Carlos Ivorra Castillo

PRUEBAS DE CONSISTENCIA

C'est du mystère seul que l'on a peur. Il faut qu'il n'y a plus de mystère. Il faut que des hommes soient descendus dans ce puits sombre, et en remontent, et disent qu'ils n'ont rien rencontré.

Antoine de Saint-Exupéry

Índice General

Preámbulo vii

Introducción ix

Capítulo I: Preliminares 1
1.1 La jerarquía de Lévy I . . . 3
1.2 La teoría de conjuntos de Kripke-Platek . . . 4
1.3 La jerarquía de Lévy II . . . 6
1.4 La formalización de la lógica . . . 11
1.5 Consistencia y existencia de modelos . . . 17

Capítulo II: Modelos de ZF 19
2.1 Relativización de expresiones . . . 19
2.2 Modelos transitivos, expresiones absolutas . . . 25
2.3 Los modelos V_λ . . . 32
2.4 Colapsos transitivos . . . 40
2.5 Los modelos $H(\kappa)$ . . . 48
2.6 La parte bien fundada de un modelo . . . 53

Capítulo III: Constructibilidad 63
3.1 Definibilidad . . . 64
3.2 La jerarquía constructible . . . 70
3.3 El axioma de constructibilidad . . . 77
3.4 El buen orden constructible . . . 82
3.5 Los modelos $L_\lambda[A]$ . . . 86
3.6 Argumentos de condensación . . . 93
3.7 Cardinales inaccesibles en L . . . 100
3.8 Constructibilidad relativa . . . 105
3.9 El teorema de Lévy-Shoenfield . . . 111

Capítulo IV: Extensiones genéricas 115
4.1 Filtros genéricos . . . 116
4.2 El teorema fundamental . . . 123
4.3 Modelos booleanos . . . 131
4.4 Inmersiones . . . 136

4.5 Primeros ejemplos y aplicaciones 141
4.6 Hechos adicionales 144

Capítulo V: Aplicaciones de las extensiones genéricas 153
5.1 Conservación de cardinales 153
5.2 Familias cuasidisjuntas 158
5.3 Extensiones con funciones parciales 160
5.4 Productos 171
5.5 El teorema de Easton 173
5.6 Colapso de cardinales 180
5.7 Construcción de árboles de Suslin 183
5.8 Diamantes y la hipótesis de Kurepa 187
5.9 El teorema de Hechler 192
5.10 C.p.o.s distributivos 200

Capítulo VI: Reales genéricos 205
6.1 Reales de Cohen y aleatorios 206
6.2 Adjunción de infinitos reales aleatorios 216
6.3 Descomposiciones en cerrados disjuntos 226
6.4 Reales de Sacks 230
6.5 El diagrama de Cichoń 242

Capítulo VII: Extensiones iteradas 265
7.1 Productos generalizados 266
7.2 Iteraciones de preórdenes 275
7.3 La consistencia del axioma de Martin 283
7.4 Huecos en ${}^{\omega}\omega$ o en $\mathcal{P}\omega$ 289
7.5 El axioma de las coloraciones abiertas 300
7.6 Aplicaciones del axioma de las coloraciones abiertas 316

Capítulo VIII: La independencia del axioma de elección 323
8.1 Modelos simétricos 323
8.2 Extensiones simétricas 334
8.3 Ejemplos de extensiones simétricas 342

Capítulo IX: El modelo de Solovay 357
9.1 Conjuntos hereditariamente definibles por ordinales 357
9.2 Los c.p.o.s Col(κ) y Lv(κ) 369
9.3 El modelo de Solovay 373
9.4 Uniones de conjuntos de Borel 378
9.5 Existencia de funcionales lineales 385

Capítulo X: El teorema de los ultrafiltros 391
10.1 El primer modelo de Cohen 391
10.2 TU no implica AE 406
10.3 Formas débiles de TU 412
10.4 Apéndice: El teorema de Halpern-Läuchli 415

Capítulo XI: Extensiones propias 427
11.1 Preórdenes propios 428
11.2 Preórdenes α-propios 435
11.3 Iteración de extensiones propias 440
11.4 Conservación de $\mathcal{P}\omega$ 451
11.5 C.p.o.s propios sobre isomorfismos 462
11.6 Acotación de ${}^\omega\omega$. 469

Capítulo XII: Aplicaciones de las extensiones propias 477
12.1 Existencia de $\aleph_2$-árboles de Aronszajn 478
12.2 Un modelo sin p-puntos 485
12.3 Especialización de árboles de Aronszajn 497

Capítulo XIII: El axioma de los preórdenes propios 519
13.1 La consistencia de APP 519
13.2 El principio de reflexión de aplicaciones 522
13.3 Más consecuencias de APP 534
13.4 El Axioma de Martin Máximo 537

Apéndice A: Extensiones sin álgebras de Boole 543

Apéndice B: Conjuntos cerrados no acotados y estacionarios 553
B.1 Subconjuntos de $\mathcal{P}_\kappa A$ 553
B.2 Subconjuntos de $\mathcal{P}^\alpha_{\aleph_1} A$ 557

Bibliografía 561

Índice de Materias 563

Preámbulo

Los libros *Pruebas de consistencia* [PC], *Teoría descriptiva de conjuntos* [TD] y *Cardinales grandes* [CG] suponen al lector familiarizado con mi libro de *Teoría de conjuntos* [TC], en parte también con mi libro de *Topología* [T] y, en menor medida, con el de *Lógica matemática* [LM].

Más explícitamente, para seguir [PC], un lector familiarizado con [TC] pero no con [LM] debería asimilar al menos el Capítulo I de [LM] sobre lenguajes formales y, sobre todo, estudiar la axiomática de ZFC hasta el punto en que vea evidente que todos los resultados demostrados en [TC] a partir de los axiomas de NBG son demostrables (con los mismos argumentos, una vez establecidos con técnicas distintas los hechos más básicos) en ZFC. En particular esto supone familiarizarse con el uso informal de clases propias en ZFC. Para ello el lector puede revisar las secciones 3.2, 3.3 y 10.3 de [LM]. El capítulo I de [PC] está dedicado a discutir los principales conceptos y resultados que vamos a necesitar de [LM], con el fin de que un lector no familiarizado en profundidad con [LM] pueda seguir igualmente [PC] consultando [LM] de forma puntual cuando así se requiera. Las referencias a [T] en [PC] se dan principalmente en el capítulo VI y en algunos otros puntos aislados, en relación a aplicaciones concretas.

Por otra parte, en [CG] no hay ninguna referencia directa a [T] o a [LM], pero sí que hay una fuerte dependencia respecto a [TC].

En [TD] tampoco hay referencias a [LM], pero sí que requiere esencialmnte el capítulo VI de [T], dedicado a los espacios polacos, y también en parte de algunos resultados de [TC], sobre todo relacionados con la teoría de la medida, con cardinales y con el axioma de Martin.

En cuanto a las interdependencias entre [TD], [PC] y [CG], la tabla de la página siguiente muestra un posible orden de lectura simultánea.

En realidad, [TD] no requiere nada de los otros dos libros hasta la sección 4.7, donde se usan algunos resultados del capítulo II de [PC]. La dependencia con [PC] se vuelve más estrecha a partir del capítulo VI, donde se usan además algunos resultados del capítulo III de [CG]. Los capítulos X y XI requieren esencialmente resultados de [CG], sobre todo del capítulo VII.

Por su parte, [PC] depende de [TD] únicamente en los capítulos VI y IX, y de [CG] únicamente en la aplicación presentada en la sección 12.1 y en la prueba de la consistencia del axioma de los preórdenes propios en el capítulo XIII.

Descriptiva	Consistencia	Cardinales
TD I	**PC I**	
Ctos. de Borel y analíticos	Preliminares	
TD II	**PC II**	**CG I**
Conjuntos proyectivos	Modelos de ZF	Ultrapotencias
TD III	**PC III**	**CG II**
Teoría de la recursión	Constructibilidad	Consistentes con L
TD IV	**PC IV**	**CG III**
La teoría efectiva	Extensiones genéricas	Indiscernibles de Silver
TD V	**PC V**	**CG IV**
Ctos. hiperaritméticos	Aplicaciones	Erdős y Ramsey
TD VI	**PC VI**	**CG V**
Pruebas de consistencia	Reales genéricos	Medibles
TD VII	**PC VII**	**CG VI**
Juegos infinitos	Extensiones iteradas	Débilmente medibles
TD VIII	**PC VIII**	**CG VII**
Grados de Wadge	La independencia de AE	Fuertes y superfuertes
TD IX	**PC IX**	**CG VIII**
Wadge Borel	El modelo de Solovay	Compactos, supercompactos
TD X	**PC X**	**CG IX**
La consistencia de ADP	El Tª de los ultrafiltros	Los mayores cardinales
TD XI	**PC XI**	**CG X**
La consistencia de AD	Extensiones propias	Iteraciones de Easton
	PC XII	**CG XI**
	Aplicaciones	La independencia de la HCS
	PC XIII	
	El axioma APP	

En cambio, [CG] depende esencialmente de los primeros capítulos de [PC]. El capítulo I puede leerse tras el capítulo II de [PC] (como indica la tabla) salvo la sección final 1.8, que requiere el capítulo III de [PC] (constructibilidad). Los capítulos IV y V de [PC] (sobre extensiones genéricas) se requieren ocasionalmente en el capítulo VI de [CG], pero no vuelven a ser necesarios hasta los capítulos X y XI, donde se requiere también el capítulo VII de [PC].

Por último, hay que señalar que, para entender plenamente las introducciones a [TD] y [CG] es necesario conocer algunos hechos básicos de [PC], hasta el capítulo III en algunos puntos.

Introducción

A los largo del siglo XX, los matemáticos fueron asimilando un fenómeno que en el siglo anterior nadie se había planteado: nadie dudaba de que existen problemas matemáticos tan complejos que es prácticamente seguro que nunca serán resueltos, incluso se sabía que hay problemas que no tienen solución, pero lo que difícilmente habrían imaginado los matemáticos decimonónicos es que hay afirmaciones que no pueden ser demostradas ni refutadas y, más aún, que puede demostrarse que así es (en casos concretos).

El primer ejemplo de esta situación con la que se encontraron los matemáticos fue la hipótesis del continuo (HC). Los problemas mentales que sufrió Georg Cantor en la última etapa de su vida se debieron en gran parte a la frustración por no poder demostrar ni refutar lo que más tarde se probó que era una afirmación indecidible. Cantor había llegado a demostrar que cada conjunto infinito, en particular el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, tiene un cardinal unívocamente determinado. Incluso pudo encontrar una expresión algebraica para el cardinal de $\mathbb{R}$, a saber, $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$, e incluso pudo demostrar la desigualdad $2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$ y, aunque conjeturó que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ (la hipótesis del continuo), no descartó la posibilidad de que su conjetura fuera errónea y que en realidad fuera $2^{\aleph_0} > \aleph_1$. Sin embargo, lo que nunca sospechó es que podría darse el caso de que, en cierto sentido, sólo una de las dos opciones es posible (pues una contradice a la otra), pero que, en otro sentido, las dos son posibles, en el sentido de que ni se puede demostrar una ni otra.

Esto es algo que hoy en día todos los matemáticos tienen asumido, si bien son pocos los matemáticos que sabrían, no ya demostrar que la hipótesis del continuo es indecidible, sino siquiera explicar someramente por qué es así, o cómo se sabe que es así. También es "de dominio público" entre los matemáticos que la hipótesis del continuo sólo es una entre muchas afirmaciones indecidibles, y que éstas no se restringen al ámbito de la teoría de conjuntos, sino que podemos encontrar otras relativas al análisis matemático, a la topología, al álgebra e incluso a la teoría de números.

El propósito de este libro es proporcionar al lector las técnicas básicas que permiten demostrar la indecidibilidad de una gran variedad de afirmaciones matemáticas. El primer paso en esta dirección es advertir que todos los teoremas que los matemáticos consideran "demostrados", pueden demostrarse en el sentido preciso de la palabra "demostración" que proporciona la lógica matemática a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos de *Zermelo-Fraenkel* ZFC (excepto aquellos que usan explícitamente axiomas adicionales, como la hipótesis del continuo, el diamante de Jensen, etc.) De este modo, demostrar que una afirmación es indecidible, es decir, que un matemático jamás llegará a demostrarla o a refutarla por más que se esfuerce, equivale a demostrar que no puede demostrarse ni refutarse formalmente a partir de los axiomas de ZFC. Esto supone una enorme concreción del problema.

Observemos que es equivalente decir que una afirmación ϕ no es demostrable en ZFC que decir que ZFC + $\neg\phi$ es consistente, es decir, que no puede llegarse a ninguna contradicción por añadir $\neg\phi$ a los axiomas de ZFC. Esto se debe a que si suponiendo $\neg\phi$ llegáramos a una contradicción tendríamos una demostración de ϕ por reducción al absurdo y, recíprocamente, si pudiéramos demostrar ϕ en ZFC, entonces en ZFC + $\neg\phi$ podríamos demostrar $\phi \land \neg\phi$.

Por ejemplo, que la HC no sea demostrable equivale a que ZFC + $\neg$HC sea consistente, y que no sea refutable equivale a que ZFC + HC sea consistente. Vemos así que una prueba de indecidibilidad (o de independencia) equivale a dos pruebas de consistencia. La independencia de HC es la consistencia de HC más la de $\neg$HC. Es frecuente que, a la hora de probar que una afirmación ϕ es indecidible, los argumentos empleados para probar que ϕ es consistente sean bastante distintos de los que prueban que $\neg\phi$ es consistente, por lo que en realidad las técnicas que vamos a exponer aquí son técnicas de "pruebas de consistencia", de modo que una prueba de independencia se obtiene habitualmente juntando dos pruebas de consistencia que no tienen por qué tener gran relación entre sí.

En este punto conviene aclarar que en realidad es imposible demostrar algo así como que ZFC+HC es consistente. A lo sumo podemos aspirar a una *prueba de consistencia relativa,* es decir, a demostrar que si ZFC es consistente entonces también lo es ZFC+HC. Esto se debe a que el segundo teorema de incompletitud de Gödel nos previene de la imposibilidad de demostrar que ZFC es consistente.

En efecto, en general, el segundo teorema de incompletitud afirma que si T es una teoría axiomática recursiva (y esto significa simplemente que tenemos un criterio para reconocer cuáles son sus axiomas) en la cual pueden definirse los números naturales y se pueden demostrar los axiomas de Peano, entonces la consistencia de T es equivalente a que se cumpla una cierta afirmación $\operatorname{Consis} T$ que habla exclusivamente de números naturales (de hecho, puede expresarse como que una cierta ecuación polinómica con coeficientes naturales no tenga solución), y sólo se cumple

$$\underset{T}{\vdash} \operatorname{Consis} T$$

en el caso trivial en que T es contradictoria. Más brevemente: una teoría consistente no puede demostrar su propia consistencia.[1]

[1]Hay un chiste que ilustra perfectamente el segundo teorema de incompletitud de Gödel: *"Yo era un presuntuoso, pero fui a un psicólogo y me curó. Ahora ya soy perfecto."* Del mismo modo que alguien que afirme ser perfecto revela con ello que no lo es, porque tiene el defecto de la presunción, una teoría que afirme de sí misma ser consistente es necesariamente contradictoria.

Cuando aplicamos este resultado general al caso de ZFC debemos tener en cuenta que en ZFC pueden demostrarse formalmente todos los resultados que los matemáticos son capaces de demostrar. Si existiera un argumento que realmente "nos convenciera" de que ZFC es consistente, de modo que es imposible que alguien pueda traer jamás un papel con una demostración de que $0 \neq 0$ a partir de los axiomas de ZFC y totalmente respetuosa con las reglas de razonamiento lógico, tal argumento sería formalizable en ZFC, y se convertiría en una demostración de Consis ZFC en ZFC, y el teorema de incompletitud proporciona un procedimiento mecánico para derivar de ahí la demostración de una contradicción en ZFC.

Esto no debe hacernos recelar de la consistencia de ZFC, pues tal limitación no se debe a ninguna característica particular de ZFC que convierta a la teoría en especialmente "sospechosa", sino que los teoremas de incompletitud de Gödel se aplican por igual a cualquier teoría "razonable" que sea lo suficientemente potente como para formalizar cualquier razonamiento que los matemáticos juzguen "aceptable".

Así pues, Consis ZFC es un ejemplo de afirmación aritmética que, en caso de que sea cierta (es decir, en caso de que ZFC sea consistente) es necesariamente indemostrable.[2]

Obviamente entonces, si no podemos aspirar a demostrar la consistencia de ZFC, mucho menos podemos aspirar a demostrar la de ZFC+HC, y sólo podremos demostrar que ZFC+HC es "igual de segura" que ZFC, es decir, que si ZFC+HC es contradictoria es porque ya lo era ZFC, o que por tomar la HC como axioma adicional no podemos pasar de una teoría consistente a otra contradictoria.

El teorema de incompletitud de Gödel proporciona una técnica de pruebas de consistencia, pues si podemos demostrar que

$$\underset{\mathrm{ZFC}}{\vdash} \phi \rightarrow \operatorname{Consis}\mathrm{ZFC}$$

esto nos permite concluir que si ZFC es consistente entonces en ZFC no puede probarse ϕ, o de lo contrario podríamos probar Consis ZFC en ZFC. Ésta es una de las técnicas de pruebas de consistencia que estudiaremos en este libro,[3] pero no será la más habitual. La prueba del segundo teorema de incompletitud es de naturaleza sintáctica, basada en técnicas de la teoría de la demostración, mientras que las pruebas que presentaremos aquí serán esencialmente semánticas, en un sentido que precisamos a continuación:

El planteamiento básico de ZFC es postular la existencia de unos objetos llamados "conjuntos" sin concretar de ningún modo lo que son. No existe ninguna definición operativa de lo que debemos entender por "conjunto". Podemos decir que los conjuntos son "colecciones de objetos", pero eso no ayuda en nada a determinar qué podemos afirmar y qué no podemos afirmar sobre los conjuntos.

[2] En ZFC, aunque trivialmente se puede demostrar en teorías como ZFC+Consis ZFC.

[3] Por ejemplo, veremos que la negación de la hipótesis de Kurepa implica Consis ZFC, luego HK es consistente con ZFC.

En lugar de tratar de deducir "filosóficamente" las propiedades de los conjuntos de una definición "filosófica" de conjunto, lo que hace ZFC es presentar explícitamente unos axiomas que describen lo que podemos afirmar a priori sobre tales "conjuntos". Aunque sería fácil considerar una teoría que distinguiera entre "conjuntos" y objetos que, pudiendo ser elementos de los conjuntos, no son ellos mismos conjuntos, lo cierto es que esa distinción sólo complicaría las formas sin aportar realmente más potencia a la teoría, así que ZFC adopta el convenio contrario: todos los objetos de los que se puede hablar en ZFC son conjuntos.

Existen muchos conceptos de los que podemos hablar independientemente de cualquier teoría de conjuntos, como son los números naturales, los conceptos geométricos de punto, recta, plano, etc., pero para "insertarlos" en ZFC necesitamos adoptar alguna clase de convenio que nos permita identificarlos con algunos conjuntos. En el caso de los números naturales, la forma usual de hacerlo es convenir en que $0 = \varnothing$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, etc., aunque cuando consideramos los números naturales como parte de los números enteros, racionales o reales, cambiamos esta identificación por otras más complejas.

Ahora bien, bajo el supuesto de que, en efecto, ZFC es consistente y, por consiguiente (en virtud del teorema de completitud de Gödel), existen unos objetos que satisfacen los axiomas de ZFC, sucede que no existe una única forma de interpretar dichos axiomas, sino que existen, de hecho, infinitas formas de interpretar las palabras "conjunto" y "pertenencia" (los únicos conceptos que en ZFC no se definen a partir de otros más elementales) de modo que se cumplan en cualquier caso los axiomas de ZFC, pero de modo que haya afirmaciones que resultan ser verdaderas con unas interpretaciones posibles y falsas con otras.

Ésta es la razón de fondo por la cual ciertas afirmaciones como la hipótesis del continuo, el diamante de Jensen, la existencia de árboles de Kurepa, etc. no son demostrables ni refutables a partir de los axiomas de ZFC, porque hay posibles interpretaciones de las palabras "conjunto" y "pertenencia" respecto a las cuales estas afirmaciones son verdaderas y otras respecto a las cuales son falsas, pero en todas ellas son verdaderos los axiomas de ZFC, por lo que el hecho de que se cumplan dichos axiomas no implica que se cumplan necesariamente, ni tampoco que no se cumplan, tales afirmaciones.

Quizá el lector se pregunte cómo podemos afirmar que existen distintas interpretaciones de los axiomas de ZFC no equivalentes entre sí cuando acabamos de decir que es imposible justificar que exista al menos una. La respuesta es la siguiente: si admitimos que ZFC es consistente, es decir, que existen unos objetos (con una relación de pertenencia definida entre ellos) que cumplen los axiomas de la teoría de conjuntos y que, por tanto, podemos referirnos a ellos coherentemente como "la totalidad de los conjuntos", es posible definir clases de conjuntos M con la propiedad de que si decidiéramos llamar "conjuntos" exclusivamente a los elementos de M, prescindiendo de los conjuntos que queden fuera, como si no existieran, los axiomas de la teoría de conjuntos siguen siendo válidos, de modo que un matemático que sólo "viera" los conjuntos de M no notaría la falta del resto.

Por ejemplo, puesto que un axioma de ZFC afirma que, para cada par de conjuntos x, y, debe existir el conjunto $\{x, y\}$, una clase M en las condiciones que estamos describiendo deberá cumplir que para cada par de conjuntos x, $y \in M$, se cumple que $\{x, y\} \in M$. Así, alguien que sólo "sea capaz de ver" los conjuntos de M no "verá" ninguna violación del axioma del par, y lo mismo debe aplicarse a todos y cada uno de los axiomas de ZFC.

La cuestión es que, partiendo de una noción indeterminada de "conjunto" sin suponer más que el hecho de que con ella se cumplen los axiomas de ZFC, es posible definir adecuadamente clases M en estas condiciones (lo que se llaman modelos de ZFC) de manera que al restringir el concepto de "conjunto" a los elementos de M, no sólo se sigan cumpliendo los axiomas de ZFC, sino que además se cumplan afirmaciones como la hipótesis del continuo o su negación. Cada vez que encontramos dos clases M y M' que sean modelos de ZFC en el sentido indicado y de modo que, al llamar "conjuntos" únicamente a los elementos de M sea verdadera una sentencia ϕ, mientras que al llamar "conjuntos" únicamente a los elementos de M' pase a ser verdadera $\neg\phi$, podemos concluir que ϕ no es demostrable ni refutable a partir de los axiomas de ZFC, ya que el hecho de que unos objetos cumplan los axiomas de ZFC no obliga ni a que se cumpla ϕ ni a que se cumpla $\neg\phi$.

En este libro definiremos con precisión el concepto de "modelo de ZFC" que acabamos de esbozar y a partir de ahí desarrollaremos técnicas para construir modelos que justifiquen la consistencia de muchas afirmaciones indemostrables en ZFC (siempre bajo el supuesto de que ZFC es consistente, porque si fuera contradictorio todo sería demostrable a partir de sus axiomas).

Capítulo I

Preliminares

Para demostrar que algo no se puede demostrar son necesarios algunos conceptos y resultados de lógica matemática que van más allá del saber razonar competentemente en teoría de conjuntos (cosa que puede hacerse incluso sin ningún conocimiento específico de lógica formal). Todos estos requisitos están tratados sobradamente en [LM], pero aquí destacaremos los que realmente serán necesarios, de modo que un lector no familiarizado con [LM] pueda seguir este libro sin más que recurrir a [LM] para algunas demostraciones aisladas. El lector familiarizado con [LM] puede saltarse este capítulo o, a lo sumo, leerlo rápidamente para refrescar en su memoria los hechos que vamos a necesitar después. (Al menos debería leer la nota inicial de la página 5.)

En primer lugar, el lector deberá estar familiarizado con el hecho de que la teoría axiomática de conjuntos se "materializa" a través de un lenguaje formal (metamatemático) que llamaremos $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$, y debe conocer las definiciones y propiedades básicas de dichos lenguajes (términos, fórmulas, variables libres, etc.) Para los resultados generales sobre lenguajes formales remitimos al capítulo I de [LM] (el lenguaje $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ se introduce en [LM 3.8]).

En segundo lugar, el lector debe tener asimilado que todos los teoremas que los matemáticos aceptan como "demostrados" sin hipótesis para las que no tienen argumento alguno que las justifiquen objetivamente, como pueda ser la hipótesis del continuo o el diamante de Jensen, pueden demostrarse en ZFC, que es la teoría que resulta de añadir el axioma de elección a la teoría de *Zermelo-Fraenkel* ZF cuyos axiomas son indicados en la página siguiente.

Los cuatro primeros axiomas determinan la teoría que llamamos ZF^* y es equivalente a la teoría NBG^* descrita tanto en [LM] como en [TC]. El lector debe comprender en qué consiste dicha equivalencia. En términos rigurosos está enunciada y demostrada en [LM 10.17], pero no es necesario que el lector asimile esa demostración. Basta con que comprenda que la diferencia esencial entre NBG^* y ZF^* es que en la primera los "objetos de estudio" reciben el nombre de "clases", y de entre ellas se definen los "conjuntos", mientras que en ZF^* sólo tenemos el concepto (indefinido) de "conjunto", que se corresponde con el concepto de

La teoría de conjuntos ZF

Extensionalidad	$\bigwedge xy(\bigwedge u(u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$
Par	$\bigwedge xy \bigvee z \bigwedge u(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$
Unión	$\bigwedge x \bigvee y \bigwedge u(u \in y \leftrightarrow \bigvee v(u \in v \wedge v \in x))$
Reemplazo	$\bigwedge xyz(\phi(x, y) \wedge \phi(x, z) \rightarrow y = z)$
	$\rightarrow \bigwedge a \bigvee b \bigwedge y(y \in b \leftrightarrow \bigvee x \in a\, \phi(x, y))$ $(*)$
Infinitud	$\bigvee x(\varnothing \in x \wedge \bigwedge u \in x\, u' \in x)$
Partes	$\bigwedge x \bigvee y \bigwedge u(u \subset x \rightarrow u \in y)$
Regularidad	$\bigwedge x(x \neq \varnothing \rightarrow \bigvee u(u \in x \wedge u \cap x = \varnothing))$

$(*)$ para toda fórmula $\phi(x, y)$, tal vez con más variables libres, distintas de b.

"conjunto" de ZF*. Los axiomas de ZF* permiten probar exactamente las mismas propiedades sobre los conjuntos que los axiomas de NBG*, pero, en principio, no permiten, no ya demostrar, sino siquiera enunciar ninguna propiedad sobre clases. Ahora bien, lo cierto es que en ZF* también puede hablarse de clases, informal, pero rigurosamente, en el sentido que se discute en[1] [LM 3.2.2]. La idea es que las clases en ZF* deben entenderse esencialmente como fórmulas metamatemáticas, de modo que la clase determinada por una fórmula $\phi(x)$ es la colección de todos los conjuntos que cumplen $\phi(x)$, aunque no exista ningún conjunto cuyos elementos sean dichos conjuntos.

En la práctica, el lector puede constatar que todos los hechos básicos sobre clases y conjuntos que se demuestran a partir de los axiomas de NBG* pueden probarse (alterando a veces ligeramente los argumentos y la forma de concebir los que hagan referencia a clases propias) a partir de los axiomas de ZF*, y viceversa. Alternativamente, si el lector está dispuesto a aceptar sin pararse en detalles que los razonamientos conjuntistas básicos son formalizables en NBG* (como se muestra en [TC]), puede aceptar al mismo precio que ZF* cumple la misma función, y no necesitará más detalles al respecto para seguir este libro. En cuanto a los axiomas restantes de NBG y ZFC son exactamente los mismos para ambas teorías y están discutidos con detalle tanto en [LM, Capítulo XI] (incidiendo más en cuestiones lógicas) como en [TC] (principalmente en el Capítulo III, incidiendo más en cuestiones propiamente conjuntistas). En definitiva sucede que, una vez deducidas (por caminos diferentes) las propiedades básicas de las clases y los conjuntos a partir de los axiomas básicos de ZF* o NBG*, toda demostración en ZFC puede ser considerada literalmente, sin cambio alguno, como una demostración en NBG, y viceversa.

[1] En [LM 3.2.2] se explica el concepto de clase en una subteoría muy débil de ZF*, la que llamamos teoría básica de conjuntos B. Dicha teoría basta para definir el concepto de ordinal y poco más, pero tiene el interés de que es una subteoría de todas las teorías que nos van a interesar. No es necesario que el lector se preocupe de determinar qué teoremas exactamente son demostrables en B y cuáles no.

1.1 La jerarquía de Lévy I

Las fórmulas del lenguaje $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ pueden clasificarse en una jerarquía según su complejidad. La base de esta jerarquía la constituyen las fórmulas de tipo Δ_0, que son las fórmulas sin descriptores en las que todos los cuantificadores aparecen en la forma $\bigwedge x \in y$ o bien $\bigvee x \in y$.

Una fórmula es de tipo Σ_n (con $n \geq 1$) si es de la forma $\bigvee x_1 \bigwedge x_2 \cdots \alpha$, donde hay n cuantificadores alternados (empezando por un particularizador) y α es de tipo Δ_0. En cambio,una fórmula es de tipo Π_n si es de la forma $\bigwedge x_1 \bigvee x_2 \cdots \alpha$, en las mismas condiciones salvo que el primer cuantificador es un generalizador.

Más en general, una fórmula ϕ (tal vez con descriptores) es Δ_0, Σ_n o Π_n respecto de una teoría T (sobre el lenguaje $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$) si es equivalente en T a una fórmula Δ_0, Σ_n o Π_n, respectivamente, en sentido estricto. Diremos que una fórmula es Δ_n (para $n \geq 1$) respecto de una teoría T si es equivalente en T a una fórmula Σ_n y a una fórmula Π_n.

Diremos también que un término t es Σ_n, Π_n o Δ_n si y sólo si lo es la fórmula $y = t$, donde y es cualquier variable que no esté en t.

Recordamos las propiedades elementales de esta jerarquía, que son válidas respecto de cualquier teoría T que extienda a la teoría básica de conjuntos B.

- Las clases de fórmulas de la jerarquía de Lévy satisfacen las inclusiones siguientes (véanse las observaciones posteriores a [LM 6.1]):

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & \Sigma_1 & & & & \Sigma_2 & & & & \Sigma_3 & & & & \\
 & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & \cdots \\
\Delta_0 \subset \Delta_1 & & & & \Delta_2 & & & & \Delta_3 & & & & \Delta_4 & & \\
 & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & & \subset & \cdots \\
 & & \Pi_1 & & & & \Pi_2 & & & & \Pi_3 & & & &
\end{array}$$

- Si α y β son Σ_n (resp. Π_n), también lo son $\alpha \wedge \beta$ y $\alpha \vee \beta$.
- Si α es Π (resp. Σ_n) y β es Σ_n (resp. Π_n) entonces $\alpha \to \beta$ es Σ_n (resp. Π_n).
- α es Σ_n si y sólo si $\neg\alpha$ es Π_n, y viceversa.
- Si α es Σ_n, también lo es $\bigvee x\, \alpha$.
- Si α es Π_n, también lo es $\bigwedge x\, \alpha$.

Para ZF podemos probar una propiedad adicional:

- Si α es Σ_n o Π_n (respecto a ZF), también lo son $\bigwedge x \in y\, \alpha$ y $\bigvee x \in y\, \alpha$.

En efecto, razonamos por inducción sobre n (entendiendo que Σ_0 y Π_0 es lo mismo que Δ_0). Para $n = 0$ es trivial. Si es cierto para n y tenemos que α es Σ_{n+1}, entonces α es equivalente a $\bigvee u\, \beta$, para cierta β de clase Π_n, y $\bigwedge x \in y\, \alpha$ es equivalente a $\bigwedge x \in y \bigvee u\, \beta$.

Si suponemos esto, para cada $x \in y$ podemos considerar el mínimo ordinal δ_x tal que $\bigvee u \in V_{\delta_x}\, \beta$, y a su vez definir $\gamma = \bigcup\limits_{x \in y} \delta_x$. Así $\bigwedge x \in y \bigvee u \in V_\gamma\, \beta$, o también

$$\bigvee a \bigwedge x \in y \bigvee u \in a\, \beta.$$

De este modo hemos probado una implicación de

$$\bigwedge x \in y \bigvee u\, \beta \leftrightarrow \bigvee a \bigwedge x \in y \bigvee u \in a\, \beta,$$

y la otra es trivial. Por hipótesis de inducción la fórmula de la derecha es Σ_{n+1}.

Ahora, si α es Π_{n+1}, entonces $\neg\alpha$ es Σ_{n+1}, luego por la parte ya probada $\bigwedge x \in y \neg\alpha$ es también Σ_{n+1}, luego $\bigvee x \in y\, \alpha$ es Π_{n+1}. ■

En realidad nos van a interesar casi exclusivamente los niveles más bajos de la jerarquía de Lévy, es decir, las fórmulas Δ_0, Δ_1, Σ_1 y Π_1 respecto de determinadas teorías T, y veremos que la mayor parte de los conceptos matemáticos básicos se expresan mediante términos y fórmulas de alguna de estas categorías. Aquí debemos señalar una dificultad, y es que algunos resultados fundamentales requieren establecer que estos conceptos básicos a los que nos referimos son, de hecho, Δ_0, o Δ_1, etc. respecto a teorías más débiles que ZF. La mayor parte de los resultados expuestos en este libro puede seguirse sin lagunas lógicas observando que la clasificación de los conceptos conjuntistas básicos respecto de la jerarquía de Lévy puede llevarse a cabo en la teoría ZF−AP (es decir, sin el axioma de partes), pero hay otra teoría alternativa que, a la larga, es mucho más conveniente, por lo que el lector puede meditar si le interesa familiarizarse con ella o no a la hora de seguir los primeros capítulos de este libro. Pasamos a describirla brevemente antes de explorar la jerarquía de Lévy.

1.2 La teoría de conjuntos de Kripke-Platek

La teoría de *Kripke-Platek* (KP) es la teoría sobre el lenguaje $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ cuyos axiomas son los siguientes:

Extensionalidad	$\bigwedge xy(\bigwedge u(u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y)$
Par	$\bigwedge xy \bigvee z(x \in z \land y \in z)$
Unión	$\bigwedge x \bigvee y \bigwedge u \in x \bigwedge v \in u\ v \in y$
Δ_0-especificación	$\bigwedge x \bigvee y \bigwedge u(u \in y \leftrightarrow (u \in x \land \phi(u)))$ $(*)$
Δ_0-recolección	$\bigwedge u \bigvee v\ \phi(u,v) \rightarrow \bigwedge a \bigvee b \bigwedge u \in a \bigvee v \in b\ \phi(u,v)$ $(*)$
Regularidad	$\bigvee u\, \phi(u) \rightarrow \bigvee u\, (\phi(u) \land \bigwedge v \in u\, \neg\phi(u))$ $(**)$

$(*)$ Para toda fórmula ϕ (tal vez con más variables libres) de tipo Δ_0,

$(**)$ Para toda fórmula ϕ (tal vez con más variables libres).

Nota En [LM] definimos KP restringiendo el esquema de regularidad a fórmulas de tipo Π_1. Ello se debe a que, con dicha restricción, KP está estrechamente relacionada con un importante fragmento de la aritmética de Peano, pero en el contexto de la teoría de conjuntos es más razonable incluir en KP el esquema de regularidad para fórmulas arbitrarias, como acabamos de hacer. El lector familiarizado con [LM] deberá tener en cuenta esta diferencia. ■

Llamaremos KPI a KP + AI (la teoría que resulta de añadir a KP el axioma de infinitud de ZF).[2]

Es fácil ver [LM 12.3] que todos los axiomas de KPI excepto el de Δ_0-recolección son demostrables en ZF−AP. De hecho, en ZF−AP se demuestra el esquema de especificación para fórmulas cualesquiera, y en ZF se demuestra el esquema de recolección para fórmulas cualesquiera. En efecto, bajo el supuesto $\bigwedge u \bigvee v\ \phi(u, v)$ y fijado un conjunto a, a cada $u \in a$ podemos asignarle el mínimo ordinal α tal que $\bigvee v \in V_\alpha\ \phi(u, v)$. Tenemos así una aplicación $f : a \longrightarrow \Omega$ y $b = \bigcup\limits_{\alpha \in f[A]} V_\alpha$ cumple $\bigwedge u \in a \bigvee v \in b\ \phi(u, v)$.

Así pues, KPI es una subteoría de ZF, pero ni KPI es una subteoría de ZF−AP ni viceversa.

Hay dos resultados que hacen a KP especialmente conveniente para tratar con la jerarquía de Lévy (puestos a tener que renunciar a AP). Uno es [LM 6.3], que afirma que si α es una fórmula Σ_1 o Π_1 (respecto de KP) también lo son $\bigwedge x \in y\, \alpha$ y $\bigvee x \in y\, \alpha$. El segundo es [LM 12.7], que afirma que toda función $F : D \longrightarrow V$ definida sobre una clase Δ_1 por recurrencia sobre una función Σ_1 es también Σ_1.

Enseguida veremos que ambos resultados son muy útiles para ubicar conceptos conjuntistas en la jerarquía de Lévy, y hay que tener presente que no son válidos en ZF−AP, pese a lo cual, en muchos casos es posible llegar a los mismos resultados en esta teoría. A este respecto, el lector tiene varias posibilidades:

a) Estudiar la teoría KP, por ejemplo en la sección [LM 6.2].

b) Centrarse en los argumentos que veremos para ZF−AP sin tener en cuenta los aplicables a KP. (Esto sólo le impedirá seguir algunos resultados más avanzados.)

c) Seguir los razonamientos que veremos para KP pero sustituyendo KP por ZF−AP+Δ_0-sustitución, pues esta teoría extiende a KPI y en ella es fácil probar los dos resultados que citábamos anteriormente sobre la jerarquía de Lévy.

El lector familiarizado con [TC] no debería tener problemas en trabajar en ZF−AP, pues en los cuatro primeros capítulos se trabaja casi siempre sin AP. Añadir el principio de Δ_0-recolección sólo significará para nosotros contar también con los dos teoremas indicados más arriba.

[2]El lector deberá tener presente que algunos autores llaman KP a la teoría que nosotros llamamos KPI, es decir, incluyen el axioma de infinitud entre los axiomas de KP.

1.3 La jerarquía de Lévy II

Dedicamos esta sección a mostrar algunos ejemplos relevantes de clasificación de conceptos conjuntistas en la jerarquía de Lévy respecto de subteorías adecuadas de ZF.

Conceptos $\boldsymbol{\Delta_0}$ En [LM A.3] se muestra una lista de conceptos conjuntistas básicos que son Δ_0 respecto a la teoría básica de conjuntos B o extensiones adecuadas, como ZF* o KP.

Desarrollar una fórmula hasta hacer explícito que todos los cuantificadores que involucra están acotados es una labor tediosa, por lo que en la práctica el lector debería habituarse a reconocer las fórmulas Δ_0 sin necesidad de ello. La idea básica es que una fórmula es Δ_0 si para verificarla sólo es necesario considerar la relación de pertenencia o la igualdad sobre los conjuntos que involucra, o sobre sus elementos, o sobre los elementos de sus elementos, etc.

Por ejemplo, la fórmula $z = \{x, y\}$ es Δ_0, pues para verificarla sólo debemos considerar x, y y todos los elementos de z. Concretamente:

$$z = \{x, y\} \leftrightarrow x \in z \land y \in z \land \bigwedge u \in z (u = x \lor u = y).$$

Lo mismo vale para $z = (x, y)$, pues ahora sólo son relevantes x, y, los elementos de z y los elementos de los elementos de z. En efecto:

$$z = (x, y) \leftrightarrow \bigvee uv \in z(u = \{x, x\} \land v = \{x, y\}),$$

y ahora basta usar que las fórmulas $u = \{x, y\}$ y $v = \{x, y\}$ son Δ_0.

Similarmente $y = \mathcal{D}x$ es Δ_0, pues en principio

$$y = \mathcal{D}x \leftrightarrow \bigwedge u \in y \bigvee v(u, v) \in x \land \bigwedge rs((r, s) \in x \to r \in y).$$

pero vemos que v es un elemento de un elemento de un elemento de x, luego podemos acotar la variable v mediante

$$\bigwedge u \in y \bigvee v(u, v) \in x \leftrightarrow \bigwedge u \in y \bigvee w \in x \bigvee q \in w \bigvee v \in q\, w = (u, v),$$

donde $q = \{u, v\}$. En la práctica uno puede "prever" que no habrá problemas en acotar la variable v si uno se pone a ello porque v es un elemento de un elemento de un elemento de x (ni siquiera es necesario precisar cuántas veces hay que repetir la palabra "elemento" exactamente). Por el mismo motivo es "previsible" que las variables r y s son acotables, pues son necesariamente elementos de elementos... de elementos de x (las veces que haga falta).

Aunque, en caso de duda, explicitar las acotaciones es la forma inequívoca de determinar si en efecto una fórmula es Δ_0, lo cierto es que desarrollar cuantificadores como acabamos de ver es una tarea rutinaria que no ofrece ninguna dificultad, siempre y cuando tengamos claro que la variable en cuestión sólo puede representar a un elemento de un elemento, etc., de uno de los conjuntos que intervienen en la fórmula en cuestión.

Comparemos con el caso de la fórmula

$$(A, R) \text{ es un conjunto bien ordenado} \leftrightarrow (A, R) \text{ es un conjunto ordenado} \land$$
$$\bigwedge X(X \subset A \land X \neq \varnothing \to \bigvee m \in X \bigwedge a \in A\ m\,R\,a).$$

Es claro que (A, R) es un conjunto ordenado es una fórmula Δ_0, sin necesidad de explicitar más la fórmula, porque es claro que verificar que es así sólo requiere analizar lo que les sucede a los elementos de A y a los de $\leq$. Si nos ponemos a explicitarlo, nunca tendremos problemas para encontrar conjuntos que acoten las variables que usemos. Por ejemplo, la propiedad reflexiva es

$$\bigwedge a \in A \bigvee w \in R\ w = (a, a).$$

En cambio, no es menos evidente que el cuantificador $\bigwedge X$ no puede ser acotado, pues X debe recorrer los subconjuntos de X, y éstos no son necesariamente elementos de A ni de R, ni elementos de sus elementos, etc. Por ello no podemos concluir que "ser un conjunto bien ordenado" sea una propiedad Δ_0, sino tan sólo Π_1 (enseguida veremos que, en teorías razonables, es Δ_1).

Así pues, para determinar la situación de una fórmula en la jerarquía de Lévy lo único importante es identificar las variables "no acotables" que aparecen en ella, y en la práctica esto no se hace desarrollando los cuantificadores, sino planteándose, para cada variable, si la fórmula permite únicamente que recorra elementos de elementos (etc.) de parámetros o puede variar sobre conjuntos más generales.

En la práctica el lector debería usar los ejemplos de [LM A.3] para entrenarse acotando variables hasta que se convenza de que sabe hacerlo mecánicamente y, por consiguiente, esté dispuesto a ahorrarse en la práctica lo que no es más que una comprobación tediosa previsible.

Una fórmula delicada es "α es un ordinal" (o, más brevemente, $\alpha \in \Omega$). En [TC] la definimos (en el contexto de NBG^* o, equivalentemente, de ZF^*) como "α es transitivo, $\in$-conexo y bien fundado", y las dos primeras propiedades son trivialmente Δ_0, pero la tercera no lo es. En efecto, la buena fundación es

$$\bigwedge x \subset \alpha(x \neq \varnothing \to \bigvee u \in x\ u \cap x = \varnothing),$$

y la variable x no es "acotable", porque los subconjuntos de α no son necesariamente elementos, ni elementos de elementos de α, etc. Se trata de una propiedad Π_1 y no necesariamente Δ_0.

Ahora bien, el axioma de regularidad afirma precisamente que todo conjunto está bien fundado, luego en toda extensión de B que contenga dicho axioma la fórmula $\alpha \in \Omega$ resulta ser Δ_0 (pues es equivalente a "α es transitivo y $\in$-conexo"). Esto vale en particular para KP, ZF$-$AP, etc.

Como se explica en [LM A.3], en cualquier extensión de B en la que "ser un ordinal" sea Δ_0 lo son también las fórmulas "ser un ordinal sucesor", "ser un ordinal límite", "ser un número natural" y, si además contamos con el axioma de infinitud, también es Δ_0 el término[3] ω. Las comprobaciones son inmediatas.

[3]No es lo mismo que $n \in \omega$ sea Δ_0 que que lo sea el término ω, es decir, la fórmula $x = \omega$.

Conceptos Δ_1 Un ejemplo de término Δ_1 tanto en KP como en ZF−AP es $\operatorname{rang} x$ (el rango de un conjunto respecto de la relación de pertenencia). En KP es consecuencia inmediata de [LM 12.7], pero podemos dar un argumento general válido también en ZF−AP:

$$y = \operatorname{rang} x \leftrightarrow \bigvee zf(\bigcup z \subset z \land x \in z \land f : z \longrightarrow \omega \land y = f(z) \land$$

$$\bigwedge u \in x \ f(u) = \bigcup_{v \in u} (f(v) + 1)).$$

(Notemos que $\bigcup z \subset z$ es una forma de indicar que z es transitivo.) Esta fórmula es claramente Σ_1 (pues la fórmula tras $\bigvee zf$ sólo involucra elementos de x, y, z, f, y elementos de sus elementos, etc.), luego $\operatorname{rang} x$ es Σ_1 y, consecuentemente,[4] también Δ_1.

En [LM A.3] se prueba que en KPI son Δ_1 los términos $x^{<\omega}$ y $[x]^{<\omega}$ correspondientes, respectivamente, al conjunto de sucesiones finitas o de subconjuntos finitos de un conjunto x, pero es claro que las equivalencias con fórmulas Σ_1 mostradas allí son válidas igualmente en KP−AI.

El teorema [LM 12.7] implica inmediatamente que las operaciones ordinales $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ y α^β son Δ_1 en KP. Por ejemplo, la suma $F : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$ se define mediante

$$F(\alpha, \beta) = G(\alpha, \beta, F(\alpha, -)|_\beta),$$

donde G es la función Σ_1 dada por:

$$G(\alpha, \beta, f) = \gamma \leftrightarrow (\beta = 0 \land \gamma = \alpha) \lor \bigvee \delta \in \beta(\beta = \delta \cup \{\delta\} \land \gamma = f(\delta) \cup \{f(\delta)\})$$

$$\lor\ (\beta \text{ límite} \land \gamma = \bigcup f[\beta]),$$

y para el producto y la exponenciación tenemos expresiones similares (usando, respectivamente, que la suma y el producto son Δ_1).

Un argumento alternativo válido en ZF−AP es el siguiente, por ejemplo para el producto de ordinales:

$$\gamma = \alpha \cdot \beta \leftrightarrow ((\alpha \notin \Omega \lor \beta \notin \Omega) \land \gamma = 0) \lor \alpha \in \Omega \land \beta \in \Omega \land \gamma \in \Omega \land$$

$$\bigvee fx\,(x = \alpha \times \beta \land f : x \longrightarrow \gamma \text{ semejanza}),$$

donde la semejanza ha de entenderse respecto del buen orden lexicográfico en x. Es fácil ver que la fórmula tras $\bigvee fx$ es Δ_0. Un argumento similar vale para la suma. El caso de la exponenciación es más complicado, pero no lo vamos a necesitar.

El teorema siguiente no es válido en KP.

[4] Esto es un argumento general: todo término Σ_1 es Δ_1, porque

$$y = t \leftrightarrow \bigwedge x(x = t \rightarrow y = x),$$

luego también es Π_1.

Teorema 1.1 *Las fórmulas "R es un buen orden en A" y "R es una relación bien fundada en A" son Δ_1 respecto a* ZF$-$AP*, al igual que lo es el término* $\operatorname{ord}(A, R)$.

DEMOSTRACIÓN: En principio "R es un buen orden en A" es una fórmula Π_1, pues equivale a

$$R \text{ es un orden parcial en } A \wedge \bigwedge X(X \subset A \wedge X \neq \varnothing \rightarrow \bigvee u \in X \bigwedge v \in X\, u\, R\, v),$$

pero, por otra parte, también equivale a[5]

$$R \text{ es un orden parcial en } A \wedge \bigvee f\alpha(\alpha \in \Omega \wedge f : \alpha \longrightarrow (A, R) \text{ semejanza}),$$

que es una fórmula Σ_1 (pues es fácil ver que "ser una semejanza" es Δ_0).

Lo mismo vale para "R es una relación bien fundada en A", que por definición es Π_1, pues equivale a

$$R \subset A \times A \wedge \bigwedge X(X \subset A \wedge X \neq \varnothing \rightarrow \bigvee u \in X \bigwedge v \in X \neg v\, R\, u)$$

y por otra parte, teniendo en cuenta que toda relación bien fundada permite construir una aplicación rango, equivale a la fórmula Σ_1 siguiente:

$$R \subset A \times A \wedge \bigvee f\alpha(\alpha \in \Omega \wedge f : A \longrightarrow \alpha \wedge \bigwedge uv \in A(u\, R\, v \rightarrow f(u) \in f(v)).$$

Por último, $\alpha = \operatorname{ord}(A, R)$ equivale a

$$(R \text{ es un buen orden en } A \wedge \alpha \in \Omega \wedge \bigvee f\ f : \alpha \longrightarrow (A, R) \text{ semejanza}) \vee$$
$$(R \text{ no es un buen orden en } A \wedge \alpha = 0),$$

luego se trata de una fórmula Σ_1, pero trivialmente equivale a

$$\bigwedge \beta(\beta = \operatorname{ord}(A, R) \rightarrow \beta = \alpha),$$

luego también es Π_1. ■

El sistema numérico en ZF Terminamos la sección analizando las definiciones de los conjuntos numéricos:

Teorema 1.2 *Las fórmulas $x \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Q}$ y $x \in \mathbb{R}$ son Δ_1 respecto de* ZF*, al igual que los términos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$.*

DEMOSTRACIÓN: Se trata de una simple comprobación rutinaria a partir de las definiciones correspondientes (véase [TC, capítulo II]). Por ejemplo:

$$x \in \mathbb{Z} \leftrightarrow \bigvee mn \in \omega(\bigwedge rs \in \omega(r + m = s + n \rightarrow (r, s) \in x)$$
$$\wedge \bigwedge u \in x(\bigvee rs \in \omega(u = (r, s) \wedge r + m = s + n))).$$

[5]Esta equivalencia no es válida en KPI, porque en esta teoría no puede probarse que todo conjunto bien ordenado es semejante a un ordinal.

De este modo, $x \in \mathbb{Z} \leftrightarrow \phi(x, \omega)$, donde $\phi(x, w)$ es Δ_1, y entonces

$$x \in \mathbb{Z} \leftrightarrow \bigvee w(w = \omega \land \phi(x, w)) \leftrightarrow \bigwedge w(w = \omega \to \phi(x, w)),$$

luego $x \in \mathbb{Z}$ es Δ_1 (donde usamos que $w = \omega$ es Δ_0).

También son Δ_1 los términos $x + y$, $x \cdot y$ correspondientes a la suma y el producto de números enteros. En efecto,

$$z = x + y \leftrightarrow (x \in \mathbb{Z} \land y \in \mathbb{Z} \land$$
$$\bigvee m_1 n_1 m_2 n_2 m_3 n_3 \in \omega\ ((m_1, n_1) \in x \land (m_2, n_2) \in y \land (m_3, n_3) \in z$$
$$\land\ m_3 = m_1 + m_2 \land n_3 = n_1 + n_2)) \lor ((x \notin \mathbb{Z} \lor y \notin \mathbb{Z}) \land z = \varnothing),$$

de modo que $z = x + y \leftrightarrow \phi(z, x, y, \omega)$, con ϕ de tipo Δ_0 y concluimos como antes. El caso del producto es análogo.

También es Δ_1 la fórmula $x \leq y$ correspondiente a la relación de orden en $\mathbb{Z}$, pues equivale a

$$\bigvee m_1 m_2 m n \in \omega((m_1, n) \in x \land (m_2, n) \in y \land m_1 + m = m_2).$$

(Aquí usamos que $x \leq y$ si y sólo si $y = x + z$, con $z \geq 0$, con lo que $z = [m, 0]$.)

Ahora probamos que $y = \mathbb{Z}$ es Δ_1. En efecto, es equivalente a

$$\bigwedge x \in y\ x \in \mathbb{Z} \land \bigwedge mn \in \omega \bigvee x \in y \bigwedge rs \in \omega(m + r = n + s \to (r, s) \in x)$$

y eliminamos ω con el argumento anterior.

Ahora se prueba que $x \in \mathbb{Q}$ es Δ_1, al igual que la suma, el producto y el orden de $\mathbb{Q}$, con argumentos análogos en los que usamos $\mathbb{Z}$ en lugar de ω (y las operaciones en $\mathbb{Z}$ en lugar de las de ω).

Si consideramos a $\mathbb{R}$ definido mediante secciones iniciales de $\mathbb{Q}$, entonces

$$x \in \mathbb{R} \leftrightarrow x \subset \mathbb{Q} \land x \neq \varnothing \land x \neq \mathbb{Q} \land \bigwedge u \in \mathbb{Q} \bigwedge v \in x(u < v \to u \in x)$$
$$\land \bigwedge u \in x \bigvee v \in x(u < v),$$

de modo que $x \in \mathbb{R} \leftrightarrow \phi(x, \mathbb{Q})$, donde $\phi(x, q)$ es Δ_1, y la $\mathbb{Q}$ se elimina del modo usual. La relación de orden en $\mathbb{R}$ es trivialmente Δ_0, pues es la inclusión. También son Δ_1 los términos $x+y$ y xy correspondientes a la suma y el producto de números reales, pues, por ejemplo, teniendo en cuenta que $z = x + y$ es el único número real que cumple $p + q < z$, para todo par de números racionales $p < x$, $q < y$, y a la vez $z \leq p + q$, para todo par de números racionales $x \leq p$, $y \leq q$, se cumple que

$$z = x + y \leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \land y \in \mathbb{R} \land z \in \mathbb{R} \land \bigwedge pq \in \mathbb{Q}(p \in x \land q \in y \to p + q \in z)$$
$$\land \bigwedge pq \in \mathbb{Q}(p \notin x \land q \notin x \to p + q \notin z)) \lor ((x \notin \mathbb{R} \lor y \notin \mathbb{R}) \land z = \varnothing),$$

con lo que $z = x + y \leftrightarrow \phi(x, y, z, \mathbb{Q})$, con $\phi(x, y, z, q)$ de tipo Δ_1, y la $\mathbb{Q}$ se elimina como es habitual.

La prueba para xy es algo más farragosa porque hay que distinguir casos según si los factores son positivos o negativos. ■

1.4 La formalización de la lógica

En el capítulo X de [TC] se presenta la formalización en NBG (o, equivalentemente, en ZF) de los resultados básicos sobre lenguajes formales y modelos, pero sin considerar el caso más delicado desde un punto de vista conceptual, que es la formalización en ZF (o en cualquier subteoría suficientemente potente) del lenguaje formal $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ y sus modelos. Al considerar este caso resulta crucial no confundir las fórmulas metamatemáticas que usamos en los enunciados y las demostraciones con las fórmulas matemáticas definidas en la teoría considerada.

Según señalábamos en la introducción, ZF (o cualquiera de sus subteorías o extensiones) consiste en un lenguaje formal $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ y unos axiomas que enuncian propiedades de unos objetos no definidos a los que llamamos "conjuntos", de modo que todas las afirmaciones demostrables en ZF tienen que ser entendidas como afirmaciones sobre conjuntos (o, a lo sumo, sobre clases, pero toda afirmación sobre clases puede reducirse a una afirmación sobre conjuntos). Podemos resumir esto diciendo que todos los objetos de los que se puede hablar en ZF son conjuntos.

Ahora bien, sin contradecir lo que acabamos de decir, hay que entender que al trabajar en ZF nos vemos en la necesidad de tratar con unos objetos que no podemos considerar como conjuntos, es decir, que no son ninguno de los objetos de los que hablamos mediante ZF. Se trata de los signos del lenguaje $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ y los términos y fórmulas construidos a partir de ellos.

Por ejemplo, un matemático puede decir que el número 7 es un conjunto, o que en el axioma

$$\bigwedge xy\bigvee z\bigwedge u(u \in z \leftrightarrow u = x \lor u = y).$$

las variables x, y, z, u hacen referencia a conjuntos, pero al mismo tiempo que podemos decir que, en este axioma, u es un conjunto arbitrario, también podemos decir que "u" no es un conjunto, sino una letra, un signo, una variable del lenguaje de la teoría de conjuntos, de modo que cuando escribimos $u \in x$ no queremos decir que "la letra u" es un elemento del conjunto x, ni mucho menos de "la letra x", igual que podemos decir que Madrid es una ciudad, pero que "Madrid" no es una ciudad, sino una palabra. Esto es especialmente claro si en lugar de considerar la variable u consideramos el cuantificador $\bigwedge$. Ahora ni siquiera tendría sentido en modo alguno escribir algo como $\bigwedge \in \{\bigwedge\}$, mientras que sí lo tiene $7 \in \{7\}$.

Normalmente estas observaciones podrían considerarse triviales, ya que todo el mundo tiene clara la diferencia entre la "x" como mera letra y "el conjunto x" del que tiene sentido hablar en el marco de ZF, pero aquí es necesario hacer hincapié en esto porque a este doble sentido en que podemos concebir cada signo del lenguaje de la teoría de conjuntos se une una tercera posibilidad, y es que, entre los objetos matemáticos que pueden definirse en ZF (números, espacios topológicos, etc.) figuran los lenguajes formales, y entre los lenguajes formales que podemos estudiar en ZF figura el lenguaje formal de ZF.

Si, por ejemplo, definimos el lenguaje $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ en ZF de modo que sus signos sean números naturales, podemos tener perfectamente que $\bigwedge = 7$, y podemos afirmar que $\bigwedge \in \mathrm{Sig}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$, o que $\bigwedge \in \{\bigwedge\}$, o que

$$\bigwedge xy \bigvee z \bigwedge u(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}),$$

pero aquí es fundamental ser consciente de que estamos llamando $\bigwedge$ a dos cosas radicalmente distintas: una es el cuantificador universal metamatemático, que no podemos considerarlo como un conjunto, de modo que $\bigwedge \in \{\bigwedge\}$ es un sinsentido si entendemos $\bigwedge$ de este modo. La otra es el cuantificador universal definido en ZF (o en una subteoría adecuada), que es un conjunto, y podemos suponer que es, de hecho, un número natural. Para evitar ambigüedades podríamos usar ángulos de Quine, de modo que $\bigwedge$ es el cuantificador metamatemático y $\ulcorner\bigwedge\urcorner$ el matemático, e igualmente podríamos escribir

$$\ulcorner\bigwedge xy \bigvee z \bigwedge u(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)\urcorner \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}),$$

con lo que dejamos constancia de que toda la primera parte no es una fórmula metamatemática, sino un término metamatemático que representa a un cierto conjunto (una sucesión finita de números naturales). Sin embargo, en lugar de usar ángulos de Quine lo que haremos será evitar la escritura de expresiones ambiguas como la anterior, en la que se mezclan el relator (matemático) $\in \in \omega$ (es decir, $\ulcorner\in\urcorner \in \omega$) con el relator metamatemático $\in$, que no es un conjunto, porque no es un objeto de los que podemos hablar desde ZFC, sino uno de los signos con los que enunciamos teoremas de ZFC.

Aunque la diferencia entre que, en un contexto dado, ϕ represente a una fórmula metamatemática o bien a una fórmula matemática tiene en sí misma una gran importancia conceptual, también tiene muchas consecuencias en la práctica, y de ahí que no podamos dejar de tenerla presente en ningún momento. Por ejemplo, si ϕ es una fórmula matemática, tiene perfecto sentido empezar un teorema con $\bigwedge\phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})\cdots$, y "técnicamente" ahí ϕ es una variable del lenguaje metamatemático $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$, una variable cuantificada con el cuantificador universal metamatemático. En cambio, en un contexto en el que ϕ sólo pueda entenderse como una fórmula metamatemática, sería un sinsentido escribir lo anterior.

En [LM, sección 8.1] se prueba que todas las fórmulas que definen los conceptos sintácticos de los lenguajes formales son Δ_1 en KP, como "α es una fórmula de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$", etc.

Si estamos dispuestos a trabajar en KPI (cosa que no nos supondrá ninguna restricción) las pruebas se simplifican bastante, pues podemos aplicar una técnica general que también vale en ZF$-$AP. Se trata de aislar (y, de hecho, explicitar) los parámetros necesarios para acotar las variables que no pueden acotarse en una fórmula mediante otras variables. Por ejemplo, para probar que $\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$ es Δ_1 (tanto en KPI como en ZF$-$AP) basta probar que, en ambas teorías,

$$\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}) \leftrightarrow \phi(\alpha, \omega, \omega^{<\omega}, (\omega^{<\omega})^{<\omega}),$$

donde ϕ es Δ_0. Diremos entonces que $\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$ es Δ_0 con parámetros ω, $\omega^{<\omega}$, $(\omega^{<\omega})^{<\omega}$. Esto implica inmediatamente que la fórmula es Δ_1 (sin parámetros), pues

$$\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}) \leftrightarrow \bigvee wcs(w = \omega \land c = w^{<\omega} \land s = c^{<\omega} \land \phi(\alpha, w, c, s))$$

$$\leftrightarrow \bigwedge wcs(w = \omega \land c = w^{<\omega} \land s = c^{<\omega} \to \phi(\alpha, w, c, s)),$$

y, como la fórmula $w = \omega \land c = w^{<\omega} \land s = c^{<\omega}$ es Δ_1, concluimos que toda la fórmula también lo es.

Ahora bien, probar que la fórmula $\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$ es Δ_0 con parámetros ω, $\omega^{<\omega}$, $(\omega^{<\omega})^{<\omega}$ significa probar que es equivalente a una fórmula en la que las únicas variables que no pueden acotarse por otras variables, pueden acotarse por alguno de los parámetros indicados. Veamos que así es:

$$\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}) \leftrightarrow \bigvee f \in (\omega^{<\omega})^{<\omega} \bigvee mn \in \omega(\mathcal{D}f = m \land m = n + 1 \land f(n) = \alpha$$

$$\land \bigwedge i \in m \bigwedge \beta \in \omega^{<\omega}\, (\beta = f(i) \to \cdots))),$$

donde los puntos suspensivos establecen todas las posibilidades para que β sea una fórmula construida a partir de subfórmulas anteriores de la sucesión f, concretamente, se trata de la disyunción de las fórmulas siguientes, todas Δ_0:

- $\bigvee xy \in \omega(x \in \mathrm{Var}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}) \land y \in \mathrm{Var}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}) \land (\beta = (x = y) \lor \beta = (x \in y)))$,
- $\bigvee j \in i \bigvee \gamma \in \omega^{<\omega}(\gamma = f(j) \land \beta = \neg\gamma)$,
- $\bigvee jk \in i \bigvee \gamma\delta \in \omega^{<\omega}(\gamma = f(j) \land \delta = f(k) \land \beta = (\gamma \to \delta))$,
- $\bigvee j \in i \bigvee \gamma \in \omega^{<\omega} \bigvee x \in \omega(\gamma = f(j) \land x \in \mathrm{Var}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}) \land \beta = \bigwedge x\gamma)$.

Notemos que $x \in \mathrm{Var}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$ es Δ_0 con parámetros ω, $\omega^{<\omega}$ pues si, por ejemplo, convenimos que las variables de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ son los números naturales pares, de modo que la variable de índice i es $x_i = 2i$, entonces

$$x = x_i \leftrightarrow \bigvee s \in \omega^{<\omega}(\ell(s) = i + 1 \land s_0 = i \land \bigwedge j \in i\ s_{j+1} = s_j + 1 \land s_i = x),$$

y $x \in \mathrm{Var}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}) \leftrightarrow \bigvee i \in \omega\ x = x_i$.

Al lector con un poco de práctica no le debería ser necesario desarrollar explícitamente la definición de $\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$ para convencerse de que es Δ_0 con los parámetros indicados. A poco que reflexione sobre lo que involucra la definición de fórmula se convencerá de que nunca se necesita mencionar nada que no sea un número natural, una sucesión de números naturales, una sucesión de sucesiones de números naturales o bien elementos de elementos de elementos de los conjuntos involucrados. Por ejemplo, para desarrollar $\gamma = f(j)$ hace falta referirse al par (j, γ) (que es un elemento de f) y a los conjuntos $\{j\}$ y $\{j, \gamma\}$ (que son elementos de dicho par).

El axioma de infinitud nos permite definir (por Δ_1-especificación en el caso de KPI) el conjunto $\mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}) \subset \omega^{<\omega}$, y se trata de un término Δ_1, pues la fórmula

$$Y = \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}) \leftrightarrow Y \subset \omega^{<\omega} \land \bigwedge \alpha \in \omega^{<\omega}(\alpha \in Y \leftrightarrow \alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}))),$$

es Δ_0 con parámetros ω, $\omega^{<\omega}$, $(\omega^{<\omega})^{<\omega}$).

Similarmente se justifica que la fórmula $x_i \,\mathrm{Lib}, \alpha$ que se cumple si la variable x_i está libre en α es Δ_0 con los mismos parámetros, y por lo tanto Δ_1. En efecto:

$$x_i \,\mathrm{Lib}\, \alpha \leftrightarrow \bigvee f \in (\omega^{<\omega})^{<\omega} \bigvee g \in \omega^{<\omega} \bigvee mn \in \omega(\mathcal{D}f = m \land \mathcal{D}g = m \land$$

$$m = n + 1 \land (\cdots) \land f(n) = \alpha \land g(n) = 1)),$$

donde los puntos suspensivos representan la fórmula Δ_0 con parámetros ω, $\omega^{<\omega}$ y $(\omega^{<\omega})^{<\omega}$ que expresa que f es una sucesión de fórmulas que define a α y que $g(j) = 1$ si y sólo si x_i está libre en la fórmula $f(j)$.

Lo mismo vale para el término $\mathrm{Form}^n(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$ que define el conjunto de las fórmulas de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ cuyas variables libres están entre $x_0, \ldots, x_{n-1}$, pues, en primer lugar,

$$\alpha \in \mathrm{Form}^n(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}) \leftrightarrow n \in \omega \land \alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}) \land \bigwedge i \in \omega(x_i \,\mathrm{Lib}\, \alpha \rightarrow i < n)),$$

que es Δ_0 con parámetros ω, $\omega^{<\omega}$, $(\omega^{<\omega})^{<\omega}$), y de aquí que

$$Y = \mathrm{Form}^n(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}) \leftrightarrow (n \in \omega \land Y \subset \omega^{<\omega} \land$$

$$\bigwedge \alpha \in \omega^{<\omega}(\alpha \in Y \leftrightarrow \alpha \in \mathrm{Form}^n(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})))) \lor (n \notin \omega \land Y = \varnothing),$$

sea del mismo tipo.

En [TC, Capítulo X] se define la relación $M \vDash \alpha[v]$ que determina cuándo una fórmula α de un lenguaje formal $\mathcal{L}$ es satisfecha en un modelo M de $\mathcal{L}$ cuando sus variables se interpretan según la valoración $v : \mathrm{Var}(\mathcal{L}) \longrightarrow M$. En [LM, sección 12.2] se demuestra que dicha fórmula es Δ_1 en KP, pero vamos a probarlo aquí de nuevo mediante un argumento en la línea de los precedentes, que vale tanto para KPI como para ZF−AP.

Ante todo, debemos señalar una ligera diferencia en la definición de $M \vDash \alpha[v]$ en [LM] respecto a la definición de [TC], diferencia debida a que en KP no está disponible el axioma de partes, como tampoco lo está en ZF−AP, y esto obliga a considerar que v no recorre las aplicaciones $v : \mathrm{Var}(\mathcal{L}) \longrightarrow M$, sino que en $M \vDash \alpha[v]$ hay que entender que v está definida sobre un conjunto finito de variables que incluya a todas las variables libres en α. Esto se debe a que no podemos probar que la clase $M^{\mathrm{Var}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})}$ sea un conjunto, mientras que sí que lo es el conjunto de todos los pares (α, v) con $\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$ y v en las condiciones indicadas.

Esta salvedad es suficiente para que podamos probar el carácter Δ_1 de la fórmula $M \vDash \alpha[v]$ en KPI o ZF$-$AP, pero vamos a realizar algunas simplificaciones adicionales para el contexto que aquí nos interesa. En primer lugar, podemos restringirnos a modelos del lenguaje $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$. Puesto que el único signo eventual de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ es el relator de pertenencia, en lugar de la definición general de modelo, podemos considerar que, por definición, un modelo de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ es un par (M, R), donde M es un conjunto no vacío y $R \subset M \times M$ (y esta definición es obviamente Δ_0).

En segundo lugar nos resultará más conveniente definir $(M, R) \vDash \alpha[v]$ con el convenio de que $v \in M^{<\omega}$ no estará definida sobre variables, sino sobre los índices de las variables, de manera que la variable x_i se interpretará como $v(i)$.

Previamente definiremos la función $H_{M,R} : \omega^{<\omega} \times M^{<\omega} \longrightarrow 2$ que cumple

$$H_{M,R}(\alpha, v) = 1 \leftrightarrow M \vDash \alpha[v]$$

cuando $M \neq \varnothing$, $\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$ y v está definida sobre los índices de todas las variables libres en α, y tomará el valor 1 si falla alguno de estos supuestos. Vamos a probar que la fórmula $H = H_{M,R}$ es Δ_0 en los parámetros oportunos.

Diremos que $C \subset \omega^{<\omega}$ es *cerrado para subfórmulas* (csf) si cuando $\neg\alpha \in C$, también $\alpha \in C$, cuando $\alpha \rightarrow \beta \in C$, entonces α, $\beta \in C$ y, cuando $\bigwedge x\, \alpha \in C$, entonces $\alpha \in C$, donde, en principio, α, β elementos arbitrarios de $\omega^{<\omega}$.

Es inmediato que la fórmula "C es csf" es Δ_0 con parámetros ω, $\omega^{<\omega}$. Consideramos ahora la fórmula

$$\phi(M, R, H, M^{<\omega}, C, \omega, \omega^{<\omega}, (\omega^{<\omega})^{<\omega}) \equiv H : C \times M^{<\omega} \longrightarrow 2 \wedge \text{“}C \text{ es csf”} \wedge$$
$$\bigwedge \alpha \in C \bigwedge v \in M^{<\omega}((M = \varnothing \vee \alpha \notin \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}) \vee (M \neq \varnothing \wedge \alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}) \wedge$$
$$\bigvee i \in \omega\, (x_i \,\mathrm{Lib}\, \alpha \wedge i \notin \mathcal{D}v)) \rightarrow H(\alpha, v) = 1) \wedge$$
$$\bigwedge \alpha \in C \bigwedge v \in M^{<\omega}(\alpha \in \mathrm{Form}(L_{\mathrm{tc}}) \wedge \bigwedge i \in \omega (x_i \,\mathrm{Lib}\, \alpha \rightarrow i \in \mathcal{D}v) \rightarrow \cdots),$$

donde los puntos suspensivos representan la disyunción de todos los casos posibles para α según la definición de fórmula junto con la condición correspondiente para que $H(\alpha, v) = 1$ si y sólo si $(M, R) \vDash \alpha[v]$. El lector debería considerar innecesario desarrollar dicha fórmula para convencerse de que es Δ_0 en los parámetros señalados, pero he aquí el desarrollo:

- $\bigvee ij \in \omega(\alpha = (x_i = x_j) \wedge (H(\alpha, v) = 1 \leftrightarrow v(i) = v(j)))$,
- $\bigvee ij \in \omega(\alpha = (x_i \in x_j) \wedge (H(\alpha, v) = 1 \leftrightarrow v(i)\, R\, v(j)))$,
- $\bigvee \beta \in C(\alpha = \neg\beta \wedge (H(\alpha, v) = 1 \leftrightarrow H(\beta, v) = 0))$
- $\bigvee \beta\gamma \in C(\alpha = (\beta \rightarrow \gamma) \wedge (H(\alpha, v) = 1 \leftrightarrow$
  $(H(\beta, v) = 0 \vee H(\gamma, v) = 1)))$
- $\bigvee i \in \omega \bigvee \beta \in C(\alpha = \bigwedge x_i\, \beta) \wedge (H(\alpha, v) = 1 \leftrightarrow$
  $\bigwedge a \in M \bigvee w \in M^{<\omega}(w = v_i^a \wedge H(\beta, w) = 1))$,

donde $w = v_i^a$ significa que w tiene el mismo dominio que v y coincide con v salvo en que $w(i) = a$.

Ahora una simple inducción sobre la longitud de α muestra que para todo $\alpha \in \omega^{<\omega}$ existe un $C \subset \omega^{<\omega}$ cerrado para subfórmulas y existe un H de modo que $\alpha \in C$ y $\phi(M, R, H, M^{<\omega}, C, \omega, \omega^{<\omega}, (\omega^{<\omega})^{<\omega})$, así como que dos H que cumplan esto coinciden sobre su dominio común.

Esto nos permite definir $H_{M,R} : \omega^{<\omega} \times M^{<\omega} \longrightarrow 2$ por especificación (Δ_1-especificación en el caso de KPI) a partir del conjunto $\omega^{<\omega} \times M^{<\omega} \times 2$ mediante la fórmula $\psi(x, M, R, M^{<\omega}, \omega, \omega^{<\omega}, (\omega^{<\omega})^{<\omega})$ dada por

$$\bigvee CH \bigvee \alpha \in C \bigvee v \in M^{<\omega} \bigvee i \in \omega (x = (\alpha, v, i) \land$$
$$\phi(M, H, M^{<\omega}, C, \omega, \omega^{<\omega}, (\omega^{<\omega})^{<\omega}) \land H(\alpha, v) = i) \leftrightarrow$$
$$\bigwedge CH \bigwedge \alpha \in C \bigwedge v \in M^{<\omega} \bigwedge i \in \omega (x = (\alpha, v, i) \land$$
$$\phi(M, R, H, M^{<\omega}, C, \omega, \omega^{<\omega}, (\omega^{<\omega})^{<\omega}) \rightarrow H(\alpha, v) = i).$$

Ahora es claro que existe una única función $H_{M,R} : \omega^{<\omega} \times M^{<\omega} \longrightarrow 2$ que cumple

$$\phi(M, R, H_{M,R}, M^{<\omega}, \omega^{<\omega}, \omega, \omega^{<\omega}, (\omega^{<\omega})^{<\omega}),$$

con lo que la fórmula (de variables libres H, M, R)

$$H = H_{M,R} \leftrightarrow \phi(M, R, H, M^{<\omega}, \omega, \omega^{<\omega}, (\omega^{<\omega})^{<\omega})$$

es Δ_0 con parámetros ω, $\omega^{<\omega}$, $(\omega^{<\omega})^{<\omega}$, $M^{<\omega}$, luego el término $H_{M,R}$ es Δ_1, y podemos definir

$$(M, R) \vDash \alpha[v] \equiv H_{M,R}(\alpha, v) = 1 \leftrightarrow \bigvee H(H = H_{M,R} \land H(\alpha, v) = 1)$$
$$\leftrightarrow \bigwedge H(H = H_{M,R} \rightarrow H(\alpha, v) = 1),$$

que es, pues, una fórmula Δ_1.

En la práctica usaremos la notación

$$(M, R) \vDash \alpha[a_1, \ldots, a_n]$$

en lugar de $(M, R) \vDash \alpha[s]$, donde hay que entender que las variables libres de α están entre $x_0, \ldots, x_n$ y que estamos interpretando x_i como $s(i) = a_{i+1} \in M$.

Definimos[6]

$$(M, R) \vDash \alpha \equiv \bigwedge v \in M^{<\omega}\ (M, R) \vDash \alpha[v]$$

y

$$(M, R) \vDash \Gamma \equiv \bigwedge \gamma \in \Gamma\ (M, R) \vDash \Gamma.$$

Ambas fórmulas son Δ_1. Por ejemplo, para la segunda tenemos que

$$(M, R) \vDash \Gamma \leftrightarrow \bigvee H(H = H_{M,R} \land \bigwedge \gamma \in \Gamma \bigwedge v \in M^{<\omega}\ H(\gamma, v) = 1)$$
$$\leftrightarrow \bigwedge H(H = H_{M,R} \rightarrow \bigwedge \gamma \in \Gamma \bigwedge v \in M^{<\omega}\ H(\gamma, v) = 1).$$

[6]Aquí hay que tener en cuenta que hemos definido $(M, R) \vDash \alpha[v]$ como trivialmente verdadera si α no es una fórmula o v no está definida sobre (los índices de) todas sus variables libres.

Para referencia posterior enunciamos el teorema siguiente, ya demostrado:

Teorema 1.3 *Para todo par de conjuntos* (M,R) *consideramos la aplicación* $H_{M,R} : \omega^{<\omega} \times M^{<\omega} \longrightarrow 2$ *dada por*

$$H_{M,R}(\alpha, v) = 1 \leftrightarrow M \vDash \alpha[v]$$

cuando $M \neq \varnothing$, $\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$ *y* v *está definida sobre los índices de todas las variables libres en* α, *y tomará el valor* 1 *si falla alguno de estos supuestos. Entonces*

$$H = H_{M,R} \leftrightarrow \Phi_{M,R}(M, R, H, M^{<\omega}, \omega, \omega^{<\omega}, (\omega^{<\omega})^{<\omega}),$$

para una cierta fórmula $\Phi_{M,R}$ *de tipo* Δ_0. *Más aún, si* $C \subset \omega^{<\omega}$ *es cerrado para subfórmulas, la restricción* $H^C_{M,R} : C \times M^{<\omega} \longrightarrow 2$ *cumple*

$$H = H^C_{M,R} \leftrightarrow \Phi^C_{M,R}\phi(M, R, H, M^{<\omega}, C, \omega, \omega^{<\omega}, (\omega^{<\omega})^{<\omega}),$$

donde $\Phi^C_{M,R}$ *también es* Δ_0.

1.5 Consistencia y existencia de modelos

Terminamos este capítulo de preliminares recordando la conexión que existe entre los conceptos de la sección precedente y los teoremas de incompletitud de Gödel. El lector que quiera conocer los detalles de esta sección deberá estudiarse a fondo la mayor parte de [LM]. No obstante, nada de lo que veremos aquí es esencial para seguir este libro.

En cualquiera de las teorías T que estamos considerando (ZF−AP, KPI o cualquiera de sus extensiones), es posible definir el conjunto $\ulcorner T \urcorner \subset \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$, así como el concepto de deducción lógica a partir de unos axiomas dados, y en particular podemos definir la sentencia $\mathrm{Consis}\, T$ que afirma que T es consistente, es decir, que de T no se puede deducir lógicamente una contradicción.

En la introducción hemos explicado que dicha sentencia es equivalente a una sentencia aritmética, es decir, a una sentencia que involucra únicamente números naturales con la suma y el producto o, más simplemente aún, se puede probar que equivale a que una ecuación diofántica no tenga solución:

$$\mathrm{Consis}\, T \leftrightarrow \neg \bigvee x_1 \cdots x_n \in \mathbb{Z}\ P(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

donde n es un número natural concreto que podríamos calcular y P representa un polinomio $P \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ que podríamos construir explícitamente a partir de T.

La relación con la teoría de modelos nos la da el teorema de completitud de Gödel, en virtud del cual, en T se puede probar que

$$\mathrm{Consis}\, T \leftrightarrow \bigvee M R\ (M, R) \vDash T,$$

es decir, que T es consistente si y sólo si tiene un modelo.

Ahora podemos precisar lo que explicábamos en la introducción sobre que no es posible demostrar que ZFC es consistente. Tal y como indicábamos allí, el segundo teorema de incompletitud de Gödel afirma que, si la teoría T es recursiva, sólo puede suceder

$$\underset{T}{\vdash} \operatorname{Consis} T$$

si la teoría T es contradictoria (en cuyo caso en T puede probarse cualquier cosa, en particular $\operatorname{Consis} T$). Más concretamente, si T es consistente es imposible demostrar en T la existencia de un modelo de T, por lo que, automáticamente, cualquier sentencia que implique la existencia de un modelo de T tiene que ser indemostrable en T.

La razón por la que podremos prescindir en todo momento de este hecho es que más adelante demostraremos directamente una versión ligeramente más débil, pero suficiente en nuestro contexto:

Llamaremos *modelos naturales* de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ a los modelos (M, R) en los que la relación R es la pertenencia, es decir,

$$R = \{(x, y) \in M \mid x \in y\}.$$

En tal caso podemos omitir toda referencia a R y escribir $M \vDash \alpha[x_1, \ldots, x_n]$ en lugar de $(M, R) \vDash \alpha[x_1, \ldots, x_n]$.

A lo largo de este libro nos van a interesar casi exclusivamente los modelos naturales de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ y, más concretamente los *modelos transitivos* (aquellos en los que M es un conjunto transitivo).

La afirmación más débil que el segundo teorema de incompletitud que demostraremos más adelante es que, en cualquier teoría de conjuntos T (recursiva) que extienda a KPI o a ZF$-$AP, no es posible demostrar la existencia de un modelo natural de T.

En todas las consecuencias que nos van a interesar del segundo teorema de incompletitud siempre podremos reemplazarlo por este último resultado.

Capítulo II

Modelos de ZF

Iniciamos aquí el estudio de los modelos de ZF y de las subteorías que hemos considerado en el capítulo anterior presentando algunos resultados generales junto con el estudio de algunos ejemplos concretos y las aplicaciones que se derivan de ellos.

2.1 Relativización de expresiones

En primer lugar vamos a ver es que es posible dar una definición alternativa de modelo, que es la que se utiliza más habitualmente en este contexto, y que es muy distinta de la considerada en el capítulo anterior (la propia de la teoría de modelos). La diferencia más notable es que aquélla sólo permite considerar a los conjuntos como modelos, mientras que la que vamos a exponer ahora es válida para clases propias.

La situación es que $(M,R) \vDash \phi$ es una fórmula con tres variables libres que puede definirse en cualquier teoría suficientemente potente como para demostrar un teorema de recursión adecuado, y es precisamente para que dicho teorema sea aplicable que se requiere que M y R sean conjuntos. Sin embargo, cuando aplicamos dicha fórmula a una sentencia concreta, como por ejemplo el axioma del par, obtenemos una fórmula con dos variables libres:

$$(M,R) \vDash \bigwedge xy \bigvee z \bigwedge u(u \in z \leftrightarrow u = x \lor u = y)$$

en la que la definición de $\vDash$ puede desarrollarse hasta

$$\bigwedge xy \in M \bigvee z \in M \bigwedge u \in M (u\, R\, z \leftrightarrow u = x \lor u = y).$$

Ahora bien, sucede que esta última fórmula (en la que ya no aparece $\vDash$) tiene sentido incluso si M y R son clases propias. En general, para cada fórmula concreta $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ que consideremos, la fórmula $(M,R) \vDash \phi[x_1, \ldots, x_n]$ puede desarrollarse hasta una fórmula $\phi^{MR}(x_1, \ldots, x_n)$ que tiene sentido incluso si M y R son clases propias, pero que cuando son conjuntos es equivalente a la fórmula de partida.

Lo que vamos a hacer ahora es definir $\phi^{MR}(x_1, \ldots, x_n)$ directamente, sin pasar por la definición de $\models$, de modo que no necesitaremos exigir que M y R sean conjuntos. Notemos que para que esto tenga sentido ϕ tiene que ser una fórmula concreta, es decir, una fórmula metamatemática que podamos transformar metamatemáticamente en otra fórmula ϕ^{MR} concreta mediante una definición recurrente metamatemática, en particular sin hacer referencia a ningún teorema formal de recursión demostrado en ninguna teoría formal en particular. Puesto que consideramos expresiones metamatemáticas, admitiremos que tengan descriptores:

Definición 2.1 Si θ es una expresión (metamatemática) de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ y $x \in M$, $x\,R\,y$ son dos fórmulas[1] cuyas variables libres (distintas de x e y) no están en θ, definimos la *relativización* θ^{MR} (resp. θ^M) como la expresión construida según las reglas siguientes:

- $x^{MR} \equiv x$ para toda variable x,
- $(t_1 = t_2)^{MR} \equiv t_1^{MR} = t_2^{MR}$,
- $(t_1 \in t_2)^{MR} \equiv t_1^{MR}\,R\,t_2^{MR} \quad (\text{o } (t_1 \in t_2)^M \equiv t_1^M \in t_2^M)$,
- $(\neg\alpha)^{MR} \equiv \neg\alpha^{MR}$,
- $(\alpha \to \beta)^{MR} \equiv \alpha^{MR} \to \beta^{MR}$,
- $(\bigwedge x\alpha)^{MR} \equiv \bigwedge x \in M\ \alpha^{MR}$,
- $(x|\alpha)^{MR} \equiv x|(x \in M \wedge \alpha^{MR})$.

De aquí se deduce a su vez que

$$(\alpha \vee \beta)^{MR} \equiv \alpha^{MR} \vee \beta^{MR}, \quad (\alpha \wedge \beta)^{MR} \equiv \alpha^{MR} \wedge \beta^{MR},$$

$$(\alpha \leftrightarrow \beta)^{MR} \equiv \alpha^{MR} \leftrightarrow \beta^{MR}, \qquad (\bigvee x\, \alpha)^{MR} \equiv \bigvee x \in M\, \alpha^{MR}.$$

En definitiva, relativizar una expresión θ se reduce a realizar sistemáticamente los cambios siguientes:

- Cambiar cada subfórmula $x \in y$ por $x\,R\,y$ (o no, en el caso de θ^M).
- Cambiar cada $\bigwedge x$ por $\bigwedge x \in M$ (lo que a su vez implica cambiar cada $\bigvee x$ por $\bigvee x \in M$).
- Cambiar cada $x|$ por $x|(x \in M \wedge \cdots)$.

