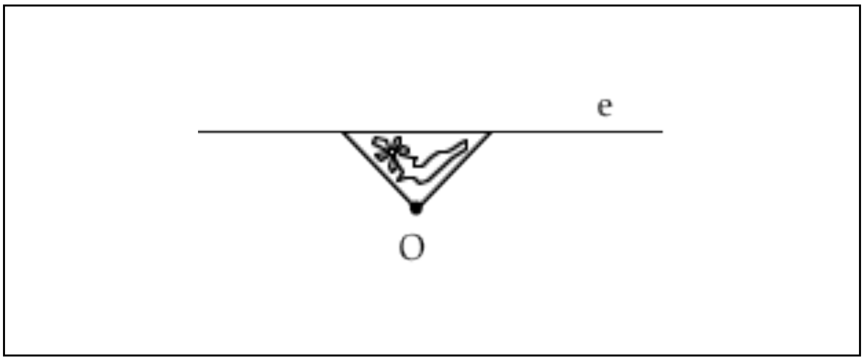


NOTA: En las siguientes actividades se completa el estudio de los rosetones, frisos y mosaicos. Se propone la construcción a partir de sistemas generadores, la obtención de sistemas generadores de cubrimientos ya construidos, y la deducción de sistemas generadores equivalentes. La diferencia principal con otros bloques de actividades anteriores está en que ahora se pueden utilizar todas las isometrías y en que se introduce la conversión de unos sistemas generadores en otros.

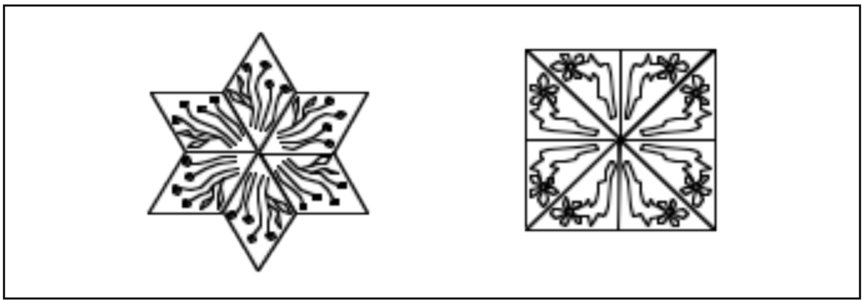
S-3.13 Construye un mosaico a partir de la baldosa de la lámina y tomando {G(O,90°), S_e} como sistema generador.

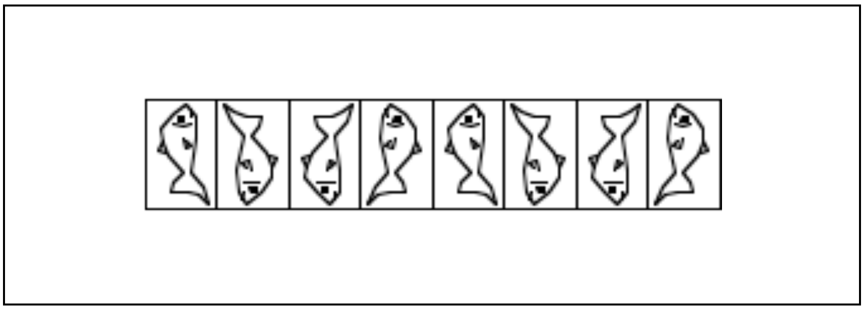
Una vez completado el cubrimiento, indica qué movimientos aparecen en él, y justifica su presencia en el mismo a partir de las relaciones entre las diversas isometrías.

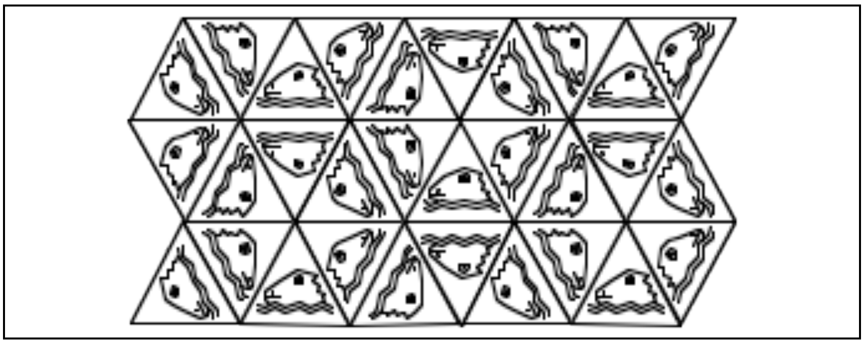
Basándote en las relaciones entre las isometrías del sistema generador, determina otros sistemas generadores del mismo mosaico.



S-3.14 Halla dos sistemas generadores diferentes para cada uno de los cubrimientos de las láminas. Demuestra que los dos sistemas generadores de cada cubrimiento son equivalentes.







NOTA: El resto de las actividades del nivel 3 de Van Hiele están orientadas a introducir a los estudiantes en el contexto de las demostraciones formales, como preparación del trabajo del nivel 4. En estas actividades, hay varios tipos de situaciones que se pueden plantear a los estudiantes:

- Realizar algunos pasos de una demostración guiada.

- Repetir una demostración que se ha presentado anteriormente.

- Aplicar una demostración conocida adaptándola a unas hipótesis algo diferentes de las anteriores o a una situación con pocas diferencias respecto del caso en el que se presentó la demostración.

- Aprender técnicas de demostración en el campo de las isometrías. Las más útiles son las basadas en deducir la equivalencia de isometrías a partir de la igualdad de la imágenes de cualquier punto o de la realización de composiciones y descomposiciones de isometrías.

En estas actividades, la intervención del profesor es importante para establecer la línea general de la demostración. Los estudiantes deben justificar cada paso (con razonamientos de nivel 3), pero el profesor debe ayudarles en cada momento a identificar el punto en que se encuentran respecto del resultado que hay que demostrar. Esta es una diferencia con el cuarto nivel de razonamiento, pues los alumnos todavía no tienen autonomía para poder desarrollar las demostraciones formales por sí mismos, y se les deben sugerir en cada momento las expresiones que hay que enlazar y la propiedad que establece la igualdad.

S-3.15 A partir de las isometrías dibujadas en la lámina, demuestra que es cierta cada una de las igualdades siguientes (Sugerencia: Cada igualdad te puede ayudar a demostrar la siguiente):

a) $S_e = S_e \circ S_m \circ S_m$

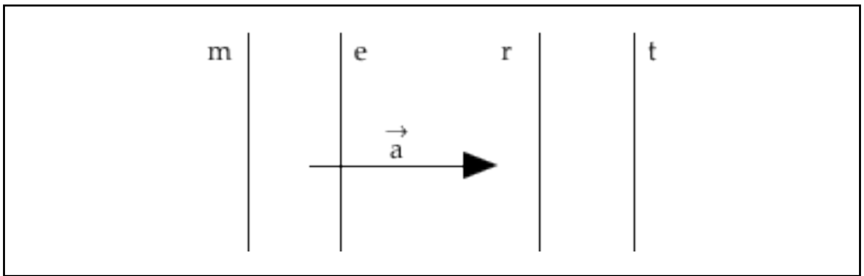
b) $S_e = T_a \circ S_m$

c) $S_e = S_t \circ S_r \circ S_m$

Ahora, demuestra las dos propiedades enunciadas a continuación (Sugerencia: Las demostraciones utilizan las igualdades anteriores):

d) Cualquier simetría S se puede descomponer en producto de una simetría de eje paralelo al de S, y una traslación de vector perpendicular al eje de S.

e) Cualquier simetría S se puede descomponer en producto de tres simetrías de ejes paralelos al de S.



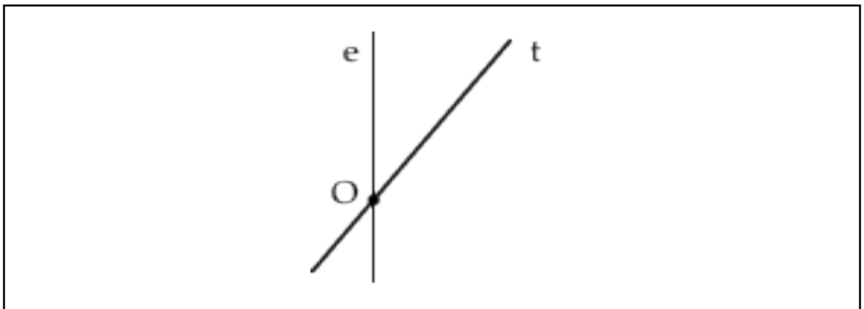
S-3.16 A) Demuestra que la simetría S_e se puede descomponer como producto de otra simetría y el giro G(O,60°), siendo O un punto del eje de simetría. Observa la figura de la lámina y continúa la demostración, explicando cada paso que escribas:

1º) $S_e = S_e \circ S_t \circ S_t$ porque ......

2º) ......

B) Demuestra que la simetría S_e se puede descomponer como producto de otra simetría y el giro G(P,180°), siendo P un punto que no pertenece al eje de simetría y *r* una recta distinta de *e*.

C) ¿Se puede descomponer cualquier simetría como producto de otra simetría diferente y un giro de cualquier amplitud? Demuestra tu respuesta.



S-3.17 Dí a qué isometría simple equivale la composición $G(O,a°)°T_V$. Explica en qué propiedades te basas para justificar tu respuesta.

Ahora vamos a hacer una demostración basada en la descomposición de traslaciones y giros en producto de simetrías y en la operación inversa. Veámoslo primero con el ejemplo concreto dibujado en la lámina: $G(A,-160°)°T_V$. Sigue los pasos indicados a continuación:

1º) Descompón la traslación en producto de dos simetrías y el giro en producto de otras dos simetrías, y haz el dibujo correspondiente: $T_V = S_2°S_1$, $G(A,-160°)= S_4°S_3$.