La idea subyacente es que si t es un término, entonces t^{MR} es *lo que llamaría t alguien que sólo "viera" los conjuntos de la clase M y "creyera" que la relación de pertenencia entre ellos no es la pertenencia "de verdad", sino la relación R* (pero en el caso de t^M dejamos que nuestro "alguien" "vea" la pertenencia "de verdad" en la clase M).

[1] Notemos que esto es lo mismo que decir que M y R son clases, no necesariamente conjuntos.

Por ejemplo, $\varnothing^{MR} \equiv (x|\bigwedge u\ u \notin x)^{MR} \equiv x|(x \in M \wedge \bigwedge u \in M\ \neg u\, R\, x)$, y esto significa que $\varnothing^{MR}$ es el único conjunto de M para el cual no existe ningún otro $u \in M$ tal que $u\, R\, x$ (sin perjuicio de que $\varnothing^{MR}$ pueda ser la descripción impropia).

Similarmente, si ϕ es una fórmula, entonces ϕ^{MR} es *lo que tiene que suceder para que alguien que sólo "vea" los conjuntos de M y "confunda" la pertenencia con la relación R "crea" que se cumple ϕ.*

Por ejemplo, la relativización del axioma del conjunto vacío es

$$(\bigvee x \bigwedge u\ u \notin x)^{MR} \equiv \bigvee x \in M \bigwedge u \in M\ \neg u\, R\, x.$$

Si unas clases M y R cumplen esto y además cumplen la relativización del axioma de extensionalidad:

$$(\bigwedge xy(\bigwedge u(u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y))^{MR},$$

que equivale claramente a

$$\bigwedge xy \in M(\bigwedge u \in M(u\, R\, x \leftrightarrow u\, R\, y) \rightarrow x = y),$$

entonces es claro que $\overset{1}{\bigvee} x \in M \bigwedge u \in M\ \neg u\, R\, x$, por lo que $\varnothing^{MR}$ es una descripción propia.

Definición 2.2 Si $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ es un conjunto finito de fórmulas (metamatemáticas) de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ y M, R son como en la definición anterior, escribiremos

$$(M, R) \vDash \Gamma \equiv \bigwedge x_1 \cdots x_m \in M(\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n)^{MR}$$

(o bien $M \vDash \Gamma \equiv \bigwedge x_1 \cdots x_m \in M(\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n)^M$), donde $x_1, \ldots, x_m$ son las variables libres en $\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$.

Notemos que la definición no tendría sentido para infinitas fórmulas, pues no podríamos formar la conjunción de todas ellas. Así tenemos una definición alternativa de $(M, R) \vDash \Gamma$ en la que M y R pueden ser clases propias. Antes de compararla con la anterior enunciamos el resultado básico [LM 12.10, 12.12]:

Teorema 2.3 *Sean M y R dos clases tales que $(x|x = x) \in M$. Entonces:*

a) Para todo término $t(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ cuyas variables libres estén entre las indicadas, se cumple

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in M\ t^{MR}(x_1, \ldots, x_n) \in M.$$

b) Si Γ es un conjunto finito de fórmulas de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$, $(M, R) \vDash \Gamma$ y γ es una fórmula tal que $\Gamma \vdash \gamma$, entonces $(M, R) \vDash \gamma$.

El lector que esté acostumbrado a razonar informalmente, es decir, sin apoyarse en la lógica formal, debería considerar "inmediato" el teorema anterior. En efecto, para el apartado a) basta tener en cuenta que t^{MR} es "lo que llamaría t alguien que sólo vea los conjuntos de M", luego, por definición, es un objeto de M. Más precisamente, o bien t es una variable, en cuyo caso estamos suponiendo que está en M, o bien t es una descripción, con lo que $t^{MR} \equiv x|(x \in M \wedge \cdots)$ y, o bien es la descripción impropia (y la suponemos en M), o bien es una descripción propia, y entonces es el único $x \in M$ tal que $\dots$, luego en cualquier caso está en M.

Respecto del apartado b), afirma simplemente que si alguien que "viva" en M "cree" que se cumplen las fórmulas de Γ y γ es una consecuencia lógica de Γ, entonces también tiene que "creer" que se cumple Γ, porque eso es lo que significa "consecuencia lógica", algo que se cumple necesariamente cuando se cumplen las premisas.

Más precisamente, si existe un razonamiento que prueba γ partiendo de las premisas de Γ, al modificarlo cambiando sistemáticamente la palabra "conjunto" por "conjunto de M" y "pertenencia" por la relación R, obtenemos un argumento igual de válido de que $M \vDash \Gamma$ implica $M \vDash \gamma$.

La única forma de precisar más estos argumentos informales es recurrir al concepto técnico de demostración lógica y para ello remitimos a [LM].

Nota Hay que señalar que en el enunciado del teorema anterior hemos cometido un abuso de notación que repetiremos a menudo para que los enunciados se lean de forma más natural, y que consiste en mezclar hipótesis metamatemáticas con hipótesis matemáticas. Técnicamente el teorema anterior es un esquema teoremático que debería enunciarse así:

> *Fijadas unas fórmulas (metamatemáticas) $x \in M$, $x\,R\,y$, γ, un conjunto finito de fórmulas Γ tal que $\Gamma \vdash \gamma$ y un término t, entonces,*
>
> $$\underset{B}{\vdash} (x|x = x) \in M \rightarrow \bigwedge x_1 \cdots x_n \in M \;\; t^{MR}(x_1, \dots, x_n) \in M,$$
>
> *y*
>
> $$\underset{B}{\vdash} (x|x = x) \in M \wedge (M, R) \vDash \Gamma \rightarrow M, R) \vDash \gamma.$$

de modo que tenemos un teorema distinto para cada elección de las fórmulas y términos metamatemáticos indicados. ■

Tal y como se explica en [LM, sección 12.2], el análogo al teorema 2.3 b), que no es sino la formalización de la prueba metamatemática del teorema de corrección, es válido también para modelos en el sentido de la teoría de modelos.

Así pues, tenemos dos definiciones distintas de $(M, R) \vDash \Gamma$ cuya interpretación es la misma: ambas representan lo que tiene que suceder para que alguien que "viva" en el modelo (M, R), es decir, alguien que sólo "vea" los conjuntos de M y "crea" que la relación de pertenencia entre dichos conjuntos es la dada por la relación R juzgue que las fórmulas de Γ son verdaderas. Sin embargo, hay diferencias técnicas entre ambas definiciones que resultan cruciales:

- La definición de $(M, R) \vDash \gamma$ en términos de relativizaciones tiene sentido cuando M y R son clases cualesquiera (no necesariamente conjuntos), pero requiere entender γ como una fórmula metamatemática, de modo que no tenemos una única fórmula $(M, R) \vDash \gamma \equiv \bigwedge x_1 \cdots x_n \in M\ \gamma^{MR}$, sino que esto es una fórmula distinta de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ para cada fórmula γ de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ que consideremos, y sus variables libres son las que aparezcan en la fórmula $x \in M$ distintas de x y las que aparezcan en $x\,R\,y$ distintas de x e y.
- En cambio la definición de $(M, R) \vDash \gamma$ en el sentido de la teoría de modelos es una única fórmula de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ con tres variables libres M, R, γ, pero sólo tiene sentido cuando M y R son conjuntos (y sólo puede definirse en una teoría suficientemente potente como para formalizar la definición recurrente, como KPI o ZF$-$AP).
- La expresión $(M, R) \vDash \Gamma$ definida a partir del concepto de relativización sólo tiene sentido en el caso en que Γ es una colección finita de fórmulas metamatemáticas, mientras que la expresión en el sentido de la teoría de modelos está definida para todo conjunto de sentencias Γ de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$, finito o infinito.

Por otra parte, cuando las dos definiciones de $(M, R) \vDash \Gamma$ tienen sentido, son equivalentes en el sentido que precisa el teorema siguiente (que es un caso particular de [LM 12.13]):

Teorema 2.4 *Sea M un conjunto y $R \subset M \times M$. Si ϕ es una sentencia (metamatemática) sin descriptores, entonces*

$$(M, R) \vDash \ulcorner\phi\urcorner \leftrightarrow \phi^{MR}.$$

Aquí hemos usado excepcionalmente los ángulos de Quine para diferenciar la sentencia metamatemática ϕ de su versión matemática correspondiente $\ulcorner\phi\urcorner$.

En la práctica esto significa que si M y R son conjuntos no necesitamos precisar si en

$$(M, R) \vDash \bigvee x \bigwedge u\ u \notin x$$

la sentencia $\bigvee x \bigwedge u\ u \notin x$ es metamatemática o su versión matemática correspondiente, pues en ambos casos la expresión anterior equivale a que

$$\bigvee x \in M \bigwedge u \in M\ \neg u\,R\,x.$$

Más informalmente, $(M, R) \vDash \phi$ significa siempre "lo que tiene que significar" y, cuando las dos versiones tienen sentido, ambas significan lo mismo.

Por último, hay que señalar que en muchas ocasiones podemos dar sentido a una expresión $(M, R) \vDash \Gamma$ en su sentido metamatemático cuando Γ es un conjunto infinito de sentencias metamatemáticas:

a) Cuando $(M, R) \vDash \Gamma$ figure en la hipótesis de un teorema (con Γ infinito) se entenderá como que existe un subconjunto finito Γ_0 de Γ de modo que el teorema se cumple con la hipótesis $(M, R) \vDash \Gamma_0$.

b) Cuando $(M, R) \vDash \Gamma$ figure en la conclusión de un teorema se entenderá como un esquema teoremático, es decir, como que puede demostrarse $(M, R) \vDash \Gamma_0$ para cualquier subconjunto finito Γ_0 de Γ.

c) Cuando un teorema tenga $(M, R) \vDash \Gamma$ en su hipótesis y $(N, S) \vDash \Delta$ en su conclusión, se entenderá como que, para todo subconjunto finito Δ_0 de Δ existe un subconjunto finito Γ_0 de Γ de modo que, bajo la hipótesis $(M, R) \vDash \Gamma_0$ puede probarse $(N, S) \vDash \Delta_0$.

Discutiremos esto con más detalle cuando nos encontremos con ejemplos concretos. En cualquiera de estos casos leeremos la expresión $(M, R) \vDash \Gamma$ (que será una fórmula si Γ es finito o un esquema de fórmulas en caso contrario) diciendo que (M, R) es un *modelo* de Γ. En este contexto, al igual que en el contexto de la teoría de modelos, podemos hablar también de *modelos naturales,* de Γ, que son las clases M que cumplen $M \vDash \Gamma$ y de *modelos transitivos,* que son los modelos naturales determinados por clases transitivas.

Los modelos transitivos determinados por clases propias se llaman *modelos internos* y son, pues, los modelos transitivos metamatemáticos que no pueden verse como modelos en el sentido de la teoría de modelos.

Nota Cuando consideremos un modelo transitivo M supondremos siempre que $\varnothing = (x|x = x) \in M$ ■

Pruebas de consistencia Ahora podemos describir el esquema general de cualquiera de las pruebas de consistencia que vamos a presentar:

> Supongamos que tenemos dos teorías S y T sobre el lenguaje $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ y sea Γ la colección de los axiomas de T. Supongamos que en S podemos definir clases M, R y demostrar[2] que $(M, R) \vDash \Gamma$. Entonces podemos afirmar que si S es consistente también lo es T.

En efecto, si pudiera probarse una contradicción a partir de T, digamos $\alpha \wedge \neg\alpha$ (donde podemos suponer que α es una sentencia), la demostración usaría únicamente una cantidad finita Γ_0 de axiomas de T, y en S sabemos demostrar que $(M, R) \vDash \Gamma_0$, luego por el teorema 2.3 tenemos que en S se puede demostrar $(M, R) \vDash \alpha \wedge \neg\alpha$, es decir, $\alpha^{MR} \wedge \neg\alpha^{MR}$, con lo cual tenemos una demostración de una contradicción en S y podemos concluir que S es contradictoria también.

La prueba es totalmente constructiva, en el sentido de que podemos programar a un ordenador para que, si le damos una demostración de una contradicción en T y una demostración en S de $(M, R) \vDash \Gamma_0$, donde Γ_0 es el conjunto de axiomas de T usados en la prueba de la contradicción, el ordenador producirá una demostración de una contradicción en S.

[2]Si Γ tiene infinitos axiomas, esto debe entenderse como acabamos de explicar, es decir, que en S podemos demostrar $(M, R) \vDash \Gamma_0$, para todo subconjuntos finito Γ_0 de Γ.

2.2 Modelos transitivos, expresiones absolutas

En esta sección trabajamos en cualquier extensión de KPI o de ZF−AP. El interés de los modelos transitivos se debe a que muchos de los conceptos conjuntistas básicos son absolutos para modelos transitivos en el sentido siguiente:

Definición 2.5 Dadas dos clases $M \subset N$, una fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ es *absoluta hacia arriba* para $M - N$ si

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in M \ (\phi^M(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \phi^N(x_1, \ldots, x_n)),$$

la fórmula ϕ es *absoluta hacia abajo* para $M - N$ si

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in M \ (\phi^N(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \phi^M(x_1, \ldots, x_n)),$$

y ϕ es *absoluta* para $M - N$ si lo es hacia arriba y hacia abajo, es decir, si

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in M \ (\phi^M(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi^N(x_1, \ldots, x_n)).$$

Un término $t(x_1, \ldots, x_n)$ es *absoluto* para $M - N$ si

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in M \ (t^M(x_1, \ldots, x_n) = t^N(x_1, \ldots, x_n)).$$

Es claro que esto equivale a que la fórmula $x = t$ sea absoluta para $M - N$, donde x es una variable que no esté en t.

Una expresión se dice *absoluta* para una clase M si lo es para $M - V$.

Notemos que relativizar una fórmula a la clase universal V significa sustituir cada $\bigwedge x$ por $\bigwedge x \in V$, pero $x \in V$ es una fórmula trivialmente cierta, por lo que $\phi \leftrightarrow \phi^V$. Así pues, una fórmula ϕ es absoluta para una clase M si y sólo si

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in M \ (\phi^M(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi(x_1, \ldots, x_n)),$$

es decir, si alguien que "viva" en M no se equivoca nunca al juzgar si unos conjuntos dados (de M) cumplen o no ϕ.

El interés de esto es que hay muchos conceptos absolutos para modelos transitivos:[3]

Teorema 2.6 *Toda fórmula Σ_1 respecto de una teoría T es absoluta hacia arriba para modelos transitivos de T, toda fórmula Π_1 es absoluta hacia abajo y toda fórmula Δ_1 es absoluta.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos en primer lugar que toda fórmula α de tipo Δ_0 (en sentido estricto) es absoluta para conjuntos transitivos (no vacíos). Razonamos por inducción sobre la longitud de α. Si $\alpha \equiv x = y$ o $\alpha \equiv x \in y$ es inmediato, porque $\alpha^M \equiv \alpha$.

[3]Este teorema está demostrado en [LM 12.16], pero repetimos aquí la prueba.

Si $\alpha \equiv \neg\beta(x_1, \ldots, x_n)$ y el teorema vale para β, también vale para α, pues por hipótesis de inducción tenemos que si M es una clase transitiva

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in M\, (\beta^M(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \beta(x_1, \ldots, x_n)),$$

y esto implica que

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in M\, (\neg\beta^M(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \neg\beta(x_1, \ldots, x_n)).$$

El caso en que $\alpha \equiv \beta \rightarrow \gamma$ es similar. Veamos por último el caso en que $\alpha \equiv \bigwedge x \in y\, \beta(x, y, x_1, \ldots, x_n)$. Por hipótesis de inducción, si M es transitivo tenemos que

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n xy \in M(\beta^M(x, y, x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \beta(x, y, x_1, \ldots, x_n)),$$

de donde

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n xy \in M((x \in y \rightarrow \beta^M(x, y, x_1, \ldots, x_n)) \leftrightarrow$$
$$(x \in y \rightarrow \beta(x, y, x_1, \ldots, x_n))),$$

y en este punto usamos la transitividad de M para deducir que

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n y \in M(\bigwedge x(x \in y \rightarrow \beta^M(x, y, x_1, \ldots, x_n)) \leftrightarrow$$
$$\bigwedge x(x \in y \rightarrow \beta(x, y, x_1, \ldots, x_n))).$$

En principio deberíamos haber puesto $\bigwedge x \in M$, pero el hecho de que $y \in M$ ya implica, por la transitividad de M, que $x \in M$, luego llegamos a que

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n y \in M(\alpha^M(y, x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \alpha(y, x_1, \ldots, x_n)).$$

Con esto tenemos probado que las fórmulas Δ_0 son absolutas para modelos transitivos. Ahora supongamos que $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ es Σ_1 respecto de una teoría T y que M es un modelo transitivo de T. Por hipótesis existe una fórmula α de tipo Δ_0 tal que $\underset{T}{\vdash} \phi \leftrightarrow \bigvee x\, \alpha$, luego

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in M(\phi^M(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \bigvee x \in M\, \alpha(x, x_1, \ldots, x_n)),$$

y es claro entonces que

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in M(\phi^M(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \bigvee x\, \alpha(x, x_1, \ldots, x_n)),$$

luego ϕ es absoluta hacia arriba. La prueba para fórmulas Π_1 es análoga, y estos dos casos implican que las fórmulas Δ_1 son absolutas. ■

Así pues, todos los conceptos básicos que en el capítulo anterior hemos probado que son Δ_0 o Δ_1 (en particular los listados en [LM A.3]) son absolutos para modelos transitivos de las teorías correspondientes.

Notemos que cada prueba de que un término es absoluto se traduce en una propiedad de clausura de los modelos transitivos. Por ejemplo, el hecho de que

$x \cup y$ es absoluto para modelos transitivos de la teoría básica B se traduce en que si M es un modelo transitivo de B entonces $\bigwedge xy \in M\ x \cup y \in M$.

En efecto, si $x, y \in M$, entonces $x \cup y = (x \cup y)^M \in M$. Informalmente, si $x, y \in M$, alguien que "viva" en M tiene que "ver" un conjunto que cumpla la definición de $x \cup y$ y, como la unión es absoluta, dicho conjunto será $x \cup y$, luego concluimos que $x \cup y \in M$.

Otra propiedad de clausura importante es la siguiente:

Teorema 2.7 *Si M es un modelo transitivo de la teoría básica de conjuntos* B, *entonces* $[M]^{<\omega} \subset M$.

Demostración: Veamos, por inducción sobre $|x|$, que si $x \subset M$ es finito, entonces $x \in M$. Si $|x| = 0$ es que $x = \varnothing$ y basta tener en cuenta que $\varnothing$ es absoluto, luego $\varnothing = \varnothing^M \in M$.

Si vale para conjuntos de cardinal n y $|x| = n + 1$, entonces $x = x_0 \cup \{u\}$, para un cierto $u \in x \subset M$. Como $x_0 \in M$ y $|x_0| = n$, por hipótesis de inducción $x_0 \in M$ y, como $u \in M$ y $\{u\}$ es absoluto, también $\{u\} \in M$. Por último, como $x \cup y$ es absoluto, tenemos que $x = x_0 \cup \{u\} \in M$. ■

De aquí podemos concluir:

Teorema 2.8 *La fórmula "x es finito" (y, por consiguiente, "x es infinito") es absoluta para modelos transitivos de* B.

Demostración: Tenemos que "$x \in \omega$" es absoluto para M, y por definición, x es finito $\leftrightarrow \bigvee fn(n \in \omega \land f : n \longrightarrow x$ biyectiva). Es inmediato entonces que si $x \in M$ cumple x es finito^M, entonces x es finito y, recíprocamente, si $x \in M$ es finito, tenemos que existe $n \in \omega$ y $f : n \longrightarrow x$ biyectiva, y por transitividad $f \subset M$ y además f es finita, luego por el teorema anterior $f \in M$, luego $(n \in \omega \land f : n \longrightarrow x \text{ biyectiva})^M$, es decir, x es finito^M. ■

Observemos [LM A.3] que "ser finito" es una propiedad Σ_1, mientras que ser Dedekind-finito es Π_1, y ambas propiedades son equivalentes bajo el axioma de elección, por lo que en ZFC ser finito es Δ_1. Sin embargo, el teorema anterior prueba que la finitud es absoluta para modelos transitivos de B, aunque la finitud no sea Δ_1 en B.

Hemos visto que "ser un ordinal" es Δ_0 respecto de cualquier teoría en la que se cumpla el axioma de regularidad. Ahora bien, el axioma de regularidad:

$$\bigwedge x(x \neq \varnothing \to \bigvee u \in x\ u \cap x = \varnothing)$$

es Π_1, pues la fórmula tras $\bigwedge x$ es Δ_0, luego es absoluto hacia abajo y, como se cumple en V (porque estamos trabajando en KPI o ZF$-$AP) se cumple en toda clase transitiva. Por lo tanto, todo modelo transitivo de B es, de hecho, un modelo transitivo de B + regularidad, luego "ser un ordinal" es absoluto para modelos transitivos de B. Esto nos permite extraer ciertas consecuencias sobre los ordinales de un modelo:

Definición 2.9 Para cada clase M, llamaremos $\Omega^M = \Omega \cap M$.

Así, $\Omega^M \subset M$ es lo que alguien que "viva" en M "cree" que es la clase de todos los ordinales (pero "en verdad" será un conjunto si M lo es).

Teorema 2.10 *Si M es un modelo transitivo de la teoría básica de conjuntos* B, *entonces $\Omega^M = \Omega$ o bien Ω^M es un ordinal límite.*

Demostración: Ω^M es una clase transitiva por ser intersección de dos clases transitivas. Pero toda clase transitiva de ordinales es un ordinal (la clase Ω o un elemento de Ω). En el caso en que $\Omega^M \in \Omega$, ciertamente $\varnothing = \varnothing^M \in \Omega^M$, luego $\Omega^M \neq 0$ y, como en B puede probarse que $\bigwedge \alpha \in \Omega\ \alpha \cup \{\alpha\} \in \Omega$, se cumple la relativización de esto a M, que es $\bigwedge \alpha \in \Omega^M\ \alpha \cup \{\alpha\} \in \Omega^M$, lo que prueba que Ω^M es un ordinal límite. ■

Si M es un modelo transitivo de KP o de ZF$-$AP, donde puede definirse el rango de un conjunto (y es absoluto, porque hemos visto que es Δ_1), resulta que, para cada $x \in M$, se cumple que $\alpha = \operatorname{rang} x \in M$, luego $\alpha \in \Omega^M$. Por lo tanto, si $\Omega^M = \lambda$ es un ordinal límite, se cumple que $M \subset V_\lambda$ y, si suponemos AP, entonces V_λ es un conjunto. En definitiva:

Teorema 2.11 (ZF) *Si M es un modelo transitivo de* KPI+AP *o de* ZF *se cumple que M es un conjunto si y sólo si Ω^M es un conjunto (luego un ordinal límite).*

Otros ejemplos de relativización Cuando, en el transcurso de un argumento, es necesario comprobar que una fórmula es absoluta, pero no es necesario analizar su posición en la jerarquía de Lévy, puede ser mucho más sencillo comprobar dicho carácter absoluto relativizando la definición o cualquier caracterización que resulte más conveniente. Por ejemplo, una forma sencilla de probar que el producto de ordinales es absoluto (admitiendo ya probado que lo es la suma) es la siguiente:

Sea M un modelo transitivo de KP o de ZF$-$AP, o de cualquier teoría en la que se puede definir el producto de ordinales. En dicha teoría se demuestra que

$$\bigwedge \alpha\ \alpha \cdot 0 = 0 \wedge \bigwedge \alpha\beta\ \alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha \wedge \bigwedge \lambda\ \alpha \cdot \lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} \alpha \cdot \delta.$$

Por lo tanto, se tiene que cumplir la relativización a M de esta afirmación, que es:

$$\bigwedge \alpha \in \Omega^M\ \alpha \cdot^M 0 = 0 \wedge \bigwedge \alpha\beta \in \Omega^M\ \alpha \cdot^M (\beta + 1) = \alpha \cdot^M \beta + \alpha \wedge$$

$$\bigwedge \lambda \in \Omega^M\ \alpha \cdot^M \lambda = \bigcup_{\delta < \lambda} \alpha \cdot^M \delta.$$

Aquí hemos usado que "ser un ordinal" es absoluto, al igual que "ser un ordinal límite", etc. A partir de aquí, fijado $\alpha \in \Omega^M$ una simple inducción prueba que $\bigwedge \beta \in \Omega^M \ \alpha \cdot^M \beta = \alpha\beta$.

El mismo razonamiento se aplica a la suma y a la exponenciación de ordinales.

Veamos ahora que la clausura transitiva es absoluta[4] para modelos transitivos de ZF$-$AP. Para ello fijamos un modelo transitivo M de ZF$-$AP y observamos que lo siguiente es un teorema [TC 4.5] de ZF$-$AP:

$$\bigwedge x\,(\mathrm{ct}_0 x = x \wedge \bigwedge n \in \omega \ \mathrm{ct}_{n+1} x = \bigcup \mathrm{ct}_n\, x \wedge \mathrm{ct}\, x = \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{ct}_n\, x).$$

Por lo tanto, se tiene que cumplir su relativización a M:

$$\bigwedge x \in M\,(\mathrm{ct}_0^M x = x \wedge \bigwedge n \in \omega \ \mathrm{ct}_{n+1}^M x = \bigcup \mathrm{ct}_n^M x \wedge \mathrm{ct}^M x = \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{ct}_n^M x).$$

Ahora, fijado $x \in M$, una inducción trivial prueba que $\bigwedge n \in \omega \ \mathrm{ct}_n^M x = \mathrm{ct}_n\, x$, y a su vez la última parte de la relativización implica que $\mathrm{ct}^M x = \mathrm{ct}\, x$.

Conceptos no absolutos en ZF En este último apartado trabajamos en ZF, y vamos a mostrar algunos ejemplos de expresiones que no son (necesariamente) absolutas para modelos transitivos M de ZF, para las cuales calcularemos sus relativizaciones. En el caso de los términos la técnica es la misma que hemos empleado en el apartado anterior: relativizar una fórmula adecuada que los caracterice:

- $\bigwedge x \in M (\mathcal{P}x)^M = \mathcal{P}x \cap M$.

  En efecto, en ZF se demuestra que

  $$\bigwedge xy (y \in \mathcal{P}x \leftrightarrow y \subset x),$$

  luego se cumple su relativización a M, que es

  $$\bigwedge xy \in M (y \in (\mathcal{P}x)^M \leftrightarrow y \subset x).$$

  Esto equivale a

  $$\bigwedge x \in M (\bigwedge y (y \in (\mathcal{P}x)^M \leftrightarrow y \in M \wedge y \subset x)).$$

  Aquí hemos usado que $y \in (\mathcal{P}x)^M$ ya implica $y \in M$ por transitividad. Por lo tanto, concluimos que $\bigwedge x \in M (\mathcal{P}x)^M = \mathcal{P}x \cap M$.

- $\bigwedge \alpha \in \Omega^M \ V_\alpha^M = V_\alpha \cap M$.

[4]El argumento vale también para modelos de KP, pero en este caso tenemos que $\mathrm{ct}\, x$ es Δ_1 respecto de KP [LM A.3].

En efecto, en ZF se demuestra que $\bigwedge \alpha x(x \in V_\alpha \leftrightarrow \operatorname{rang} x < \alpha)$ y, como el rango es absoluto (hemos visto que es Δ_1), resulta que

$$\bigwedge x \in M \bigwedge \alpha \in \Omega^M \, (x \in V_\alpha^M \leftrightarrow \operatorname{rang} x < \alpha),$$

luego

$$\bigwedge x \bigwedge \alpha \in \Omega^M \, (x \in V_\alpha^M \leftrightarrow x \in M \land \operatorname{rang} x < \alpha),$$

de donde es inmediato que $V_\alpha^M = V_\alpha \cap M$.

- $\mathbb{R}^M = \mathbb{R} \cap M$.

  En efecto, sabemos que $x \in \mathbb{R}$ es absoluto, luego, al relativizar la sentencia $\bigwedge x(x \in \mathbb{R} \leftrightarrow x$ es un número real) obtenemos

  $$\bigwedge x \in M(x \in \mathbb{R}^M \leftrightarrow x \text{ es un número real}).$$

  Por transitividad,

  $$\bigwedge x(x \in \mathbb{R}^M \leftrightarrow x \in M \land x \text{ es un número real}),$$

  que a su vez equivale a $\mathbb{R}^M = \mathbb{R} \cap M$.

- $\bigwedge AB \in M \; (A^B)^M = A^B \cap M$.

  (La prueba es análoga a la del caso anterior).

- "κ es un cardinal" es Π_1 respecto a ZF, por lo que es absoluto hacia abajo. En efecto,

  $$\kappa \text{ es un cardinal} \leftrightarrow \alpha \in \Omega \land \neg \bigvee \alpha f(\alpha \in \kappa \land f : \alpha \longrightarrow \kappa \text{ biyectiva}).$$

- "x es numerable" es Σ_1, por lo que es absoluto hacia arriba. En efecto:

  $$x \text{ es numerable} \leftrightarrow \bigvee fy(y = \omega \land f : x \longrightarrow y \text{ inyectiva}).$$

Esto significa que cuando alguien que "vive" en un modelo transitivo M ve un cardinal, reconoce que lo es, pero en general puede tomar por cardinales a ordinales que no lo son realmente. Por el contrario, cuando afirma "ver" un conjunto numerable, es que el conjunto que "ve" es ciertamente numerable, pero puede tomar por conjuntos no numerables a conjuntos que en realidad son numerables. Pronto veremos ejemplos de estas situaciones.

Relativización de los axiomas de ZFC Puesto que vamos a tener que comprobar en muchas ocasiones que determinadas clases transitivas satisfacen los axiomas de ZFC, terminamos esta sección recordando a qué equivale concretamente la relativización de cada uno de ellos:

Extensionalidad El axioma de extensionalidad es

$$\bigwedge xy(\bigwedge u(u \in x \leftrightarrow u \in y) \to x = y),$$

y su relativización es

$$\bigwedge xy \in M(\bigwedge u(u \in x \leftrightarrow u \in y) \to x = y),$$

pues no es necesario poner $\bigwedge u \in M$, ya que las condiciones $x \in M$ e $y \in M$ ya implican que $u \in M$. Concluimos que el axioma de extensionalidad se cumple en cualquier clase transitiva.

Regularidad Ya hemos probado (antes de la definición 2.9) que el axioma de regularidad se cumple también en cualquier clase transitiva.

Par El axioma del par es

$$\bigwedge xy\bigvee z(\bigwedge u(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)),$$

y su relativización es

$$\bigwedge xy \in M\bigvee z \in M(\bigwedge u(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)),$$

pues por transitividad es redundante exigir $\bigwedge u \in M$, luego en definitiva equivale a $\bigwedge xy \in M\ \{x, y\} \in M$.

Unión El axioma de la unión es

$$\bigwedge x\bigvee y\bigwedge u(u \in y \leftrightarrow \bigvee v(u \in v \wedge v \in x)),$$

y su relativización es

$$\bigwedge x \in M\bigvee y \in M\bigwedge u(u \in y \leftrightarrow \bigvee v(u \in v \wedge v \in x)),$$

que a su vez equivale a $\bigwedge x \in M\ \bigcup x \in M$.

Reemplazo Para cada fórmula $\phi(x, y, x_1, \ldots, x_n)$, la relativización del caso correspondiente del axioma de reemplazo es

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in M(\bigwedge xyz \in M(\phi^M(x, y) \wedge \phi^M(x, z) \to y = z)$$

$$\to \bigwedge a \in M\bigvee b \in M\bigwedge y \in M(y \in b \leftrightarrow \bigvee x \in a\ \phi^M(x, y))$$

Equivalentemente, bajo la hipótesis de unicidad sobre ϕ^M tiene que cumplirse que

$$\bigwedge a \in M\,\{y \in M \mid \bigvee x \in a\ \phi^M(x, y)\} \in M.$$

Infinitud El axioma de infinitud es

$$\bigvee x(\varnothing \in x \wedge \bigwedge u \in x\ u \cup \{u\} \in x).$$

Si una clase M es un modelo de B, todos los conceptos que aparecen en la fórmula anterior son absolutos para M, con lo que su relativización se reduce a

$$\bigvee x \in M(\varnothing \in x \wedge \bigwedge u \in x\ u \cup \{u\} \in x).$$

Una condición suficiente para que se cumpla esto es $\omega \in M$ y si M es un modelo de KP, entonces la condición es necesaria, pues en KP puede definirse ω y es absoluto para modelos transitivos, luego tiene que ser $\omega = \omega^M \in M$.

Partes El axioma de partes es:

$$\bigwedge x \bigvee y \bigwedge u(u \in y \leftrightarrow u \subset x),$$

luego su relativización es

$$\bigwedge x \in M \bigvee y \in M \bigwedge u \in M(u \in y \leftrightarrow u \subset x).$$

Como $u \in y$ ya implica $u \in M$, esto equivale a

$$\bigwedge x \in M \bigvee y \in M \bigwedge u(u \in y \leftrightarrow u \subset x \wedge u \in M).$$

que a su vez equivale a $\bigwedge x \in M\ \mathcal{P}x \cap M \in M$.

Elección El axioma de elección es

$$\bigwedge x \bigvee f(f : x \longrightarrow \bigcup x \wedge \bigwedge u \in x(u \neq \varnothing \rightarrow f(u) \in u)).$$

Si M es un modelo de B, todos los conceptos que aparecen son absolutos, por lo que la relativización es

$$\bigwedge x \in M \bigvee f \in M\ f \text{ es una función de elección en } x.$$

Teniendo en cuenta que el axioma de elección equivale a que todo conjunto puede ser bien ordenado, es fácil ver que su relativización a un modelo M de ZF equivale a que, para todo $x \in M$, exista un buen orden R en x tal que $R \in M$ (aquí se usa que "ser un buen orden en x" es una fórmula Δ_1, luego es absoluta).

2.3 Los modelos V_λ

En esta sección trabajamos en ZFC y vamos a estudiar los conjuntos V_λ como modelos.

Notemos que para que un conjunto V_λ pueda ser un modelo de, al menos, la teoría básica B, se tiene que cumplir que λ sea un ordinal límite, pues tenemos que $\lambda = V_\lambda \cap \Omega = \Omega^{V_\lambda}$, y ya hemos probado que Ω^M tiene que ser un ordinal límite para todo modelo transitivo M de B.

En el caso de los conjuntos V_λ con $\lambda > \omega$ tenemos que cumplen todos los axiomas de ZFC salvo a lo sumo el esquema de reemplazo, pero en cualquier caso cumplen el esquema de especificación:

Teorema 2.12 *Si λ es un ordinal límite, entonces V_λ es un modelo transitivo de la teoría de Zermelo* Z*, salvo el axioma de infinitud en el caso $\lambda = \omega$.*

Demostración: Según hemos visto, V_λ, por ser transitivo, cumple los axiomas de extensionalidad y regularidad. También cumple el axioma del par, pues si x, $y \in V_\lambda$, entonces existe un $\delta < \lambda$ tal que x, $y \in V_\delta$, luego $\{x, y\} \subset V_\delta$, luego $\{x, y\} \in \mathcal{P}V_\delta = V_{\delta+1} \subset V_\lambda$.

Para probar el axioma de la unión observamos que si $x \in V_\lambda$ existe un $\delta < \lambda$ tal que $x \in V_\delta$, luego, por transitividad $\bigcup x \subset V_\delta$, luego $\bigcup x \in V_{\delta+1} \subset V_\lambda$.

El axioma de especificación para una fórmula $\phi(x, x_1, \ldots, x_n)$ afirma que

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \bigwedge y \bigvee z \bigwedge x(x \in z \leftrightarrow x \in y \land \phi(x)),$$

cuya relativización es

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in V_\lambda \bigwedge y \in V_\lambda \bigvee z \in V_\lambda \bigwedge x(x \in z \leftrightarrow z \in y \land \phi^{V_\lambda}(x)).$$

Ahora bien, dados $x_1, \ldots, x_n, y \in V_\lambda$, existe un $\delta < \lambda$ tal que $x_1, \ldots, x_n, y \in V_\delta$, y el conjunto $z = \{x \in y \mid \phi^{V_\lambda}(x)\}$ cumple $z \subset y \subset V_\delta$, luego $z \in V_{\delta+1} \subset V_\lambda$, y claramente cumple lo pedido.

El axioma de infinitud se cumple si y sólo si $\omega \in V_\lambda$, lo cual equivale a que $\omega < \lambda$.

Para comprobar el axioma de partes tomamos $x \in V_\lambda$, con lo que existe un $\delta < \lambda$ tal que $x \in V_\delta$, y entonces todo $u \in \mathcal{P}x$ cumple $u \subset V_\delta$, luego $\mathcal{P}x \subset \mathcal{P}V_\delta = V_{\delta+1}$, luego $\mathcal{P}x \in V_{\delta+1} \subset V_\lambda$.

Notemos que si suponemos AE, entonces V_λ también cumple AE, pues si $x \in V_\lambda$, existe un $\delta < \lambda$ tal que $x \in V_\delta$, y si f es una función de elección en x, entonces por transitividad $f : x \longrightarrow V_\delta$, luego todo $u \in f$ es de la forma $u = (p, q)$, con p, $q \in V_\delta$, luego $\{p\}$, $\{p, q\} \in V_{\delta+1}$, luego $(p, q) \in V_{\delta+1}$, luego $f \in V_{\delta+3} \subset V_\lambda$. ■

Nota Como Z tiene infinitos axiomas, en principio, la conclusión $V_\lambda \vDash \mathrm{Z}$ del teorema anterior tiene que verse como un esquema teoremático, en el sentido de que, para cada axioma α de Z se prueba que $V_\lambda \vDash \alpha$. Sin embargo, como V_λ es un conjunto, podemos considerarlo como modelo de Z en el sentido de la teoría de modelos, y entonces podemos probar que $V_\lambda \vDash \mathrm{Z}$ entendiendo que $Z \subset \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$ es el conjunto de todos los axiomas de Z.

En efecto, sólo hay que probar que si $\phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$ entonces V_λ cumple el caso correspondiente del axioma de especificación, es decir, que

$$V_\lambda \vDash \bigwedge x_1 \cdots x_n \bigwedge y \bigvee z \bigwedge x(x \in z \leftrightarrow x \in y \land \phi(x)).$$

Esto equivale a que, fijados $x_1, \ldots, x_n, y \in V_\lambda$, existe un $z \in V_\lambda$ tal que

$$\bigwedge x(x \in z \leftrightarrow x \in y \land V_\lambda \vDash \phi[x, x_1, \ldots, x_n]),$$

y basta tomar $z = \{x \in y \mid V_\lambda \vDash \phi[x, x_1, \ldots, x_n]\}$. Como en el teorema anterior se prueba que $z \in V_\lambda$ y cumple lo requerido. ■

En cuanto al axioma de reemplazo, se cumple lo siguiente:

Teorema 2.13 (AE) *Si κ es un cardinal inaccesible, entonces $V_\kappa \vDash$ ZFC (en el sentido de la teoría de modelos).*

Demostración: Sólo falta probar que V_κ cumple el axioma de reemplazo. Para ello tomamos $\phi(x, y, x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$ y tenemos que probar que

$$V_\kappa \vDash \bigwedge x_1 \cdots x_n (\bigwedge xyz(\phi(x, y) \land \phi(x, z) \to y = z) \to$$
$$\bigwedge a \bigvee b \bigwedge y(y \in b \leftrightarrow \bigvee x \in a\ \phi(x, y))).$$

Esto equivale a que, fijados $a_1, \ldots, a_n \in V_\kappa$, bajo el supuesto de que

$$\bigwedge uvw \in V_\kappa\ (V_\kappa \vDash \phi[u, v] \land V_\kappa \vDash \phi[u, w] \to v = w)$$

se cumple también que

$$\bigwedge c \in V_\kappa \bigvee d \in V_\kappa \bigwedge v \in V_\kappa (v \in d \leftrightarrow \bigvee u \in c\ V_\kappa \vDash \phi[u, v]).$$

Tomamos $c \in V_\kappa$, llamamos $A = \{u \in c \mid \bigvee v \in V_\kappa\ V_\kappa \vDash \phi[u, v]\} \subset c$ y consideramos la función $F : A \longrightarrow V_\kappa$ que a cada $u \in A$ le asigna el único $v \in V_\kappa$ tal que $V_\kappa \vDash \phi[u, v]$.

Tenemos que $|A| \leq |c| < \kappa$ (por [TC 5.87]). Sea $G : A \longrightarrow \kappa$ la función que a cada $u \in A$ le asigna el mínimo ordinal $\delta < \kappa$ tal que $F(u) \in V_\delta$. Como κ es regular, el conjunto $G[A]$ tiene que estar acotado en κ (pues $|G[A]| \leq |A| < \kappa$). Sea, pues, $\delta < \kappa$ tal que $G[A] \subset \delta$ o, equivalentemente, tal que $F[A] \subset V_\delta$. Entonces $d = F[A] \in V_{\delta+1} \subset V_\kappa$ y claramente cumple lo requerido. ■

Nota El mismo argumento del teorema anterior prueba que $V_\omega \vDash \mathrm{ZFC} - \mathrm{AI}$.

Enseguida veremos que la condición de que κ sea inaccesible no es necesaria en el teorema anterior, pero antes destacamos la consecuencia más relevante:

$$\underset{\mathrm{ZFC}}{\vdash} (\bigvee \kappa\ \kappa \text{ es inaccesible} \to \mathrm{Consis}\,\mathrm{ZFC}).$$

El teorema de incompletitud de Gödel implica entonces que si ZFC es consistente no es posible demostrar en ZFC la existencia de cardinales inaccesibles, pero en realidad podemos concluir esto mismo directamente a partir del teorema anterior. Para ello necesitamos observar que para los modelos V_λ casi todo es absoluto:

Teorema 2.14 *Las expresiones siguientes son absolutas para todo modelo V_λ tal que $V_\lambda \vDash$ ZFC:*

a) $\mathcal{P}x$

b) κ *es un cardinal.*

c) La aritmética cardinal $\kappa + \mu$, $\kappa\mu$, κ^μ.

d) $\operatorname{cf}\kappa$

e) κ *es un cardinal límite, sucesor, regular, singular, débilmente inaccesible, fuertemente inaccesible.*

No es necesario entender la hipótesis $V_\lambda \vDash \mathrm{ZFC}$ en el sentido de la teoría de modelos, sino que basta suponer que existe un conjunto finito Γ de axiomas (metamatemáticos) de ZFC tal que si $V_\lambda \vDash \Gamma$ entonces las expresiones indicadas son absolutas.

DEMOSTRACIÓN: a) en la prueba de 2.12 hemos visto que si $x \in V_\lambda$ entonces $\mathcal{P}x \in V_\lambda$, luego $\mathcal{P}^{V_\lambda}x = \mathcal{P}x \cap V_\lambda = \mathcal{P}x$, luego $\mathcal{P}x$ es absoluto para V_λ.

b) Si $\kappa \in V_\lambda$ es un cardinal$^{V_\lambda}$, esto significa que $\kappa \in \Omega$ y

$$\neg \bigvee f\alpha \in V_\lambda(\alpha < \kappa \land f : \alpha \longrightarrow \kappa \text{ biyectiva}).$$

Ahora bien, si existe $\alpha < \kappa$ y $f : \alpha \longrightarrow \kappa$ biyectiva, podemos tomar $\delta < \lambda$ tal que α, $\kappa \in V_\delta$, con lo que $f \subset \alpha \times \kappa \subset V_{\delta+2}$ y $f \in V_{\delta+3} \subset V_\lambda$, contradicción, luego κ es un cardinal. La implicación contraria es trivial, pues ser un cardinal es Π_1.

c) El carácter absoluto de la suma y el producto de cardinales es trivial (en el caso finito lo es porque coinciden con las operaciones ordinales, que son absolutas, y en el caso infinito es inmediato). En cuanto a la exponenciación, observemos en primer lugar que A^B es absoluto, es decir, que si $A, B \in V_\lambda$, entonces $(A^B)^{V_\lambda} = A^B$. En efecto, como en ZFC se prueba que

$$\bigwedge ABf(f \in A^B \leftrightarrow f : B \longrightarrow A),$$

al relativizar queda:

$$\bigwedge ABf \in V_\lambda(f \in (A^B)^{V_\lambda} \leftrightarrow f : B \longrightarrow A),$$

pero si $A, B \in V_\lambda$ y $f : B \longrightarrow A$, entonces $f \in V_\lambda$, pues podemos tomar un $\delta < \lambda$ tal que $A, B \in V_\delta$, de modo que $f \subset A \times B \subset V_{\delta+2}$ y $f \in V_{\delta+3} \subset V_\lambda$, luego la sentencia anterior equivale a

$$\bigwedge AB \in V_\lambda \bigwedge f(f \in (A^B)^{V_\lambda} \leftrightarrow f : B \longrightarrow A),$$

luego $\bigwedge AB \in V_\lambda\ (A^B)^{V_\lambda} = A^B$.

Ahora, si κ, $\mu \in V_\lambda$ son cardinales, relativizando

$$\bigwedge \kappa\mu(\kappa^\mu \text{ es un cardinal} \land \bigvee f(f : \kappa^\mu \longrightarrow {}^\mu\kappa \text{ biyectiva}))$$

obtenemos que

$$\bigwedge \kappa\mu \in V_\lambda((\kappa^\mu)^{V_\lambda} \text{ es un cardinal} \land \bigvee f \in V_\lambda(f : (\kappa^\mu)^{V_\lambda} \longrightarrow {}^\mu\kappa \text{ biyectiva})),$$

luego $(\kappa^\mu)^{V_\lambda} = |{}^\mu\kappa| = \kappa^\mu$.

d) Si $\kappa \in V_\lambda$ es un ordinal límite y $f : \operatorname{cf}\kappa \longrightarrow \kappa$ es cofinal, por el argumento usual concluimos que $f \in V_\lambda$, y es fácil ver que "ser cofinal" es Δ_0, por lo que $f : \operatorname{cf}\kappa \longrightarrow \kappa$ es cofinal$^{V_\lambda}$, luego $\operatorname{cf}^{V_\lambda}\kappa \leq \operatorname{cf}\kappa$.

Por otra parte, relativizando $\bigwedge\kappa\bigvee f(f : \operatorname{cf}\kappa \longrightarrow \kappa \text{ cofinal})$, obtenemos que $\bigvee f \in V_\lambda\ f : (\operatorname{cf}^{V_\lambda}\kappa \longrightarrow \kappa \text{ cofinal})$, luego $\operatorname{cf}\kappa \leq \operatorname{cf}^{V_\lambda}\kappa$ y tenemos la igualdad.

e) es consecuencia inmediata de los apartados precedentes. ■

Ahora podemos razonar como sigue: supongamos que en ZFC pudiera demostrarse que existe un cardinal inaccesible. Entonces, razonando en ZFC, podríamos considerar el mínimo cardinal inaccesible κ, y podríamos considerar el modelo V_κ, que sabemos que cumple $V_\kappa \vDash \mathrm{ZFC}$, luego tendría que cumplirse

$$V_\kappa \vDash \bigvee\mu\ \mu \text{ es inaccesible},$$

pero, por el teorema anterior, esto equivale a $\bigvee\mu < \kappa\ \mu$ es inaccesible, en contradicción con la minimalidad de κ. En definitiva, hemos mostrado explícitamente cómo a partir de una demostración de la existencia de un cardinal inaccesible en ZFC puede probarse una contradicción en ZFC.

En otras palabras, tenemos que si ZFC es consistente también lo es ZFC más la no existencia de cardinales inaccesibles, y la razón de fondo es que los cardinales inaccesibles son innecesarios para que se cumplan los axiomas de ZFC, en el sentido de que si tomamos el menor de ellos κ y nos quedamos únicamente con los conjuntos de V_κ, los conjuntos que nos quedan siguen cumpliendo todos los axiomas de ZFC, y κ pasa a ser ahora la clase Ω de todos los ordinales.

Cabe preguntarse ahora si, partiendo siempre del supuesto de que ZFC es consistente, al igual que hemos probado que es consistente suponer que no existen cardinales inaccesibles, también es posible demostrar que es consistente suponer que sí que existen.

La respuesta es negativa, pero es muy importante entender que no estamos afirmando que no sea consistente suponer que existen cardinales inaccesibles, sino que, en caso de que sea consistente, es imposible demostrar que así es.

En efecto, nos estamos planteando si es posible dar un argumento metamatemático que nos convenza sin lugar a dudas de que si ZFC es consistente, entonces ZFC + FI también es consistente, donde abreviamos con FI la existencia de un cardinal inaccesible. Ahora bien, cualquier argumento que convenza a un matemático puede formalizarse en ZFC, luego en tal caso tendríamos que

$$\underset{\mathrm{ZFC}}{\vdash} \operatorname{Consis}\mathrm{ZFC} \rightarrow \operatorname{Consis}(\mathrm{ZFC}+\mathrm{FI}).$$

Pero sabemos que

$$\underset{\mathrm{ZFC+FI}}{\vdash} \operatorname{Consis}\mathrm{ZFC},$$

luego uniendo ambas afirmaciones tendríamos que

$$\underset{\mathrm{ZFC+FI}}{\vdash} \operatorname{Consis}(\mathrm{ZFC}+\mathrm{FI}),$$

pero el segundo teorema de incompletitud de Gödel implica entonces que la teoría ZFC+FI es contradictoria y, si nuestro supuesto argumento de que la consistencia de ZFC implica la de ZFC+FI fuera realmente válido, esto significaría que ZFC también sería contradictorio.

Ahora bien, el hecho de que no podamos probar que ZFC + FI es consistente (ni siquiera suponiendo que ZFC es consistente) no es motivo para que sospechemos que probablemente ZFC + FI sea contradictorio. En general, aunque Consis ZFC no pueda probarse en ZFC, no es raro encontrar sentencias que impliquen Consis ZFC (la sentencia FI es una entre muchas), y a todas ellas se les puede aplicar literalmente el argumento anterior que nos asegura que es imposible demostrar su consistencia incluso suponiendo la de ZFC. Ciertamente, tomar como axioma una de estas sentencias puede volver contradictoria la teoría, pero el mero hecho de que una sentencia implique Consis ZFC no es razón para recelar de ella.

Por ejemplo, el caso más simple de tales sentencias es la propia Consis ZFC. Tenemos las mismas razones para dudar de la consistencia de ZFC + FI que para dudar de la consistencia de ZFC+Consis ZFC (en ambos casos, lo único que sabemos es que tal consistencia no puede probarse, y en ambos casos exactamente por el mismo argumento), pero si ZFC es consistente, entonces, aunque no podamos demostrarlo, lo "razonable" es conjeturar que ZFC + Consis ZFC también es consistente.[5]

Podemos pensar en FI como en un axioma análogo al axioma de infinitud AI. Notemos que si $\aleph_0$ no es un cardinal inaccesible es simplemente porque en la definición de estos cardinales hemos exigido que sean no numerables. Si elimináramos esta condición de la definición entonces AI sería equivalente a la existencia de un cardinal inaccesible, mientras que FI sería equivalente a la existencia de al menos dos cardinales inaccesibles (el menor de los cuales sería $\aleph_0$ y el siguiente sería lo que realmente entendemos por cardinal inaccesible). Así pues, suponer FI puede verse como forzar a que el universo de ZFC sea mucho mayor del que realmente es necesario para que se cumplan todos los resultados que los matemáticos saben justificar mediante razonamientos "convincentes". Quizá el lector se pregunte qué interés puede haber en ello, y la respuesta es que, aunque los conjuntos desorbitadamente grandes puedan no ser muy interesantes en sí mismos, que su existencia sea consistente sí lo es.

Tomemos por ejemplo la hipótesis de Kurepa [TC 9.30]. Veremos que si ZFC es consistente entonces ZFC + HK también lo es. En cambio, $\neg$HK es una de las muchas sentencias que implican Consis ZFC, por lo que estamos en las mismas: no es posible demostrar la consistencia de ZFC + $\neg$HK ni siquiera suponiendo que ZFC es consistente. No obstante, veremos que ZFC + FI es consistente si y sólo si lo es ZFC + $\neg$HK.

La diferencia es que, *a priori,* no hay ninguna razón por la que podamos considerar plausible que no sea posible demostrar en ZFC la existencia de un árbol de Kurepa. En cambio, una vez probada la equivalencia que acabamos de

[5] Aunque podría no serlo. Eso significaría que ZFC es consistente, pero no ω-consistente, y en todos sus modelos habría números naturales infinitos.

indicar, ya podemos considerarlo plausible: si se pudiera probar que no existen árboles de Kurepa, se podría probar que no existen cardinales inaccesibles, y esto sí que no es nada plausible.

En general, cuando nos planteamos el problema de demostrar la consistencia de una teoría T (como ZFC + ¬HK) debemos contemplar la posibilidad de que no sea suficiente suponer la consistencia de ZFC. Esto sucederá si T permite probar Consis ZFC, en cuyo caso, tendremos que suponer la consistencia de alguna teoría más fuerte cuya consistencia podamos considerar plausible, como por ejemplo ZFC + FI, pero si, por ejemplo, la teoría T permite probar Consis(ZFC + FI), entonces suponer la consistencia ZFC + FI no será suficiente para demostrar la consistencia de T, y tendremos que recurrir a teorías más fuertes cuya consistencia consideremos plausible.

Así pues, si queremos llegar lejos obteniendo pruebas de consistencia, necesitamos contar con una "escala" lo más amplia posible de teorías cuya consistencia consideremos plausible y que nos sirvan de referencia para reducir a la consistencia de alguna de ellas la consistencia de cualquier otra teoría. Algunas teorías de dicha escala son:

$$\mathrm{ZFC}, \quad \mathrm{ZFC} + \mathrm{Consis}\,\mathrm{ZFC}, \quad \mathrm{ZFC} + \mathrm{FI}, \quad \mathrm{ZFC} + \mathrm{FI}_2, \quad \ldots$$

donde FI_2 es el axioma que afirma la existencia de dos cardinales inaccesibles.

Notemos que a partir de FI no puede demostrarse la existencia de un segundo cardinal inaccesible, pues si así fuera, razonando en la teoría ZFC + FI podríamos considerar el mínimo cardinal inaccesible κ y el segundo menor cardinal inaccesible μ, pero entonces tendríamos que $V_\mu \vDash \mathrm{ZFC} + \mathrm{FI}$, y como en esta teoría se puede, supuestamente, demostrar que existen dos cardinales inaccesibles, debería existir en V_μ otro cardinal $\kappa' < \mu$ inaccesible aparte de κ, y así habría dos cardinales inaccesibles bajo μ, en contra de la definición de μ. (Aquí usamos que ser inaccesible en V_μ es lo mismo que ser inaccesible.)

Por consiguiente, FI_2 es más fuerte que FI y, más aún, la consistencia de ZFC + FI_2 no puede probarse ni siquiera suponiendo la de ZFC + FI, pues entonces tendríamos

$$\underset{\mathrm{ZFC}}{\vdash} \mathrm{Consis}\,\mathrm{ZFC} + \mathrm{FI} \rightarrow \mathrm{Consis}\,\mathrm{ZFC} + \mathrm{FI}_2,$$

y como $\underset{\mathrm{ZFC}+\mathrm{FI}_2}{\vdash} \mathrm{Consis}\,\mathrm{ZFC} + \mathrm{FI}$, concluiríamos que $\underset{\mathrm{ZFC}+\mathrm{FI}_2}{\vdash} \mathrm{Consis}\,\mathrm{ZFC} + \mathrm{FI}_2$ y por el segundo teorema de incompletitud resultaría que la teoría ZFC + FI_2 sería contradictoria.

Es claro entonces que nuestra escala de referencia puede prolongarse con las teorías ZFC + FI_3, ZFC + FI_4, etc., donde FI_n afirma la existencia de al menos n cardinales inaccesibles. Sin embargo, muchas pruebas de consistencia requieren comparar con teorías muchísimo más fuertes que éstas.

Veamos ahora que no es necesario que λ sea un cardinal inaccesible para que V_λ pueda ser un modelo de ZFC:

Teorema 2.15 *Si κ es un cardinal inaccesible, el conjunto*

$$\{\alpha < \kappa \mid V_\alpha \prec V_\kappa\}$$

es cerrado no acotado en κ.

Demostración: Recordemos el teorema [TC 10.22], que proporciona una condición sencilla para que V_α sea un submodelo elemental del V_κ, a saber, que para toda $\phi(x, x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ se cumpla

$$\bigwedge a_1 \cdots a_n \in V_\alpha (\bigvee a \in V_\kappa \; V_\kappa \vDash \phi[a, a_1, \ldots, a_n] \rightarrow \bigvee a \in V_\alpha \; V_\kappa \vDash \phi[a, a_1, \ldots, a_n]).$$

Es fácil ver entonces que el conjunto C del enunciado es cerrado, pues si $\lambda < \kappa$ cumple que $C \cap \lambda$ no está acotado en λ, entonces, dados $a_1, \ldots, a_n \in V_\lambda$, podemos tomar un $\alpha \in C \cap \lambda$ tal que $a_1, \ldots, a_n \in V_\alpha$, y entonces, si

$$\bigvee a \in V_\lambda \; V_\kappa \vDash \phi[a, a_1, \ldots, a_n],$$

también $\bigvee a \in V_\alpha \; V_\lambda \vDash \phi[a, a_1, \ldots, a_n]$, luego $\bigvee a \in V_\lambda \; V_\kappa \vDash \phi[a, a_1, \ldots, a_n]$, lo que prueba que $\lambda \in C$.

Para probar que no está acotado, para cada fórmula ϕ con $n+1$ variables libres, consideramos la función $h_\phi : V_\kappa^n \longrightarrow \kappa$ que a cada $(a_1, \ldots, a_n) \in V_\kappa^n$ le asigna el mínimo $\delta < \kappa$ tal que $\bigvee a \in V_\delta \; V_\kappa \vDash \phi[a, a_1, \ldots, a_n]$ si existe tal δ y 0 en caso contrario.

Sea $h : \kappa \longrightarrow \kappa$ dada por $h(\alpha) = \bigcup\limits_{\phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})} h_\phi[V_\alpha^{n_\phi}]$, donde $n_\phi + 1$ es el número de variables libres de ϕ. Notemos que $h(\alpha) \in \kappa$ porque $|V_\alpha| < |V_\kappa| = \kappa$.

Si $\alpha < \kappa$ cumple $h[\alpha] \subset \alpha$ para toda fórmula $\phi(x, x_1, \ldots, x_n)$, entonces es claro que V_α cumple la condición de [TC 10.22], luego $V_\alpha \prec V_\kappa$ y $\alpha \in C$, pero el conjunto de tales α es c.n.a. por [TC 6.7], luego C contiene un c.n.a. y, por consiguiente, no está acotado. ■

En particular (razonando en ZFC), si existe un cardinal inaccesible, podemos tomar el mínimo de todos ellos, digamos κ, y entonces $V_\kappa \vDash \mathrm{ZFC}$, y si $C \subset \kappa$ es el c.n.a. dado por el teorema anterior, todo $\lambda \in C$ es un ordinal (necesariamente límite) tal que $V_\lambda \vDash \mathrm{ZFC}$ sin que λ sea un cardinal inaccesible.

Nota Observemos que la fórmula $V_\alpha \vDash \mathrm{ZFC}$ es absoluta para modelos V_λ de ZFC, pues el término V_α lo es, ya que $V_\alpha^{V_\lambda} = V_\alpha \cap V_\lambda = V_\alpha$ y la fórmula $M \vDash \mathrm{ZFC}$ es absoluta porque es Δ_1.

Por lo tanto, si κ es inaccesible, entonces V_κ es un modelo de ZFC más la existencia de una cantidad no acotada de ordinales α tales que $V_\alpha \vDash \mathrm{ZFC}$.

En particular, si llamamos $M_1 \equiv \bigvee \alpha \; V_\alpha \vDash \mathrm{ZFC}$, tenemos que

$$\underset{\mathrm{ZFC+FI}}{\vdash} \mathrm{Consis}(\mathrm{ZFC} + \mathrm{M}_1), \qquad \underset{\mathrm{ZFC+M_1}}{\vdash} \mathrm{Consis}(\mathrm{ZFC}),$$

y el argumento usual nos da que no podemos probar la consistencia de la teoría ZFC + M_1 ni siquiera suponiendo la de ZFC, ni podemos demostrar la consistencia de ZFC + FI ni siquiera suponiendo la de ZFC + M_1.

Naturalmente, entre ZFC + M_1 y ZFC + FI podemos intercalar infinitas teorías intermedias, como ZFC + M_2, donde M_2 afirma la existencia de al menos dos ordinales $\alpha < \beta$ tales que V_α y V_β son modelos de ZFC, o incluso ZFC + M_ω, donde M_ω afirma la existencia de una sucesión creciente $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ tal que $\bigwedge n \in \omega\ V_{\alpha_n} \vDash$ ZFC, etc. ■

La idea del teorema 2.15 puede aplicarse a la clase universal V en lugar de V_κ, aunque esto obliga a considerar fórmulas metamatemáticas y a restringirnos a un conjunto finito de ellas. El resultado es el teorema de reflexión, para cuya prueba remitimos a [LM 12.32]:

Teorema 2.16 (Teorema de Reflexión) *Si $\phi_1, \ldots, \phi_r$ son fórmulas de $\mathcal{L}_{\rm tc}$, entonces, para todo ordinal α existe un ordinal límite $\lambda > \alpha$ tal que las fórmulas dadas son absolutas para V_λ.*

Como consecuencia, en ZF (resp. ZFC) puede probarse que existen ordinales λ tales que $V_\lambda \vDash$ ZF (resp. $V_\lambda \vDash$ ZFC), entendiendo esto en el sentido débil de que, para cada conjunto finito de axiomas de ZF o ZFC es posible demostrar que existe un λ para el que V_λ cumple dichos axiomas. Esto es más fuerte de lo que uno podría pensar en un principio, pues hay que tener en cuenta que, aunque ZFC tiene infinitos axiomas. todos los teoremas demostrados hasta la fecha en la historia de la humanidad son un número finito y requieren, por tanto, un número finito de axiomas para ser demostrados. Así pues, puede probarse que existen modelos V_λ que son prácticamente indistinguibles de modelos de todo ZFC.

Otra consecuencia del teorema anterior [LM 12.34] es que ZFC (si es consistente) no es finitamente axiomatizable.

2.4 Colapsos transitivos

Toda la teoría que estamos desarrollando está orientada a trabajar con modelos transitivos. Sin embargo, algunas de las técnicas que proporcionan modelos (como los submodelos dados por el teorema de Löwenheim-Skolem o la formación de ultrapotencias) no garantizan que los modelos obtenidos sean transitivos o, a veces, siquiera naturales. Por ello vamos a estudiar ahora en qué condiciones podemos pasar de un modelo arbitrario (M, R) a un modelo transitivo isomorfo.

Recordemos de [TC 10.17] la definición de isomorfismo de modelos, que en el caso de modelos de $\mathcal{L}_{\rm tc}$ se reduce a la siguiente (allí está definida para conjuntos, pero la podemos generalizar trivialmente a clases propias):

Definición 2.17 Dadas dos clases A y B con relaciones $R \subset A\times A$ y $S \subset B\times B$, diremos que $G : (A, R) \longrightarrow (B, S)$ es un *isomorfismo de modelos* de $\mathcal{L}_{\rm tc}$ si $G : A \longrightarrow B$ biyectiva y $\bigwedge xy \in A(x\, R\, y \leftrightarrow G(x)\, S\, G(y))$.

El teorema [TC 10.19] prueba que si tenemos un isomorfismo de modelos entre dos conjuntos, entonces, para toda fórmula $\phi(x_1,\ldots,x_n) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$ y todos los $a_1,\ldots,a_n \in A$, se cumple

$$(A,R) \vDash \phi[a_1,\ldots,a_n] \leftrightarrow (B,S) \vDash \phi[G(a_1),\ldots,G(a_n)].$$

Una inducción rutinaria prueba la versión metamatemática de este resultado, válida para clases cualesquiera (y demostrable en la teoría básica B):

Teorema 2.18 (B) *Si $G : (A,R) \longrightarrow (B,S)$ es un isomorfismo de modelos, para toda fórmula (metamatemática) sin descriptores $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ se cumple*

$$\bigwedge a_1\cdots a_n \in A(\phi^{AR}(a_1,\ldots,a_n) \leftrightarrow \phi^{BS}(G(a_1),\ldots,G(a_n))).$$

Demostración: Razonamos por inducción sobre la longitud de una expresión θ. Si $\theta \equiv x$ es trivial (se reduce a $G(a) = G(a)$).

Si $\theta \equiv x = y$ es consecuencia inmediata de que G es biyectiva.

Si $\theta \equiv x \in y$ es consecuencia inmediata de la definición de isomorfismo.

Si vale para ϕ, trivialmente vale también para $\neg\phi$, y es fácil ver que si vale para ϕ y ψ vale para $\phi \to \psi$. Veamos con detalle el caso de $\bigwedge x\phi(x,x_1,\ldots,x_n)$ bajo la hipótesis de inducción de que el resultado vale para ϕ, es decir, suponemos que

$$\bigwedge aa_1\cdots a_n \in A(\phi^{AR}(a,a_1,\ldots,a_n) \leftrightarrow \phi^{BS}(G(a),G(a_1),\ldots,G(a_n))),$$

pero es claro que esto implica que

$$\bigwedge a_1\cdots a_n \in A(\bigwedge x \in A\,\phi^{AR}(x,a_1,\ldots,a_n)$$
$$\leftrightarrow \bigwedge x \in A\,\phi^{BS}(G(x),G(a_1),\ldots,G(a_n))),$$

y usando de nuevo que G es biyectiva esto equivale a

$$\bigwedge a_1\cdots a_n \in A(\bigwedge x \in A\,\phi^{AR}(x,a_1,\ldots,a_n)$$
$$\leftrightarrow \bigwedge x \in B\,\phi^{BS}(x,G(a_1),\ldots,G(a_n))),$$

que es lo mismo que

$$\bigwedge a_1\cdots a_n \in A((\bigwedge x\,\phi)^{AR}(a_1,\ldots,a_n) \leftrightarrow (\bigwedge x\,\phi)^{BS}(G(a_1),\ldots,G(a_n))).$$

■

En particular, dos modelos isomorfos satisfacen las mismas sentencias.

Según indicábamos, queremos estudiar en qué condiciones un modelo arbitrario (A,R) es isomorfo a un modelo transitivo M. Observemos que la condición de isomorfismo se reduce entonces a

$$\bigwedge xy \in A(x\,R\,y \leftrightarrow G(x) \in G(y)).$$

Los resultados que exponemos a continuación son demostrables en ZF*. Vamos a apoyarnos en el teorema general de recursión transfinita [TC 4.9], que permite definir una función por recurrencia sobre una clase A en la que hay definida una relación R a la que hay que exigir dos propiedades:

a) Que sea conjuntista, es decir, que para todo $x \in A$, la extensión
$$e_A(x) = \{u \in A \mid u\, R\, x\}$$
sea un conjunto. Esta propiedad se cumple trivialmente si A es un conjunto.

b) Que R esté bien fundada, es decir, que todo conjunto $x \subset A$ no vacío tiene un R-minimal, un $u \in x$ tal que $e_A(u) \cap x = \varnothing$.

En estas condiciones,[6] el teorema de recursión afirma que para definir una función sobre A basta definirla en cada $x \in A$ supuesto que ya esté definida sobre su extensión $e_A(x)$. Este resultado justifica la definición siguiente:

Definición 2.19 Sea R una relación conjuntista y bien fundada en una clase A. Llamaremos *función colapsante de Mostowski* a la función $G^R_A : A \longrightarrow \mathrm{V}$ dada por
$$G^R_A(x) = \{G^R_A(y) \mid y \in A \land y\, R\, x\}.$$
Así pues, $G^R_A(x)$ es el conjunto de las imágenes por G^R_A de los elementos de la extensión $e_A(x)$.

Definimos el *colapso transitivo* de A como el rango de G^R_A, y lo representaremos por M^R_A, de modo que $G^R_A : A \longrightarrow M^R_A$ suprayectiva.

Teorema 2.20 *Sea R una relación conjuntista y bien fundada en una clase A. Entonces M^R_A es una clase transitiva y bien fundada y*
$$\bigwedge xy \in A(x\, R\, y \rightarrow G^R_A(x) \in G^R_A(y)).$$

Demostración: La última afirmación es consecuencia inmediata de la definición de G. Respecto a la transitividad, tomemos $u \in v \in M^R_A$. Entonces $v = G^R_A(x)$, para cierto $x \in A$, luego $u = G^R_A(y)$, para cierto $y \in A$ tal que $y\, R\, x$. Por consiguiente $u \in M^R_A$.

Veamos ahora que M^R_A está bien fundada. Tomamos $x \subset M^R_A$, $x \neq \varnothing$. Entonces $(G^R_A)^{-1}[x]$ es un subconjunto no vacío de A, luego tiene un R-minimal y. Veamos que $G^R_A(y)$ es un minimal de x, es decir, que $x \cap G^R_A(y) = \varnothing$. En efecto, si $u \in x \cap G^R_A(y)$, entonces $u = G^R_A(v)$, para un cierto $v \in A$ tal que $v\, R\, y$. Entonces $v \in (G^R_A)^{-1}[x]$, luego contradice la minimalidad de y. ■

En general, la función colapsante no es inyectiva, pero lo es si añadimos una condición obviamente necesaria:

[6] En realidad, para probar el teorema de recursión bajo estas hipótesis es necesario suponer el axioma de infinitud. No obstante, dicho axioma es innecesario si, en lugar de exigir que la relación R sea conjuntista, exigimos que sea clausurable [LM 11.31]. Bajo AI ambas propiedades son equivalentes [LM 11.34], pero la propiedad de ser clausurable permite probar el teorema de recursión sin AI [LM 11.38]

Definición 2.21 Una relación R es *extensional* sobre una clase A si

$$\bigwedge xy \in A(\bigwedge u \in A(u\, R\, x \leftrightarrow u\, R\, y) \rightarrow x = y).$$

En otras palabras, R es extensional si el modelo (A, R) cumple el axioma de extensionalidad. Es claro que la relación de pertenencia es extensional en cualquier clase transitiva.

Teorema 2.22 *Sea R una relación conjuntista, extensional y bien fundada en una clase A. Entonces $G_A^R : A \longrightarrow M_A^R$ biyectiva y*

$$\bigwedge xy \in A(x\, R\, y \leftrightarrow G_A^R(x) \in G_A^R(y)).$$

Demostración: Si G_A^R no fuera inyectiva podríamos tomar un R-minimal x de la clase

$$B = \{x \in A \mid \bigvee y \in A(x \neq y \wedge G_A^R(x) = G_A^R(y)\}.$$

Entonces existe un $y \in A$ tal que $y \neq x$ y $G_A^R(x) = G_A^R(y)$. Como R es extensional, existe un $z \in A$ tal que

$$(z\, R\, x \wedge \neg z\, R\, y) \vee (z\, R\, y \wedge \neg z\, R\, x).$$

Si $z\, R\, x \wedge \neg z\, R\, y$, entonces $G_A^R(z) \in G_A^R(x) = G_A^R(y)$, luego, por definición de $G_A^R(y)$, ha de ser $G_A^R(z) = G_A^R(w)$, para cierto $w \in A$, con $w\, R\, y$. Además, como $\neg z\, R\, y$, ha de ser $w \neq z$, o sea, $z \in B \wedge z\, R\, x$, contradicción.

Si $z R y \wedge \neg z R x$, entonces $G_A^R(z) \in G_A^R(y) = G_A^R(x)$, luego $G_A^R(z) = G_A^R(w)$, con $w \in A$, $w R x$, luego en particular $w \neq z$. Por consiguiente $w \in B$ contradice la minimalidad de x.

Con esto tenemos la biyectividad. Finalmente, si $G_A^R(x) \in G_A^R(y)$, ha de ser $G_A^R(x) = G_A^R(u)$, para cierto $u \in A$, $u\, R\, y$. Como G_A^R es biyectiva, ha de ser $x = u$, luego $u\, R\, y$. ■

Finalmente probamos la unicidad tanto del colapso transitivo como de la función colapsante:

Teorema 2.23 (Teorema del colapso de Mostowski) *Si R es una relación conjuntista, bien fundada y extensional en una clase A, existe una única clase transitiva M y una única aplicación $G : A \longrightarrow M$ biyectiva tal que*

$$\bigwedge xy \in A(x\, R\, y \leftrightarrow G(x) \in G(y)).$$

Demostración: Sólo falta probar la unicidad. Ahora bien, si G y M cumplen estas propiedades, se ha de cumplir que

$$\bigwedge x \in A\ G(x) = \{G(y) \mid y \in A \wedge y\, R\, x\}.$$

En efecto, si $u \in G(x) \in M$, por transitividad $u \in M$, luego $u = G(y)$, para cierto $y \in A$. Entonces $G(y) \in G(x)$, luego $y\, R\, x$. La otra inclusión es inmediata.

Por consiguiente G es la función colapsante (por la unicidad de su definición recurrente) y M ha de ser el colapso transitivo. ■

Observaciones Este teorema generaliza al hecho de que todo conjunto bien ordenado es semejante a un ordinal, pues si $(A, \leq)$ es un conjunto bien ordenado, entonces la relación $<$ es claramente extensional y bien fundada en A (y trivialmente conjuntista, porque A es un conjunto), y entonces el colapso transitivo es un conjunto transitivo totalmente ordenado por la relación de pertenencia, luego es un ordinal.

En términos de modelos de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$, el teorema anterior proporciona condiciones necesarias y suficientes para que un modelo (A, R) sea isomorfo a un modelo transitivo M. Como ya hemos observado, la extensionalidad equivale a que (A, R) satisfaga el axioma de extensionalidad. Sin embargo, en contra de lo que podría pensarse a primera vista, la buena fundación no es equivalente a que (A, R) satisfaga el axioma de regularidad. En efecto, el axioma de regularidad es

$$\bigwedge x(x \neq \varnothing \rightarrow \bigvee u \in x\ u \cap x = \varnothing)$$

y su relativización es

$$\bigwedge x \in A(\bigvee u \in A\ u\, R\, x \rightarrow \bigvee u \in A(u\, R\, x \wedge \bigwedge v \in A(v\, R\, x \rightarrow \neg v\, R\, u)))$$

o, equivalentemente,

$$\bigwedge x \in A(e_A(x) \neq \varnothing \rightarrow \bigvee u \in e_A(x)\ e_A(u) \cap e_A(x) = \varnothing),$$

mientras que la buena fundación de R es

$$\bigwedge x \subset A(x \neq \varnothing \rightarrow \bigvee u \in x\ e_A(u) \cap x = \varnothing).$$

Así pues, la buena fundación requiere que todo $x \subset A$ no vacío tenga un R-minimal, mientras que el axioma de regularidad en A sólo garantiza que todo $x \subset A$ no vacío que sea la extensión de un elemento de A tiene R-minimal.

Admitiendo el axioma de regularidad, la relación de pertenencia está bien fundada en toda clase, luego[7] todo modelo natural de cualquier teoría de conjuntos que incluya el axioma de extensionalidad es isomorfo a un modelo transitivo.

■

Modelos transitivos numerables Como aplicación del teorema del colapso de Mostowski podemos mostrar la existencia de modelos transitivos numerables de ZFC:

Teorema 2.24 (Teorema de Reflexión) (ZFC) *Si Γ es un conjunto finito de sentencias (metamatemáticas) de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$, existe un modelo transitivo numerable M de* ZFC *tal que las sentencias de Γ son absolutas para M.*

---

[7]Si no suponemos el axioma de infinitud necesitamos además que la relación de pertenencia sea clausurable, es decir, que todo conjunto tenga clausura transitiva. Esto sucede si suponemos, de hecho, que todo conjunto es regular.

DEMOSTRACIÓN: El enunciado debe entenderse como que M satisface cualquier conjunto finito prefijado de axiomas de ZFC. Añadimos a Γ todos los axiomas de ZFC que queremos que cumpla M (pero sólo un número finito de ellos) y, para cada sentencia γ de Γ, tomamos una sentencia γ' sin descriptores que sea equivalente a γ. Sea Γ' el conjunto de todas las sentencias γ'.

Por el teorema de reflexión 2.16 sabemos que existe un modelo de la forma $N = V_\lambda$ tal que las sentencias de Γ' son absolutas para N. Por el teorema de Löwenheim-Skolem [TC 10.25] N admite un submodelo elemental numerable $S \prec N$. El modelo S no es necesariamente transitivo, pero sigue siendo un modelo natural (su relación de pertenencia es la pertenencia usual), luego, según hemos observado justo antes de este teorema, tiene un colapso transitivo M, que es un modelo transitivo numerable isomorfo a S.

De este modo, si γ es cualquier sentencia de Γ y γ' es su sentencia sin descriptores equivalente en Γ', tenemos que[8]

$$\gamma \leftrightarrow \gamma' \leftrightarrow \gamma'^N \leftrightarrow N \vDash \gamma' \leftrightarrow S \vDash \gamma' \leftrightarrow M \vDash \gamma' \leftrightarrow \gamma'^M \leftrightarrow \gamma^M,$$

luego todas las sentencias de Γ son absolutas para M y, en particular, los axiomas de ZFC que hemos incluido en Γ se cumplen en M, luego $M \vDash$ ZFC. ■

Nota Una variante del teorema anterior consiste en suponer que existe un cardinal inaccesible κ, en cuyo caso todo el razonamiento puede aplicarse partiendo de $N = V_\kappa$ y el resultado es que existe un conjunto transitivo numerable que cumple $M \vDash$ ZFC en el sentido de la teoría de modelos, es decir, que satisface todos los axiomas de ZFC. ■

Vemos así que basta una cantidad numerable M de conjuntos para "engañar" a un matemático y hacerle creer que tales conjuntos son todos los conjuntos. Naturalmente, esto supone que en M habrá conjuntos numerables que serán no numerables^M, como $\mathcal{P}^M\omega = \mathcal{P}\omega \cap M$ o como $\aleph_{19}^M$, que será un cierto ordinal numerable.

Colapsos transitivos en KP Terminamos la sección con algunas observaciones sobre el teorema del colapso de Mostowski en la teoría KP.

El teorema general de recursión transfinita no puede probarse en KP, ni siquiera el teorema del colapso de Mostowski. De hecho, ni siquiera puede probarse que todo conjunto bien ordenado sea semejante a un ordinal. Para comprender dónde está el problema demostraremos el teorema del colapso añadiendo a KP la hipótesis necesaria para que la prueba natural funcione:

Teorema 2.25 (KP+Π_1-especificación) *Si (A, R) es un conjunto con una relación extensional y bien fundada, entonces (A, R) es isomorfo a un conjunto transitivo.*

[8]Si γ tiene descriptores, la equivalencia $\gamma'^M \leftrightarrow \gamma^M$ requiere que M contenga al conjunto vacío, pero podemos suponer que Γ contiene la sentencia $\bigvee x \bigwedge u\ u \notin x$ y para ella vale la cadena de equivalencias, que nos da que $\varnothing \in M$.

Demostración: Llamamos *aproximaciones* a las aplicaciones $f : B \longrightarrow V$ tales que

$$B \subset A \land \bigwedge a \in A \bigwedge b \in B(a\, R\, b \to a \in B)$$
$$\land \bigwedge b \in B\, f(b) = \{f(a) \mid a \in B \land a\, R\, b\}$$

Es fácil ver que la fórmula "$f : \mathcal{D}f \longrightarrow V$ es una aproximación" es Δ_0. Si f y g son aproximaciones y $X = \mathcal{D}f \cap \mathcal{D}g$, existe el conjunto $\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$, y es fácil ver que tiene que ser vacío (la existencia de un R-minimal lleva a contradicción), de modo que dos aproximaciones coinciden en su dominio común.

Ahora aplicamos Π_1-especificación para definir el conjunto

$$Y = \{a \in A \mid \neg \bigvee f\ (f \text{ es una aproximación} \land a \in \mathcal{D}f)\}.$$

Si no es vacío, tiene un R-minimal a, de modo que, si $A_a = \{b \in A \mid b\, R\, a\}$,

$$\bigwedge b \in A_a \bigvee f(f \text{ es una aproximación} \land b \in \mathcal{D}f).$$

Por Σ_1-recolección existe un conjunto Y de aproximaciones tal que cada elemento de A_a está en el dominio de un elemento de Y. Por la unicidad de las aproximaciones, $f = \bigcup Y$ es también una aproximación cuyo dominio es A. Si llamamos $M = \mathcal{R}f$, tenemos que $f : A \longrightarrow M$ suprayectiva y

$$\bigwedge a \in A\ f(a) = \{f(b) \mid b \in A \land b\, R\, a\}.$$

Es obvio que M es un conjunto transitivo y f es biyectiva, pues esto equivale a que el conjunto

$$C = \{a \in A \mid \bigvee b \in A\ (b \neq a \land f(a) = f(b))\}$$

sea no vacío. Si no lo fuera, tendría un R-minimal a, para el cual existiría un $b \neq a$ tal que $f(a) = f(b)$, pero entonces, si $x\, R\, a$, entonces $f(x) \in f(a) = f(b)$, luego existe un $y\, R\, b$ tal que $f(x) = f(y)$, pero por minimalidad $x = y\, R\, b$. Recíprocamente, si $x\, R\, b$, entonces $f(x) \in f(b) = f(a)$, luego existe un $y\, R\, a$ tal que $f(x) = f(y)$, y de nuevo por minimalidad $x = y\, R\, a$. Por consiguiente, a y b tienen la misma extensión, luego $a = b$ porque R es extensional, contradicción.

Ahora es inmediato que $\bigwedge ab \in A(a\, R\, b \leftrightarrow f(a) \in f(b))$. Con esto hemos probado que $f : (A, R) \longrightarrow M$ es una función colapsante (un isomorfismo). ■

En KP podemos demostrar un caso particular:

Teorema 2.26 (KP) *Sea (A, R) un conjunto con una relación extensional y bien fundada y supongamos que existe un ordinal θ y una aplicación $r : A \longrightarrow \theta$ tal que $\bigwedge xy \in A\ (x\, R\, y \to r(x) < r(y))$. Entonces (A, R) es isomorfo a un conjunto transitivo.*

Demostración: Para cada ordinal $\alpha \leq \theta$, definimos

$$A_\alpha = \{a \in A \mid r(a) < \alpha\}.$$

Llamemos

$$\phi(\alpha, f) \equiv \alpha \in \Omega \land \alpha \leq \theta \land f : A_\alpha \longrightarrow V \land \bigwedge a \in A_\alpha\ f(a) = \{f(x) \mid x\, R\, a\}.$$

Se trata de una fórmula Δ_0. Por ejemplo, la última parte equivale a

$$\bigwedge u \in f \bigvee v \in u \bigvee az \in v(u = (a, z) \land \bigwedge y \in z \bigvee x \in A(x\, R\, a \land y = f(x)) \land$$
$$\bigwedge x \in A(x\, R\, a \to \bigvee y \in z\ y = f(x))).$$

Veamos que $\phi(\alpha, f) \land \phi(\alpha, f') \to f = f'$. En efecto, en caso contrario podemos considerar el conjunto no vacío

$$B = \{a \in A_\alpha \mid f(a) \neq f'(a)\},$$

el cual tendrá un R-minimal $a \in B$, de modo que si $x\, R\, a$, entonces $f(x) = f'(x)$, pero entonces

$$f(a) = \{f(x) \mid x\, R\, a\} = \{f'(x) \mid x\, R\, a\} = f'(a),$$

contradicción.

Ahora probamos por Σ_1-inducción que $\bigwedge \alpha \leq \theta \bigvee f\, \phi(\alpha, f)$. Más precisamente, consideramos la fórmula

$$\psi(\alpha) \equiv (\alpha \in \Omega \land \alpha \leq \theta \land \bigvee f \phi(\alpha, f)) \lor \neg(\alpha \in \Omega \land \alpha \leq \theta).$$

Suponemos que $\alpha \leq \theta$ y que $\bigwedge \beta < \alpha \bigvee f\, \phi(\beta, f)$. Por la unicidad que hemos probado, tenemos de hecho que $\bigwedge \beta < \alpha \overset{1}{\bigvee} f\, \phi(\beta, f)$.

Si $\alpha = 0$, es obvio que $\phi(\alpha, \varnothing)$.

Si $\alpha = \beta + 1$, sea $f : A_\beta \longrightarrow V$ tal que $\phi(\beta, f)$. Es fácil ver que la fórmula

$$y = f[A_a^R]$$

es Δ_0, luego por reemplazo existe $h : \{a \in A \mid r(a) = \beta\} \longrightarrow y$ suprayectiva tal que $h(a) = f[A_a^R] = \{f(x) \mid x\, R\, a\}$, y es fácil ver que $f' = f \cup h$ cumple $\phi(\alpha, f')$.

Si α es un ordinal límite, por Σ_1-reemplazo existe $h : \alpha \longrightarrow y$ suprayectiva tal que $\bigwedge \beta < \alpha\, \phi(\beta, h(\beta))$, y es fácil ver que $f = \bigcup y$ cumple $\phi(\alpha, f)$.