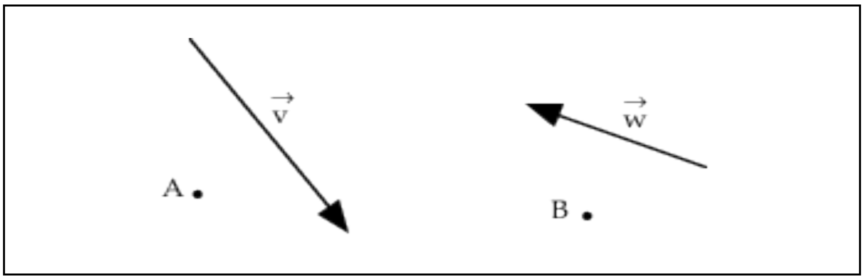
2º) Haz otra descomposición similar a la anterior, y dibújala, pero de forma que $S_2 = S_3$. Por tanto, ahora tenemos: $G(A,-160°)°T_V = S_4°S_2°S_2°S_1$.

3º) ¿A qué equivale $S_2°S_2$? Simplifica el producto de simetrías anterior: $G(A,-160°)°T_V =$ ......

4º) Observa en el dibujo que has realizado qué ejes quedan tras la simplificación. ¿A qué isometría equivale este producto? ¿Por qué el ángulo de ese giro es también de -160°? ¿Es también A el centro de este giro?

Observa que el primer paso anterior no es necesario para la demostración. Adapta la demostración anterior, sin el paso 1º, para demostrar que la composición $T_W°G(B,+40°)$ equivale a otro giro de +40°.

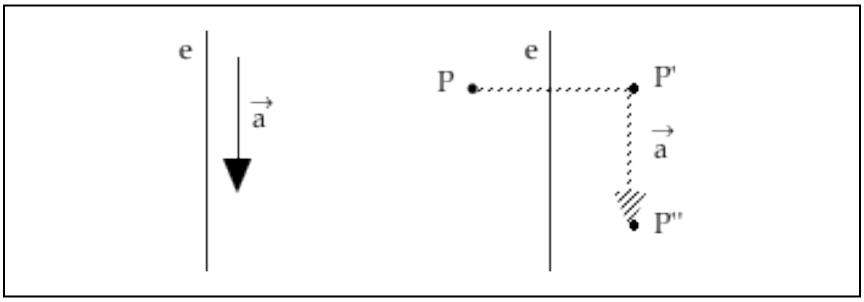
¿Se puede hacer la misma demostración para cualquier composición de un giro y una traslación? Resúmela para $G(O,a°)°T_V$. ¿Puedes demostrar también que $T_V°G(O,a°) = G(P,a°)$?



S-3.18 Se define la simetría en deslizamiento como $D(e,a) = T_a°S_e$, ¿qué relación tiene $D(e,a)$ con la composición $S_e°T_a$?

Veamos una demostración de la respuesta: $T_a°S_e = S_e°T_a$. La demostración se basará en justificar que la imagen de cualquier punto del plano es la misma por $T_a°S_e$ y por $S_e°T_a$. Para ello observa el dibujo de la lámina: P es un punto cualquiera, P' es su imagen por S_e y P'' es la imagen de P' por T_a.

Calcula la imagen de P por $S_e°T_a$. Elige otro punto del plano Q y calcula sus imágenes por $T_a°S_e$ y por $S_e°T_a$. Observa que, tanto para P como para Q, se forma un rectángulo, cuyos vértices son ...... Por tanto, ...



S-3.19 Ya sabes que la composición de dos simetrías de ejes paralelos es una traslación de vector con dirección ......, sentido ...... y módulo ......: $S_2°S_1 = T_v$. Esta propiedad la dedujiste y aprendiste hace tiempo a partir de la observación de varios casos, pero todavía no has hecho ninguna demostración general que asegure que siempre es cierta. Intenta comprender cada paso de la demostración siguiente y completar los que te pedimos:

La demostración se basa en el mismo procedimiento de la actividad anterior: Probar que la imagen de cualquier punto por la traslación T_v coincide con su imagen por la composición $S_2°S_1$:

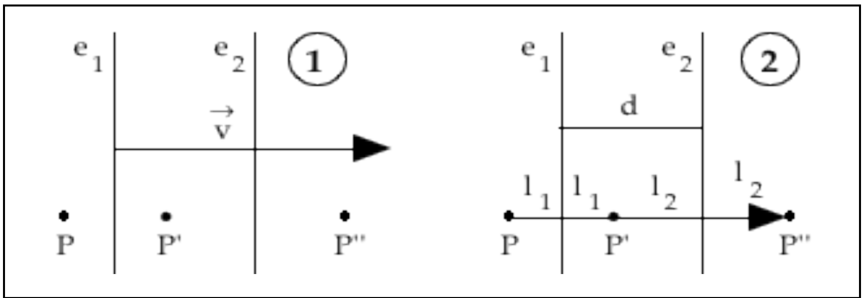
1º) El vector v tiene dirección perpendicular a los ejes e_1 y e_2, su sentido es desde e_1 hacia e_2, y su módulo es el doble de la distancia entre los ejes.

2º) Sea P un punto cualquiera. Sea P' su imagen por S_1 y sea P'' la imagen de P' por S_2 (figura 1 de la lámina).

Llamemos *d* a la distancia entre los ejes. Llamemos l_1 a la distancia desde P hasta el eje e_1 y llamemos l_2 a la distancia desde P' hasta el eje e_2 (figura 2 de la lámina). La distancia de P a P'' es $l_1 + l_1 + l_2 + l_2 = 2(l_1 + l_2) = 2d$. Explica por qué son ciertas estas igualdades.

Por tanto, el vector $\overrightarrow{PP''}$ es perpendicular a los ejes, su longitud es 2d (el doble de la distancia entre los ejes) y el sentido es desde el eje e_1 hacia el e_2. Esto significa que el vector $\overrightarrow{PP''}$ es igual al vector v.

Este resultado se obtiene cuando el punto P está en cualquier lugar del plano: En los semiplanos extremos laterales, entre e_1 y e_2, o sobre cualquiera de los ejes. Ahora, haz tú la demostración para el caso en que P se encuentra entre los dos ejes. Hazla también para el caso en que P se encuentra sobre uno de los ejes.



7.4. Actividades del nivel 4

NOTA: Los objetivos de aprendizaje de las actividades del cuarto nivel de Van Hiele son perfeccionar y completar el conocimiento que tienen los estudiantes de la estructura del conjunto de las isometrías del plano, dándole un tratamiento formal y, si el profesor lo cree adecuado, con aproximaciones diversas a las isometrías, por ejemplo algebraica y analítica (ver el capítulo 2).

En cuanto a los objetivos cognitivos de este bloque de actividades, se centran en desarrollar la capacidad de los estudiantes para razonar formalmente, para lo cual deben:

- *Reconocer cuándo se realiza una demostración válida general y cuándo se trata de un caso particular.*
- *Entender y utilizar los esquemas usuales de las demostraciones formales, tomando como hipótesis y como justificación de cada implicación propiedades ya demostradas con anterioridad.*
- *Realizar demostraciones formales de propiedades de las isometrías ya conocidas, en particular las descubiertas y generalizadas a partir de casos en las actividades del nivel 2, y el Teorema de Clasificación de las isometrías.*

Desde el punto de vista didáctico, el profesor debe tener en cuenta que la adquisición de las habilidades de razonamiento y el aprendizaje de los métodos de demostración necesarios para formar el razonamiento de nivel 4 son lentos, y que sólo los alumnos mejor dotados para las matemáticas lograrán éxito al final del Bachillerato. Por otra parte, la formación de la capacidad de razonamiento matemático formal no puede ser objetivo de un tema específico del curso, sino de todos los temas de matemáticas que se enseñen a lo largo de los sucesivos cursos.

Con la primera actividad, se pretende que los estudiantes revisen las propiedades más importantes estudiadas hasta ahora, que resuman los métodos seguidos anteriormente para demostrarlas, y que lleguen a ser conscientes de que la mayoría no son válidos desde el punto de vista matemático. Deben llegar a comprender la necesidad de usar como forma de demostración el encadenamiento con rigor de propiedades demostradas anteriormente.

S-4.1 Enuncia las propiedades más destacadas de las isometrías que te han servido hasta ahora para obtener nuevos resultados y hacer demostraciones generales:

Propiedades de composición de isometrías: ......

Propiedades de descomposición de isometrías: ......

Propiedades de elección de isometrías para mover figuras: ......

Otras propiedades: ......

Recuerda en qué te basaste para obtenerlas: Verificar algunos casos particulares, considerar todas las posibilidades, basarte en otra propiedad verdadera, etc.

En la última situación que te hemos indicado anteriormente (empleo de otra propiedad), dí cómo sabías que era cierta esas propiedad.

A raíz de tus respuestas anteriores, explica si hay alguna de las propiedades que has enunciado al principio que esté totalmente demostrada, esto es, que haya una seguridad absoluta de que se cumple siempre.

NOTA: Otras propiedades que deberían enunciar los estudiantes en la actividad anterior son las siguientes:

- Dadas dos figuras congruentes, i) si tienen la misma orientación, existe un giro o una traslación que permite pasar de una a la otra, y ii) si no tienen la misma orientación, existe una simetría o una simetría en deslizamiento.

- La variación de la inclinación de una figura al aplicarle un giro está determinada por el ángulo de giro, y es independiente del centro de giro.

S-4.2 Demuestra que la composición de dos simetrías de ejes paralelos es una traslación ($S_2°S_1 = T_v$) cuyo vector tiene la dirección ......, el sentido ...... y su módulo es ...... (Sugerencia: Recuerda la actividad S-3.19, en la que tienes un esquema de cómo realizar la demostración, comprobando que $S_2°S_1$ y T_v producen la misma imagen para cualquier punto). En la actividad S-3.19 usabas un punto P en una situación concreta. Para realizar la demostración completa es necesario estudiar todas las posibles posiciones de P respecto de los ejes de simetría.