En particular, hemos probado que existe una f tal que $\phi(\theta, f)$, es decir, tal que $f : A \longrightarrow M$ suprayectiva, para cierto conjunto $M = f[A]$ y tal que

$$\bigwedge a \in A\ f(a) = \{f(x) \mid x\, R\, a\}.$$

A partir de aquí la prueba concluye igual que la del teorema anterior. ■

En particular, dado cualquier conjunto A, por Σ_1-reemplazo existe un ordinal θ tal que $\mathrm{rang} : A \longrightarrow \theta$, luego todo conjunto A sobre el que la relación de pertenencia sea extensional es isomorfo a un conjunto transitivo.

2.5 Los modelos $H(\kappa)$

Presentamos aquí unos conjuntos cuyo comportamiento como modelos es algo mejor que el de los modelos V_λ que ya hemos estudiado. Trabajaremos en ZFC.

Definición 2.27 Si κ es un cardinal infinito, llamamos

$$H(\kappa) = \{x \mid |\mathrm{ct}\, x| < \kappa\}.$$

No es inmediato que $H(\kappa)$ sea un conjunto, pero lo cierto es que sí que lo es:

Teorema 2.28 *Si κ es un cardinal infinito, entonces $H(\kappa) \subset V_\kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $x \in H(\kappa)$, entonces $|\mathrm{ct}\, x| < \kappa$. El teorema [LM 11.43] implica que la imagen de $\mathrm{ct}\, x$ por la aplicación rango es transitiva, luego es un ordinal α. Además $|\alpha| \leq |\mathrm{ct}\, x| < \kappa$, luego $\alpha < \kappa$. En particular, como $x \subset \mathrm{ct}\, x$, tenemos que todo elemento de x tiene rango $< \alpha$, luego $x \subset V_\alpha$, luego $x \in V_{\alpha+1} \subset V_\kappa$. ■

Se suele decir que los elementos de $H(\kappa)$ son los conjuntos de cardinal hereditariamente menor que κ, pero esto sólo es exacto cuando κ es regular. En efecto, en general, se dice que un conjunto x tiene *hereditariamente* una propiedad si la tienen todos los elementos de $\mathrm{ct}\, x \cup \{x\}$ (es decir, si la tiene x, y los elementos de x, y los elementos de los elementos de x, etc.). Y en nuestro caso se cumple lo siguiente:

Teorema 2.29 *Si κ es un cardinal regular, entonces $x \in H(\kappa)$ si y sólo si todos los elementos de $\mathrm{ct}\, x \cup \{x\}$ tienen cardinal $< \kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $x \in H(\kappa)$, todo $u \in \mathrm{ct}\, x \cup \{x\}$ cumple $u \subset \mathrm{ct}\, x \cup \{x\}$, luego $|u| \leq |\mathrm{ct}\, x| + 1 < \kappa$.

Recíprocamente, si x cumple la condición del enunciado, vamos a probar por $\in$-inducción que todo $u \in \mathrm{ct}\, x \cup \{x\}$ cumple $|\mathrm{ct}\, u| < \kappa$. En efecto, si vale para todo $v \in u$, tenemos que

$$\mathrm{ct}\, u = u \cup \bigcup_{v \in u} \mathrm{ct}\, v,$$

donde $|\mathrm{ct}\, v| < \kappa$ por hipótesis de inducción y $|u| < \kappa$ por la hipótesis, luego la regularidad de κ implica que la unión tiene cardinal $< \kappa$, luego también $|\mathrm{ct}\, u| < \kappa$, y en particular $|\mathrm{ct}\, x| < \kappa$, es decir, que $x \in H(\kappa)$. ■

Por el contrario, si κ es singular y $x \subset \kappa$ es un conjunto no acotado tal que $|x| < \kappa$, entonces $\mathrm{ct}\, x = \kappa$, luego todo elemento de $\mathrm{ct}\, x \cup \{x\}$ tiene cardinal $< \kappa$, pero $x \notin H(\kappa)$.

En particular, $H(\aleph_0)$ es el conjunto de todos los conjuntos *hereditariamente finitos,* $H(\aleph_1)$ es el conjunto de todos los conjuntos *hereditariamente numerables,* etc.

Una caracterización más útil que la dada por el teorema anterior es la siguiente:

Teorema 2.30 *Si κ es un cardinal regular, entonces $x \in H(\kappa)$ si y sólo si $x \subset H(\kappa)$ y $|x| < \kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $x \in H(\kappa)$, entonces $|x| \leq |\operatorname{ct} x| < \kappa$ y si $u \in \operatorname{ct} x$ entonces $\operatorname{ct} u \subset \operatorname{ct} x$, luego $|\operatorname{ct} u| < \kappa$, luego $u \in H(\kappa)$.

Para probar el recíproco observamos que, por la parte ya probada, todo elemento de $H(\kappa)$ tiene cardinal $< \kappa$, luego si se da la hipótesis del enunciado se cumple la del teorema anterior y $x \in H(\kappa)$. ■

Notemos que la implicación $x \in H(\kappa) \to x \subset H(\kappa) \land |x| < \kappa$ no requiere la regularidad de κ, luego tenemos que todos los conjuntos $H(\kappa)$ son transitivos.

La inclusión del teorema 2.28 no es en general una igualdad:

Teorema 2.31 *Si κ es un cardinal infinito, $H(\kappa) = V_\kappa$ si y sólo si $\kappa = \beth_\kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Es fácil ver que $H(\aleph_0) = V_\omega$, así que podemos restringirnos al caso en que κ es no numerable. La clave está en que $|V_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha$ ([TC 5.26]), de modo que si $\kappa = \beth_\kappa$ y $x \in V_\kappa$, entonces existe un $\alpha < \kappa$ tal que $x \in V_\alpha$, luego $\operatorname{ct}(x) \subset V_\alpha$, luego $|\operatorname{ct}(x)| \leq |V_\alpha| \leq |V_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha < \beth_\kappa = \kappa$, luego $x \in H(\kappa)$.

Recíprocamente, si $H(\kappa) = V_\kappa$ entonces, para todo $\alpha < \kappa$, tenemos que $\omega + \alpha < \kappa$ y, como $V_{\omega+\alpha} \in V_\kappa = H(\kappa)$, tenemos que $\beth_\alpha < \kappa$, luego $\beth_\kappa \leq \kappa$, y la desigualdad opuesta se da siempre. ■

Para $\kappa > \aleph_0$ sabemos que $|V_\kappa| = \beth_\kappa$. Calculamos ahora el cardinal de $H(\kappa)$:

Teorema 2.32 *Si κ es un cardinal infinito, entonces $|H(\kappa)| = 2^{<\kappa}$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\mu < \kappa$, entonces $\mathcal{P}\mu \subset H(\kappa)$, pues si $x \subset \mu$ entonces $\operatorname{ct} x \subset \mu$, luego $|\operatorname{ct} x| \leq \mu < \kappa$, luego $x \in H(\kappa)$. Por lo tanto $2^\mu \leq |H(\kappa)|$, luego $2^{<\kappa} \leq |H(\kappa)|$.

Para probar la desigualdad opuesta, para cada $\mu < \kappa$, consideramos el conjunto A_μ de todas las relaciones $E \subset \mu \times \mu$ extensionales y bien fundadas en μ. Obviamente $|A_\mu| \leq |\mathcal{P}(\mu \times \mu)| = 2^\mu \leq 2^{<\kappa}$.

Para cada $E \in A_\mu$, sea x_E el colapso transitivo de (μ, R_μ). Puesto que $|\operatorname{ct} x_E| = |x_E| = \mu < \kappa$, tenemos que $x_E \in H(\kappa)$.

Recíprocamente, para cada $x \in H(\kappa)$ transitivo, llamando $\mu = |x|$, tenemos una biyección $f : \mu \longrightarrow x$ y podemos definir una relación E en μ mediante $\alpha \, E \, \beta \leftrightarrow f(\alpha) \in f(\beta)$. Por la unicidad del colapso transitivo, es claro entonces que x es el colapso transitivo de (μ, x), de modo que $x = x_E$. En otras palabras, la aplicación

$$\bigcup_{\mu<\kappa} \{\mu\} \times A_\mu \longrightarrow H(\kappa)$$

que a cada (μ, E) le asigna x_E tiene por imagen el conjunto T de todos los conjuntos transitivos de $H(\kappa)$. Por consiguiente

$$|T| \leq |\bigcup_{\mu<\kappa} \{\mu\} \times A_\mu| \leq \kappa \, 2^{<\kappa} = 2^{<\kappa}.$$

Por último, si $u \in H(\kappa)$, el conjunto $x = \operatorname{ct} u \cup \{u\}$ es transitivo y claramente $|x| < \kappa$, luego $x \in H(\kappa)$, luego $x \in T$. Por lo tanto

$$|H(\kappa)| = |\bigcup T| \leq |T|\kappa \leq 2^{<\kappa}\,\kappa = 2^{<\kappa},$$

puesto que todo elemento de T tiene cardinal menor que κ. ■

Pasemos ya a estudiar los conjuntos $H(\kappa)$ como modelos. El resultado principal es el siguiente:

Teorema 2.33 *Si κ es un cardinal no numerable, entonces $H(\kappa)$ es un modelo transitivo de* KPI+AE *y, si κ es regular, también de* ZFC − AP.

DEMOSTRACIÓN: Claramente, $H(\kappa)$ cumple el axioma de extensionalidad porque es un conjunto transitivo. Si x, $y \in H(\kappa)$, entonces

$$\operatorname{ct}(\{x, y\}) = \operatorname{ct} x \cup \operatorname{ct} y \cup \{x, y\},$$

y es claro entonces que $|\operatorname{ct}(\{x, y\})| < \kappa$, luego $\{x, y\} \in H(\kappa)$, y esto prueba el axioma del par. Similarmente, como $\operatorname{ct}(\bigcup x) \subset \operatorname{ct} x$, también $\bigcup x \in H(\kappa)$ y se cumple el axioma de la unión.

Observemos ahora que $H(\kappa)$ cumple el esquema de especificación completo (no sólo para fórmulas Δ_0). En efecto, dada $\phi \in \operatorname{Form}(\mathcal{L})$ con variables libres $u, x_1 \ldots, x_n$, si $x, x_1, \ldots, x_n \in H(\kappa)$, el conjunto

$$A = \{u \in x \mid H(\kappa) \vDash \phi[u, x_1, \ldots, x_n]\}$$

cumple $A \in H(\kappa)$ porque $\operatorname{ct} A \subset \operatorname{ct} x$, luego $|\operatorname{ct} A| < \kappa$. Esto prueba el esquema de especificación.

Por transitividad, $H(\kappa)$ cumple el axioma de regularidad de ZFC, pero también cumple el de KP, pues, dada una fórmula $\phi(u, x_1, \ldots, x_n)$, se trata de probar que si $x_1, \ldots, x_n \in H(\kappa)$ entonces

$$\bigvee u \in H(\kappa)\, H(\kappa) \vDash \phi[u, x_1, \ldots, x_n] \rightarrow$$

$$\bigvee u \in H(\kappa)\ (H(\kappa) \vDash \phi[u, x_1, \ldots, x_n] \wedge \bigwedge v \in u\ \neg H(\kappa) \vDash \phi[v, x_1, \ldots, x_n]),$$

pero basta tomar un $u \in H(\kappa)$ que cumpla $H(\kappa) \vDash \phi[u, x_1, \ldots, x_n]$ y que tenga rango mínimo.

Puesto que $\omega \in H(\kappa)$ (éste es el único punto en el que la prueba requiere que κ sea no numerable), tenemos el axioma de infinitud, y para el axioma de elección observamos que si $x \in H(\kappa)$ y $R \subset x \times x$ es un buen orden en x, se prueba sin dificultad que $R \in H(\kappa)$.

Así, para probar que $H(\kappa)$ cumple KPI sólo falta probar el esquema de Δ_0-recolección y para probar que cumple ZFC−AP sólo falta probar el esquema de reemplazo. Probaremos primero ambos axiomas suponiendo que κ es regular.

Para el reemplazo tomamos $\phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$, suponemos que

$$\bigwedge xyz \in H(\kappa)(H(\kappa) \vDash \phi[x,y] \land H(\kappa) \vDash \phi[x,z] \to y = z)$$

y fijamos un conjunto $A \in H(\kappa)$. Basta probar que el conjunto

$$B = \{y \in H(\kappa) \mid \bigvee x \in A\ H(\kappa) \vDash \phi[x,y]\}$$

cumple $B \in H(\kappa)$. Por 2.30 basta probar que $|B| < \kappa$, pero claramente

$$f = \{(x,y) \in A \times B \mid H(\kappa) \vDash \phi[x,y]\}$$

es una aplicación $f : A_0 \longrightarrow B$ suprayectiva, donde

$$A_0 = \{x \in A \mid \bigvee y \in B\ H(\kappa) \vDash \phi[x,y]\},$$

luego $|B| \leq |A_0| \leq |A| < \kappa$.

Para probar el esquema de Δ_0-recolección tomamos $\phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ de clase Δ_0 y un conjunto $x \in H(\kappa)$ de modo que

$$\bigwedge u \in x \bigvee v \in H(\kappa)\ H(\kappa) \vDash \phi[u,v].$$

Por AE existe una aplicación suprayectiva $f : x \longrightarrow y \subset H(\kappa)$ tal que

$$\bigwedge u \in x\ H(\kappa) \vDash \phi[u, f(u)],$$

luego, en particular, $\bigwedge u \in x \bigvee v \in y\ H(\kappa) \vDash \phi[u,v]$. Finalmente basta observar que $|y| \leq |x| < \kappa$, luego $y \in H(\kappa)$.

Nos falta demostrar el esquema de Δ_0-recolección cuando κ es singular. Empezamos demostrando un hecho general:

> *Si $\mu < \kappa$ son cardinales no numerables, $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ es una fórmula Σ_1 y $x_1, \ldots, x_n \in H(\mu)$, entonces*
>
> $$H(\kappa) \vDash \phi[x_1, \ldots, x_n] \to H(\mu) \vDash \phi[x_1, \ldots, x_n].$$

En efecto, tenemos que $\{(x_1, \ldots, x_n)\} \in H(\mu)$, luego $W = \mathrm{ct}(\{x_1, \ldots, x_n\})$ cumple $|W| < \mu$. Además $W \subset H(\mu) \subset H(\kappa)$. Por el teorema de Löwenheim-Skolem [TC 11.24] podemos tomar un submodelo elemental $M \prec H(\kappa)$ tal que $W \subset M$ y $|M| = \aleph_0 |W| < \mu$. Sea $\pi : M \longrightarrow N$ el colapso transitivo de M. Entonces $|N| = |M| < \mu$, luego $N \in H(\mu)$ y $N \subset H(\mu)$.

Si llamamos $i = \pi^{-1}$, tenemos que $i : N \longrightarrow H(\kappa)$ es una inmersión elemental tal que $i|_W$ es la identidad (se comprueba por $\in$-inducción en W). Por lo tanto,

$$H(\kappa) \vDash \phi[x_1, \ldots, x_n] \to H(\kappa) \vDash \phi[i(x_1), \ldots, i(x_n)] \to N \vDash \phi[x_1, \ldots, x_n],$$

pero ϕ es de la forma $\phi = \bigvee x\, \psi$, donde ψ es Δ_0 y lo que tenemos es que $\bigvee x \in N\ N \vDash \psi[x, x_1, \ldots, x_n]$. Como ψ es Δ_0 es absoluta, luego

$$\bigvee x \in H(\mu)\ H(\mu) \vDash \psi[x, x_1, \ldots, x_n],$$

luego $H(\mu) \vDash \phi[x_1, \ldots, x_n]$, como había que probar.

Para probar que $H(\kappa)$ cumple el axioma de Δ_0-recolección tomamos una fórmula $\psi(u, v, x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ de clase Δ_0 y fijamos unos conjuntos $x_1, \ldots, x_n, x \in H(\kappa)$ tales que

$$\bigwedge u \in x \bigvee v \in H(\kappa)\, H(\kappa) \vDash \psi[u, v, x_1, \ldots, x_n].$$

Entonces $\{(x, x_1, \ldots, x_n)\} \in H(\kappa)$, luego $W = \mathrm{ct}(\{(x, x_1, \ldots, x_n)\})$ cumple $|W| < \kappa$. Como κ es singular, existe un cardinal regular $\mu < \kappa$ tal que $|W| < \mu$ y $x, x_1, \ldots, x_n \in H(\mu)$, con lo que $W \subset H(\mu)$.

Fijado $u \in x$, el resultado que hemos probado aplicado a la fórmula $\phi \equiv \bigvee v\psi$ nos da que

$$\bigvee v \in H(\mu)\ H(\mu) \vDash \phi[u, v, x_1, \ldots, x_n].$$

De este modo tenemos que

$$\bigwedge u \in x \bigvee v \in H(\mu)\ H(\mu) \vDash \phi[u, v, x_1, \ldots, x_n].$$

Como μ es regular, tenemos probado que $H(\mu)$ es un modelo de KP, luego, por el axioma de Δ_0-recolección en $H(\mu)$ tenemos que

$$\bigvee y \in H(\mu) \bigwedge u \in x \bigvee v \in y\ H(\mu) \vDash \phi[u, v, x_1, \ldots, x_n].$$

Como ϕ es Δ_0, esto implica que

$$\bigvee y \in H(\kappa) \bigwedge u \in x \bigvee v \in y\ H(\kappa) \vDash \phi[u, v, x_1, \ldots, x_n],$$

que es lo que había que probar. ■

En cuanto al axioma de partes, la situación es la siguiente:

Teorema 2.34 *Si κ es un cardinal, el modelo $H(\kappa)$ cumple el axioma de partes si y sólo si κ es un cardinal límite fuerte.*

Demostración: Que $H(\kappa)$ cumpla el axioma de partes equivale a que para todo $x \in H(\kappa)$ se cumpla $\mathcal{P}x \cap H(\kappa) \in H(\kappa)$. Ahora bien, es inmediato que si $x \in H(\kappa)$ entonces $\mathcal{P}x \subset H(\kappa)$, luego la condición es que $\mathcal{P}x \in H(\kappa)$.

Así pues, si $H(\kappa)$ cumple el axioma de partes y $\mu < \kappa$, entonces $\mu \in H(\kappa)$, luego $\mathcal{P}\mu \in H(\kappa)$, luego $2^\mu = |\mathcal{P}\mu| < \kappa$, luego κ es un cardinal límite fuerte.

Recíprocamente, si κ es un límite fuerte y $x \in H(\kappa)$, entonces se cumple que $|\mathrm{ct}\,\mathcal{P}x| = |\mathcal{P}x| = 2^{|x|} < \kappa$, pues $|x| < \kappa$. Por lo tanto $\mathcal{P}x \in H(\kappa)$. ■

Los dos teoremas anteriores nos dan que si κ es un cardinal inaccesible entonces $H(\kappa) \vDash \mathrm{ZFC}$ (cosa que ya sabíamos indirectamente porque en tal caso $H(\kappa) = V_\kappa$). También hemos visto que $H(\aleph_0) \vDash \mathrm{ZFC} - \mathrm{AI}$.

Terminamos con una propiedad destacable de los modelos $H(\kappa)$:

Teorema 2.35 *Si κ es un cardinal no numerable, las fórmulas Σ_1 son absolutas para $H(\kappa)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\bigvee x\, \phi(x, x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula Σ_1, donde ϕ es Δ_0 y fijemos $x_1, \ldots, x_n \in H(\kappa)$ tales que $\bigvee x\, \phi(x, x_1, \ldots, x_n)$. Por el teorema de reflexión 2.16 existe un $\lambda > \kappa$ tal que $\bigvee x\, \phi$ es absoluta para V_λ, de modo que existe un $x \in V_\lambda$ tal que $\phi^{V_\lambda}(x, x_1, \ldots, x_n)$.

Sea $A = \mathrm{ct}(x_1, \ldots, x_n) \cup \{x_1, \ldots, x_n\} \subset H(\kappa)$, luego $|A| < \kappa$. Consideremos el núcleo de Skolem $N = N(A) \prec V_\lambda$, de modo que $A \subset N$ y $|N| < \kappa$ (aquí usamos que κ es no numerable). Por ser un submodelo elemental, existe un $x \in N$ tal que $\phi^N(x, x_1, \ldots, x_n)$. Sea $\pi : N \longrightarrow M$ el colapso transitivo de N, que es un isomorfismo de modelos, y claramente $\pi(x_i) = x_i$. Por lo tanto existe un $x \in M$ tal que $\phi(x, x_1, \ldots, x_n)$ (no es necesario relativizar ϕ porque es Δ_0, luego absoluta para modelos transitivos).

Como M es transitivo y $|M| < \kappa$, se cumple que $M \subset H(\kappa)$, luego concluimos que $\bigvee x \in H(\kappa)\, \phi(x, x_1, \ldots, x_n)$ o, lo que es lo mismo, $(\bigvee x\, \phi(x, x_1, \ldots, x_n))^{H(\kappa)}$. Esto prueba que $\bigvee x\, \phi$ es absoluta hacia abajo, y que es absoluta hacia arriba es trivial. ■

2.6 La parte bien fundada de un modelo

En esta sección trabajamos en ZF y consideramos un modelo (M, R) de KP. Si M es una clase propia esto debe entenderse como que todos los teoremas que vamos a probar se cumplirán si (M, R) satisface una cantidad finita suficientemente grande de axiomas de KP, mientras que si M es un conjunto podemos suponer, alternativamente, que $(M, R) \vDash \mathrm{KP}$ en el sentido de la teoría de modelos.

Como KP incluye el axioma de extensionalidad, en particular tenemos que la relación R es extensional en M y, en caso de que M sea una clase propia, supondremos también que es conjuntista, es decir, que para cada $a \in M$, la extensión

$$e_M(a) = \{b \in M \mid b\, R\, a\}$$

es un conjunto. En cambio, no suponemos que R este bien fundada. Lo que vamos a probar es que en M podemos distinguir una “parte bien fundada” susceptible de ser colapsada a un modelo transitivo.

Puesto que en KP se demuestra que todo conjunto tiene clausura transitiva, podemos definir $\mathrm{ct}_M : M \longrightarrow \mathcal{P}M$ dada por

$$\mathrm{ct}_M(x) = e_M(\mathrm{ct}^{MR}(x)).$$

Observemos que si M es una clase propia $\mathrm{ct}_M(x)$ es un conjunto porque estamos suponiendo que R es conjuntista. En caso contrario ct no estaría bien definida. Además, como

$$(M, R) \vDash \bigwedge x\ \mathrm{ct}\, x \text{ es transitiva}$$

se cumple que si $u\, R\, v \wedge v \in \mathrm{ct}_M(a)$, entonces $u \in \mathrm{ct}_M(a)$. Igualmente, como

$$(M, R) \vDash \bigwedge x\ \mathrm{ct}\, x = x \cup \bigcup_{u \in x} \mathrm{ct}\, u,$$

resulta que

$$\mathrm{ct}_M(a) = e_M(a) \cup \bigcup_{u \in e_M(a)} \mathrm{ct}_M(u).$$

Diremos que $a \in M$ está *bien fundado* si la relación R está bien fundada en $\mathrm{ct}_M(a)$. Llamaremos $\overline{M}_{\mathrm{bf}} \subset M$ al conjunto de los elementos bien fundados de M.

Observemos que R está bien fundada en $\overline{M}_{\mathrm{bf}}$:

Si $X \subset \overline{M}_{\mathrm{bf}}$ es un subconjunto no vacío, tomamos $a \in X$ y consideramos $Y = X \cap \mathrm{ct}_M(a)$. Si $Y = \varnothing$, entonces a es un R-minimal de X, y en caso contrario Y tiene un R-minimal b, que también es un R-minimal de X, pues si existe $u \in X \cap e_M(b)$ entonces $u\,R\,b \in \mathrm{ct}_M(a)$, luego $u \in \mathrm{ct}_M(a)$, luego $u \in Y \cap e_M(b)$, contradicción. ■

Conviene caracterizar como sigue los elementos de $\overline{M}_{\mathrm{bf}}$:

Si $x \in M$, las afirmaciones siguientes son equivalentes:

a) $x \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$,

b) $e_M(x) \subset \overline{M}_{\mathrm{bf}}$,

c) $\mathrm{ct}_M(x) \subset \overline{M}_{\mathrm{bf}}$.

Si se cumplen estas afirmaciones, $e_M(x) = e_{\bar{M}_{\mathrm{bf}}}(x)$.

En efecto: a) $\Rightarrow$ b) Si $u \in e_M(x)$, entonces $\mathrm{ct}_M(u) \subset \mathrm{ct}_M(x)$ y, como R está bien fundada en $\mathrm{ct}_M(x)$, también lo está en $\mathrm{ct}_M(u)$, luego $u \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$ y en particular $u \in e_{\bar{M}_{\mathrm{bf}}}(x)$. Con esto hemos probado que $e_M(x) \subset e_{\bar{M}_{\mathrm{bf}}}(x)$, y la inclusión opuesta es obvia.

b) $\Rightarrow$ c) Si $u \in e_M(x)$, tenemos que R está bien fundada en $\mathrm{ct}_M(u)$, luego si $v \in \mathrm{ct}_M(u)$, como $\mathrm{ct}_M(v) \subset \mathrm{ct}_M(u)$, resulta que R también está bien fundada en $\mathrm{ct}_M(v)$, luego $v \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, luego $\mathrm{ct}_M(u) \subset \overline{M}_{\mathrm{bv}}$, luego

$$\mathrm{ct}_M(x) = e_M(x) \cup \bigcup_{u \in e_M(x)} \mathrm{ct}_M(u) \subset \overline{M}_{\mathrm{bf}}.$$

c) $\Rightarrow$ a) Como R está bien fundada en $\overline{M}_{\mathrm{bf}}$, también lo está en $\mathrm{ct}_M(x)$, luego $x \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$. ■

Resulta, pues, que R es una relación extensional, conjuntista y bien fundada sobre $\overline{M}_{\mathrm{bf}}$, lo que nos permite formar su colapso transitivo:

Definición 2.36 En las condiciones anteriores, llamaremos *parte bien fundada* de M al colapso transitivo M_{bf} de $\overline{M}_{\mathrm{bf}}$. Llamaremos $i : M_{\mathrm{bf}} \longrightarrow M$ a la inversa de la función colapsante.

Así $i : M_{\mathrm{bf}} \longrightarrow (\overline{M}_{\mathrm{bf}}, R)$ es un isomorfismo de modelos. Si la consideramos como aplicación en M, entonces es claro que es inyectiva y que

$$\bigwedge uv \in M_{\mathrm{bf}}\ (u \in v \leftrightarrow i(u)\,R\,i(v)).$$

Expresaremos esto diciendo que i es una inmersión de modelos. Si M (y por consiguiente M_{bf}) es un conjunto, entonces i es ciertamente una inmersión (no necesariamente elemental) en el sentido de [TC 10.17].

Observemos ahora que i es Δ_0-elemental, en el sentido de que si $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ es una fórmula Δ_0, entonces

$$\bigwedge x_1\cdots x_n\in M_{\mathrm{bf}}(\phi^{M_{\mathrm{bf}}}(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\phi^{MR}(i(x_1),\ldots,i(x_n))).$$

En efecto, lo que sabemos en principio es que $\phi^{M_{\mathrm{bf}}}(x_1,\ldots,x_n)$ es equivalente a $\phi^{\overline{M}_{\mathrm{bf}}R}(i(x_1),\ldots,i(x_n))$, y basta probar que (para fórmulas Δ_0) se cumple

$$\bigwedge x_1\cdots x_n\in\overline{M}_{\mathrm{bf}}\,(\phi^{\overline{M}_{\mathrm{bf}}R}(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\phi^{MR}(x_1,\ldots,x_n)).$$

En efecto, si $\phi\equiv x=y$ o $\phi\equiv x\in y$ es trivial, si vale para ϕ y ψ, es fácil ver que vale para $\neg\phi$ y $\phi\rightarrow\psi$. El único caso no trivial se da cuando $\phi\equiv\bigwedge x\in x_i\,\psi(x,x_1,\ldots,x_n)$. Por hipótesis de inducción

$$\bigwedge xx_1\cdots x_n\in\overline{M}_{\mathrm{bf}}\,(\psi^{\overline{M}_{\mathrm{bf}}R}(x,x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\psi^{MR}(x,x_1,\ldots,x_n)),$$

de donde

$$\bigwedge x_1\cdots x_n\in\overline{M}_{\mathrm{bf}}\,(\bigwedge x\in\overline{M}_{\mathrm{bf}}(x\,R\,x_i\rightarrow\psi^{\overline{M}_{\mathrm{bf}}R}(x,x_1,\ldots,x_n))$$
$$\leftrightarrow\bigwedge x\in\overline{M}_{\mathrm{bf}}(x\,R\,x_i\rightarrow\psi^{MR}(x,x_1,\ldots,x_n))).$$

Ahora bien, si $x\in M$ cumple $x\,R\,x_i$, es decir, $x\in e_M(x_i)$, con $x_i\in\overline{M}_{\mathrm{bf}}$, entonces $x\in\overline{M}_{\mathrm{bf}}$, luego la fórmula anterior equivale a

$$\bigwedge x_1\cdots x_n\in\overline{M}_{\mathrm{bf}}\,(\bigwedge x\in\overline{M}_{\mathrm{bf}}(x\,R\,x_i\rightarrow\psi^{\overline{M}_{\mathrm{bf}}R}(x,x_1,\ldots,x_n))$$
$$\leftrightarrow\bigwedge x\in M\,(x\,R\,x_i\rightarrow\psi^{MR}(x,x_1,\ldots,x_n))),$$

que es lo mismo que

$$\bigwedge x_1\cdots x_n\in\overline{M}_{\mathrm{bf}}\,(\phi^{\overline{M}_{\mathrm{bf}}R}(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\phi^{MR}(x_1,\ldots,x_n)).\qquad\blacksquare$$

En realidad, para considerar a M_{bf} o $\overline{M}_{\mathrm{bf}}$ como modelos de $\mathcal{L}$ necesitamos garantizar que no son vacíos, pero esto es inmediato: teniendo en cuenta que $(M,R)\vDash\bigvee x\bigwedge u\,u\notin x$, vemos que existe un $x\in M$ tal que $e_M(x)=\varnothing$, luego $x\in\overline{M}_{\mathrm{bf}}$ y su colapso transitivo es $\varnothing\in M_{\mathrm{bf}}$.

Más aún, tenemos que

$$(M,R)\vDash\bigwedge x\bigvee y\bigwedge u\,(u\in y\leftrightarrow u\in x\vee u=x),$$

pues la sentencia es un teorema de KP, luego, para cada $x\in M$ existe un $y\in M$ tal que $e_M(y)=e_M(x)\cup\{x\}$. En particular, si $x\in\overline{M}_{\mathrm{bf}}$ tenemos que $e_M(y)\subset\overline{M}_{\mathrm{bf}}$, luego $y\in\overline{M}_{\mathrm{bf}}$. Esto prueba que

$$(\overline{M}_{\mathrm{bf}},R)\vDash\bigwedge x\bigvee y\bigwedge u\,(u\in y\leftrightarrow u\in x\vee u=x),$$

luego lo mismo vale para el modelo isomorfo M_{bf}, y esto significa que

$$\bigwedge x \in M_{\mathrm{bf}}\ x \cup \{x\} \in M_{\mathrm{bf}}.$$

En particular, una simple inducción prueba ahora que $\omega \subset M_{\mathrm{bf}}$. Más en general, consideremos el conjunto

$$\Omega^M = \{x \in M \mid x \text{ es un ordinal}^{MR}\}.$$

Como la fórmula "x es un ordinal" es Δ_0, tenemos que

$$\Omega^M \cap \overline{M}_{\mathrm{bf}} = \{x \in \overline{M}_{\mathrm{bf}} \mid x \text{ es un ordinal}^{\overline{M}_{\mathrm{bf}}R}\}$$

y

$$\Omega^M_{\mathrm{bf}} = i^{-1}[\Omega^M \cap \overline{M}_{\mathrm{bf}}] = \{x \in M_{\mathrm{bf}} \mid x \text{ es un ordinal}^{M_{\mathrm{bf}}}\} = M_{\mathrm{bf}} \cap \Omega = \Omega^{M_{\mathrm{bf}}}.$$

Claramente entonces, $\Omega^M_{\mathrm{bf}} = \Omega$ o bien Ω^M_{bf} es un ordinal límite (pues hemos probado que si $\alpha \in \Omega^M_{\mathrm{bf}}$ entonces $\alpha \cup \{\alpha\} \in \Omega^M_{\mathrm{bf}}$).

El hecho de que en KP pueda probarse que la clase Ω está bien ordenada por la relación $\alpha \leq \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$ se traduce en que el conjunto Ω^M está totalmente ordenado por la relación $\alpha \leq_R \beta \leftrightarrow \alpha\, R\, \beta \vee \alpha = \beta$, si bien no podemos garantizar que $\leq_R$ sea un buen orden, pues un subconjunto no vacío de Ω^M no tiene por qué ser la extensión de un elemento de M, luego no tiene por qué tener mínimo elemento.

Ahora usamos que

$$(M, R) \vDash \bigwedge x \overset{1}{\bigvee} \alpha \in \Omega\ \alpha = \operatorname{rang}(x),$$

lo que nos permite definir la función $\operatorname{rang}^R_M : M \longrightarrow \Omega^M$ dada por

$$\operatorname{rang}^R_M(x) = \operatorname{rang}^{MR}(x).$$

Más precisamente, tenemos que

$$(M, R) \vDash \bigwedge x\alpha(\alpha \in \operatorname{rang}(x) \leftrightarrow \bigvee u \in x\ \alpha \in \operatorname{rang}(u) + 1),$$

lo cual se traduce en que

$$e_M(\operatorname{rang}^R_M(x)) = \bigcup_{u \in e_M(x)} (e_M(\operatorname{rang}^R_M(u)) \cup \{\operatorname{rang}^R_M(u)\}).$$

De aquí deducimos primero que si $x \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, entonces $\operatorname{rang}^R_M(x) \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$. Lo probamos por inducción sobre R, es decir, lo suponemos cierto para los elementos de $e_M(x)$ y hemos de probarlo para x. Así, en la fórmula anterior, por hipótesis de inducción tenemos que $\operatorname{rang}^R_M(u) \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, de donde resulta que $e_M(\operatorname{rang}^R_M(x)) \subset \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, luego $\operatorname{rang}^R_M(x) \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$.

Por lo tanto, si $x \in M_{\mathrm{bf}}$ tenemos que $\mathrm{rang}_M^R(i(x)) \in \overline{M}_{\mathrm{bf}} \cap \Omega^M$, luego existe un único $r(x) \in \Omega_{\mathrm{bf}}^M$ tal que $\mathrm{rang}_M^R(i(x)) = i(r(x))$. En otras palabras, tenemos una aplicación r que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} M_{\mathrm{bf}} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "r"'] & M \arrow[d, "\mathrm{rang}_M^R"] \\ \Omega_{\mathrm{bf}}^M \arrow[r, "i"'] & \Omega^M \end{tikzcd}$$

En términos de r tenemos que, para todo $x \in M_{\mathrm{bf}}$,

$$e_M(\mathrm{rang}_M^R(i(x))) = \bigcup_{u \in e_M(i(x))} e_M(\mathrm{rang}_M^R(u)) \cup \{\mathrm{rang}_M^R(u)\},$$

es decir,

$$i[r(x)] = e_M(i(r(x))) = \bigcup_{u\in x} e_M(\mathrm{rang}_M^R(i(u))) \cup \{\mathrm{rang}_M^R(i(u))\}$$

$$= \bigcup_{u\in x} e_M(i(r(u))) \cup \{i(r(u))\} = \bigcup_{u\in x} i[r(u)] \cup \{i(r(u))\}$$

$$= \bigcup_{u\in x} i[r(u) \cup \{r(u)\}] = i\left[\bigcup_{u\in x} r(u) + 1\right],$$

luego

$$r(x) = \bigcup_{u\in x} r(u) + 1,$$

y esto implica que $\bigwedge x \in M_{\mathrm{bf}}\ r(x) = \mathrm{rang}(x)$, luego el diagrama conmutativo anterior se reduce a

$$\begin{tikzcd} M_{\mathrm{bf}} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\mathrm{rang}"'] & M \arrow[d, "\mathrm{rang}_M^R"] \\ \Omega_{\mathrm{bf}}^M \arrow[r, "i"'] & \Omega^M \end{tikzcd}$$

Ahora podemos probar que un elemento de M está bien fundado si y sólo si lo está su rango:

$$\overline{M}_{\mathrm{bf}} = \{x \in M \mid \mathrm{rang}_M^R(x) \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}\}.$$

En efecto, una inclusión ya la tenemos probada y, si $\mathrm{rang}_M^R(x) \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, observamos que[9]

$$(M, R) \vDash \bigwedge ux(u \in \mathrm{ct}\, x \to \mathrm{rang}\, u < \mathrm{rang}\, x),$$

luego $\bigwedge u \in \mathrm{ct}_M(x)\ \mathrm{rang}_M^R(u) \in e_M(\mathrm{rang}_M^R(x))$, luego

$$\bigwedge u \in \mathrm{ct}_M(x)\ \mathrm{rang}_M^R(u) \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}.$$

[9]En efecto, basta observar que el conjunto $\{u \in \mathrm{ct}\, x \mid \mathrm{rang}\, u < \mathrm{rang}\, x\}$ es transitivo y contiene a x, luego es $\mathrm{ct}\, x$.

Si $X \subset \mathrm{ct}_M(x)$ es un conjunto no vacío, entonces $Y = \mathrm{rang}^R_M[X] \subset \overline{M}_{\mathrm{bf}}$ es un conjunto no vacío, luego tiene un elemento R-minimal, que será de la forma $a = \mathrm{rang}^R_M(u)$ para un cierto $u \in X$. Este u es un R-minimal de X, pues si existe $v \in X$ tal que $v\,R\,u$, entonces $r = \mathrm{rang}^R_M(v)$ cumple $r \in Y$ y $r\,R\,a$, contradicción. Esto prueba que R está bien fundada en $\mathrm{ct}_M(x)$, luego $x \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$.

En particular, el modelo M está bien fundado, es decir, $M = \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, si y sólo si $i[\Omega^M_{\mathrm{bf}}] = \Omega^M \cap \overline{M}_{\mathrm{bf}} = \Omega^M$, es decir, si y sólo si todos los ordinales de M están bien fundados.

El teorema siguiente es una de las razones por las que tiene interés la teoría KP al estudiar modelos de teorías de conjuntos:

Teorema 2.37 *Si* (M, R) *es un modelo de* KP *en el que la relación* R *es conjuntista, entonces su parte bien fundada* M_{bf} *es un modelo transitivo de* KP.

Demostración: En primer lugar, M_{bf} cumple el axioma de extensionalidad simplemente por ser transitivo, y por el mismo motivo cumple el axioma de regularidad de KP. En efecto, dada cualquier fórmula $\phi(u, x_1, \ldots, x_n)$, se trata de probar que

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in M_{\mathrm{bf}}(\bigvee u \in M_{\mathrm{bf}}\, \phi^{M_{\mathrm{bf}}}(u) \rightarrow \bigvee u \in M_{\mathrm{bf}}(\phi(u) \wedge \bigwedge v \in u \neg\phi^{M_{\mathrm{bf}}}(v))).$$

Para probarlo basta considerar el conjunto $A = \{x \in M_{\mathrm{bf}} \mid \phi^{M_{\mathrm{bf}}}(x)\} \neq \varnothing$ y tomar un $u \in A$ de rango mínimo.

El axioma del par y el de la unión se traspasan fácilmente de M a M_{bf}. Comprobamos el caso de la unión y dejamos al lector el del par, que es más fácil. Dado $x \in M_{\mathrm{bf}}$, tenemos que

$$\bigvee y \in M \bigwedge u \in M(u\,R\,y \leftrightarrow \bigvee v\,(v\,R\,i(x) \wedge u\,R\,v)).$$

Teniendo en cuenta que $e(i(x)) = i[x]$, esto equivale a que existe $y \in M$ tal que

$$e_M(y) = \bigcup_{v \in x} e_M(i(v)) = \bigcup_{v \in x} i[v] = i\left[\bigcup_{v \in x} v\right].$$

Esto implica que $y \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, luego $y = i(y')$, para un $y' \in M_{\mathrm{bf}}$ tal que

$$i[y'] = i\left[\bigcup_{v \in x} v\right],$$

luego $y' = \bigcup\limits_{v \in x} v \in M_{\mathrm{bf}}$.

También es fácil demostrar el axioma de Δ_0-especificación: dados conjuntos $x_1, \ldots, x_n, x \in M_{\mathrm{bf}}$ y una fórmula $\phi(u, x_0, \ldots, x_n)$ de clase Δ_0, tenemos que existe un $y \in M$ tal que

$$\bigwedge u \in M(u\,R\,y \leftrightarrow u\,R\,i(x) \wedge \phi^{MR}(u, i(x_1), \ldots, i(x_n)))$$

con lo que $e_M(y) \subset e_M(i(x)) \subset \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, luego $y \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, luego $y = i(y')$ para un cierto $y' \in M_{\mathrm{bf}}$ tal que

$$\bigwedge u \in M(u \in i(y') \leftrightarrow u \in i(x) \land \phi(u, i(x_1), \ldots, i(x_n)))^{MR}.$$

En particular, para todo $u \in M_{\mathrm{bf}}$ tenemos que

$$(i(u) \in i(y') \leftrightarrow u \in i(x) \land \phi(u, i(x_1), \ldots, i(x_n)))^{MR}.$$

Y, como hemos visto que i es Δ_0-elemental, esto implica que

$$(u \in y' \leftrightarrow u \in x \land \phi(u, x_1, \ldots, x_n))^{M_{\mathrm{bf}}}.$$

Así pues,

$$M_{\mathrm{bf}} \vDash \bigwedge x \bigvee y \bigwedge u(u \in y \leftrightarrow (u \in x \land \phi(u, x_1, \ldots, x_n))),$$

que es el axioma de Δ_0-especificación.

El único axioma de KP para el que la transferencia no es trivial es el de Δ_0-recolección. Para probarlo fijamos una fórmula $\phi(u, v, x_1, \ldots, x_n)$ de clase Δ_0 y conjuntos $x, x_1, \ldots, x_n \in M_{\mathrm{bf}}$ y suponemos que

$$\bigwedge u \in x \bigvee v \in M_{\mathrm{bf}}\, \phi(u, v, x_1, \ldots, x_n).$$

Podemos suponer que $M \neq \overline{M}_{\mathrm{bf}}$ o de lo contrario el resultado es trivial. Según hemos visto, esto implica que $\Omega^M \neq i[\Omega^M_{\mathrm{bf}}]$, luego existe $\alpha \in \Omega^M \setminus i[\Omega^M_{\mathrm{bf}}]$.

Para cada $u \in x$ existe un $v \in M_{\mathrm{bf}}$ tal que $\phi^{M_{\mathrm{bf}}}(u, v, x_1, \ldots, x_n)$. Como i es Δ_0-elemental, $\phi^{MR}(i(u), i(v), i(x_1), \ldots, i(x_n))$.

Por otra parte, $\mathrm{rang}^R_M(i(v))\, R\, \alpha$, porque en caso contrario tendría que ser $\mathrm{rang}^R_M(i(v)) = \alpha$ o bien $\alpha\, R\, \mathrm{rang}^R_M(i(v))$, y en ambos casos concluiríamos que $\alpha \in i[\Omega^M_{\mathrm{bf}}]$. Por consiguiente tenemos

$$(\bigwedge u \in i(x) \bigvee v\, (\phi(u, v, i(x_1), \ldots, i(x_n)) \land \mathrm{rang}(v) < \alpha))^{MR}.$$

Pero la fórmula $\mathrm{rang}(v) < \alpha$ es Δ_1^{KP}, ya que

$$\mathrm{rang}(v) < \alpha \leftrightarrow \bigvee y(y = \mathrm{rang}(v) \land y \in \alpha) \leftrightarrow \bigwedge y(y = \mathrm{rang}(v) \rightarrow y \in \alpha).$$

Como (M, R) verifica el teorema de Δ_1-recolección, existe un $y \in M$ tal que

$$(\bigwedge u \in i(x) \bigvee v \in y\, (\phi(u, v, i(x_1), \ldots, i(x_n)) \land \mathrm{rang}(v) < \alpha))^{MR}.$$

Ahora usamos que M satisface el teorema de Δ_1-especificación, por lo que existe un $a \in M$ tal que

$$(\bigwedge \beta\, (\beta \in a \leftrightarrow \beta \in \alpha + 1 \land$$

$$\bigwedge u \in i(x) \bigvee v \in y(\phi(u, v, i(x_1), \ldots, i(x_n)) \land \mathrm{rang}(v) < \beta)))^{MR}.$$

Como M satisface el axioma de regularidad, el conjunto a tiene un mínimo elemento, es decir, existe un $\alpha_0 \in M$ (más concretamente, $\alpha_0 \in \Omega^M$) tal que

$$(\alpha_0 \in a \wedge \bigwedge \beta \in \alpha_0\ \beta \notin a)^{MR}.$$

Veamos que $e_M(\alpha_0) \subset \overline{M}_{\mathrm{bf}}$. En efecto, si $\beta\, R\, \alpha_0$ no fuera estándar (no estuviera bien fundado), entonces

$$(\bigwedge u \in i(x) \bigvee v \in y\, (\phi(u, v, i(x_1), \ldots, i(x_n)) \wedge \operatorname{rang}(v) < \beta))^{MR},$$

pues antes hemos probado esto mismo para α usando tan sólo que α es un ordinal no estándar, luego lo mismo vale para β. Además $\beta\, R\, \alpha_0 \wedge \alpha_0\, R\, \alpha$ implica que $\beta\, R\, \alpha$, pues R es transitiva sobre los elementos de Ω^M. Esto implica que $\beta\, R\, a$, en contradicción con la minimalidad de α_0.

Por consiguiente $\alpha_0 \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, luego $\alpha_0 = i(\alpha_1)$, para un cierto $\alpha_1 \in \Omega^M_{\mathrm{bf}}$. Así

$$(\bigwedge u \in i(x) \bigvee v \in y\, (\phi(u, v, i(x_1), \ldots, i(x_n)) \wedge \operatorname{rang}(v) < i(\alpha_1)))^{MR}.$$

De nuevo por Δ_1-especificación existe un $z \in M$ tal que

$$(\bigwedge v\, (v \in z \leftrightarrow v \in y \wedge \operatorname{rang}(v) < i(\alpha_1)))^{MR}.$$

Esto implica que $(\operatorname{rang}(z) \leq i(\alpha_1))^{MR}$, luego $\operatorname{rang}^R_M(z) \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, con lo que $z \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, luego $z = i(z')$, para cierto $z' \in M_{\mathrm{bf}}$. En total

$$(\bigwedge u \in i(x) \bigvee v \in i(z')\, \phi(u, v, i(x_1), \ldots, i(x_n)))^{MR},$$

pero esta fórmula es de clase Δ_0, luego

$$(\bigwedge u \in x \bigvee v \in z'\, \phi(u, v, x_1, \ldots, x_n))^{M_{\mathrm{bf}}},$$

o también

$$\bigvee y \in M_{\mathrm{bf}} \bigwedge u \in x \bigvee v \in y\, \phi(u, v, x_1, \ldots, x_n),$$

que es lo que había que probar.

Si el modelo de partida M es un conjunto, la demostración puede modificarse trivialmente para probar que $M_{\mathrm{bf}} \vDash \mathrm{KP}$ en el sentido de la teoría de modelos.

■

Así pues, KP tiene la notable propiedad de que se conserva al restringir un modelo no necesariamente bien fundado a su parte bien fundada, propiedad que no tiene ZFC. Si partimos de un modelo de ZFC podemos obtener un poco más:

Teorema 2.38 *Si* (M, R) *es un modelo de* ZF *en el que la relación* R *es conjuntista, entonces* M_{bf} *es un modelo transitivo de* KP *que además cumple el axioma de los rangos:*

$$\bigwedge \alpha \bigvee a \bigwedge x (x \in a \leftrightarrow \operatorname{rang} x < \alpha),$$

y en particular el axioma de partes. Si (M, R) *cumple el axioma de elección, lo mismo le sucede a* M_{bf}.

Demostración: Observemos que el axioma de los rangos afirma simplemente que las clases V_α son conjuntos. Añadido a KP, permite demostrar el axioma de partes AP, pues si x es un conjunto y $\operatorname{rang} x = \alpha$, entonces todo $u \subset x$ cumple $u \subset V_\alpha$, luego

$$\mathcal{P}x = \{u \in V_{\alpha+1} \mid u \subset x\}$$

es un conjunto por Δ_0-especificación.

En realidad vamos a probar que si (M, R) es un modelo de KP más el axioma de los rangos, lo mismo vale para $M_{\rm bf}$. En efecto, si $\alpha \in M_{\rm bf} \cap \Omega$, entonces $i(\alpha) \in \Omega^M$, luego por el axioma de los rangos en (M, R) existe un $\overline{A} \in M$ tal que

$$e_M(\overline{A}) = \{x \in M \mid \operatorname{rang}_M^R(x) < i(\alpha)\}.$$

Ahora bien, $\operatorname{rang}_M^R(x) < i(\alpha)$ implica que $\operatorname{rang}_M^R(x) \in \overline{M}_{\rm bf}$, luego $x \in \overline{M}_{\rm bf}$. Por lo tanto, $e_M(\overline{A}) \subset \overline{M}_{\rm bf}$, luego $\overline{A} \in \overline{M}_{\rm bf}$, luego $\overline{A} = i(A)$, para cierto $A \in M_{\rm bf}$. Así, para todo $x \in M_{\rm bf}$,

$$x \in A \leftrightarrow i(x) \in \overline{A} \leftrightarrow \operatorname{rang}_M^R(i(x)) < i(\alpha) \leftrightarrow \operatorname{rang} x < \alpha,$$

lo que prueba que $M_{\rm bf}$ cumple el axioma de los rangos, y en particular el axioma de partes.

Si M cumple AE, dado $X \in M_{\rm bf}$, sea $\overline{S} \in M$ tal que

$$(\overline{S} \text{ es un buen orden en } i(X))^{MR}.$$

Entonces $e_M(\overline{S}) \subset i(X \times X)$, luego $\overline{S} \in \overline{M}_{\rm bf}$, luego existe un $S \in M_{\rm bf}$ tal que $\overline{S} = i(S)$. Observemos ahora que "S es un buen orden en X" es una propiedad Π_1, es decir, de la forma $\bigwedge u\, \phi(u, S, X)$, donde ϕ es Δ_0.

Tenemos $\bigwedge u \in M\, \phi^{MR}(u, i(S), i(X))$, luego en particular

$$\bigwedge u \in M_{\rm bf}\, \phi^{MR}(i(u), i(S), i(X))$$

y, como i es Δ_0 elemental, $\bigwedge u \in M_{\rm bf}\, \phi(u, S, X)$, lo que significa que ($S$ es un buen orden en $X)^{M_{\rm bf}}$, y esto implica claramente $\mathrm{AE}^{M_{\rm bf}}$. ■

Más delicado es el caso del axioma de infinitud. En general, la parte bien fundada de un modelo de ZFC no tiene por qué cumplirlo. El axioma de infinitud en $\mathrm{M}_{\rm bf}$ equivale a que $\omega \in \Omega_{\rm bf}^M$ y lo más que podemos hacer es reformular esta condición, para lo cual definimos

$$\omega^M = \{x \in M \mid x \text{ es un número natural}^{MR}\}.$$

Como la fórmula "x es un número natural" es Δ_0 e i es Δ_0-elemental, tenemos que $i[\omega] \subset \omega^M \subset \Omega^M$.

Definición 2.39 Un modelo (M, R) de KP es un *modelo* ω si $i[\omega] = \omega^M$, es decir, si todos sus números naturales son estándar.

Obviamente, todo modelo bien fundado (en particular, todo modelo transitivo) es un modelo ω. Observemos que si M no es un modelo ω, entonces $\Omega_{\mathrm{bf}}^M = \omega$, pues si $\omega \in \Omega_{\mathrm{bf}}^M$, entonces, como la fórmula

$$\phi(x) \equiv x \in \Omega \wedge 0 \in x \wedge \bigwedge n \in x\; n+1 \in x$$

es Δ_0 y $\phi^{M_{\mathrm{bf}}}(\omega)$, concluimos que $\phi^{MR}(i(\omega))$. Pero

$$(M, R) \vDash \bigwedge x\, (\phi(x) \rightarrow \bigwedge n\, (n \text{ es un número natural} \rightarrow n \in x),$$

pues la sentencia es un teorema de KP, luego $\omega^M \subset e_M(i(\omega)) = i[\omega]$, contradicción.

Así pues, para que M_{bf} pueda cumplir AI es necesario que M sea un modelo ω. La condición es claramente suficiente (siempre y cuando M satisfaga AI, por supuesto):

Teorema 2.40 *Si* (M, R) *es un modelo* ω *de* KP + AI, *entonces* M_{bf} *es un modelo transitivo de* KP + AI.

Demostración: Que M satisfaga AI equivale a que existe un $w \in M$ tal que $e_M(w) = \omega^M$. Como $\omega^M = i[\omega]$, resulta que $e_M(w) \subset \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, luego $w \in \overline{M}_{\mathrm{bf}}$, luego existe un ordinal $\alpha \in \Omega_{\mathrm{bf}}^M$ tal que $i(\alpha) = w$, luego

$$i[\alpha] = e_M(i(\alpha)) = e_M(w) = i[\omega],$$

luego $\omega = \alpha \in \Omega_{\mathrm{bf}}^M$, luego $M_{\mathrm{bf}} \vDash$ AI. ■

Así pues, si (M, R) es un modelo ω de ZFC, podemos asegurar que su parte bien fundada M_{bf} satisface KP más los axiomas de infinitud, partes y elección (y, de hecho, satisface también el axioma de los rangos).

Nota Por el segundo teorema de incompletitud de Gödel, de la existencia de un modelo de ZFC no puede deducirse la existencia de un modelo ω de ZFC (salvo que ZFC + Consis ZFC sea contradictorio). Esbozamos la prueba: si es consistente ZFC + Consis ZFC, también lo es

$$\mathrm{ZFC} + \mathrm{Consis\,ZFC} + \neg\,\mathrm{Consis}(\mathrm{ZFC} + \mathrm{Consis\,ZFC})$$

y en esta teoría existe un modelo (M, R) de ZFC, pero no existen modelos de ZFC + Consis ZFC, luego en todo modelo de ZFC se cumple $\neg$ Consis ZFC, y eso implica que no es un modelo ω. Por lo tanto, si en esta teoría no puede construirse un modelo ω de ZFC a partir de un modelo de ZFC, en ZFC tampoco. ■

Capítulo III

Constructibilidad

Aquí presentaremos la clase L de los conjuntos constructibles, el modelo interno de ZFC con el que Gödel demostró la consistencia del axioma de elección y de la hipótesis del continuo generalizada, aunque la importancia de este modelo, tanto desde un punto de vista teórico como a la hora de obtener más pruebas de consistencia, va mucho más allá de estos resultados.

El hecho de que, a partir de los axiomas de ZFC, no pueda concretarse el cardinal de $\mathcal{P}\omega$, o que no pueda demostrarse que existe un buen orden en $\mathcal{P}\omega$ sin la ayuda de AE, son dos consecuencias de que, en realidad, el operador $\mathcal{P}x$ carece de un significado específico. Por mucho que podamos decir que "conocemos bien" un conjunto x, como es el caso de ω, no por ello podemos decir que sepamos qué contiene $\mathcal{P}x$. La expresión "todos los subconjuntos de x" es una expresión hueca y sólo adquiere un significado concreto si postulamos la existencia de una clase universal V y entendemos que $\mathcal{P}x$ está formada por los elementos de V que tienen la propiedad de estar contenidos en x, pero no es x, sino V, quien determina $\mathcal{P}x$.

Esto hace que, aunque a primera vista, la jerarquía regular

$$V_0 = \varnothing, \quad V_{\alpha+1} = \mathcal{P}V_\alpha, \quad V_\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} V_\delta, \quad V = \bigcup_{\alpha\in\Omega} V_\alpha$$

"determina" la clase de todos los conjuntos, en el sentido de que "construye" la totalidad de los conjuntos a partir del conjunto vacío, esto es una mera apariencia. En realidad lo es por un doble motivo. En primer lugar, porque presupone ya la clase Ω de todos los ordinales, pero también porque, aunque los primeros niveles de la jerarquía, hasta V_ω inclusive, están completamente determinados, ya no podemos decir lo mismo de $V_{\omega+1} = \mathcal{P}V_\omega$. No podemos considerar como una "auténtica definición" que $V_{\alpha+1}$ contiene todos los conjuntos formados por elementos "ya construidos", es decir, elementos de V_α, porque lo de "todos los conjuntos" no significa nada si no es en relación a una clase V previamente fijada. Así, no construimos V a partir de los V_α, sino que estamos haciendo referencia a V para construir cada nivel $V_{\alpha+1}$.

Pese a ello, la jerarquía regular impone una cierta estructura a la clase universal, una estructura que no tendría por qué tener en ausencia del axioma de regularidad. La idea de Gödel es imponer una estructura "más fina" mediante una jerarquía alternativa:

$$L_0 = \varnothing, \quad L_{\alpha+1} = \mathcal{PD}L_\alpha, \quad L_\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} L_\delta, \quad L = \bigcup_{\alpha\in\Omega} L_\alpha,$$

en la que la diferencia es la forma en que se pasa de cada L_α a $L_{\alpha+1}$. En lugar de considerar "todos" los subconjuntos de L_α (lo que implícitamente supone conocer ya V para especificar los subconjuntos de L_α) definimos $L_{\alpha+1}$ como el conjunto de "partes definibles" de L_α, que consiste en todos los subconjuntos que pueden especificarse a partir de L_α mediante una fórmula que no haga referencia a nada externo a L_α. En general, el conjunto $\mathcal{PD}X$ de las partes definibles de un conjunto X está formado por todos los conjuntos de la forma

$$\{u \in X \mid X \vDash \phi[u, x_1, \ldots, x_n]\},$$

donde $n \in \omega$, $\phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$ y $x_1, \ldots, x_n \in X$. Notemos que, al usar $\vDash$, las variables ligadas de ϕ se interpretan recorriendo únicamente los elementos de X, luego para especificar de este modo un subconjunto de X no es necesario conocer nada externo a X, y los conjuntos así definidos son los que son, uno para cada fórmula ϕ y cada elección de parámetros en X (sin perjuicio de que un mismo conjunto admita definiciones distintas), por lo que sí que podemos decir que, por ejemplo, $\mathcal{PD}\omega$ o $\mathcal{PD}L_\omega$ son conjuntos perfectamente determinados.

La clase L construida de este modo es la clase de los conjuntos constructibles, y demostraremos que es un modelo de ZFC más el axioma de constructibilidad $V = L$, de modo que, si ZF es consistente, también lo es añadir como axioma que todo conjunto es constructible, y ello supone precisar un poco más lo que entendemos por conjunto. Seguimos sin poder decir que la jerarquía constructible determina unívocamente unos objetos a los que llamar "conjuntos", pero ahora ello se debe a que haría falta precisar de algún modo (y no es posible hacerlo) qué hay que entender por L_{ω_1}, pero no tenemos ninguna descripción "tangible" de los ordinales que hay que recorrer hasta llegar a ω_1. Sin embargo, como veremos, la precisión que supone restringir el concepto indeterminado de "conjunto" por el mejor precisado de "conjunto constructible" es suficiente para demostrar el axioma de elección y la hipótesis del continuo generalizada.

3.1 Definibilidad

Dedicamos esta primera sección a introducir y estudiar el concepto de "partes definibles" del que acabamos de hablar. Es importante que cuanto vamos a hacer aquí se puede formalizar en KPI o, alternativamente, en ZF−AP.

Tal y como hemos explicado, queremos que las partes definibles de un conjunto X sean sus subconjuntos definibles mediante una fórmula (con posibles parámetros) sin hacer referencia a nada externo a X. Sin embargo, conviene trabajar en un contexto ligeramente más general que nos permita, opcionalmente, tener en cuenta alguna información "externa" a X.

Para ello vamos a considerar el lenguaje formal $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}^+$ que resulta de añadirle a $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ un relator monádico R, de modo que un modelo natural de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ vendrá determinado por un par de conjuntos (X, A), donde X es el universo del modelo y el relator R se interpreta como la pertenencia a A. No exigimos que $A \subset X$, pero lo cierto es que (X, A) y $(X, X \cap A)$ determinan el mismo modelo de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}^+$.

Es inmediato que la relación $M \vDash \phi[s]$ que hemos considerado en los capítulos anteriores, donde $\phi \in \mathrm{Form}^n(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$ y $s \in M^n$, se puede modificar trivialmente para convertirla en $(X, A) \vDash \phi[s]$, donde ahora la fórmula ϕ puede incorporar el nuevo relator R, y todo lo dicho vale igualmente (como que se trata de una fórmula Δ_1).

Relaciones definibles Definimos las *relaciones definibles* en un conjunto X respecto de un conjunto A como las relaciones de la forma[1]

$$S(X, A, n, \phi) = \{s \in X^n \mid (X, A) \vDash \phi[s]\},$$

donde $n \in \omega$ y $\phi \in \mathrm{Form}^n(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}^+)$ es una fórmula de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}^+$ cuyas variables libres están entre $x_0, \ldots, x_{n-1}$. A su vez definimos[2]

$$\mathrm{Df}_A(X, n) = \{S(X, A, n, \phi) \mid \phi \in \mathrm{Form}^n(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}^+)\}.$$

Abreviaremos $\mathrm{Df}(X, n) \equiv \mathrm{Df}_\varnothing(X, n)$.

Si estuviéramos trabajando en ZF, podríamos justificar la existencia de $\mathrm{Df}_A(X, n)$ por especificación a partir de $\mathcal{P}X^n$, pero en ZF−AP podemos usar el axioma de reemplazo, que nos da, de hecho, una aplicación suprayectiva $\mathrm{Form}^n(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}^+) \longrightarrow \mathrm{Df}_A(X, n)$.

Esto vale también en KPI por Σ_1-reemplazo, ya que

$$S = S(X, A, n, \phi) \leftrightarrow (n \in \omega \land \phi \in \mathrm{Form}^n(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}^+) \land \bigvee Z(Z = X^n \land S \subset Z \land$$
$$\bigwedge s \in Z(s \in S \leftrightarrow (X, A) \vDash \phi[s]))) \lor ((n \notin \omega \lor \phi \notin \mathrm{Form}^n(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}^+)) \land S = \varnothing)$$

es una fórmula Σ_1.

Más aún, el término $\mathrm{Df}_A(X, n)$ es Δ_1, tanto en KPI como en ZF−AP, pues

$$Y = \mathrm{Df}_A(X, n) \leftrightarrow n \in \omega \land \bigvee H\,(H = H_{X,A} \land \bigwedge S \in Y \bigvee \alpha \in \omega^{<\omega}($$
$$S \subset X^{<\omega} \land \alpha \in \mathrm{Form}^n(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}^+) \land \bigwedge s \in X^{<\omega}(s \in S \leftrightarrow \ell(s) = n \land H(\alpha, s) = 1)$$
$$\land \bigwedge \alpha \in \omega^{<\omega}(\alpha \in \mathrm{Form}^n(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}^+) \to \bigvee S \in Y \bigwedge s \in X^{<\omega}$$
$$(s \in S \leftrightarrow \ell(s) = n \land H(\alpha, s) = 1))).$$

---

[1]En KPI la existencia de $S(X, A, n, \phi)$ se justifica por Δ_1-especificación a partir de X^n.

[2]Con el convenio de que $(\varnothing, A) \vDash \phi[s]$ es trivialmente verdadera, tenemos que

$$S(\varnothing, A, n, \phi) = \varnothing \text{ si } n > 0, \quad S(\varnothing, A, 0, \phi) = \{\varnothing\},$$

luego $\mathrm{Def}_A(\varnothing, n) = \{\varnothing\}$ para $n > 0$ y $\mathrm{Def}_A(\varnothing, 0) = \{\{\varnothing\}\}$.

Aquí hemos usado la fórmula $H = H_{X,A}$, que es la análoga a la fórmula $H = H_{M,R}$ considerada en el teorema 1.3, salvo que eliminamos la relación R que interpreta al relator de pertenencia y añadimos el conjunto A que interpreta al relator adicional de $\mathcal{L}_{\text{tc}}^{+}$. Tenemos entonces que la fórmula tras $\bigvee H$ es Δ_0 en los parámetros ω, $\omega^{<\omega}$, $(\omega^{<\omega})^{<\omega}$, $X^{<\omega}$, luego el término $\mathrm{Df}_A(X,n)$ es Σ_1 y, por consiguiente, Δ_1.

El teorema siguiente es ahora inmediato:

Teorema 3.1 *Si n es un número natural y $\phi(x_0,\ldots,x_n)$ es una fórmula metamatemática, y X y A son conjuntos cualesquiera,*

$$\{s \in X^{n+1} \mid \phi^X(s_0,\ldots,s_n)\} \in \mathrm{Df}_A(X,n+1).$$

También es claro que $\mathrm{Df}_A(X,n) = \mathrm{Df}_{A\cap X}(X,n)$, pues A sólo interviene en la definición a través del modelo determinado por (X,A), que es el mismo que el modelo determinado por $(X, A\cap X)$.

Notemos también que la aplicación $\mathrm{Form}^n(\mathcal{L}_{\text{tc}}^{+}) \longrightarrow \mathrm{Df}_A(X,n)$ determinada por $\phi \mapsto S(X,A,n,\phi)$ es suprayectiva y prueba que $\mathrm{Df}_A(X,n)$ es siempre un subconjunto numerable de X^n.

Partes definibles Ya estamos en condiciones de definir el conjunto de las partes definibles de un conjunto dado. En primer lugar, dados conjuntos X y A, un $n\in\omega$, un $s \in X^n$ y una relación $S \in \mathrm{Def}_A(X,n+1)$, definimos

$$x(X,n,s,S) = \{u \in X \mid s\cup\{(n,u)\} \in S\}.$$

Notemos que la definición es válida en KPI por Δ_0-especificación. Por definición de $\mathrm{Def}_A(X,n)$, existe una fórmula $\phi \in \mathrm{Form}^{n+1}(\mathcal{L}_{\text{tc}}^{+})$ tal que

$$t \in S \leftrightarrow (X,A) \vDash \phi[t],$$

luego

$$x(X,n,s,S) = \{u \in X \mid (X,A) \vDash \phi[s_1,\ldots,s_n,u]\}.$$

Vemos, pues, que $x(X,n,s,S)$ es el subconjunto de X definido por la fórmula ϕ que determina la relación S con parámetros $s \in X^n$.

Esto nos lleva a definir el conjunto de las *partes definibles* de un conjunto X respecto de un conjunto A como[3]

$$\mathcal{PD}_A X = \{x(X,n,s,S) \mid n \in \omega \land s \in X^n \land S \in \mathrm{Df}_A(X,n+1)\}.$$

Abreviaremos $\mathcal{PD}X \equiv \mathcal{PD}_{\varnothing}X$.

Notemos que $\mathrm{Df}(X,n)$ y $\mathcal{PD}X$ pueden definirse directamente trabajando con $\mathcal{L}_{\text{tc}}$ en lugar de $\mathcal{L}_{\text{tc}}^{+}$ y omitiendo toda referencia al conjunto A.

[3]Con los convenios que hemos adoptado resulta que $\mathcal{PD}\varnothing = \{\varnothing\} = \mathcal{P}\varnothing$.

Observemos que en ZF−AP la existencia de $\mathcal{PD}_A X$ está justificada por el axioma de reemplazo, que nos da una aplicación suprayectiva

$$\bigcup_{n\in\omega}(X^n \times \mathrm{Df}_A(X, n+1)) \longrightarrow \mathcal{PD}_A X.$$

Lo mismo vale en KPI previa comprobación de que podemos aplicar Σ_1-reemplazo. En efecto, se comprueba sin dificultad que el término

$$\{n\} \times X^n \times \mathrm{Df}_A(X, n+1)$$

es Δ_1, lo que permite definir por Σ_1-reemplazo el conjunto

$$\{\{n\} \times X^n \times \mathrm{Df}_A(X, n+1) \mid n \in \omega\},$$

cuya unión es el conjunto

$$D = \{(n, s, S) \mid n \in \omega \wedge s \in X^n \wedge S \in \mathrm{Df}_A(X, n+1)\}.$$

Observamos que

$$y = x(X, n, s, S) \leftrightarrow \bigwedge u \in y(u \in X \wedge s \cup \{(n, u)\} \in S) \wedge$$
$$\bigwedge u \in X(s \cup \{(n, u)\} \in S \rightarrow u \in y\}),$$

de donde se sigue que el término $x(M, n, s, S)$ es Δ_1 (aunque no es difícil ver que en realidad es Δ_0). Por consiguiente, podemos aplicar Σ_1-reemplazo para definir

$$\mathcal{PD}_A X \equiv \{x(X, n, s, A) \mid (n, s, S) \in D\}.$$

Veamos ahora que el término $\mathcal{PD}_A X$ es Δ_1 tanto en KPI como en ZF−AP. En efecto,

$$Y = \mathcal{PD}_A X \leftrightarrow \bigvee H(H = H_{X,A} \wedge \bigwedge y \in Y \bigvee n \in \omega \bigvee \alpha \in \omega^{<\omega} \bigvee s \in X^{<\omega}$$
$$(\alpha \in \mathrm{Form}^{n+1}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}) \wedge \ell(s) = n \wedge y \subset X \wedge$$
$$\bigwedge u \in X(u \in y \leftrightarrow H(\alpha, s \cup \{(n, u)\}) = 1) \wedge \bigwedge n \in \omega \bigwedge \alpha \in \omega^{<\omega} \bigwedge s \in X^{<\omega}$$
$$(\alpha \in \mathrm{Form}^{n+1}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}^+) \wedge \ell(s) = n \rightarrow$$
$$\bigvee y \in Y \bigwedge u \in X(u \in y \leftrightarrow H(\alpha, s \cup \{(n, u)\}) = 1))).$$

La fórmula tras $\bigvee H$ es Δ_0 en los parámetros ω, $\omega^{<\omega}$, $(\omega^{<\omega})^{<\omega}$, $X^{<\omega}$, luego el término $\mathcal{PD}_A X$ es Σ_1 y, por consiguiente, Δ_1.

Es inmediato que los subconjuntos de un conjunto X definibles metamatemáticamente mediante una fórmula (relativizada a X) están en el conjunto de partes definibles:

Teorema 3.2 *Si $\phi(x_0, \ldots, x_n)$ es una fórmula metamatemática, X, A son conjuntos arbitrarios y $a_1, \ldots, a_n \in X$, entonces*

$$\{u \in X \mid \phi^X(u, a_1, \ldots, a_n)\} \in \mathcal{PD}_A(X).$$

También es claro que $\mathcal{PD}_A X = \mathcal{PD}_{A\cap M} X$.

Veamos algunas propiedades adicionales del conjunto de partes definibles:

Teorema 3.3 *Sean X y A dos conjuntos cualesquiera. Entonces*

a) $[X]^{<\omega} \subset \mathcal{PD}_A X \subset \mathcal{P}X$.

b) $X \in \mathcal{PD}_A X$.

c) $X \cap A \in \mathcal{PD}_A X$.

d) Si X es transitivo, entonces $X \subset \mathcal{PD}_A X$, luego $\mathcal{PD}_A X$ es transitivo.

e) Si X es finito entonces $\mathcal{PD}_A X = \mathcal{P}X$.

f) [ZFC] *Si X es infinito, entonces $|\mathcal{PD}_A X| = |X|$.*

Demostración: a) La inclusión $\mathcal{PD}_A X \subset \mathcal{P}X$ es inmediata, aunque cabe observar que sin suponer AP la clase $\mathcal{P}X$ no es necesariamente un conjunto, mientras que $\mathcal{PD}_A X$ sí que lo es. Por otra parte, si $x \subset X$ es finito, sea $s \in X^n$ una enumeración de x. Entonces

$$x = \{u \in X \mid (X, A) \vDash [u] = [s(0)] \vee \cdots \vee [u] = [s(n-1)]\} \in \mathcal{PD}_A X.$$

b) Por 3.2 tenemos que $X = \{u \in X \mid u = u\} \in \mathcal{PD}_A X$.

c) $X \cap A = \{u \in X \mid (X, A) \vDash R[u]\} \in \mathcal{PD}_A X$.

d) Por 3.2, si $x \in X$ entonces $x = \{u \in X \mid u \in x\} \in \mathcal{PD}_A X$.

e) es consecuencia inmediata de a).

f) Por construcción tenemos una aplicación suprayectiva

$$f : \bigcup_{n\in\omega} (X^n \times \mathrm{Df}_A(X, n)) \longrightarrow \mathcal{PD}_A X,$$

la que a cada $(s, S) \in X^n \times \mathrm{Df}_A(X, n)$ le asigna $s(X, n, s, S)$, con lo que

$$|\mathcal{PD}_A X| \leq \sum_{n\in\omega} |X^n||\mathrm{Df}_A(X, n)| = |X|.$$

La desigualdad opuesta se sigue de que $[X]^{<\omega} \subset \mathcal{PD}_A X$. ∎

Ejercicio: Probar que $\mathcal{PD}_A X$ es un álgebra de subconjuntos de X.

Ordenación de $\mathcal{PD}_A X$ Sin el axioma de elección, que un conjunto X admita un buen orden no implica que lo mismo valga para $\mathcal{P}X$. Sin embargo, vamos a probar a continuación que un buen orden en un conjunto X induce explícitamente un buen orden en $\mathcal{PD}_A X$. Este hecho será la clave para demostrar la consistencia del axioma de elección.

Consideramos en $\omega^{<\omega}$ el buen orden en el que dos sucesiones se comparan comparando el primer término en el que difieren, es decir:

$$s \leq_0 t \leftrightarrow s \subset t \lor \bigvee i(i \in \ell(s) \land i \in \ell(t) \land \bigwedge j < i\; s(j) = t(j) \land s(i) < t(i)).$$

Ciertamente es un buen orden, y la fórmula $s \leq_0 t$ es Δ_1. De hecho, es Δ_0 con parámetros ω, $\omega^{<\omega}$.

Del mismo modo, si $\leq$ es un buen orden en X, la relación en $X^{<\omega}$ dada por

$$s \leq_X^* t \leftrightarrow s \subset t \lor \bigvee i(i \in \ell(s) \land i \in \ell(t) \land \bigwedge j < i\; s(j) = t(j) \land s(i) < t(i))$$

es un buen orden, y la fórmula $s \leq_X^* t$ (con cuatro variables libres, s, t, X y $\leq$) es Δ_0 con parámetros ω y $X^{<\omega}$.

Si $\leq$ es un buen orden en X, podemos definir un buen orden en $\mathcal{PD}_A X$ como sigue:

Para cada $y \in \mathcal{PD}_A X$, podemos considerar el mínimo $\alpha \in \omega^{<\omega}$ (respecto del buen orden $\leq_0$) tal que α es una fórmula de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}^+$ que define a y con una cierta sucesión de parámetros $s \in X^{<\omega}$. A su vez, podemos considerar el mínimo s (respecto de $\leq_X^*$) que define a y mediante la fórmula α. Dados dos elementos $y, z \in \mathcal{PD}_A X$, establecemos que $y \leq_{X,A}^{**} z$ si la mínima fórmula α que define a y es estrictamente menor que la mínima fórmula que define a β o, en caso de que sean iguales, si la mínima sucesión de parámetros que define a y es menor o igual que la mínima sucesión de parámetros que define a z. Es claro que de este modo obtenemos un buen orden, y sigue siéndolo si hacemos un pequeño retoque:

Definimos $y \leq_{X,A} z$ como la relación sobre $\mathcal{PD}_A X$ que sobre los elementos de $X \cap \mathcal{PD}_A X$ coincide con la relación dada $\leq$, sobre los elementos de $\mathcal{PD}_A X \setminus X$ coincide con la relación $y \leq_{X,A}^{**} z$ que acabamos de definir y que establece que cualquier elemento de $X \cap \mathcal{PD}_A X$ es anterior a cualquier elemento de $\mathcal{PD}_A X \setminus X$.

El lector no debería necesitar el desarrollo explícito de esta definición (que sería bastante farragoso) para convencerse de que la fórmula $y \leq_{X,A} z$ (con cinco variables libres, incluida $\leq$) es Δ_0 en los parámetros

$$\omega, \quad \omega^{<\omega}, \quad (\omega^{<\omega})^{<\omega}, \quad X^{<\omega}, \quad H_{X,A}, \quad \mathcal{PD}_A X,$$

es decir, que cualquiera de las variables necesarias para definirla y que no pueda acotarse por ninguna otra variable, puede acotarse con uno de estos parámetros. Por lo tanto, se trata de una fórmula Δ_1 (tanto en KPI como en ZF−AP).

Más aún, podemos definir (por Δ_1-especificación en el caso de KPI) el conjunto

$$\leq_{X,A} \; = \{(y,z) \in \mathcal{PD}_A X \times \mathcal{PD}_A X \mid y \leq_{X,A} z\},$$

de modo que

$$R = \ \leq_{X,A} \ \leftrightarrow R \subset \mathcal{PD}_A X \times \mathcal{PD}_A X \land \bigwedge yz \in \mathcal{PD}_A X((y,z) \in R \leftrightarrow y \leq_{X,A} z),$$

con lo que el término $\leq_{X,A}$ es Δ_0 en los mismos parámetros indicados antes y, por consiguiente, es Δ_1. En resumen, tenemos lo siguiente:

Teorema 3.4 *Existe un término $\leq_{X,A}$ con tres variables libres, de tipo Δ_1, tal que si $(X, \leq)$ es un conjunto transitivo bien ordenado, entonces $\leq_{X,A}$ es un buen orden en $\mathcal{PD}_A X$ respecto al cual X es una sección inicial de $\mathcal{PD}_A X$.*

3.2 La jerarquía constructible

Finalmente podemos definir la clase de los conjuntos constructibles. Es importante que la construcción es válida en KPI o, al menos, en ZF−AP:

Definición 3.5 Para cada conjunto A definimos la jerarquía de los *conjuntos constructibles* respecto de A como la sucesión transfinita dada por

$$L_0[A] = \varnothing \land \bigwedge\alpha\ L_{\alpha+1}[A] = \mathcal{PD}_A L_\alpha[A] \land \bigwedge\lambda\ L_\lambda[A] = \bigcup_{\delta<\lambda} L_\delta[A].$$

La clase de los *conjuntos constructibles* respecto de A es

$$L[A] = \bigcup_\alpha L_\alpha[A].$$

En el caso $A = \varnothing$ escribiremos simplemente[4] $L_\alpha = L_\alpha[\varnothing]$ y $L = L[\varnothing]$.

Notemos que la definición recurrente de $L[A]$ es obviamente correcta en ZF−AP, pero también en KPI, pues en este caso podemos aplicar el teorema de Σ_1-recursión [LM 12.7] a la función Σ_1 dada por

$$Y = G(\alpha, f) \leftrightarrow (\alpha = 0 \land Y = \varnothing) \lor \bigvee\beta \in \alpha\ (\alpha = \beta \cup \{\beta\} \land Y = \mathcal{PD}_A f(\beta))$$
$$\lor\ (\alpha \text{ es un límite} \land Y = \bigcup_{\delta<\alpha} f(\delta)).$$

Dicho teorema nos garantiza además que la fórmula $Y = L_\alpha[A]$ es Σ_1, luego Δ_1. La clase $L[A]$ es Σ_1, en el sentido de que lo es la fórmula $x \in L[A]$, pues equivale a $\bigvee\alpha(\alpha \in \Omega \land x \in L_\alpha[A])$.

Luego demostraremos que todo esto es válido también en ZF−AP, pero antes conviene conocer las propiedades básicas de la jerarquía constructible:

Teorema 3.6 *Si A es un conjunto arbitrario, se cumple:*

a) $L_\alpha[A]$ *es un conjunto transitivo.*

b) $L[A]$ *es una clase transitiva.*

[4]Alternativamente, para definir la clase L podríamos haber definido los conjuntos $\mathrm{Df}(X, n)$ y $\mathcal{PD}X$ usando el lenguaje $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ sin añadirle el relator R y sin mencionar ningún conjunto A.

c) *Si* $\alpha \leq \beta$, *entonces* $L_\alpha[A] \subset L_\beta[A]$.

d) $[L_\alpha[A]]^{<\omega} \subset L_{\alpha+1}[A] \subset \mathcal{P}L_\alpha[A]$.

e) $L_\alpha[A] \in L_{\alpha+1}[A]$.

f) $L_\alpha[A] \subset V_\alpha$.

g) $\bigwedge n \in \omega\ L_n[A] = V_n$.

h) $L_\omega[A] = V_\omega$.

i) $L_\alpha[A] \cap \Omega = \alpha$.

j) $\Omega \subset L[A]$.

k) *Si* $\bar{A} = A \cap L[A]$, *entonces*[5] $L_\alpha[A] = L_\alpha[\bar{A}]$, $L[\bar{A}] = L[A]$ *y* $\bar{A} \in L[A]$.

DEMOSTRACIÓN: a) Se prueba trivialmente por inducción sobre α teniendo en cuenta 3.3 d). b) es consecuencia inmediata de a).

c) se prueba por inducción, usando que, como el conjunto $L_\alpha[A]$ es transitivo, $L_\alpha[A] \subset \mathcal{P}\mathcal{D}_A L_\alpha[A] = L_{\alpha+1}[A]$, también por 3.3 d).

d) Por 3.3 a).

e) Por 3.3 b).

f) se prueba trivialmente por inducción.

g) Por inducción sobre n. Si es cierto para n, entonces en particular $L_n[A]$ es finito, luego, por 3.3 e), $L_{n+1}[A] = \mathcal{P}\mathcal{D}_A L_n[A] = \mathcal{P}V_n = V_{n+1}$.

h) es consecuencia inmediata de la propiedad anterior.

i) Por inducción sobre α. Es trivialmente cierto para $\alpha = 0$. Si vale para α, entonces todo $\beta \in L_{\alpha+1}[A] \cap \Omega$ cumple $\beta \subset L_\alpha[A] \cap \Omega = \alpha$, luego $\beta \leq \alpha$. Por otra parte,

$$\alpha = \{x \in L_\alpha[A] \mid (L_\alpha[A], A) \vDash [x] \text{ es un ordinal}\} \in \mathcal{P}\mathcal{D}_A L_\alpha[A] = L_{\alpha+1}[A],$$

y también $\alpha \subset L_\alpha[A] \subset L_{\alpha+1}[A]$, luego $L_{\alpha+1}[A] \cap \Omega = \alpha + 1$. El caso límite es inmediato.

j) es inmediato a partir de la propiedad anterior.

k) La primera propiedad se demuestra trivialmente por inducción sobre α. Basta observar que si vale para α, entonces, como $A \cap L_\alpha[A] = \bar{A} \cap L_\alpha[A]$, tenemos que

$$L_{\alpha+1}[A] = \mathcal{P}\mathcal{D}_A L_\alpha[A] = \mathcal{P}\mathcal{D}_{\bar{A}} L_\alpha[A] = \mathcal{P}\mathcal{D}_{\bar{A}} L_\alpha[\bar{A}] = L_{\alpha+1}[\bar{A}].$$

[5]Notemos que en KPI no podemos probar que exista el conjunto $\bar{A} = \{x \in A \mid x \in L[A]\}$, pues la fórmula $x \in L[A]$ es Σ_1, pero no Δ_1 y no podemos aplicar Δ_1-especificación. Por lo tanto, la existencia de $\bar{A}$ debe tomarse como hipótesis.

La igualdad $L[\bar{A}] = L[A]$ es consecuencia inmediata de la propiedad que acabamos de probar. Para probar que $\bar{A} \in L[A]$ usamos que

$$\bigwedge x \in \bar{A} \bigvee \alpha \; x \in L_\alpha[A].$$

Como la fórmula $x \in L_\alpha[A]$ es Σ_1, en KPI podemos usar Σ_1-recolección para concluir que existe un ordinal β tal que

$$\bigwedge x \in \bar{A} \bigvee \alpha \in \beta \; x \in L_\alpha[A]$$

o, lo que es lo mismo, $\bar{A} \subset L_\beta[A]$. (En ZF podemos asociar a cada $x \in \bar{A}$ el mínimo α tal que $x \in L_\alpha[A]$ y aplicar el axioma de reemplazo para llegar a la misma conclusión.) Finalmente, por 3.3 c),

$$\bar{A} = L_\beta[A] \cap A \in \mathcal{PD}_A L_\beta[A] = L_{\beta+1}[A] \subset L[A].$$

■

Ya hemos indicado que el término $L_\alpha[A]$ es Δ_1 en KPI. El apartado a) del teorema siguiente prueba lo mismo mediante un argumento general válido también en ZF−AP. El apartado b) aprovecha las comprobaciones del apartado precedente para extraer la máxima información posible sobre la complejidad de la definición de $L_\alpha[A]$. En esencia, afirma que $L_\alpha[A]$ es Δ_0 en un parámetro contenido en cualquier $L_\lambda[A]$ posterior, de modo que alguien que "viva" en $L_\lambda[A]$ tiene elementos suficientes para reconocer todos los $L_\alpha[A]$ con $\alpha < \lambda$. Se trata de un resultado técnico que el lector puede omitir en una primera lectura.[6]

Teorema 3.7 *Existe una fórmula $\phi(f, Y, \alpha, A)$ de tipo Δ_0, en la que la variable A sólo aparece en subfórmulas de tipo $x \in A$, de modo que tanto en* KPI *como en* ZF−AP *se demuestra:*

a) $Y = L_\alpha[A] \leftrightarrow \bigvee f \, \phi(f, Y, \alpha, A)$.

b) Si $\alpha < \lambda$ y $\lambda > \omega$, entonces $Y = L_\alpha[A] \leftrightarrow \bigvee f \in L_\lambda[A] \, \phi(f, Y, \alpha, A)$.