Finalizado lo anterior, estudia la demostración que te proporciona el profesor [*se trata de la demostración del apartado -a- del teorema 12 del capítulo 2*] y sus explicaciones. Observa que esta demostración es válida para cualquier posición de los puntos, por lo que no es necesario considerar los diferentes casos posibles uno a uno. Se trata de dos formas distintas de demostrar el mismo teorema.

S-4.3 Demuestra que la composición de dos simetrías cuyos ejes se cortan es un giro ($S_2°S_1 = G(O, \hat{\alpha})$) con centro en ......, cuyo ángulo tiene el sentido ...... y su amplitud es ...... (Sugerencia: Trata de usar el mismo método de la demostración anterior, comprobando que $S_2°S_1$ y $G(O, \hat{\alpha})$ producen la misma imagen para cualquier punto y revisando todas las posiciones posibles de P respecto de los ejes de simetría).

Después intenta hacer una demostración válida para todos los puntos del plano, análoga a la que te presentó el profesor para el teorema anterior.

S-4.4 Demuestra que cualquier simetría en deslizamiento se puede expresar como producto de:

a) Tres simetrías, $D(e,v) = S_1°S_2°S_3$, y que esto se puede hacer de infinitas formas.

b) Un giro de 180° y una simetría: $D(e,v) = S_r°G(O,180°)$ (Sugerencia: Empieza descomponiendo la traslación en producto de dos simetrías).

c) Un giro de cualquier ángulo $\hat{\alpha}$ prefijado y una simetría: $D(e,v) = S_r°G(O, \hat{\alpha})$ (Sugerencia: Utiliza el resultado de -b- y descompón adecuadamente el giro de 180°).

Demuestra que, para cualquier giro y cualquier simetría S_1, hay otra simetría S_2 tal que $G(O, \hat{\alpha})°S_1 = S_2°G(O, \hat{\alpha})$.

¿Es también cierto que, para cualquier giro y cualquier simetría S_1, hay otra simetría S_2 tal que $S_1 \circ G(O, \hat{\alpha}) = G(O, \hat{\alpha}) \circ S_2$? Enuncia verbalmente este teorema: "El producto de ..... se puede expresar siempre como ......"

NOTA: En la siguiente actividad se plante la necesidad de utilizar en una demostración formal sólo resultados que ya han sido previamente demostrados formalmente. Además, vemos que, al resolver las actividades G-3.15 y G-3.16, por un lado, y al resolver la actividad S-3.17, por otro lado, se emplearon distintos grados de rigor, aunque en ambos casos se trataba de demostraciones de nivel 3 y, por lo tanto, informales.

S-4.5 En unas actividades anteriores estudiaste la propiedad siguiente: "El resultado de componer un giro con una traslación es otro giro del mismo ángulo: $G(A, \hat{\alpha}) \circ T_v = G(B, \hat{\alpha})$".

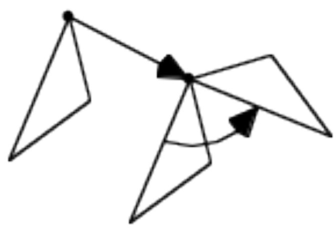
Analiza el procedimiento seguido para demostrar esta propiedad en las actividades G-3.15 y G-3.16. ¿Sirve ese procedimiento como demostración general? ¿Has demostrado matemáticamente todas las propiedades que se utilizan en esa demostración?

Repite la actividad analizando el procedimiento de demostración empleado para demostrar esta propiedad en la actividad S-3.17.

NOTA: En la siguiente actividad se sugiere esta demostración de la propiedad, que es sencilla pero que quizá requiere en algún momento orientación por parte del profesor:

a) Si existe una traslación ya tenemos el movimiento.

b) En caso contrario, siempre podemos trasladar una figura de manera que un punto concreto coincida con su homólogo de la otra figura. Entonces, hay un giro con centro en ese punto que mueve una figura hasta la otra. Hemos hecho G°T que sabemos que es equivalente a un giro del mismo ángulo.



Otro elemento importante de las demostraciones formales de geometría que los estudiantes deben aprender es la función de los dibujos, y la diferencia entre el papel que juegan en una demostración formal y el que han jugado hasta ahora en las demostraciones de niveles 2 y 3.

S-4.6 Demuestra que entre dos figuras congruentes con la misma orientación siempre existe una traslación o un giro que permite pasar directamente de una a la otra (Sugerencia: Puedes organizar la demostración así: Si existe una traslación ...... Si no existe una traslación ...... y ayudarte de dibujos).

NOTA: La siguiente demostración es larga y, aunque no utiliza conocimientos difíciles, se necesita tener siempre presente el objetivo final para entenderla. Por otra parte, es una muestra clara del tipo de estrategias que se usan en muchas demostraciones de relaciones entre isometrías.

S-4.7 Demuestra que entre dos figuras congruentes con distinta orientación siempre existe una simetría o una simetría en deslizamiento que permite pasar directamente de una a la otra. Te vamos a dar el esquema de la demostración para que tú la completes (puedes ayudarte con dibujos):

Hay que conseguir pasar de una figura, F, a la otra, F', mediante la composición de una simetría y una traslación de vector paralelo al eje de la simetría. Para ello:

1º) Si F y F' no son simétricas, siguiendo unos pasos similares a los de la demostración de la actividad anterior, puedes mover la figura F hasta la figura F' por una composición de una traslación y una simetría, $S°T$.

2º) Descompón la traslación T en producto de dos simetrías: $S°T = S°S_2°S_1$.

3º) Como T no puede ser perpendicular a S (¿por qué?), los ejes de S y S_2 se cortan. Sustituye $S°S_2$ por el giro correspondiente: $S°S_2°S_1 = G(A,a°)°S_1$.

4º) Descompón el giro G(A,a°) en otras dos simetrías ($G(A,a°) = S_4°S_3$) convenientemente para que S_3 y S_1 tengan ejes perpendiculares: $G(A,a°)°S_1 = S_4°S_3°S_1$.

5º) Sustituye $S_3°S_1$ por el giro correspondiente: $S_4°S_3°S_1 = S_4°G(B,180°)$. Ahora, descompón el giro G(B,180°) en otras dos simetrías ($G(B,180°) = S_6°S_5$) convenientemente para que S_4 y S_6 tengan ejes paralelos: $S_4°G(B,180°) = S_4°S_6°S_5$.

6º) Por último, simplifica las simetrías de $S_4°S_6°S_5$ para que se vea claramente que es equivalente a una simetría en deslizamiento.

Resume los pasos de la demostración explicando qué objetivo se pretende con cada paso que vas dando.

Juntando este resultado y el de la actividad anterior, puedes enunciar el <u>Teorema de Clasificación de las Isometrías del Plano</u>: "Toda isometría es una traslación, un giro, una simetría o una simetría en deslizamiento".

S-4.8 Demuestra que $G(B, \hat{\beta}) \circ G(A, \hat{\alpha}) = T$ cuando $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 360°$. Antes de empezar la demostración, escribe el enunciado de esta propiedad: "La composición de ...... es ...... cuando ......" (Sugerencia: Antes de hacer la demostración formal, resuelve un caso concreto en el que $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 360°$ y otro en el que $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 0°$).

Haz la demostración formal, siguiendo el esquema que te indicamos:

1º) Descompón los dos giros en productos de simetrías: $G(B, \hat{\beta}) \circ G(A, \hat{\alpha}) = S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1$, pero busca los ejes de manera que $S_3 = S_2$.

2º) Simplifica $S_3 \circ S_2$.

3º) Observa la posición de los ejes que quedan, S_4 y S_1, y sustituye su composición por la isometría simple equivalente.

Resume los pasos de la demostración explicando qué objetivo se pretende con cada paso que vas dando.

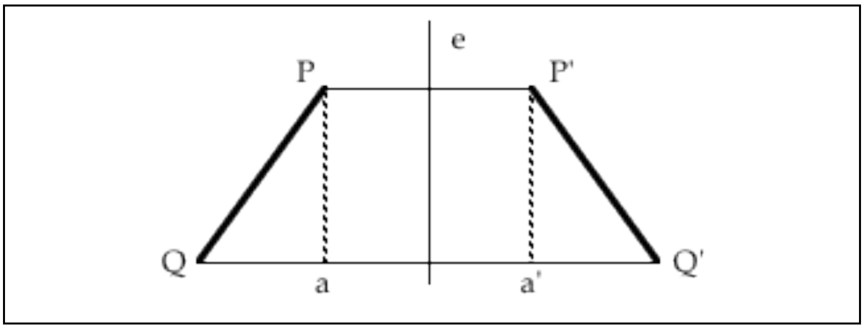
NOTA: El esquema general de la demostración de la actividad siguiente es el mismo que el de la actividad anterior, aunque ahora es un poco más complejo porque hay que utilizar propiedades de la suma de los ángulos de un triángulo para obtener el valor del ángulo que forman S_4 y S_1.

También puede ser confuso para los estudiantes obtener la expresión general del ángulo resultante como suma de los ángulos de los factores, pues las diversas combinaciones de signos de los ángulos hacen que en los casos concretos se utilicen distintos ángulos del triángulo que se forma. Por ello, el profesor debe ayudar a sus alumnos cuando lo crea oportuno.

S-4.9 Demuestra que $G(B, \hat{\beta}) \circ G(A, \hat{\alpha}) = G(C, \hat{\alpha} + \hat{\beta})$ cuando $\hat{\alpha} + \hat{\beta} \neq 360°$. Antes de empezar la demostración, escribe el enunciado de esta propiedad: "La composición de ...... es ...... cuando ......" (Sugerencia: Antes de hacer la demostración formal, resuelve algunos casos concretos variados. Después, sigue el mismo método que en la demostración de la actividad anterior).