Demostración: En la sección precedente hemos visto que

$$Y = \mathcal{PD}_A X \leftrightarrow \bigvee H \, \psi(H, Y, X, A, \omega, \omega^{<\omega}, (\omega^{<\omega})^{<\omega}, X^{<\omega}),$$

donde ψ es Δ_0 y, cuando se cumple esto, necesariamente $H = H_{X,A}$. También es fácil ver que A sólo aparece en subfórmulas de tipo $x \in A$ (pues sólo se usa para interpretar el relator adicional de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}^+$ como la pertenencia a A). Ahora,

$$Y = L_\alpha[A] \leftrightarrow \bigvee h (h : \alpha + 1 \longrightarrow V \wedge h(0) = \varnothing \wedge \bigwedge \delta \in \alpha \; h(\delta + 1) = \mathcal{PD}_A h(\delta)$$
$$\wedge \bigwedge \lambda \in \mathcal{D}h \; h(\lambda) = \bigcup_{\delta<\lambda} h(\delta) \wedge h(\alpha) = Y).$$

[6]Para seguir los resultados básicos sobre constructibilidad, el lector que no esté familiarizado con KPI también puede omitir en una primera lectura incluso el apartado a) del teorema siguiente, y sustituirlo por la prueba elemental de que el término $L_\alpha[A]$ es absoluto para modelos transitivos de ZF−AP. Esto se demuestra trivialmente por inducción sobre α sin más que tener en cuenta que el término $\mathcal{PD}_A X$ es absoluto, pues ya hemos visto que es Δ_1.

La estructura de esta fórmula es la siguiente:

$$Y = L_\alpha[A] \leftrightarrow \bigvee hwcs(w = \omega \land c = w^{<\omega} \land s = c^{<\omega} \land [\text{fórmula } \Delta_0] \land \bigwedge \delta \in \alpha$$

$$\bigvee HZ \bigvee X \in \mathcal{R}h(X = h(\delta) \land Z = X^{<\omega} \land \psi(H, h(\delta+1), h(\delta), A, s, c, Z))).$$

La fórmula $Z = X^{<\omega}$ es Σ_1, y concretamente [LM A.3] es de la forma

$$Z = X^{<\omega} \leftrightarrow \bigvee Pw(w = \omega \land [\text{fórmula } \Delta_0]),$$

donde, necesariamente, $P = \{X^n\}_{n\in\omega}$, luego

$$Y = L_\alpha[A] \leftrightarrow \bigvee hwcs(w = \omega \land c = w^{<\omega} \land s = c^{<\omega} \land [\text{fórmula } \Delta_0] \land$$

$$\bigwedge \delta \in \alpha \bigvee HZP([\text{fórmula } \Delta_0])),$$

de modo que, si se cumple esto, necesariamente las variables no acotadas son

$$h = \{L_\delta[A]\}_{\delta\leq\alpha}, \quad w = \omega, \quad c = \omega^{<\omega}, \quad s = (\omega^{<\omega})^{<\omega}, \quad H = H_{L_\delta[A],A},$$

$$Z = L_\delta[A]^{<\omega}, \quad P = \{L_\delta[A]^n\}_{n\in\omega}.$$

Más aún, la variable Z sólo se ha introducido para acotar variables, por lo que sólo aparece en la fórmula en cuantificaciones de tipo $\bigwedge x \in Z$ o bien $\bigvee x \in Z$, las cuales pueden sustituirse por

$$\bigwedge n \in w \bigwedge x \in P(n), \qquad \bigvee n \in w \bigvee x \in P(n),$$

por lo que podemos eliminar la variable Z y así llegamos a que

$$Y = L_\alpha[A] \leftrightarrow \bigvee hwcs(w = \omega \land c = w^{<\omega} \land s = c^{<\omega} \land [\text{fórmula } \Delta_0] \land$$

$$\bigwedge \delta \in \alpha \bigvee HP([\text{fórmula } \Delta_0])).$$

La única razón por la que no podemos decir que esta fórmula es Σ_1 es la presencia del cuantificador $\bigwedge \delta \in \alpha$, que nos impide extraer las variables H y P (en KPI esto no sería un inconveniente). Pero podemos hacer lo siguiente:

$$Y = L_\alpha[A] \leftrightarrow \bigvee hwcsF(w = \omega \land c = w^{<\omega} \land s = c^{<\omega} \land [\text{fórmula } \Delta_0] \land$$

$$F : \alpha \longrightarrow V \land \bigwedge \delta \in \alpha \bigvee Q \in F(\delta) \bigvee HP \in Q(F(\delta) = (H, P) \land [\text{fórmula } \Delta_0])),$$

de modo que

$$Y = L_\alpha[A] \leftrightarrow \bigvee hwcsF(w = \omega \land c = w^{<\omega} \land s = c^{<\omega} \land [\text{fórmula } \Delta_0]),$$

donde, si se cumple esto, necesariamente

$$h = \{L_\delta[A]\}_{\delta\leq\alpha}, \quad w = \omega, \quad c = \omega^{<\omega}, \quad s = (\omega^{<\omega})^{<\omega},$$

$$F = \{(H_{L_\delta[A],A}, \{L_\delta[A]^n\}_{n\in\omega})\}_{\delta<\alpha}.$$

Usando de nuevo la expresión de $y = x^{<\omega}$ como fórmula Σ_1 esto se reduce a

$$Y = L_\alpha[A] \leftrightarrow \bigvee hwpqF([\text{fórmula } \Delta_0]),$$

donde, necesariamente, $p = \{\omega^n\}_{n\in\omega}$, $q = \{(\omega^{<\omega})^n\}_{n\in\omega}$, lo que a su vez nos da una expresión de la forma

$$Y = L_\alpha[A] \leftrightarrow \bigvee f([\text{fórmula } \Delta_0]),$$

donde necesariamente f es

$$(\omega, \{\omega^n\}_{n\in\omega}, \{(\omega^{<\omega})^n\}_{n\in\omega}, \{L_\delta[A]\}_{\delta\leq\alpha}, \{H_{L_\delta[A],A}\}_{\delta<\alpha}, \{\{L_\delta[A]^n\}_{n\in\omega}\}_{\delta<\alpha}).$$

Con esto queda probado el apartado a) y, si llamamos f_α a la séxtupla anterior, para probar b) basta demostrar que si $\lambda > \alpha$ y $\lambda > \omega$, entonces $f_\alpha \in L_\lambda[A]$.

En primer lugar, observamos que si $x, y \in L_\delta[A]$, entonces

$$\{x, y\} \in \mathcal{PD}_A L_\delta[A] = L_{\delta+1}[A],$$

luego $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \in L_{\delta+2}[A]$, luego $L_\lambda[A]$ es cerrado para pares ordenados, luego para ternas $(x, y, z) = ((x, y), z)$, y repitiendo el proceso llegamos a que es cerrado para séxtuplas ordenadas. Por lo tanto, basta comprobar que las seis componentes están en $L_\lambda[A]$.

La primera es trivial, pues $\omega \in L_{\omega+1}[A] \subset L_\lambda[A]$.

Para la segunda observamos que $\omega^n \subset L_\omega[A]$ y es claramente definible, luego $\omega^n \in L_{\omega+1}[A]$, luego $(n, \omega^n) \in L_{\omega+3}[A]$, luego $\{\omega^n\}_{n\in\omega} \in L_{\omega+4}[A] \subset L_\lambda[A]$.

Para la tercera observamos que $(\omega^{<\omega})^n \subset L_\omega[A]$, luego $(\omega^{<\omega})^n \in L_{\omega+1}[A]$ y concluimos como en el caso anterior.

Admitamos de momento que $\{L_\delta[A]\}_{\delta\leq\alpha} \in L_\lambda[A]$ y veamos que también $\{\{L_\delta[A]^n\}_{n\in\omega}\}_{\delta<\alpha} \in L_\lambda[A]$.

Sea $\alpha < \epsilon < \lambda$ tal que $\{L_\delta[A]\}_{\delta\leq\alpha} \in L_\epsilon[A]$. Por transitividad $L_\delta[A] \in L_\epsilon[A]$, luego $n \times L_\delta[A] \subset L_{\epsilon+2}[A]$, luego $L_\delta[A]^n \subset L_{\epsilon+3}[A]$, pues cada elemento de $L_\delta[A]^n$ es un subconjunto finito de $L_{\epsilon+2}[A]$. A su vez

$$L_\delta[A]^n = \{s \in L_{\epsilon+3}[A] \mid s : n \longrightarrow L_\delta[A]\} \in L_{\epsilon+4}[A],$$

porque la fórmula que especifica el subconjunto es Δ_0 (con parámetros n y $L_\delta[A]$), luego equivale a su relativización a $L_{\epsilon+3}[A]$. Esto implica a su vez que $(n, L_\delta[A]^n) \in L_{\epsilon+6}[A]$, luego $\{L_\delta[A]^n\}_{n\in\omega} \subset L_{\epsilon+6}[A]$, pero claramente este conjunto es definible en $L_{\epsilon+6}[A]$ con parámetros $L_\delta[A]$ y ω, y así resulta que $\{L_\delta[A]^n\}_{n\in\omega} \in L_{\epsilon+7}[A]$. A su vez, $(\delta, \{L_\delta[A]^n\}_{n\in\omega}) \in L_{\epsilon+9}[A]$, luego

$$\{\{L_\delta[A]^n\}_{n\in\omega}\}_{\delta<\alpha} \subset L_{\epsilon+9}[A].$$

Por último, concluimos que $\{\{L_\delta[A]^n\}_{n\in\omega}\}_{\delta<\alpha} \in L_{\epsilon+10}[A]$ porque se trata de un subconjunto definible de $L_{\epsilon+9}[A]$ con parámetros ω, α y $\{L_\delta[A]\}_{\delta\leq\alpha}$. En efecto, informalmente, la definición es:

$\{\{L_\delta[A]^n\}_{n\in\omega}\}_{\delta<\alpha}$ es el conjunto de todos los $x \in L_{\epsilon+9}[A]$ tales que existen δ, $y \in L_{\epsilon+9}[A]$ de modo que $x = (\delta, y)$, $\delta \in \alpha$, $y : \omega \longrightarrow V$ y, para cada $n \in \omega$, para todo $s \in L_{\epsilon+9}[A]$ se cumple $s \in y(n)$ si y sólo si s es una aplicación de n en el δ-ésimo elemento de $\{L_\delta[A]\}_{\delta\leq\alpha}$.

Ahora sólo falta demostrar que $\{L_\delta[A]\}_{\delta\leq\alpha}, \{H_{L_\delta[A],A}\}_{\delta<\alpha} \in L_\lambda[A]$ para todo $\alpha < \lambda$. Realizamos una doble inducción: suponemos que el resultado es cierto para todo ordinal límite distinto de ω menor que λ, y tenemos que probarlo para λ, y a su vez suponemos que el resultado es cierto para todo $\delta < \alpha$, y tenemos que probarlo para α.

El caso $\alpha = 0$ es trivial. Si vale para α, es decir, si tenemos que

$$\{L_\delta[A]\}_{\delta\leq\alpha}, \quad \{H_{L_\delta[A],A}\}_{\delta<\alpha} \in L_\lambda[A],$$

entonces, puesto que $L_\alpha[A] \in L_\lambda[A]$, también $\{(\alpha, L_\alpha[A])\} \in L_\lambda[A]$. Ahora bien, es claro que si $x, y \in L_\epsilon[A]$, entonces $x \cup y \in L_{\epsilon+1}[A]$, luego concluimos que

$$\{L_\delta[A]\}_{\delta\leq\alpha+1} = \{L_\delta[A]\}_{\delta\leq\alpha} \cup \{(\alpha, L_\alpha[A])\} \in L_\lambda[A].$$

Por el mismo argumento, basta probar que $H_{L_\alpha[A],A} \in L_\lambda[A]$. Tenemos que

$$H_{L_\alpha[A],A} : \omega^{<\omega} \times L_\alpha[A]^{<\omega} \longrightarrow 2.$$

Sabemos que $L_\alpha[A] \in L_\lambda[A]$, y hemos visto más arriba que esto implica que $\{L_\alpha[A]^n\}_{n\in\omega} \in L_\lambda[A]$, luego $L_\alpha[A]^{<\omega} \in L_\lambda[A]$, pues este conjunto es definible a partir del anterior. Por consiguiente $H_{L_\alpha[A],A} \subset L_\epsilon[A]$, para cierto $\epsilon < \lambda$. Podemos suponer que $L_\epsilon[A]$ contiene a ω, $\omega^{<\omega}$, $(\omega^{<\omega})^{<\omega}$ y a $\mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}^+)$, que se especifica mediante una fórmula Δ_0 con los parámetros indicados.

Veamos que para toda $\alpha \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}^+)$ existe un conjunto $C \subset \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}^+)$, cerrado para subfórmulas que contiene a α y de modo la restricción de $H_{L_\alpha[A],A}$ a $C \times L_\alpha[A]^{<\omega}$ está en $L_{\epsilon+1}[A]$. Lo probamos por inducción sobre la longitud de α.

Si α es atómica, por ejemplo de tipo Rx_i, basta tomar $C = \{\alpha\}$ y

$$H = \{x \in L_\epsilon[A] \mid L_\epsilon[A] \vDash \bigvee vk(v \in [L_\alpha[A]^{<\omega}] \wedge k \in [2] \wedge x = ([\alpha], v, k) \wedge$$

$$([i] \notin \mathcal{D}v \wedge k = 1) \vee ([i] \in \mathcal{D}v \wedge (k = 1 \leftrightarrow Rv([i]))))\} \in L_{\epsilon+1}[A].$$

Dejamos al lector los casos $x_i = x_j$ y $x_i \in x_j$, similares al que acabamos de ver, así como los casos $\alpha = \neg\beta$ y $\alpha = \beta \to \gamma$, que son similares al último: $\alpha = \bigwedge x_i\beta$.

Por hipótesis de inducción existe un conjunto C cerrado para subfórmulas que contiene a β y la restricción H de $H_{L_\alpha[A],A}$ a $C \times L_\alpha[A]^{<\omega}$ está en $L_{\epsilon+1}[A]$. Existe, por tanto, $\phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}^+)$ y $s \in L_\epsilon[A]^{<\omega}$ de modo que

$$H = \{x \in L_\epsilon[A] \mid L_\epsilon[A] \vDash \phi[x, s]\}.$$

Sea n el menor natural mayor que los índices de todas las variables libres en α. Observamos que $C' = C \cup \{\alpha\}$ es cerrado para subfórmulas y podemos considerar

$$H' = \{x \in L_\epsilon[A] \mid L_\epsilon[A] \vDash \phi[x, s] \vee \bigvee vk(v \in [L_\alpha[A]^{<\omega}] \wedge k \in [2] \wedge$$
$$x = ([\alpha], v, k) \wedge ([n] \not\subset \mathcal{D}v \wedge k = 1) \vee ([n] \subset \mathcal{D}v \wedge$$
$$(k = 1 \leftrightarrow \bigwedge aw(a \in [L_\alpha[A]] \wedge w = v^a_{[i]} \to \phi[(([\beta], w, 1), s]))))\} \in L_{\epsilon+1}[A],$$

que es la restricción de $H_{L_\alpha[A],A}$ a $C' \times L_\alpha[A]^{<\omega}$.

Con esto ya podemos probar que $H_{L_\alpha[A],A} \in L_{\epsilon+2}[A] \subset L_\lambda[A]$, pues

$$H_{L_\alpha[A],A} = \{x \in L_{\epsilon+1}[A] \mid L_{\epsilon+1}[A] \vDash \bigvee \alpha vk(\alpha \in [\omega^{<\omega}] \wedge v \in [L_\alpha[A]^{<\omega}] \wedge$$
$$k \in [2] \wedge ((\alpha \notin [\mathrm{Form}(\mathcal{L}^+_{\mathrm{tc}})] \wedge k = [1]) \vee (\alpha \in [\mathrm{Form}(\mathcal{L}^+_{\mathrm{tc}})] \wedge$$
$$\bigvee HC(\alpha \in C \wedge \Phi^C_{L_\alpha[A],A} \wedge H(\alpha, v) = k)))))\},$$

donde $\Phi^C_{L_\alpha[A],A}$ es la fórmula Δ_0 dada por[7] el teorema 1.3, con parámetros ω, $\omega^{<\omega}$, $(\omega^{<\omega})^{<\omega}$ y $L_\alpha[A]^{<\omega}$.

Esto termina el segundo paso de la inducción, y falta considerar el caso en que α es un ordinal límite. La hipótesis de inducción es que para todo $\beta < \alpha$ se cumple que $\{L_\delta[A]\}_{\delta\leq\beta}, \{H_{L_\delta[A],A}\}_{\delta<\beta} \in L_\lambda[A]$. Si $\alpha \neq \omega$ la hipótesis de inducción sobre λ nos da que, de hecho, $\{L_\delta[A]\}_{\delta\leq\beta}, \{H_{L_\delta[A],A}\}_{\delta<\beta} \in L_\alpha[A]$. En particular, tenemos que existe un $\epsilon < \lambda$ (en este caso $\epsilon = \alpha$) de modo que, para todo $\beta < \alpha$ se cumple que $\{L_\delta[A]\}_{\delta\leq\beta}, \{H_{L_\delta[A],A}\}_{\delta<\beta} \in L_\epsilon[A]$. Vamos a ver que esto también es cierto si $\alpha = \omega$.

Ciertamente, si $\beta < \omega$ tenemos que $\{L_\delta[A]\}_{\delta\leq\beta} \in L_\omega[A]$, pues se trata de un conjunto finito. Por el mismo motivo, si $\delta < \beta < \omega$ tenemos que $L_\delta[A] \in L_\omega[A]$, $L_\delta[A]^{<\omega} \in L_{\omega+1}[A]$. Por otra parte, $\omega, \omega^{<\omega}, (\omega^{<\omega})^{<\omega} \in L_{\omega+1}[A]$ y además $\mathrm{Form}^+(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}) \in L_{\omega+2}[A]$. Bajo estas hipótesis hemos demostrado antes que $H_{L_\delta[A],A} \in L_{\omega+4}[A]$, luego $\{H_{L_\delta[A],A}\}_{\delta<\beta} \in L_{\omega+7}[A]$, pues cada $H_{L_\delta[A],A}$ es definible mediante una fórmula Δ_0 con parámetros disponibles en $L_{\omega+6}[A]$.

Volviendo al caso en que α es un límite arbitrario, según acabamos de probar, existe $\alpha + 1 < \epsilon < \lambda$ tal que $\{L_\delta[A]\}_{\delta\leq\beta} \in L_\epsilon[A]$. Antes hemos visto que esto implica que

$$\{\{L_\delta[A]^n\}_{n\in\omega}\}_{\delta<\beta} \in L_{\epsilon+10}[A],$$

luego la séxtupla f_β que define a $L_\beta[A]$ cumple $f_\beta \in L_{\epsilon+k}[A]$, para un cierto $k \in \omega$, el mismo para todo $\beta < \alpha$.

Con esto ya podemos concluir que $\{L_\delta[A]\}_{\delta\leq\alpha} \in L_{\epsilon+k+1}[A]$, pues

$$\{L_\delta[A]\}_{\delta\leq\alpha} = \{x \in L_{\epsilon+k}[A] \mid L_{\epsilon+k}[A] \vDash \bigvee \delta Y f(\delta \in [\alpha + 1]) \wedge$$
$$x = (\delta, Y) \wedge \phi(f, Y, \delta)\},$$

donde ϕ es la fórmula Δ_0 del enunciado salvo que cambiamos las subfórmulas

[7] La única variación es que hay que omitir la relación R que interpreta al relator de pertenencia, porque aquí estamos considerando modelos naturales, y hay que añadir en ella la interpretación de las fórmulas atómicas de $\mathcal{L}^+_{\mathrm{tc}}$ de tipo Rx.

$x \in A$ por Rx. De aquí se sigue a su vez que $\{L_\delta[A]^{<\omega}\}_{\delta<\alpha} \in L_{\epsilon+k+2}[A]$, y entonces

$$\{H_{L_\delta[A],A}\}_{\delta<\alpha} = \{x \in L_{\epsilon+k+2}[A] \mid L_{\epsilon+k+2}[A] \vDash \bigvee \delta HST(x = (\delta, H) \wedge$$
$$\delta \in [\alpha] \wedge S = [\{L_\delta[A]\}_{\delta\leq\alpha}] \wedge T = [\{L_\delta[A]^{<\omega}\}_{\delta<\alpha}]$$
$$\wedge\ \phi(S(\delta), H, T(\delta), [\omega], [\omega^{<\omega}], [(\omega^{<\omega})^{<\omega}]\},$$

donde ϕ es la fórmula Δ_0 que determina a $H_{L_\delta[A],A}$ con los parámetros indicados. Por lo tanto $\{H_{L_\delta[A],A}\}_{\delta<\alpha} \in L_\lambda[A]$. ■

En particular, ahora es inmediato que el término $L_\alpha[A]$ es Δ_1 (tanto en KPI como en ZF−AP o en cualquier extensión de estas teorías) y que la clase $L[A]$ es Σ_1 (en el sentido de que lo es la fórmula $x \in L[A]$, es decir, la propiedad "ser constructible respecto de A").

3.3 El axioma de constructibilidad

En la sección precedente hemos definido la clase L de los conjuntos constructibles, y la pregunta obligada es ahora si existen conjuntos no constructibles. La respuesta es que la existencia de conjuntos no constructibles no puede ser demostrada ni refutada en ZFC, lo que lleva a considerar el

Axioma de constructibilidad ($V = L$) $\bigwedge x \bigvee \alpha\ x \in L_\alpha$.

Observemos que se trata de una sentencia Π_2. Afirmar, como acabamos de hacer, que no es posible demostrar que existen conjuntos no constructibles equivale a demostrar que $V = L$ es consistente con los axiomas de ZFC, y esto se debe a su vez a que L es un modelo transitivo de ZFC + $V = L$. El primer paso para probarlo es el siguiente:

Teorema 3.8 *En* ZF *(resp.* KPI, ZF−AP*) se demuestra que $L[A]$ es un modelo transitivo de* ZF *(resp.* KPI, ZF−AP*).*

Demostración: Razonamos en primer lugar en ZF−AP. Sabemos que $L[A]$ cumple los axiomas de extensionalidad y de regularidad simplemente por ser una clase transitiva. El axioma del par se cumple porque si $x, y \in L[A]$, existe un α tal que $x, y \in L_\alpha[A]$, luego $\{x, y\} \in L_{\alpha+1}[A] \subset L[A]$, porque todo conjunto finito es definible.

Para probar el axioma de la unión observamos que si $x \in L[A]$ existe un α tal que $x \in L_\alpha[A]$, luego $x \subset L_\alpha[A]$ y $\bigcup x \subset L_\alpha[A]$ por transitividad, y entonces

$$\bigcup x = \{u \in L_\alpha[A] \mid (\bigvee v(u \in v \wedge v \in x))^{L_\alpha[A]}\} \in \mathcal{PD}_A L_\alpha[A] = L_{\alpha+1}[A] \subset L[A].$$

Para probar el axioma de reemplazo tomamos $\phi(x, y, x_1, \ldots, x_n)$, fijamos $x_1, \ldots, x_n \in L[A]$, suponemos que

$$\bigwedge xyz \in L[A](\phi^{L[A]}(x, y) \wedge \phi^{L[A]}(x, z) \rightarrow y = z)$$

y fijamos un $a \in L[A]$. Tenemos que probar que

$$b = \{y \in L[A] \mid \bigvee x \in a\ \phi^{L[A]}(x, y)\} \in L[A].$$

Notemos que el conjunto b existe por el axioma de reemplazo aplicado a la fórmula $\phi^{L[A]}$. Podemos considerar la función $f : b \longrightarrow \Omega$ tal que $f(y)$ es el mínimo δ tal que $y \in L_\delta[A]$. Como $f[b]$ es un subconjunto de Ω, está acotado.

Sea α tal que $x_1, \ldots, x_n, a \in L_\alpha[A]$ y $f[b] \subset \alpha$, de modo que $b \subset L_\alpha[A]$. Ahora aplicamos la versión general del teorema de reflexión [LM 12.31], que nos da un ordinal $\lambda > \alpha$ tal que

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n xy \in L_\lambda[A](\phi^{L_\lambda[A]}(x, y, x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi^{L[A]}(x, y, x_1, \ldots, x_n)).$$

En particular resulta que

$$b = \{y \in L_\lambda[A] \mid \bigvee x \in a\ \phi^{L_\lambda[A]}(x, y)\} = \{y \in L_\lambda[A] \mid (\bigvee x \in a\ \phi(x, y))^{L_\lambda[A]}\},$$

luego $b \in \mathcal{PD}_A L_\lambda[A] = L_{\lambda+1}[A] \subset L[A]$.

El axioma de infinitud se cumple porque $\omega \in L[A]$.

Si además suponemos el axioma de partes, podemos probar que también se cumple en $L[A]$. Para ello tomamos $x \in L[A]$. Como en la prueba del axioma de reemplazo razonamos que existe un α tal que $x \in L_\alpha[A]$ y $\mathcal{P}x \cap L[A] \subset L_\alpha[A]$. Entonces

$$\mathcal{P}x \cap L[A] = \{u \in L_\alpha[A] \mid u \subset x\} \in \mathcal{PD}_A L_\alpha[A] = L_{\alpha+1}[A] \subset L[A].$$

Veamos ahora las variantes que requiere la prueba en KPI. Las pruebas de los axiomas de extensionalidad, par y unión valen igualmente. Para el axioma de regularidad tomamos una fórmula $\phi(u, x_1, \ldots, x_n)$, fijamos $x_1, \ldots, x_n \in L[A]$ y se trata de probar que

$$\bigvee u \in L[A] \phi^{L[A]}(u) \rightarrow \bigvee u \in L[A](\phi^{L[A]}(u) \land \bigwedge v \in u \neg\phi^{L[A]}(v)),$$

pero esto es el axioma de regularidad para la fórmula $u \in L[A] \land \phi^{L[A]}(u)$.

La relativización del axioma de Δ_0-especificación es

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n x \in L[A]\, \{u \in x \mid \phi(u, x_1, \cdots, x_n)\} \in L[A],$$

donde ϕ es una fórmula Δ_0 (y por eso no la hemos relativizado a $L[A]$). Basta tomar un α tal que $x_1, \ldots, x_n, x \in L_\alpha[A]$, y entonces

$$\begin{aligned}\{u \in x \mid \phi(u, x_1, \ldots, x_n)\} &= \{u \in L_\alpha[A] \mid (u \in x \land \phi(u))^{L_\alpha[A]}\} \in \mathcal{PD}_A L_\alpha[A] \\ &= L_{\alpha+1}[A] \subset L[A].\end{aligned}$$

Por último, la relativización del axioma de Δ_0-recolección es

$$\bigwedge u \in L[A] \bigvee v \in L[A]\, \phi(u, v) \rightarrow \bigwedge a \in L[A] \bigvee b \in L[A] \bigwedge u \in a \bigvee v \in b\, \phi(u, v).$$

Si suponemos el antecedente del implicador y fijamos $a \in L[A]$, tenemos también que

$$\bigwedge u \in a \bigvee \alpha \bigvee v(\alpha \in \Omega \wedge v \in L_\alpha[A] \wedge \phi(u, v)).$$

Esto nos permite aplicar el teorema de Σ_1-recolección [LM 6.7] a la fórmula tras $\bigvee \alpha$, lo que nos da que existe un y tal que

$$\bigwedge u \in a \bigvee \alpha \in y \bigvee v(\alpha \in \Omega \wedge v \in L_\alpha[A] \wedge \phi(u, v)).$$

Tomamos $\beta = \bigcup(y \cap \Omega)$, que es un ordinal tal que

$$\bigwedge u \in a \bigvee \alpha < \beta \bigvee v(v \in L_\alpha[A] \wedge \phi(u, v)),$$

o también $\bigwedge u \in a \bigvee v \in L_\beta[A]\, \phi(u, v)$, luego se cumple la relativización del axioma de Δ_0-recolección con $b = L_\beta[A]$. ■

Ahora hay que tener cuidado de no pecar de ingenuos: trabajando, por ejemplo, en ZF, tenemos que la clase L es un modelo de ZF y, obviamente, todos los elementos de L son conjuntos constructibles, pero esto no significa que L satisfaga el axioma de constructibilidad. Lo cierto es que sí que lo satisface, pero probar que es así no es limitarse a observar que todos los elementos de L son constructibles, sino que hay que probar que todos son constructibles^L. El teorema siguiente prueba mucho más:

Teorema 3.9 (ZF) *Sea M un modelo transitivo de* KPI *(resp. de* ZF−AP*.) Entonces:*

a) Si M es una clase propia, se cumple que $L \subset M$ y

$$\bigwedge x \in M(x \text{ es constructible}^M \leftrightarrow x \text{ es constructible}).$$

En particular, la clase L es un modelo transitivo de ZF + $V = L$ *y es el único que es una clase propia.*

b) Si M es un conjunto y $\lambda = \Omega^M$, entonces $L_\lambda \subset M$ y

$$\bigwedge x \in M(x \text{ es constructible}^M \leftrightarrow x \in L_\lambda).$$

En particular, si un conjunto M es un modelo transitivo de KPI + $V = L$ *(resp.* ZF−AP + $V = L$*), entonces $M = L_\lambda$, con $\lambda = \Omega^M$.*

Demostración: Como el término L_α es Δ_1, es absoluto para modelos transitivos de KPI (o ZF−AP), luego si $\alpha \in M$, tenemos que $L_\alpha = L_\alpha^M \in M$, luego $L_\alpha \subset M$.

Si M es una clase propia, entonces $\Omega \subset M$ (por 2.10), luego todo $L_\alpha \subset M$, luego $L \subset M$.

En cambio, si M es un conjunto y $\lambda = \Omega^M$, para cada $\alpha < \lambda$ tenemos que $L_\alpha \subset M$, luego $L_\lambda = \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} L_\alpha \subset M$.

Como en KPI (o ZF$-$AP) se demuestra que $\bigwedge x(x \in L \leftrightarrow \bigvee \alpha\ x \in L_\alpha)$, en M tiene que cumplirse la relativización de esta sentencia, es decir,

$$\bigwedge x \in M(x \in L^M \leftrightarrow \bigvee \alpha \in M\ x \in L_\alpha).$$

Si M es una clase propia $\Omega \subset M$ y esto equivale a

$$\bigwedge x \in M(x \in L^M \leftrightarrow \bigvee \alpha\ x \in L_\alpha),$$

que es la parte a) del enunciado. Si M es un conjunto esto equivale a

$$\bigwedge x \in M(x \in L^M \leftrightarrow \bigvee \alpha < \lambda\ x \in L_\alpha),$$

lo cual equivale a la parte b).

En particular, aplicando a) a $M = L$ concluimos que todo elemento de L es constructible^L, luego L es un modelo transitivo de ZF + $V = L$. Por último, si un conjunto M es un modelo transitivo de KPI + $V = L$ (o KPI + $V = L$), el apartado b) nos da que $M = L_\lambda$. ■

Algunas observaciones:

- La hipótesis de que M es un modelo de KPI (o ZF$-$AP) debe entenderse como que existe un conjunto finito de axiomas de KPI (o de ZF) tales que todo modelo que los cumpla cumple el teorema. Concretamente, son los axiomas necesarios para demostrar la equivalencia de $Y = L_\alpha$ con una fórmula Σ_1 y otra Π_1, para que se cumpla el teorema 2.10 y cada resultado que hemos aplicado a M por ser un modelo de la teoría correspondiente.

- Vemos en particular que L es el menor modelo interno de ZF, y el único modelo interno de ZF + $V = L$.

- Hemos visto que ser constructible es absoluto para modelos internos, pero no lo es necesariamente para modelos transitivos que sean conjuntos. La idea es que para "construir" conjuntos se necesitan ordinales, y en un modelo que M sea un conjunto podemos encontrar un $x \in M \setminus L_\lambda$ que sea constructible pero que, para "ser construido" requiera más ordinales que los que hay en M, con lo que alguien que "viva" en M no lo reconocerá como constructible. En cambio, en un modelo interno M todos los ordinales están disponibles, por lo que si un conjunto es constructible, alguien que "viva" en M siempre puede construirlo y reconocerlo como tal.

Pero la consecuencia más importante a la que llegamos en virtud del teorema anterior es:

Teorema 3.10 *Si* ZF *es consistente, también lo es* ZF + $V = L$.

Esto es consecuencia inmediata de que L es un modelo de ZF + $V = L$. La prueba es totalmente constructiva. Recordemos el argumento general: si alguien pudiera demostrar una contradicción en ZF + $V = L$, relativizando la prueba a L, obtendríamos una demostración de una contradicción en ZF (y el proceso de construcción de una prueba a partir de la otra es totalmente mecánico).

Más informalmente, si en un argumento que pruebe $0 \neq 0$ en ZF a partir de "todo conjunto es constructible" relativizamos cambiando sistemáticamente la palabra "conjunto" por "conjunto constructible" obtenemos una prueba de $0 \neq 0$ en ZF a partir de "todo conjunto constructible es constructible", luego ZF resultaría ser contradictorio.

Desde un punto de vista semántico, no es posible demostrar la existencia de conjuntos no constructibles porque si en un modelo de ZF en el que los haya los eliminamos y nos quedamos únicamente con los conjuntos constructibles, se siguen cumpliendo todos los axiomas de ZF, y además todo conjunto es constructible, luego a partir de tales axiomas no se puede probar la existencia de un conjunto no constructible.

Hemos enunciado el teorema 3.9 para $A = \varnothing$ por simplicidad, pero el argumento que lo demuestra vale en general para probar lo siguiente:

Teorema 3.11 *Sea A un conjunto tal que $A \in L[A]$. Entonces, si M es un modelo transitivo de* KPI *(o* ZF−AP*) y $A \in M$, entonces, o bien M es una clase propia y $L[A] \subset M$, o bien M es un conjunto y $L_\lambda[A] \subset M$, donde $\lambda = \Omega^M$. Además en el primer caso $L[A]^M = L[A]$, y en el segundo $L[A]^M = L_\lambda[A]$.*

De hecho, el teorema 3.7 nos permite probar un resultado más fuerte:

Teorema 3.12 *Si A es un conjunto y M es un conjunto transitivo tal que $(M, A) \equiv (L_\lambda[A], A)$, para un cierto $\lambda > \omega$, entonces $M = L_{\lambda'}[A]$, donde $\lambda' = \Omega^M$.*

Demostración: Llamamos $\phi(f, Y, \alpha) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}^+)$ a la fórmula correspondiente a la fórmula dada por el teorema 3.7 en la que se sustituyen las subfórmulas $x \in A$ por Rx. Así, si $\alpha < \lambda$,

$$Y = L_\alpha[A] \leftrightarrow \bigvee f \in L_\lambda[A]\, \phi(f, Y, \alpha, A) \leftrightarrow \bigvee f \in L_\lambda[A]\, L_\lambda[A] \vDash \phi[f, Y, \alpha]$$
$$\leftrightarrow L_\lambda[A] \vDash \bigvee f\, \phi[Y, \alpha].$$

Ahora,
$$L_\lambda[A] \vDash \bigwedge\alpha \bigvee Y f\, \phi(f, Y, \alpha),$$
luego lo mismo cumple M, y esto significa que $\bigwedge\alpha \in \Omega^M \bigvee Y f \in M\, \phi(f, Y, \alpha, A)$, luego $\bigwedge\alpha \in \lambda'\, L_\alpha[A] \in M$, luego $L_{\lambda'}[A] \subset M$. Por otra parte,

$$L_\lambda[A] \vDash \bigwedge x \bigvee \alpha Y f (x \in Y \land \phi(f, y, \alpha)),$$

y como M debe cumplir lo mismo, tenemos que $\bigwedge x \in M \bigvee \alpha \in \Omega^M\, x \in L_\alpha[A]$, luego $M = L_{\lambda'}[A]$. ■

Acabamos de ver que en ZF no puede demostrarse la existencia de conjuntos no constructibles, pero cabría plantearse si con el axioma de elección podríamos obtener ejemplos. La respuesta no sólo es negativa, sino que, como ya habíamos indicado, ¡el axioma de constructibilidad implica el axioma de elección! Lo demostramos en la sección siguiente.

3.4 El buen orden constructible

No podemos demostrar la existencia de funciones de elección o buenos órdenes sobre conjuntos arbitrarios, sino que necesitamos el axioma de elección para postular su existencia. Sin embargo, si consideramos conjuntos constructibles la situación es muy distinta. Cada conjunto generado por el operador $\mathcal{PD}x$ está perfectamente "etiquetado" por una fórmula y una sucesión de parámetros, lo que permite "catalogar" los conjuntos constructibles y ordenarlos sin necesidad del axioma de elección:

Definición 3.13 Para cada conjunto A definimos

$$\trianglelefteq_{A,0} \ = \varnothing \wedge \bigwedge\alpha \ \ \trianglelefteq_{A,\alpha+1} \ = (\trianglelefteq_{A,\alpha})_{L_\alpha[A],A} \wedge \bigwedge\lambda \ \ \trianglelefteq_{A,\lambda} \ = \bigcup_{\delta<\lambda} \trianglelefteq_{A,\delta} \ ,$$

$$\trianglelefteq_A \ = \bigcup_{\alpha} \trianglelefteq_{A,\alpha} .$$

Aquí estamos considerando el término $\leq_{M,A}$ dado por el teorema 3.4. Es inmediato que esta definición recurrente es correcta en ZF−AP. Por otra parte, como $\leq_{M,A}$ es Δ_1, exactamente el mismo razonamiento empleado para la sucesión transfinita $\{L_\alpha[A]\}_{\alpha\in\Omega}$ prueba que el término $\trianglelefteq_{A,\alpha}$ es definible en KPI y es Δ_1, por lo que la fórmula

$$x \trianglelefteq_A y \equiv \bigvee z\alpha(\alpha \in \Omega \wedge x \in L_\alpha[A] \wedge y \in L_\alpha[A] \wedge z = \ \trianglelefteq_{A,\alpha} \ \wedge (x, y) \in z)$$

es Σ_1 (respecto a KPI). Luego veremos que también lo es respecto a ZF−AP.

En ambos casos, una simple inducción a partir de 3.4 nos da que $\trianglelefteq_{A,\alpha}$ es un buen orden en $L_\alpha[A]$ tal que si $\alpha < \beta$ entonces $L_\alpha[A]$ es una sección inicial de $L_\beta[A]$. Por lo tanto:

Teorema 3.14 *Para todo conjunto A, la fórmula $x \trianglelefteq_A y$ determina un buen orden de $L[A]$ tal que*

$$\bigwedge\alpha\beta xy(\alpha < \beta \wedge x \in L_\alpha[A] \wedge y \in L_\beta[A] \setminus L_\alpha[A] \rightarrow x \triangleleft_A y).$$

Por consiguiente, si suponemos $V = L[A]$, el buen orden $\trianglelefteq_A$ nos permite definir una función de elección sobre cualquier conjunto. Así pues:

Teorema 3.15 $\bigvee A \ V = L[A] \rightarrow$ AE.

En particular (razonando en ZF), la clase $L[A]$ resulta ser un modelo transitivo de ZFC (puesto que $L[A] \vDash V = L[\bar{A}]$, donde $\bar{A} = A \cap L[A]$). Más en particular:

Teorema 3.16 *Si* ZF *es consistente, también lo es* ZFC.

En efecto, tenemos que $V = L \rightarrow$ AE, y hemos probado que si ZF es consistente, también lo es ZF + $V = L$, luego en particular lo es ZFC.

Observaciones Hay quien dice que el axioma de elección introduce conjuntos "extraños" en la teoría (funciones de elección y conjuntos construidos a partir de ellas) de los que no tenemos ninguna descripción concreta, pero ahora vemos que sólo necesitamos recurrir al axioma de elección para introducir "conjuntos extraños" en la medida en que admitamos la posibilidad de estar tratando ya con conjuntos "extraños" (no constructibles). Si sólo consideramos conjuntos constructibles, el axioma de elección es un teorema. ■

Ahora probamos el análogo del teorema 3.7 para el buen orden constructible, que en particular proporciona un argumento para probar que el término $\trianglelefteq_{A,\alpha}$ es Σ_1, tanto en KPI como en ZF$-$AP.

Teorema 3.17 *Existe una fórmula $\psi(f,Y,\alpha,A)$ de tipo Δ_0, en la que la variable A sólo aparece en subfórmulas de tipo $x\in A$, de modo que tanto en* KPI *como en* ZF$-$AP *se demuestra:*

a) $Y = \ \trianglelefteq_{A,\alpha} \ \leftrightarrow \bigvee f\, \psi(f,Y,\alpha,A)$.

b) Si $\alpha<\lambda$ y $\lambda>\omega$, entonces $Y = \ \trianglelefteq_{A,\alpha} \ \leftrightarrow \bigvee f\in L_\lambda[A]\, \psi(f,Y,\alpha,A)$.

Demostración: Hemos visto que

$$R = \leq_{X,A} \leftrightarrow \psi(R,X,A,\leq,H_{X,A},X^{<\omega},\mathcal{PD}_AX,\omega,\omega^{<\omega},(\omega^{<\omega})^{<\omega}),$$

donde la fórmula ψ es Δ_0. Por lo tanto,

$$S = \ \trianglelefteq_{A,\alpha} \ \leftrightarrow \bigvee h(h:\alpha+1\longrightarrow V\wedge h(0)=\varnothing\wedge \bigwedge\delta\in\alpha\ h(\delta+1)=h(\delta)_{L_\delta[A],A}$$

$$\wedge\bigwedge\lambda\in\mathcal{D}h\ h(\lambda)=\bigcup_{\delta<\lambda}h(\delta)\wedge h(\alpha)=S).$$

Vemos, pues, que

$$S = \ \trianglelefteq_{A,\alpha} \ \leftrightarrow \bigvee h([\text{fórmula }\Delta_0]\wedge\bigwedge\delta\in\alpha$$

$$\psi(h(\delta+1),L_\delta[A],A,h(\delta),H_{L_\delta[A],A},L_\delta[A]^{<\omega},L_{\delta+1}[A],\omega,\omega^{<\omega},(\omega^{<\omega})^{<\omega})).$$

Como $L_\delta[A]^{<\omega}$ sólo aparece en acotaciones de la forma $\bigwedge x\in L_\delta[A]^{<\omega}$ o $\bigvee x\in L_\delta[A]^{<\omega}$, podemos transformarlas en la forma $\bigwedge n\in\omega\bigwedge x\in L_\delta[A]^n$ y $\bigvee n\in\omega\bigvee x\in L_\delta[A]^n$, y lo mismo vale para $\omega^{<\omega}$ y $(\omega^{<\omega})^{<\omega}$, que pueden reemplazarse por términos ω^n y $(\omega^{<\omega})^n$. Por lo tanto,

$$S = \ \trianglelefteq_{A,\alpha} \ \leftrightarrow \bigvee hf_1f_2f_3f_4f_5f_6([f_1=\omega\wedge f_2=\{\omega^n\}_{n\in\omega}\wedge$$

$$f_3=\{(\omega^{<\omega})^n\}_{n\in\omega}\wedge f_4=\{L_\delta[A]\}_{\delta\leq\alpha}\wedge f_5=\{H_{L_\delta[A],A}\}_{\delta<\alpha}\wedge$$

$$f_6=\{\{L_\delta[A]^n\}_{n\in\omega}\}_{\delta<\alpha}\wedge[\text{fórmula }\Delta_0]\wedge\bigwedge\delta\in\alpha\,[\text{fórmula }\Delta_0]),$$

pues los parámetros que aparecen en ψ pueden sustituirse por $f_4(\delta)$, $f_5(\delta)$, $f_6(\delta)(n)$, $f_4(\delta+1)$, f_1, $f_2(n)$, $f_3(n)$, respectivamente.

Ahora usamos que la fórmula $\bigvee f\phi(f, Y, \alpha, A)$ dada por el teorema 3.7 fuerza a que f sea

$$(\omega, \{\omega^n\}_{n\in\omega}, \{(\omega^{<\omega})^n\}_{n\in\omega}, \{L_\delta[A]\}_{\delta\leq\alpha}, \{H_{L_\delta[A],A}\}_{\delta<\alpha}, \{\{L_\delta[A]^n\}_{n\in\omega}\}_{\delta<\alpha}),$$

con lo que

$$S = \trianglelefteq_{A,\alpha} \leftrightarrow \bigvee hfYf_1f_2f_3f_4f_5f_6(\phi(f, Y, \alpha, A) \land f = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)\cdots),$$

donde los puntos suspensivos son una fórmula Δ_0. Ahora bien, es claro que las f_i son elementos de elementos, ... de f, por lo que pueden acotarse con f introduciendo un número finito de variables intermedias, al igual que $Y = L_\alpha[A]$, que se acota por f_4, luego

$$S = \trianglelefteq_{A,\alpha} \leftrightarrow \bigvee hf\,[\text{fórmula } \Delta_0]$$

y un mínimo retoque nos da que

$$S = \trianglelefteq_{A,\alpha} \leftrightarrow \bigvee f\,\psi(f, S, \alpha, A),$$

donde ψ es Δ_0 y, si se cumple esta fórmula, necesariamente f es la séptupla que resulta de añadir a la f previa una séptima componente igual a $\{\trianglelefteq_{A,\delta}\}_{\delta\leq\alpha}$.

Teniendo en cuenta el teorema 3.7 (y su demostración) para probar el apartado b) sólo necesitamos comprobar que $\{\trianglelefteq_{A,\delta}\}_{\delta\leq\alpha} \in L_\lambda[A]$. Ahora bien, sabemos que existe un $\epsilon < \lambda$ tal que $L_\epsilon[A]$ contiene a

$$\omega, \quad \omega^{<\omega}, \quad (\omega^{<\omega})^{<\omega}, \quad \{L_\delta[A]\}_{\delta\leq\alpha+1}, \quad \{L_\delta[A]^{<\omega}\}_{\delta\leq\alpha}, \quad \{H_{L_\delta[A],A}\}_{\delta<\alpha},$$

luego $\trianglelefteq_{A,\delta} \subset L_{\epsilon+2}[A]$ y $\trianglelefteq_{A,\delta} \in L_{\epsilon+3}[A]$ porque la fórmula $y \trianglelefteq_{A,\delta} z$ equivale a una fórmula Δ_0 con los parámetros anteriores. A su vez, $\{\trianglelefteq_{A,\delta}\}_{\delta\leq\alpha} \subset L_{\epsilon+5}[A]$ y entonces $\{\trianglelefteq_{A,\delta}\}_{\delta\leq\alpha} \in L_{\epsilon+6}[A]$, porque podemos definir la sucesión usando $\{L_\delta[A]\}_{\delta\leq\alpha+1}$ como parámetro. ■

Así pues, el término $\trianglelefteq_{A,\alpha}$ es Σ_1, luego Δ_1, y la relación $x \trianglelefteq_A y$ es Σ_1, pero si se cumple $V = L[A]$ también es Δ_1, pues en tal caso

$$x \trianglelefteq_A y \leftrightarrow x = y \lor \neg y \trianglelefteq_A x.$$

En cualquier caso, la relación $x \trianglelefteq_A y$ es absoluta para $L[A]$, pues al ser Σ_1 es absoluta hacia arriba, es decir, si $x, y \in L[A]$ cumplen $(x \trianglelefteq_A y)^{L[A]}$, también cumplen $x \trianglelefteq_A y$ y, recíprocamente, si $x \trianglelefteq_A y$, tiene que cumplirse $(x \trianglelefteq_A y)^{L[A]}$, pues en caso contrario sería $(y \triangleleft_A x)^{L[A]}$, lo que implicaría $y \triangleleft_A x$.

La enumeración de los conjuntos constructibles Conviene señalar algunas consecuencias elementales de 3.14:

- Si $x \in L[A]$, $y \in L_\alpha[A]$, $x \trianglelefteq_A y$, entonces $x \in L_\alpha[A]$.
- Si $x \in y \in L[A]$, entonces $x \triangleleft_A y$.

En efecto, la segunda propiedad se debe a que podemos considerar el mínimo ordinal δ tal que $y \in L_\delta[A]$, que no puede ser un ordinal límite, luego $\delta = \alpha + 1$, luego $y \subset L_\alpha[A]$, luego $x \in L_\alpha[A]$, $y \notin L_\alpha[A]$, luego $x \lhd_A y$.

Para cada $x \in L[A]$, definimos

$$\mathrm{pr}_A(x) = \{y \in L[A] \mid y \lhd_A x\},$$

que es un conjunto, pues si $x \in L_\alpha[A]$ entonces $\mathrm{pr}_A(x) \subset L_\alpha[A]$. De hecho,

$$\mathrm{pr}_A(x) = \{y \in L_\alpha[A] \mid L_\alpha[A] \vDash [y] \lhd_A [x]\} \in L_{\alpha+1}[A].$$

En particular, si $x \in L_\lambda[A]$, también $\mathrm{pr}_A(x) \in L_\lambda[A]$.

Notemos además que

$$y = \mathrm{pr}_A(x) \leftrightarrow \bigvee \alpha Y R(Y = L_\alpha[A] \land R = \ \trianglelefteq_{A,\alpha} \ \land x \in Y \land y \subset Y \land$$
$$\bigwedge z \in Y(z \in y \leftrightarrow z\, R\, x \land z \neq x)),$$

lo que prueba que $\mathrm{pr}_A(x)$ es Σ_1 y, por lo tanto, Δ_1. Más aún, los teoremas 3.7 y 3.17 implican claramente que si $x \in L_\lambda[A]$ para cierto $\lambda > \omega$, se cumple

$$y = \mathrm{pr}_A(x) \leftrightarrow \bigvee g\, \chi(g, y, x, A) \leftrightarrow \bigvee g \in L_\lambda[A] \ \chi(g, y, x, A),$$

donde χ es una fórmula Δ_0 en la que A sólo aparece en subfórmulas de tipo $x \in A$.

Podemos considerar la aplicación $F_A : \Omega \longrightarrow L[A]$ dada por

$$F_A = \{(\alpha, x) \mid \alpha = \mathrm{ord}(\mathrm{pr}_A(x), \trianglelefteq)\},$$

que claramente es la semejanza entre ambas clases. De este modo, cada conjunto de $L[A]$ está unívocamente determinado por un ordinal. Además la fórmula

$$F_A(\alpha) = x \leftrightarrow \bigvee \delta Z R z f(Z = L_\delta[A] \land R = \ \trianglelefteq_{A,\delta} \ \land x \in Z \land z = \mathrm{pr}_A(x) \land$$
$$f : (\alpha + 1, \leq) \longrightarrow (z, R) \text{ semejanza} \land f(\alpha) = x)$$

es Σ_1, luego el término $F_A(\alpha)$ es Δ_1.

Como aplicación probamos lo siguiente:

Teorema 3.18 *Para todo conjunto A, si todo conjunto de ordinales pertenece a $L[A]$, entonces $V = L[A]$.*

Demostración: Razonamos por $\in$-inducción, es decir, tomamos un conjunto tal $x \subset L[A]$ y basta probar que $x \in L[A]$. Por reemplazo (Σ_1-reemplazo en el caso de KPI) existe el conjunto $a = \{F_A^{-1}(u) \mid u \in x\} \subset \Omega$. Por hipótesis $a \in L[A]$, y entonces $x = F_A[a] = (F_A[a])^{L[A]} \in L[A]$. ■

Un resultado similar, que se apoya también en que $L[A]$ cumple el axioma de elección, es el siguiente:

Teorema 3.19 (ZF) *Para todo conjunto A existe un conjunto $A' \subset \Omega$ tal que $L[A] = L[A']$.*

DEMOSTRACIÓN: Cambiando A por $A \cap L[A]$ si es necesario, podemos suponer que $A \in L[A]$. Sea $B = \mathrm{ct}A \cup \{A\} \in L[A]$. Sea $\kappa = |B|^{L[A]}$. Si B es finito entonces $A \in V_\omega \subset L$, luego $A = L = L[\varnothing]$ (es decir, sirve $A' = \varnothing$).

Supongamos, pues, que B es infinito. Sea $f \in L[A]$ tal que $f : \kappa \longrightarrow B$ biyectiva.

Sea $E \subset \kappa \times \kappa$ la relación dada por $\alpha\, E\, \beta \leftrightarrow f(\alpha) \in f(\beta)$. Obviamente $E \in L[A]$, está bien fundada, es extensional y, por unicidad, B es el colapso transitivo de (κ, E) (y f es la función colapsante).

Sea $g \in L$ tal que $g : \kappa \times \kappa \longrightarrow \kappa$ biyectiva y sea $A' = g[E] \in L[A]$. Tenemos que $L[A'] \subset L[A]$. Por otra parte, como A' es un conjunto de ordinales, se cumple que $A' \in L[A']$ y $g \in L \subset L[A']$, luego $E \in L[A']$, luego B, que es el colapso de (κ, E), también está en $L[A']$, y por transitividad $A \in L[A']$ y también $L[A] \subset L[A']$. ■

Así pues, desde un punto de vista teórico es suficiente estudiar las clases $L[A]$ con $A \subset \Omega$.

Nota Si hasta ahora hemos trabajado en KPI o ZF−AP en lugar de en ZF ha sido para demostrar que la clase $L[A]$ y el buen orden $\trianglelefteq_A$ son definibles en estas teorías. Esto es relevante, por ejemplo, a la hora de que el teorema 3.11 sea aplicable a modelos que no cumplan todos los axiomas de ZF (especialmente el axioma de partes). A partir de este punto (salvo que indiquemos explícitamente lo contrario) trabajaremos ya siempre en ZF (o en ZFC cuando así lo indiquemos) y sólo consideraremos KPI o ZF−AP de forma indirecta, cuando tratemos con modelos. ■

3.5 Los modelos $L_\lambda[A]$

Estudiamos ahora con más detalle los conjuntos $L_\lambda[A]$ desde el punto de vista de la teoría de modelos. Empezamos calculando su cardinal:

Teorema 3.20 $\bigwedge A\alpha(\alpha \geq \omega \to |L_\alpha[A]| = |\alpha|)$.

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar lo demostramos suponiendo AE. Equivalentemente, podemos probar que $\bigwedge\alpha |L_{\omega+\alpha}[A]| = |\omega + \alpha|$. Razonamos por inducción sobre α. Si $\alpha = 0$ tenemos que $L_\omega[A]$ es numerable porque es unión numerable de conjuntos finitos. Si vale para α, también vale para $\alpha + 1$ por el teorema 3.3 f). Por último, si vale para todo $\delta < \lambda$, entonces

$$|\omega + \lambda| \leq |L_{\omega+\lambda}[A]| \leq \sum_{\delta<\lambda} |L_{\omega+\delta}[A]| = \sum_{\delta<\lambda} |\omega + \delta| \leq |\lambda||\omega + \lambda| = |\omega + \lambda|.$$

Esto termina la prueba bajo AE. Cambiando A por $A \cap L[A]$ podemos suponer que $A \in L[A]$, pero $L[A]$ es un modelo transitivo de ZFC, luego, por lo que acabamos de probar, el teorema es cierto relativizado a $L[A]$, y esto significa que, para todo ordinal infinito α, se cumple

$$(\bigvee f\ f : \alpha \longrightarrow L_\alpha[A] \text{ biyectiva})^{L[A]},$$

es decir, $\bigvee f \in L[A]\ f : \alpha \longrightarrow L_\alpha[A]$ biyectiva, y en particular $|L_\alpha[A]| = |\alpha|$. ■

El teorema 2.15 vale también para la jerarquía constructible:

Teorema 3.21 *Si κ es un cardinal regular$^{L[A]}$ no numerable$^{L[A]}$, el conjunto*

$$\{\alpha < \kappa \mid L_\alpha[A] \prec L_\kappa[A]\}$$

es cerrado no acotado en κ.

Demostración: Supongamos primero que $V = L[A]$. Entonces, la misma demostración de 2.15 sin más que cambiar V_α por $L_\alpha[A]$ prueba el enunciado para todo cardinal regular no numerable κ.

Para el caso general tomamos $\bar{A} = A \cap L[A]$, de modo que $L[A] = L[\bar{A}]$ y $L[\bar{A}]$ es un modelo de ZFC en el cual se cumple (la relativización de)

$$\bigwedge A\kappa(V = L[A] \land \kappa \text{ es un cardinal regular no numerable} \rightarrow \cdots),$$

que, particularizada a $\bar{A}$ y teniendo en cuenta que en $L[\bar{A}]$ se cumple $V = L[\bar{A}]$, es

$$\bigwedge \kappa(\kappa \text{ es un cardinal regular}^{L[\bar{A}]} \text{ no numerable}^{L[\bar{A}]} \rightarrow \cdots),$$

donde el resto es claramente absoluto. ■

Notemos que ser un cardinal regular no numerable es Π_1, por lo que todo cardinal regular no numerable es un cardinal regular no numerable$^{L[A]}$, y así el teorema anterior vale, en particular, para todos los cardinales regulares no numerables. Por otra parte, una ligera modificación de la prueba de 3.8 nos da:

Teorema 3.22 *Si κ es un cardinal regular$^{L[A]}$ no numerable$^{L[A]}$ entonces $L_\kappa[A]$ es un modelo transitivo de* ZFC$-$AP *y de* KPI.

Demostración: Como en el caso del teorema anterior basta probar el teorema suponiendo $V = L[A]$. Los axiomas de extensionalidad, regularidad, par, unión e infinitud se comprueban exactamente igual que en 3.8, sin más que cambiar $L[A]$ por $L_\kappa[A]$. El axioma de reemplazo se demuestra sustituyendo el teorema de reflexión por el teorema anterior:

Partimos de $\phi(x, y, x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$, fijamos $x_1, \ldots, x_n \in L_\kappa[A]$, suponemos que

$$\bigwedge xyz(L_\kappa[A] \vDash \phi[x, y] \land L_\kappa[A] \vDash \phi[x, z] \rightarrow y = z)$$

y fijamos un $a \in L[A]$. Tenemos que probar que

$$b = \{y \in L_\kappa[A] \mid \bigvee x \in a\ L_\kappa[A] \vDash \phi[x, y]\} \in L_\kappa[A].$$

Consideramos la función $f : b \longrightarrow \kappa$ tal que $f(y)$ es el mínimo δ tal que $y \in L_\delta[A]$. Tomamos $\alpha < \kappa$ tal que $a \in L_\alpha[A]$. Entonces

$$|f[b]| \leq |b| \leq |a| \leq |L_\alpha[A]| < \kappa,$$

y como κ es regular concluimos que $f[b]$ está acotado en κ. Por el teorema anterior existe $\lambda < \kappa$ tal que $f[b] \subset \lambda$, $x_1, \ldots, x_n, a \in L_\lambda[A]$ y $L_\lambda[A] \prec L_\kappa[A]$. En particular resulta que

$$b = \{y \in L_\lambda[A] \mid L_\kappa[A] \vDash \bigvee x \in [a]\, \phi[x, y]\} =$$

$$\{y \in L_\lambda[A] \mid L_\lambda[A] \vDash \bigvee x \in [a]\ \phi[x, y])\} \in \mathcal{PD}_A L_\lambda[A] = L_{\lambda+1}[A] \subset L_\kappa[A].$$

El axioma de elección se justifica trivialmente a partir del buen orden constructible. El esquema de especificación es un teorema de ZF$-$AP, por lo que no hace falta demostrarlo. También se cumple el esquema de recolección para fórmulas $\phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$ cualesquiera, no necesariamente Δ_0, pues se trata de probar

$$\bigwedge u \in L_\kappa[A] \bigvee v \in L_\kappa[A]\, L_\kappa[A] \vDash \phi[u, v] \rightarrow$$

$$\bigwedge a \in L_\kappa[A] \bigvee b \in L_\kappa[A] \bigwedge u \in a \bigvee v \in b\, L_\kappa[A] \vDash \phi[u, v].$$

Si suponemos el antecedente del implicador y fijamos $a \in L[A]$, tenemos también que

$$\bigwedge u \in a \bigvee \alpha < \kappa \bigvee v (v \in L_\alpha[A] \land L_\kappa[A] \vDash \phi[u, v]).$$

Definimos $f : a \longrightarrow \kappa$ que a cada $u \in a$ le asigna el mínimo α que cumple la sentencia anterior. Como $a \in L_\alpha[A]$, con $\alpha < \kappa$, tenemos que $|a| < \kappa$, y la regularidad de κ nos da que f está acotada, es decir, que existe un $\alpha < \kappa$ tal que $\bigwedge u \in a \bigvee v \in L_\alpha[A]\ L_\kappa[A] \vDash \phi[u, v]$, luego basta tomar $b = L_\alpha[A]$. ■

Los dos últimos teoremas muestran que hay muchos modelos L_λ que satisfacen ZFC$-$AP o KPI (incluso numerables). Por otra parte, puesto que $L[A]$ es un modelo de ZFC, el teorema de reflexión [LM 12.31] nos da que existen ordinales límite λ tales que $L_\lambda[A]$ es un modelo de ZFC en el sentido débil de que cumpla cualquier conjunto finito de axiomas de ZFC ($+\ V = L$) prefijado.

Colapsando un submodelo elemental podemos obtener modelos numerables:

Teorema 3.23 *Dado cualquier conjunto finito* Γ *de axiomas de* ZFC, *existe un ordinal numerable* λ *tal que* $L_\lambda \vDash \Gamma$.

Demostración: Por el teorema de reflexión existe un ordinal límite λ' tal que $L_{\lambda'} \vDash \Gamma$. Por el teorema de Löwenheim-Skolem [TC 10.25] existe $N \prec L_{\lambda'}$ numerable.[8] Como N es un modelo natural, está bien fundado, luego podemos considerar su colapso transitivo M, que es un modelo transitivo numerable de

[8] En principio [TC 10.25] requiere el axioma de elección, pero sólo para tomar funciones de Skolem en el modelo L_λ, pero en este contexto podemos definirlas usando el buen orden constructible, con lo que no se requiere AE.

ZFC + $V = L$, porque $L_{\lambda'}$ cumple $V = L$. Añadiéndolos si es preciso, podemos suponer que Γ contiene los axiomas necesarios de ZFC para que se cumpla el teorema 3.11, y así podemos concluir que $M = L_\lambda$, para cierto ordinal λ (necesariamente un ordinal límite), claramente numerable. ■

Así pues, incluso sin el axioma de elección, puede demostrarse la existencia de modelos transitivos numerables de ZFC + $V = L$ (en el sentido de modelos de cualquier conjunto finito de axiomas prefijado).

El teorema siguiente nos permitirá generalizar ligeramente 3.22:

Teorema 3.24 *Si κ es un cardinal infinito, $A \in H(\kappa)$ y $V = L[A]$, entonces $H(\kappa) = L_\kappa[A]$.*

Demostración: Si $x \in L_\kappa[A]$, entonces existe un $\alpha < \kappa$ tal que $x \in L_\alpha[A]$, luego $\operatorname{ct} x \subset L_\alpha[A]$, luego $|\operatorname{ct} x| \leq |L_\alpha[A]| < \kappa$, por el teorema 3.20 si α es infinito y trivialmente si es finito. Por lo tanto $x \in H(\kappa)$.

Recíprocamente, si $x \in H(\kappa)$, entonces $|\operatorname{ct} x| < \kappa$. Sea λ un ordinal límite tal que $x, A \in L_\lambda$[A] y $L_\lambda[A]$ sea un modelo de (suficientes axiomas de) ZFC. Consideremos [TC 10.23] el núcleo de Skolem

$$N = N(\operatorname{ct} A \cup \{A\} \cup \operatorname{ct} x \cup \{x\}) \prec L_\lambda[A].$$

De este modo, $|N| < \kappa$. Sea $\pi : N \longrightarrow M$ la función colapsante de N y sea $i : M \longrightarrow L_\lambda$ su inversa, que es una inmersión elemental.

Una simple $\in$-inducción sobre $\operatorname{ct} x \cup \{x\}$ prueba que π es la identidad sobre este conjunto. En particular $x = \pi(x) \in M$. Igualmente, $A \in M$.

Por último, como $L_\lambda[A]$ es un modelo transitivo de ZFC+ $V = L[A]$, lo mismo vale para N (por ser un submodelo elemental) y para M (por ser isomorfo a N por un isomorfismo que deja invariante a A). Por el teorema 3.11 sabemos que $M = L_{\lambda'}[A]$, para λ' tal que $|\lambda'| = |L_{\lambda'}[A]| = |N| < \kappa$, luego $\lambda' < \kappa$, y así pues $x \in L_{\lambda'}[A] \subset L_\kappa[A]$. ■

Como consecuencia:

Teorema 3.25 *Si κ es un cardinal no numerable y $A \in H(\kappa)$, entonces $L_\kappa[A]$ es un modelo transitivo de* KPI.

Demostración: Si cambiamos A por $A \cap L[A]$ se siguen cumpliendo las hipótesis del teorema y además $A \in L[A]$, luego no perdemos generalidad si suponemos esto. Entonces $L[A]$ cumple $V = L[A]$, luego por el teorema anterior $L_\kappa[A] = H(\kappa)^{L[A]}$, y por 2.33 relativizado a $L[A]$, tenemos que $H(\kappa)^{L[A]} \vDash \mathrm{KPI}$, luego $L_\kappa[A] \vDash \mathrm{KPI}$. ■

En particular, si $a \subset V_\omega$ y κ es un cardinal infinito no numerable (no necesariamente regular), se cumple que $L_\kappa[a] \vDash \mathrm{KPI}$.

Funciones de Skolem definibles Aunque, en general, asignar funciones de Skolem a un modelo requiere el axioma de elección, ya hemos indicado que esto no es así en el caso de los modelos $L_\lambda[A]$, pues podemos definirlas usando el buen orden constructible. Esto tiene algunas consecuencias que conviene destacar.

Definición 3.26 Diremos que un modelo M de un lenguaje formal $\mathcal{L}$ admite *funciones de Skolem definibles* si existe una aplicación de $\mathrm{Form}(\mathcal{L})$ en sí mismo que a cada fórmula ϕ con al menos la variable libre x_0 le asigna otra fórmula $\bar{\phi}$ con las mismas variables libres de modo que

$$M \vDash \bigwedge x_1 \cdots x_n (\overset{1}{\bigvee} x_0\, \bar{\phi}(x_0, x_1, \ldots, x_n) \wedge$$
$$(\bigvee x_0\, \phi(x_0, \ldots, x_n) \to \bigvee x_0\, (\phi(x_0, \ldots, x_n) \wedge \bar{\phi}(x_0, \ldots, x_n)))).$$

La primera parte afirma que para cada $a_1, \ldots, a_n \in M$ existe un único a y M que cumple $M \vDash \bar{\phi}[a, a_1, \ldots, a_n]$, por lo que podemos definir $h_\phi : M^n \longrightarrow M$ mediante $h_\phi(a_1, \ldots, a_n) = a$.

La segunda parte afirma que si $\bigvee b \in M\, M \vDash \phi[b, a_1, \ldots, a_n]$, entonces el único $a \in M$ que cumple $\bar{\phi}(a, a_1, \ldots, a_n)$, es decir, $h_\phi(a_1, \ldots, a_n)$, cumple

$$M \vDash \phi[h_\phi(a_1, \ldots, a_n), a_1, \ldots, a_n].$$

Por lo tanto, las funciones h_ϕ son funciones de Skolem para M en el sentido de [TC 10.23].

Vamos a probar que los modelos $(L_\lambda[A], A)$, con $\lambda > \omega$, tienen funciones de Skolem definibles. En efecto, vamos a considerar que

$$x \trianglelefteq_A y \equiv \bigvee \alpha f f' Y S (\phi(f, Y, \alpha, A) \wedge \psi(f', S, \alpha, A) \wedge x \in Y \wedge y \in Y \wedge x\, R\, y),$$

donde ϕ y ψ son las fórmulas Δ_0 dadas por los teoremas[9] 3.7 y 3.17. Así

$$x \trianglelefteq_A y \leftrightarrow \bigvee \alpha (x \in L_\alpha[A] \wedge y \in L_\alpha[A] \wedge x \trianglelefteq_{A,\alpha} y),$$

que es equivalente a que estén relacionados por el buen orden constructible. De este modo, tenemos que

$$\bigwedge xy \in L_\lambda[A]\, (x \trianglelefteq_A y \leftrightarrow (x \trianglelefteq_A y)^{L_\lambda[A]}).$$

Llamamos $x \trianglelefteq y$ a la fórmula de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}^+$ correspondiente a $x \trianglelefteq_A y$, donde las subfórmulas $x \in A$ se sustituyen por Rx, de modo que, mientras la fórmula metamatemática $x \trianglelefteq_A y$ tiene tres variables libres, la fórmula $(x \trianglelefteq y) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}^+)$ tiene únicamente dos, y se cumple

$$\bigwedge xy \in L_\lambda[A]\, (x \trianglelefteq_A y \leftrightarrow L_\lambda[A \vDash [x] \trianglelefteq [y]).$$

Observemos que la fórmula $x \trianglelefteq y$ es una única fórmula de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}^+$, independiente de A o de λ, y determina un buen orden en cada conjunto $L_\lambda[A]$.

Para cada fórmula $\phi(x_0, \ldots, x_n) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}^+)$, definimos

$$\bar{\phi}(x_0, \ldots, x_n) \equiv (\bigvee x_0\, \phi(x_0, \ldots, x_n) \wedge \phi(x_0, \ldots, x_n) \wedge$$
$$\bigwedge x_{n+1} (x_{n+1} \triangleleft x_0 \to \neg \phi(x_{n+1}, x_1, \ldots, x_n))) \vee$$
$$(\neg \bigvee x_0\, \phi(x_0, \ldots, x_n) \wedge \bigwedge x_{n+1}\, x_{n+1} \notin x_0).$$

[9] El lector que no quiera apoyarse en estos teoremas puede tomar como $x \trianglelefteq_A y$ cualquier definición Σ_1 del buen orden constructible en KPI o ZF−AP y considerar únicamente ordinales límite λ tales que $L_\lambda[A]$ sea un modelo de la teoría correspondiente.

En definitiva, $\bar{\phi}$ dice que x_0 es el mínimo conjunto que cumple ϕ si existe tal conjunto o es $\varnothing$ en caso contrario. Es claro que las fórmulas $\bar{\phi}$ definen funciones de Skolem h_ϕ para $(L_\lambda[A], A)$.

En general, un elemento a de un modelo M de un lenguaje formal $\mathcal{L}$ se dice que es *definible* a partir de $a_1, \ldots, a_n \in M$ si existe una fórmula $\phi(x_0, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{L}$ tal que a es el único objeto de M que cumple $M \vDash \phi[a, a_1, \ldots, a_n]$. En particular, a es *definible* si es el único objeto de M que cumple $M \vDash \phi[a]$, para una cierta fórmula $\phi(x_0)$.

En estos términos, si un modelo M de un lenguaje $\mathcal{L}$ admite funciones de Skolem definibles, tenemos que $h_\phi(a_1, \ldots, a_n)$ es definible a partir de $a_1, \ldots, a_n$.

Teorema 3.27 *Si M es un modelo de un lenguaje formal $\mathcal{L}$ y admite funciones de Skolem definibles, entonces, para todo $X \subset M$, el núcleo de Skolem de X en M respecto de tales funciones es el conjunto $N(X)$ de los elementos de M definibles a partir de elementos de X. Además $N(X)$ es el menor submodelo elemental de M que contiene a X.*

Demostración: Sea $N(X)$ el núcleo de Skolem en el sentido de [TC 10.23] y vamos a probar que coincide con el conjunto descrito en el enunciado. Sabemos que $N(X) \prec M$. Si $a \in M$ es definible a partir de $a_1, \ldots, a_n \in X$, esto significa que existe una fórmula ϕ tal que a es el único elemento de M que cumple $M \vDash \phi[a, a_1, \ldots, a_n]$. Entonces $M \vDash \bigvee x_0\, \phi(x_0)[a_1, \ldots, a_n]$ y como $N(X)$ es un submodelo elemental y $a_1, \ldots, a_n \in X \subset N(X)$, también

$$N(X) \vDash \bigvee x_0\, \phi(x_0)[a_1, \ldots, a_n],$$

luego existe un $b \in N(X)$ tal que $N(X) \vDash \phi[b, a_1, \ldots, a_n]$ y de nuevo por ser un submodelo elemental, $M \vDash \phi[b, a_1, \ldots, a_n]$. Por la unicidad de la a tiene que ser $a = b \in N(X)$. Así pues, $N(X)$ contiene todos los elementos definibles en M.

Ahora usamos la definición de $N(X) = \bigcup\limits_{k\in\omega} N_k(X)$ para probar inductivamente que los elementos de $N_k(X)$ son definibles respecto de X. En primer lugar $N_0(X) = X$, y es claro que todo elemento de $a \in X$ es definible respecto de a, por la fórmula $x_0 = x_1$.

Supongamos que $N_k(X)$ consta únicamente de elementos definibles, y sea $a \in N_{k+1}(X)$. Esto significa que, o bien $a \in N_k(X)$, en cuyo caso es definible por hipótesis de inducción, o bien $a = h_\phi(a_1, \ldots, a_n)$, para cierta función de Skolem h_ϕ y ciertos $b_1, \ldots, b_n \in N_k(X)$. Como h_ϕ es definible, existe una fórmula $\bar{\phi}$ tal que a es el único elemento de M que cumple

$$M \vDash \bar{\phi}[a, b_1, \ldots, b_n],$$

y como cada b_i es definible a partir de elementos de X, existen $a_1, \ldots, a_m \in X$ y fórmulas ϕ_i tales que b_i es el único elemento de M que cumple

$$M \vDash \phi_i[b_i, a_1, \ldots, a_m].$$

Por consiguiente, a está definido en M a partir de $a_1, \ldots, a_m$ por la fórmula

$$\bigvee y_1 \cdots y_n (\bar{\phi}(x_0, y_1, \ldots, y_n) \wedge \phi_1(y_1, x_1, \ldots, x_m) \wedge \cdots \wedge \phi_n(y_n, x_1, \ldots, x_m)).$$

Así pues, todos los elementos de $N_{k+1}(X)$ son definibles a partir de X y, terminada la inducción, esto vale para todo elemento de $N(X)$.

Si $X \subset N \prec M$ y $a \in N(X)$, sea $\phi(x_0, \ldots, x_n)$ una fórmula que defina a a en términos de $a_1, \ldots, a_n \in X \subset N$. Entonces $M \vDash \phi[a, a_1, \ldots, a_n]$, luego $M \vDash \bigvee x_0 \, \phi[a_1, \ldots, a_n]$, luego $N \vDash \bigvee x_0 \, \phi[a_1, \ldots, a_n]$, luego existe un $b \in N$ tal que $N \vDash \phi[b, a_1, \ldots, a_n]$, luego $M \vDash \phi[b, a_1, \ldots, a_n]$, luego por la unicidad de a tiene que ser $a = b \in N$. Esto prueba que $N(X) \subset N$. ■

Notemos que es posible seleccionar distintos conjuntos de funciones de Skolem definibles en un mismo modelo, pero, según acabamos de probar, todas ellas definen los mismos núcleos de Skolem. En particular, el conjunto $N(\varnothing)$ de todos los elementos definibles de M es el menor submodelo elemental de M.

También es inmediato que los elementos de $N(X)$ son todos definibles en $N(X)$ a partir de X, así que en el modelo $N(\varnothing)$ todos los objetos son definibles.

El modelo transitivo mínimo de ZF Vamos a estudiar ahora la sentencia

MBF *Existe un modelo bien fundado de* ZF.

Aquí hay que entender que nos referimos a un modelo en el sentido fuerte de que exista un conjunto M que cumpla todos los axiomas de ZF. Por otro lado, sabemos que Consis ZF es equivalente a la existencia de un modelo de ZF, luego trivialmente MBF $\rightarrow$ Consis ZF. El segundo teorema de incompletitud de Gödel nos da entonces que MBF no es demostrable en ZF, pero vamos a dar una prueba directa de este hecho.

Antes observemos que, por el teorema del colapso de Mostowski, MBF es equivalente a la existencia de un modelo transitivo de ZF. Si M es tal modelo transitivo y $\lambda = \Omega^M$, tenemos que L_λ es un modelo transitivo de ZFC $+ V = L$, y podemos considerar el mínimo ordinal μ tal que $L_\mu \vDash$ ZFC.

El modelo L_μ recibe el nombre de *modelo mínimo* de ZFC, y es claro que está contenido en cualquier modelo transitivo de ZF. En efecto, si M es cualquier modelo transitivo de ZF, entonces L_{Ω^M} es un modelo transitivo de ZFC, luego $\mu \leq \Omega^M$, luego $L_\mu \subset L_{\Omega^M} \subset M$.

Se cumple que μ (luego también L_μ) es numerable, ya que podemos razonar a partir de él como en el teorema 3.23, es decir, tomamos un submodelo elemental numerable, lo colapsamos, y el resultado tiene que ser un L_λ, con λ numerable, tal que $L_\lambda \vDash$ ZFC, luego $\mu \leq \lambda$.

Más aún, L_μ tiene la propiedad de que todos sus elementos son definibles, pues podríamos tomar el colapso transitivo de su núcleo de Skolem $N(\varnothing)$, que sería un modelo transitivo de ZFC $+ V = L$ en el que todo elemento es definible, luego sería de la forma L_λ y la inversa de la función colapsante sería una inmersión elemental $i : L_\lambda \longrightarrow L_\mu$. Como la imagen de un ordinal en L_λ tiene que ser un ordinal en L_μ, concluimos que $\lambda \leq \mu$, luego $\lambda = \mu$ por la minimalidad de μ. Además,

$$L_\mu \vDash \mathrm{ZFC} + \neg\mathrm{MBF},$$

pues si $L_\mu \vDash \mathrm{MBF}$, entonces

$$L_\mu \vDash \bigvee\lambda\ L_\lambda \vDash \mathrm{ZFC},$$

pero esto es absoluto, por lo que debería existir un $\lambda < \mu$ tal que $L_\lambda \vDash \mathrm{ZFC}$, en contra de la minimalidad de μ.

Esto nos da una prueba constructiva de que, tal y como indicábamos, si ZFC es consistente, MBF no es demostrable en ZFC. En efecto, si en ZFC pudiera probarse MBF, entonces en ZFC podríamos probar que existe un ordinal μ tal que $L_\mu \vDash \mathrm{MBF}$ y $L_\mu \vDash \neg\mathrm{MBF}$, con lo que ZFC sería contradictorio.

En particular tenemos una prueba directa (que no requiere el segundo teorema de incompletitud de Gödel) de que en ZFC no puede probarse la existencia de cardinales inaccesibles, ya que esto implica la existencia de un modelo transitivo de ZFC.

Vamos a probar ahora que Consis ZFC no implica MBF, es decir, que la existencia de un modelo de ZFC no implica que exista un modelo bien fundado de ZF, salvo en el caso trivial en que ZFC + Consis ZFC sea contradictorio.

En efecto, si Consis ZFC $\rightarrow$ MBF, suponiendo Consis ZFC, tenemos el modelo minimal L_μ, pero $L_\mu \vDash \mathrm{Consis\,ZFC}$, pues Consis ZFC es equivalente a una afirmación sobre números naturales y, por consiguiente, es absoluta para modelos transitivos (los números naturales de L_μ son los mismos que los de V). Pero entonces tendríamos $L_\mu \vDash \mathrm{MBF}$, cuando por otra parte hemos visto que se puede probar $L_\mu \vDash \neg\mathrm{MBF}$, y así tenemos una contradicción en ZFC + Consis ZFC.

Así pues, a partir de un modelo de ZFC, no es posible construir en modo alguno un modelo bien fundado de ZFC. El teorema 2.38 nos da que podemos obtener un modelo bien fundado de KP+AP, pero ni siquiera podemos asegurar que cumple el axioma de infinitud.

3.6 Argumentos de condensación

Informalmente, reciben el nombre de argumentos de condensación los argumentos consistentes en tomar un submodelo elemental de un modelo transitivo dado de ZFC + $V = L[A]$ (o KPI, o ZF−AP), para cierto A, y usar que, por el teorema 3.11, su colapso transitivo tiene que se de la forma $L_\lambda[A']$, para cierto ordinal límite λ y cierto A' (que en ocasiones será el propio A).

Ya hemos visto un ejemplo rudimentario de esta técnica en la prueba del teorema 3.23, y otro más típico en la prueba de 3.24. Sin embargo, el más destacado es el que nos lleva a la demostración de que el axioma de constructibilidad implica la hipótesis del continuo generalizada.

La idea básica es la siguiente: tenemos que $\omega \subset L_\omega = V_\omega$, pero, mientras en $V_{\omega+1}$ se encuentran ya "todos" los subconjuntos de ω (sea lo que sea ese "todos", es decir, "todos los que están en V"), el conjunto $L_{\omega+1}$ es numerable, luego no puede contener a todos los subconjuntos de ω en ningún sentido de la palabra "todos" compatible con los axiomas de ZFC. Esto significa que, si suponemos el axioma de constructibilidad, $V = L$, en los niveles siguientes de la jerarquía constructible, $L_{\omega+1}$, $L_{\omega+2}$, $L_{\omega+3}$, ... tienen que ir apareciendo nuevos subconjuntos de ω. Sin embargo, mediante un argumento de condensación vamos a probar que $\mathcal{P}\omega \subset L_{\omega_1}$, es decir, que todos los subconjuntos de ω aparecen en los niveles numerables de la jerarquía conjuntista, luego $2^{\aleph_0} = |\mathcal{P}\omega| \leq |L_{\omega_1}| = \aleph_1$.

En realidad el teorema siguiente se deduce fácilmente de 3.24, pero merece la pena dar una prueba directa:

Teorema 3.28 *Sea A un conjunto y supongamos que $V = L[A]$. Si se cumple $A \in L_\alpha[A]$, entonces $\mathcal{P}L_\alpha[A] \subset L_{\alpha^+}[A]$.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que α es infinito, pues en caso contrario el teorema es obvio. Sea $a \in \mathcal{P}L_\alpha[A]$, sea κ un cardinal regular tal que $\alpha < \kappa$ y $L_\alpha[A] \cup \{a\} \in L_\kappa[A]$. Sea $N = N(L_\alpha[A] \cup \{a\}) \prec L_\kappa[A]$. Así tenemos que $|N| = |L_\alpha[A]| = |\alpha| < \alpha^+$ y, como $L_\alpha[A] \cup \{a\}$ es transitivo, es fácil ver que la función colapsante fija a todos sus elementos. Por lo tanto, el colapso transitivo M de N cumple que $L_\alpha[A] \subset M$ y $a \in M$. En particular $A \in M$. Como[10] $L_\kappa[A] \vDash \mathrm{KPI} + V = L[A]$, lo mismo vale para N, luego también para M, luego por 3.11 sabemos que $M = L_\lambda[A]$, para $\lambda = \Omega^M$, y $|\lambda| = |M| = |N| < \alpha^+$, luego $\lambda < \alpha^+$ y $a \in L_\lambda[A] \subset L_{\alpha^+}[A]$. ■

Notemos que en la prueba del teorema anterior no podemos garantizar que N cumple el axioma de partes, por lo que es fundamental que el teorema 3.11 es válido para modelos de KPI o ZF−AP.

De aquí se sigue inmediatamente:

Teorema 3.29 *Sea A un conjunto y supongamos $V = L[A]$. Sea α el mínimo ordinal tal que $A \in L_{\alpha^+}[A]$. Entonces para todo cardinal infinito $\kappa \geq \alpha$ se cumple $2^\kappa = \kappa^+$. En particular, si $A \subset V_\omega$ se cumple la* HCG.

DEMOSTRACIÓN: Como $\alpha \leq \kappa$, también $\alpha^+ \leq \kappa^+$, luego $A \in L_{\kappa^+}[A]$. Podemos tomar $\delta < \kappa^+$ tal que $A \in L_\delta[A]$ y $\kappa \in L_\delta[A]$. Entonces

$$\mathcal{P}\kappa \subset \mathcal{P}L_\delta[A] \subset L_{\delta^+}[A] \subset L_{\kappa^+}[A],$$

luego $2^\kappa \leq |L_{\kappa^+}[A]| = \kappa^+$, luego $2^\kappa = \kappa^+$. Si $A \subset V_\omega = L_\omega[A]$, entonces $A \in L_{\omega+1}[A]$ y sirve $\alpha = \omega$. ■

[10]Tanto da considerar KPI o ZF−AP.

La consistencia de la HCG En particular, el teorema anterior nos da que $V = L \to$ HCG, luego, como ya hemos probado que si ZFC es consistente también lo es ZCF + $V = L$, concluimos que si ZFC es consistente, también lo es ZFC + HCG. ■

Mediante un argumento de condensación más fino probamos un poco más:

Teorema 3.30 *Si* $V = L[A]$ *para un cierto* $A \subset \omega_1$*, se cumple la* HCG.

DEMOSTRACIÓN: Tenemos $A \subset L_{\omega_1}[A]$, luego $A \in \mathcal{P}\mathcal{D}_A L_{\omega_1}[A] = L_{\omega_1+1}[A]$, y el teorema anterior nos da que $2^\kappa = \kappa^+$ siempre que $\kappa \geq \aleph_1$. Así pues, basta probar que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. A su vez, para ello basta probar que $\mathcal{P}\omega \subset L_{\omega_1}[A]$.

Tomemos $a \in \mathcal{P}\omega$. El teorema 3.28 nos da que $a \in L_{\omega_2}[A]$. Consideremos $N = N(\omega \cup \{a, \omega, \omega_1, A\}) \prec L_{\omega_2}[A]$. Claramente $|N| = \aleph_0$.