S-4.10 Demuestra que las simetrías son isometrías: Dados dos puntos P y Q, si P' y Q' son sus imágenes por una simetría S_e, la distancia entre P y Q es igual a la distancia entre sus imágenes: d(P,Q) = d(P',Q'). Sugerencia: Distingue tres casos en la demostración:

a) Alguno de los puntos P o Q está en el eje *e*.



b) Los puntos P y Q están en el mismo semiplano de los determinados por el eje *e*. La figura te puede ayudar a completar la demostración.

c) Cada punto P y Q está en un semiplano diferente de los determinados por el eje *e*. Para hacer esta demostración, intenta convertir este caso en el anterior considerando los puntos P y Q', y sus respectivas imágenes por S_e, P' y Q.

REFERENCIAS

Alsina, C.; Pérez, R.; Ruiz, C. (1989): *Simetría dinámica*. (Síntesis: Madrid).

Arcidiacono, M. (1994): *Geometry for middle school teachers*. (Math Learning Center: Portland, USA).

Barbin, E. (1987): L'enseignement de la geometrie au college: L'archipel des isometries, *Bulletin de l'APMEP* 358, pp. 191-203.

Baulac, Y.; Bellemain, F.; Laborde, J.M. (1990): *Cabri Géomètre*. (Laboratoire LSD2, IMAG, Univ. J. Fourier: Grenoble, Fr.).

Birks, D. (1987): *Reflection: A Diagnostic teaching experiment* (M.Ed. dissertation). (Shell Centre: Nottingham, G.B.).

Brousseau, G. (1981): Problèmes de didactique des décimaux, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 2.1, pp. 37-127.

Burger, W.F.; Shaughnessy, J.M. (1986): Characterizing the van Hiele levels of development in geometry, *Journal for Research in Mathematics Education* 17.1, pp. 31-48.

Centeno, J. (1988): *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?* (Síntesis: Madrid).

Clements, D.H.; Battista, M.T. (1992): Geometry and spatial reasoning, en *Grouws, D.A.: Handbook of research on mathematics teaching and learning* (MacMillan: N. York, USA), pp. 420-464.

Colera, J. y otros (1995): *Matemáticas (4ºA ESO)*. (Anaya: Madrid).

Corberán, R.; Gutiérrez, A.; Jaime, A. y otros (1994): *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele*. (C.I.D.E., M.E.C.: Madrid).

Coriat, M. y otros (1994): *Matemáticas (3º de ESO)*. (Algaida: Sevilla).

Coxford, A.F.; Usiskin, Z.P. (1984): *Geometry, a transformation approach*. (Laidlaw Bros.: Palo Alto, USA).

Chien, C. (1989): Strategies and error patterns in solving rotation transformations, en *Proceedings of the 13th PME conference* 1, pp. 172-179.

Edwards, L.D. (1991): Children's learning in a computer microworld for transformation geometry, *Journal for Research in Mathematics Education* 22.2, pp. 122-137.

Freudenthal, H. (1973): *Mathematics as an educational task*. (D. Reidel: Dordrecht, Holanda).

Fuys, D.; Geddes, D.; Tischler, R. (1984): *English translations of selected writings of Dina Van Hiele-Geldof and Pierre M. Van Hiele*. (School of Education, C.U.N.Y.: N. York).

Fuys, D.; Geddes, D.; Tischler, R. (1988): *The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents* (Journal for Research in Mathematics Education Monograph n° 3). (N.C.T.M.: Reston, USA).

Gallou-Dumiel, E. (1987): Symétrie orthogonale et micro-ordinateur, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 8.1/2, pp. 5-60.

Generalidad Valenciana (1992a): Decreto 20/1992 del Gobierno Valenciano por el que se establece el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Valenciana, *Diario Oficial de la Generalidad Valenciana* nº 1728 (20-2-92), pp. 1428-1502.

Generalidad Valenciana (1992b): Decreto 47/1992 del Gobierno Valenciano por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Valenciana, *Diario Oficial de la Generalidad Valenciana* nº 1759 (6-4-92), pp. 2991-3123.

Generalidad Valenciana (1994): Decreto 174/1994 del Gobierno Valenciano por el que se establece el currículo del Bachillerato en la Comunidad Valenciana, *Diario Oficial de la Generalidad Valenciana* nº 2356 (29-9-94), pp. 11070-11218.

Grenier, D. (1988): *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en 6e*. (Univ. J. Fourier: Grenoble, Fr.).

Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1986): *Traslaciones, giros y simetrías en el plano*. (Univ. de Valencia: Valencia).

Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1987a): Estudio sobre la adquisición del concepto de simetría, *Enseñanza de las Ciencias* n° extra, pp. 365-366.

Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1987b): Estudio de las características de los niveles de van Hiele, *Proceedings of the 11th international conference of the P.M.E.* 3, pp. 131-137.

Hart, K. (ed.) (1981): *Children's understanding of mathematics: 11-16*. (John Murray: Londres).

Hart, K. y otros (1985): *Chelsea diagnostic mathematics tests*. (NFER-Nelson: Lancashire, G.B.).

Hershkowitz, R. (1990): Psychological aspects of learning geometry, en *Nesher, P.; Kilpatrick, J.: Mathematics and cognition* (Cambridge U.P.: Cambridge, G.B.), pp. 70-95.

Hiele, P.M. van (1986): *Structure and insight. A theory of mathematics education*. (Academic Press: Londres).