Observemos que si α es un ordinal numerable, entonces α es numerable$^{L_{\omega_2}[A]}$. En efecto, si $f : \omega \longrightarrow \alpha$ biyectiva, entonces $f \subset \omega \times \alpha \subset L_{\omega_1}[A]$, luego por 3.28 tenemos que $f \in L_{\omega_2}[A]$.

Por consiguiente, si $\alpha \in N$ cumple $\alpha < \omega_1$, entonces $L_{\omega_2}[A] \vDash [\alpha]$ es numerable, luego lo mismo vale en N, luego existe $f \in N$ tal que $N \vDash [f] : \omega \longrightarrow \alpha$ biyectiva, luego lo mismo vale en $L_{\omega_2}[A]$, luego $f : \omega \longrightarrow \alpha$ biyectiva. Para cada $n \in \omega$ se cumple $L_{\omega_2}[A] \vDash [n] \in \omega$, luego N cumple lo mismo, luego existe un $y \in N$ tal que $N \vDash ([n], [y]) \in [f]$, luego $L_{\omega_2}[A]$ cumple lo mismo, luego $(n, y) \in f$, es decir, $f(n) \in N$, luego $\alpha \subset N$.

Con esto hemos probado que $\omega_1 \cap N$ es un conjunto transitivo, luego es un ordinal. Usando que en $L_{\omega_2}[A]$ el siguiente de un ordinal numerable es numerable concluimos que $\lambda = \omega_1 \cap N$ es, de hecho, un ordinal límite (numerable).

Sea $\pi : N \longrightarrow M$ la función colapsante. Es claro que $\pi(a) = a$, así como que π fija a todos los elementos de λ, luego,

$$\pi(\omega_1) = \{\pi(\alpha) \mid \alpha \in \omega_1 \cap N\} = \lambda.$$

Como $A \subset \omega_1$, $\pi(A) = \{\pi(\alpha) \mid \alpha \in A \cap N\} = A \cap \lambda$, luego M es un modelo transitivo numerable de KPI+$V = L[A \cap \lambda]$. Esto implica que $M = L_\delta[A \cap \lambda]$, para cierto $\delta < \omega_1$.

Así pues, tenemos que $a \in L_{\omega_1}[A \cap \lambda]$, con $\lambda < \omega_1$. Ahora bien, es claro que $A \cap \lambda \in L_{\lambda+1}[A] \subset L_{\omega_1}[A]$ y éste es un modelo transitivo de KPI, luego por 3.11 concluimos que $L_{\omega_1}[A \cap \lambda] \subset L_{\omega_1}[A]$. Así pues, $a \in L_{\omega_1}[A]$. ■

Yendo más lejos en esta línea podemos demostrar que el axioma de constructibilidad implica los diamantes de Jensen [TC 6.35].

Teorema 3.31 (V=L) *Si* κ *es un cardinal infinito, se cumple* $\Diamond^+_{\kappa^+}$.

DEMOSTRACIÓN: Definimos $f : \kappa^+ \longrightarrow \kappa^+$ como la función que a cada $\alpha < \kappa^+$ le asigna el menor ordinal $f(\alpha)$ tal que $\alpha \in L_{f(\alpha)} \prec L_{\kappa^+}$. Definimos $S_\alpha = \mathcal{P}\alpha \cap L_{f(\alpha)}$ y vamos a probar que $\{S_\alpha\}_{\alpha<\kappa^+}$ es una sucesión $\Diamond^+_{\kappa^+}$.

Ciertamente se cumple que $S_\alpha \subset \mathcal{P}\alpha$ y que $|S_\alpha| < \kappa^+$. Tomamos $X \subset \kappa^+$ y basta probar que existe un C c.n.a. en κ^+ tal que para todo $\alpha \in C$ se cumple $X \cap \alpha \in S_\alpha$ y $C \cap \alpha \in S_\alpha$.

Definimos como sigue una sucesión $\{N_\alpha\}_{\alpha<\kappa^+}$:

$$N_0 = N(\kappa \cup \{\kappa, \kappa^+, X\}) \prec L_{\kappa^{++}}, \quad N_{\alpha+1} = N(N_\alpha \cup \{\alpha, N_\alpha\}) \prec L_{\kappa^{++}},$$

$$N_\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} N_\delta.$$

Aquí es importante que los núcleos de Skolem se calculan mediante funciones de Skolem definibles, con lo que se cumple el teorema 3.27, es decir, N_0 es el menor submodelo elemental de $L_{\kappa^{++}}$ que contiene a $\kappa \cup \{\kappa, \kappa^+, X\}$ y $N_{\alpha+1}$ es el menor submodelo elemental que contiene a $N_\alpha \cup \{\alpha, N_\alpha\}$.

Notemos que $N_\alpha \prec L_{\kappa^{++}}$. El caso límite se prueba fácilmente a partir de [TC 10.22]. Similarmente se prueba que si $\alpha < \beta < \kappa^+$ entonces $N_\alpha \prec N_\beta$. Es inmediato que $|N_\alpha| < \kappa^+$ y que $\alpha \subset N_\alpha$.

Por 3.28 se cumple que si $\delta < \kappa^{++}$ entonces $\mathcal{P}L_\delta[A] \subset L_{\kappa^{++}}$. En particular todo ordinal $\delta < \kappa^+$ tiene cardinal $\leq \kappa$ en $L_{\kappa^{++}}$ (porque toda $f : \kappa \longrightarrow \delta$ suprayectiva está en $L_{\kappa^{++}}$). Esto significa que κ^+ es el cardinal siguiente a κ en $L_{\kappa^{++}}$.

Se cumple que $\lambda_\alpha = N_\alpha \cap \kappa^+ \in \kappa^+$. En efecto, basta probar que la intersección es transitiva. Si $\beta \in N_\alpha \cap \kappa^+$, existe $f : \kappa \longrightarrow \beta$ suprayectiva, y de hecho se cumple que $f \in L_{\kappa^{++}}$, luego por [TC 10.22] existe $f \in N_\alpha$ tal que $f : \kappa \longrightarrow \beta$ suprayectiva.

Para cada $\gamma \in \beta$ existe un $\delta \in \kappa \subset N_\alpha$ tal que $\gamma = f(\delta)$ y, puesto que $\bigvee x \in N_\alpha\ N_\alpha \vDash x = f(\delta)$, al pasar esto a $L_{\kappa^{++}}$ llegamos a que $x = f(\delta) = \gamma$, luego $\gamma \in N_\alpha$, luego $\beta \subset N_\alpha \cap \kappa^+$.

La sucesión $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha<\kappa^+}$ es normal, pues, como N_α, $\kappa^+ \in N_{\alpha+1}$, tenemos también que $N_\alpha \cap \kappa^+ \in N_{\alpha+1}$ (usamos que $N_{\alpha+1} \prec L_{\kappa^{++}}$ y que éste es cerrado para intersecciones), luego $\lambda_\alpha < \lambda_{\alpha+1}$,

Definimos

$$C = \{\alpha < \kappa^+ \mid \lambda_\alpha = \alpha\},$$

que es c.n.a. en κ^+.

Vamos a ver que C es el conjunto que necesitamos, es decir, que si $\alpha \in C$ entonces $X \cap \alpha \in S_\alpha$ y $C \cap \alpha \in S_\alpha$. Fijamos, pues, $\alpha \in C$. Así $\alpha = \lambda_\alpha > \kappa$.

Sea $\pi : N_\alpha \longrightarrow M$ el colapso transitivo de N_α. Como $\alpha \subset N_\alpha$, tenemos que π fija a los ordinales menores que α, luego

$$\pi(\kappa) = \kappa, \quad \pi(\kappa^+) = \lambda_\alpha = \alpha, \quad \pi(X) = X \cap \alpha.$$

Como $N_\alpha \vDash V = L$, lo mismo vale en M, luego existe un $\beta < \kappa^+$ tal que $M = L_\beta$.

Veamos ahora que $\beta < f(\alpha)$.

En efecto, por una parte observamos que $N_\alpha \vDash |\kappa^+| > \kappa$, luego, aplicando π, resulta que $L_\beta \vDash |\alpha| > \kappa$. Por otro lado, el teorema 3.28 nos permite concluir que $L_{\kappa^+} \vDash |\alpha| \leq \kappa$, luego $L_{f(\alpha)} \vDash |\alpha| \leq \kappa$, y esto sólo puede ocurrir si $\beta < f(\alpha)$.

Ahora ya es inmediato que $X \cap \alpha \in L_\beta \subset L_{f(\alpha)}$, luego $X \cap \alpha \in S_\alpha$. Por último basta probar que la sucesión $\{\lambda_\delta\}_{\delta<\alpha}$ está en $L_{f(\alpha)}$, pues esto implica que

$$C \cap \alpha = \{\delta < \alpha \mid \lambda_\delta = \delta\} \in L_{f(\alpha)} \cap \mathcal{P}\alpha = S_\alpha.$$

Para ello definimos modelos $\{N'_\delta\}_{\delta<\alpha}$ como sigue:

$$N'_0 = N(\kappa \cup \{\kappa, \alpha, X \cap \alpha\}) \prec L_\beta, \quad N'_{\delta+1} = N(N'_\delta \cup \{\delta, N'_\delta\}) \prec L_\beta,$$

$$N'_\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} N'_\delta.$$

Ahora, como N_0 es el menor submodelo elemental de N_α que contiene a $\kappa \cup \{\kappa, \kappa^+, X\}$, es claro que $\pi(N_0) = \pi[N_0]$ el el menor submodelo elemental de L_β que contiene a $\kappa \cup \{\kappa, \alpha, X \cap \alpha\}$, es decir, que $\pi(N_0) = N'_0$. Razonando por inducción concluimos que $N'_\delta = \pi(N_\delta)$. Además, como π fija a los ordinales $< \alpha$, es claro que $\lambda_\delta = N_\delta \cap \kappa^+ = N'_\delta \cap \alpha$.

Así basta tener en cuenta que la sucesión $\{N'_\delta\}_{\delta<\alpha}$ puede definirse en $L_{f(\alpha)}$ a partir de L_β, κ, α y $X \cap \alpha$, y a partir de ella se define $\{\lambda_\delta\}_{\delta<\alpha} \in L_{f(\alpha)}$. ■

En particular, por [TC 6.40] tenemos que $V = L$ implica $\diamondsuit_E$ para todo conjunto estacionario $E \subset \kappa^+$, y por [TC 9.15] y [TC 9.33] existen κ^+-árboles de Kurepa para todo cardinal infinito κ y de Suslin si además κ es regular.

No es cierto que $V = L$ implique $\diamondsuit_\kappa^+$ para todo cardinal regular κ. Si κ es inaccesible no tiene por qué ser cierto. Sin embargo, sí que puede probarse $\diamondsuit_E$ para todo conjunto estacionario $E \subset \kappa$ siempre que κ es regular no numerable. La prueba es algo más compleja. Conviene demostrar un resultado previo:

Teorema 3.32 *Sea κ un cardinal regular no numerable, $\lambda > \kappa$ un ordinal límite y $X \subset L_\lambda$ un conjunto tal que $|X| < \kappa$. Entonces existe $N \prec L_\lambda$ tal que $X \subset N$, $|N| < \kappa$ y $N \cap \kappa \in \kappa$.*

Demostración: Vamos a construir una sucesión $\{N_n\}_{n\in\omega}$ de submodelos elementales de L_λ, todos ellos de cardinal menor que κ. Partimos del núcleo de Skolem $N_0 = N(X)$. Supuesto definido N_n, llamamos $\alpha_n = \bigcup(N_n \cap \kappa)$. Como $|N_n \cap \kappa| < \kappa$ y κ es regular, tenemos que $\alpha_n < \kappa$, luego $N_{n+1} = N(N_n \cup \alpha_n)$ tiene también cardinal $< \kappa$. Por último llamamos $N = \bigcup\limits_{n\in\omega} N_n$. Usando [TC 10.21] se comprueba inmediatamente que $N \prec L_\lambda$, y por la regularidad de κ es claro que $|N| < \kappa$. También es obvio que $X \subset N$. Además:

$$N \cap \kappa = \bigcup_{n\in\omega} (N_n \cap \kappa) \subset \bigcup_{n\in\omega} \alpha_n \subset \bigcup_{n\in\omega} N_{n+1} \cap \kappa = N \cap \kappa.$$

Por lo tanto, $N \cap \kappa = \bigcup\limits_{n\in\omega} \alpha_n \in \kappa$, pues κ es regular no numerable. ■

Teorema 3.33 ($V = L$) *Si κ es un cardinal regular no numerable y E es un conjunto estacionario en κ, se cumple $\Diamond_E$.*

DEMOSTRACIÓN: Definimos por recurrencia una sucesión $\{(A_\alpha, C_\alpha)\}_{\alpha\in E}$ de subconjuntos de α. Concretamente, dado $\lambda \in E$ y supuesta definida la sucesión $\{(A_\alpha, C_\alpha)\}_{\alpha\in E\cap\lambda}$, si λ es un ordinal límite y existe un par (A, C) tal que $C \subset \lambda$ es c.n.a. en λ y $\bigwedge \alpha \in C \cap E\ A \cap \alpha \neq A_\alpha$, entonces tomamos como (A_λ, C_λ) el mínimo par que cumple esto (respecto al buen orden constructible), y en caso contrario tomamos $A_\lambda = C_\lambda = \varnothing$.

Vamos a probar que la sucesión $\{A_\alpha\}_{\alpha\in E}$ cumple $\Diamond_E$, pero antes observemos que el conjunto A_α está definido por una fórmula $\phi(x, \alpha, \kappa, E)$, en el sentido de que en ZFC + $V = L$ se demuestra que si κ es un cardinal regular no numerable y E es un conjunto estacionario en κ entonces existe un único x que cumple $\phi(x, \alpha, \kappa, E)$ y dicho x es necesariamente el A_α que acabamos de definir. Más aún, el teorema de recursión que hemos empleado en la definición es demostrable en ZF$-$AP, por lo que la definición es válida en la teoría T determinada por ZF$-$AP + $V = L$. (En T no puede demostrarse que existan cardinales no numerables, pero sí que podemos probar que si κ es un cardinal regular no numerable y E es estacionario en κ entonces existe una (única) sucesión $\{A_\alpha\}_{\alpha\in E}$ en las condiciones indicadas.)

Ciertamente tenemos que $A_\alpha \subset \alpha$, y tenemos que probar que, fijado $A \subset \kappa$, el conjunto $\{\alpha \in E \mid A\cap\alpha = A_\alpha\}$ es estacionario en κ. En caso contrario, existe un C c.n.a. en κ tal que

$$\{\alpha \in E \mid A \cap \alpha = A_\alpha\} \cap C = \varnothing.$$

Podemos tomar el mínimo par (A, C) para el que sucede esto (respecto del buen orden constructible). Equivalentemente, tenemos que

$$\bigwedge \alpha \in C \cap E\ A \cap \alpha \neq A_\alpha.$$

Por 3.28 tenemos que L_{κ^+} contiene a todos los conjuntos $\mathcal{P}\alpha$ para todo $\alpha \leq \kappa$. En particular $E \in L_{\kappa^+}$. Como L_{κ^+} es un modelo de T, podemos considerar la relativización $(\{(A_\alpha, C_\alpha)\}_{\alpha\in E})^{L_{\kappa^+}}$.

Como "ser una sucesión de pares ordenados con dominio E" es absoluto, la relativización es en realidad una sucesión de la forma $\{(A_\alpha^{L_{\kappa^+}}, C_\alpha^{L_{\kappa^+}})\}_{\alpha\in E}$. Como en T se demuestra que $A_\alpha \subset \alpha$ y $C_\alpha \subset \alpha$, se cumple la relativización de esto a L_{κ^+}, es decir, $A_\alpha^{L_{\kappa^+}} \subset \alpha$, $C_\alpha^{L_{\kappa^+}} \subset \alpha$.

Veamos por inducción sobre $\alpha \in E$ que $A_\alpha^{L_{\kappa^+}} = A_\alpha$ y $C_\alpha^{L_{\kappa^+}} = C_\alpha$. Suponemos que esto es cierto para todo $\alpha \in E \cap \lambda \in E$ y distinguimos casos:

Si λ no es un ordinal límite, como en T se demuestra que si λ no es un límite entonces $A_\lambda = C_\lambda = \varnothing$, al relativizar (teniendo en cuenta que ser un ordinal límite es absoluto) concluimos que $A_\lambda^{L_{\kappa^+}} = C_\lambda^{L_{\kappa^+}} = \varnothing = A_\lambda = C_\lambda$.

Supongamos ahora que λ es un ordinal límite. Si existe un par (A, C) tal que $C \subset \lambda$ es c.n.a. en λ y $\bigwedge \alpha \in C \cap E\ A \cap \alpha \neq A_\alpha$, todo esto es absoluto (y aquí usamos la hipótesis de inducción, según la cual si $\alpha \in C \subset \lambda$ tenemos la igualdad $A_\alpha^{L_{\kappa^+}} = A_\alpha$), luego se cumple en L_{κ^+}. Más aún, cualquier par en estas condiciones está en L_{κ^+} y, como el buen orden constructible también es absoluto, el menor de tales pares en L_{κ^+} (que es por definición $(A_\lambda^{L_{\kappa^+}}, C_\lambda^{L_{\kappa^+}})$), coincide con el menor de tales pares (que es (A_λ, C_λ)), luego tenemos la igualdad.

Por último, si no existe ningún par en las condiciones indicadas, tampoco existe en L_{κ^+}, porque las condiciones son absolutas, luego nuevamente llegamos a que $A_\lambda^{L_{\kappa^+}} = C_\lambda^{L_{\kappa^+}} = \varnothing = A_\lambda = C_\lambda$.

Así pues, $\{(A_\alpha, C_\alpha)\}_{\alpha\in E} \in L_{\kappa^+}$. Por otra parte, también tenemos que $(A, C) \in L_{\kappa^+}$. Más aún, se trata del mínimo par en L_{κ^+} (porque todos los pares posibles están en L_{κ^+} y el orden constructible es absoluto) tal que

$$\bigwedge \alpha \in C \cap E \ A \cap \alpha \neq A_\alpha,$$

donde usamos que A_α es absoluto.

En el caso $E = \kappa$, en este punto de la prueba bastaría aplicar el teorema anterior para obtener un $N \prec L_{\kappa^+}$ que cumpla $\{\kappa, A, C\} \subset N$, $|N| < \kappa$ y $\lambda = N \cap \kappa \in \kappa$. En el caso general necesitamos refinar como sigue la construcción para asegurar que $\lambda \in E$:

Construimos una sucesión $\{N_\delta\}_{\delta<\kappa}$ de modelos $N_\delta \prec L_{\kappa^+}$ tales que $|N_\delta| < \kappa$. Tomamos N_0 según el teorema anterior, de modo que $\{\kappa, A, C, E\} \subset N_0$ y $\lambda_0 = N_0 \cap \kappa \in \kappa$. Supuesto definido N_δ tal que $\lambda_\delta = N_\delta \cap \kappa \in \kappa$, tomamos $N_{\delta+1}$ según el teorema anterior de modo que $N_\delta \cup \{\lambda_\delta\} \subset N_{\delta+1}$. Así $\lambda_\delta < \lambda_{\delta+1}$. Por último, supuestos definidos $\{N_\delta\}_{\delta<\eta}$, donde $\eta < \kappa$ es un ordinal límite, tomamos $N_\eta = \bigcup\limits_{\delta<\eta} N_\delta$, que es un submodelo elemental de L_{κ^+} (se sigue de [TC 10.21]) y además

$$\lambda_\eta = N_\eta \cap \kappa = \bigcup_{\delta<\eta} (N_\delta \cap \kappa) = \bigcup_{\delta<\eta} \lambda_\delta < \kappa,$$

porque κ es regular. Así pues, la sucesión $\{\lambda_\delta\}_{\delta<\kappa}$ es normal, luego su rango es c.n.a. en κ, luego existe un $\delta < \kappa$ tal que $\lambda = \lambda_\delta \in E$. Llamamos $N = N_\delta$, con lo que tenemos que $\kappa, A, C \in N$, $N \prec L_{\kappa^+}$, $|N| < \kappa$ y además $\lambda = N \cap \kappa \in E$.

Sea $\pi : N \longrightarrow M$ la función colapsante de Mostowski. Como trivialmente se restringe a la identidad en λ, es obvio que $\pi(\kappa) = \lambda$, $\pi(A) = A \cap \lambda$, $\pi(C) = C \cap \lambda$ y $\pi(E) = E \cap \lambda$ (en particular vemos que λ es un ordinal límite, por serlo κ).

Sea $\phi(x, \alpha, \kappa, E) \equiv x = A_\alpha$. Si $\alpha \in E \cap \lambda$, tenemos $(\bigvee x\, \phi(x, \alpha, \kappa, E))^{L_{\kappa^+}}$, luego $(\bigvee x\, \phi(x, \alpha, \kappa, E))^N$, que es lo mismo que $\bigvee x \in N\, \phi^N(x, \alpha, \kappa, E)$, luego $\bigvee x \in N \phi^{L_{\kappa^+}}(x, \alpha, \kappa, E)$, y esto implica que $A_\alpha \in N$ y, teniendo en cuenta que $A_\alpha \subset \alpha \subset \lambda$, vemos que $A_\alpha = \pi(A_\alpha) \in M$.

Más aún, como $\phi^{L_{\kappa^+}}(A_\alpha, \alpha, \kappa, E)$, también $\phi^N(A_\alpha, \alpha, \kappa, E)$, luego, aplicando π, tenemos que $\phi^M(A_\alpha, \alpha, \lambda, E \cap \lambda)$, es decir, que A_α cumple en M la misma definición que A_α, pero con λ en lugar de κ y $E \cap \lambda$ en lugar de E.

Consideremos ahora la fórmula $\psi(A, C, \kappa, E) \equiv (A, C)$ es el mínimo par (respecto a $\trianglelefteq$) tal que $A \subset \kappa$, C es c.n.a. en κ y $\bigwedge \alpha \in C \cap E \ A \cap \alpha \neq A_\alpha$.

Se cumple $\psi(A, C, \kappa, E)$, y es claro que esto es absoluto para L_{κ^+}, es decir, que $\psi^{L_{\kappa^+}}(A, C, \kappa, E)$, luego $\psi^N(A, C, \kappa, E)$, y aplicando π llegamos a que $\psi^M(A \cap \lambda, C \cap \lambda, \lambda, E \cap \lambda)$. Esto significa que $(A \cap \lambda, C \cap \lambda)$ es el mínimo par respecto al orden $\trianglelefteq$ tal que $A \cap \lambda \subset \lambda$, $C \cap \lambda$ es c.n.a. en λ y

$$\bigwedge \alpha \in C \cap E \cap \lambda\ A \cap \alpha \neq A_\alpha,$$

donde usamos que si $\alpha < \lambda$, el A_α definido en M a partir de λ y $E \cap \lambda$ es precisamente A_α.

Ahora bien, por la propia definición de la sucesión $\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ (y aquí usamos que $\lambda \in E$) esto significa que $(A \cap \lambda, C \cap \lambda) = (A_\lambda, C_\lambda)$, luego en particular $A \cap \lambda = A_\lambda$. Por otra parte, como $C \cap \lambda$ no está acotado en λ y C es c.n.a. en κ, resulta que $\lambda \in C \cap E$, y por la elección de (A, C) tenemos que $A \cap \lambda \neq A_\lambda$, contradicción. ■

Se cumple que $V = L$ implica también los principios $\square_\kappa$ para todo cardinal infinito κ, pero la prueba es mucho más complicada.

3.7 Cardinales inaccesibles en L

Ya hemos visto que "ser un cardinal" es una propiedad Π_1 en ZFC, y también lo es "ser un cardinal débilmente inaccesible":

$$\kappa \text{ d.i.} \leftrightarrow \kappa \text{ es un cardinal} \land \bigwedge \alpha \in \kappa \bigvee \mu \in \kappa(\alpha \in \mu \land \mu \text{ es un cardinal})$$

$$\land \bigwedge x(x \subset \kappa \land \bigwedge \alpha \in \kappa \bigvee \beta \in x\ \alpha \in \beta \to \neg \bigvee f(f : x \longrightarrow \kappa \text{ biyectiva})).$$

Por lo tanto, si κ es un cardinal (débilmente inaccesible), también lo es en cualquier modelo transitivo de ZFC al que pertenezca. En particular, si κ es un cardinal débilmente inaccesible, entonces κ es débilmente inaccesible^L, pero como en L se cumple la HCG, resulta que κ es fuertemente inaccesible^L.

A su vez, esto implica que si ZFC + $\bigvee \kappa$ débilmente inaccesible es consistente, también lo es ZFC + $\bigvee \kappa$ fuertemente inaccesible.

Vemos, pues, que "ser débilmente inaccesible" es una propiedad más débil que "ser fuertemente inaccesible", en el sentido de que un cardinal puede ser débilmente inaccesible sin ser fuertemente inaccesible, o incluso puede ocurrir que existan cardinales débilmente inaccesibles y no existan cardinales fuertemente inaccesibles, pero en cuanto a consistencia, ambas propiedades son equivalentes: es consistente que exista un cardinal débilmente inaccesible si y sólo si lo es que exista un cardinal fuertemente inaccesible. Más aún:

Teorema 3.34 *Si κ es un cardinal débilmente inaccesible, $L_\kappa \vDash$ ZFC.*

DEMOSTRACIÓN: Hemos visto que κ es fuertemente inaccesible^L, luego $(H(\kappa) \vDash \text{ZFC})^L$ (por la observación tras el teorema 2.34), pero por 3.24 tenemos que $H(\kappa)^L = L_\kappa^L = L_\kappa$, luego, teniendo en cuenta que $M \vDash$ ZFC es Δ_1, luego absoluto, concluimos que $L_\kappa \vDash$ ZFC. ■

Así pues,

$$\bigvee\kappa\ \kappa\text{débilmente inaccesible} \rightarrow \text{MBF} \rightarrow \text{Consis ZFC},$$

y todas las consecuencias que hemos extraído sobre la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles se aplican también a los cardinales débilmente inaccesibles: en ZFC no puede probarse que existan, y no se puede probar que sea consistente que existan ni siquiera suponiendo la consistencia de ZFC.

En el resto de esta sección vamos a estudiar la situación inversa: que κ sea un cardinal inaccesible^L no implica necesariamente que κ sea débilmente inaccesible, o ni siquiera un cardinal. Empezamos con un resultado técnico:

Teorema 3.35 *Si $\alpha \geq \omega$ es un ordinal numerable, existe un $a \subset \omega$ tal que α es numerable$^{L[a]}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $R \subset \omega \times \omega$ un buen orden en ω de ordinal α. Sea $g \in L$ tal que $g : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ biyectiva y sea $a = g[R] \subset \omega$. Entonces $a \in L[a]$ y $g \in L \subset L[a]$, luego $R = g^{-1}[a] \in L[a]$, luego la semejanza entre (ω, R) y α tiene que estar en $L[a]$, luego α es numerable$^{L[a]}$. ■

Veamos ahora una condición suficiente para que $\aleph_1$ sea inaccesible^L:

Teorema 3.36 *Si $\bigwedge a \subset \omega\ \aleph_1^{L[a]} < \aleph_1$, entonces $\aleph_1$ es inaccesible^L.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\aleph_1$ no es inaccesible^L. En cualquier caso es un cardinal regular no numerable^L, luego que no sea inaccesible equivale a que tiene un anterior, es decir, a que existe $\alpha < \aleph_1$ tal que $\aleph_1 = (\alpha^+)^L$. Por el teorema anterior existe un $a \subset \omega$ tal que α es numerable$^{L[a]}$.

Basta probar que $\aleph_1 = \aleph_1^{L[a]}$. A su vez, esto equivale a probar que si $\beta < \aleph_1$, entonces β es numerable$^{L[A]}$, con lo que $\aleph_1$ será el menor ordinal no numerable$^{L[a]}$. Ahora bien, tenemos que $\beta < (\alpha^+)^L$, luego existe $f \in L$ tal que $f : \alpha \longrightarrow \beta$ suprayectiva, pero entonces $f \in L[a]$ y, como α es numerable$^{L[a]}$, lo mismo le sucede a β. ■

Nota Que $\aleph_1$ sea inaccesible en L implica en particular que

$$\aleph_0 < \aleph_1^L < \aleph_2^L < \cdots < \aleph_\omega^L < \cdots < \aleph_1,$$

y, en general, que todos los cardinales que podemos definir y demostrar en ZFC que son menores que cualquier cardinal fuertemente inaccesible, son en L ordinales numerables. Más adelante demostraremos que si es consistente que exista un cardinal inaccesible, también lo es que $\aleph_1$ sea inaccesible^L. ■

Vamos a dar una condición suficiente para que $\aleph_2$ sea inaccesible^L. Nos apoyamos en el resultado siguiente:

Teorema 3.37 *Existe un $A \subset \omega_1$ tal que $\aleph_1^{L[A]} = \aleph_1$.*

Demostración: Para cada $\alpha < \omega_1$ sea $a_\alpha \subset \omega$ tal que α es numerable$^{L[a_\alpha]}$. Sea $B = \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} \{\alpha\} \times a_\alpha \subset \omega_1 \times \omega$. Sea $f \in L$ tal que $f : \omega_1 \times \omega \longrightarrow \omega_1$ biyectiva. El conjunto $A = f[B]$ cumple lo pedido, pues $A \in L[A]$, luego $B \in L[A]$, luego, para cada $\alpha < \omega_1$, se cumple $a_\alpha \in L[A]$, luego α es numerable$^{L[A]}$, luego ω_1 es el menor ordinal no numerable$^{L[A]}$. ■

Teorema 3.38 *Si $\aleph_2$ no es inaccesible^L, entonces existe $A \subset \omega_1$ de manera que $\aleph_1^{L[A]} = \aleph_1$ y $\aleph_2^{L[A]} = \aleph_2$.*

Demostración: La hipótesis significa que $\aleph_2 = (\alpha^+)^L$. Claramente ha de ser $|\alpha| = \aleph_1$. Sea $R \subset \omega_1 \times \omega_1$ un buen orden en ω_1 de ordinal α. Sea $f \in L$ tal que $f : \omega_1 \times \omega_1 \longrightarrow \omega_1$ biyectiva y sea $A_0 = f[R] \subset \omega_1$. Sea $A_1 \subset \omega_1$ tal que $\aleph_1^{L[A_1]} = \aleph_1$. Sea $A_2 = (\{0\} \times A_0) \cup (\{1\} \times A_1)$. Sea $g \in L$ tal que $g : 2 \times \omega_1 \longrightarrow \omega_1$ biyectiva y sea $A = g[A_2] \subset \omega_1$.

Claramente, A_0 y A_1 están en $L[A]$, luego también $R \in L[A]$. Del hecho de que $A_1 \in L[A]$ se sigue que $L[A_1] \subset L[A]$, y de aquí que $\aleph_1^{L[A]} = \aleph_1$.

Por otra parte, del hecho de que $R \in L[A]$ se sigue que $|\alpha|^{L[A]} = \aleph_1$. Si $\beta < \omega_2$, entonces $\beta < (\alpha^+)^L$, luego existe $h \in L$ tal que $h : \alpha \longrightarrow \beta$ suprayectiva, la cual nos permite construir $j \in L[A]$ tal que $j : \omega_1 \longrightarrow \beta$ suprayectiva. Esto implica que no hay cardinales$^{L[A]}$ entre $\aleph_1$ y $\aleph_2$, luego $\aleph_2^{L[A]} = \aleph_2$. ■

En ZFC se demuestra [TC 9.19] la existencia de $\aleph_1$-árboles de Aronszajn, mientras que según [TC 9.21] la hipótesis del continuo $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ implica la existencia de $\aleph_2$-árboles de Aronszajn. Cabe preguntarse si es consistente con ZFC que no existan $\aleph_2$-árboles de Aronszajn, y a este respecto tenemos el hecho siguiente:

Teorema 3.39 *Si no existen $\aleph_2$-árboles de Aronszajn, entonces $\aleph_2$ es un cardinal inaccesible^L.*

Demostración: Si $\aleph_2$ no es inaccesible^L, por el teorema anterior existe $A \subset \omega_1$ tal que $\aleph_1^{L[A]} = \aleph_1$ y $\aleph_2^{L[A]} = \aleph_2$. Por 3.30 sabemos que en $L[A]$ se cumple la hipótesis del continuo generalizada, pero esto implica que existe un ($\aleph_2$-árbol de Aronszajn)$^{L[A]}$ $(X, \leq)$. Más aún, según la prueba de [TC 9.19], podemos tomar X formado por aplicaciones inyectivas de ordinales $< \omega_2$ en ω_1 con el orden dado por la inclusión.

Del hecho de que $\aleph_1^{L[A]} = \aleph_1$ y $\aleph_2^{L[A]} = \aleph_2$ se sigue inmediatamente que $(X, \leq)$ es un $\aleph_2$-árbol, y no puede tener caminos, pues un camino daría lugar a una aplicación inyectiva de ω_2 en ω_1. Por consiguiente, es un $\aleph_2$-árbol de Aronszajn. ■

Esto implica que no podemos aspirar a demostrar que, si ZFC es consistente, también lo es ZFC + no existen $\aleph_2$-árboles de Aronszajn, pues esto implicaría la consistencia de ZFC + existe un cardinal inaccesible. Por lo tanto, para demostrar la consistencia de que no existan $\aleph_2$-árboles de Aronszajn es necesario suponer al menos que es consistente ZFC más la existencia de un cardinal inaccesible. En realidad, no siquiera esto es suficiente, y hace falta una hipótesis aún más fuerte.

Sabemos que $\Diamond^+$ (y en particular $V = L$) implica la existencia de un árbol de Kurepa. Ahora probaremos que la no existencia de árboles de Kurepa implica también la existencia de un cardinal inaccesible^L, por lo que la situación es la misma que con la no existencia de $\aleph_2$-árboles de Aronszajn. Para ello necesitamos generalizar el teorema 3.31:

Teorema 3.40 *Si $V = L[A]$ con $A \subset \omega_1$ y κ es un cardinal infinito, entonces se cumple $\Diamond^+_{\kappa^+}$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\kappa \geq \aleph_1$ la demostración de 3.31 vale con los mínimos cambios obvios. En efecto, en este caso tenemos que $A \subset \kappa$ y, como claramente $A \in L_{\omega_1+1}[A]$, también $A \in L_{\kappa^+}[A]$, y esto basta para justificar todas las aplicaciones de 3.28. Tomando $N_0 = N(\kappa \cup \{\kappa, \kappa^+, X, A\})$ tenemos que $A \in N_\alpha$ y $\pi(A) = A$, por lo que el colapso transitivo de N_α es de la forma $L_\beta[A]$, para cierto $\beta < \kappa^+$, y todo el argumento es válido.

Supongamos, pues, que $\kappa = \omega$. El problema principal es que no vamos a poder exigir que $A \in N_0$, porque necesitamos que los modelos N_α sean numerables, y eso hará que no podamos asegurar que sus colapsos sean de la forma $L_\beta[A]$. Por ello empezamos definiendo $f : \omega_1 \longrightarrow \omega_1$ como la función que a cada $\alpha < \omega_1$ le asigna el menor ordinal $f(\alpha)$ tal que $\alpha \in L_{f(\alpha)}[A \cap \alpha] \prec L_{\omega_1}[A \cap \alpha]$. Definimos $S_\alpha = \mathcal{P}\alpha \cap L_{f(\alpha)}[A \cap \alpha]$ y vamos a probar que $\{S_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ es una sucesión $\Diamond^+$.

Para ello fijamos un $X \subset \omega_1$ y definimos[11]

$$N_0 = N(\{\omega, \omega_1, X, A\}) \prec L_{\omega_2}[A], \quad N_{\alpha+1} = N(N_\alpha \cup \{\alpha, N_\alpha\}) \prec L_{\omega_2}[A],$$

$$N_\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} N_\delta.$$

Así se cumple que todos los N_α son submodelos elementales numerables de $L_{\omega_2}[A]$, así como que $\alpha \subset N_\alpha$. El hecho de que $A \in L_{\omega_1+1}[A] \subset L_{\omega_2}[A]$ justifica las aplicaciones del teorema 3.28 análogas a las consideradas en 3.31 que nos permiten justificar que $\omega_1^{L_{\omega_2}[A]} = \omega_1$ y que $\lambda_\alpha = N_\alpha \cap \omega_1 \in \omega_1$. Se prueba igualmente que la sucesión $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ es normal. Definimos el c.n.a.

$$C = \{\alpha \in \omega_1 \mid \lambda_\alpha = \alpha\},$$

y vamos a probar que cumple lo requerido por $\Diamond^+$ para el conjunto X. Para ello tomamos $\alpha \in C$. Como $\alpha = \lambda_\alpha$ es el mínimo ordinal $< \omega_1$ que no está en N_α y la función colapsante $\pi : N_\alpha \longrightarrow M$ fija a los ordinales menores que α, concluimos que

$$\pi(\omega_1) = \alpha, \quad \pi(A) = A \cap \alpha, \quad \pi(X) = X \cap \alpha.$$

[11]Es fácil ver que es equivalente definir $N_0 = N(\{X\})$, pero cuesta menos exigir por definición que N_0 contenga a los otros conjuntos indicados que demostrar que los contiene.

Como $L_{\omega_2}[A] \vDash V = L[A]$, lo mismo vale para N_α y, aplicando π, concluimos que $M \vDash V = L[A \cap \alpha]$ y, como es un modelo transitivo numerable, existe un $\beta < \omega_1$ tal que $M = L_\beta[A \cap \alpha]$. En suma, ahora el colapso transitivo es

$$\pi : N_\alpha \longrightarrow L_\beta[A \cap \alpha].$$

Ahora necesitamos probar que $\beta < f(\alpha)$, y en este punto no podemos seguir el razonamiento de 3.31, porque no podemos aplicar el teorema 3.28 a $L_{\omega_1}[A \cap \alpha]$ (puesto que no tenemos que $V = L[A \cap \alpha]$). Esto nos lleva a distinguir dos casos (desde el principio de la prueba):

1) Existe un $\sigma < \omega_1$ tal que $\omega_1^{L[A\cap\sigma]} = \omega_1$. Para probar el teorema en este caso modificamos la definición de C:

$$C = \{\alpha \in \omega_1 \mid \alpha \geq \sigma \wedge \lambda_\alpha = \alpha\}.$$

Así resulta que α es numerable$^{L[A\cap\alpha]}$, pues lo es en $L[A \cap \sigma] \subset L[A \cap \alpha]$. (Notemos que $A \cap \sigma = (A \cap \alpha) \cap \sigma \in L[A \cap \alpha]$.) Esto nos permite aplicar 3.28 relativizado a $L[A\cap\alpha]$, lo que nos da que α es numerable$^{L_{\omega_1}[A\cap\alpha]}$, luego también es numerable$^{L_{f(\alpha)}[A\cap\alpha]}$. Por otro lado, el mismo argumento de 3.31 prueba que α no es numerable$^{L_\beta[A\cap\alpha]}$, y esto implica que $\beta < f(\alpha)$.

2) Para todo $\sigma < \omega_1$ se cumple $\omega_1^{L[A\cap\sigma]} < \omega_1$. En este caso, continuando la prueba donde la habíamos dejado, resulta que ω_1 es inaccesible en $L[A \cap \alpha]$. En efecto, no puede existir un $\theta < \omega_1$ tal que $\omega_1 = (\theta^+)^{L[A\cap\alpha]}$, pues θ es numerable en $L_{\omega_2}[A]$, luego, tomando un $\alpha' \in C$ tal que α, $\theta < \alpha'$, también es numerable en $N_{\alpha'}$, luego en su colapso transitivo, que será de la forma $L_{\beta'}[A \cap \alpha']$, luego θ será numerable en $L[A \cap \alpha']$, luego $\omega_1^{L[A\cap\alpha']} = \omega_1$, contradicción.

Por lo tanto, en $L[A \cap \alpha]$ hay un conjunto no acotado de cardinales menores que ω_1, todos los cuales seguirán siendo cardinales en $L_{\omega_1}[A \cap \alpha]$, luego en este modelo hay cardinales mayores que α, luego también los hay en $L_{f(\alpha)}[A \cap \alpha]$.

En cambio, todos los ordinales $\omega_1 < \delta < \omega_2$ tienen cardinal ω_1 en $L_{\omega_2}[A]$, luego en este modelo no hay cardinales mayores que ω_1, luego en N_α no hay cardinales mayores que ω_1, luego, aplicando π, en $L_\beta[A \cap \alpha]$ no hay cardinales mayores que α.

Esto implica que $\beta < f(\alpha)$, pues si fuera $f(\alpha) < \beta$, un cardinal mayor que α en $L_{f(\alpha)}[A\cap\alpha]$ lo sería en $L_{\omega_1}[A\cap\alpha]$ y también en $L[A\cap\alpha]$ (por 3.28 relativizado a $L[A \cap \alpha]$), luego no podría dejar de serlo en $L_\beta[A \cap \alpha]$.

A partir de aquí, la conclusión del razonamiento visto en 3.31 se adapta con los mínimos cambios obvios. ■

Con esto ya podemos probar:

Teorema 3.41 *Si no existen árboles de Kurepa, entonces $\aleph_2$ es un cardinal inaccesible en L.*

Demostración: Si $\aleph_2$ no es inaccesible en L, por 3.38 existe $A \subset \omega_1$ tal que $\aleph_1^{L[A]} = \aleph_1$ y $\aleph_2^{L[A]} = \aleph_2$. Por el teorema anterior se cumple $(\Diamond^+)^{L[A]}$, luego por [TC 9.33] existe $(K, \leq) \in L[A]$ que es un árbol de Kurepa$^{L[A]}$, es decir, un $\aleph_1$-árbol con al menos $\aleph_2$-caminos. Es inmediato que, al ser absolutos $\aleph_1$ y $\aleph_2$, se cumple que $(K, \leq)$ es un árbol de Kurepa. ■

Así pues, también para probar la consistencia de que no existan árboles de Kurepa se necesita suponer al menos la consistencia de que exista un cardinal inaccesible.

3.8 Constructibilidad relativa

Presentamos aquí una variante de interés de la jerarquía constructible:

Definición 3.42 Dado un conjunto A, definimos la clase $L(A)$ de los conjuntos constructibles sobre A mediante la siguiente recursión transfinita (que podemos definir incluso en ZF$-$AP):

$$L_0(A) = \operatorname{ct} A \cup \{A\}, \quad \bigwedge\alpha\ L_{\alpha+1}(A) = \mathcal{P}\mathcal{D}L_\alpha(A), \quad \bigwedge\lambda\ L_\lambda(A) = \bigcup_{\delta<\lambda} L_\delta(A),$$

$$L(A) = \bigcup_{\alpha\in\Omega} L_\alpha(A).$$

Como vemos, la variante consiste en que en lugar de tomar $L_0 = \varnothing$ tomamos como primer nivel de la jerarquía un conjunto arbitrario A, junto con su clausura transitiva, para que la clase $L(A)$ acabe siendo transitiva.

Es importante no confundir la clase $L(A)$ que acabamos de definir con la clase $L[A]$ definida en 3.5. Por ejemplo, hemos visto que no se cumple necesariamente $A \in L[A]$, mientras que trivialmente $A \in L_0(A) \subset L(A)$. Más concretamente, en $L[A]$ el conjunto A se utiliza como una mera referencia para definir conjuntos, mientras que en $L(A)$ el conjunto A y los elementos de su clausura transitiva se admiten como constructibles “sin hacer preguntas”. Los teoremas básicos sobre la constructibilidad relativa se demuestran exactamente igual que los correspondientes a la constructibilidad absoluta, así que no repetiremos las pruebas. Por ejemplo, el teorema siguiente se prueba (en ZF$-$AP) exactamente igual que 3.6:

Teorema 3.43 *Sea A un conjunto. Entonces:*

a) *Cada $L_\alpha(A)$ es un conjunto transitivo.*

b) *$L(A)$ es una clase transitiva.*

c) *Si $\alpha \leq \beta$ entonces $L_\alpha(A) \subset L_\beta(A)$.*

d) *$\mathcal{P}^f L_\alpha(A) \subset L_{\alpha+1}(A) \subset \mathcal{P}L_\alpha(A)$.*

e) *$L_\alpha(A) \in L_{\alpha+1}(A)$.*

f) $L_\alpha \subset L_\alpha(A)$.

g) $L \subset L(A)$.

h) $A \in L(A)$.

No es cierto en general que $L_\alpha(A) \cap \Omega = \alpha$, pues si A contiene ordinales éstos aparecerán "antes de tiempo" en la jerarquía (están desde el principio), pero en cualquier caso $\Omega \subset L \subset L(A)$.

El teorema siguiente se prueba exactamente igual que 3.8:

Teorema 3.44 *Si A es un conjunto, la clase $L(A)$ es un modelo transitivo de* ZF$-$AP*, o de todo* ZF *si suponemos* AP.

La prueba del teorema 3.7 se adapta trivialmente para probar que el término $L_\alpha(A)$ es Δ_1 y, por consiguiente, absoluto para modelos transitivos de ZF$-$AP. Sin embargo, para lo que vamos a necesitar es suficiente constatar que, dado que $\operatorname{ct} X$ y $\mathcal{PD}X$ son absolutos, la definición recurrente de $L_\alpha(A)$ es absoluta (al relativizarla a un modelo, no hay nada que relativizar realmente). Como consecuencia tenemos (con la misma prueba) la versión siguiente de 3.9:

Teorema 3.45 *Sea A un conjunto y M un modelo transitivo de* ZF$-$AP *tal que $A \in M$. Entonces*

a) Si M es una clase propia entonces $L(A) \subset M$ y

$$\bigwedge x \in M(x \in L(A)^M \leftrightarrow x \in L(A)).$$

b) Si M es un conjunto y $\lambda = \Omega^M$, entonces $L_\lambda(A) \subset M$ y

$$\bigwedge x \in M(x \in L(A)^M \leftrightarrow x \in L_\lambda(A)).$$

En particular, $(V = L(A))^{L(A)}$. Además $L(A)$ es la menor clase propia que contiene a A y es un modelo de ZF$-$AP. Comparando con 3.11 concluimos que si $A \in L[A]$ entonces $L[A] = L(A)$ y, en general, $L[A] = L(A \cap L[A])$. Por lo tanto, los modelos $L[A]$ son un caso particular de los modelos $L(A)$.

Supongamos ahora el axioma de partes y observemos que

$$(V = L(\mathcal{P}\omega))^{L(\mathcal{P}\omega)},$$

si bien esto no es consecuencia inmediata de la observación precedente. En efecto, si llamamos $\phi(A) \equiv V = L(A)$ y $A = \mathcal{P}\omega$, lo que sabemos es que $(V = L(A))^{L(\mathcal{P}\omega)}$, es decir, $\phi^{L(\mathcal{P}\omega)}(\mathcal{P}\omega)$, mientras que lo que queremos probar es

$$\phi(\mathcal{P}\omega)^{L(\mathcal{P}\omega)} \equiv \phi^{L(\mathcal{P}\omega)}((\mathcal{P}\omega)^{L(\mathcal{P}\omega)}).$$

Por consiguiente, nos falta demostrar que $\mathcal{P}\omega = (\mathcal{P}\omega)^{L(\mathcal{P}\omega)}$. Ahora bien, esto es fácil:

$$(\mathcal{P}\omega)^{L(\mathcal{P}\omega)} = \mathcal{P}\omega \cap L(\mathcal{P}\omega) = \mathcal{P}\omega.$$

Con esto hemos probado:

Teorema 3.46 [ZF] *$L(\mathcal{P}\omega)$ es un modelo transitivo de* ZF+$V = L(\mathcal{P}\omega)$.

En general no puede probarse que $L(A)$ cumpla el axioma de elección ni siquiera suponiendo este axioma. Esto lo demostraremos en [TD 6.34], pero ahora vamos a entender cuál es el problema.

Teorema 3.47 *Si A es un conjunto, entonces la clase $L(A)$ cumple el axioma de elección si y sólo si* ct A *tiene un buen $\leq$ tal que $\leq\, \in L(A)$.*

Demostración: Puesto que $L(A)$ es un modelo de ZF−AP+$V = L(A)$, podemos trabajar en esta teoría y demostrar que el axioma de elección equivale a que $\operatorname{ct} A$ pueda ser bien ordenada. Con más detalle, si suponiendo $V = L(A)$ demostramos que

$$AE \leftrightarrow \bigvee R\, R \text{ es un buen orden en } \operatorname{ct} A,$$

en ZF−AP podremos demostrar la relativización de este teorema a $L(A)$, es decir,

$$AE^{L(A)} \leftrightarrow \bigvee R \in L(A)\, R \text{ es un buen orden en } \operatorname{ct} A,$$

donde hemos usado que "ser un buen orden" y $\operatorname{ct} A$ son absolutos.

Una implicación es obvia. Supongamos ahora que $\operatorname{ct} A$ admite un buen orden $\leq$ (que podemos extender obviamente a $\operatorname{ct} A \cup \{A\}$), y veamos que todo conjunto puede ser bien ordenado. Para ello basta definir

$$\trianglelefteq_0 \,=\, \leq \,\wedge \bigwedge \alpha \ \trianglelefteq_{\alpha+1} = (\trianglelefteq_\alpha)_{L_\alpha(A)} \wedge \bigwedge \lambda \ \trianglelefteq_\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} \trianglelefteq_\delta .$$

$$\trianglelefteq \,=\, \bigcup_{\alpha\in\Omega} \trianglelefteq_\alpha,$$

donde $(\trianglelefteq_\alpha)_{L_\alpha(A)} = (\trianglelefteq_\alpha)_{L_\alpha(A),\varnothing}$ es el buen orden dado por 3.4. Una simple inducción transfinita muestra que $\trianglelefteq$ es un buen orden sobre V, que a su vez se restringe a un buen orden sobre cada conjunto. ■

Vemos, pues, que si suponemos el axioma de elección, lo máximo que podemos probar es que $\operatorname{ct} A$ puede ser bien ordenada, pero eso no garantiza que $L(A)$ cumpla el axioma de elección, pues para ello hace falta que algún buen orden de $\operatorname{ct} A$ esté en $L(A)$ (si no, alguien que "viva" en $L(A)$ se creerá que A no puede ser bien ordenado, porque él no verá ninguno de sus buenos órdenes, por más que éstos existan fuera de $L(A)$).

Ejercicio: Probar que en $L(\mathcal{P}\omega)$ todo conjunto puede ser totalmente ordenado. Ayuda: Partir de un orden total en $\mathcal{P}\omega$ obtenido a partir de [TC 4.75] o, alternativamente, a partir de una inyección de $\mathcal{P}\omega$ en $\mathbb{R}$.

Hay un caso de especial interés en el que podemos garantizar que $L(A)$ cumple el axioma de elección, y es cuando A es un conjunto de ordinales:

Teorema 3.48 *Si A es un conjunto de ordinales entonces $L(A)$ es un modelo transitivo de* ZFC−AP *(o de todo* ZFC *si suponemos* AP*).*

Demostración: Razonamos en ZF−AP+$V = L(A)$ y observamos que si $A \subset \Omega$ entonces $\operatorname{ct} A \subset \Omega$, y el buen orden de Ω se restringe a un buen orden en $\operatorname{ct} A$. ■

Una prueba alternativa del teorema anterior es observar que si $A \subset \Omega$ entonces $A \in L[A]$, luego $L(A) = L[A]$.

Ahora vamos a probar (en ZF + ED) que $L(\mathcal{P}\omega)$ cumple el principio de elecciones dependientes ED. Necesitamos el siguiente resultado auxiliar:

Teorema 3.49 (ZF + $V = L(\mathcal{P}\omega)$) *Para cada ordinal α existe un ordinal λ_α y una aplicación $\pi_\alpha : \lambda_\alpha \times \mathcal{P}\omega \longrightarrow L_\alpha(\mathcal{P}\omega)$ suprayectiva.*

Demostración: Como no podemos usar ninguna forma de axioma de elección, se trata de construir explícitamente la función π_α, sin que la construcción dependa de ninguna elección arbitraria que no podamos precisar. Para ello observemos en primer lugar que podemos definir una biyección explícita $\omega \times \omega \longrightarrow \omega$. Por ejemplo, basta tomar la semejanza entre $\omega \times \omega$ con el orden canónico [TC 2.30] y su ordinal, que claramente es ω.

A partir de esta biyección podemos construir claramente a su vez una biyección $({}^\omega 2)^\omega \longrightarrow {}^\omega 2$, y a partir de la biyección obvia $\mathcal{P}\omega \longrightarrow {}^\omega 2$, obtenemos una biyección $\mathcal{P}\omega \longrightarrow (\mathcal{P}\omega)^\omega$.

Construiremos las aplicaciones π_α por recurrencia sobre α, de modo que, aunque existan infinitas aplicaciones que cumplan el teorema, π_α será la única aplicación tal que existe una sucesión de aplicaciones $\{\pi_\delta\}_{\delta \leq \alpha}$ en la que π_0 se define concretamente como veremos, y en la que $\pi_{\delta+1}$ se obtiene a partir de π_δ de la forma concreta en que veremos y en la que, para cada límite λ, π_λ se obtiene a partir de $\{\pi_\delta\}_{\delta<\lambda}$ de la forma concreta que veremos.

Tenemos que $L_0(\mathcal{P}\omega) = \operatorname{ct} \mathcal{P}\omega \cup \{\mathcal{P}\omega\} = \mathcal{P}\omega \cup \{\mathcal{P}\omega\}$. Por lo tanto, podemos definir $\pi_0 : 2 \times \mathcal{P}\omega \longrightarrow L_0(\mathcal{P}\omega)$ mediante

$$\pi(i, x) = \begin{cases} x & \text{si } i = 0, \\ \mathcal{P}\omega & \text{si } i = 1, \end{cases}$$

y claramente π_0 es suprayectiva. Supongamos definida π_α y consideremos $L_{\alpha+1}(\mathcal{P}\omega) = \mathcal{P}\mathcal{D}L_\alpha(\mathcal{P}\omega)$.

Podemos definir explícitamente $\omega \longrightarrow \omega^{<\omega}$ biyectiva.[12] A partir de ella podemos construir fácilmente, para cada $n \in \omega$ y cada conjunto X, una aplicación

$$\omega \longrightarrow \operatorname{Form}^{n+1}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}) \longrightarrow \operatorname{Df}(X, n+1) \text{ suprayectiva.}$$

A su vez obtenemos, para cada conjunto X,

$$\bigcup_{n\in\omega} X^n \times \omega \longrightarrow \bigcup_{n\in\omega} (X^n \times \operatorname{Df}(X, n+1)) \longrightarrow \mathcal{P}\mathcal{D}X \text{ suprayectiva.}$$

[12] Por ejemplo, en la prueba de [TC 4.35] se ve cómo biyectar $\omega^{<\omega} \setminus \{\varnothing\}$ con $\omega \times \omega$, y a partir de ahí es fácil construir la biyección pedida. Hay muchas otras construcciones alternativas.

Usando ahora π_α obtenemos

$$\bigcup_{n\in\omega}(\lambda_\alpha^n \times (\mathcal{P}\omega)^n \times \omega \longrightarrow L_{\alpha+1}(\mathcal{P}\omega) \text{ suprayectiva.}$$

Si llamamos λ_n^* al ordinal de λ_α^n con el orden lexicográfico y λ^* al supremo de los λ_n^*, obtenemos aplicaciones suprayectivas $\lambda^* \longrightarrow \lambda_\alpha^n$, y a partir de una biyección $\mathcal{P}\omega \longrightarrow (\mathcal{P}\omega)^\omega$ obtenemos $\mathcal{P}\omega \longrightarrow (\mathcal{P}\omega)^n$ suprayectiva, de donde a su vez obtenemos

$$\omega \times \lambda^* \times \mathcal{P}\omega \times \omega = \bigcup_{n\in\omega}(\lambda^* \times \mathcal{P}\omega \times \omega) \longrightarrow L_{\alpha+1}(\mathcal{P}\omega) \text{ suprayectiva.}$$

Por último, llamando $\lambda_{\alpha+1}$ al ordinal de $\omega \times \lambda^* \times \omega$ con el orden lexicográfico llegamos a $\pi_{\alpha+1} : \lambda_{\alpha+1} \times \mathcal{P}\omega \longrightarrow L_{\alpha+1}(\mathcal{P}\omega)$ suprayectiva.

Ahora suponemos construidas $\{\pi_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ y definimos una aplicación suprayectiva

$$\pi' : \lambda \times \lambda' \times \mathcal{P}\omega \longrightarrow \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha(\mathcal{P}\omega) = L_\lambda(\mathcal{P}\omega),$$

donde λ' es el supremo de $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$. Concretamente,

$$\pi'(\alpha,\beta,x) = \begin{cases} \pi_\alpha(\beta,x) & \text{si } \beta < \lambda_\alpha, \\ \varnothing & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Una vez más consideramos una semejanza $\lambda_\lambda \longrightarrow \lambda \times \lambda'$ (respecto del buen orden lexicográfico) y al componer obtenemos π_λ. ■

Observemos que es posible dar un paso más en la prueba del teorema anterior para concluir lo siguiente:

Teorema 3.50 *Existe una fórmula (metamatemática) $\phi(\alpha,x,v)$, sin más variables libres que las indicadas, de modo que*

$$(\bigwedge u \bigvee \alpha \in \omega \bigvee x \in \mathcal{P}\omega \bigwedge v(v = u \leftrightarrow \phi(\alpha,x,v)))^{L(\mathcal{P}\omega)}.$$

En otras palabras, todo elemento de $L(\mathcal{P}\omega)$ es (explícitamente) definible a partir de un ordinal y de un elemento de $\mathcal{P}\omega$.

Demostración: La demostración del teorema anterior muestra que existe una fórmula $\psi(f,\alpha)$ con las variables libres indicadas de modo que

$$\bigwedge \alpha \in \Omega \bigwedge f(\psi(f,\alpha) \leftrightarrow f = \pi_\alpha)^{L(\mathcal{P}\omega)}.$$

La idea es que ψ es la fórmula que afirma que existe una función F cuyo dominio es $\alpha+1$, de modo que $F(0)$ cumple la definición que hemos dado de π_0, y para todo $\delta < \alpha$ se cumple que $F(\delta+1)$ se define a partir de $F(\delta)$ como hemos indicado, para todo límite $\lambda \leq \alpha$ se cumple que $F(\lambda)$ se define a partir de $\{F(\delta)\}_{\delta<\lambda}$ como hemos indicado y $f = F(\alpha)$.

Consideramos el buen orden canónico en $\Omega\times\Omega$, que determina una semejanza $\langle\ ,\ \rangle : \Omega\times\Omega \longrightarrow \Omega$. Definimos $\phi(\alpha, x, v)$ como la fórmula:

$$\alpha \in \Omega \wedge x \in \mathcal{P}\omega \wedge \bigvee\pi\bigvee\beta\gamma \in \Omega(\alpha = \langle\beta,\gamma\rangle \wedge \psi(\pi,\beta) \wedge$$

$$(((\gamma, x) \in \mathcal{D}\pi \wedge v = \pi(\gamma, x)) \vee ((\gamma, x) \notin \mathcal{D}\pi \wedge v = \varnothing)))).$$

■

Ahora estamos en condiciones de probar el resultado que anunciábamos:

Teorema 3.51 (ED) $L(\mathcal{P}\omega)$ *cumple* ED.

Demostración: El teorema 3.49 relativizado a $L(\mathcal{P}\omega)$ implica que, para cada ordinal α, existe un ordinal λ_α y una aplicación $\pi_\alpha \in L(\mathcal{P}\omega)$ de manera que $\pi_\alpha : \lambda_\alpha \times \mathcal{P}\omega \longrightarrow L_\alpha(\mathcal{P}\omega)$ suprayectiva.

Tomemos ahora A, $R \in L(\mathcal{P}\omega)$ que cumplan las hipótesis de ED. Consideramos un ordinal α tal que A, $R \in L_\alpha(\mathcal{P}\omega)$. Utilizando ED (en V), podemos afirmar que existe $f_0 : \omega \longrightarrow A$ tal que $\bigwedge n \in \omega\ f_0(n+1)\, R\, f_0(n)$. Lo que no podemos asegurar en principio es que $f_0 \in L(\mathcal{P}\omega)$.

Como (en V) podemos hacer elecciones numerables, sabemos que existen sucesiones $\{\beta_n\}_{n\in\omega}$ y $\{x_n\}_{n\in\omega}$ de modo que $\bigwedge n \in \omega\ \pi_\alpha(\beta_n, x_n) = f_0(n)$.

No necesitamos AE para construir una biyección $g : \omega\times\omega \longrightarrow \omega$, luego podemos tomar $g \in L(\mathcal{P}\omega)$. Llamamos $x = \{g(i,n) \mid i \in x_n\}$. De este modo $x \in \mathcal{P}\omega \subset L(\mathcal{P}\omega)$, lo que a su vez implica que $\{x_n\}_{n\in\omega} \in L(\mathcal{P}\omega)$, pues la sucesión puede reconstruirse a partir de x.

Por el contrario, no podemos asegurar que $\{\beta_n\}_{n\in\omega} \in L(\mathcal{P}\omega)$, pero podemos razonar como sigue: consideramos en $\omega\times\alpha$ la relación

$$(n,\beta)\, R\, (n',\beta') \leftrightarrow n = n'+1 \wedge R(\pi_\alpha(\beta', x_{n'}), \pi_\alpha(\beta, x_n)).$$

Claramente, $R \in L(\mathcal{P}\omega)$ y no está bien fundada en V, pues tenemos la sucesión

$$\cdots\, R\,(\beta_3, x_3)\, R\,(\beta_2, x_2)\, R\,(\beta_1, x_1)\, R\,(\beta_0, x_0).$$

Entonces tampoco puede estar bien fundada en $L(\mathcal{P}\omega)$, porque "ser una relación bien fundada" es un concepto Δ_1, luego absoluto para modelos transitivos de ZF. Por consiguiente, existe un conjunto $X \in L(\mathcal{P}\omega)$ tal que $X \subset \omega\times\lambda$ y no tiene elemento R-minimal. Finalmente, como $\omega\times\lambda$ puede ser bien ordenado en $L(\mathcal{P}\omega)$, podemos construir una función $h \in L(\mathcal{P}\omega)$ tal que $h : \omega \longrightarrow X$ y $\bigwedge n \in \omega\ h(n+1)\, R\, h(n)$. A su vez, si $h = \{(\beta_i, n_i)\}_{i\in\omega}$, podemos definir $f : \omega \longrightarrow A$ mediante $f(i) = \pi_\alpha(\beta_i, x_{n_i})$. Así $f \in L(\mathcal{P}\omega)$ y $\bigwedge i \in \omega\ f(i{+}1)\, R\, f(i)$.

■

3.9 El teorema de Lévy-Shoenfield

Vamos a probar un resultado técnico que necesitaremos más adelante. Se trata de que las fórmulas Σ_1 son absolutas para los modelos $L[a]$, con $a \subset V_\omega$. Necesitamos algunos resultados previos.

Definición 3.52 Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje formal. Una sentencia de $\mathcal{L}$ es una *sentencia* $\bigwedge\bigvee$ si es de la forma

$$\bigwedge x_1 \cdots x_m \bigvee y_1 \cdots y_n \, \phi(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n),$$

donde ϕ es una fórmula de $\mathcal{L}$ sin cuantificadores.

Teorema 3.53 *Sea $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots$ una cadena de modelos de un lenguaje $\mathcal{L}$ de modo que cada M_i sea un submodelo de M_{i+1}. Sea*

$$\theta = \bigwedge x_1 \cdots x_m \bigvee y_1 \cdots y_n \, \phi(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$$

una sentencia $\bigwedge\bigvee$ de $\mathcal{L}$. Supongamos que para todos los $x_1, \ldots, x_m \in M_k$ existen $y_1, \ldots, y_n \in M_{k+1}$ tales que $M_{k+1} \vDash \phi[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n]$ (en realidad basta con que esto se cumpla para todo k suficientemente grande). Sea $M = \bigcup\limits_{k\in\omega} M_k$ (es decir, M es el modelo de $\mathcal{L}$ cuyo universo es la unión de los universos de los modelos M_k y en el que los relatores funtores y constantes se interpretan extendiendo las interpretaciones en cada M_k). Entonces $M \vDash \theta$.

Demostración: Si tomamos $x_1, \ldots, x_m \in M$, existe un $k \in \omega$ tal que $x_1, \ldots, x_m \in M_k$, luego por hipótesis existen $y_1, \ldots, y_n \in M_{k+1}$ tales que $M_{k+1} \vDash \phi[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n]$. Como ϕ no tiene cuantificadores, una simple inducción sobre su longitud prueba que $M \vDash \phi[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n]$. Es claro entonces que $M \vDash \theta$. ■

Teorema 3.54 (de la forma normal de Skolem) *Sea ϕ una sentencia de un lenguaje forma $\mathcal{L}$. Entonces existe una sentencia $\bigwedge\bigvee$ $\bar{\phi}$ de un lenguaje formal $\overline{\mathcal{L}}$ que consta de los mismos signos de $\mathcal{L}$ más ciertos relatores adicionales $R_1, \ldots, R_k$ de manera que*

a) Si U es un modelo de $\mathcal{L}$ y $U \vDash \phi$, existen relaciones $\bar{R}_1, \ldots, \bar{R}_k$ en U tales que si $\overline{U}$ es el modelo de $\overline{\mathcal{L}}$ que extiende a U interpretando los relatores R_i como $\bar{R}_i$, entonces $\overline{U} \vDash \bar{\phi}$.

b) Si $\overline{U}$ es un modelo de $\overline{\mathcal{L}}$ tal que $\overline{U} \vDash \bar{\phi}$ y U es el modelo de $\mathcal{L}$ que resulta de olvidar los relatores $R_1, \ldots, R_k$, entonces $U \vDash \phi$.

Demostración: Podemos suponer que ϕ está en forma prenexa, es decir, que consta de una sucesión de cuantificadores seguida de una fórmula sin cuantificadores (toda fórmula es equivalente a otra fórmula en forma prenexa).

Por claridad vamos a suponer que

$$\phi = \bigvee u \bigwedge v \bigvee w \bigwedge xy \bigvee z \, \psi(u, v, w, x, y, z),$$

donde ψ no tiene cuantificadores, aunque el argumento es completamente general. La idea es sustituir

$$\begin{array}{lll}
\bigvee z\,\psi(u,v,w,x,y,z) & \text{por} & P(u,v,w,x,y),\\
\bigwedge xy \bigvee z\,\psi(u,v,w,x,y,z) & \text{por} & Q(u,v,w),\\
\bigvee w \bigwedge xy \bigvee z\,\psi(u,v,w,x,y,z) & \text{por} & R(u,v),\\
\bigwedge v \bigvee w \bigwedge xy \bigvee z\,\psi(u,v,w,x,y,z) & \text{por} & S(u)
\end{array}$$

y adjuntar las "definiciones" de los relatores introducidos. Concretamente, definimos $\overline{\mathcal{L}}$ como el lenguaje que tiene los relatores adicionales P, Q, R y S y consideramos la sentencia

$$\bigwedge uvwxy(P(u,v,w,x,y) \leftrightarrow \bigvee z\ \psi(u,v,w,x,y,z)) \land$$

$$\bigwedge uvw(Q(u,v,w) \leftrightarrow \bigwedge xy\ P(u,v,w,x,y)) \land \bigwedge uv\ (R(u,v) \leftrightarrow \bigvee w\ Q(u,v,w))$$

$$\land \bigwedge u(S(u) \leftrightarrow \bigwedge v\ R(u,v)) \land \bigvee u\ S(u).$$

Claramente, esta sentencia es equivalente a

$$\bigwedge uvwxy \bigvee z\ (P(u,v,w,x,y) \leftrightarrow \psi(u,v,w,x,y,z)) \land$$

$$\bigwedge uvwxy(Q(u,v,w) \leftrightarrow P(u,v,w,x,y)) \land \bigwedge uv \bigvee w\ (R(u,v) \leftrightarrow Q(u,v,w))$$

$$\land \bigwedge uv(S(u) \leftrightarrow R(u,v)) \land \bigvee u\ S(u).$$

Cambiando las variables ligadas obtenemos otra sentencia equivalente:

$$\bigwedge uvwxy \bigvee p\ (P(u,v,w,x,y) \leftrightarrow \psi(u,v,w,x,y,p)) \land$$

$$\bigwedge uvwxy(Q(u,v,w) \leftrightarrow P(u,v,w,x,y)) \land \bigwedge uv \bigvee q\ (R(u,v) \leftrightarrow Q(u,v,q))$$

$$\land \bigwedge uv(S(u) \leftrightarrow R(u,v)) \land \bigvee r\ S(r),$$

que a su vez equivale a

$$\bigwedge uvwxy(\bigvee p\ (P(u,v,w,x,y) \leftrightarrow \psi(u,v,w,x,y,p)) \land$$

$$(Q(u,v,w) \leftrightarrow P(u,v,w,x,y)) \land \bigvee q\ (R(u,v) \leftrightarrow Q(u,v,q))$$

$$\land\ (S(u) \leftrightarrow R(u,v)) \land \bigvee r\ S(r)),$$

y ahora podemos extraer los particularizadores:

$$\bigwedge uvwxy \bigvee pqr((P(u,v,w,x,y) \leftrightarrow \psi(u,v,w,x,y,p)) \land$$

$$(Q(u,v,w) \leftrightarrow P(u,v,w,x,y)) \land (R(u,v) \leftrightarrow Q(u,v,q))$$

$$\land\ (S(u) \leftrightarrow R(u,v)) \land S(r)),$$

con lo que hemos llegado a una sentencia $\bar{\phi}$ del tipo requerido. Por la construcción es claro que $\bar{\phi}$ es verdadera en un modelo de $\overline{\mathcal{L}}$ si y sólo si lo es ϕ. Ahora es fácil probar el teorema. ■

Teorema 3.55 *Sea M un modelo de un lenguaje formal $\mathcal{L} \in L$ que conste de relatores $\in$, $R_1, \ldots, R_k$ y constantes $\{c_n\}_{n\in\omega}$. Sean E, $\bar{R}_1, \ldots, \bar{R}_k$ las interpretaciones en M de los relatores y supongamos que E es una relación bien fundada. Sea S un conjunto de sentencias $\bigwedge\bigvee$ de $\mathcal{L}$ tal que $M \vDash S$. Entonces existe un modelo bien fundado N de $\mathcal{L}$ tal que $N \vDash S$ y $N \in L[S]$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $S = \{\phi_n\}_{n\in\omega}$. Repitiendo sentencias o añadiendo alguna, podemos suponer que ϕ_n contiene a lo sumo las constantes $\{c_k\}_{k<n}$. Si S admite un modelo finito, éste será isomorfo a uno constructible y se cumplirá el teorema. Podemos suponer, pues, que S no admite modelos finitos.

Sea P el conjunto de las ternas (N, f, k) tales que $k \in \omega$, N es un modelo finito del lenguaje $\mathcal{L}_k$ cuyos signos son los de $\mathcal{L}$ excepto las constantes $\{c_n\}_{n\geq k}$, $N \subset \omega$ y $f : N \longrightarrow \omega$ es una aplicación tal que si x, $y \in N$ cumplen $N(\in)(x, y)$, entonces $f(u) < f(v)$.

Consideramos en P el orden parcial dado por $(N, f, k) < (N', f', k')$ si N' es un submodelo de N, $f' \subset f$, $k' < k$ y para cada $r < k$, si

$$\phi_r = \bigwedge x_1 \cdots x_m \bigvee y_1 \cdots y_n\, \psi_r(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$$

entonces para todos los $x_1, \ldots, x_m \in N'$ existen $y_1, \ldots, y_n \in M$ tales que

$$N \vDash \psi_r[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n].$$

La definición de $(P, \leq)$ es absoluta para modelos transitivos de ZFC$-$AP, por lo que $(P, \leq) \in L[S]$. Veamos que $(P, \leq)$ no está bien fundado.

Sea X el conjunto de todos los $(N, f, k) \in P$ tales que existe un submodelo M' de M (como modelo de $\mathcal{L}_k$) y un isomorfismo $h : N \longrightarrow M'$ tal que para todo $b \in N$ se cumpla $f(b) = \operatorname{rang}_E h(b)$.

Claramente $X \neq \varnothing$, pues basta tomar $k \in \omega$, M' igual al conjunto de las interpretaciones en M de las constantes de $\mathcal{L}_k$, N un modelo isomorfo con $N \subset \omega$, $h : N \longrightarrow M'$ el isomorfismo y $f : N \longrightarrow \omega$ dada por $f(b) = \operatorname{rang}_E h(b)$. Entonces $(N, f, k) \in X$.

El conjunto X no tiene minimal, pues si $(N, f, k) \in X$ y $h : N \longrightarrow M'$ es el isomorfismo dado por la definición de X, como $M \vDash S$, para todo $r \leq k$ tenemos que si

$$\phi_r = \bigwedge x_1 \cdots x_m \bigvee y_1 \cdots y_n\ \psi_r(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$$

y $a_1, \ldots, a_m \in M'$, existen $b_1, \ldots, b_m \in M$ tales que

$$M \vDash \psi_r[a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots b_n].$$

Recorriendo todos los $r \leq k$ y todos los $a_1, \ldots, a_m \in M'$ posibles, encontramos un número finito de elementos $b_i \in M$ que, junto con M' y $M(c_k)$ forman un submodelo M'' de M (como modelo de $\mathcal{L}_{k+1}$) tal que $M' \subset M''$. Tomamos $N' \subset \omega$ tal que $N \subset N'$, lo dotamos de estructura de modelo isomorfo a M'' a través de una biyección (que se convierte en isomorfismo) $h' : N' \longrightarrow M''$ que extienda a h y definimos $f' : N' \longrightarrow \omega$ mediante $h'(b) = \operatorname{rang}_E h'(b)$. Claramente $(N', f', k+1) \in X$ y $(N', f', k+1) < (N, f, k)$.

Estar bien fundado es absoluto para modelos transitivos, luego $(P, \leq)$ no está bien fundado$^{L[S]}$. Por consiguiente existe una sucesión $\{(N_k, f_k, n_k)\}_{k\in\omega} \in L[S]$ tal que

$$(N_0, f_0, k_0) > (N_1, f_1, k_1) > \cdots$$

Sea $N = \bigcup\limits_{k\in\omega} N_k$ y $f = \bigcup\limits_{k\in\omega} f_k$. Por el teorema 3.53 se cumple que $N \vDash S$ y $f : N \longrightarrow \omega$ cumple que si $N(\in)(u, v)$ entonces $f(u) < f(v)$, luego $N(\in)$ está bien fundada. Obviamente $N \in L[S]$. ■

Teorema 3.56 (Lévy-Shoenfield) *Sea $\phi(x, a)$ una fórmula Δ_0 del lenguaje de la teoría de conjuntos (metamatemático) cuyas variables libres sean a lo sumo las indicadas. Si $a \subset V_\omega$, entonces*

$$\bigvee x\, \phi(x, a) \leftrightarrow \bigvee x \in L[a]\, \phi(x, a).$$

Demostración: Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje formal que consta de un relator $\in$ y de las constantes $\bar{X}$, $\bar{a}$ y $\{\bar{x}\}_{x\in L_\omega}$. Podemos tomarlo $\mathcal{L} \in L$.

Añadimos a $\mathcal{L}$ los relatores $R_1, \ldots, R_k$ necesarios para que existe una sentencia $\bigwedge\bigvee$ ϕ' que cumpla el teorema 3.54 para la sentencia

$$\bigvee x\, \phi(x, \bar{a}) \land \bigwedge xy(\bigwedge u(u \in x \leftrightarrow u \in y) \to x = y) \land \bigwedge x(x \in \bar{X} \to x \in L_\omega).$$

Hay que entender que $x \in L_\omega$ representa la versión matemática de un equivalente sin descriptores de la correspondiente fórmula metamatemática.

Sea S el conjunto formado por las siguientes sentencias de $\mathcal{L}$ (todas ellas de tipo $\bigwedge\bigvee$):

a) ϕ',

b) $\bar{x} \in \bar{X}$, para todo $x \in L_\omega$,

c) $\bigwedge x(x \in \bar{y} \leftrightarrow x = \bar{y}_1 \lor \cdots \lor x = \bar{y}_n)$, donde $y = \{y_1, \ldots, y_n\} \in L_\omega$,

d) $\bar{x} \in \bar{a}$, para todo $x \in a$,

e) $\bar{x} \notin \bar{a}$, para todo $x \in L_\omega \setminus a$,

f) $\bigwedge x(x \in \bar{a} \to x \in \bar{X})$.

Como $\bar{a}$ puede reconstruirse a partir de S y viceversa, es fácil ver que $a \in L[S]$ y $S \in L[A]$, luego $L[S] = L[a]$.

Supongamos que $\bigvee x\, \phi(x, a)$. Sea λ un ordinal límite tal que x, $a \in V_\lambda$, con lo que $V_\lambda \vDash (\bigvee x\phi)[a]$. Interpretando las constantes de $\mathcal{L}$ de forma natural y los relatores según el teorema 3.54 resulta que $V_\lambda \vDash S$. Por el teorema anterior existe un modelo N de $\mathcal{L}$ tal que $N \in L[S] = L[a]$, N está bien fundado y $N \vDash S$. En particular N cumple el axioma de extensionalidad, luego la relación $N(\in)$ es extensional y bien fundada. Podemos considerar el colapso transitivo $N' \in L[a]$, que es un modelo isomorfo a N, luego $N' \vDash S$. La transitividad y las sentencias de S fuerzan que $N'(\bar{X}) = L_\omega$ y $N'(\bar{a}) = a$. Como además $N' \vDash \bigvee x\, \phi(x, \bar{a})$, vemos que $\bigvee x \in N'\, \phi(x, a)$ (aquí usamos que ϕ es absoluta), de donde $\bigvee x \in L[a]\, \phi(x, a)$. ■

Capítulo IV

Extensiones genéricas

La teoría de extensiones genéricas (más conocida como "forcing") fue ideada por P. Cohen (en una versión más rudimentaria que la que aquí vamos a exponer) para demostrar la independencia de la hipótesis del continuo, pero sus aplicaciones van mucho más allá.

Su planteamiento general consiste en partir de un modelo transitivo M de ZFC y construir a partir de él otro modelo transitivo N de modo que $M \subset N$ (y, salvo casos triviales $M \subsetneq N$) estrechamente relacionado con M. Esta estrecha relación consiste, fundamentalmente, en los hechos siguientes:

a) Los modelos M y N contienen los mismos ordinales, es decir, $\Omega^M = \Omega^N$.

   Esto, por sí solo, garantiza, por ejemplo, que

$$L^N = L_{\Omega^N} = L_{\Omega^M} = L^M \subset M.$$

   Así la mera desigualdad $M \subsetneq N$ ya implica que los conjuntos de $N \setminus M$ son no constructibles^N, con lo que N será un modelo de ZFC + $V \neq L$, y tendremos probado que no puede demostrarse que todo conjunto es constructible.

b) Podremos garantizar que N contiene un objeto "diseñado" en M, pero que no está en M, como por ejemplo una familia de $\aleph_2$ subconjuntos de ω que hagan que $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ en N.

c) Alguien que "viva" en M y que, por consiguiente, no pueda "ver" los conjuntos de N que no están en M, dispondrá, no obstante, de un lenguaje para hablar de lo que sucede en N, y en muchas ocasiones estará incluso en condiciones de determinar, sólo a partir de los conjuntos que "ve" en M, si cualquier afirmación dada es verdadera o falsa en N. Esto será fundamental para analizar el modelo N.

Obtendremos la construcción de N desarrollando b), mientras que tendremos que desarrollar c) para estar en condiciones de probar que N cumple las condiciones requeridas (entre ellas la de ser un modelo de ZFC). La propiedad

a) se probará sin dificultad, pero no por ello será menos importante a la hora de comprender el funcionamiento de N.

4.1 Filtros genéricos

Ejemplo Para ilustrar las definiciones básicas de la teoría de extensiones genéricas partamos de un modelo transitivo numerable M de ZFC + $V = L$, y vamos a construir otro modelo $M \subsetneq N$, con lo que, según ya hemos explicado, todos los conjuntos de $N \setminus M$ serán no constructibles^N. Más concretamente, vamos a asegurarnos de que N contiene un conjunto $a \subset \omega$ que no esté en M, con lo que probaremos la consistencia de que existan subconjuntos de ω no constructibles.

En lugar de "diseñar" a, trataremos de diseñar su función característica. Si construimos un modelo N tal que exista $f \in N \setminus M$ de manera que $f : \omega \longrightarrow 2$, entonces $a = f^{-1}[\{1\}] \subset \omega$ también cumplirá $a \in N \setminus M$, y será un subconjunto de ω no constructible^N.

Una idea fundamental es que, aunque queremos incorporar a N una función f que no esté en M, tiene que ser posible hablar de ella en M, y esto se logrará a través de sus aproximaciones finitas. Concretamente, definimos

$$\mathbb{P} = \{p \mid p \subset \omega \times 2 \land p \text{ es una función} \land p \text{ es finito}\}.$$

Claramente $\mathbb{P} = \mathbb{P}^M \in M$. A los elementos de $\mathbb{P}$ los llamaremos "condiciones". La idea es que alguien que "viva" en M ve los elementos de $\mathbb{P}$ y puede considerarlos como fragmentos posibles de la función f que está fuera de su alcance. Las condiciones "verdaderas" serán las del conjunto

$$G = \{p \in \mathbb{P} \mid p \subset f\},$$

de modo que $f = \bigcup G$. Así, si una condición

$$p = \{(2, 1), (5, 1), (6, 0), (10, 1)\} \in \mathbb{P}$$

es "verdadera", esto significa que $f(2) = 1$, $f(5) = 1$, $f(6) = 0$ y $f(10) = 1$, aunque p también podría ser una condición falsa. Conocer la función f equivale a saber qué condiciones $p \in \mathbb{P}$ son "verdaderas" y cuáles son falsas.

En general, un "habitante de M" no podrá saber qué condiciones son verdaderas y cuáles falsas, pero un hecho fundamental de la teoría de extensiones será que toda afirmación sobre N se reducirá a determinar si una cierta condición de $\mathbb{P}$ es verdadera o falsa. En realidad, hay una condición de $\mathbb{P}$ que es trivialmente verdadera, a saber, $\mathbb{1} = \varnothing$. Por ello, si en su análisis de N, un "habitante de M" llega a la conclusión de que la condición de que depende que cierta afirmación α se cumpla en N es precisamente $p = \mathbb{1}$, entonces podrá asegurar que se cumple α^N a pesar de que no puede ver lo que pasa en N.

El hecho de que llamemos $\mathbb{1}$ a la condición vacía se puede interpretar como que es la condición que se cumple con probabilidad 1.

Diremos que una condición p *extiende* a una condición q si $q \subset p$, es decir, si p aporta tanta información o más que q sobre f. Lo representaremos por $p \leq q$, de modo que

$$p \leq q \leftrightarrow q \subset p.$$

Puede parecer extraño que digamos que una condición es menor cuando contiene más información, pero de nuevo debemos pensar en términos probabilisticos: si p contiene más información que q, tiene “menos probabilidades” de ser cierta. En particular, toda condición cumple $p \leq \mathbb{1}$, lo que expresa que $\mathbb{1}$ se cumple con la máxima probabilidad.

Hemos definido G a partir de una función indeterminada f, pero nuestro propósito es seguir el camino contrario: definir adecuadamente un conjunto G de condiciones verdaderas que nos asegure que $f = \bigcup G$ sea realmente una función $f : \omega \longrightarrow 2$ diferente de todas las funciones de M.

Antes de seguir desarrollando este ejemplo vamos a dar algunas definiciones generales motivadas por las consideraciones que acabamos de presentar. ∎

Definición 4.1 Un *conjunto preordenado con máximo* es una terna $(\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1})$ tal que $\leq$ es una relación reflexiva y transitiva en el conjunto $\mathbb{P}$ y $\mathbb{1} \in \mathbb{P}$ cumple que $\bigwedge p \in \mathbb{P}\ p \leq \mathbb{1}$. A los elementos de $\mathbb{P}$ los llamaremos *condiciones.* Cuando dos condiciones p, $q \in \mathbb{P}$ cumplen $p \leq q$ se dice que la condición p *extiende* a la condición q.

No exigimos que la relación sea antisimétrica porque en ningún momento nos ayudaría en nada esta exigencia y en algunas construcciones más avanzadas es técnicamente útil no tener que garantizarla. En lo sucesivo, cuando hablemos de un conjunto preordenado $\mathbb{P}$ (abreviadamente, c.p.o.) se sobrentenderá que es un conjunto preordenado con máximo en el sentido de la definición anterior.

Notemos que si $\mathbb{P}$ es un conjunto parcialmente ordenado (es decir, si el preorden es antisimétrico), entonces sólo puede tener un máximo, pero en el caso general $\mathbb{P}$ puede tener varios máximos (incluso infinitos) y por ello seleccionamos uno en la definición de c.p.o. El tener que especificar un máximo en lugar de tener que existe un solo es el único “coste” que tendrá nuestra decisión de permitir que los preórdenes que consideremos no sean antisimétricos.

No obstante, casi todos los c.p.o.s que consideraremos en la práctica serán conjuntos parcialmente ordenados.

Si $\mathbb{P}$ es un c.p.o., diremos que dos condiciones p, $q \in \mathbb{P}$ son *compatibles* si tienen una extensión común, es decir, si existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$. En caso contrario diremos que son *incompatibles* y lo representaremos por $p \perp q$.