Hoffer, A. (1981): Geometry is more than proof, *The Mathematics Teacher* 74.1, pp. 11-18.

Jackiw, N. (1992): *Geometer's Sketchpad*. (Key Curriculum Press: Berkeley, USA).

Jaime, A. (1993): *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento* (tesis doctoral). (Univ. de Valencia: Valencia).

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1985): Semejanzas del plano, *Epsilon* 4, pp. 67-74.

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1990): Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele, en *Llinares, S.; Sánchez, M.V.: Teoría y práctica en educación matemática* (Alfar: Sevilla), pp. 295-384.

Jaime, A.; Gutiérrez, A. y otros (1988-89): *Diseño de un programa de enseñanza progresiva de las isometrías del plano en la E.G.B.* (memoria del proyecto de investigación). (Conselleria de Cultura, Educ. y Ciencia: Valencia).

Jaime, A.; Gutiérrez, A. y otros (1989): Introduciendo los giros del plano en E.G.B., *Suma* 2, pp. 55-59.

Kidder, F.R. (1978): Conservation of length: A function of the mental operation involved, en *Lesh, R.; Mierkiewicz, D.: Recent research concerning the development of spatial and geometric concepts* (ERIC: Columbus, USA), pp. 213-227.

Kline, M. (1992): *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días,* vol. 3. (Alianza Universidad: Madrid).

Lesh, R. (1976): Transformation geometry in elementary school: Some research issues, en *Martin, J.L.; Bradbard, D.A.: Space and geometry* (ERIC: Columbus, USA), pp. 185-243.

Lesh, R.; Mierkiewicz, D. (1978): *Recent research concerning the development of spatial and geometric concepts.* (ERIC: Columbus, USA).

M.E.C. (1991): R. Decreto 1006/91 de 14 de junio por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Primaria, *Boletín Oficial del Estado,* 26-6-91.

M.E.C. (1991): R. Decreto 1007/91 de 14 de junio por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, *Boletín Oficial del Estado,* 26-6-91.

M.E.C. (1992): R. Decreto 1178/92 de 2 de octubre por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes al Bachillerato, *Boletín Oficial del Estado,* 21-10-92.

Martin, G.E. (1982): *Transformation geometry*. (Springer Verlag: Berlín).

Martínez, A. y otros (1990): *Mtemáticas 1 (COU).* (Bruño: Madrid).

Mayberry, J. (1983): The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers, *Journal for Research in Mathematics Education* 14.1, pp. 58-69.

Moyer, J.C. (1978): The relationships between the mathematical structure of euclidean transformations and the spontaneously developed cognitive structures of young children, *Journal for Research in Mathematics Education* 9.2, pp. 83-92.

O'Daffer, P.G.; Clemens, S.R. (1977): *Geometry: An investigative approach*. (Addison Wesley: Menlo Park, USA).

Pérez, R. (ed.) (1992): *Colección "2 Puntos"* (diversos títulos). (Proyecto Sur: Granada).

Puig Adam, P. (1956): *Didáctica matemática eurística*. (Instituto de F.P. de Enseñanza Laboral: Madrid).

Ranucci, E.R.; Teeters, J.L. (1977): *Creating Escher-type drawings*. (Creative Publications: Palo Alto, USA).

Santos, D. y otros (1995): *Matemáticas (3º de ESO)*. (Santillana: Madrid).

Schultz, K.A. (1978): Variables influencing the difficulty of rigid transformations during the transition between the concrete and formal operational stages of cognitive development, en *Lesh, R.; Mierkiewicz, D.: Recent research concerning the development of spatial and geometric concepts* (ERIC: Columbus, USA), pp. 195-211.

Serra, M. (1989): *Discovering geometry. An inductive approach*. (Key Curriculum Press: Berkeley, CA, USA).

Shaughnessy, J.M.; Gutiérrez, A.; Jaime, A. y otros (1991): Analyzing and describing students' thinking in geometry: Continuity in the Van-Hiele levels, *Proceedings of the 13th Annual Meeting of the P.M.E.-N.A.* 1, pp. 183-188.

Shilgalis, T.W. (1982): Geometric transformations on a microcomputer, *The Mathematics Teacher* 75.1, pp. 16-19.

S.M.P. (1985a): *Symmetry* (serie "S.M.P. 11-16"). (Cambridge U.P.: Londres).

S.M.P. (1985b): *Reflection 1* (serie "S.M.P. 11-16"). (Cambridge U.P.: Londres).

S.M.P. (1986a): *Rotation* (serie "S.M.P. 11-16"). (Cambridge U.P.: Londres).

S.M.P. (1986b): *Reflection 2* (serie "S.M.P. 11-16"). (Cambridge U.P.: Londres).

Thomas, D. (1978): Students' understanding of selected transformation geometry concepts, en *Lesh, R.; Mierkiewicz, D.: Recent research concerning the development of spatial and geometric concepts* (ERIC: Columbus, USA), pp. 177-193.

Walter, M.I. (1973): *Entdecke neue bilder*. (Annette Verlag: Alemania).