Ejemplo Continuando con el ejemplo precedente, ahora es claro que el conjunto

$$\mathbb{P} = \{p \mid p \subset \omega \times 2 \land p \text{ es una función} \land p \text{ es finito}\}$$

es un conjunto parcialmente ordenado con la relación determinada por $q \leq p$ si y sólo si $p \subset q$. Además tiene por máximo a la condición $\mathbb{1} = \varnothing$.

En todos los ejemplos de interés, cada condición de un c.p.o. podrá considerarse como portadora de información parcial sobre un objeto que deseamos construir, y la relación $p \leq q$ indicará[1] que p contiene más información que q. El máximo será la condición que no aporta información alguna y que, por consiguiente, es trivialmente verdadera.

Observemos que en nuestro ejemplo dos condiciones p y q son compatibles (es decir, tienen una extensión común) si y sólo si son funciones que toman el mismo valor sobre cualquier número que esté en el dominio de ambas, y en tal caso $p \cup q$ es una extensión común. Recíprocamente, dos condiciones son incompatibles sin toman valores diferentes sobre un mismo número. Por ejemplo, las condiciones siguientes son incompatibles:

$$p = \{(2,1), (5,1), (6,0), (10,1)\}, \qquad q = \{(1,0), (5,0), (7,1)\},$$

pues la primera "fuerza" que $f(5) = 1$ y la segunda que $f(5) = 0$. Un "habitante de M" podrá no saber si son verdaderas o no, pero no necesita salir de M para asegurar que las dos no pueden ser verdaderas a la vez.

En general, la idea es que dos condiciones son compatibles si aportan información "coherente", de modo que ambas pueden ser simultáneamente verdaderas, mientras que son incompatibles si se contradicen mutuamente, de modo que no pueden ser ambas verdaderas. ■

Álgebras de Boole completas Las propiedades de los modelos N que pretendemos construir a partir de un modelo dado M de ZFC dependerán esencialmente de la elección de un conjunto de condiciones adecuado $\mathbb{P} \in M$. En la práctica, lo más cómodo será tomar un c.p.o. $\mathbb{P}$ lo más próximo que sea posible al "objeto de diseño" que queremos que esté en N. Por ejemplo, si queremos añadir a M una función $f : \omega \longrightarrow 2$, lo más práctico es trabajar con el conjunto $\mathbb{P}$ que estamos considerando en los ejemplos.

Sin embargo, a efectos teóricos, será muy útil trabajar con álgebras de Boole completas o, más precisamente, con c.p.o.s de la forma $\mathbb{P} = \mathbb{B} \setminus \{0\}$, donde $\mathbb{B}$ es un álgebra de Boole completa. El teorema [TC 7.49] nos asegura que todo c.p.o. $\mathbb{P}$ puede sumergirse densamente en un álgebra de Boole completa, y veremos que el modelo construido a partir de $\mathbb{P}$ es el mismo que se obtiene con su compleción, por lo que trabajar exclusivamente con álgebras de Boole completas no supone en realidad ninguna pérdida de generalidad. No obstante, no vamos a restringirnos a este caso porque, como decimos, en la práctica es preferible trabajar con c.p.o.s sencillos como el del ejemplo que estamos considerando.

Esto hace que en todo momento sea útil conocer la versión de todo concepto y todo resultado en términos tanto de c.p.o.s arbitrarios como en términos de álgebras de Boole completas.

[1]Sobre este punto, los autores están divididos, y así unos escriben $p \leq q$ cuando otros escriben $q \leq p$, por lo que al leer un texto sobre extensiones genéricas es esencial determinar si $p \leq q$ indica que p tiene más o menos información que q.

Por ejemplo, dos condiciones $p, q \in \mathbb{B} \setminus \{\mathbb{O}\}$ cumplen

$$p \perp q \leftrightarrow p \wedge q = \mathbb{O}.$$

En efecto, $p \perp q$ significa que p y q no tienen una extensión común en $\mathbb{B}\setminus\{\mathbb{O}\}$, pero como $p \wedge q$ es necesariamente una extensión común en $\mathbb{B}$, la conclusión es inmediata. En la práctica, al tratar con álgebras de Boole conviene extender la definición de incompatibilidad para admitir que las condiciones puedan ser $\mathbb{O}$, de modo que toda condición de $\mathbb{B}$ es incompatible con $\mathbb{O}$. ■

En el ejemplo que estamos considerando hemos definido un conjunto G de "'condiciones verdaderas" a partir de la función f que queremos construir para añadírsela al modelo M, pero, como ya hemos indicado, vamos a seguir el camino inverso de construir primero G y a partir de él obtener f. Para ello tenemos que especificar qué propiedades queremos que tenga G. Las más básicas son las siguientes:

Definición 4.2 Un *filtro* en un c.p.o. $\mathbb{P}$ es un conjunto $G \subset \mathbb{P}$ tal que

a) $\mathbb{1} \in G$,

b) $\bigwedge p \in G \bigwedge q \in \mathbb{P}(p \leq q \rightarrow q \in G)$,

c) $\bigwedge pq \in G \bigvee r \in G(r \leq p \wedge r \leq q)$.

Observemos que si $\mathbb{B}$ es un álgebra de Boole, entonces $G \subset \mathbb{B}$ es un filtro en el sentido de la definición precedente (entendiendo esto como que es un filtro en el c.p.o. $\mathbb{P} = \mathbb{B} \setminus \{\mathbb{O}\}$) si y sólo si es un filtro en $\mathbb{B}$ en el sentido usual [TC 7.7].

Ejemplo En el caso del ejemplo que estamos considerando, lo que dice la definición de filtro es que la condición vacía es verdadera, que si una condición tiene menos información que otra verdadera es verdadera, y que dos condiciones verdaderas pueden extenderse a una misma condición verdadera (que contenga la información de ambas).

Ciertamente, si $f : \omega \longrightarrow 2$, el conjunto $G = \{p \in \mathbb{P} \mid p \subset G\}$ es un filtro de G, pero no todo filtro define una función $\omega \longrightarrow 2$. Por ejemplo, $G = \{\mathbb{1}\}$ es un filtro, y $\bigcup G = \varnothing$. Y aun suponiendo que $f = \bigcup G$ sea una función $f : \omega \longrightarrow 2$, nada nos asegura que no sea una de las funciones que ya están en M, con lo que no nos llevará a una extensión estricta de M. ■

Vamos a ver que las dificultades que acabamos de señalar se resuelven imponiendo a G una condición muy general:

Definición 4.3 Si $\mathbb{P}$ es un c.p.o., un conjunto $D \subset \mathbb{P}$ es *denso* en $\mathbb{P}$ si toda condición de $\mathbb{P}$ tiene una extensión en D, es decir, si $\bigwedge p \in \mathbb{P} \bigvee q \in D\ q \leq p$.

Un filtro G en $\mathbb{P}$ es $\mathbb{P}$-*genérico* sobre un conjunto M si G corta a todo conjunto denso en $\mathbb{P}$ que pertenezca a M.

Ejemplo Para el c.p.o. de nuestro ejemplo, formado por funciones finitas, sucede que el conjunto

$$A = \{p \in \mathbb{P} \mid (3, 0) \in p\}$$

no es denso en $\mathbb{P}$, pues la condición $q = \{(3, 1), (2, 0)\}$ no tiene una extensión en A, mientras que el conjunto

$$D = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee n \in \omega\ (n, 0) \in p\}$$

sí que es denso en $\mathbb{P}$. Otros ejemplos de conjuntos densos son el conjunto de condiciones con un n dado en su dominio, o el conjunto de condiciones que toman los valores 0, 1, 1 sobre tres naturales consecutivos, o el conjunto de las condiciones que coinciden en un intervalo de números naturales con una codificación binaria del "Quijote".

Supongamos ahora que M es un modelo transitivo de ZFC y que G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Definimos $f = \bigcup G$ y veamos que $f : \omega \longrightarrow 2$.

En efecto, el hecho de que las condiciones de G sean compatibles dos a dos prueba que f es una función. Para cada $n \in \omega$, el conjunto

$$D_n = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee i \in 2\ (n, i) \in p\} \in M$$

y claramente es denso en $\mathbb{P}$.

Ejercicio: Probar que, en efecto, $D_n \in M$ (se trata de ver que $D_n = D_n^M \in M$.

Por consiguiente, existe una condición $p \in G \cap D_n$, de donde se sigue que n está en el dominio de f.

En un sentido un tanto vago, los objetos construidos a partir de filtros genéricos, como acabamos de hacer con f a partir de G, se llaman también "genéricos". Así, f es una función genérica de ω en 2 y $a = f^{-1}[\{1\}]$ es un subconjunto genérico de ω (siempre respecto de un modelo dado M).

La idea básica (que motiva el nombre de "genérico") es que la función genérica f cumple cualquier propiedad que no se pueda refutar con una condición particular. Por ejemplo, no podemos asegurar que $f(5) = 1$, pues la condición $p = \{(5, 0)\}$ lo refuta, en el sentido de que si se cumpliera $p \in G$ necesariamente $f(5) = 0$, y no podemos descartar esta posibilidad. Por el contrario, sí que podemos asegurar que f toma el valor 1 en algún número natural, pues ninguna condición puede refutar esto, lo cual es otra forma de decir que el conjunto de las condiciones p que fuerzan $\bigvee n \in \omega\, f(n) = 1$ (en el sentido de que $p \in G$ implica esto) es denso en $\mathbb{P}$. Del mismo modo puede probarse que la función f toma el valor 1 siete veces seguidas y que, en un cierto intervalo, contiene una codificación binaria del "Quijote".

Podemos decir que una función genérica es "tan general", que no puede coincidir (en M) con ninguna función en particular. En efecto, dada cualquier $g \in M$ que cumpla $f : \omega \longrightarrow 2$, necesariamente $f \neq g$, pues el conjunto

$$D_g = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee n \in \mathcal{D}p\ p(n) \neq g(n)\}$$

es claramente denso en $\mathbb{P}$ (y $D_g \in M$ porque $g \in M$), luego existe $p \in G \cap D_g$, luego existe un $n \in \mathcal{D}p$ tal que $f(n) \neq g(n)$, luego $f \neq g$. En otras palabras, una función que sea genérica respecto de un modelo M no puede estar en M. ■

El teorema siguiente garantiza la existencia de filtros genéricos sobre modelos numerables:

Teorema 4.4 *Si $\mathbb{P}$ es un c.p.o., $p \in \mathbb{P}$ y M es un conjunto numerable, entonces existe un filtro G $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $p \in G$.*

Demostración: El conjunto M contiene a lo sumo una cantidad numerable de subconjuntos densos en $\mathbb{P}$. Digamos que son $\{D_n\}_{n\in\omega}$. (Si no hubiera ninguno o hubiera un número finito completamos la sucesión con otros cualesquiera, admitiendo repeticiones.)

Definimos $p_0 = p$ y, supuesto definido p_n, tomamos $p_{n+1} \in D_n$ tal que $p_{n+1} \leq p_n$. Ahora basta definir

$$G = \{q \in \mathbb{P} \mid \bigvee n \in \omega\ p_n \leq q\}.$$

Es inmediato comprobar que G es un filtro en $\mathbb{P}$ que contiene a p y, como $p_n \in G \cap D_n$, es claramente $\mathbb{P}$-genérico sobre M. ■

Así pues, toda condición puede ser verdadera respecto a un filtro genérico (sobre un conjunto numerable) elegido adecuadamente.

Ejemplo Si partimos de un modelo transitivo numerable M de ZFC, consideramos el c.p.o. $\mathbb{P}$ que estamos considerando en los ejemplos y tomamos un filtro G que sea $\mathbb{P}$-genérico sobre M, cuya existencia viene garantizada por el teorema anterior, tenemos que $f_G = \bigcup G : \omega \longrightarrow 2$ cumple que $f_G \notin M$. Lo que nos falta probar es que existe un modelo transitivo N de ZFC que contiene a M y al cual pertenece f_G. Esto equivale a que $G \in N$, lo cual nos lleva a lo que será nuestro planteamiento general: dado un modelo transitivo M de ZFC, un c.p.o. $\mathbb{P}$ y un filtro G que sea $\mathbb{P}$-genérico sobre M, nuestro propósito es construir un modelo transitivo N de ZFC tal que $M \subset N$ y $G \in N$, lo cual a su vez garantizará que el "objeto genérico" que pretendíamos construir a partir de aproximaciones en $\mathbb{P}$ seleccionadas mediante G esté en N. ■

Definición 4.5 Si $\mathbb{P}$ es un c.p.o., $p \in \mathbb{P}$ y $E \subset \mathbb{P}$, diremos que E es *denso bajo* p si

$$\bigwedge q \in \mathbb{P}(q \leq p \rightarrow \bigvee r \in E\ r \leq q).$$

Teorema 4.6 *Sea M un modelo transitivo de* ZF, *sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o., sea $E \in M$ un subconjunto de $\mathbb{P}$ y G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces*

a) O bien $G \cap E \neq \varnothing$, o bien $\bigvee q \in G \bigwedge r \in E\ r \perp q$.

b) Si $p \in G$ y E es denso bajo p, entonces $G \cap E \neq \varnothing$.

DEMOSTRACIÓN: a) Consideremos el conjunto

$$D = \{q \in \mathbb{P} \mid (\bigvee r \in E\ q \leq r) \vee (\bigwedge r \in E\ r \perp q)\} \in M.$$

Ciertamente D es denso en $\mathbb{P}$, pues si $q \in \mathbb{P}$ y $q \notin D$, entonces $\bigvee r \in E\, \neg r \perp q$, de donde se sigue que $\bigvee p \in \mathbb{P}(p \leq r \wedge p \leq q)$ y, como $r \in E \wedge p \leq r$, tenemos que $\bigvee p \in D\ p \leq q$. Por consiguiente $G \cap D \neq \varnothing$, luego $\bigvee q \in G((\bigvee r \in E\ q \leq r) \vee (\bigwedge r \in E\ r \perp q))$. Concluimos que $\bigvee r\ r \in G \cap E \vee \bigvee q \in G \bigwedge r \in E\ r \perp q$.

b) Si $G \cap E = \varnothing$, por a) tenemos que existe $q \in G$ tal que $\bigwedge r \in E\ r \perp q$. Sea $q' \in G$ tal que $q' \leq p \wedge q' \leq q$. Como E es denso bajo p, existe una condición $r \in E$ tal que $r \leq q' \leq q$, luego $\neg r \perp q$, contradicción. ■

Como consecuencia obtenemos que los filtros genéricos son maximales, por lo que en un álgebra de Boole son ultrafiltros:

Teorema 4.7 *Sea M un modelo transitivo de ZF, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o., sea G_1 un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y sea G_2 un filtro en $\mathbb{P}$ tal que $G_1 \subset G_2$. Entonces $G_1 = G_2$.*

DEMOSTRACIÓN: Si existiera una condición $p \in G_2 \setminus G_1$, como $G_1 \cap \{p\} = \varnothing$, el teorema anterior nos da que existe $q \in G_1$ tal que $p \perp q$, pero p y q están ambos en G_2, luego no pueden ser incompatibles. ■

Ultrafiltros genéricos en álgebras de Boole completas Si M es un modelo transitivo de ZF y $\mathbb{B}$ es un álgebra de Boole completa^M, es fácil ver que $\mathbb{B}$ es un álgebra de Boole, pero no es necesariamente completa. Lo que exige la relativización de la completitud es que todo $X \subset \mathbb{B}$ que cumpla $X \in M$ tiene supremo (e ínfimo), pero puede haber subconjuntos de $\mathbb{B}$ que no estén en M que carezcan de supremo o ínfimo.

Teorema 4.8 *Sea M un modelo transitivo de* ZF *y sea $\mathbb{B} \in M$ un álgebra de Boole completa^M. Entonces G es un filtro $\mathbb{B}$-genérico sobre M si y sólo si G es un ultrafiltro en $\mathbb{B}$ tal que*

$$\bigwedge X \in M(X \subset G \rightarrow \bigwedge X \in G).$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que G es un filtro $\mathbb{B}$-genérico sobre M. Entonces G es un ultrafiltro por el teorema anterior. Sea $X \in M$ tal que $X \subset G$. Entonces $G \cap X' = \varnothing$, luego por 4.6 existe un $p \in G$ tal que $p \wedge x' = \mathbb{O}$, para todo $x \in X$, luego $p \leq x$ para todo $x \in X$, luego $p \leq \bigwedge X$, luego $\bigwedge X \in G$.

Supongamos ahora que G cumple las condiciones del enunciado y sea $D \in M$ un subconjunto denso de $\mathbb{B}$. Sea $X = D' \in M$. Si fuera $G \cap D = \varnothing$, como G es un ultrafiltro tendríamos $X \subset G$, luego por hipótesis $\bigwedge X \in G$, luego en particular $\bigwedge X \neq \mathbb{O}$. Como D es denso, existe $p \in D$ (en particular $p \neq \mathbb{O}$) tal que $p \leq \bigwedge X$, pero entonces $p \leq p'$, lo cual es absurdo. ■

Por esto en las álgebras de Boole completas no se habla de filtros, sino de ultrafiltros genéricos. Notemos que el recíproco es trivial: si $\bigwedge X \in G$, entonces $X \subset G$, por la definición de filtro. Similarmente, un ultrafiltro genérico cumple

$$\bigwedge X \in M(X \cap G \neq \varnothing \leftrightarrow \bigvee X \in G).$$

En efecto, si $X \cap G = \varnothing$ entonces $X' \subset G$, luego $\bigwedge X' \in G$, luego $(\bigvee X)' \in G$, luego $\bigvee X \notin G$ y si $p \in X \cap G$ entonces $p \leq \bigvee X$, luego $\bigvee X \in G$.

Equivalentemente: $\bigwedge X$ es “verdadero” si y sólo si todos los elementos de X son “verdaderos”, mientras que $\bigvee X$ es “verdadero” si y sólo si algún elemento de X es “verdadero”.

Una caracterización de los filtros genéricos Terminamos esta sección probando que la definición de filtro genérico puede debilitarse un poco:

Teorema 4.9 *Sea M un modelo transitivo de* ZF, *sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y $G \subset \mathbb{P}$. Entonces G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M si y sólo si cumple*

a) $\bigwedge pq \in G\ \neg p \perp q$,

b) $\bigwedge p \in G \bigwedge q \in \mathbb{P}(p \leq q \rightarrow q \in G)$,

c) $\bigwedge D \in M(D$ *es denso en* $\mathbb{P} \rightarrow G \cap D \neq \varnothing)$.

Demostración: Como $\mathbb{P} \in M$ es denso en $\mathbb{P}$, la condición c) implica que G es no vacío, y entonces b) implica que $\mathbb{1} \in G$. Sólo falta probar que

$$\bigwedge pq \in G \bigvee r \in G(r \leq p \wedge r \leq q).$$

Lo que sabemos por a) es $\bigwedge pq \in G \bigvee r \in \mathbb{P}(r \leq p \wedge r \leq q)$. Tomemos dos condiciones p, $q \in G$ y sea $D = \{r \in \mathbb{P} \mid r \perp p \vee r \perp q \vee (r \leq p \wedge r \leq q)\}$. Es fácil ver que $D = D^M \in M$ y es denso en $\mathbb{P}$, pues si $t \in \mathbb{P}$, o bien $t \perp p$, en cuyo caso $t \in D$, o bien existe una condición $s \leq t \wedge s \leq p$. En este caso, o bien $s \perp q$, con lo que $s \in D \wedge s \leq t$, o bien existe una condición $u \leq s \wedge u \leq q$, con lo que $u \leq t \wedge u \in D$. En cualquier caso concluimos que t tiene una extensión en D.

Por c) concluimos que $G \cap D \neq \varnothing$, pero un $r \in G \cap D$ no puede cumplir ni $r \perp p$ ni $r \perp q$, por la condición a), luego $r \leq p \wedge r \leq q$. ■

4.2 El teorema fundamental

Pasamos ya a abordar el problema de cómo construir un modelo transitivo N de ZFC a partir de un modelo transitivo M de ZFC, de un c.p.o. $\mathbb{P} \in M$ y de un filtro $\mathbb{P}$-genérico G sobre M, de modo que $M \subset N$ y $G \in N$.

Si por estas condiciones fuera, bastaría tomar $N = V$, pero queremos que desde M sea posible hablar de N, para lo cual garantizaremos que todo elemento de N tenga un nombre en M y, de hecho, vamos a empezar definiendo los nombres asociados a un c.p.o. para después definir N como la clase de los objetos denotados por dichos nombres, en un sentido que también tenemos que introducir. Recordemos que una relación no es más que un conjunto de pares ordenados.

Definición 4.10 Si $\mathbb{P}$ es un c.p.o., diremos que un conjunto σ es un $\mathbb{P}$-*nombre* si σ es una relación y

$$(\tau, p) \in \sigma \to p \in \mathbb{P} \land \tau \text{ es un } \mathbb{P}\text{-nombre.}$$

En otras palabras, un nombre es un conjunto de pares ordenados, cuya primera componente es un nombre y cuya segunda componente es una condición.

Esta definición no es circular, sino recurrente. Concretamente, el teorema general de recursión transfinita [TC 4.9] aplicado a la relación de pertenencia afirma que para definir una función $H : V \longrightarrow V$ sobre un conjunto x podemos suponerla definida sobre la clausura transitiva $\operatorname{ct} x$. En nuestro caso definimos la función característica $H : V \longrightarrow 2$ de la clase de los $\mathbb{P}$-nombres definiendo $H(\sigma)$ supuesto que H ya está definida sobre la clausura transitiva de σ, y la definición es

$$H(\sigma) = 1 \leftrightarrow \bigwedge x \in \sigma \bigvee \tau p (p \in \mathbb{P} \land \tau \in \operatorname{ct} \sigma \land x = (\tau, p) \land H(\tau) = 1).$$

Llamamos $V^{\mathbb{P}}$ a la clase de todos los $\mathbb{P}$-nombres. Una simple inducción sobre la relación de pertenencia muestra que ser un $\mathbb{P}$-nombre es absoluto para modelos transitivos de ZF, es decir, que si M es un modelo y $\mathbb{P} \in M$ es un c.p.o., entonces los $\mathbb{P}$-nombres^M son los elementos de $M^{\mathbb{P}} = V^{\mathbb{P}} \cap M$.

Ejemplo Si $\mathbb{P}$ es cualquier c.p.o., tenemos que $\varnothing$ es trivialmente un $\mathbb{P}$-nombre. Si $p \in \mathbb{P}$, entonces $\sigma = \{(\varnothing, \mathbb{1}), (\varnothing, p)\}$ también es un $\mathbb{P}$-nombre, como lo es $\tau = \{(\varnothing, \mathbb{1}), (\sigma, p)\}$, etc. ■

Definición 4.11 Sea $\mathbb{P}$ un c.p.o. y G un filtro en $\mathbb{P}$. Definimos el *valor* de un $\mathbb{P}$-nombre σ respecto de G como

$$\sigma_G = \{\tau_G \mid \bigvee p \in G \ (\tau, p) \in \sigma\}.$$

De nuevo esta definición ha de entenderse por $\in$-recursión. También es fácil ver que σ_G es absoluto para modelos transitivos de ZF. Por ejemplo, es inmediato que $\varnothing_G = \varnothing$. Si $\sigma = \{(\varnothing, p)\}$, entonces

$$\sigma_G = \begin{cases} \varnothing & \text{si } p \notin G, \\ \{\varnothing\} & \text{si } p \in G. \end{cases}$$

Definición 4.12 Sea M un modelo transitivo de ZF, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Definimos la *extensión genérica* de M determinada por G como la clase

$$M[G] = \{\sigma_G \mid \sigma \in M^{\mathbb{P}}\}.$$

Por el axioma de reemplazo, $M[G]$ es un conjunto (numerable) si M lo es. Vamos a probar que $N = M[G]$ es el modelo transitivo que queríamos construir. La transitividad es fácil de probar:

Teorema 4.13 *Si M es un modelo transitivo de* ZF, *$\mathbb{P} \in M$ es un c.p.o. y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces $M[G]$ es una clase transitiva.*

DEMOSTRACIÓN: Tomamos $x \in y \in M[G]$ y hemos de probar que $x \in M[G]$. Tenemos que $y = \sigma_G$, para un $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$, y entonces existen $p \in G$ y $\tau \in V^{\mathbb{P}}$ de modo que $(\tau, p) \in \sigma$ y $x = \tau_G$. Por la transitividad de M ha de ser $\tau \in M^{\mathbb{P}}$, luego $x = \tau_G \in M[G]$. ■

Ahora hemos de probar que $M \subset M[G]$. Para ello hemos de asignar un nombre a cada conjunto de M.

Definición 4.14 Si $\mathbb{P}$ es un c.p.o., definimos el $\mathbb{P}$-*nombre canónico* de un conjunto x como

$$\check{x} = \{(\check{y}, \mathbb{1}) \mid y \in x\}.$$

De nuevo se trata de una definición por $\in$-recursión. Relativizando a un modelo transitivo la fórmula

$$\bigwedge u(u \in \check{x} \leftrightarrow \bigvee y \in x\, u = (\check{y}, \mathbb{1}))$$

y razonando por $\in$-inducción se concluye inmediatamente que $\check{x}$ es absoluto para modelos transitivos de ZF. En particular, si M es un modelo transitivo de ZF, $\mathbb{P} \in M$ y $x \in M$, entonces $\check{x} \in M^{\mathbb{P}}$.

Una simple inducción demuestra que si G es un filtro sobre $\mathbb{P}$ entonces $\bigwedge x\, \check{x}_G = x$. Incidentalmente, esto muestra que la aplicación $V \longrightarrow V^{\mathbb{P}}$ dada por $x \mapsto \check{x}$ es inyectiva, por lo que $V^{\mathbb{P}}$ es una clase propia.

Teorema 4.15 *Si M es un modelo transitivo de* ZF, *$\mathbb{P} \in M$ es un c.p.o. y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces $M \subset M[G]$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $x \in M$, entonces $\check{x} \in M^{\mathbb{P}}$, luego $x = \check{x}_G \in M[G]$. ■

Para probar que $G \in M[G]$ hemos de encontrarle un nombre:

Definición 4.16 Si $\mathbb{P}$ es un c.p.o., definimos el *nombre canónico de un filtro genérico* para $\mathbb{P}$ como

$$\Gamma = \{(\check{p}, p) \mid p \in \mathbb{P}\} \in V^{\mathbb{P}}.$$

Es inmediato comprobar que Γ es absoluto para modelos transitivos de ZF, así como que si G es un filtro en $\mathbb{P}$ entonces $\Gamma_G = G$. Como consecuencia:

Teorema 4.17 *Si M es un modelo transitivo de* ZF, *$\mathbb{P} \in M$ es un c.p.o. y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M entonces $M[G]$ es una clase transitiva, $M \subset M[G]$, $G \in M[G]$ y si N es un modelo transitivo de* ZF *tal que $M \subset N$ y $G \in N$ entonces $M[G] \subset N$.*

DEMOSTRACIÓN: Claramente $\Gamma = \Gamma^M \in M^{\mathbb{P}}$, luego $G = \Gamma_G \in M[G]$. Sólo falta probar la afirmación sobre N. Ahora bien, si $x \in M[G]$ entonces $x = \sigma_G$, para cierto $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$. Como σ, $G \in N$, concluimos que $x = \sigma_G = (\sigma_G)^N \in N$. ■

Así pues, cuando hayamos probado que $M[G]$ es un modelo de ZF tendremos de hecho que es el menor modelo de ZF que contiene a M como subconjunto y a G como elemento.

De acuerdo con las observaciones que hemos hecho al comienzo del capítulo, el hecho siguiente será fundamental:

Teorema 4.18 *Si M es un modelo transitivo de* ZF, $\mathbb{P} \in M$ *es un c.p.o. y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces $\Omega^M = \Omega^{M[G]}$, es decir, M y $M[G]$ contienen los mismos ordinales.*

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar observamos que si $\mathbb{P}$ es un c.p.o. arbitrario, $\sigma \in V^{\mathbb{P}}$ y G es un filtro en $\mathbb{P}$, entonces $\operatorname{rang} \sigma_G \leq \operatorname{rang} \sigma$.

En efecto, razonamos por $\in$-inducción. Si es cierto para los nombres de la clausura transitiva de σ, llamamos $A = \{\tau \in V^{\mathbb{P}} \mid \bigvee p \in G\, (\tau, p) \in \sigma\}$. Así

$$\operatorname{rang} \sigma_G = \bigcup_{x \in \sigma_G} (\operatorname{rang} x + 1) = \bigcup_{\tau \in A} (\operatorname{rang} \tau_G + 1) \leq \bigcup_{\tau \in A} (\operatorname{rang} \tau + 1).$$

Ahora bien, si $\tau \in A$ entonces hay un $p \in G$ tal que $(\tau, p) \in \sigma$, luego

$$\operatorname{rang} \tau < \operatorname{rang} (\tau, p) < \operatorname{rang} \sigma.$$

Concluimos, pues, que $\operatorname{rang} \sigma_G \leq \operatorname{rang} \sigma$.

Teniendo esto en cuenta, si tomamos un ordinal $\alpha \in \Omega^{M[G]}$, entonces $\alpha = \sigma_G$, para un cierto $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$. Según hemos probado, $\alpha = \operatorname{rang} \sigma_G \leq \operatorname{rang} \sigma \in \Omega^M$, luego también $\alpha \in \Omega^M$. La inclusión $\Omega^M \subset \Omega^{M[G]}$ es consecuencia inmediata de la inclusión $M \subset M[G]$. ■

No estamos en condiciones de demostrar que $M[G]$ es un modelo de ZF, pero sí podemos probar que cumple varios axiomas:

Teorema 4.19 *Si M es un modelo transitivo de* ZF, $\mathbb{P} \in M$ *es un c.p.o. y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces $M[G]$ cumple los axiomas de extensionalidad, par, unión regularidad, vacío e infinitud.*

DEMOSTRACIÓN: El axioma de extensionalidad se cumple porque $M[G]$ es transitivo. Suponiendo el axioma de regularidad, éste se cumple en cualquier clase. Vacío e infinitud se cumplen en $M[G]$ porque $\varnothing$, $\omega \in M \subset M[G]$.

Para probar el axioma del par observamos que si x, $y \in M[G]$, digamos $x = \sigma_G$, $y = \tau_G$, con σ, $\tau \in M^{\mathbb{P}}$, entonces $\rho = \{(\sigma, \mathbb{1}), (\tau, \mathbb{1})\} \in M^{\mathbb{P}}$ cumple $\rho_G = \{x, y\} \in M[G]$.

Para el axioma de la unión tomamos un conjunto $x = \sigma_G \in M[G]$ y definimos

$$\pi = \{(\rho, p) \mid p \in \mathbb{P} \land \bigvee \tau q r((\tau, q) \in \sigma \land (\rho, r) \in \tau \land p \leq r \land p \leq q)\} \in M^{\mathbb{P}}.$$

Basta probar que $\pi_G = \bigcup x$.

Tomemos $z \in \bigcup x$, de modo que existe un $y \in x$ tal que $z \in y$. Como $y \in \sigma_G$, ha de ser $y = \tau_G$, de modo que $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ y existe un $q \in G$ tal que $(\tau, q) \in \sigma$. Como $z \in \tau_G$ ha de ser $z = \rho_G$, donde $\rho \in M^{\mathbb{P}}$ y existe $r \in G$ tal que $(\rho, r) \in \tau$. Puesto que G es un filtro existe un $p \in G$ tal que $p \leq q \wedge p \leq r$. Claramente, $(\rho, p) \in \pi$, luego $z = \rho_G \in \pi_G$.

Recíprocamente, si $z \in \pi_G$ entonces $z = \rho_G$, para cierto $\rho \in M^{\mathbb{P}}$, y existe un $p \in G$ tal que $(\rho, p) \in \pi$. Sean τ, q, r según la definición de π. Como G es un filtro se cumple que q, $r \in G$, luego $z = \rho_G \in \tau_G \in \sigma_G = x$, con lo que $z \in \bigcup x$. ■

Conviene extender y generalizar la idea que hemos empleado para probar que $M[G]$ cumple el axioma del par:

Definición 4.20 Si $\mathbb{P}$ es un c.p.o. y σ, $\tau \in V^{\mathbb{P}}$, definimos los nombres

$$\mathrm{pd}(\sigma, \tau) = \{(\sigma, \mathbb{1}), (\tau, \mathbb{1})\}, \qquad \mathrm{po}(\sigma, \tau) = \mathrm{pd}(\mathrm{pd}(\sigma, \sigma), \mathrm{pd}(\sigma, \tau)).$$

Es inmediato comprobar que estas definiciones son absolutas para modelos transitivos de ZF, así como que si G es un filtro en $\mathbb{P}$ entonces

$$\mathrm{pd}(\sigma, \tau)_G = \{\sigma_G, \tau_G\}, \qquad \mathrm{po}(\sigma, \tau)_G = (\sigma_G, \tau_G).$$

Queda pendiente demostrar que $M[G]$ cumple los axiomas de reemplazo y partes, así como el axioma de elección supuesto que lo cumpla M. Para ello necesitamos demostrar que, para cada fórmula metamatemática $\phi(x_1, \ldots, x_n)$, es posible definir una fórmula $p \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ (que, aunque no estén explícitas, depende también de las variables $\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1}$), de modo que se cumple el teorema siguiente:

Teorema 4.21 (Teorema fundamental de la teoría de extensiones) *Sea $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula con a lo sumo las variables libres indicadas. Sea M un modelo transitivo de* ZFC, *$\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in M^{\mathbb{P}}$.*

a) Si M es numerable y $p \in \mathbb{P}$ entonces $(p \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))^M$ si y sólo si para todo filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M con $p \in G$ se cumple $\phi^{M[G]}(\sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG})$.

b) Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M entonces

$$\phi^{M[G]}(\sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG}) \leftrightarrow \bigvee p \in G\, (p \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))^M.$$

La fórmula $p \Vdash \phi$ se lee "p fuerza ϕ". Lo que afirma el apartado a) del teorema anterior es que, para el caso de modelos transitivos numerables, una condición p fuerza una fórmula $\phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ en M (es decir, que alguien que "viva" en M puede comprobar que sucede tal cosa) equivale a que el hecho de que p pertenezca a un filtro genérico G "fuerza" que ϕ sea verdadera en $M[G]$ cuando sus variables se interpretan como $\tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG}$.

A su vez, el apartado b) afirma que el problema de determinar si una extensión genérica $M[G]$ cumple cualquier afirmación $\phi^{M[G]}(\sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG})$ siempre puede reducirse a que una condición adecuada $p \in \mathbb{P}$ fuerce ϕ en M.

En otras palabras: alguien que "viva" en M no tiene por qué ser capaz de determinar si se cumple o no $\phi^{M[G]}(\sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG})$, pero siempre va a poder reducir el problema a determinar si una cierta condición (que podrá calcular explícitamente) pertenece o no al filtro genérico G que le es desconocido. En los casos en que pueda asegurar que dicha condición es $\mathbb{1}$ sí que podrá concluir que se cumple $\phi^{M[G]}(\sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG})$, aun sin tener acceso a $M[G]$.

Vamos a ver cómo, aceptando el teorema fundamental, podemos completar el teorema 4.19:

Teorema 4.22 (Teorema del modelo genérico) *Sea M un modelo transitivo de* ZFC*, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M.*

a) $M[G]$ *es un modelo transitivo de* ZFC.

b) $M \subset M[G]$ *y* $G \in M[G]$.

c) $\Omega^M = \Omega^{M[G]}$.

d) Si N es un modelo transitivo de ZF *tal que $M \subset N$ y $G \in N$ entonces $M[G] \subset N$.*

Demostración: Lo tenemos probado todo salvo que $M[G]$ cumple los axiomas de reemplazo, partes y elección. Veamos en primer lugar que $M[G]$ satisface el caso particular de reemplazo correspondiente a la fórmula $\phi(x, y, x_1, \ldots, x_n)$, donde las variables libres son exactamente las indicadas. Hemos de ver que

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in M[G](\bigwedge xyz \in M[G](\phi^{M[G]}(x,y) \land \phi^{M[G]}(x,z) \rightarrow y = z) \rightarrow$$
$$\bigwedge a \in M[G] \bigvee b \in M[G] \bigwedge y \in M[G](y \in b \leftrightarrow \bigvee x \in a\, \phi^{M[G]}(x,y))).$$

Fijamos $\sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG} \in M[G]$. Supongamos

$$\bigwedge xyz \in M[G](\phi^{M[G]}(x,y) \land \phi^{M[G]}(x,z) \rightarrow y = z)$$

y sea $a = \sigma_G \in M[G]$. Definimos

$$b = \{y \in M[G] \mid \bigvee x \in a\, \phi^{M[G]}(x,y)\}.$$

Basta probar que $b \in M[G]$, para lo cual hemos de encontrarle un nombre en $M^{\mathbb{P}}$. Observemos que si $y \in b$, entonces $y = \tau_G$, para un $\tau \in M^{\mathbb{P}}$. Sea $x \in a$ tal que $\phi^{M[G]}(x,y)$. Entonces $x = \pi_G$, con $(\pi, s) \in \sigma$ y $s \in G$. De este modo tenemos $\pi_G \in \sigma_G \land \phi^{M[G]}(\pi_G, \tau_G)$, luego existe una condición $p \in G$ tal que[2] $p \Vdash (\pi \in \sigma \land \phi(\pi, \tau))$. Recíprocamente, si $p \in G$ cumple $p \Vdash (\pi \in \sigma \land \phi(\pi, \tau))$, entonces $\tau_G \in b$. En vista de esto parece razonable definir

$$\rho = \{(\tau, p) \mid \tau \in M^{\mathbb{P}} \land p \in \mathbb{P} \land \bigvee \pi \in \mathcal{D}\sigma\, p \Vdash (\pi \in \sigma \land \phi(\pi, \tau))\}$$

y demostrar que $b = \rho_G$. No es difícil probar que $b = \rho_G$, pero el problema es que $\rho \notin M$. Más concretamente, el conjunto ρ resulta ser "una clase propia en M", en el mismo sentido en que lo son, por ejemplo, Ω^M o el propio M.

[2] Es costumbre escribir $\Vdash$ en lugar de $\Vdash^M$, dando por hecho que la relación $\Vdash$ se calcula en el modelo base en que trabajamos.

Ello se debe esencialmente a que existe una clase propia de nombres τ que nombran a un mismo conjunto: para cada $y \in b$ existen "demasiados" τ tales que $(\tau, p) \in \rho$ para cierto p. Observemos que no se nos plantea el mismo problema con π porque podemos tomarlo en el dominio de σ, el cual es un conjunto en M. Vamos a hacer algo similar con τ, es decir, vamos a probar que los nombres para los $y \in b$ los podemos tomar en un cierto conjunto de nombres en M. Para ello observamos que la sentencia siguiente es un teorema de ZF:

$$\bigwedge \mathbb{P} \leq \mathbb{1} \sigma \sigma_1 \cdots \sigma_n ((\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1}) \text{ es un c.p.o. } \wedge \sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_n \in V^{\mathbb{P}} \rightarrow$$

$$\bigvee S (S \subset V^{\mathbb{P}} \wedge \bigwedge \pi p \tau (\pi \in \mathcal{D}\sigma \wedge p \in \mathbb{P} \wedge \tau \in V^{\mathbb{P}} \wedge$$

$$p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \phi(\pi, \tau)) \rightarrow \bigvee \mu \in S \, p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \phi(\pi, \mu)))).$$

En efecto, para cada $\pi \in \mathcal{D}\sigma$ y cada $p \in \mathbb{P}$ sea $\alpha(\pi, p)$ el mínimo ordinal α tal que existe un $\tau \in V_\alpha \cap V^{\mathbb{P}}$ de modo que $p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \phi(\pi, \tau))$ o bien $\alpha(\pi, p) = 0$ si no existe ningún τ. Entonces $\{\alpha(\pi, p) \mid \pi \in \mathcal{D}\sigma \wedge p \in \mathbb{P}\}$ es un conjunto (por ser imagen de $\mathcal{D}\sigma \times \mathbb{P}$), luego tiene supremo $\alpha \in \Omega$. Basta tomar $S = V^{\mathbb{P}} \cap V_\alpha$.

La relativización a M de la sentencia anterior nos da que existe un conjunto $S \in M$ tal que $S \subset M^{\mathbb{P}}$ y

$$\bigwedge \pi p \tau (\pi \in \mathcal{D}\sigma \wedge p \in \mathbb{P} \wedge \tau \in M^{\mathbb{P}} \wedge$$

$$p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \phi(\pi, \tau)) \rightarrow \bigvee \mu \in S \, p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \phi(\pi, \mu))).$$

Ahora podemos definir

$$\rho = \{(\mu, p) \mid \mu \in S \wedge p \in \mathbb{P} \wedge \bigvee \pi \in \mathcal{D}\sigma \, p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \phi(\pi, \mu))\}.$$

Ahora sí que se cumple $\rho \in M^{\mathbb{P}}$. La clave está en que hay que entender que $\Vdash$ es $\Vdash^M$, por lo que, en realidad,

$$\rho = \{(\mu, p) \mid \mu \in S \wedge p \in \mathbb{P} \wedge \bigvee \pi \in \mathcal{D}\sigma \, p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \phi(\pi, \mu))\}^M \in M.$$

Veamos que $b = \rho_G \in M[G]$.

Si $y = \tau_G \in b$, como antes obtenemos un $\pi \in \mathcal{D}\sigma$ y un $p \in G$ de modo que $p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \phi(\pi, \tau))$. Por la construcción del conjunto S existe un $\mu \in S$ tal que $p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \phi(\pi, \mu))$, de donde $(\mu, p) \in \rho$, y por lo tanto $\mu_G \in \rho_G$. Como $p \in G$ se cumple $\pi_G \in \sigma_G \wedge \phi^{M[G]}(\pi_G, \mu_G)$, pero también tenemos $\phi^{M[G]}(\pi_G, \tau_G)$, con lo que la hipótesis de unicidad nos da que $y = \tau_G = \mu_G \in \rho_G$.

Recíprocamente, si $y \in \rho_G$ tenemos $y = \mu_G$ con $(\mu, p) \in \rho \wedge p \in G$. Entonces tenemos que $p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \phi(\pi, \mu))$, con lo que $\pi_G \in \sigma_G \wedge \phi^{M[G]}(\pi_G, \mu_G)$, es decir, $\pi_G \in a \wedge \phi^{M[G]}(\pi_G, y)$, lo que prueba que $y \in b$.

La relativización del axioma de partes es

$$\bigwedge x \in M[G] \bigvee y \in M[G] \bigwedge u \in M[G] (u \in y \leftrightarrow u \subset x),$$

pero en realidad basta probar que

$$\bigwedge x \in M[G] \bigvee y \in M[G] \bigwedge u \in M[G](u \subset x \to u \in y),$$

pues de aquí se deduce el axioma de partes mediante el teorema de especificación, que ya sabemos que se cumple en $M[G]$ (pues se deduce del axioma de reemplazo sin necesidad del axioma de partes).

Sea $x = \sigma_G \in M[G]$. Definimos

$$S = \{\mu \in M^{\mathbb{P}} \mid \mathcal{D}\mu \subset \mathcal{D}\sigma\} = (\mathcal{P}(\mathcal{D}\sigma \times \mathbb{P}))^M \in M.$$

El conjunto S va a desempeñar la misma función que el correspondiente conjunto en la prueba del axioma de reemplazo, sólo que esta vez ha sido más fácil obtenerlo. Sea $\rho = S \times \{\mathbb{1}\} \in M^{\mathbb{P}}$ y llamemos $y = \rho_G \in M[G]$. Vamos a ver que y cumple lo pedido. Para ello tomamos $u \in M[G]$ tal que $u \subset x$. Sea $u = \tau_G \subset \sigma_G$. No podemos asegurar que $\tau \in S$, pero vamos a ver que $\tau_G = \mu_G$ con $\mu \in S$.

Sea $\mu = \{(\pi, p) \mid \pi \in \mathcal{D}\sigma \wedge p \Vdash \pi \in \tau\} \in S$. Notemos que efectivamente $\mu \in M$, pues es un subconjunto de $\mathcal{D}\sigma \times \mathbb{P} \in M$ definible en M (teniendo en cuenta una vez más que $\Vdash$ es $\Vdash^M$). Sólo falta probar que $u = \tau_G = \mu_G$.

Si $a \in \tau_G \subset \sigma_G$ entonces $a = \pi_G$, con $(\pi, s) \in \sigma$ y $s \in G$. Como $\pi_G \in \tau_G$ existe un $p \in G$ tal que $p \Vdash \pi \in \tau$, de donde $(\pi, p) \in \mu$ y así $a = \pi_G \in \mu_G$.

Si $a \in \mu_G$, entonces $a = \pi_G$ con $(\pi, p) \in \mu$ y $p \in G$, luego $p \Vdash \pi \in \tau$ y, en consecuencia, $a = \pi_G \in \tau_G$. Así pues, $\tau_G = \mu_G$.

Supongamos finalmente que M cumple el axioma de elección y veamos que lo mismo le sucede a $M[G]$. Basta demostrar que en $M[G]$ se cumple

$$\bigwedge x \bigvee \alpha \in \Omega \bigvee f(f \text{ es una función } \wedge \mathcal{D}f = \alpha \wedge x \subset \mathcal{R}f),$$

pues esto implica que todo conjunto puede ser bien ordenado.

Sea $x = \sigma_G \in M[G]$. Sean α, $g \in M$ tales que $g : \alpha \longrightarrow \mathcal{D}\sigma$ biyectiva (existen en virtud del axioma de elección relativizado a M). Ahora definimos $\tau = \{\text{p.o.}(\check{\beta}, g(\beta)) \mid \beta < \alpha\} \times \mathbb{1} \in M^{\mathbb{P}}$. Claramente

$$f = \tau_G = \{(\beta, g(\beta)_G) \mid \beta < \alpha\}$$

cumple lo pedido. ■

Como consecuencia:

Teorema 4.23 *Si $\mathbb{P}$ es un c.p.o. y una sentencia ϕ es un teorema de* ZFC *entonces $\mathbb{1} \Vdash \phi$.*

Demostración: Por el teorema de reflexión, existe un modelo transitivo numerable M de ZFC tal que

$$\bigwedge \mathbb{P}(\mathbb{P} \text{ es un c.p.o.} \to \mathbb{1} \Vdash \phi) \leftrightarrow \bigwedge \mathbb{P} \in M(\mathbb{P} \text{ es un c.p.o.} \to (\mathbb{1} \Vdash \phi)^M).$$

Ahora bien, si $\mathbb{P} \in M$ es un c.p.o., el teorema fundamental nos da que $(\mathbb{1} \Vdash \phi)^M$ es equivalente a que se cumpla $\phi^{M[G]}$ para todo filtro $\mathbb{P}$-genérico G sobre M, lo cual es cierto por el teorema anterior. ■

Así pues, para completar la prueba de los dos últimos teoremas necesitamos definir la fórmula $\Vdash$ y demostrar que cumple el teorema fundamental. En la sección siguiente nos ocuparemos de ello en el caso de las álgebras de Boole completas y después generalizaremos los resultados a c.p.o.s arbitrarios.

4.3 Modelos booleanos

Abordamos ahora el problema más delicado que plantea la teoría básica de las extensiones genéricas: dada una extensión genérica $M[G]$, tenemos que mostrar cómo alguien que "viva" en M puede reducir la verdad o falsedad de cualquier afirmación sobre $M[G]$ a que una determinada condición esté o no en el filtro genérico. De momento nos restringiremos al caso en que el c.p.o. es un álgebra de Boole completa^M, donde el planteamiento resulta mucho más sencillo.

Si $\mathbb{B}$ es un álgebra de Boole completa, consideramos en $V^{\mathbb{B}} \times V^{\mathbb{B}}$ la relación dada por

$$(\sigma, \tau)\, R\, (\sigma', \tau') \leftrightarrow (\operatorname{rang} \sigma, \operatorname{rang} \tau) < (\operatorname{rang} \sigma', \operatorname{rang} \tau'),$$

donde la relación del término de la derecha es el buen orden canónico en $\Omega \times \Omega$. Claramente es una relación conjuntista y bien fundada, que podemos utilizar para definir una aplicación

$$H : V^{\mathbb{B}} \times V^{\mathbb{B}} \longrightarrow \mathbb{B} \times \mathbb{B}$$

por recursión transfinita. Con la notación $H(\sigma, \tau) = (\|\sigma = \tau\|, \|\sigma \in \tau\|)$, se trata de definir las condiciones $\|\sigma = \tau\|$ y $\|\sigma \in \tau\|$ supuesto que ya están definidas sobre los pares $(\sigma', \tau')\, R\, (\sigma, \tau)$.

Definición 4.24 Si $\mathbb{B}$ es un álgebra de Boole completa, para cada par de $\mathbb{B}$-nombres $\sigma, \tau \in V^{\mathbb{B}}$, definimos como sigue las condiciones $\|\sigma = \tau\|$ y $\|\sigma \in \tau\|$:

a) $\|\sigma \in \tau\| = \bigvee\limits_{(\pi, p) \in \tau} (\|\sigma = \pi\| \wedge p)$,

b) $\|\sigma = \tau\| = \bigwedge\limits_{\pi \in \mathcal{D}\sigma} (\|\pi \in \sigma\| \rightarrow \|\pi \in \tau\|) \wedge \bigwedge\limits_{\pi \in \mathcal{D}\tau} (\|\pi \in \tau\| \rightarrow \|\pi \in \sigma\|)$.

Notemos que la definición es correcta, pues en a) se cumple que $(\sigma, \pi)\, R\, (\sigma, \tau)$, luego $\|\sigma = \pi\|$ está definido, mientras que en b) podemos sustituir las cuatro condiciones que aparecen por su definición según a), y entonces quedan en términos de condiciones de la forma $\|\pi = \pi'\|$ con π y π' en el dominio de σ o de τ, que podemos suponer definidas por recurrencia, pues el máximo de los dos rangos es menor que el máximo de los rangos de σ y τ.

Conviene observar que los términos $\|\sigma = \tau\|$ y $\|\sigma \in \tau\|$ son absolutos para modelos transitivos de ZF en el sentido siguiente:

Si M es un modelo transitivo de ZF, $\mathbb{B} \in M$ es un álgebra de Boole completa^M y $\sigma, \tau \in M^{\mathbb{B}}$, sucede que $\|\sigma = \tau\|$ y $\|\sigma \in \tau\|$ están definidos a pesar de que $\mathbb{B}$ no tiene por qué ser realmente un álgebra de Boole completa, ya que todos los supremos e ínfimos que requiere la definición lo son de subconjuntos de $\mathbb{B}$ que están en M, y además se cumple que $\|\sigma = \tau\|^M = \|\sigma = \tau\|$, $\|\sigma \in \tau\|^M = \|\sigma \in \tau\|$.

Teorema 4.25 *Sea M un modelo transitivo de* ZF, *sea $\mathbb{B} \in M$ un álgebra de Boole completa^M, sean $\sigma, \tau \in M^{\mathbb{B}}$ y sea G un ultrafiltro $\mathbb{B}$-genérico sobre M. Entonces*

a) $\sigma_G \in \tau_G \leftrightarrow \|\sigma \in \tau\| \in G$.

b) $\sigma_G = \tau_G \leftrightarrow \|\sigma = \tau\| \in G$.

Demostración: Lo probamos por inducción sobre la misma relación R que hemos usado para definir los valores booleanos, es decir, suponemos que el resultado es cierto para pares anteriores a (σ, τ).

Si $\sigma_G \in \tau_G$, entonces $\sigma_G = \pi_G$, donde $(\pi, p) \in \tau$ y $p \in G$. Por hipótesis de inducción $\|\sigma = \pi\| \in G$, luego $\|\sigma = \pi\| \wedge p \in G$, luego $\|\sigma \in \tau\| \in G$.

Recíprocamente, si $\|\sigma \in \tau\| \in G$, por la observación tras el teorema 4.8, existe un $(\pi, p) \in \tau$ tal que $\|\sigma = \pi\| \wedge p \in G$. Por hipótesis de inducción $\sigma_G = \pi_G$ y por definición del valor de un nombre $\pi_G \in \tau_G$, luego $\sigma_G \in \tau_G$.

Supongamos ahora que $\sigma_G = \tau_G$ y tomemos $\pi \in \mathcal{D}\sigma$. Si $\|\pi \in \sigma\| \in G$, por la parte ya probada, tenemos que $\pi_G \in \sigma_G = \tau_G$, y de nuevo por la parte ya probada, $\|\pi \in \tau\| \in G$. Concluimos que $\|\pi \in \sigma\|' \in G$ o bien $\|\pi \in \tau\| \in G$, luego $\|\pi \in \sigma\|' \vee \|\pi \in \tau\| \in G$, que es lo mismo que $\|\pi \in \sigma\| \rightarrow \|\pi \in \tau\| \in G$. Por el teorema 4.8 concluimos que $\bigwedge\limits_{\pi \in \mathcal{D}\sigma} (\|\pi \in \sigma\| \rightarrow \|\pi \in \tau\|) \in G$, e igualmente se prueba que $\bigwedge\limits_{\pi \in \mathcal{D}\tau} (\|\pi \in \tau\| \rightarrow \|\pi \in \sigma\|) \in G$, luego $\|\sigma = \tau\| \in G$.

Recíprocamente, si $\|\sigma = \tau\| \in G$ y $u \in \sigma_G$, entonces $u = \pi_G$, con $\pi \in \mathcal{D}\sigma$. Por la parte ya probada, $\|\pi \in \sigma\| \in G$, y por definición de $\|\sigma = \tau\|$ también $\|\pi \in \sigma\| \rightarrow \|\pi \in \tau\| \in G$, luego $\|\pi \in \tau\| \in G$ y, de nuevo por la parte ya probada, $u = \pi_G \in \tau_G$, Esto prueba que $\sigma_G \subset \tau_G$, e igualmente se prueba la inclusión opuesta. ■

Con esto hemos resuelto el problema de encontrar condiciones que fuercen fórmulas atómicas. Ahora es fácil pasar a fórmulas arbitrarias. Para ello observemos que si G es cualquier ultrafiltro en un álgebra de Boole se cumple trivialmente:

a) $p \in G \leftrightarrow p' \notin G$,

b) $p \wedge q \in G \leftrightarrow p \in G \wedge q \in G$,

c) $p \vee q \in G \leftrightarrow p \in G \vee q \in G$,

d) $p \to q \in G \leftrightarrow p \notin G \vee q \in G$,

e) $p \leftrightarrow q \in G \leftrightarrow (p \in G \leftrightarrow q \in G)$.

y si además es $\mathbb{B}$-genérico sobre un modelo transitivo M de ZF, para todo $X \in \mathcal{P}^M\mathbb{B}$ se cumple que

f) $\bigwedge X \in G \leftrightarrow \bigwedge p \in X\, p \in G$,

g) $\bigvee X \in G \leftrightarrow \bigvee p \in X\, p \in G$.

Esto hace que la definición siguiente funcione como se pretende:

Definición 4.26 Para cada fórmula (metamatemática) sin descriptores definimos inductivamente su *valor booleano* del modo siguiente:

a) $\|\sigma = \tau\|$ y $\|\sigma \in \tau\|$ son los términos ya definidos,

b) $\|\neg\phi\| \equiv \|\phi\|'$,

c) $\|\phi \to \psi\| \equiv \|\phi\| \to \|\psi\|$,

d) $\|\bigwedge x\, \phi\| \equiv \bigwedge\limits_{\sigma \in V^{\mathbb{B}}} \|\phi(\sigma)\|$.

Una simple inducción sobre la longitud de ϕ demuestra trivialmente el teorema siguiente en ZF:

> Si $(\mathbb{B}, \wedge, \vee, ')$ es un álgebra de Boole completa y $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in V^{\mathbb{B}}$, entonces se cumple que $\|\phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\| \in \mathbb{B}$.

Notemos que, formalmente, el teorema empieza por

$$\bigwedge \mathbb{B} \wedge \vee\, '\sigma_1 \cdots \sigma_n((\mathbb{B}, \wedge, \vee, ')) \text{ es un algebra de Boole completa} \wedge \cdots),$$

de modo que, por ejemplo, $\wedge$ es una variable que, por hipótesis representa una función $\wedge\colon \mathbb{B} \times \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$, etc.

Además, utilizando las propiedades elementales de las álgebras de Boole, se demuestran trivialmente las relaciones siguientes:

e) $\|\phi \vee \psi\| = \|\phi\| \vee \|\psi\|$,

f) $\|\phi \wedge \psi\| = \|\phi\| \wedge \|\psi\|$,

g) $\|\phi \leftrightarrow \psi\| = \|\phi\| \leftrightarrow \|\psi\|$,

h) $\|\bigvee x\phi\| = \bigvee\limits_{\sigma \in V^{\mathbb{B}}} \|\phi(\sigma)\|$.

Notemos que en los casos d) y h) no importa que $V^{\mathbb{B}}$ sea una clase propia, pues, por ejemplo, d) equivale a que

$$\|\bigwedge x\, \phi\| = \bigwedge \{p \in \mathbb{B} \mid \bigvee \sigma \in V^{\mathbb{B}}\ p = \|\phi(\sigma)\|\},$$

que es el ínfimo de un cierto subconjunto de $\mathbb{B}$.

Ahora ya podemos probar la versión para álgebras de Boole del teorema fundamental:

Teorema 4.27 (Teorema fundamental de la teoría de extensiones) *Sea $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula con a lo sumo las variables libres indicadas. Sea M un modelo transitivo de* ZFC, *sea $\mathbb{B}$ un álgebra de Boole completa^M, sean $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in M^{\mathbb{B}}$ y sea G un ultrafiltro $\mathbb{B}$-genérico sobre M. Entonces*

$$\phi^{M[G]}(\sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG}) \leftrightarrow \|\phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\|^M \in G.$$

Demostración: En principio probamos el teorema para fórmulas sin descriptores (que es el único caso en el que tenemos definido el valor booleano). Después del teorema siguiente veremos cómo generalizar la definición a fórmulas (metamatemáticas) arbitrarias, así como que el resultado que vamos a probar vale en general.

Razonamos por inducción sobre la longitud de ϕ. Para las fórmulas atómicas $x = y$ y $x \in y$ ya lo tenemos probado. Si es cierto para ϕ, entonces

$$(\neg\phi)^{M[G]}(\sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG}) \leftrightarrow \neg\phi^{M[G]}(\sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG}) \leftrightarrow \|\phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\|^M \notin G$$
$$\leftrightarrow (\|\phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\|')^M \in G \leftrightarrow \|\neg\phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\|^M \in G.$$

Si el resultado vale para ϕ y para ψ, entonces

$$(\phi \to \psi)^{M[G]}(\sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG}) \leftrightarrow \neg\phi^{M[G]}(\sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG}) \vee \psi^{M[G]}(\sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG})$$
$$\leftrightarrow \|\phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\|^M \notin G \vee \|\psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\|^M \in G \leftrightarrow$$
$$\|\phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\|^M \to \|\psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\|^M \in G \leftrightarrow \|(\phi \to \psi)(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\|^M \in G.$$

Supongamos finalmente que el resultado vale para $\phi(x, x_1, \ldots, x_n)$. Entonces

$$(\bigwedge x\, \phi(x, \sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG}))^{M[G]} \leftrightarrow \bigwedge x \in M[G]\, \phi^{M[G]}(x, \sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG})$$
$$\leftrightarrow \bigwedge \sigma \in M^{\mathbb{B}}\, \phi^{M[G]}(\sigma_G, \sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG}) \leftrightarrow \bigwedge \sigma \in M^{\mathbb{B}}\, \|\phi(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)\|^M \in G$$
$$\leftrightarrow \bigwedge_{\sigma \in M^B} \|\phi(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)\|^M \in G \leftrightarrow \|\bigwedge x\, \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\|^M \in G.$$

■

A partir de aquí es trivial que se cumple la versión 4.21 del teorema fundamental (para álgebras de Boole completas) sin más que definir

$$p \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \leftrightarrow p \leq \|\phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\|.$$

En efecto, si M es un modelo transitivo numerable de ZF y $p \in G$, cumple $p \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, entonces $\|\phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\| \in G$, luego $\phi^{M[G]}(\sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG})$.

Recíprocamente, si no se cumple $p \leq \|\phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\|$, por el teorema 4.4 existe un ultrafiltro genérico que contiene a la condición no nula

$$q = p \wedge \|\phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\|',$$

con lo que $p \in G$, pero no se cumple $\phi^{M[G]}(\sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG})$.

Esto prueba el apartado a), y el apartado b) es trivial, sin más que considerar la condición $p = \|\phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\|$. ■

A su vez, esto implica que se cumple el teorema del modelo genérico y la versión booleana de 4.23:

Teorema 4.28 *Si $\mathbb{B}$ es un álgebra de Boole completa y una sentencia ϕ es un teorema de* ZFC, *entonces $\|\phi\| = \mathbb{1}$.*

Valores booleanos de fórmulas con descriptores Como consecuencia del teorema anterior, si $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ y $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ son dos fórmulas metamatemáticas sin descriptores tales que en ZFC se prueba que

$$\bigwedge x_1\cdots x_n(\phi(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\psi(x_1,\ldots,x_n)),$$

se cumple que

$$\|\bigwedge x_1\cdots x_n(\phi(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\psi(x_1,\ldots,x_n))\|=\mathbb{1},$$

luego si $\sigma_1,\ldots,\sigma_n\in V^{\mathbb{B}}$ son nombres cualesquiera, resulta que

$$\|\phi(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\leftrightarrow\psi(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\|=\mathbb{1},$$

que a su vez equivale a que

$$\|\phi(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\|=\|\psi(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\|,$$

lo que nos permite definir el valor booleano de cualquier fórmula metamatemática (tal vez con descriptores), como el de cualquier fórmula sin descriptores equivalente. Es obvio entonces que el teorema 4.27 vale para fórmulas metamatemáticas arbitrarias.

También es claro que las relaciones que hemos empleado en la definición 4.26 y las derivadas de ellas son válidas ahora para fórmulas arbitrarias. ■

Conviene observar finalmente que el cálculo del valor booleano de los cuantificadores acotados puede simplificarse:

Teorema 4.29 *Para toda fórmula metamatemática $\phi(x,x_1,\ldots,x_n)$, si $\mathbb{B}$ es un álgebra de Boole completa y $\sigma,\sigma_1,\ldots,\sigma_n\in V^{\mathbb{B}}$, entonces*

$$\|\bigwedge x\in\sigma\,\phi(x,\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\|=\bigwedge_{\pi\in\mathcal{D}\sigma}\|\pi\in\sigma\to\phi(\pi,\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\|,$$

$$\|\bigvee x\in\sigma\,\phi(x,\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\|=\bigvee_{\pi\in\mathcal{D}\sigma}\|\pi\in\sigma\wedge\phi(\pi,\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\|.$$

Demostración: Por el teorema de reflexión, basta probar el teorema relativizado a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Si G es un ultrafiltro $\mathbb{B}$-genérico sobre M que contiene a $\|\bigvee x\in\sigma\,\phi(x,\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\|$, entonces $\bigvee x\in\sigma_G\,\phi^{M[G]}(x,\sigma_{1G},\ldots,\sigma_{nG})$, luego existe un $x=\pi_G$, con $(\pi,p)\in\sigma$ y $\pi_G\in\sigma_G\wedge\phi^{M[G]}(\pi_G,\sigma_{1G},\ldots,\sigma_{nG})$, luego $\|\pi\in\sigma\wedge\phi(\pi,\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\|\in G$, luego

$$\bigvee_{\pi\in\mathcal{D}\sigma}\|\pi\in\sigma\wedge\phi(\pi,\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\|\in G.$$

Esto implica que $\|\bigvee x\in\sigma\,\phi(x,\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\|\leq\bigvee\limits_{\pi\in\mathcal{D}\sigma}\|\pi\in\sigma\wedge\phi(\pi,\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\|$, y la otra desigualdad es inmediata. Ahora aplicamos esto a $\neg\phi$, con lo que

$$\|\neg\bigwedge x\neg(x\in\sigma\wedge\neg\phi)\|=\bigvee_{\pi\in\mathcal{D}\sigma}\|\pi\in\sigma\wedge\neg\phi\|.$$

Negando ambos miembros obtenemos

$$\|\bigwedge x\in\sigma\,\phi\|=\|\bigwedge x\neg(x\in\sigma\wedge\neg\phi)\|=\bigwedge_{\pi\in\mathcal{D}\sigma}\|\pi\in\sigma\to\phi\|.$$

■

4.4 Inmersiones

Nos ocupamos ahora de justificar que toda extensión genérica construida a partir de un c.p.o. puede obtenerse igualmente mediante un álgebra de Boole completa. Recordemos [TC 7.40] el concepto de inmersión entre c.p.o.s:

Definición 4.30 Sean $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ dos c.p.o.s. Diremos que $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es una *inmersión* si cumple

a) $\bigwedge pp' \in \mathbb{P}(p \leq p' \to i(p) \leq i(p'))$,

b) $\bigwedge pp' \in \mathbb{P}(p \perp p' \to i(p) \perp i(p'))$.

Diremos que i es una *inmersión completa* si además cumple

c) $\bigwedge q \in \mathbb{Q} \bigvee p \in \mathbb{P} \bigwedge p' \in \mathbb{P}(p' \leq p \to \neg i(p') \perp q)$.

En tal caso diremos que p es una *reducción* de q a $\mathbb{P}$.

Una inmersión $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es *densa* si $i[\mathbb{P}]$ es denso en $\mathbb{Q}$.

Diremos que $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es una *semejanza* si es biyectiva y

$$\bigwedge pp' \in \mathbb{P}(p \leq p' \leftrightarrow i(p) \leq i(p')).$$

En [TC 7.43] probamos que las inmersiones completas entre álgebras de Boole completas coinciden con los monomorfismos completos, en el sentido de monomorfismos de álgebras que conservan supremos e ínfimos, mientras que las inmersiones densas son, de hecho, isomorfismos (véase la observación tras el teorema [TC 7.47]). Además, según [TC 7.49], para todo c.p.o. $\mathbb{P}$ existe una inmersión densa $i : \mathbb{P} \longrightarrow R(\mathbb{P})$ en un álgebra de Boole completa, única salvo isomorfismo.

Teorema 4.31 *Sea M un modelo transitivo de* ZF*, sean $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q} \in M$ dos c.p.o.s y sea $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ una inmersión completa, $i \in M$. Sea H un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M. Entonces $G = i^{-1}[H]$ es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M.*

Demostración: Probaremos que G es $\mathbb{P}$-genérico sobre M mediante el teorema 4.9. Si p, $q \in G$, entonces $i(p)$, $i(q) \in H$, luego $\neg i(p) \perp i(q)$, luego $\neg p \perp q$.

Si $p \in G$ y $q \in \mathbb{P}$ cumple $p \leq q$ entonces $i(p) \in H \wedge i(p) \leq i(q)$, luego $i(q) \in H$, luego $q \in G$.

Si $D \in M$ es denso en $\mathbb{P}$ pero $G \cap D = \varnothing$, entonces $H \cap i[D] = \varnothing$. Por el teorema 4.6 existe un $q \in H$ incompatible con todos los elementos de $i[D]$. Sea p una reducción de q a $\mathbb{P}$ y sea $p' \leq p$ tal que $p' \in D$. Entonces $i(p') \in i[D]$, pero es compatible con q, contradicción.

Así pues, G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. ■

Si la inmersión es densa, los filtros $\mathbb{P}$-genéricos se corresponden biunívocamente con los $\mathbb{Q}$-genéricos:

Teorema 4.32 *Sea M un modelo transitivo de* ZF, *sean $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q} \in M$ dos c.p.o.s e $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ una inmersión densa, $i \in M$. Para cada $G \subset \mathbb{P}$ sea*

$$\hat{\imath}(G) = \{q \in \mathbb{Q} \mid \bigvee p \in G\ i(p) \leq q\}.$$

a) Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M entonces $H = \hat{\imath}(G)$ es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M y $G = i^{-1}[H]$.

b) Si H es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M entonces $G = i^{-1}[H]$ es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y $H = \hat{\imath}(G)$.

Demostración: a) Veamos que H es un filtro. Claramente $\mathbb{1} \in H$.

Si p, $q \in H$, existen r, $s \in G$ tales que $i(r) \leq p \wedge i(s) \leq q$, luego existe un $t \in G$ tal que $t \leq r \wedge t \leq s$. Entonces $i(t) \in H \wedge i(t) \leq p \wedge i(t) \leq q$.

Si $p \in H$ y $q \in \mathbb{Q}$ cumple $p \leq q$, entonces hay un $r \in G$ tal que $i(r) \leq p \leq q$, luego $q \in H$.

Sea ahora $D \in M$ un conjunto denso en $\mathbb{Q}$. Sea

$$D^* = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee q \in D\ i(p) \leq q\} \in M.$$

Se cumple que D^* es denso en $\mathbb{P}$, pues si $p \in \mathbb{P}$, existe $q \in D$ tal que $q \leq i(p)$. Como i es densa, existe un $p' \in \mathbb{P}$ tal que $i(p') \leq q \leq i(p)$. Entonces $\neg i(p) \perp i(p')$, luego $\neg p \perp p'$. Sea $p'' \in \mathbb{P}$ tal que $p'' \leq p \wedge p'' \leq p'$. Así, $p'' \in D^*$, pues $i(p'') \leq i(p') \leq q \in D$, y por otra parte $p'' \leq p$.

Por consiguiente $D^* \cap G \neq \varnothing$, lo que significa que existen $p \in G$ y $q \in D$ tales que $i(p) \leq q$, de donde $q \in D \cap H \neq \varnothing$.

Tenemos así que H es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M.

Por el teorema anterior se cumple que $i^{-1}[H]$ es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y claramente $G \subset i^{-1}[H]$. Según el teorema 4.7 ha de ser $G = i^{-1}[H]$.

a) Por el teorema anterior sabemos que G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Es inmediato comprobar que $\hat{\imath}(G) \subset H$ y por b) tenemos que $\hat{\imath}(G)$ es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M. Por 4.7 concluimos que $H = \hat{\imath}(G)$. ■

Ahora pasamos a relacionar las extensiones genéricas:

Definición 4.33 Si $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es una aplicación entre c.p.o.s, definimos la aplicación $\bar{\imath} : V^{\mathbb{P}} \longrightarrow V^{\mathbb{Q}}$ mediante

$$\bar{\imath}(\sigma) = \{(\bar{\imath}(\tau), i(p)) \mid (\tau, p) \in \sigma\}.$$

Claramente se trata de una definición por $\in$-recursión. Una simple inducción prueba que si $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ y $j : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces $\overline{i \circ j} = \bar{\imath} \circ \bar{\jmath}$. También es claro que la identidad induce la aplicación identidad, de donde a su vez se sigue que $\bar{\imath}$ es inyectiva, suprayectiva o biyectiva si lo es i.

Se prueba sin dificultad que el término $\bar{\imath}$ es absoluto para modelos transitivos de ZF. Esto se traduce en que si M es un modelo transitivo de ZF, $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q} \in M$ son dos c.p.o.s e $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ cumple $i \in M$, entonces $\bar{\imath}$ se restringe a una aplicación $\bar{\imath} : M^{\mathbb{P}} \longrightarrow M^{\mathbb{Q}}$.

En lo sucesivo escribiremos i en lugar de $\bar{\imath}$ salvo que haya posibilidad de confusión.

Similarmente definimos $\bar{\imath}^{-1} : V^{\mathbb{Q}} \longrightarrow V^{\mathbb{P}}$ mediante

$$\bar{\imath}^{-1}(\sigma) = \{(\bar{\imath}^{-1}(\tau), p) \mid \bigvee q \in \mathbb{Q}\ ((\tau, q) \in \sigma \land i(p) \leq q)\}.$$

Nuevamente se trata de una definición por $\in$-recursión y el término es absoluto para modelos transitivos de ZF. Escribiremos i^{-1} en lugar de $\bar{\imath}^{-1}$ cuando no dé lugar a confusión.

Teorema 4.34 *Sea M un modelo transitivo de* ZF, *sean $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q} \in M$ dos c.p.o.s e $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ una inmersión completa $i \in M$. Sea H un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M y $G = i^{-1}[H]$.*

a) Si $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$, entonces $\sigma_G = i(\sigma)_H$. En particular $M[G] \subset M[H]$.

b) Si la inmersión es densa y $\sigma \in M^{\mathbb{Q}}$, entonces $i^{-1}(\sigma)_G = \sigma_H$. En particular $M[G] = M[H]$.

Demostración: Probamos a) por inducción sobre el rango de σ: Supongamos que $x \in i(\sigma)_H$. Entonces $x = i(\tau)_H$, con $(\tau, p) \in \sigma$, $i(p) \in H$. Por tanto, $p \in G$ y por hipótesis de inducción $x = \tau_G$. Esto implica que $x \in \sigma_G$. El recíproco es análogo.

Para probar b) suponemos que la inmersión es densa y probamos b) por inducción sobre el rango de σ. Si $x \in i^{-1}(\sigma)_G$, entonces $x = i^{-1}(\tau)_G$, y existen $p \in G$, $q \in \mathbb{Q}$ de modo que $i(p) \leq q$ y $(\tau, q) \in \sigma$. Entonces $i(p) \in H$, luego también $q \in H$ y, por hipótesis de inducción, $x = \tau_H \in \sigma_H$.

Supongamos ahora que $x \in \sigma_H$. Entonces $x = \tau_H$ y existe $q \in H$ tal que $(\tau, q) \in \sigma$. Por el teorema 4.32 sabemos que $H = \hat{\imath}(G)$, luego existe un $p \in G$ tal que $i(p) \leq q$, luego $(i^{-1}(\tau), p) \in i^{-1}(\sigma)$, luego por hipótesis de inducción $x = i^{-1}(\tau)_G \in i^{-1}(\sigma)_G$. ■

Así pues, una extensión genérica obtenida con un c.p.o. $\mathbb{P}$ puede obtenerse igualmente con su compleción $R(\mathbb{P})$. Ya estamos casi en condiciones de probar el teorema fundamental 4.21, para lo cual tenemos que definir la relación $\Vdash$. Empezamos dando una definición provisional:

Definición 4.35 Sea $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula (metamatemática) con a lo sumo las variables libres indicadas. Sea M un modelo transitivo de ZF, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o., sean $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in M^{\mathbb{P}}$ y sea $p \in \mathbb{P}$. Diremos que *p fuerza* $\phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, y lo representaremos por $p \Vdash^* \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, si

$$\bigwedge G (G \text{ es } \mathbb{P}\text{-genérico sobre } M \land p \in G \to \phi^{M[G]}(\sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG})).$$

Para álgebras de Boole completas este concepto no aporta mucho:

Teorema 4.36 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZF, *sea $\mathbb{B}$ un álgebra de Boole completa^M y sean $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in M^{\mathbb{B}}$. Entonces*

$$p \Vdash^* \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \leftrightarrow p \leq \|\phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\|^M,$$

es decir, que $\|\phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\|^M$ es la máxima condición que fuerza ϕ.

Esto no es más que el apartado a) del teorema fundamental, y está demostrado tras el teorem 4.27.

Teorema 4.37 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sean $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q} \in M$ dos c.p.o.s e $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ una inmersión completa $i \in M$.*

a) Si $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula absoluta para modelos transitivos de ZFC, *$\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$ y $p \in \mathbb{P}$, entonces*

$$p \Vdash^* \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \rightarrow i(p) \Vdash^* \phi(i(\tau_1), \ldots, i(\tau_n)).$$

b) Si i es una inmersión densa, el apartado a) vale para fórmulas cualesquiera y es una equivalencia.

DEMOSTRACIÓN: Probamos a) y b) simultáneamente. Supongamos que $p \Vdash^* \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$. Sea H un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M tal que $i(p) \in H$. Entonces $p \in G = i^{-1}[H]$, luego se cumple $\phi^{M[G]}(\tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG})$, lo cual, por 4.34, es lo mismo que $\phi^{M[G]}(i(\tau_1)_H, \ldots, i(\tau_n)_H)$. Esto equivale a $\phi^{M[H]}(i(\tau_1)_H, \ldots, i(\tau_n)_H)$, ya sea porque $M[G] \subset M[H]$ y ϕ es absoluta (en el caso a) o bien porque $M[G] = M[H]$ (en el caso b). Esto demuestra que $i(p) \Vdash^* \phi(i(\tau_1), \ldots, i(\tau_n))$. En el caso b) el recíproco se prueba análogamente, partiendo ahora de un filtro $\mathbb{P}$-genérico G y tomando $H = \hat{\imath}(G)$. ∎

Pasamos ya a la definición definitiva de la relación fundamental:

Definición 4.38 Sea $\mathbb{P}$ un c.p.o., sea $i : \mathbb{P} \longrightarrow R(\mathbb{P})$ la inmersión densa en su compleción, sea $p \in \mathbb{P}$ y sean $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in V^{\mathbb{P}}$. Definimos

$$p \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \equiv i(p) \leq \|\phi(i(\sigma_1), \ldots, i(\sigma_n))\|.$$

Así la relación $\Vdash$ es puramente sintáctica y no involucra en absoluto el concepto de filtro.

DEMOSTRACIÓN (de 4.21): Consideramos la compleción $\mathbb{B} = R(\mathbb{P})^M$. La parte a) equivale a que

$$p \Vdash^* \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \leftrightarrow (p \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))^M.$$

En efecto, por el teorema 4.37 tenemos que

$$p \Vdash^* \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \leftrightarrow i(p) \Vdash^* \phi(i(\sigma_1), \ldots, i(\sigma_n)).$$

Por 4.36 esto equivale a que $i(p) \leq \|\phi(i(\sigma_1), \ldots, i(\sigma_n))\|^M$, lo cual a su vez es, por definición, $(p \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))^M$.

b) Sea $H = \hat{\imath}(G)$ el ultrafiltro dado por 4.32, que es $\mathbb{B}$-genérico sobre M. Por 4.34 se cumple $\phi^{M[G]}(\sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG})$ si y sólo si $\phi^{M[H]}(i(\sigma_1)_H, \ldots, i(\sigma_n)_H)$, si y sólo si $\|\phi(i(\sigma_1), \ldots, i(\sigma_n))\|^M \in H$, si y sólo si

$$\bigvee p \in G\ i(p) \leq \|\phi(i(\sigma_1), \ldots, i(\sigma_n))\|^M,$$

si y sólo si $\bigvee p \in G\ (p \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))^M$. ∎

Notas A partir de aquí ya no usaremos más la notación provisional $\Vdash^*$, pues sólo funciona correctamente sobre modelos transitivos numerables y en ellos, según el teorema fundamental, es equivalente a $(\Vdash)^M$.

Observemos que la numerabilidad del modelo en el teorema fundamental es menos relevante de lo que puede parecer, pues en el apartado b) no se requiere, ni tampoco realmente en una de las implicaciones del apartado a). En efecto, si M no es necesariamente numerable y tenemos que $(p \Vdash \phi(\sigma_1,\ldots,\sigma_n))^M$, podemos asegurar que si G es p-genérico sobre M y $p \in G$ entonces se cumple $\phi^{M[G]}(\sigma_{1G},\ldots,\sigma_{nG})$, pues eso es justamente lo que afirma el apartado b).

Lo único que no podemos garantizar si M no es numerable es que por el hecho de que $\phi^{M[G]}(\sigma_{1G},\ldots,\sigma_{nG})$ se cumpla siempre que G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $p \in G$ podamos asegurar que $(p \Vdash \phi(\sigma_1,\ldots,\sigma_n))^M$, y es lógico que así sea, porque incluso podría no haber ningún filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, con lo que la hipótesis se cumpliría trivialmente para cualquier condición y cualquier fórmula.

En definitiva, lo que afirma el teorema fundamental es que alguien que "viva" en M puede reducir cualquier problema sobre si una cierta afirmación se cumple o no en $M[G]$ a si una cierta condición está o no en el filtro genérico. En el caso de extensiones respecto de álgebras de Boole completas, la mayor condición que cumple esto es $\|\phi\|^M$, pero en el caso de un c.p.o. arbitrario no podemos definir esa máxima condición y nos tenemos que limitar a demostrar que existen tales condiciones. ■

Para prescindir completamente de la definición provisional $\Vdash^*$ observamos que el teorema 4.36 es equivalente al caso particular de la definición 4.38, cuando i es la identidad de un álgebra de Boole completa en sí misma. Entonces tenemos que, por definición

$$p \Vdash \phi(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \leftrightarrow p \leq \|\phi(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\|.$$

En cuanto al teorema 4.37, que es el único resultado en el que hemos usado $\Vdash^*$, el teorema de reflexión nos permite generalizarlo de este modo:

Teorema 4.39 *Sea $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ una inmersión completa entre dos c.p.o.s.*

a) Si $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ es una fórmula absoluta para modelos transitivos de ZFC, *$\tau_1,\ldots,\tau_n \in V^{\mathbb{P}}$ y $p \in \mathbb{P}$, entonces*

$$p \Vdash \phi(\tau_1,\ldots,\tau_n) \leftrightarrow i(p) \Vdash \phi(i(\tau_1),\ldots,i(\tau_n)).$$

b) Si i es una inmersión densa, el apartado a) vale para fórmulas cualesquiera.

c) Si $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son álgebras de Boole completas, entonces

$$i(\|\phi(\tau_1,\ldots,\tau_n)\|) = \|\phi(i(\tau_1),\ldots,i(\tau_n))\|,$$

para fórmulas absolutas si la inmersión i es completa y para fórmulas cualesquiera si es densa (es decir, un isomorfismo).

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema de reflexión basta probar la relativización de a) y b) a un modelo transitivo numerable cualquiera de ZFC, pero, teniendo en cuenta que $(\Vdash)^M$ equivale a $\Vdash^*$, dicha relativización es el teorema 4.37, salvo que falta probar una implicación en el apartado a).

Ahora bien si $\neg p \Vdash \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, tomamos un filtro $\mathbb{P}$-genérico G tal que $p \in G$ y $\neg\phi^{M[G]}(\tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG})$. El teorema fundamental nos da un $p' \in G$, que podemos tomar $p' \leq p$, tal que $p' \Vdash \neg\phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ y, por la implicación ya probada, $i(p') \Vdash \neg\phi(i(\tau_1), \ldots, i(\tau_n))$, luego si H es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M tal que $i(p') \in H$, entonces $i(p) \in H$, pero $\neg\phi(i(\tau_1)_H, \ldots, i(\tau_n)_H)$, luego $\neg i(p) \Vdash \phi(i(\tau_1), \ldots, i(\tau_n))$.

Para probar c) observamos que (omitiendo los nombres en la notación) tenemos que $\|\phi\| \Vdash \phi$, luego por a) o b) también $i(\|\phi\|) \Vdash \phi$, luego $i(\|\phi\|) \leq \|\phi\|$. Igualmente, $i(\|\neg\phi\|) \leq \|\neg\phi\|$, que es lo mismo que $i(\|\phi\|)' \leq \|\phi\|'$, o también, $\|\phi\| \leq i(\|\phi\|)$. ■

En el apéndice A probamos el teorema 4.21 sin usar álgebras de Boole.

4.5 Primeros ejemplos y aplicaciones

En este momento podemos recapitular varios argumentos que hemos presentado colateralmente en las secciones prececentes. Ya tenemos demostrada la independencia del axioma de constructibilidad, y el argumento es el siguiente:

Teorema 4.40 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC, *sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y G un filtro genérico sobre M. Entonces*

$$\bigwedge x \in M[G](x \text{ es constructible}^{M[G]} \leftrightarrow x \in M \wedge x \text{ es constructible}^M).$$

En particular, si M cumple $V = L$ entonces

$$\bigwedge x \in M[G](x \text{ es constructible}^{M[G]} \leftrightarrow x \in M).$$

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 3.9 tenemos que x es constructible^M si y sólo si $x \in L$ (si M es una clase propia) o si y sólo si $x \in L_{\Omega^M}$ (si M es un conjunto), pero, como $\Omega^M = \Omega^{M[G]}$, resulta que lo mismo vale para $M[G]$, de donde se sigue inmediatamente el enunciado. ■

El teorema anterior puede abreviarse en la igualdad $L^M = L^{M[G]}$. Ahora es evidente que cualquier extensión genérica $M[G]$ que contenga estrictamente a M es un modelo de ZFC+$V \neq L$, luego el axioma de constructibilidad no puede probarse en ZFC (salvo que éste sea contradictorio, claro).

Ejemplo Un ejemplo concreto lo obtenemos con el c.p.o. $\mathbb{P}$ que considerábamos al principio de la sección 4.1. Según hemos visto, a partir de un filtro genérico G podíamos construir una función genérica $f = \bigcup G : \omega \longrightarrow 2$ y a partir de ésta un conjunto $a = f^{-1}[\{1\}] \subset \omega$. Es claro que $a \in M[G] \setminus M$, pues si a estuviera en M también estaría f y por lo tanto G. La conclusión es que no sólo es consistente que $V \neq L$, sino, más concretamente, que exista un subconjunto de ω no constructible. ■

Veamos ahora cómo eligiendo adecuadamente un c.p.o. podemos conseguir extensiones genéricas con propiedades deseadas:

Teorema 4.41 *Si* ZFC *es consistente también lo es* ZFC+$\aleph_1^L < \aleph_1$.

DEMOSTRACIÓN: Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC + $V = L$ y sea
$$\mathbb{P} = \{p \subset \omega \times \omega_1 \mid p \text{ es una función finita}\}^M.$$

Notemos en la definición de $\mathbb{P}$ todo es absoluto excepto ω_1, de modo que $\mathbb{P}$ está formado por las fuciones de un subconjunto finito de ω en ω_1^M. Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, resulta que $f = \bigcup G : \omega \longrightarrow \omega_1^M$ suprayectiva. En efecto, f es una función porque las condiciones de G son compatibles dos a dos. Su dominio es todo ω porque, dado $n \in \omega$, el conjunto

$$D_n = \{p \in \mathbb{P} \mid n \in \mathcal{D}p\} \in M$$

es denso en $\mathbb{P}$, y f es suprayectiva porque, para todo $\alpha \in \omega_1^M$, el conjunto

$$E_\alpha = \{p \in \mathbb{P} \mid \alpha \in \mathcal{R}p\} \in M$$

es denso en $\mathbb{P}$.

Como $G \in M[G]$, es claro que $f \in M[G]$, luego ω_1^M es numerable$^{M[G]}$. Ahora basta observar que $\omega_1^M = (\omega_1^L)^{M[G]}$, pues entonces lo que tenemos es que (ω_1^L es numerable)$^{M[G]}$.

En efecto, basta tener en cuenta que $\bigwedge x \in M[G]((x \in L)^{M[G]} \leftrightarrow x \in M)$. Como en ZFC se demuestra que

$$\neg \bigvee f \in L(f : \omega \longrightarrow \omega_1^L \text{ biyectiva}) \wedge \bigwedge \beta < \omega_1^L \bigvee f \in L\ f : \omega \longrightarrow \beta \text{ biyectiva}),$$

al relativizar a $M[G]$ obtenemos

$$\neg \bigvee f \in M(f : \omega \longrightarrow (\omega_1^L)^{M[G[} \text{ biyectiva}) \wedge$$
$$\bigwedge \beta < (\omega_1^L)^{M[G]} \bigvee f \in M\ f : \omega \longrightarrow \beta \text{ biyectiva}),$$

pero lo mismo vale cambiando $(\omega_1^L)^{M[G[}$ por ω_1^M, luego $\omega_1^M = (\omega_1^L)^{M[G]}$. ■

Observación Acabamos de probar que $\aleph_1^L$ puede ser un ordinal numerable. Notemos que, puesto que $(|\mathcal{P}\omega| = \aleph_1)^L$, existe una biyección $f : (\mathcal{P}\omega)^L \longrightarrow \aleph_1^L$, luego si $\aleph_1^L$ es numerable, también es numerable $(\mathcal{P}\omega)^L$. Así pues, acabamos de probar que es consistente que sólo existan $\aleph_0$ subconjuntos constructibles de ω.

Esto es interesante porque uno podría pensar ingenuamente que la prueba de la consistencia de la hipótesis del continuo consiste en demostrar que, aunque el cardinal de $\mathcal{P}\omega$ pueda ser grande, sólo hay $\aleph_1$ subconjuntos constructibles de ω, de modo que al restringirnos a L "dejamos de ver" otros posibles subconjuntos de ω y sólo vemos los $\aleph_1$ que son constructibles. Ahora vemos que esto no es exacto, ya que, si al restringirnos a L vemos $\aleph_1$ subconjuntos de ω, esto puede deberse ciertamente a que realmente haya $\aleph_1$ subconjuntos constructibles de ω, pero también a que sólo haya $\aleph_0$ de ellos, pero que las biyecciones entre $(\mathcal{P}\omega)^L$ y ω no sean constructibles, de modo que al restringirnos a L no sólo dejamos de ver los subconjuntos no constructibles de ω, sino también las biyecciones que numeran los subconjuntos constructibles. ■

Extensiones de *L* Si M es un modelo transitivo de ZFC + $V = L$, $\mathbb{P}$ es un c.p.o. en M y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces $L^{M[G]} = M$, por lo que en $M[G]$ se cumple que $\mathbb{P} \in L$, y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre L y $V = L[G]$, en el sentido de que todo elemento de V es de la forma σ_G con $\sigma \in L^{\mathbb{P}}$. Más brevemente, en $M[G]$ se cumple que la clase universal es una extensión genérica de la clase L.

Por otra parte, si consideramos $L[G]^{M[G]}$ en el sentido de 3.5, sabemos que es un modelo transitivo de ZFC tal que $M = L^{M[G]} \subset L[G]^{M[G]}$, y además $G \in L[G]^{M[G]}$, porque $\mathbb{P} \in L^{M[G]} \subset L[G]^{M[G]}$, luego existe un $\alpha \in \Omega^M$ tal que $\mathbb{P} \in L_\alpha[G]^{M[G]}$, luego $G \subset \mathbb{P} \subset L_\alpha[G]^{M[G]}$, luego $G \in L_{\alpha+1}[G]^{M[G]} \subset L[G]^{M[G]}$. Por el teorema del modelo genérico concluimos que $L[G]^{M[G]} = M[G]$, de modo que $(V = L[G])^{M[G]}$ en el sentido de 3.5.

Así pues, aunque sólo hemos demostrado la existencia de filtros genéricos sobre modelos numerables, cada vez que consideramos un modelo transitivo numerable de ZFC + $V = L$ y consideramos la relativización a M de la definición de un c.p.o., por ejemplo,

$$\mathbb{P} = \{p \subset \omega \times \omega_1 \mid p \text{ es una función finita}\}^M,$$

al tomar un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y considerar la extensión $M[G]$ estamos obteniendo un modelo que prueba la consistencia de que exista un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre L, donde ahora

$$\mathbb{P} = \{p \subset \omega \times \omega_1 \mid p \text{ es una función finita}\}^L.$$

Por ello, en lugar de considerar una extensión genérica sobre un modelo numerable apoyándonos en el teorema que prueba la existencia de filtros genéricos, un enfoque alternativo es considerar una extensión genérica sobre L apoyándonos en que, si ZFC es consistente, podemos probar que también lo es que exista un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre L (precisamente considerando una extensión genérica sobre un modelo numerable). ■

Extensiones de la clase universal Más sencillamente, a la hora de estudiar la relación entre M y $M[G]$ (siendo, en principio, M un modelo numerable), hay quienes prefieren "meterse en la piel" de alguien que "viva" en M y llaman V a M y $V[G]$ a $M[G]$. Esto supone considerar una "extensión genérica de la clase universal", lo cual literalmente sería un sinsentido, pero en la práctica sólo consiste en el convenio (totalmente inocuo y coherente) de escribir ϕ cuando habría que escribir ϕ^M y escribir $\phi^{V[G]}$ cuando habría que escribir $\phi^{M[G]}$.

Formalmente supone una simplificación, pues en lugar de trabajar con tres modelos: M, $M[G]$ y V, sin más que comprometerse uno a no salirse nunca de $M[G]$ (lo cual no supone ningún inconveniente en la práctica) se elimina uno de ellos y se trabaja únicamente con dos. Además, al identificar M con V, se omiten las relativizaciones al modelo base, lo que supone una simplificación formal añadida. ■

4.6 Hechos adicionales

Recogemos en esta última sección algunos resultados adicionales de carácter más técnico que a menudo resultan útiles y complementan la teoría básica de las extensiones genéricas.

C.p.o.s no atómicos En los ejemplos concretos que estamos considerando hemos visto que los objetos genéricos no están en el modelo base. Esto es un caso particular de un resultado general. Recordamos primero las definiciones de átomo y de c.p.o. no atómico [PC 7.40]:

Si $\mathbb{P}$ es un c.p.o. y $p \in \mathbb{P}$, diremos que p es un *átomo* si

$$\neg \bigvee qr \in \mathbb{P}(q \leq p \land r \leq p \land q \perp r).$$

Diremos que $\mathbb{P}$ es *no atómico* si no tiene átomos, es decir, si toda condición tiene extensiones incompatibles.

En [TC 7.40] vimos que en un álgebra de Boole una condición $p \neq \mathbb{O}$ es un átomo si y sólo si no existe ninguna condición $\mathbb{O} < q < p$.

Es claro que todos los c.p.o.s que hemos considerado en los ejemplos eran no atómicos.

Teorema 4.42 *Si M es un modelo transitivo*[3] *de* ZF, *$\mathbb{P} \in M$ es un c.p.o. no atómico y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M entonces $G \notin M$.*

Demostración: Si $G \in M$, entonces $D = \mathbb{P} \setminus G \in M$ y es un conjunto denso en $\mathbb{P}$. En efecto, dada $p \in \mathbb{P}$, tiene dos extensiones incompatibles q y r, de las cuales una al menos no puede estar en G, digamos q, con lo que $q \leq p \land q \in D$. Por definición de filtro genérico debería ser $G \cap D \neq \varnothing$, lo cual es absurdo. ■

C.p.o.s casi homogéneos Empezaremos demostrando algo que hemos adelantado en varias ocasiones: en la mayoría de los casos, el valor booleano de una sentencia sólo puede ser $\mathbb{O}$ o $\mathbb{1}$. Vamos a plantear un enunciado equivalente válido para c.p.o.s arbitrarios y daremos una condición suficiente para que a un c.p.o. $\mathbb{P}$ le suceda esto.

[3]Notemos que no exigimos que M sea numerable. Ni siquiera que sea un conjunto. Necesitamos la numerabilidad de M para garantizar la existencia de filtros genéricos, pero si, como en este caso, suponemos la existencia de uno, entonces M puede ser cualquier modelo.

Definición 4.43 Un *automorfismo* de un c.p.o. $\mathbb{P}$ es una semejanza $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ tal que $f(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ (la última condición es redundante si $\mathbb{P}$ está parcialmente ordenado). Llamaremos $\operatorname{Aut}\mathbb{P}$ al conjunto de todos los automorfismos de $\mathbb{P}$.

Si $f \in \operatorname{Aut}\mathbb{P}$ en 4.33 hemos definido la biyección $\bar{f} : V^{\mathbb{P}} \longrightarrow V^{\mathbb{P}}$. Si 1 es la identidad en $\mathbb{P}$ se cumple que $\bar{1}$ es la identidad en $V^{\mathbb{P}}$. Además $\overline{f \circ g} = \bar{f} \circ \bar{g}$, de donde a su vez se sigue que $\overline{f^{-1}} = \bar{f}^{-1}$.

Si M es un modelo transitivo numerable de ZFC y $\mathbb{P} \in M$, es claro que $\operatorname{Aut}^M\mathbb{P} = \operatorname{Aut}\mathbb{P} \cap M$ y cada $f \in \operatorname{Aut}^M\mathbb{P}$ determina $\bar{f} : M^{\mathbb{P}} \longrightarrow M^{\mathbb{P}}$ biyectiva, que no es sino la restricción de la biyección correspondiente en $V^{\mathbb{P}}$.

Por 4.39, para toda fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$, todos los $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$ y todo $p \in \mathbb{P}$ se cumple

$$p \Vdash \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \leftrightarrow f(p) \Vdash \phi(\bar{f}(\tau_1), \ldots, \bar{f}(\tau_n)).$$

Por último, una simple inducción prueba que $\bigwedge f \in \operatorname{Aut}\mathbb{P} \bigwedge x\ \bar{f}(\check{x}) = \check{x}$.

En lo sucesivo omitiremos las barras sobre las aplicaciones inducidas por automorfismos. Ahora ya podemos definir la condición sobre $\mathbb{P}$ que estábamos buscando:

Definición 4.44 Diremos que un c.p.o. $\mathbb{P}$ es *casi homogéneo* si

$$\bigwedge pq \in \mathbb{P} \bigvee f \in \operatorname{Aut}\mathbb{P} \neg f(p) \perp q.$$

Según indicábamos, esta propiedad la tendrán en la práctica todos los c.p.o.s con los que vamos a trabajar. El resultado principal es el siguiente:

Teorema 4.45 *$\mathbb{P}$ un c.p.o. casi homogéneo, sea $p \in \mathbb{P}$, sean $x_1, \ldots, x_n$ conjuntos cualesquiera y sea $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula (metamatemática). Entonces*

$$p \Vdash \phi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n) \leftrightarrow \mathbb{1} \Vdash \phi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n).$$

En particular $\mathbb{1} \Vdash \phi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)$ o bien $\mathbb{1} \Vdash \neg\phi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)$.

Demostración: Por el teorema de reflexión basta probar que el resultado es cierto en cualquier modelo transitivo numerable M. Tenemos entonces que $\mathbb{P} \in M$ es casi homogéneo^M y que $x_1, \ldots, x_n \in M$.

Supongamos que $p \Vdash \phi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)$ pero que $\neg\mathbb{1} \Vdash \phi$. Entonces existe un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $\neg\phi^{M[G]}(x_1, \ldots, x_n)$, luego existe $q \in G$ tal que $q \Vdash \neg\phi$. Sea $f \in \operatorname{Aut}^M \mathbb{P}$ tal que $\neg f(p) \perp q$. Sea $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq f(p) \land r \leq q$. Como $f(p) \Vdash \phi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)$, también $r \Vdash \phi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)$, pero como $r \leq q$, también $r \Vdash \neg\phi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)$, contradicción. ■

Por lo tanto, si M es un modelo transitivo numerable de ZFC y $\mathbb{P} \in M$ es un c.p.o. casi homogéneo^M, todas las extensiones genéricas $M[G]$ cumplen las mismas sentencias, indistintamente del filtro G con que se construyan.

En el caso de álgebras de Boole completas esto se traduce inmediatamente que si $\mathbb{B}$ es casi homogénea (lo que equivale a que $\mathbb{B}$ tenga un c.p.o. denso casi homogéneo) entonces, para toda fórmula $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ se cumple que

$$\|\phi(\check{x}_1,\ldots,\check{x}_n)\| = \mathbb{0}, \mathbb{1},$$

como habíamos afirmado.

Un resultado elemental Enunciamos este simple teorema para referencias posteriores:

Teorema 4.46 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZF, *sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Sea $f : A \longrightarrow M$ tal que $f \in M[G]$. Entonces existe un $B \in M$ tal que $f : A \longrightarrow B$.*

DEMOSTRACIÓN: Claramente existe un ordinal $\alpha \in M[G]$ tal que

$$f : A \longrightarrow V_\alpha^{M[G]} \cap M = V_\alpha^M = B.$$

■

Propiedades de la relación $\Vdash$ Veamos una serie de propiedades que resultan últiles a la hora de trabajar con la relación $\Vdash$:

Teorema 4.47 *Sean ϕ y ψ fórmulas cuyas variables libres estén a lo sumo entre $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ salvo que se indique alguna más, sea $\mathbb{P}$ un c.p.o., sean $p, q \in \mathbb{P}$ y sean $\sigma_1,\ldots,\sigma_n \in V^{\mathbb{P}}$. Entonces:*

a) $\neg(p \Vdash \phi \land p \Vdash \neg\phi)$,

b) $p \Vdash \phi \land q \leq p \rightarrow q \Vdash \phi$,

c) $\neg p \Vdash \phi \leftrightarrow \bigvee q \in \mathbb{P}(q \leq p \land q \Vdash \neg\phi)$,

d) $p \Vdash \neg\phi \leftrightarrow \neg\bigvee q \in \mathbb{P}(q \leq p \land q \Vdash \phi)$,

e) $\{p \in \mathbb{P} \mid p \Vdash \phi \lor p \Vdash \neg\phi\}$ *es denso en* $\mathbb{P}$,

f) $p \Vdash \phi \land \psi \leftrightarrow p \Vdash \phi \land p \Vdash \psi$,

g) $p \Vdash \bigwedge x\, \phi(x) \leftrightarrow \bigwedge \sigma \in M^{\mathbb{P}}\, p \Vdash \phi(\sigma)$,

h) $p \Vdash \bigvee x\, \phi(x) \leftrightarrow \bigwedge q \in \mathbb{P}(q \leq p \rightarrow \bigvee r \in \mathbb{P} \bigvee \sigma \in M^{\mathbb{P}}(r \leq q \land r \Vdash \phi(\sigma)))$,

i) $p \Vdash \bigvee x \in \sigma\, \phi(x) \rightarrow \bigvee q \in \mathbb{P} \bigvee \pi \in \mathcal{D}\sigma(q \leq p \land q \Vdash \phi(\pi))$.

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema de reflexión basta probar la relativización del teorema a un modelo transitivo numerable M arbitrario de ZFC. Así pues, suponemos que $\mathbb{P} \in M$ y que $\sigma_1,\ldots,\sigma_n \in M^{\mathbb{P}}$.

a) Si $p \Vdash \phi \land p \Vdash \neg\phi$, tomando un filtro genérico G llegaríamos a que $\phi^{M[G]} \land \neg\phi^{M[G]}$, contradicción.

b) Si $p \Vdash \phi \land q \leq p$, tomamos un filtro genérico G que contenga a q, con lo que también $p \in G$, luego $\phi^{M[G]}$. Esto prueba que $q \Vdash \phi$.

c) Si $\neg p \Vdash \phi$ entonces existe un filtro genérico G tal que $p \in G$ pero $\neg\phi^{M[G]}$. Por el teorema fundamental existe $r \in G$ tal que $r \Vdash \neg\phi$. Sea $q \in G$ tal que $q \leq p \land q \leq r$. De este modo $q \leq p \land q \Vdash \neg\phi$. El recíproco es trivial por a) y b).

d) Si $p \Vdash \neg\phi$ y existiera un $q \leq p$ tal que $q \Vdash \phi$ entonces $p \Vdash \phi \land p \Vdash \neg\phi$, contradicción.

Si $\neg p \Vdash \neg\phi$ entonces existe un $q \leq p$ tal que $q \Vdash \neg\neg\phi$, lo que claramente implica $q \Vdash \phi$, contradicción.

e) es inmediato por c).

f) Si $p \Vdash \phi \land \psi$ y G es un filtro genérico que contenga a p, entonces tenemos $\phi^{M[G]} \land \psi^{M[G]}$. Esto prueba que $p \Vdash \phi \land p \Vdash \psi$. El recíproco es idéntico.

g) Si $p \Vdash \bigwedge x\, \phi(x)$ y $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$, sea G un filtro genérico que contenga a p. Entonces $\phi^{M[G]}(\sigma_G)$, luego $p \Vdash \phi(\sigma)$.

Recíprocamente, si G es un filtro genérico que contenga a G, para todo $x \in M[G]$ tenemos que $x = \sigma_G$, para cierto $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$. Por hipótesis $p \Vdash \phi(\sigma)$, luego $\phi^{M[G]}(\sigma_G)$. Esto prueba $(\bigwedge x\, \phi(x))^{M[G]}$, luego $p \Vdash \bigwedge x\, \phi(x)$.

h) Si $p \Vdash \bigvee x\, \phi(x)$ y $q \in \mathbb{P}$ cumple $q \leq p$, tomemos un filtro genérico G que contenga a q. Entonces $p \in G$, luego existe un $x \in M[G]$ tal que $\phi^{M[G]}(x)$. Digamos que $x = \sigma_G$, con $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$. Existe un $s \in G$ tal que $s \Vdash \phi(\sigma)$ y tomando $r \in G$ tal que $r \leq q \land r \leq s$ tenemos $r \leq q \land r \Vdash \phi(\sigma)$.

Recíprocamente, si se cumple $\neg p \Vdash \bigvee x\, \phi(x)$, existe una condición $q \leq p$ tal que $q \Vdash \bigwedge x \neg\phi(x)$. Por hipótesis existe $r \leq q$ y existe $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ de modo que $r \Vdash \phi(\sigma)$. Si G es un filtro genérico que contenga a r, también $q \in \mathbb{R}$ con lo que tenemos $\bigwedge x \in M[G]\, \neg\phi^{M[G]}(x)$ y también $\phi^{M[G]}(\sigma_G)$, contradicción.

i) Si $p \Vdash \bigvee x \in \sigma\, \phi(x)$, sea G un filtro genérico que contenga a p. Entonces existe $x \in \sigma_G$ tal que $\phi(x)$. Concretamente, $x = \pi_G$, donde $(\pi, r) \in \sigma$, $r \in G$. Existe $q \in G$, (y lo podemos tomar $q \leq p$) tal que $q \Vdash \phi(\pi)$. ■

Si comparamos los apartados g) y h) del teorema anterior observamos una clara asimetría. De acuerdo con g), cabría esperar que h) fuera

$$p \Vdash \bigvee x\, \phi(x) \leftrightarrow \bigvee \sigma \in M^{\mathbb{P}}\; p \Vdash \phi(\sigma).$$

La conjetura es cierta, pero no es evidente. Necesitaremos el resultado siguiente:

Teorema 4.48 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC *tal que en M se cumpla: $\mathbb{P}$ es un c.p.o., A es una anticadena*[4] *en $\mathbb{P}$ y $\{\sigma_q\}_{q \in A}$ es una familia de $\mathbb{P}$-nombres. Entonces existe un $\pi \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $q \Vdash \pi = \sigma_q$ para todo $q \in A$.*

[4] Una anticadena en un c.p.o. es un conjunto de condiciones incompatibles dos a dos.

Demostración: Notemos que $\{\sigma_q\}_{q\in A}$ es una función $f : A \longrightarrow M^{\mathbb{P}}$, de modo que $\sigma_q = f(q)$. No hay que confundir la función f con su rango, es decir, con el conjunto $\{\sigma_q \mid q \in A\}$. La hipótesis es que $f \in M$, no sólo que $\{\sigma_q \mid q \in A\} \subset M$ o que $\{\sigma_q \mid q \in A\} \in M$. Definimos

$$\pi = \bigcup_{q\in A} \{(\tau, r) \mid \tau \in \mathcal{D}\sigma_q \wedge r \in \mathbb{P} \wedge r \leq q \wedge r \Vdash \tau \in \sigma_q\} \in M^{\mathbb{P}}.$$

Sea $q \in A$ y veamos que $q \Vdash \pi = \sigma_q$. Tomamos un filtro genérico G tal que $q \in G$ y hemos de ver que $\pi_G = \sigma_{qG}$.

Si $a \in \pi_G$, entonces $a = \tau_G$, con $(\tau, r) \in \pi \wedge r \in G$. Por definición de π existe $q' \in A$ tal que $r \leq q' \wedge \tau \in \mathcal{D}\sigma_{q'} \wedge r \Vdash \tau \in \sigma_{q'}$. Como $r \in G$, también $q' \in G$. Tenemos que q y q' están en A y en G, pero A es una anticadena, luego ha de ser $q = q'$. Por lo tanto $r \Vdash \tau \in \sigma_q$ y así $a = \tau_G \in \sigma_{qG}$.

Recíprocamente, si $a \in \sigma_{qG}$ entonces $a = \tau_G$ con $\tau \in \mathcal{D}\sigma_q$. Tenemos que $\tau_G \in \sigma_{qG}$, luego existe un $p \in G$ tal que $p \Vdash \tau \in \sigma$. Sea $r \in G$ tal que $r \leq p \wedge r \leq q$. Entonces $r \Vdash \tau \in \sigma_q$, luego $(\tau, r) \in \pi$ y $a = \tau_G \in \pi_G$. Esto nos da la otra inclusión. ■

Ahora ya podemos probar la versión simplificada de 4.47 h):

Teorema 4.49 *Sea $\phi(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ una fórmula cuyas variables libres estén entre las indicadas. Sea $\mathbb{P}$ un c.p.o., $p \in \mathbb{P}$ y $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in V^{\mathbb{P}}$. Entonces*

$$p \Vdash \bigvee x\, \phi(x, \sigma_1, \ldots, \sigma_n) \leftrightarrow \bigvee \sigma \in V^{\mathbb{P}}\ p \Vdash \phi(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Demostración: Por el teorema de reflexión basta probar la relativización del teorema a un modelo transitivo numerable de ZFC arbitrario. Suponemos, pues, que $\mathbb{P} \in M$ y que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in M^{\mathbb{P}}$.

Si $\bigvee \sigma \in M^{\mathbb{P}}\ p \Vdash \phi(\sigma)$, dado un filtro genérico G tal que $p \in M$, se cumple $\phi^{M[G]}(\sigma_G)$, luego $\bigvee x \in M[G]\, \phi(x)$. Así pues, $p \Vdash \bigvee x\, \phi(x)$.

Supongamos ahora que $p \Vdash \bigvee x\, \phi(x)$. Por el lema de Zorn en M existe un conjunto $A \in M$ tal que:

a) A es una anticadena en $\mathbb{P}$,

b) $\bigwedge q \in A(q \leq p \wedge \bigvee \sigma \in M^{\mathbb{P}}\ q \Vdash \phi(\sigma))$,

c) A es maximal respecto a a) y b), es decir, no existe ningún B (en M) que cumpla a) y b) y que contenga estrictamente a A.

Por el axioma de elección en M podemos construir una familia $\{\sigma_q\}_{q\in A} \in M$ tal que $\bigwedge q \in A(\sigma_q \in M^{\mathbb{P}} \wedge q \Vdash \phi(\sigma_q))$. Por el teorema anterior existe $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $\bigwedge q \in A\ q \Vdash \sigma = \sigma_q$. Así, si $q \in A$ tenemos que $q \Vdash \phi(\sigma_q) \wedge \sigma = \sigma_q$, luego $q \Vdash \phi(\sigma)$.

Veamos que $p \Vdash \phi(\sigma)$. En caso contrario existe un $r \leq p$ tal que $r \Vdash \neg\phi(\sigma)$. Como estamos suponiendo que $p \Vdash \bigvee x\, \phi(x)$, por 4.47 existen $q' \leq r$ y $\pi \in M^{\mathbb{P}}$ tales que $q' \Vdash \phi(\pi)$.

Si $q \in A$ tenemos que $q \Vdash \phi(\sigma)$ y $q' \Vdash \neg\phi(\sigma)$ (pues $q' \leq r$), de donde $q \perp q'$ (una extensión común forzaría a la vez $\phi(\sigma)$ y $\neg\phi(\sigma)$). Por lo tanto $q' \notin A$ y el conjunto $A \cup \{q'\}$ contiene estrictamente a A y cumple las condiciones a) y b), contradicción. ■

El teorema anterior admite un refinamiento. Lo enunciamos en términos de álgebras de Boole porque es más cómodo manipular valores booleanos:

Teorema 4.50 $\phi(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *una fórmula cuyas variables libres estén entre las indicadas. Sea* $\mathbb{B}$ *un álgebra de Boole completa y* $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in V^{\mathbb{B}}$. *Entonces existe* $\sigma \in V^{\mathbb{B}}$ *tal que* $\|\bigvee x\, \phi(x, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)\| = \|\phi(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)\|$.

Demostración: Como la fórmula siguiente es un teorema lógico:

$$\bigvee y \bigwedge x(\phi(x) \to \phi(y)),$$

su valor booleano es $\mathbb{1}$, luego por el teorema anterior existe un $\sigma \in V^{\mathbb{B}}$ tal que $\|\bigwedge x(\phi(x) \to \phi(\sigma))\| = \mathbb{1}$. Por otra parte,

$$\bigwedge y(\bigvee x\, \phi(x) \land \bigwedge x(\phi(x) \to \phi(y)) \to \phi(y))$$

es un teorema lógico, luego

$$\|\bigwedge y(\bigvee x\, \phi(x) \land \bigwedge x(\phi(x) \to \phi(y)) \to \phi(y))\| = \mathbb{1},$$

luego también $\|\bigvee x\, \phi(x) \land \bigwedge x(\phi(x) \to \phi(\sigma)) \to \phi(\sigma)\| = \mathbb{1}$, luego

$$\|\bigvee x\, \phi(x)\| = \|\bigvee x\, \phi(x)\| \land \|\bigwedge x(\phi(x) \to \phi(\sigma))\| \leq \|\phi(\sigma)\| \leq \|\bigvee x\, \phi(x)\|.$$

■

Ejercicio: Enunciar el teorema anterior para c.p.o.s cualesquiera y deducirlo del caso booleano.

Definibilidad del modelo base Veamos ahora que podemos extender ligeramente el teorema fundamental:

Definición 4.51 Si $\mathbb{B}$ es un álgebra de Boole completa y $\sigma \in V^{\mathbb{B}}$, definimos

$$\|\sigma \in \check{V}\| \equiv \bigvee_{x \in V} \|\sigma = \check{x}\|.$$

Notemos que, aunque V sea una clase propia, el supremo es el supremo de un subconjunto de $\mathbb{B}$.

Notemos que no hemos definido $\check{V}$, sino simplemente un término que representamos por $\|\sigma \in \check{V}\|$. Si M es un modelo transitivo de ZFC, la relativización de $\|\sigma \in \check{V}\|$ a M la representaremos por

$$\|\sigma \in \check{M}\| = \bigvee_{x \in M} \|\sigma = \check{x}\|.$$

Teorema 4.52 *Sea M un modelo transitivo de* ZF, *sea $\mathbb{B}$ un álgebra de Boole completa^M, sean $\sigma \in M^{\mathbb{B}}$ y sea G un ultrafiltro $\mathbb{B}$-genérico sobre M. Entonces*

$$\|\sigma \in \check{M}\| \in G \leftrightarrow \sigma_G \in M.$$

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que $\|\sigma \in \check{M}\| \in G$ si y sólo si existe un $x \in M$ tal que $\|\sigma = \check{x}\| \in G$ si y sólo si existe un $x \in M$ tal que $\sigma_G = x$, si y sólo si $\sigma_G \in M$. ■

Consideremos el lenguaje $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}^{+}$ que resulta de añadir al lenguaje de la teoría de conjuntos un relator monádico que representamos por $x \in V$. Añadiendo 4.51 al apartado a) de la definición 4.26 tenemos definido el valor booleano $\|\phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\|$ para toda fórmula (en principio sin descriptores) de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}^{+}$, y añadiendo el teorema anterior al principio de la prueba del teorema fundamental 4.27 resulta que éste es válido para fórmulas de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}^{+}$, entendiendo que el relator $x \in V$ se interpreta en $M[G]$ como la pertenencia a M.

A partir de aquí se puede extender el teorema fundamental para fórmulas de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}^{+}$ con descriptores y a su vez podemos definir $p \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ para fórmulas de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}^{+}$ y podemos demostrar la versión 4.21 del teorema fundamental, todo ello sin el más mínimo cambio en las demostraciones.

En la práctica, esto significa que en las expresiones $p \Vdash \phi$ o $\|\phi\|$ podemos incluir un falso "nombre canónico" $\check{V}$ (o $\check{M}$ cuando trabajamos en un modelo M) para exigir que un nombre represente a un objeto del modelo base.

Adjunciones de conjuntos al modelo base Terminamos con un resultado en el que trabajar con álgebras de Boole simplifica notablemente la prueba.

En general, si M es un modelo transitivo de ZFC y $A \subset M$, no es necesariamente cierto que exista un mínimo modelo $M[A]$ de ZFC tal que $M \subset M[A]$ y $A \in M[A]$, pero esto sí que es cierto si A está en una extensión genérica de M:

Teorema 4.53 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o., sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y $A \in M[G]$ tal que $A \subset M$. Entonces existe un modelo transitivo numerable de* ZFC *al que llamaremos $M[A]$ tal que $M \subset M[A] \subset M[G]$, $\Omega^M = \Omega^{M[A]}$ y que está caracterizado por que si N es un modelo transitivo de* ZF *tal que $M \subset N$ y $A \in N$ entonces $M[A] \subset N$.*

DEMOSTRACIÓN: No perdemos generalidad si suponemos que $\mathbb{P}$ es un álgebra de Boole completa^M $\mathbb{B}$. Sea $A = \sigma_G$, con $\sigma \in M^{\mathbb{B}}$. Sea $C \in M$ tal que $A \subset C$ (basta tomar $C = V_\alpha \cap M$, donde $\alpha = \operatorname{rang} A$). Sea $X = \{\|\check{c} \in \sigma\| \mid c \in C\} \in M$ y llamemos $\mathbb{C} \in M$ a la subálgebra completa generada^M por X en $\mathbb{B}$. Entonces $\mathbb{C}$ está completamente contenida^M en $\mathbb{B}$, luego $H = G \cap \mathbb{C}$ es un ultrafiltro $\mathbb{C}$-genérico sobre M (teorema 4.31). Se cumple que

$$G \cap X = G \cap \mathbb{C} \cap X = H \cap X \in M[H],$$

luego

$$A = \{c \in C \mid \|\check{c} \in \sigma\| \in G \cap X\} \in M[H].$$

Vamos a comprobar que definiendo $M[A] = M[H]$ se cumple lo pedido. Sea, pues, N un modelo transitivo de ZF tal que $M \subset N$ y $A \in N$. Sólo tenemos que probar que $H \in N$, pues entonces $M[H] \subset N$. En principio tenemos que

$$H \cap X = G \cap X = \{\|\check{c} \in \sigma\| \mid c \in A\} \in N.$$

Llamemos $\kappa = (|\mathbb{C}|^+)^M$. Definimos una sucesión $\{X_\alpha\}_{\alpha\leq\kappa} \in M$ mediante

$$X_0 = X \wedge \bigwedge \alpha < \kappa\; X_{\alpha+1} = \{\bigvee Z \mid Z \subset X_\alpha \cup X'_\alpha\}^M \wedge \bigwedge \lambda \leq \kappa\, X_\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} X_\delta.$$

Notemos que si $\alpha < \kappa$ entonces $X_\alpha \cup X'_\alpha \subset X_{\alpha+1}$, pues si $a \in X_\alpha \cup X'_\alpha$ basta tomar $Z = \{a\} \in M$, de modo que $\bigvee Z = a$. Si $Z \in M$ cumple $Z \subset X_\kappa$ entonces $|Z|^M < \kappa$, luego existe un $\alpha < \kappa$ tal que $Z \subset X_\alpha$, con lo que $\bigvee Z \in X_{\alpha+1} \subset X_\kappa$. También es obvio que si $a \in X_\kappa$ entonces $a' \in X_\kappa$, luego $X_\kappa \in M$ es una subálgebra completa^M de $\mathbb{C}$ y contiene a X, por lo que $X_\kappa = \mathbb{C}$.

Definimos ahora una sucesión $\{H_\alpha\}_{\alpha\leq\kappa} \in N$. Partimos de $H_0 = H \cap X$, que ya hemos visto que está en N. Si $\alpha < \kappa$ definimos

$$H_{\alpha+1} = \{\bigvee Z \mid Z \in M \wedge Z \subset X_\alpha \cup X'_\alpha \wedge Z \cap (H_\alpha \cup (X_\alpha \setminus H_\alpha)') \neq \varnothing\}.$$

Notemos que $Z \in M$ puede sustituirse por $Z \in (\mathcal{P}\mathbb{C})^M \in M \subset N$. Así es fácil ver que $H_{\alpha+1} \in N$.

Finalmente, si $\lambda \leq \kappa$ definimos $H_\lambda = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} H_\delta$. Es claro que toda la construcción es la relativización a N de una definición recurrente, luego la sucesión $\{H_\alpha\}_{\alpha\leq\kappa}$ está en N, como habíamos afirmado. Vamos a probar por inducción que $H_\alpha = H \cap X_\alpha$, con lo que $H = H_\kappa \in N$ y el teorema quedará probado.

Ciertamente se cumple para $\alpha = 0$ y si vale para todo $\delta < \lambda$ también vale para λ. Supongamos que $H_\alpha = H \cap X_\alpha$ y veámoslo para $\alpha + 1$. Como H es un ultrafiltro, se cumple que $H_\alpha \cup (X_\alpha \setminus H_\alpha)' = H \cap (X_\alpha \cup X'_\alpha)$. En consecuencia todo elemento de $H_{\alpha+1}$ está por encima de un elemento de H, luego está en H. Claramente entonces $H_{\alpha+1} \subset H \cap X_{\alpha+1}$.

Todo elemento de $H \cap X_{\alpha+1}$ es de la forma $\bigvee Z$, donde $Z \in M$, $Z \subset X_\alpha \cup X'_\alpha$. Basta probar que $Z \cap (H_\alpha \cup (X_\alpha \setminus H_\alpha)') \neq \varnothing$, pero es que si se diera el caso contrario entonces $Z \cap H = \varnothing$, luego $Z' \subset H$ y como H es $\mathbb{C}$-genérico sobre M también $\bigwedge Z' \in H$, luego $\bigvee Z \notin H$, contradicción. ■

Capítulo V

Aplicaciones de las extensiones genéricas

En el capítulo precedente hemos presentado los resultados fundamentales de la teoría de extensiones genéricas, pero sólo hemos tenido ocasión de mostrar algunas aplicaciones elementales que no permiten formarse una idea fidedigna de las posibilidades que ofrece esta teoría. A continuación mostraremos pruebas de consistencia mucho más representativas, entre ellas las que demuestran la independencia de la hipótesis del continuo.

5.1 Conservación de cardinales

Al estudiar una extensión genérica $M[G]$ de un modelo base M es fundamental tener presente que los cardinales en $M[G]$ no tienen por qué coincidir con los cardinales en M. Como "ser un cardinal" es una propiedad Π_1, es una propiedad absoluta hacia abajo, por lo que todo cardinal en $M[G]$ es también un cardinal en M (recordemos que M y $M[G]$ tienen los mismos ordinales, por lo que todo cardinal en $M[G]$ está en M). En cambio, el recíproco no tiene por qué darse: un cardinal en M no tiene por qué seguir siéndolo en $M[G]$, y ya hemos mostrado un ejemplo de esta situación. La prueba del teorema 4.41 consiste en construir una extensión genérica en la que $\aleph_1^M$ pasa a ser un ordinal numerable$^{M[G]}$.

Esto no debería resultar chocante si tenemos en cuenta que, en realidad, estamos trabajando con modelos numerables, de modo que en realidad ningún cardinal infinito de M (aparte de $\aleph_0$) es realmente un cardinal, sino que sólo parece serlo porque en M no están las biyecciones que lo desmienten, y la teoría de extensiones nos pone muy fácil añadir tales biyecciones "delatoras" en las extensiones genéricas.

Cuando un cardinal^M continúa siendo un cardinal en $M[G]$ se dice que *se conserva,* mientras que si deja de serlo se dice que *se colapsa.* Colapsar cardinales es útil en ciertas pruebas de consistencia, pero otras requieren garantizar que los cardinales en M siguen siéndolo en $M[G]$, y esta primera sección está dedicada a proporcionar resultados generales que garantizan la conservación de cardinales. Conviene introducir algunos conceptos más precisos:

Definición 5.1 Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y κ un cardinal^M. Diremos que $\mathbb{P}$ *conserva cardinales* $\geq \kappa$ $(\leq \kappa)$ si para todo filtro genérico G y todo ordinal $\alpha \in M$ tal que $\alpha \geq \kappa$ $(\alpha \leq \kappa)$ se cumple que

$$\alpha \text{ es un cardinal}^M \leftrightarrow \alpha \text{ es un cardinal}^{M[G]}.$$

Según acabamos de comentar, la implicación $\leftarrow$ se da siempre, luego la conservación de cardinales equivale a que se dé la implicación $\rightarrow$. Así mismo es suficiente comprobarla para ordinales $\alpha > \omega$, pues ω y los números naturales son cardinales en todo modelo transitivo.

Diremos que $\mathbb{P}$ *conserva cardinales* si esta implicación se cumple para todo ordinal $\alpha \in M$, es decir, si "ser un cardinal" es absoluto para $M - M[G]$.

Diremos que $\mathbb{P}$ *conserva cofinalidades* $\geq \kappa$ $(\leq \kappa)$ si para todo filtro genérico G y todo ordinal límite $\lambda \in M$ tal que $\operatorname{cf}^M \lambda \geq \kappa$ $(\operatorname{cf}^M \lambda \leq \kappa)$ se cumple $\operatorname{cf}^M \lambda = \operatorname{cf}^{M[G]} \lambda$.

Diremos que $\mathbb{P}$ *conserva cofinalidades* si esto se cumple para todo ordinal límite $\lambda \in M$, es decir, si $\operatorname{cf} \lambda$ es absoluto para $M - M[G]$.

La conservación de cofinalidades y la conservación de cardinales están estrechamente relacionadas:

Teorema 5.2 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y κ un cardinal^M. Entonces:*

a) Si $\mathbb{P}$ conserva cofinalidades $\geq \kappa$ y κ es regular^M, entonces $\mathbb{P}$ conserva cardinales $\geq \kappa$.

b) Si $\mathbb{P}$ conserva cofinalidades $\leq \kappa$ entonces $\mathbb{P}$ conserva cardinales $\leq \kappa$.

c) Si $\mathbb{P}$ conserva cofinalidades entonces $\mathbb{P}$ conserva cardinales.

Demostración: Sea α un cardinal^M, $\alpha \geq \kappa$, $\alpha > \omega$. Si α es regular^M, entonces $\operatorname{cf}^M \alpha = \alpha \geq \kappa$, luego $\operatorname{cf}^{M[G]} \alpha = \operatorname{cf}^M \alpha = \alpha$ y por lo tanto α es un cardinal regular$^{M[G]}$.

Si α es singular^M, como κ es regular^M ha de ser $\alpha > \kappa$. Tenemos que α es un cardinal límite^M, luego $\bigwedge \beta(\kappa < \beta < \alpha \rightarrow \bigvee \mu(\beta < \mu < \alpha \land \mu \text{ es regular}^M))$, pero $\kappa < \beta < \mu < \alpha \land \mu$ es regular^M implica que $\kappa \leq \mu = \operatorname{cf}^M \mu$, luego por hipótesis $\operatorname{cf}^{M[G]} \mu = \operatorname{cf}^M \mu = \mu$, luego μ es regular$^{M[G]}$. Por consiguiente tenemos que $\bigwedge \beta(\kappa < \beta < \alpha \rightarrow \bigvee \mu(\beta < \mu < \alpha \land \mu \text{ es un cardinal}^{M[G]}))$. Esto implica que α es un cardinal$^{M[G]}$.

La prueba de b) es análoga.

c) Es consecuencia de a), pues conservar cofinalidades o cardinales es conservar cofinalidades o cardinales $\geq \aleph_1^M$. ■

En realidad para que un c.p.o. conserve cofinalidades basta con que cumpla lo siguiente:

Teorema 5.3 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, $\mathbb{P} \in M$ *un c.p.o. y κ un cardinal^M. Entonces $\mathbb{P}$ conserva cofinalidades $\geq \kappa$ ($\leq \kappa$) si y sólo si para todo filtro genérico G y todo ordinal $\alpha \in M$ tal que $\alpha \geq \kappa$ ($\alpha \leq \kappa$) se cumple*

$$\alpha \text{ regular}^M \rightarrow \alpha \text{ regular}^{M[G]}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\lambda \in M$ tal que $\operatorname{cf}^M \lambda \geq \kappa$ ($\leq \kappa$). Sea $f \in M$ tal que $f : \operatorname{cf}^M \lambda \longrightarrow \lambda$ cofinal creciente. Entonces $f \in M[G]$ y por [TC 5.50] concluimos que $\operatorname{cf}^{M[G]} \operatorname{cf}^M \lambda = \operatorname{cf}^{M[G]} \lambda$. Pero $\operatorname{cf}^M \lambda$ es regular^M, luego por hipótesis es regular$^{M[G]}$, es decir, $\operatorname{cf}^{M[G]} \operatorname{cf}^M \lambda = \operatorname{cf}^M \lambda$, de donde $\operatorname{cf}^{M[G]} \lambda = \operatorname{cf}^M \lambda$. ■

Resulta natural preguntarse si es posible que un c.p.o. conserve cardinales pero no conserve cofinalidades. Según el teorema anterior, para que esto ocurra es necesario que un cardinal regular^M pase a ser singular$^{M[G]}$. En particular será límite$^{M[G]}$ y, si el c.p.o. conserva cardinales, también será límite^M. En resumen, ha de haber un cardinal límite regular^M que pase a ser singular en $M[G]$. Obviamente este cardinal no puede ser $\aleph_0$, luego llegamos a que M ha de contener un cardinal débilmente inaccesible. En otras palabras, en ausencia de cardinales débilmente inaccesibles, conservar cardinales equivale a conservar cofinalidades.

Ahora ya podemos dar condiciones para que un c.p.o. conserve cardinales y cofinalidades.

Definición 5.4 Una *anticadena* en un c.p.o. $\mathbb{P}$ es un conjunto de condiciones incompatibles dos a dos. Si κ es un cardinal, se dice que $\mathbb{P}$ cumple la *condición de cadena* κ (c.c.κ) si toda anticadena en $\mathbb{P}$ tiene cardinal menor que κ.

La c.c. $\aleph_1$ se llama también *condición de cadena numerable,* pues equivale a que toda anticadena sea numerable.

Vamos a probar que todo c.p.o. con la condición de cadena κ conserva cofinalidades $\geq \kappa$. Para ello nos basaremos en el siguiente resultado técnico, que tiene interés y gran utilidad por sí mismo:

Teorema 5.5 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o., A, $B \in M$ y κ un cardinal^M tal que ($\mathbb{P}$ cumple la c.c.κ)^M. Sea G un filtro genérico y $f \in M[G]$ tal que $f : A \longrightarrow B$. Entonces existe una aplicación $F : A \longrightarrow (\mathcal{P}B)^M$ de modo que $F \in M$, $\bigwedge a \in A\ |F(a)|^M < \kappa$ y $\bigwedge a \in A\ f(a) \in F(a)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $f = \tau_G$ y sea $F : A \longrightarrow (\mathcal{P}B)^M$ la aplicación dada por

$$F(a) = \{b \in B \mid \bigvee p \in \mathbb{P}\ p \Vdash (\tau : \check{A} \longrightarrow \check{B} \land \tau(\check{a}) = \check{b})\}.$$

Claramente $F \in M$. Sea $a \in A$ y $b = f(a)$. Así $\tau_G : A \longrightarrow B \land \tau_G(a) = b$, luego existe un $p \in G$ tal que $p \Vdash (\tau : \check{A} \longrightarrow \check{B} \land \tau(\check{a}) = \check{b})$, con lo que $b \in F(a)$.

Por el axioma de elección^M existe una función $Q \in M$ tal que $Q : F(a) \longrightarrow \mathbb{P}$ y para todo $b \in F(a)$ se cumple $Q(b) \Vdash (\tau : \check{A} \longrightarrow \check{B} \land \tau(\check{a}) = \check{b})$.

Si $b, b' \in F(a)$, $b \neq b'$, entonces $Q(b) \perp Q(b')$, pues si existiera una extensión común $r \in \mathbb{P}$, existiría un filtro genérico H con $r \in H$, y en $M[H]$ se cumpliría que $\tau_H : A \longrightarrow B$ y $b = \tau_H(a) = b'$, contradicción.

En particular Q es inyectiva y $Q[F(a)]$ es una anticadena en $\mathbb{P}$ (en M). Por lo tanto $|F(a)|^M = |Q[F(a)]|^M < \kappa$. ■

En definitiva, el teorema anterior afirma que una aplicación f en una extensión genérica (con dominio en el modelo base M) no puede, por regla general, ser conocida desde M, pero sí puede ser "aproximada" por una función multivaluada. La aproximación será mejor cuanto menor sea la condición de cadena que cumple el c.p.o.

Teorema 5.6 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, $\mathbb{P} \in M$ *un c.p.o. y κ un cardinal regular^M tal que ($\mathbb{P}$ cumple la c.c.κ)^M. Entonces $\mathbb{P}$ conserva cofinalidades y cardinales $\geq \kappa$. En particular, si ($\mathbb{P}$ cumple la c.c.n.)^M entonces $\mathbb{P}$ conserva cofinalidades y cardinales.*

Demostración: Basta probar que $\mathbb{P}$ conserva cofinalidades $\geq \kappa$. En caso contrario existe un filtro genérico G y un cardinal^M $\mu \geq \kappa$ tal que μ es regular^M y singular$^{M[G]}$. Sean entonces $\omega \leq \alpha < \mu$ y $f \in M[G]$ de modo que $f : \alpha \longrightarrow \mu$ cofinal. Por el teorema anterior existe $F \in M$ de modo que $F : \alpha \longrightarrow (\mathcal{P}\mu)^M$ y

$$\bigwedge \beta < \alpha \ |F(\beta)|^M < \kappa \land \bigwedge \beta < \alpha \ f(\beta) \in F(\beta).$$

Sea $S = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} F(\beta)$. En M, el conjunto S es una unión de menos de μ conjuntos de cardinal menor que μ. Por la regularidad^M de μ ha de ser $|S|^M < \mu$. Ahora bien, para todo $\beta < \alpha$ tenemos que $f(\beta) \in S$, lo que implica que S no está acotado en μ. Esto es una contradicción, pues un cardinal regular no puede tener subconjuntos no acotados de cardinal menor que él mismo. ■

No todos los c.p.o.s que vamos a considerar cumplirán la condición de cadena numerable, así que vamos a dar otro criterio que nos garantice que un c.p.o. conserva cardinales y cofinalidades por debajo de un cardinal dado.

Definición 5.7 Sea κ un cardinal. Diremos que un c.p.o. $\mathbb{P}$ es *κ-cerrado* si para todo ordinal $\alpha < \kappa$ y toda sucesión $\{p_\beta\}_{\beta<\alpha}$ decreciente en $\mathbb{P}$ (es decir, tal que $\beta < \gamma < \alpha \rightarrow p_\gamma \leq p_\beta$) se cumple que $\bigvee q \in \mathbb{P} \bigwedge \beta < \alpha \ q \leq p_\beta$.

Vamos a probar que los c.p.o.s κ-cerrados conservan cofinalidades y cardinales $\leq \kappa$. Al igual que en el caso de la condición de cadena κ, demostraremos primero un resultado técnico de interés en sí mismo.

Teorema 5.8 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, $\mathbb{P} \in M$ *un c.p.o. y κ un cardinal^M tal que ($\mathbb{P}$ es κ-cerrado)^M. Sea G un filtro genérico y supongamos que $B \in M[G]$ cumple $B \subset M$ y $|B|^{M[G]} < \kappa$. Entonces $B \in M$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\alpha = |B|^{M[G]} < \kappa$, sea $f \in M[G]$ tal que $f : \alpha \longrightarrow B$ biyectiva. Por el teorema 4.46 existe un $A \in M$ tal que $f : \alpha \longrightarrow A$. Es suficiente probar que $f \in M$, pues entonces también estará en M su rango B. Llamemos $K = (A^\alpha)^M = A^\alpha \cap M$. Hemos de probar que $f \in K$. En caso contrario, si $f = \tau_G$, existe $p \in G$ tal que $p \Vdash (\tau : \check{\alpha} \longrightarrow \check{A} \land \tau \notin \check{K})$.

Vamos a ver que existen sucesiones $\{p_\eta\}_{\eta \leq \alpha}$ y $\{z_\eta\}_{\eta < \alpha}$ en M tales que

a) $p_\eta \in \mathbb{P} \land z_\eta \in A$,

b) $p_0 = p$,

c) $\bigwedge \epsilon \eta (\epsilon \leq \eta \leq \alpha \to p_\eta \leq p_\epsilon)$,

d) $p_{\eta+1} \Vdash \tau(\check{\eta}) = \check{z}_\eta$.

En efecto, por recurrencia y usando el axioma de elección^M podemos construirlas como sigue:

Tomamos $p_0 = p$ y supuestos definidos $\{p_\eta\}_{\eta \leq \beta}$ y $\{z_\eta\}_{\eta < \beta}$ para un $\beta < \alpha$ de modo que se cumplan las condiciones anteriores, entonces $p_\beta \leq p_0 = p$, luego $p_\beta \Vdash \tau : \check{\alpha} \longrightarrow \check{A}$, luego $p_\beta \Vdash \bigvee x \in \check{A}\ \tau(\check{\beta}) = x$. Por 4.47 i) existen una condición $p_{\beta+1} \leq p_\beta$ y un $z_\beta \in A$ tales que $p_{\beta+1} \Vdash \tau(\check{\beta}) = \check{z}_\beta$.

Supuestos definidos $\{p_\eta\}_{\eta < \lambda}$ y $\{z_\eta\}_{\eta < \lambda}$ para un ordinal límite $\lambda < \alpha$, como $\mathbb{P}$ es κ-cerrado^M existe una condición $p_\lambda \in \mathbb{P}$ tal que $p_\lambda \leq p_\eta$ para todo $\eta < \lambda$, y entonces $\{p_\eta\}_{\eta \leq \lambda}$ y $\{z_\eta\}_{\eta < \lambda}$ cumplen todas las condiciones.

Sea $g = \{z_\eta\}_{\eta < \alpha} \in M$. Tenemos que $g \in K$. Sea H un filtro genérico tal que $p_\alpha \in H$ (con lo que $\bigwedge \eta \leq \alpha\ p_\eta \in H$). Por la propiedad c), $\bigwedge \eta < \alpha\ \tau_H(\eta) = z_\eta$, luego $\tau_H = g \in K$, cuando por otra parte $p_0 \Vdash \tau \notin \check{K}$, contradicción. ■

De este modo, en una extensión por un c.p.o. κ-cerrado no aparecen nuevos subconjuntos de un conjunto dado con cardinal menor que κ. Con esto es fácil probar que ningún cardinal menor que κ puede colapsarse:

Teorema 5.9 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *$\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y κ un cardinal^M tal que ($\mathbb{P}$ es κ-cerrado)^M. Entonces $\mathbb{P}$ conserva cofinalidades y cardinales $\leq \kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que $\mathbb{P}$ conserva cofinalidades $\leq \kappa$. Si no fuera así, por 5.3 existiría un filtro genérico G y un ordinal $\mu \leq \kappa$ de modo que μ es regular^M pero es singular$^{M[G]}$. Sea $\alpha < \mu$ y $f \in M[G]$ tal que $f : \alpha \longrightarrow \mu$ cofinal. Claramente $|f|^{M[G]} = |\alpha|^{M[G]} \leq \alpha < \kappa$, luego por el teorema anterior $f \in M$, en contradicción con que μ es regular^M. ■

Terminamos la sección con el siguiente teorema, cuya prueba es inmediata:

Teorema 5.10 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *$\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. que conserve cardinales y G un filtro genérico. Entonces, los términos α^+ y $\aleph_\alpha$ son absolutos para $M - M[G]$, es decir, para todo ordinal $\alpha < \Omega^M$ se cumple $(\alpha^+)^M = (\alpha^+)^{M[G]}$ y $\aleph_\alpha^M = \aleph_\alpha^{M[G]}$.*

5.2 Familias cuasidisjuntas

Intercalamos aquí la demostración de un principio combinatorio que nos hará falta en la sección siguiente. Se trata de una generalización de [TC 8.52]. Recordamos la definición [TC 8.51] de sistema Δ:

Definición 5.11 Un conjunto A es una *familia cuasidisjunta* o un *sistema* Δ de raíz r si $\bigwedge xy \in A(x \neq y \rightarrow x \cap y = r)$. Se admite que r sea vacío, en cuyo caso los elementos de A son disjuntos dos a dos.

Teorema 5.12 (Lema de los sistemas Δ) *Sea κ un cardinal infinito, $\mu > \kappa$ un cardinal regular tal que $\bigwedge \alpha < \mu\ |\alpha^{<\kappa}| < \mu$ y sea A un conjunto tal que $|A| \geq \mu$ y $\bigwedge x \in A\, |x| < \kappa$. Entonces existe una familia cuasidisjunta $B \subset A$ tal que $|B| = \mu$. En particular, toda familia no numerable de conjuntos finitos posee una subfamilia cuasidisjunta no numerable.*

Demostración: Tomando un subconjunto si es necesario, podemos suponer que $|A| = \mu$. Se cumple que

$$\Big|\bigcup_{x\in A} x\Big| \leq \sum_{x\in A} |x| \leq \sum_{x\in A} \kappa = \mu \cdot \kappa = \mu.$$

Como obviamente no importa cuáles sean los elementos de los elementos de A, no perdemos generalidad si suponemos que son ordinales. Más aún, podemos suponer que $\bigcup\limits_{x\in A} x \subset \mu$.

Si $x \in A$, tenemos que $|x| < \kappa$, luego $\operatorname{ord} x < \kappa$. Podemos descomponer

$$A = \bigcup_{\alpha<\kappa} \{x \in A \mid \operatorname{ord} x = \alpha\}.$$

Como $|A| = \mu$ es regular y $\kappa < \mu$, es necesario que uno de los conjuntos que aparecen en la unión tenga cardinal μ, es decir, existe un ordinal $\rho < \kappa$ tal que el conjunto $\{x \in A \mid \operatorname{ord} x = \rho\}$ tiene cardinal μ. Quedándonos con este subconjunto podemos suponer que $\bigwedge x \in A \operatorname{ord} x = \rho$.

Para cada $\alpha < \mu$ consideremos el conjunto $\{x \in A \mid x \subset \alpha\}$. A cada uno de sus elementos x le podemos asignar una biyección $g : |x| \longrightarrow x$, que será un elemento de $\alpha^{<\kappa}$. Esto nos da una aplicación inyectiva, de modo que

$$|\{x \in A \mid x \subset \alpha\}| \leq |\alpha^{<\kappa}| < \mu.$$

Así pues, existe al menos un $x \in A$ que no está contenido en α. Equivalentemente, el conjunto $\bigcup\limits_{x\in A} x$ no está acotado en μ, luego tiene cardinal μ.

Para cada $x \in A$ sea $f_x : \rho \longrightarrow x$ la semejanza. Escribiremos $x(\xi) = f_x(\xi)$, de modo que $x = \{x(\xi) \mid \xi < \rho\}$. Como la unión

$$\bigcup_{x\in A} x = \bigcup_{\xi<\rho} \{x(\xi) \mid x \in A\}$$

tiene cardinal μ, alguno de los conjuntos de la derecha tiene que tener también cardinal μ. Llamemos ξ_0 al menor ordinal (quizá igual a 0) tal que

$$|\{x(\xi_0) \mid x \in A\}| = \mu.$$

La situación es la siguiente:

		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
		$x(\xi_0)$		$y(\xi_0)$		$z(\xi_0)$	
ρ		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
		$x(1)$		$y(1)$		$z(1)$	
		$x(0)$		$y(0)$		$z(0)$	

A

Cada elemento de A es un conjunto $x = \{x(0), x(1), \ldots, x(\xi_0), \ldots\}$, donde los $x(\xi)$ son ordinales distintos dos a dos (de hecho, si $\eta < \xi$ entonces $x(\eta) < x(\xi)$), pero dos conjuntos x e y pueden tener elementos en común. Por ejemplo, podría darse el caso de que $x(0)$ fuera el mismo ordinal para todo $x \in A$. La fila ξ_0 del esquema anterior es la primera fila en la que aparecen μ ordinales distintos. Sea

$$\alpha_0 = \bigcup_{\substack{x\in A \\ \eta<\xi_0}} x(\eta) + 1.$$

Notemos que si $\eta < \xi_0$ entonces el conjunto $\{x(\eta) \mid x(\eta)+1 \mid x \in A\}$ está acotado en μ, luego $\bigcup\limits_{x\in A} \{x(\eta)+1 \mid x \in A\} \in \mu$. Por consiguiente α_0 es el supremo de un conjunto de ξ_0 ordinales menores que μ. Como μ es regular ha de ser $\alpha_0 < \mu$. De este modo, si $\eta < \xi_0$ y $x \in A$, entonces $x(\eta) < \alpha_0$, es decir, todos los ordinales que aparecen antes de la fila ξ_0 son menores que α_0.

Para cada $x \in A$, llamemos $\bar{x} \in \mu$ a su supremo. Podemos definir recurrentemente una sucesión $\{x_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ de elementos de A de modo que

$$\bigwedge \alpha < \mu \; x_\alpha(\xi_0) > \alpha_0 \cup \bigcup_{\beta<\alpha} \bar{x}_\beta.$$

En particular, cada x_α es distinto de los anteriores, luego tenemos μ elementos distintos. Eliminando los restantes, podemos suponer que $A = \{x_\alpha \mid \alpha < \mu\}$.

	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
	$x_0(\xi_0)$	$x_1(\xi_0)$	$\cdots$	$x_\alpha(\xi_0)$	$\cdots$
ρ	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
	$x_0(1)$	$x_1(1)$	$\cdots$	$x_\alpha(1)$	$\cdots$
	$x_0(0)$	$x_1(0)$	$\cdots$	$x_\alpha(0)$	$\cdots$

A

Ahora, si x, $y \in A$ son distintos, se cumple que $x \cap y \subset \alpha_0$, pues si $x = x_\alpha$, $y = y_\beta$, para $\alpha < \beta < \mu$, entonces $y(\xi_0) > \alpha_0 \cup \bar{x}$, luego los elementos comunes a x e y son de la forma $y(\delta)$, con $\delta < \xi_0$, luego son todos menores que α_0.

Para cada $x \in [\alpha_0]^{<\kappa}$ (representamos así el conjunto de los subconjuntos de α_0 de cardinal menor que κ) escogemos una biyección $g : |x| \longrightarrow x$, de modo que tenemos una aplicación inyectiva de $[\alpha_0]^{<\kappa}$ en $\alpha_0^{<\kappa}$. Así, $|[\alpha_0]^{<\kappa}| < |\alpha_0^{<\kappa}| < \mu$ (por hipótesis). En resumen, α_0 tiene menos de μ subconjuntos de cardinal menor que κ. Descomponemos

$$A = \bigcup_{r \in [\alpha_0]^{<\kappa}} \{x \in A \mid x \cap \alpha_0 = r\}.$$

Aplicando una vez más la regularidad de μ concluimos que existe un $r \subset \alpha_0$ tal que el conjunto $B = \{x \in A \mid x \cap \alpha_0 = r\}$ tiene cardinal μ. Ciertamente B es la familia cuasidisjunta que buscábamos, pues si x, $y \in B$, $x \neq y$, sabemos que $x \cap y \subset \alpha_0$, luego

$$x \cap y = x \cap y \cap \alpha_0 = (x \cap \alpha_0) \cap (y \cap \alpha_0) = r \cap r = r. \qquad \blacksquare$$

5.3 Extensiones con funciones parciales

En el capítulo anterior hemos considerado únicamente dos ejemplos concretos de c.p.o.s, y ambos eran conjuntos de funciones parciales de un conjunto en otro. En esta sección estudiaremos con detalle este tipo de c.p.o.s y veremos que son suficientes para probar la consistencia de una gran variedad de afirmaciones.

Definición 5.13 Sea κ un cardinal infinito y sean I, J conjuntos tales que $\kappa \leq |I|$ y $2 \leq |J|$. Definimos

$$\mathrm{Fn}(I, J, \kappa) = \{p \mid p \subset I \times J \land p \text{ es una función} \land |p| < \kappa\}.$$

Consideramos en $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ el orden parcial dado por $p \leq q \leftrightarrow q \subset p$. De este modo $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ es un c.p.o. con máximo $\mathbb{1} = \varnothing$. Claramente es no atómico.

Observemos que a partir de dos biyecciones $f : I \longrightarrow I'$ y $g : J \longrightarrow J'$ es fácil construir una semejanza $h : \mathrm{Fn}(I, J, \kappa) \longrightarrow \mathrm{Fn}(I', J', \kappa)$, por lo que, en virtud de los teoremas 4.32 y 4.39, ambos c.p.o.s dan lugar a las mismas extensiones genéricas. Por lo tanto, desde un punto de vista teórico podríamos restringirnos a considerar c.p.o.s de la forma $\mathrm{Fn}(\mu, \nu, \kappa)$, donde μ, ν, κ son cardinales. Sin embargo, en la práctica suele ser más cómodo elegir oportunamente los conjuntos I y J, sobre todo I.

Teorema 5.14 *Sean I, J dos conjuntos con $|J| \geq 2$ y sea κ un cardinal infinito tal que $\kappa \leq |I|$. Entonces $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ es un c.p.o. casi homogéneo.*

Demostración: Sean p, $q \in \mathbb{P}$. Entonces sus dominios son subconjuntos de I de cardinal menor que κ. Podemos tomar $A \subset I$ cuyo cardinal sea igual al del dominio de p y que sea disjunto del dominio de q. Existe $g : I \longrightarrow I$ biyectiva tal que $g[A] = \mathcal{D}p$. Definimos $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ mediante $f(r) = g \circ r$. Es fácil ver que $g \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{P}$ y $\mathcal{D}f(p) = A$, luego los dominios de $f(p)$ y q son disjuntos, por lo que $\neg f(p) \perp q$. $\blacksquare$

Teorema 5.15 *Sea κ un cardinal infinito y sean I, J conjuntos tales que $\kappa \leq |I|$ y $2 \leq |J|$. Entonces $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ cumple la c.c.$(|J|^{<\kappa})^+$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mu = (|J|^{<\kappa})^+$ y supongamos que $\{p_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ es una anticadena en $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$. Supongamos primero que κ es regular. Entonces si $\alpha < \mu$ se cumple que $|\alpha| \leq |J|^{<\kappa}$, luego $|\alpha^{<\kappa}| = |\alpha|^{<\kappa} \leq (|J|^{<\kappa})^{<\kappa} = |J|^{<\kappa} < \mu$ (donde hemos usado [TC 5.71]).

Tenemos, por tanto, que $\bigwedge\alpha < \mu\ |\alpha^{<\kappa}| < \mu$, por lo que κ y μ cumplen las hipótesis del lema de los sistemas Δ. La familia $A = \{\mathcal{D}p_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ tiene cardinal μ, pues $\{p_\alpha \mid \alpha < \mu\} \subset \bigcup\limits_{x\in A} J^x$, luego la unión tiene cardinal μ, mientras que para todo $x \in A$ se cumple que $|x| < \kappa$, luego $|J^x| \leq |J^{<\kappa}| < \mu$. Esto obliga a que $|A| = \mu$.

Por el lema de los sistemas Δ existe un $x \subset \mu$ tal que $\{\mathcal{D}p_\alpha\}_{\alpha\in x}$ tiene cardinal μ y es una familia cuasidisjunta de raíz r. Sea $B = \{p_\alpha\}_{\alpha\in x}$.

Se cumple que $B \subset \bigcup\limits_{u\in J^r} \{x \in B \mid x|_r = u\}$. Como $|J^r| \leq |J|^{<\kappa} < \mu$ y μ es regular, ha de existir un $u \in J^r$ tal que $|\{x \in B \mid x|_r = u\}| = \mu$. En particular existen al menos dos elementos distintos $x,\ y \in B$ tales que $x|_r = y|_r = u$. Ahora bien, r es precisamente la intersección de los dominios de x e y, pues ambos están en B, y como x e y coinciden en su dominio común admiten como extensión la condición $x \cup y$, en contradicción con que ambos pertenecen a la anticadena de partida, luego deberían ser incompatibles.

Supongamos ahora que κ es singular. Entonces

$$\{p_\alpha \mid \alpha < \mu\} \subset \bigcup_{\nu<\kappa} \{p_\alpha \mid \alpha < \mu \wedge |p_\alpha| < \nu^+\}.$$

Como μ es regular, existe un $\nu < \kappa$ tal que $\{p_\alpha \mid \alpha < \mu \wedge |p_\alpha| < \nu^+\}$ tiene cardinal μ, y es una anticadena de cardinal mayor o igual que $(|J|^{<\nu^+})^+$ en $\mathrm{Fn}(I, J, \nu^+)$, en contradicción con el caso ya probado. ■

No es difícil probar que $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ tiene anticadenas de cardinal $|J|^{<\kappa}$, por lo que el teorema anterior no puede mejorarse. Por otra parte tenemos:

Teorema 5.16 *Sean I, J conjuntos y κ un cardinal regular tal que $\kappa \leq |I|$ y $2 \leq |J|$. Entonces $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ es κ-cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\alpha < \kappa$ y $\{p_\beta\}$una sucesión decreciente en $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$. Sea $q = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} b_\beta$. Claramente q es una función y $q \subset I \times J$. Como κ es regular $|q| < \kappa$. Por lo tanto $q \in \mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ y claramente $\bigwedge\beta < \alpha\ q \leq q_\beta$. ■

Ahora podemos aplicar los resultados sobre conservación de cardinales:

Teorema 5.17 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sean I, $J \in M$ y κ un cardinal regular^M de modo que $2 \leq |J|$ y $\kappa \leq |I|^M$. Sea $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(I, J, \kappa)^M$.*

a) $\mathbb{P}$ conserva cardinales y cofinalidades $\leq \kappa$,

b) Si se cumple $(|J| \leq 2^{<\kappa})^M$, entonces $\mathbb{P}$ conserva cardinales y cofinalidades $\geq ((2^{<\kappa})^+)^M$,

c) Si se cumple $(|J| \leq \kappa \wedge 2^{<\kappa} = \kappa)^M$, entonces $\mathbb{P}$ conserva cardinales y cofinalidades.

Demostración: a) y b) son aplicaciones inmediatas de 5.6 y 5.9 y los dos teoremas anteriores. Para el apartado b) observamos que (en M) se cumple que $|J|^{<\kappa} \leq (2^{<\kappa})^{<\kappa} = 2^{<\kappa} \leq |J|^{<\kappa}$, luego $|J|^{<\kappa} = 2^{<\kappa}$ y tenemos que $\mathbb{P}$ cumple la condición de cadena $(2^{<\kappa})^+$.

En el caso c) tenemos por a) y b) que $\mathbb{P}$ conserva cardinales y cofinalidades $\leq \kappa$ y $\geq (\kappa^+)^M$, luego conserva cardinales y cofinalidades. ■

En resumen, las condiciones que han de darse para que el c.p.o. $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)^M$ conserve cardinales y cofinalidades son que en M:

$$2 \leq |J| \leq \kappa = 2^{<\kappa} \leq |I|.$$

La condición $\kappa = 2^{<\kappa}$ se da, por ejemplo, si se cumple la hipótesis del continuo generalizada bajo κ, es decir, si $2^\mu = \mu^+$ para todo cardinal infinito $\mu < \kappa$.

Ahora estamos en condiciones de estudiar la función del continuo en una extensión genérica respecto a un c.p.o. de funciones parciales. El hecho básico es que si M es un modelo transitivo numerable de ZFC, $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(I, J, \kappa)^M$ y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces

$$f_G = \bigcup_{p \in G} p \in M[G]$$

cumple que $f_G : I \longrightarrow J$, pues para cada $i \in I$ el conjunto

$$D_i = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee j \in J \ (i, j) \in p\} \in M$$

es denso en $\mathbb{P}$, luego $G \cap D_i \neq \varnothing$ y esto se traduce en que f_G está definida en i.

Podemos refinar este argumento. En efecto, consideremos ahora el c.p.o. $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\alpha \times \kappa, 2, \kappa)^M$, donde $\alpha \in M$ es un ordinal no nulo y κ es un cardinal^M infinito. En principio tenemos una función $f_G : \alpha \times \kappa \longrightarrow 2$, a partir de la cual podemos definir, para cada $\beta < \alpha$, la función $f_\beta : \kappa \longrightarrow 2$ dada por $f_\beta(\delta) = f_G(\beta, \delta)$. Sucede que las funciones f_β están obviamente en $M[G]$ y son distintas dos a dos, pues si $\beta < \gamma < \alpha$, entonces el conjunto

$$D_{\beta\gamma} = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee \delta \in \kappa ((\beta, \delta),\ (\gamma, \delta) \in \mathcal{D}(p) \land p(\beta, \delta) \neq p(\gamma, \delta))\} \in M$$

es denso en $\mathbb{P}$, luego corta a G y eso se traduce en que existe un $\delta < \kappa$ tal que $f_\beta(\delta) \neq f_\gamma(\delta)$.

Así pues, la aplicación $F : \alpha \longrightarrow ({}^\kappa 2)^{M[G]}$ dada por $F(\beta) = f_\beta$ es inyectiva y claramente $F \in M[G]$. Esto prueba que $(|\alpha| \leq 2^\kappa)^{M[G]}$.

A partir de aquí es fácil construir modelos de ZFC en los que, por ejemplo, $2^{\aleph_0} \geq \aleph_5$, con lo que tenemos probada la independencia de la hipótesis del continuo. No damos los detalles ahora porque dentro de poco estaremos en condiciones de calcular exactamente la función del continuo en una extensión como la que acabamos de considerar.

Nota En la situación precedente, observemos que si $\mathbb{Q} = \mathrm{Fn}(\kappa, 2, \kappa)^M$, entonces las funciones f_β anteriores son $\mathbb{Q}$-genéricas sobre M, en el sentido de que $G_\beta = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \subset f_\beta\}$ es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M y obviamente $f_\beta = \bigcup\limits_{q \in G_\beta} q$.

En efecto, es fácil ver que la aplicación $i_\beta : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{P}$ dada por

$$i_\beta(q) = \{(\beta, \alpha, j) \mid (\alpha, j) \in q\}$$

es una inmersión completa[1] y que $i_\beta^{-1}[G] = G_\beta$, con lo que la genericidad de G_β es consecuencia del teorema 4.31. Por consiguiente, podemos decir que los conjuntos $a_\beta = f_\beta^{-1}[\{1\}]$ son subconjuntos genéricos de κ, y por ello es habitual referirse a $\mathrm{Fn}(\alpha \times \kappa, 2, \kappa)$ como "el c.p.o. que añade α subconjuntos genéricos de κ". A su vez, la extensión $M[G]$ es "la extensión de M que resulta de añadir α subconjuntos genéricos de κ".

Si $1 \leq \alpha \leq \kappa$, entonces $\mathrm{Fn}(\alpha \times \kappa, 2, \kappa)$ es semejante a $\mathrm{Fn}(\kappa, 2, \kappa)$, por lo que "la extensión de M que resulta de añadir κ subconjuntos genéricos de κ" es la misma que "la que resulta de añadir un subconjunto genérico de κ", es decir, la obtenida con $\mathrm{Fn}(\kappa, 2, \kappa)$. A su vez, si $\mu \geq \kappa$ es un cardinal^M, "la extensión que resulta de añadir μ subconjuntos genéricos de κ" es simplemente la dada por $\mathrm{Fn}(\mu, 2, \kappa)$. ■

Ahora necesitamos cotas superiores para el número de subconjuntos de un cardinal dado en una extensión genérica. Para ello hemos de hacer ciertas cuentas, la primera y más elemental de las cuales es la siguiente:

Teorema 5.18 *Sea I un conjunto y κ un cardinal, de modo que $\aleph_0 \leq \kappa \leq |I|$. Sea $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(I, 2, \kappa)$. Entonces $|\mathbb{P}| = |I|^{<\kappa} \leq |I|^\kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada cardinal $\mu < \kappa$, el número de subconjuntos de I de cardinal μ es $|I|^\mu$ y, para cada uno de estos subconjuntos, el número de aplicaciones de él en 2 es 2^μ, luego en total hay $|I|^\mu 2^\mu = |I|^\mu$ condiciones con dominio de cardinal μ. El número total de condiciones será

$$|\mathbb{P}| = \sum_{\mu<\kappa} |I|^\mu = |I|^{<\kappa} \leq \sum_{\mu<\kappa} |I|^\kappa = \kappa \cdot |I|^\kappa = |I|^\kappa.$$

■

La idea básica es que para contar conjuntos hemos de contar nombres posibles, y para contar nombres hemos de contar las condiciones. De hecho bastará contar nombres de cierto tipo especial:

Definición 5.19 Sea $\mathbb{P}$ un c.p.o. y sean σ, τ dos $\mathbb{P}$-nombres. Diremos que τ es un *buen nombre* para un subconjunto de σ si para cada $\pi \in \mathcal{D}\sigma$ existe una anticadena A_π de $\mathbb{P}$ tal que

$$\tau = \bigcup_\pi \{\pi\} \times A_\pi,$$

es decir, si $\mathcal{D}\tau \subset \mathcal{D}\sigma$ y cada $\pi \in \mathcal{D}\tau$ aparece acompañado de condiciones incompatibles dos a dos.

[1] Si $p \in \mathbb{P}$, una reducción de p a $\mathbb{Q}$ es claramente $\{(\alpha, j) \mid (\beta, \alpha, j) \in p\}$.

Ahora podemos hacer una cuenta elemental:

Teorema 5.20 *Si un c.p.o. $\mathbb{P}$ cumple la c.c. κ y $\sigma \in V^{\mathbb{P}}$, el número de buenos nombres para subconjuntos de σ es a lo sumo $(|\mathbb{P}|^{<\kappa})^{|\mathcal{D}\sigma|}$.*

DEMOSTRACIÓN: Claramente $\mathbb{P}$ tiene a lo sumo $|\mathbb{P}|^{<\kappa}$ anticadenas, y por lo tanto habrá tantos buenos nombres para subconjuntos de σ como asignaciones posibles $\pi \mapsto A_\pi$. ■

En particular los buenos nombres para subconjuntos de σ forman un conjunto (mientras que los nombres posibles en general para un subconjunto de σ forman una clase propia). Seguidamente demostramos que todo subconjunto de σ_G en una extensión genérica arbitraria puede nombrarse con un buen nombre para un subconjunto de σ. Así pues, el conjunto de los buenos nombres para subconjuntos de σ ejerce la misma función que el conjunto de nombres S que considerábamos en la demostración de que $M[G]$ cumple el axioma de partes, con la diferencia de que es un conjunto mucho más reducido, con lo que su cardinal nos proporcionará cotas finas de la función del continuo.

Teorema 5.21 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y σ, $\mu \in M^{\mathbb{P}}$. Entonces existe un buen nombre^M $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ para un subconjunto de σ tal que*

$$\mathbb{1} \Vdash (\mu \subset \sigma \rightarrow \mu = \tau).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $D = \mathcal{D}\sigma$. Usando el lema de Zorn y el axioma de elección en M definimos una sucesión $\{A_\pi\}_{\pi \in D} \in M$ tal que para cada $\pi \in D$ el conjunto A_π cumpla:

a) A_π es una anticadena en $\mathbb{P}$.

b) $\bigwedge p \in A_\pi \; p \Vdash \pi \in \mu$.

c) A_π es maximal para a) y b) (respecto a la inclusión).

Definimos

$$\tau = \bigcup_{\pi \in D} \{\pi\} \times A_\pi \in M,$$

que claramente es un buen nombre para un subconjunto de σ. Hemos de probar que cumple lo pedido.

Sea G un filtro genérico y supongamos que $\mu_G \subset \sigma_G$. Sea $a \in \mu_G$. Entonces $a = \pi_G$, con $\pi \in D$. No puede ser $A_\pi \cap G = \varnothing$, pues entonces, por 4.6 existiría un $q \in G$ incompatible con todos los elementos de A_π. Pasando a una extensión, podemos tomarlo de modo que $q \Vdash \pi \in \mu$, con lo que $A_\pi \cup \{q\}$ contradice la maximalidad de A_π. Así pues, existe $p \in A_\pi \cap G$, y entonces $(\pi, p) \in \tau$, luego $a = \pi_G \in \tau_G$.

Recíprocamente, si $a \in \tau_G$, entonces $a = \pi_G$, con $(\pi, p) \in \tau$ y $p \in G$. Entonces $p \in A_\pi$, luego $p \Vdash \pi \in \mu$, luego $a = \pi_G \in \mu_G$.

Hemos probado que $\mu_G = \tau_G$, luego $\mu_G \subset \sigma_G \rightarrow \mu_G = \tau_G$. ■

En particular, este teorema nos da la siguiente estimación de la función del continuo:

Teorema 5.22 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o., $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ y κ un cardinal^M tal que, en M, el conjunto de buenos nombres para subconjuntos de σ tenga cardinal $\leq \kappa$. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces en $M[G]$ se cumple que $2^{|\sigma_G|} \leq |\kappa|$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{\tau_\alpha\}_{\alpha<\kappa} \in M$ una enumeración de los buenos nombres para subconjuntos de σ en M. Sea $\pi = \{(\mathrm{p.o.}(\check{\alpha}, \tau_\alpha), \mathbb{1}) \mid \alpha < \kappa\} \in M^{\mathbb{P}}$ y sea $f = \pi_G \in M[G]$.

Claramente f es una aplicación de dominio κ y $\bigwedge \alpha < \kappa\ f(\alpha) = \tau_{\alpha G}$. Si $x \in (\mathcal{P}\sigma_G)^{M[G]}$, entonces $x = \mu_G$, para cierto $\mu \in M^{\mathbb{P}}$. Por el teorema anterior existe $\alpha < \kappa$ tal que

$$\mathbb{1} \Vdash (\mu \subset \sigma \rightarrow \mu = \tau_\alpha).$$

Puesto que $\mu_G \subset \sigma_G$, de hecho $x = \mu_G = \tau_{\alpha G} = f(\alpha)$. Así pues, $(\mathcal{P}\sigma_G)^{M[G]}$ está contenido en el rango de f y así, en $M[G]$, se cumple $2^{|\sigma_G|} = |\mathcal{P}\sigma_G| \leq |\kappa|$. ■

Ahora ya podemos probar:

Teorema 5.23 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC *y, en M, sean κ, μ y ν cardinales que cumplan $\kappa < \mu$, κ regular, $2^{<\kappa} = \kappa$, $\mu^\kappa = \mu$. Sea $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\mu, 2, \kappa)^M$ y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Alternativamente, sea μ un cardinal infinito arbitrario, $\kappa = \omega$ y $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\mu, 2, \omega)$. Entonces M y $M[G]$ tienen los mismos cardinales y cofinalidades, y además*

$$(2^\nu)^{M[G]} = \begin{cases} (2^\nu)^M & si\ \nu < \kappa, \\ (\mu^\nu)^M & si\ \kappa \leq \nu, \\ (2^\nu)^M & si\ \mu \leq \nu. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: Por 5.17 tenemos que $\mathbb{P}$ conserva cardinales y cofinalidades (bajo las dos hipótesis alternativas). Como $\mathbb{P}$ es κ-cerrado^M, el teorema 5.8 nos da que si $\nu < \kappa$ entonces $(\mathcal{P}\nu)^M = (\mathcal{P}\nu)^{M[G]}$, de donde $(2^\nu)^M = (2^\nu)^{M[G]}$ (una biyección en M de $(\mathcal{P}\nu)^M$ con un cardinal es también una biyección en $M[G]$ de $(\mathcal{P}\nu)^{M[G]}$ con un cardinal).

Supongamos ahora que $\kappa \leq \nu$. Según hemos visto tras 5.17, se cumple $(\mu \leq 2^\kappa)^{M[G]}$ (Aquí hay que tener en cuenta que $\mathbb{P}$ puede ser reemplazado por el c.p.o. semejante $\mathrm{Fn}(\mu \times \kappa, 2, \kappa)$). Por consiguiente,

$$(\mu^\nu)^{M[G]} \leq ((2^\kappa)^\nu)^{M[G]} = (2^\nu)^{M[G]}.$$

Por otra parte,

$$({}^\nu\mu)^M = {}^\nu\mu \cap M \subset {}^\nu\mu \cap M[G] = ({}^\nu\mu)^{M[G]},$$

luego $(\mu^\nu)^M \leq (\mu^\nu)^{M[G]} \leq (2^\nu)^{M[G]}$.

Para probar la otra desigualdad vamos a contar los buenos nombres para subconjuntos de $\check{\nu}$ en M. Según 5.18 tenemos que $|\mathbb{P}|^M = (\mu^{<\kappa})^M \leq (\mu^\kappa)^M = \mu$, por hipótesis (y en el caso $\kappa = \omega$ también es claro que $(\mu^{<\kappa})^M = \mu$). Por 5.15

sabemos que $\mathbb{P}$ cumple la condición de cadena κ^+ en M, luego el número de buenos nombres para subconjuntos de $\check{\nu}$ en M es a lo sumo

$$((|\mathbb{P}|^{<\kappa^+})^{|\mathcal{D}\check{\nu}|})^M \leq ((\mu^\kappa)^\nu)^M = (\mu^\nu)^M.$$

Según el teorema anterior, $(2^\nu)^{M[G]} \leq (\mu^\nu)^M$, luego tenemos la igualdad $(2^\nu)^{M[G]} = (\mu^\nu)^M$. En particular, si $\mu \leq \nu$ queda $(2^\nu)^{M[G]} \leq (2^\nu)^M$. ■

Así, en las hipótesis del teorema anterior, el c.p.o. $\mathbb{P}$ altera únicamente la función del continuo de M en el intervalo κ–μ. Concretamente convierte en 2^ν a lo que en M era μ^ν. En particular $(2^\kappa)^{M[G]} = (\mu^\kappa)^M = \mu$. Veamos algunos casos particulares.

Teorema 5.24 *Si* ZFC *es consistente, también lo es* ZFC *más la hipótesis del continuo generalizada más $V \neq L$ (concretamente, es consistente que existan subconjuntos no constructibles de ω).*

Demostración: Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC$+V = L$ y sea $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega, 2, \omega)$. Sea G un filtro genérico. Por el teorema anterior M y $M[G]$ tienen los mismos cardinales y cofinalidades y como M cumple la HCG, si ν es un cardinal infinito$^{M}[G]$, tenemos que

$$(2^\nu)^{M[G]} = (\omega^\nu)^M = (2^\nu)^M = (\nu^+)^M = (\nu^+)^{M[G]},$$

luego $M[G]$ cumple también la HCG. La función genérica $f_G : \omega \longrightarrow 2$ determina un subconjunto genérico de ω que en particular no está en M, con lo que no es constructible en $M[G]$. ■

Equivalentemente, hemos probado que el axioma de constructibilidad no puede demostrarse ni siquiera suponiendo la hipótesis del continuo generalizada.

Teorema 5.25 *Si* ZFC *es consistente también lo es la teoría que resulta de añadir como axioma $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, o bien $2^{\aleph_0} = \aleph_5$, o bien $2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega+1}$, o $2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1}$ o, en general, cualquier axioma que identifique a $2^{\aleph_0}$ con cualquier cardinal de cofinalidad no numerable.*

Demostración: Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC$+V = L$. Sea κ un cardinal^M de cofinalidad no numerable (en M). Para los ejemplos del enunciado tomaríamos $\kappa = \aleph_2^M$, o bien $\kappa = \aleph_5^M$, etc. Sea $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\kappa, 2, \omega)$ y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Ciertamente $(2^{<\aleph_0} = \aleph_0)^M$ y por la HCG^M se cumple $(\kappa^{\aleph_0} = \kappa)^M$ (aquí usamos que κ tiene cofinalidad no numerable). El teorema 5.23 nos da entonces que $(2^{\aleph_0})^{M[G]} = (\kappa^{\aleph_0})^M = \kappa$. ■

Ejemplo Si usamos $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega_2, 2, \aleph_0)^M$ a partir de un modelo M que cumpla la HCG obtenemos un modelo en el que

$$2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} = \aleph_2 \wedge \bigwedge \alpha > 1 \; 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}.$$

Las comprobaciones son todas rutinarias: La hipótesis $2^{<\kappa} = \kappa$ de 5.23 se cumple siempre que partamos de un modelo con la HCG. La hipótesis $\mu^\kappa = \mu$ es en nuestro caso $\aleph_2^{\aleph_0} = \aleph_2$, que se cumple (en M) también por la HCG. Por 5.23 tenemos, pues, que

$$(2^{\aleph_1})^{M[G]} = (\aleph_2^{\aleph_1})^M = \aleph_2^M = \aleph_2^{M[G]}.$$

Similarmente $(2^{\aleph_0})^{M[G]} = \aleph_2^{M[G]}$ y si $\alpha > 1$ es un ordinal en M, entonces

$$(2^{\aleph_\alpha})^{M[G]} = (\aleph_2^{\aleph_\alpha})^M = (2^{\aleph_\alpha})^M = \aleph_{\alpha+1}^M = \aleph_{\alpha+1}^{M[G]}.$$ ■

Ejemplo Si usamos $\mathrm{Fn}(\omega_{\omega+1}, 2, \aleph_0)^M$ obtenemos la consistencia de

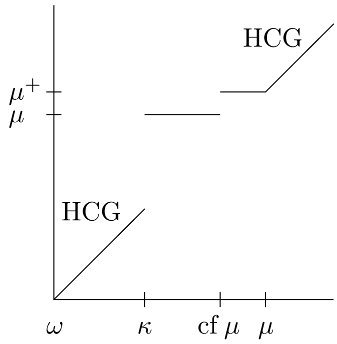
$$\bigwedge n < \omega\ 2^{\aleph_n} = \aleph_{\omega+1} \land \bigwedge \alpha \geq \omega\ 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}.$$ ■

Ejemplo Si usamos $\mathrm{Fn}(\omega_{\omega_8}, 2, \aleph_3)$ obtenemos la consistencia de

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 \land 2^{\aleph_1} = \aleph_2 \land 2^{\aleph_2} = \aleph_3 \land 2^{\aleph_3} = \aleph_{\omega_8} \land \cdots \land 2^{\aleph_7} = \aleph_{\omega_8} \land$$

$$\bigwedge \alpha (8 \leq \alpha \leq \omega_8 \rightarrow 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\omega_8+1}) \land \bigwedge \alpha (\omega_8 \leq \alpha \rightarrow 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}).$$ ■

El caso totalmente general (tomando $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\mu, 2, \kappa)$ con $\kappa < \mathrm{cf}\,\mu$) es:



Si es consistente que exista un cardinal débilmente inaccesible, también lo es que sea precisamente $2^{\aleph_0}$. En particular es consistente que exista un cardinal débilmente inaccesible que no sea fuertemente inaccesible.

Teorema 5.26 *Las teorías siguientes son equiconsistentes:*

a) ZFC+$\bigvee \kappa$ κ *es débilmente inaccesible.*

b) ZFC+HCG+$\bigvee \kappa$ κ *es débilmente inaccesible.*

c) ZFC+$2^{\aleph_0}$ *es débilmente inaccesible.*

d) ZFC+$\bigvee \kappa < 2^{\aleph_0}$ κ *débilmente inaccesible.*

Demostración: Es claro que la consistencia de b), c) o d) implica la de a). La consistencia de a) implica la de b) porque en a) se prueba que L es un modelo de b). Falta ver que la consistencia de b) implica la de c) y la de d). Trabajando en b), el teorema de reflexión nos da un modelo transitivo numerable M de b). Sea κ un cardinal (fuertemente) inaccesible^M y sea $\mu = \kappa$ para probar la consistencia de c) o $\mu = (\kappa^+)^M$ para d). Tomamos $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\mu, 1, \aleph_0)$ y un filtro genérico G, con el que construimos la extensión genérica $M[G]$. Por 5.17 tenemos que $\mathbb{P}$ conserva cardinales y cofinalidades. Como los cardinales en M siguen siendo cardinales en $M[G]$, tenemos que κ sigue siendo un cardinal límite en $M[G]$ y, como las cofinalidades son las mismas, sigue siendo regular. Así pues κ es débilmente inaccesible$^{M[G]}$. Por 5.23 tenemos que en $M[G]$ se cumple además $2^{\aleph_0} = \mu$, luego $M[G]$ es un modelo de c) o d). ■

Ahora vamos a dar el mejor resultado que podemos probar acerca de la función del continuo mediante las técnicas con las que contamos de momento.

Teorema 5.27 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC+$V = L$. *Sea $n \in \omega$ y sean $\kappa_1 < \cdots < \kappa_n$ cardinales regulares^M y $\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_n$ cardinales^M de manera que $\kappa_i < \mathrm{cf}^M \mu_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Entonces existe un modelo transitivo numerable N de* ZFC *tal que $M \subset N$, los cardinales de N son los mismos que los de M y $(2^{\kappa_i} = \mu_i)^N$ para todo $i = 1, \ldots, n$.*

Demostración: En M se cumple $2^{<\kappa_n} = \kappa_n$ y $\mu_n^{\kappa_n} = \mu_n$ por la HCG (véase [TC 5.74], aquí usamos la hipótesis sobre las cofinalidades). Así, si tomamos $\mathbb{P}_1 = \mathrm{Fn}(\mu_n, 2, \kappa_n)^M$ y formamos una extensión genérica $N_1 = M[G_1]$, el teorema 5.23 nos da que N_1 tiene los mismos cardinales y cofinalidades que M, así como que $(2^{\kappa_n} = \mu_n)^{N_1}$ y para todo cardinal infinito^M $\nu < \kappa_n$ se cumple $(2^\nu = \nu^+)^{N_1}$.

Similarmente definimos $\mathbb{P}_2 = \mathrm{Fn}(\mu_{n-1}, 2, \kappa_{n-1})^{N_1}$ y formamos una extensión genérica $N_2 = N_1[G_2]$, luego tomamos $\mathbb{P}_3 = \mathrm{Fn}(\mu_{n-2}, 2, \kappa_{n-2})^{N_2}$ y formamos una extensión genérica $N_3 = N_2[G_3]$, etc.

Supongamos que la extensión N_i cumple

a) Los cardinales y las cofinalidades de N_i son iguales que en M.

b) $2^{\kappa_j} = \mu_j$ para $j = n - i + 1, \ldots, n$,

c) $2^\nu = \nu^+$ para todo cardinal infinito^M $\nu < \kappa_{n-i+1}$ (y así $2^{<\kappa_{n-i}} = \kappa_{n-i}$).

Entonces $(\mu_{n-i}^{\kappa_{n-i}})^{N_i} = (\mu_{n-i}^{\kappa_{n-i}})^M = \mu_{n-i}$. La primera igualdad se debe a que cada $\mathbb{P}_j$ es κ_{n-j+1}-cerrado$^{N_{j-1}}$ y $\kappa_{n-i} < \kappa_{n-j+1}$, para $j = 1, \ldots, i$. En la segunda igualdad usamos que M cumple la HCG. Además κ_{n-i} es regular en N_i (porque lo es en M), luego podemos aplicar el teorema 5.23 para concluir que N_{i+1} cumple a) y c), así como que $2^{\kappa_{n-i}} = \mu_{n-i}$. Falta probar que si $j = n - i + 1, \ldots, n$ entonces también $(2^{\kappa_j} = \mu_j)^{N_{i+1}}$.

Claramente $(2^{\kappa_j})^{N_{i+1}} \geq (2^{\kappa_j})^{N_i} = \mu_j$. Por 5.23 tenemos también que

$$(2^{\kappa_j})^{N_{i+1}} = (\mu_{n-i}^{\kappa_j})^{N_i} \leq (\mu_j^{\kappa_j})^{N_i} = ((2^{\kappa_j})^{\kappa_j})^{N_i} = (2^{\kappa_j})^{N_i} = \mu_i,$$

luego, efectivamente, N_{i+1} cumple b). La extensión $N = N_n$ cumple el teorema. ■

Ejemplo Si ZFC es consistente, también lo es ZFC más el axioma

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 \land 2^{\aleph_1} = 2^{\aleph_2} = \aleph_7 \land 2^{\aleph_3} = \aleph_{\omega+15}.$$

En general, es consistente cualquier axioma que determine la función del continuo sobre un número finito de cardinales regulares sin más restricción que la monotonía (no estricta) y el teorema de König [TC 5.65]. ■

Nota La extensión genérica del teorema anterior cumple $V = L[G]$, en el sentido de 3.5, luego concluimos que un modelo $L[A]$ no tiene por qué cumplir necesariamente la HCG (compárese con 3.29). ■

Ahora es natural preguntarse si es posible obtener un resultado similar al teorema anterior pero que sea válido para infinitos cardinales no necesariamente regulares. El argumento que hemos empleado no funciona con infinitos cardinales porque es necesario empezar modificando la función del continuo sobre el mayor de ellos κ_n e ir descendiendo. Sólo así conservamos la HCG bajo el siguiente cardinal a modificar en cada paso, lo cual a su vez es necesario para poder aplicar 5.23. En la sección siguiente veremos la forma de superar este problema. Terminamos esta sección con otra aplicación de las extensiones con funciones parciales.

En [T 8.25] probamos el teorema de Kurepa en virtud del cual todo producto de espacios topológicos con celularidad menor o igual que κ tiene celularidad menor o igual que 2^κ. Ahora podemos probar que este resultado no puede mejorarse:

Teorema 5.28 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC+HCG. *Sea κ un cardinal^M tal que $\mathrm{cf}^M\,\kappa > \aleph_0$. Existe una extensión genérica de M con los mismos cardinales, donde $2^{\aleph_0} = \kappa$ y donde hay dos c.p.o.s que cumplen la condición de cadena numerable cuyo producto tiene una anticadena con κ elementos.*

Demostración: Sea $\mathbb{R} = \mathrm{Fn}([\kappa]^2, 2, \aleph_0)^M$ y sea G un filtro $\mathbb{R}$-genérico sobre M. Es claro que $\mathbb{R}$ es semejante^M a $\mathrm{Fn}(\kappa, 2, \aleph_0)^M$, por lo que los cardinales y las cofinalidades en M son iguales que en $M[G]$ y $(2^{\aleph_0})^{M[G]} = \kappa$. Sea

$$C_0 = \{\{\alpha, \beta\} \in [\kappa]^2 \mid \bigvee p \in G\ p(\{\alpha, \beta\}) = 0\} \in M[G]$$

y tomemos $\mathbb{P} = \{s \in \mathcal{P}^f A \mid [s]^2 \subset C_0\} \in M[G]$. Notemos que $\mathbb{P}$ está definido a partir de κ y G, es decir, desde un punto de vista metamatemático $\mathbb{P}$ es en realidad un término $\mathbb{P}(\kappa, G)$ con dos variables libres.

Consideramos a $\mathbb{P}$ como c.p.o. con el orden $s \leq t \leftrightarrow t \subset s$. Podemos pensar que C es el conjunto de las aristas de un grafo con vértices en κ (un grafo "genérico") y que $\mathbb{P}$ está formado por los subgrafos de C totalmente conectados.

Vamos a probar que $\mathbb{P}$ cumple la condición de cadena numerable en $M[G]$. Para ello, supongamos que $f : \omega_1^{M[G]} \longrightarrow \mathbb{P}$ enumera una anticadena (naturalmente, con $f \in M[G]$). Sea $f = \tau_G$, con $\tau \in M^{\mathbb{P}}$. Llamemos $\lambda = \omega_1^{M[G]} = \omega_1^M$

y sea $p \in G$ tal que

$$p \Vdash \tau : \check{\lambda} \longrightarrow \mathbb{P}(\check{\kappa}, \Gamma) \wedge \bigwedge \alpha\beta \in \check{\lambda}\ \tau(\alpha) \perp \tau(\beta),$$

donde Γ es el nombre canónico de G.

Para cada $\alpha < \omega_1^M$, sea $f(\alpha) = s_\alpha$. Entonces $s_\alpha \subset \kappa \subset M$ finito, luego $s_\alpha \in M$. Sea $p_\alpha \in G$ tal que $p_\alpha \leq p \wedge p_\alpha \Vdash \tau(\check{\alpha}) = \check{s}_\alpha$. Extendiendo p_α si es necesario, podemos suponer que su dominio es de la forma $[t_\alpha]^2$, donde $s_\alpha \subset t_\alpha$. Así mismo podemos suponer que $\{t_\alpha\}_{\alpha<\lambda} \in M[G]$.

Por el lema de los sistemas Δ en $M[G]$, existe $I \subset \lambda$, $(|I| = \aleph_1)^{M[G]}$ y un $r \subset \lambda$ finito de modo que $\bigwedge \alpha\beta \in I(\alpha \neq \beta \rightarrow t_\alpha \cap t_\beta = r)$. Como es habitual, si la familia $\{t_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ fuera numerable$^{M[G]}$, bastaría tomar I de modo que todos los t_α con $\alpha \in I$ fueran iguales a un mismo r.

Como $\{s_\alpha \cap r\}_{\alpha<\lambda}$ sólo puede tomar un número finito de valores, restringiendo I podemos suponer que existe $s \subset \kappa$ finito tal que $\bigwedge \alpha \in I\ s_\alpha \cap r = s$. Fijemos α, $\beta \in I$, $\alpha \neq \beta$.

Las condiciones p_α y p_β son compatibles porque ambas están en G. Una está definida sobre $[t_\alpha]^2$ y la otra sobre $[t_\beta]^2$, luego podemos extenderlas a una condición $q \in \mathbb{R}$ definida sobre $[t_\alpha \cup t_\beta]^2$ que tome el valor 0 en los pares donde p_α y p_β no están definidas. En particular $q(\{u, v\}) = 0$ para todo $\{u, v\} \in [s_\alpha \cup s_\beta]^2$, pues en caso contrario una de las dos condiciones, digamos p_α, estaría definida en $\{u, v\}$ con el valor 1. En particular u, $v \in t_\alpha$. Si $u \in s_\beta \subset t_\beta$ entonces $u \in t_\alpha \cap t_\beta = r$, luego $u \in s_\beta \cap r = s = s_\alpha \cap r$. En definitiva tenemos que $u \in s_\alpha$ e igualmente $v \in s_\alpha$. Así, $\{u, v\} \in [s_\alpha]^2 \subset C_0$ y, como $p_\alpha \in G$, la definición de C_0 nos da que $p_\alpha(\{u, v\}) = 0$, contradicción.

Sea H un filtro $\mathbb{R}$-genérico sobre M tal que $q \in H$. Como q extiende a p_α y a p_β (en particular a p) tenemos que

$$q \Vdash \tau : \check{\lambda} \longrightarrow \mathbb{P}(\check{\kappa}, \Gamma) \wedge (\bigwedge \alpha\beta \in \check{\lambda}\ \tau(\alpha) \perp \tau(\beta)) \wedge \tau(\check{\alpha}) = \check{s}_\alpha \wedge \tau(\check{\beta}) = \check{s}_\beta.$$

Por consiguiente, s_α, $s_\beta \in \mathbb{P}(\kappa, H)$, $s_\alpha \perp s_\beta$, mientras que por construcción $[s_\alpha \cup s_\beta]^2 \subset C_0(\kappa, H)$ (pues $q \in H$ toma el valor 0 sobre $[s_\alpha \cup s_\beta]^2$), luego $s_\alpha \cup s_\beta \in \mathbb{P}(\kappa, H)$ es una extensión común de s_α y s_β, contradicción.

Con esto tenemos que $\mathbb{P}$ cumple la condición de cadena numerable$^{M[G]}$. Similarmente, definimos

$$C_1 = \{\{\alpha, \beta\} \in [\kappa]^2 \mid \bigvee p \in G\ p(\{\alpha, \beta\}) = 1\} \in M[G]$$

y $\mathbb{Q} = \{s \in \mathcal{P}^f A \mid [s]^2 \subset C_1\} \in M[G]$, considerado como c.p.o. con la relación definida igual que en $\mathbb{P}$. Obviamente también cumple la condición de cadena numerable$^{M[G]}$, pero el producto $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ no la cumple, ya que $\{(\{\alpha\}, \{\alpha\})\}_{\alpha<\kappa}$ es una anticadena de cardinal κ en $M[G]$. ■

5.4 Productos

Acabamos de ver que, a través de una sucesión finita de extensiones genéricas, podemos modificar la función del continuo de cualquier forma razonable sobre un conjunto finito de cardinales regulares, y quedaba pendiente el problema de generalizar el resultado a infinitos cardinales. En principio tenemos que resolver dos dificultades: la primera es que el argumento empleado nos obliga a modificar primero la función del continuo sobre el mayor de los cardinales sobre los que queremos alterarla, lo que obliga ya a trabajar con un conjunto finito de cardinales; pero aunque nos las arregláramos para empezar con el cardinal menor, todavía nos queda el segundo problema, y es que no sabemos continuar una sucesión de extensiones

$$M \subset M[G_1] \subset M[G_1][G_2] \subset M[G_1][G_2][G_3] \subset \cdots$$

Resolveremos simultáneamente ambos problemas mostrando que una sucesión finita de extensiones genéricas puede reducirse a una única extensión. Entonces quedará claro cómo generalizar el proceso al caso infinito.

Definición 5.29 Sean $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ dos c.p.o.s. Definimos en $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ el preorden dado por

$$(p, q) \leq (p', q') \leftrightarrow p \leq p' \wedge q \leq q'.$$

Claramente esto convierte a $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ en un c.p.o. con máximo $(\mathbb{1}, \mathbb{1})$.

Las aplicaciones $i_{\mathbb{P}} : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ e $i_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ dadas por $i_{\mathbb{P}}(p) = (p, \mathbb{1})$, $i_{\mathbb{Q}}(q) = (\mathbb{1}, q)$ son claramente inmersiones completas. De hecho, una reducción de un par (p, q) a $\mathbb{P}$ es p.

Los resultados que conocemos sobre inmersiones nos dicen que una extensión genérica respecto a $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ contiene una extensión genérica respecto a $\mathbb{P}$ y otra respecto a $\mathbb{Q}$, pero vamos a probar más que esto: vamos a ver que una extensión respecto a $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ equivale a una extensión respecto a $\mathbb{P}$ seguida de una extensión respecto a $\mathbb{Q}$. En primer lugar estudiamos los filtros genéricos en productos.

Teorema 5.30 *Consideremos un modelo transitivo numerable M de* ZFC *y sean $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q} \in M$ dos c.p.o.s. Si G es un filtro $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$-genérico sobre M, entonces $G_1 = i_{\mathbb{P}}^{-1}[G]$ es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, $G_2 = i_{\mathbb{Q}}^{-1}[G]$ es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M y $G = G_1 \times G_2$.*

Demostración: G_1 y G_2 son filtros genéricos por 4.31. Si $(p, q) \in G$, entonces $(p, \mathbb{1})$, $(\mathbb{1}, q) \in G$ por ser un filtro, luego $(p, q) \in G_1 \times G_2$.

Si $(p, q) \in G_1 \times G_2$ entonces $(p, \mathbb{1})$, $(\mathbb{1}, q) \in G$, luego existe una condición $(p', q') \in G$ tal que $(p', q') \leq (p, \mathbb{1})$, $(p', q') \leq (\mathbb{1}, q)$. Esto quiere decir que $p' \leq p \wedge q' \leq q$, luego $(p', q') \leq (p, q)$ y por consiguiente $(p, q) \in G$. ■

No es cierto que el producto de filtros genéricos sea siempre un filtro genérico. La situación exacta viene dada por el teorema siguiente:

Teorema 5.31 (Teorema del producto) *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sean $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q} \in M$ dos c.p.o.s y $G_1 \subset \mathbb{P}$, $G_2 \subset \mathbb{Q}$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) $G_1 \times G_2$ es un filtro $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$-genérico sobre M.

b) G_1 es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y G_2 es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[G_1]$.

c) G_2 es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M y G_1 es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $M[G_2]$.

Si se cumplen estas condiciones, $M[G_1 \times G_2] = M[G_1][G_2] = M[G_2][G_1]$.

Demostración: Veamos que a) es equivalente a b). La equivalencia con c) se tiene por simetría.

Supongamos que $G_1 \times G_2$ es $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$-genérico sobre M. Por el teorema anterior $G_1 = i_{\mathbb{P}}^{-1}[G_1 \times G_2]$ es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. También sabemos que G_2 es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M, pero queremos ver que lo es sobre $M[G_1]$. Sea $D \in M[G_1]$ un subconjunto denso de $\mathbb{Q}$. Entonces $D = \tau_{G_1}$, para cierto $\tau \in M^{\mathbb{P}}$. Sea $p \in G_1$ tal que $p \Vdash \tau$ es denso en $\check{\mathbb{Q}}$. Definimos

$$D' = \{(u, v) \in \mathbb{P} \times \mathbb{Q} \mid u \leq p \wedge u \Vdash \check{v} \in \tau\} \in M.$$

Veamos que D' es denso bajo $(p, \mathbb{1})$. Para ello tomamos $(r, s) \leq (p, \mathbb{1})$. Entonces $r \leq p$, luego $r \Vdash \tau$ es denso en $\check{\mathbb{Q}}$. Por consiguiente

$$r \Vdash \bigvee x \in \check{\mathbb{Q}}(x \in \tau \wedge x \leq \check{s}).$$

Según 4.47, existen un $v \in \mathbb{Q}$ y un $u \leq r$ tales que $u \Vdash (\check{v} \in \tau \wedge \check{v} \leq \check{s})$. Necesariamente $v \leq s$. Así $(u, v) \leq (r, s)$ y $(u, v) \in D'$. Esto prueba que D' es denso bajo $(p, \mathbb{1})$.

Como $(p, \mathbb{1}) \in G_1 \times G_2$, existe un par $(u, v) \in D' \cap (G_1 \times G_2)$. Entonces $u \Vdash \check{v} \in \tau$, luego $v \in \tau_{G_1} = D$, es decir, $v \in G_2 \cap D$. Esto prueba que G_2 es $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[G_1]$.

Supongamos ahora que G_1 es $\mathbb{P}$-genérico sobre M y que G_2 es $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[G_1]$. Es inmediato comprobar que $G_1 \times G_2$ es un filtro en $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$. Para probar que es genérico tomamos un conjunto $D \in M$ denso en $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$. Sea

$$D^* = \{q \in \mathbb{Q} \mid \bigvee p \in G_1 \, (p, q) \in D\} \in M[G_1].$$

Veamos que D^* es denso en $\mathbb{Q}$. Para ello tomamos $t \in \mathbb{Q}$ y definimos

$$D' = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee q \in \mathbb{Q}(q \leq t \wedge (p, q) \in D)\} \in M.$$

Se cumple que D' es denso en $\mathbb{P}$, pues si $s \in \mathbb{P}$, entonces $(s, t) \in \mathbb{P} \times \mathbb{Q}$, luego existe $(p, q) \in D$ tal que $(p, q) \leq (s, t)$. Así, $p \leq s \wedge p \in D'$.

Sea $p \in D' \cap G_1$, sea $q \leq t$ tal que $(p, q) \in D$. Entonces $q \leq t \wedge q \in D^*$, lo que prueba que D^* es denso en $\mathbb{Q}$. Como G_2 es genérico sobre $M[G_1]$, existe un $q \in D^* \cap G_2$ y por definición de D^* existe un $p \in G_1$ tal que $(p, q) \in D$, es decir, $(p, q) \in D \cap (G_1 \times G_2) \neq \varnothing$.

Si se cumplen las condiciones del teorema, tenemos que $M \subset M[G_1][G_2]$ y $G_1 \times G_2 \in M[G_1][G_2]$, luego $M[G_1 \times G_2] \subset M[G_1][G_2]$. Por otra parte $M \subset M[G_1 \times G_2]$ y $G_1 \in M[G_1 \times G_2]$, luego $M[G_1] \subset M[G_1 \times G_2]$. Así mismo $G_2 \in M[G_1 \times G_2]$, luego $M[G_1][G_2] \subset M[G_1 \times G_2]$. ■

Observación Un caso frecuente en el que podemos aplicar la teoría sobre productos que acabamos de exponer se da cuando tenemos una unión disjunta $I = I_1 \cup I_2$, de manera que

$$\mathrm{Fn}(I, J, \kappa) \cong \mathrm{Fn}(I_1, J, \kappa) \times \mathrm{Fn}(I_2, J, \kappa),$$

donde la semejanza es la dada por $p \mapsto (p|_{I_1}, p|_{I_2})$. Las inmersiones completas $i_j : \mathrm{Fn}(I_i, J, \kappa) \longrightarrow \mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ son simplemente las inclusiones. ■

5.5 El teorema de Easton

Ahora sabemos cómo reducir dos extensiones genéricas consecutivas a una sola. Ahora es fácil ver que el teorema 5.27 podría haberse probado con una única extensión genérica respecto al producto de todos los c.p.o.s utilizados. Así desaparece el problema del orden en que hay que realizar las extensiones. Hay que tener presente que el c.p.o. $\mathbb{P}_2$ de la prueba de 5.27, aunque en principio se define en $M[G_1]$, de hecho está en el modelo base M porque $\mathbb{P}_1$ es κ_n-cerrado^M. Similarmente se concluye que todos los c.p.o.s utilizados están de hecho en M, pues en caso contrario no podríamos formar su producto. Ahora, para obtener un resultado análogo que valga para infinitos cardinales sólo hemos de tomar un producto infinito.

Definición 5.32 Una *función de Easton* es una función E cuyo dominio sea un conjunto A de cardinales regulares y su rango un conjunto de cardinales infinitos, de modo que cumpla las condiciones siguientes:

a) $\bigwedge \kappa\mu \in A(\kappa \leq \mu \rightarrow E(\kappa) \leq E(\mu))$,

b) $\bigwedge \kappa \in A\ \kappa < \mathrm{cf}\, E(\kappa)$.

Informalmente, una función de Easton es una candidata a función del continuo sobre un conjunto de cardinales regulares. Las condiciones a) y b) recogen dos restricciones que ha de cumplir necesariamente la función del continuo: la monotonía y el teorema de König.

Si E es una función de Easton de dominio A, definimos el *producto de Easton* asociado $\mathbb{P}(E)$ como el conjunto de todos los $p \in \prod\limits_{\kappa \in A} \mathrm{Fn}(E(\kappa), 2, \kappa)$ tales que para todo cardinal regular μ

$$|\{\kappa \in \mu \cap A \mid p(\kappa) \neq \mathbb{1}\}| < \mu.$$

Esta restricción se impone por una cuestión técnica que después se verá en relación con la posible existencia de cardinales inaccesibles. En efecto, notemos que si $\mu = \nu^+$ es un cardinal sucesor entonces la condición se verifica trivialmente, pues a lo sumo hay ν cardinales menores que μ.

En $\mathbb{P}(E)$ definimos el orden dado por $p \leq q \leftrightarrow \bigwedge \kappa \in A\ p(\kappa) \leq q(\kappa)$. Así $\mathbb{P}(E)$ resulta ser un c.p.o. con máximo $\mathbb{1}$ igual a la condición dada por $\bigwedge \kappa \in A\ \mathbb{1}(\kappa) = \mathbb{1}$.

Si E es una función de Easton y μ es un cardinal, llamaremos $E_\mu^>$ y $E_\mu^\leq$ a las restricciones de E a los cardinales de su dominio $> \mu$ o $\leq \mu$, respectivamente. Es muy fácil comprobar que $\mathbb{P}(E) \cong \mathbb{P}(E_\mu^>) \times \mathbb{P}(E_\mu^\leq)$. La semejanza es simplemente la que a cada condición le asigna el par formado por su restricción a los cardinales $> \mu$ y su restricción a los cardinales $\leq \mu$.

A continuación los teoremas obligados:

Teorema 5.33 *Sea E una función de Easton de dominio A y μ un cardinal regular tal que $A \subset \mu^+$ y $2^{<\mu} = \mu$. Entonces $\mathbb{P}(E)$ cumple la c.c.μ^+.*

Demostración: Si $p \in \mathbb{P}(E)$, sea $d(p) = \bigcup\limits_{\kappa \in A} \{\kappa\} \times \mathcal{D}p(\kappa)$ y tomemos $B = \{\kappa < \mu \cap A \mid p(\kappa) \neq \mathbb{1}\}$. Por definición de $\mathbb{P}(E)$ sabemos que $|B| < \mu$. Veamos que $|d(p)| < \mu$. En efecto:

$$|d(p)| = \sum_{\kappa \in A} |\mathcal{D}p(\kappa)| \leq \sum_{\kappa \in B} |\mathcal{D}p(\kappa)| + |\mathcal{D}p(\mu)|.$$

El último sumando sólo hace falta si $\mu \in A$, pues por definición $\mu \notin B$. De este modo

$$|d(p)| \leq \sum_{\kappa \in B} \kappa + |\mathcal{D}p(\mu)| < \mu,$$

donde hemos usado la regularidad de μ.

Observemos, por otra parte, que los cardinales μ y μ^+ están en las hipótesis del lema de los sistemas Δ, pues si $\alpha < \mu^+$ se cumple

$$|\alpha^{<\mu}| = |\alpha|^{<\mu} \leq \mu^{<\mu} = (2^{<\mu})^{<\mu} = 2^{<\mu} = \mu,$$

donde hemos usado [TC 5.71].

Consideremos ahora una familia $\{p_\alpha\}_{\alpha<\mu^+}$ de condiciones distintas dos a dos, y veamos que no puede ser una anticadena. Si $\{d(p_\alpha) \mid \alpha < \mu^+\}$ tiene cardinal $\leq \mu$ entonces ha de existir un $x \subset \mu^+$ tal que $|x| = \mu^+$ y $\bigwedge \alpha \in x\ d(p_\alpha) = r$, para un r fijo.

Si, por el contrario, $\{d(p_\alpha) \mid \alpha < \mu^+\}$ tiene cardinal μ^+, podemos aplicar el lema de los sistemas Δ, que nos da un $x \subset \mu^+$ tal que $|x| = \mu^+$ y la familia $\{d(p_\alpha)\}_{\alpha \in x}$ es cuasidisjunta de raíz r.

En cualquier caso podemos descomponer

$$x = \bigcup_{f \in 2^r} \{\alpha \in x \mid \bigwedge \kappa i((\kappa, i) \in r \rightarrow p_\alpha(\kappa)(i) = f(\kappa, i))\}.$$

Como $|2^r| \leq 2^{<\mu} = \mu < \mu^+$, ha de existir $f \in 2^r$ tal que el conjunto

$$\{\alpha \in x \mid \bigwedge \kappa i((\kappa, i) \in r \rightarrow p_\alpha(\kappa)(i) = f(\kappa, i))\}$$

tenga cardinal μ^+.

En particular, si α y β están en este conjunto, para todo $\kappa \in A$ y todo $i \in \mathcal{D}p_\alpha(\kappa) \cap \mathcal{D}p_\beta(\kappa)$ se cumple $(\kappa, i) \in d(p_\alpha) \cap d(p_\beta) = r$, luego $p_\alpha(\kappa)(i) = p_\beta(\kappa)(i)$. Esto implica que $p_\alpha(\kappa)$ y $p_\beta(\kappa)$ son compatibles en $\mathrm{Fn}(E(\kappa), 2, \kappa)$, de donde a su vez se sigue que p_α y p_β son compatibles. ■

Teorema 5.34 *Si E es una función de Easton de dominio A y μ es un cardinal infinito tal que $A \cap \mu^+ = \varnothing$, entonces $\mathbb{P}(E)$ es μ^+-cerrado.*

Demostración: Sea $\{p_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ con $\beta < \mu^+$ una sucesión decreciente de condiciones en $\mathbb{P}(E)$. Para cada $\kappa \in A$ se cumple que $\{p_\alpha(\kappa)\}_{\alpha<\beta}$ es una sucesión decreciente de condiciones en $\mathrm{Fn}(E(\kappa), 2, \kappa)$, que es κ-cerrado, y por otra parte $\beta < \mu^+ \leq \kappa$. Por lo tanto existe una condición $p_\kappa \in \mathrm{Fn}(E(\kappa), 2, \kappa)$ de manera que $\bigwedge \alpha < \beta \ p_\kappa \leq p_\alpha(\kappa)$. Podemos exigir que $p_\kappa = \mathbb{1}$ siempre que $\bigwedge \alpha < \beta \ p_\alpha(\kappa) = \mathbb{1}$.

Sea $p \in \mathbb{P}(E)$ la condición dada por $\bigwedge \kappa \in A \ p(\kappa) = p_\kappa$. Se cumple que p es realmente una condición, pues para todo cardinal regular ν se cumple que

$$|\{\kappa \in \nu \cap A \mid p(\kappa) \neq \mathbb{1}\}| = \Big|\bigcup_{\alpha<\beta} \{\kappa \in \nu \cap A \mid p_\alpha(\kappa) \neq \mathbb{1}\}\Big| < \nu,$$

pues cada uno de los conjuntos de la unión tiene cardinal $< \nu$ por definición de $\mathbb{P}(E)$ y si de hecho existe un $\kappa \in \nu \cap A$ es porque $\nu > \mu \geq |\beta|$.

Es claro que $\bigwedge \alpha < \beta \ p \leq p_\alpha$, lo que prueba que $\mathbb{P}(E)$ es μ^+-cerrado. ■

El teorema siguiente es fundamental para trabajar con productos de Easton:

Teorema 5.35 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC+HCG, *$E \in M$ una función de Easton^M, $\mathbb{P} = \mathbb{P}(E)^M$, μ un cardinal regular^M, $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(E_\mu^>)$, $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(E_\mu^\leq)$ y G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces existe un filtro G_1 $\mathbb{P}_1$-genérico sobre M y un filtro G_2 $\mathbb{P}_2$-genérico sobre $M[G_1]$ de modo que $M[G] = M[G_1][G_2]$. Además $\mathbb{P}_1$ es μ^+-cerrado^M y $\mathbb{P}_2$ cumple la (c.c.μ^+)$^{M[G_1]}$.*

Demostración: Sabemos que $\mathbb{P}$ es semejante^M a $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$, luego por 4.32 existe un filtro G' que es $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$-genérico sobre M y tal que $M[G] = M[G']$. Por el teorema del producto (y el teorema previo) existen filtros G_1 y G_2 que cumplen lo pedido.

Por el teorema anterior, $\mathbb{P}_1$ es μ^+-cerrado^M, luego conserva cardinales y cofinalidades $\leq \mu^+$. Además, teniendo en cuenta la HCG^M,

$$(2^{<\mu})^{M[G_1]} = (2^{<\mu})^M = \mu.$$

Esto nos permite aplicar el teorema 5.33 en el modelo $M[G_1]$ (notemos que $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(E_\mu^\leq)^{M[G_1]}$) y concluir que $\mathbb{P}_2$ cumple la (c.c.μ^+)$^{M[G_1]}$. ■

Teorema 5.36 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC+HCG, *$E \in M$ una función de Easton^M y $\mathbb{P} = \mathbb{P}(E)^M$. Entonces $\mathbb{P}$ conserva cardinales y cofinalidades.*

Demostración: En otro caso, por 5.3 existe un filtro genérico G y un cardinal^M ν tal que ν es regular^M y singular$^{M[G]}$. Sea $\mu = \operatorname{cf}^{M[G]} \nu < \nu$. Entonces μ es regular$^{M[G]}$, luego también es regular^M.

Sean $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(E^{>}_{\mu})^M$ y $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(E^{\leq}_{\mu})^M$. Sean G_1 y G_2 filtros genéricos en las condiciones del teorema anterior.

Sea $f : \mu \longrightarrow \nu$ cofinal, $f \in M[G]$. Como $\mathbb{P}_2$ cumple la c.c.μ^+ en $M[G_1]$, el teorema 5.5 nos da una aplicación $F : \mu \longrightarrow \mathcal{P}\nu$, $F \in M[G_1]$ de modo que $\bigwedge \alpha < \mu\ |F(\alpha)|^{M[G_1]} \leq \mu$ y $\bigwedge \alpha < \mu\ f(\alpha) \in F(\alpha)$.

Para cada $\alpha < \mu$, puesto que $F(\alpha) \subset \nu \subset M$ y $|F(\alpha)|^{M[G_1]} \leq \mu$, el teorema 5.8 nos da que $F(\alpha) \in M$, luego $F \subset M$ y $|F|^{M[G_1]} = \mu$, por lo que de nuevo por 5.8 llegamos a que $F \in M$. Consideremos entonces el conjunto

$$X = \bigcup_{\alpha < \mu} F(\alpha) \in M.$$

Se cumple que $|X|^M \leq \mu$, pues $\bigwedge \alpha < \mu\ |F(\alpha)|^M \leq \mu$ (en efecto, una biyección entre $F(\alpha)$ y su cardinal en $M[G_1]$ está en M por 5.8). En particular $|X|^M < \nu$, pero por otra parte X contiene al rango de f, luego no está acotado en ν, y esto contradice la regularidad^M de ν. ■

El resultado principal que vamos a probar es que en una extensión genérica a través de un producto de Easton la función del continuo coincide con la correspondiente función de Easton en el dominio de ésta. No obstante vamos a calcular la función del continuo completa de la extensión. Concretamente, será la dada por la definición siguiente:

Definición 5.37 Sea E una función de Easton de dominio A. Para cada cardinal infinito κ sea

$$E'(\kappa) = \kappa^+ \cup \bigcup_{\mu \in A \cap \kappa^+} E(\mu).$$

Por las propiedades de E, es claro que si $\kappa \in A$ entonces $E'(\kappa) = E(\kappa)$. Es claro que E' es la menor función monótona que extiende a E a todos los cardinales infinitos (menor en el sentido de que toma el menor valor posible sobre cada cardinal). Definimos

$$E^*(\kappa) = \begin{cases} E'(\kappa) & \text{si } \operatorname{cf} E'(\kappa) > \kappa, \\ E'(\kappa)^+ & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

También es claro que si $\kappa \in A$ entonces $E^*(\kappa) = E(\kappa)$. Así E^* es la menor extensión de E que respeta la monotonía y el teorema de König.

Teorema 5.38 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC+HCG, $E \in M$ *una función de Easton^M de dominio A, $\mathbb{P} = \mathbb{P}(E)$ y G un filtro P-genérico sobre M. Entonces en $M[G]$ se cumple que $\bigwedge \kappa(\aleph_0 \leq \kappa \rightarrow 2^\kappa = E^*(\kappa))$. En particular $\bigwedge \kappa \in A\ 2^\kappa = E(\kappa)$. Además en $M[G]$ se cumple la hipótesis de los cardinales singulares.*

Demostración: Puesto que $\mathbb{P}$ conserva cardinales y cofinalidades, es claro que $E'^M = E'^{M[G]}$ y $E^{*M} = E^{*M[G]}$. Por simplicidad escribiremos simplemente E' y E^*. Así mismo escribiremos μ^+ en lugar de μ^{+M} o $\mu^{+M[G]}$.

Tomemos $\mu \in A$ y sea $i : \mathrm{Fn}(E(\mu), 2, \mu)^M \longrightarrow \mathbb{P}$ la inmersión completa dada por

$$j(p)(\nu) = \begin{cases} p & \text{si } \nu = \mu, \\ \mathbb{1} & \text{si } \nu \neq \mu. \end{cases}$$

Entonces $G_0 = i^{-1}[G]$ es un filtro $\mathrm{Fn}(E(\mu), 2, \mu)^M$-genérico sobre M y $M[G_0] \subset M[G]$. Ahora bien, este último c.p.o. añade $E(\mu)$ subconjuntos genéricos a μ, luego $E(\mu) \leq (2^\mu)^{M[G_0]} \leq (2^\mu)^{M[G]}$.

Ahora, si κ es un cardinal^M infinito y $\mu \in A \cap \kappa^+$, entonces tenemos que $E(\mu) \leq (2^\mu)^{M[G]} \leq (2^\kappa)^{M[G]}$. Por consiguiente $E'(\kappa) \leq (2^\kappa)^{M[G]}$. Si $\mathrm{cf}^{M[G]} E'(\kappa) = \kappa$ no puede darse la igualdad $E'(\kappa) = (2^\kappa)^{M[G]}$, pues contradiría al teorema de König, luego $E'(\kappa)^+ \leq (2^\kappa)^{M[G]}$. En cualquier caso, concluimos que $E^*(\kappa) \leq (2^\kappa)^{M[G]}$.

Sea $\mu = \mathrm{cf}^M \kappa = \mathrm{cf}^{M[G]} \kappa$. Sean $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$, G_1 y G_2 como en el teorema 5.35. Supongamos primeramente que $\mu = \kappa$, es decir, que κ es regular^M. Sea $\nu \in A$ tal que $\nu \leq \mu$. Entonces, por 5.18,

$$|\,\mathrm{Fn}(E(\nu), 2, \nu)|^M \leq |\,\mathrm{Fn}(E(\mu), 2, \mu)|^M \leq (E(\mu)^\mu)^M \leq (E^*(\mu)^\mu)^M.$$

Por consiguiente $|\mathbb{P}_2|^M \leq ((E^*(\mu)^\mu)^\mu)^M = (E^*(\mu)^\mu)^M = E^*(\mu)$, puesto que $\mathrm{cf}^M E^*(\mu) > \mu$ y M cumple la HCG. De aquí se sigue que $|\mathbb{P}_2|^{M[G_1]} \leq E^*(\mu)$ (pues una biyección entre $\mathbb{P}_2$ y su cardinal^M también está en $M[G_1]$).

Por otra parte, según 5.35, $\mathbb{P}_2$ cumple la c.c.μ^+ en $M[G_1]$ luego, según el teorema 5.20, el número de buenos nombres para subconjuntos de $\check{\mu}$ en $M[G_1]$ es a lo sumo

$$(((E^*(\mu)^\mu)^\mu)^{M[G_1]} = (E^*(\mu)^\mu)^{M[G_1]} = (E^*(\mu)^\mu)^M = E^*(\mu).$$

(Al pasar de $M[G_1]$ a M hemos usado que $\mathbb{P}_1$ es μ^+-cerrado^M.)

Ahora usamos 5.22 para concluir que en $M[G_1][G_2] = M[G]$ se verifica la desigualdad $2^\mu \leq E^*(\kappa)$ y, por lo probado anteriormente, la igualdad.

En resumen, tenemos que $(2^\kappa = E^*(\kappa))^{M[G]}$ para todo cardinal regular^M κ. Supongamos ahora que κ es singular^M, es decir, que $\mu < \kappa$. En primer lugar probaremos que $(E^*(\kappa)^\mu)^{M[G]} = E^*(\kappa)$.

Tomemos $f \in ({}^\mu E^*(\kappa))^{M[G]}$. Como $\mathbb{P}_2$ cumple la c.c.μ^+ en $M[G_1]$, por una variante (consecuencia inmediata) de 5.5 existe $F \in ({}^{\mu\times\mu} E^*(\kappa))^{M[G_1]}$ tal que

$$\bigwedge \alpha < \mu \bigvee \beta < \mu \ f(\alpha) = F(\alpha, \beta). \tag{$*$}$$

Como $\mathbb{P}_1$ es μ^+-cerrado^M, en realidad $F \in M$. Por la HCG^M existen a lo sumo $E^*(\kappa)$ funciones como F en M (aquí usamos que $\mathrm{cf}^M E^*(\kappa) > \mu$). Para cada $F \in ({}^{\mu\times\mu} E^*(\kappa))^M$, el número de aplicaciones $f \in ({}^\mu E^*(\kappa))^{M[G]}$ que cumplen $(*)$ es a lo sumo $(\mu^\mu)^{M[G]} = (2^\mu)^{M[G]} = E^*(\mu) \leq E^*(\kappa)$, donde hemos usado la parte ya probada para cardinales regulares (μ es regular^M).

En resumen, hay a lo sumo $E^*(\kappa)$ posibilidades para F y, para cada una de ellas, hay a lo sumo $E^*(\kappa)$ posibilidades para f, luego

$$|{}^{\mu}E^*(\kappa)|^{M[G]} \leq (E^*(\kappa)\cdot E^*(\kappa))^{M[G]} = E^*(\kappa).$$

Así pues, $(E^*(\kappa)^\mu)^{M[G]} = E^*(\kappa)$, como queríamos probar.

Sea B el conjunto de todos los subconjuntos acotados de κ en $M[G]$ y sea R el conjunto de todos los cardinales regulares^M menores que κ. Entonces

$$|B|^{M[G]} \leq \Big|\bigcup_{\nu\in R}\mathcal{P}\nu\Big|^{M[G]} \leq \Big(\sum_{\nu\in R}E^*(\nu)\Big)^{M[G]} \leq (\kappa\cdot E^*(\kappa))^{M[G]} = E^*(\kappa).$$

Sea $f : (B^\mu)^{M[G]} \longrightarrow (\mathcal{P}\kappa)^{M[G]}$ dada por $f(g) = \bigcup\limits_{\alpha<\mu} g(\alpha)$. Es claro que $f\in M[G]$ y es suprayectiva, luego

$$(2^\kappa)^{M[G]} = |\mathcal{P}\kappa|^{M[G]} \leq |B^\mu|^{M[G]} \leq (E^*(\kappa)^\mu)^{M[G]} = E^*(\kappa).$$

La otra desigualdad ya estaba probada, con lo que tenemos $(2^\kappa)^{M[G]} = E^*(\kappa)$ para todo cardinal^M infinito κ.

Nos falta probar que en $M[G]$ se cumple la hipótesis de los cardinales singulares. Para ello tomamos un cardinal singular$^{M[G]}$ κ, llamamos $\mu = \operatorname{cf}^{M[G]}\kappa$ y suponemos que $(2^\mu)^{M[G]} < \kappa$. Hemos de probar que $(\kappa^\mu = \kappa^+)^{M[G]}$.

Consideramos $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$, G_1 y G_2 como antes. Tomamos $f\in({}^\mu\kappa)^{M[G]}$. Sea $F\in({}^{\mu\times\mu}\kappa)^{M[G_1]}$ que cumpla $(*)$. Igual que antes, concluimos que $F\in M$, y que el número de aplicaciones F posibles es a lo sumo $(\mu^\mu)^M = \mu^+$. Para cada una de ellas, las posibilidades para f son $(\mu^\mu)^{M[G]} = (2^\mu)^{M[G]} < \kappa$, luego en definitiva

$$(\kappa^\mu)^{M[G]} = |{}^\mu\kappa|^{M[G]} \leq (\kappa^+\cdot\kappa)^{M[G]} = \kappa^+.$$

La desigualdad contraria es el teorema de König. ■

De aquí se sigue el teorema siguiente:

Teorema 5.39 (Teorema de Easton) *Si* ZFC *es consistente también lo es* ZFC *más cualquier sentencia que determine la función del continuo y que respete las condiciones siguientes:*

a) Monotonía: *Si $\kappa\leq\mu$ entonces $2^\kappa\leq 2^\mu$,*

b) Teorema de König: $\kappa < 2^{\operatorname{cf}\kappa}$,

c) HCS: *Si κ es singular, entonces* $2^\kappa = \begin{cases} 2^{<\kappa} & \text{si } \kappa<\operatorname{cf}2^{<\kappa},\\ (2^{<\kappa})^+ & \text{si } \kappa=\operatorname{cf}2^{<\kappa}.\end{cases}$

La propiedad c) es la consecuencia que tiene la HCS sobre la función del continuo, de modo que la extensión genérica del teorema 5.38 cumple c) porque cumple la HCS.

En realidad el enunciado del teorema de Easton no es exacto, pues hay que exigir que la sentencia en cuestión cumpla algunas condiciones. Por ejemplo, sería absurdo pretender que $2^{\aleph_0}$ fuera el mínimo cardinal fuertemente inaccesible. Lo que sucede es que si partimos de un modelo M que tenga un (mínimo) cardinal fuertemente inaccesible κ, podemos construir una función de Easton^M tal que $E(\aleph_0) = \kappa$, y en la extensión genérica correspondiente se cumplirá que $2^{\aleph_0} = \kappa$, sólo que κ ya no será fuertemente inaccesible. En definitiva, hay que exigir que si en un modelo M definimos una función de Easton E de acuerdo con la sentencia cuya consistencia queremos probar, la función E en una extensión genérica ha de cumplir lo mismo que le hemos pedido en M. Es más fácil comprobarlo en cada caso concreto que no tratar de dar condiciones generales sobre sentencias válidas. Esto sólo descarta sentencias obviamente contradictorias.

Por otra parte, el teorema 5.38 no permite probar exactamente el teorema de Easton tal y como lo hemos enunciado. Ello se debe a que hemos exigido que el dominio de una función de Easton sea un conjunto, lo que sólo nos capacita para modificar la función del continuo en un conjunto de cardinales regulares, y no en todos ellos. Esto puede resolverse de dos formas. Una de ellas (tal y como hizo Easton) es eliminar la restricción y trabajar con funciones de Easton definidas sobre todos los cardinales regulares. Esto hace que el producto de Easton sea una clase propia en M, es decir, no tenemos un $\mathbb{P}(E) \in M$, sino una fórmula relativizada a M que determina las condiciones de $\mathbb{P}(E)$. La teoría general sobre extensiones genéricas no es válida para preórdenes que sean clases propias. Así, no es posible probar en general que una extensión genérica de este tipo satisfaga el axioma de reemplazo o el axioma de partes. Sin embargo, las características concretas de los productos de Easton, en particular la posibilidad de factorizar según el teorema 5.35, permiten probar lo necesario en este caso concreto.

Hay otra posibilidad mucho más sencilla que exige tan sólo una hipótesis ligeramente más fuerte. Por ejemplo, supongamos que queremos probar la consistencia de que para todo cardinal regular κ se cumpla $2^\kappa = \kappa^{++}$. Partiendo de la HCG, esto exige modificar la función del continuo en todos los cardinales regulares. Para ello partimos de un modelo transitivo numerable M de ZFC+HGC que contenga un cardinal inaccesible μ. En M, definimos la función de Easton cuyo dominio es el conjunto de todos los cardinales regulares^M menores que μ y que venga dada por $E(\kappa) = \kappa^{++}$. Formamos el producto de Easton $\mathbb{P}(E)^M$ y la extensión correspondiente $M[G]$, de modo que en $M[G]$ se cumple $2^\kappa = \kappa^{++}$ para todo cardinal regular $\kappa < \mu$. Ahora bien, como $\mathbb{P}(E)^M$ conserva cardinales y cofinalidades, resulta que μ es fuertemente inaccesible$^{M[G]}$. Por consiguiente $N = V_\mu \cap M[G]$ es un modelo transitivo numerable de ZFC donde $2^\kappa = \kappa^{++}$ para todo cardinal regular κ, tal y como queríamos.

En resumen, para probar la consistencia de una sentencia que difiera de la HCG sobre una clase propia de cardinales basta suponer que existe un cardinal inaccesible μ, modificar la función del continuo bajo μ según el teorema 5.38 y luego quedarse con los conjuntos de rango menor que μ de la extensión. De todos modos, insistimos en que la hipótesis sobre el cardinal inaccesible puede eliminarse, y por ello no la hemos incluido en el enunciado del teorema de Easton.

Con esto queda probada la consistencia de cualquier determinación de la función del continuo sobre cardinales regulares que sea compatible con la monotonía y el teorema de König. Sin embargo, la función del continuo sobre los cardinales singulares en una extensión de Easton queda determinada por los valores que toma sobre los cardinales regulares a través de la propiedad c). Esto no significa que no haya otras posibilidades consistentes, sino únicamente que las técnicas que hemos desarrollado no bastan para justificar la consistencia de otras alternativas. Se conocen algunas alternativas consistentes, pero no un resultado general similar al teorema de Easton que diga cuáles son las restricciones necesarias y suficientes que ha de cumplir una determinación de la función del continuo sobre los cardinales singulares para que sea consistente.

5.6 Colapso de cardinales

En todos los ejemplos que hemos visto hasta ahora ha sido fundamental garantizar la conservación de todos los cardinales del modelo de partida. Sin embargo, también puede obtenerse resultados interesantes colapsando cardinales. El teorema siguiente es especialmente notable porque no requiere ninguna hipótesis sobre la aritmética del modelo base.

Teorema 5.40 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea κ un cardinal no numerable^M y $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\kappa, 2, \aleph_1)^M$. Si G es un filtro genérico, entonces $M[G]$ cumple $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.*

DEMOSTRACIÓN: Como $\mathbb{P}$ es $\aleph_1$-cerrado^M, el teorema 5.9 nos da que $\mathbb{P}$ conserva cardinales $\leq \aleph_1^M$, con lo que $\aleph_1^{M[G]} = \aleph_1^M$. Por otra parte 5.8 implica que $({}^\omega 2)^{M[G]} = ({}^\omega 2)^M$. Basta construir una aplicación $F : \aleph_1^M \longrightarrow ({}^\omega 2)^M$ suprayectiva que esté en $M[G]$, pues entonces $(|{}^\omega 2| \leq \aleph_1)^{M[G]}$.

Sea $f_G : \kappa \longrightarrow 2$ la función genérica. Definimos $F(\alpha)(n) = f_G(\alpha + n)$. Para probar la suprayectividad tomamos $h \in ({}^\omega 2)^M$. El conjunto

$$D_h = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee \alpha < \aleph_1^M \bigwedge n \in \omega(\alpha + n \in \mathcal{D}p \land p(\alpha + n) = h(n))\}$$

es denso en $\mathbb{P}$ y está en M, por lo que corta a G. Esto se traduce en que existe un $\alpha < \aleph_1^M$ tal que $\bigwedge n \in \omega \; f_G(\alpha + n) = h(n)$, es decir, $F(\alpha) = h$. ■

El ejemplo típico de c.p.o. colapsante es el siguiente:

Teorema 5.41 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC *y en M sean κ y μ dos cardinales tales que $\kappa < \mu$ y κ sea regular. Sea $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\kappa, \mu, \kappa)$ y sea G un filtro genérico. Entonces*

a) $\mathbb{P}$ conserva cardinales $\leq \kappa$.

b) Si $(\mu^{<\kappa} = \mu)^M$ entonces $\mathbb{P}$ conserva cardinales $\geq (\mu^+)^M$.

c) Si ν es un cardinal^M tal que $\kappa \leq \nu \leq \mu$, entonces $(|\nu| = \kappa)^{M[G]}$, es decir, todos los cardinales entre κ y μ se colapsan.

DEMOSTRACIÓN: a) es inmediato, pues $\mathbb{P}$ es κ-cerrado^M, luego conserva cardinales $\leq \kappa$.

Similarmente, bajo la hipótesis de b), el teorema 5.15 nos da que $\mathbb{P}$ cumple la condición de cadena $(\mu^+)^M$, luego conserva cardinales $\geq (\mu^+)^M$.

La aplicación genérica $f_G : \mu \longrightarrow \kappa$ es suprayectiva, luego $(|\mu| = \kappa)^{M[G]}$, y esto implica c). ■

Notemos que una condición suficiente para que se cumpla $\mu^{<\kappa} = \mu$ es que se cumpla la HCG y que $\kappa \leq \operatorname{cf} \mu$.

Ejercicio: Probar que si ZFC es consistente también lo es añadir como axioma la sentencia

$$|\aleph_1^L| = |\aleph_2^L| = \aleph_0 \land |\aleph_3^L| = |\aleph_4^L| = |\aleph_5^L| = \aleph_1 \land |\aleph_6^L| = |\aleph_7^L| = \aleph_2.$$

Sugerencia: Imitar la prueba de 5.27 pero con c.p.o.s colapsantes: primero se colapsa $\aleph_2$ haciéndolo numerable, luego $\aleph_5$ (que será $\aleph_3$ en la extensión previa) volviéndolo de cardinal $\aleph_1$ (o sea, $\aleph_3$ en la extensión original), y luego $\aleph_7$ (que será $\aleph_3$ en la extensión anterior). Antes hay que probar que si se parte de un modelo que cumple la HCG y se construye una extensión en las condiciones del teorema anterior, ésta sigue cumpliendo la HCG.

Los c.p.o.s considerados en el teorema anterior colapsan un segmento de cardinales hasta uno dado incluyendo a éste. Ahora veremos que es posible colapsar todos los cardinales en un segmento κ–μ conservando a μ (esto no es trivial si μ es un cardinal límite). Como aplicación veremos que $\aleph_1$ puede ser inaccesible en L.

Definición 5.42 Sean κ y μ dos cardinales. El *orden colapsante de Lévy* es el conjunto

$$\operatorname{Lv}(\kappa, \mu) = \{p \subset \kappa \times \mu \times \kappa \mid p \text{ es una función} \land |p| < \mu \land$$
$$\textstyle\bigwedge \alpha\beta((\alpha, \beta) \in \mathcal{D}p \to p(\alpha, \beta) < \alpha)\}.$$

Consideramos en $\operatorname{Lv}(\kappa, \mu)$ el orden dado por $p \leq q \leftrightarrow q \subset p$. Así resulta ser un c.p.o. con máximo $\mathbb{1} = \varnothing$.

Teorema 5.43 *Sean $\mu < \kappa$ cardinales regulares tales que o bien $\mu = \omega$ o bien κ es inaccesible. Entonces el c.p.o.* $\operatorname{Lv}(\kappa, \mu)$ *cumple la condición de cadena κ.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\alpha < \kappa$ entonces

$$|\alpha^{<\mu}| = |\alpha|^{<\mu} = \sum_{\nu < \mu} |\alpha|^\nu \leq \sum_{\nu < \mu} |\alpha|^\mu \leq \mu\, 2^{|\alpha|\mu} < \kappa,$$

en el caso en que κ sea inaccesible (y si $\mu = \omega$ la desigualdad es trivial). Por consiguiente κ y μ están en las hipótesis del lema de los sistemas Δ (teorema 5.12).

Si $\{p_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ es una anticadena en $\operatorname{Lv}(\kappa, \mu)$, sea $A = \{\mathcal{D}p_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$. Si $|A| < \kappa$ ha de existir un $x \subset \kappa$ con $|x| = \kappa$ y de modo que todas las condiciones $\{p_\alpha\}_{\alpha \in x}$ tienen el mismo dominio r.

Si, por el contrario, $|A| = \kappa$, el lema de los sistemas Δ nos da un $x \subset \kappa$ con $|x| = \kappa$ tal que los dominios de las condiciones $\{p_\alpha\}_{\alpha \in x}$ son una familia cuasidisjunta de raíz r.

En ambos casos tenemos que la intersección de los dominios de dos condiciones distintas cualesquiera de $\{p_\alpha\}_{\alpha \in x}$ es un conjunto fijo $r \subset \kappa \times \mu$ tal que $|r| < \mu < \kappa$. Sea $\sigma = \sup\{\alpha \in \kappa \mid \bigvee \beta \in \mu\, (\alpha, \beta) \in r\}$. Claramente $\sigma < \kappa$ y en consecuencia $|{}^r\sigma| < \kappa$ si κ es inaccesible (y también si $\mu = \omega$, pues entonces r es finito).

Descomponemos

$$\{p_\alpha \mid \alpha \in x\} = \bigcup_{u \in {}^r\sigma} \{p_\alpha \mid \alpha \in x \wedge p_\alpha|_r = u\}.$$

Como κ es un cardinal regular ha de existir un $u \in {}^r\sigma$ tal que el conjunto $\{p_\alpha \mid \alpha \in x \wedge p_\alpha|_r = u\}$ tenga cardinal κ. En particular existirán dos ordinales α, $\beta \in x$ tales que $\alpha \neq \beta$. Así, $p_\alpha \neq p_\beta$, $p_\alpha|_r = p_\beta|_r$ y $\mathcal{D}p_\alpha \cap \mathcal{D}p_\beta = r$. Es claro entonces que p_α y p_β son compatibles, en contradicción con el supuesto de que forman parte de una anticadena.

Hemos probado que en $\mathrm{Lv}(\kappa, \mu)$ no hay anticadenas de cardinal κ, luego cumple la condición de cadena κ. ■

La prueba del teorema siguiente es idéntica a la de 5.16:

Teorema 5.44 *Si μ es un cardinal regular, entonces* $\mathrm{Lv}(\kappa, \mu)$ *es μ-cerrado.*

Con esto ya podemos determinar el comportamiento de los cardinales en las extensiones del orden de Lévy:

Teorema 5.45 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC *y sean $\mu < \kappa$ cardinales regulares^M tales que $\mu = \omega$ o bien κ es inaccesible^M. Sea $\mathbb{P} = \mathrm{Lv}(\kappa, \mu)^M$ y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces*

a) $\mathbb{P}$ conserva cardinales y cofinalidades $\leq \mu$ y $\geq \kappa$.

b) Si ν es un cardinal^M tal que $\mu < \nu < \kappa$ entonces $|\nu|^{M[G]} = \mu$, luego $(\kappa = \mu^+)^{M[G]}$

Demostración: El apartado a) es consecuencia de los teoremas anteriores junto con 5.6 y 5.9.

b) Sea $f_G = \bigcup\limits_{p \in G} p \in M[G]$. El argumento usual nos da que $f_G : \kappa \times \mu \longrightarrow \kappa$, pero la definición de $\mathbb{P}$ implica además que si $\alpha < \kappa$ entonces f_G determina una aplicación $f_\alpha : \mu \longrightarrow \alpha$ mediante $f_\alpha(\beta) = f_G(\alpha, \beta)$. Las aplicaciones f_α son suprayectivas, pues el conjunto

$$D_{\alpha\gamma} = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee \beta \in \mu\, (\alpha, \beta, \gamma) \in p\} \in M$$

es denso en $\mathbb{P}$ para todo $\gamma < \alpha$, de donde se sigue que γ tiene una antiimagen β por f_α. Así pues, $|\alpha|^{M[G]} \leq \mu$ y si $\mu \leq \alpha < \kappa$ entonces $|\alpha|^{M[G]} = \mu$. ■

La prueba del teorema siguiente es similar a la del teorema 5.23. Lo dejamos a cargo del lector:

Teorema 5.46 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC *y $\mu < \kappa$ cardinales regulares^M tales que κ es inaccesible^M. Sea $\mathbb{P} = \mathrm{Lv}(\kappa, \mu)^M$, sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y ν un cardinal$^{M[G]}$. Entonces*

$$(2^\nu)^{M[G]} = \begin{cases} \min\{\mu, (2^\nu)^M\} & si\ \nu < \mu, \\ \kappa & si\ \nu = \mu, \\ (2^\nu)^M & si\ \nu \geq \kappa. \end{cases}$$

En particular, si M cumple la HCG*, también la cumple $M[G]$.*

Ahora es muy fácil probar la consistencia de que $\aleph_1$ sea inaccesible^L (supuesta la consistencia de que existan cardinales inaccesibles). Es decir, vamos a probar que es consistente que, para alguien que viva en L, el cardinal que nosotros llamamos $\aleph_1$ no sea el primer cardinal no numerable, sino que haya muchos otros cardinales anteriores a él (cardinales^L, naturalmente, es decir, ordinales numerables que no pueden biyectarse con ordinales anteriores mediante una biyección constructible). En particular tendremos que $\aleph_1^L$, $\aleph_2^L$, $\aleph_\omega^L$, $\aleph_{\omega_5}^L$, son todos ordinales numerables, pues $\aleph_1$, $\aleph_2$, etc. son menores que cualquier cardinal inaccesible.

Teorema 5.47 *Si* ZFC+($\bigvee\kappa$ *κ es inaccesible) es consistente, también lo es* ZFC + $\aleph_1$ *es inaccesible^L. De hecho esta teoría es equiconsistente con las consideradas en* 5.26.

Demostración: Si ZFC+($\bigvee\kappa$ κ es inaccesible) es consistente, también lo es ZFC $+V = L +$ ($\bigvee\kappa$ κ es inaccesible). Trabajando en esta teoría el teorema de reflexión nos da un modelo transitivo numerable de la misma, llamémoslo M. Notemos que κ es fuertemente inaccesible^M por la HCG. Sea $\mathbb{P} = \mathrm{Lv}(\kappa, \aleph_0)^M$ y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Por el teorema anterior $\kappa = \aleph_1^{M[G]}$.

De este modo tenemos que $\aleph_1^{M[G]}$ es inaccesible^M o, lo que es lo mismo, $\aleph_1^{M[G]}$ es (inaccesible^L)$^{M[G]}$. A su vez esto equivale a ($\aleph_1$ es inaccesible^L)$^{M[G]}$. ■

5.7 Construcción de árboles de Suslin

En [TC 9.14] se muestra la construcción de un árbol de Suslin a partir de una sucesión $\diamondsuit$. Vamos a ver ahora que también se pueden construir a partir de una función genérica $f : \omega \longrightarrow \omega$, lo que nos da la consistencia de $\neg$HS + $\neg$HC.

Teorema 5.48 *Si $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega, 2, \aleph_0)$, entonces $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \neg$HS.*

Demostración: Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Sea $f = \bigcup G : \omega \longrightarrow 2$ la función genérica, $f \in M[G]$.

En [TC 9.19] se construye una sucesión $\{s_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ de funciones inyectivas $s_\alpha : \alpha \longrightarrow \omega$ con la propiedad de que si $\alpha < \beta < \omega_1$ entonces s_α y $s_\beta|_\alpha$

coinciden salvo a lo sumo en un número finito de ordinales. Consideramos una sucesión en M con estas características y sea

$$T = \bigcup_{\alpha<\omega_1^M} \{s \in {}^{\alpha}\omega \mid s \text{ inyectiva} \land |\{\delta < \alpha \mid s(\delta) \neq s_\alpha(\delta)\}| < \aleph_0\} \in M,$$

que es un $\aleph_1$-árbol en M con la inclusión (notemos que sus niveles son ciertamente numerables).

En $M[G]$ consideramos el $\aleph_1$-árbol $T_f = \{s \circ f \mid s \in T\} \subset {}^{<\omega_1^M}2$. Vamos a probar que es un árbol de Suslin.

Observemos que si $A \in M$ y $X \subset A$, $X \in M[G]$ es no numerable$^{M[G]}$, existe un $Y \subset X$, $Y \in M$ tal que Y es no numerable$^{M[G]}$.

En efecto, si $X = \sigma_G$, para cada $a \in X$, existe $p_a \in G$ tal que $p_a \Vdash \check{a} \in \sigma$, pero $\mathbb{P}$ es numerable$^{M[G]}$, luego existe $Y_0 \subset X$ no numerable$^{M[G]}$ tal que todas las condiciones p_a, con $a \in Y_0$ coinciden con una misma condición $p \in G$. En principio tenemos que $Y_0 \in M[G]$, pero

$$Y = \{a \in A \mid p \Vdash \check{a} \in \sigma\} \in M$$

cumple $Y_0 \subset Y \subset X$.

Veamos que las anticadenas de T_f son numerables en $M[G]$. Para ello sea $W \subset T_f$ un conjunto $W_f \in M[G]$ no numerable$^{M[G]}$ y vamos a ver que no es una anticadena. Sea $W \subset T$, $W \in M[G]$, tal que $W_f = \{s \circ f \mid s \in W\}$. Más precisamente, podemos suponer que $s \mapsto s \circ f$ es inyectiva, es decir, que tomamos un único $s \in W$ para cada elemento de W_f. Por la observación precedente existe $W_0 \in M$ no numerable^M tal que $W_0 \subset W$. Equivalentemente, podemos suponer que $W \in M$ y es no numerable, tanto en M como en $M[G]$.

Consideremos una condición $p \in \mathbb{P}$. Extendiéndola si es preciso, podemos suponer que $p \in {}^n2$. Para cada $s \in W$, sea $X_s = \{\delta \in \mathcal{D}s \mid s(\delta) < n\}$, que es un conjunto finito. Por el lema de los sistemas Δ existe $W' \subset W$ tal que $\{X_s\}_{s\in W'}$ es una familia cuasidisjunta de raíz $r \subset \omega_1$ (o bien todos los X_s son iguales a r). Restringiendo aún más W' podemos suponer que todos los $s|_r$ son iguales, para $s \in W'$.

Fijado $s_1 \in W'$, digamos $s_1 : \beta_1 \longrightarrow \omega$, sólo puede haber una cantidad numerable de elementos $s_2 \in W'$ tales que $(X_{s_2} \setminus r) \cap \beta_1 \neq \varnothing$, pues los conjuntos $X_{s_2} \setminus r$ son disjuntos dos a dos. Por consiguiente, podemos tomar $s_2 \in W'$, digamos $s_2 : \beta_2 \longrightarrow \omega$, tal que $\beta_1 < \beta_2$ y $(X_{s_2} \setminus r) \cap \beta_1 = \varnothing$.

Sea $m \in \omega$ que sea mayor que $s_1(\delta)$ y $s_2(\delta)$ para el número finito de ordinales $\delta < \beta_1$ en los que discrepan s_1 y s_2. Vamos a probar que existe una condición $q \leq p$ tal que $m \subset \mathcal{D}q$ y $s_2|_{\beta_1} \circ q = s_1 \circ q$.

En efecto: si $\delta < \beta_1$ cumple que $s_1(\delta) \neq s_2(\delta)$, entonces $n \leq s_2(\delta) < m$, pues en caso contrario $\delta \in X_{s_2} \cap \beta_1$, luego $\delta \in r$ y $s_1|_r = s_2|_r$.

Equivalentemente, si $n \leq k < m$ y existe un $\delta < \beta_1$ tal que $s_1(\delta) = k$, necesariamente $n \leq s_2(\delta) < m$ (bien porque $s_2(\delta) = s_1(\delta) = k < m$ o por la observación precedente).

Si existe un $\delta_1 < \beta_1$ tal que $s_2(\delta_1) = k$, calculamos $k_1 = s_1(\delta_1) < m$. Si $k_1 \geq n$ y existe un $\delta_2 < \beta_1$ tal que $s_2(\delta_2) = k_1$, calculamos $s_1(\delta_2) = k_2$. Si tras un número finito de pasos llegamos a un $k_l < n$, definimos $q(k) = p(k_l)$ y en caso contrario $q(k) = 0$.

De este modo, si $\delta_1 < \beta_1$ cumple que $s_2(\delta_1) = k \neq k_1 = s_1(\delta_1)$, entonces $q(k) = q(k_1)$, luego q cumple lo pedido.

Con esto hemos probado que el conjunto

$$D = \{q \in \mathbb{P} \mid \bigvee s_1 s_2 \in W \bigvee \beta_1\beta_2(s_1 : \beta_1 \longrightarrow \omega \land s_2 : \beta_2 \longrightarrow \omega \land \beta_1 < \beta_2 \land$$

$$\bigwedge \delta < \beta_1(s_1(\delta) \neq s_2(\delta) \to s_1(\delta), s_2(\delta) \in \mathcal{D}q \land q(s_1(\delta)) = q(s_2(\delta))))\} \in M$$

es denso en $\mathbb{P}$, luego corta a G, lo que se traduce en que existen funciones distintas $s_1, s_2 \in W$ de dominios $\beta_1 < \beta_2$ tales que $s_2|_{\beta_1} \circ f = s_1 \circ f$, pero esto significa que $s_1 \circ f \leq s_2 \circ f$, luego W_f no es una anticadena.

Por [TC 9.9], para probar que T_f es un árbol de Suslin basta probar que está ramificado, es decir, que todo $s_0 \circ f \in T_f$ tiene extensiones incompatibles.

Sea $p \in \mathbb{P}$. Extendiéndola podemos suponer que $p \in {}^n2$. Claramente podemos tomar $s_1, s_2 \in T$ que extiendan a s_0 y de modo que exista un $\delta \in \mathcal{D}s_1 \cap \mathcal{D}s_2$ tal que $s_1(\delta) \neq s_2(\delta)$, $s_1(\delta), s_2(\delta) > n$. A su vez, podemos extender p a una condición $q \leq p$ tal que $q(s_1(\delta)) \neq q(s_2(\delta))$. Por lo tanto, el conjunto

$$E = \{q \in \mathbb{P} \mid \bigvee s_1 s_2 \in T(s_0 \leq s_1 \land s_0 \leq s_2 \land \bigvee \delta \in \mathcal{D}s_1 \cap \mathcal{D}s_2$$

$$(s_1(\delta) \neq s_2(\delta) \land s_1(\delta), s_2(\delta) \in \mathcal{D}q \land q(s_1(\delta)) \neq q(s_2(\delta))))\} \in M$$

es denso en $\mathbb{P}$, luego corta a G, luego existen $s_1, s_2 \in T$ tales que $s_0 \leq s_1, s_2$ y existe un $\delta \in \mathcal{D}s_1 \cap \mathcal{D}s_2$ tal que $f(s_1(\delta)) \neq f(s_2(\delta))$, luego $s_1 \circ f$ y $s_2 \circ f$ son extensiones incompatibles de $s_0 \circ f$. ■

Como las extensiones genéricas mediante $\mathrm{Fn}(\omega, 2, \aleph_0)$ tienen los mismos cardinales, las mismas cofinalidades y la misma función del continuo del modelo base, tenemos que $\neg$HS es consistente con cualquier determinación de la función del continuo cuya consistencia sepamos probar. En particular, teniendo en cuenta que

$$\mathrm{Fn}(\mu, 2, \aleph_0) \cong \mathrm{Fn}(\mu \setminus \omega, 2, \aleph_0) \times \mathrm{Fn}(\omega, 2, \aleph_0),$$

vemos que en las extensiones genéricas obtenidas mediante $\mathrm{Fn}(\mu, 2, \aleph_0)$ hay árboles de Suslin.

Como aplicación vamos a probar a consistencia de que $\mathfrak{t} = \aleph_1 < \mathfrak{c}$ (recordemos que $\mathfrak{t}$ está definido en [TC 8.3]):

Teorema 5.49 *Si T es un árbol de Suslin y $\mathbb{P}$ es T con el orden inverso, entonces $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \mathfrak{t} = \aleph_1$.*

DEMOSTRACIÓN: Observemos que podemos construir un árbol de Suslin T' isomorfo a T cuyos nodos sean elementos de $[\omega]^{\aleph_0}$ y en el que el orden sea la inversa de $\subset^*$. Para ello llamamos T_α al conjunto de los elementos de T de altura $\leq \alpha$ y vamos a ir definiendo una sucesión creciente de árboles T'_α junto con isomorfismos $j_\alpha : T_\alpha \longrightarrow T'_\alpha$, para $\alpha < \omega_1$. Cada nivel de T'_α será una familia de subconjuntos infinitos de ω casi disjuntos dos a dos (es decir, con intersección finita).

Podemos suponer que T tiene una única raíz (añadiéndole un mínimo si hace falta). Así, podemos definir $T'_0 = \{\omega\}$, con el isomorfismo obvio.

Supuesto definido $j_\alpha : T_\alpha \longrightarrow T'_\alpha$, cada elemento $p \in T_\alpha$ de altura α puede tener por encima a lo sumo una cantidad numerable de elementos de altura $\alpha+1$, y $j_\alpha(p)$ es un conjunto infinito, que puede dividirse en una cantidad finita o numerable de subconjuntos infinitos disjuntos dos a dos, que pueden hacerse corresponder con las extensiones de p, lo que nos permite extender j_α a un isomorfismo $j_{\alpha+1} : T_{\alpha+1} \longrightarrow T'_{\alpha+1}$.

Si tenemos definidos los isomorfismos $j_\delta : T_\delta \longrightarrow T'_\delta$ para todo $\delta < \lambda$, de modo que cada uno extiende a los anteriores, empezamos formando el isomorfismo $j^*_\lambda = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} j_\delta : \bigcup\limits_{\delta<\lambda} T_\delta \longrightarrow \bigcup\limits_{\delta<\lambda} T'_\delta$, pero tenemos que extenderlo a los elementos de altura λ para que el dominio sea T_λ. Cada $p \in T_\lambda$ de altura λ tiene por debajo una cadena C que se corresponde a través de j^*_λ con una torre que no puede ser inextensible (porque es numerable), luego existe un conjunto infinito $j^*_\lambda(C)$ que la prolonga. Ahora bien, en principio diferentes condiciones p (pero sólo una cantidad numerable de ellas) podrían tener por debajo la misma cadena C, por lo que hay que partir $j^*_\lambda(C)$ en tantos conjuntos infinitos disjuntos dos a dos como sea necesario para asignar uno a cada condición p sobre C. Esto define el isomorfismo j_λ.

Por último, uniendo todos los isomorfismos j_α obtenemos el isomorfismo $j : T \longrightarrow T'$ requerido. Podemos cambiar T por T' y suponer directamente que T está formado por abiertos infinitos en ω con el orden dado por la inversa de $\subset^*$. Por lo tanto el orden de $\mathbb{P}$ es $\subset^*$.

Si relativizamos todo esto a un modelo M y tomamos un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces $G = \{A_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ es una torre. Basta probar que es una inextensible. En efecto, en caso contrario existe un $A \subset \omega$ infinito casi contenido en todos los A_α. En principio $A \in M[G]$, pues tendríamos una contradicción si $A \in M$, ya que entonces podríamos definir $G = \{p \in T \mid A \subset^* p\}$, con lo que T tendría un camino en M, en contradicción con que era un árbol de Suslin en M. Ahora bien, el teorema siguiente nos permite probar que $A \in M$, y con esto tenemos la contradicción buscada. ■

Teorema 5.50 *Si M es un modelo transitivo numerable de* ZFC, *T es un árbol de Suslin en M y $\mathbb{P}$ es T con el orden inverso, entonces, si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, se cumple $(\mathcal{P}\omega)^{M[G]} = (\mathcal{P}\omega)^M$.*

Demostración: Sea $A \in (\mathcal{P}\omega)^{M[G]}$ y sea $f : \omega \longrightarrow A$ suprayectiva, con $f \in M[G]$. Sea $f = \sigma_G$, de modo que $\mathbb{1} \Vdash \sigma : \omega \longrightarrow \omega$.

Para cada $n \in \omega$, existe $p_n \in G$ tal que $p_n \Vdash \sigma(\check{n}) = \check{k}$, donde $k = f(n)$. La sucesión $\{p_n\}_{n\in\omega}$ puede tomarse en $M[G]$. Como es numerable, las alturas de las condiciones p_n estarán acotadas por un $\alpha < \omega_1^{M[G]} = \omega_1^M$. Pero, por genericidad, G tiene elementos de todas las alturas posibles (es un camino en el árbol T), luego existe una condición $p \in G$ de altura mayor que todas las p_n, es decir, $p \leq p_n$ para todo n. Pero entonces

$$A = \{k \in \omega \mid p \Vdash \bigvee n \in \omega\ p \Vdash \sigma(\check{n}) = \check{k}\} \in M.$$

■

Así pues, si partimos de un modelo con un árbol de Suslin en el que $\mathfrak{c}$ sea grande, obtenemos otro modelo en el que $\mathfrak{t} = \aleph_1 < \mathfrak{c}$.

5.8 Diamantes y la hipótesis de Kurepa

Veamos que también podemos probar la consistencia del diamante de Jensen mediante una extensión genérica:

Teorema 5.51 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC*, consideremos $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega_1, 2, \aleph_1)^M$ y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces se cumple $\diamondsuit^{M[G]}$. Si $(2^{\aleph_0} = \aleph_1)^M$, entonces $\mathbb{P}$ conserva cardinales y cofinalidades y la función del continuo es la misma en M y en $M[G]$.*

Demostración: Sea $X = \{(\alpha, \beta) \mid \beta < \alpha < \omega_1^M\}$ y sea $\mathbb{Q} = \mathrm{Fn}(X, 2, \aleph_1)^M$. Como $(|X| = \aleph_1)^M$, resulta que $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son semejantes^M, luego $M[G]$ puede obtenerse también a partir de $\mathbb{Q}$. Así pues, supondremos que G es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M.

Como $\mathbb{Q}$ es $\aleph_1$-cerrado en M es fácil ver (usando 5.8) que $\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$. Por simplificar la notación escribiremos ω_1 para referirnos a este ordinal numerable (en ningún momento necesitaremos nombrar al ω_1 real). Así mismo es claro que $\mathcal{P}\omega \cap M = \mathcal{P}\omega \cap M[G]$.

Sea $f_G : \omega_1 \times \omega_1 \longrightarrow 2$ la aplicación genérica construida a partir de G (es decir, la unión de las condiciones en G). Por la definición de $\mathbb{Q}$ es claro que si definimos $f_G^\alpha(\beta) = f(\alpha, \beta)$ entonces $f_G^\alpha : \alpha \longrightarrow 2$ (aquí usamos de forma estándar que G es genérico). Definimos los conjuntos $A_\alpha = \{\beta < \alpha \mid f_G^\alpha(\beta) = 1\}$. Puesto que $G \in M[G]$ es claro que $\{A_\alpha\}_{\alpha<\omega_1} \in M[G]$. Vamos a probar que es una sucesión $\diamondsuit$ en $M[G]$.

En caso contrario existen B, $C \in M[G]$ tales que $B \subset \omega_1$, C es c.n.a. en ω_1 y el conjunto $\{\alpha < \omega_1 \mid B \cap \alpha = A_\alpha\}$ no corta a C. Sea $\tau_G : \omega_1 \longrightarrow 2$ la función característica de B y sea $C = \sigma_G$, con σ, $\tau \in M^{\mathbb{Q}}$. Sea Γ el nombre canónico de G definido en 4.16. Sea $p \in \mathbb{Q}$ tal que

$$p \Vdash (\tau : \omega_1 \longrightarrow 2 \land \sigma \text{ es c.n.a. en } \check{\omega}_1 \land \bigwedge \alpha \in \sigma\ \tau|_\alpha \neq f_\Gamma^\alpha).$$

Si $q \in \mathbb{Q}$, llamaremos *soporte* de q (abreviado $\operatorname{sop} q$) al mínimo ordinal $\beta < \omega_1$ tal que $\mathcal{D}q \subset \{(\alpha, \delta) \mid \delta < \alpha < \beta\}$. Construimos en M sucesiones $\{p_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\delta_n\}$ y $\{b_n\}$, con $n \in \omega$, de modo que

a) $p_0 = p$,

b) $\beta_n = \operatorname{sop} p_n$,

c) $\beta_n < \delta_n < \beta_{n+1}$,

d) $p_{n+1} \leq p_n$,

e) $p_{n+1} \Vdash \delta_n \in \sigma$,

f) $b_n : \beta_n \longrightarrow 2$ y $p_{n+1} \Vdash \tau|_{\check{\beta}_n} = \check{b}_n$.

Esto es posible, pues si tenemos p_n, β_n, δ_{n-1} y b_{n-1} que cumplan estas propiedades, como $p_n \leq p$, tenemos que $p \Vdash \sigma$ es c.n.a. en $\check{\omega}_1$, y por consiguiente $p_n \Vdash \bigvee x \in \check{\omega}_1(\check{\beta}_n < x \wedge x \in \sigma)$. Por 4.47 i) existen $q \leq p_n$ y $\delta_n \in \omega_1$ tales que $q \Vdash (\check{\beta}_n < \check{\delta}_n \wedge \check{\delta}_n \in \sigma)$.

Sea r una extensión de q con $\operatorname{sop} r > \delta_n$. Sea $F = ({}^{\beta_n}2)^M$. Como $\mathbb{Q}$ es $\aleph_1$-cerrado en M, se cumple que $r \Vdash \tau|_{\check{\beta}_n} \in \check{F}$ o, expresado en otros términos, $r \Vdash \bigvee x \in \check{F}\ \tau|_{\check{\beta}_n} = x$. Aplicando de nuevo 4.47 i) tenemos que existen $b_n \in F$ y $p_{n+1} \leq r \leq p_n$ de modo que $p_{n+1} \vDash \tau|_{\check{\beta}_n} = \check{b}_n$. Tomando $\beta_{n+1} = \operatorname{sop} p_{n+1}$ es claro que p_{n+1}, β_{n+1}, δ_n y b_n cumplen las propiedades anteriores.

Como $\beta_0 < \delta_0 < \beta_1 < \delta_1 < \cdots$, se cumple que las sucesiones $\{\beta_n\}$ y $\{\delta_n\}$ tienen el mismo supremo γ. Sea $p' = \bigcup\limits_{n\in\omega} p_n \in \mathbb{Q}$. Claramente $\operatorname{sop} p' = \gamma$ y, como p' extiende a todas las condiciones p_n, resulta que $p' \Vdash \tau|_{\check{\beta}_n} = \check{b}_n$ para todo $n \in \omega$. Considerando una extensión por un filtro que contenga a p' concluimos que cada b_{n+1} extiende a b_n, que $b' = \bigcup\limits_{n\in\omega} b_n$ cumple $b' : \gamma \longrightarrow 2$ y además que $p' \Vdash \tau|_{\gamma'} = \check{b}'$.

Como $\operatorname{sop} p' = \gamma$, en p' no hay pares de la forma (γ, ϵ), luego podemos extender p' a una condición s tal que $s(\gamma, \epsilon) = b'(\epsilon)$ para todo $\epsilon < \gamma$. De este modo $s \Vdash \tau|_{\check{\gamma}} = f_\Gamma^{\check{\gamma}}$. Además $s \leq p'$, luego $s \Vdash \sigma$ es c.n.a. en $\check{\omega}_1$ y para todo $n \in \omega$, se cumple que $s \Vdash \check{\delta}_n \in \sigma$. De aquí se sigue que $s \Vdash \check{\gamma} \in \sigma$.

En definitiva, $s \Vdash \bigvee \gamma \in \sigma\ \tau|_\gamma = f_\Gamma^\gamma$, cuando por otra parte $s \leq p$ y p fuerza lo contrario. Con esta contradicción queda probado $\Diamond^{M[G]}$.

Si M cumple la hipótesis del continuo entonces $\mathbb{P}$ cumple la c.c. $\aleph_2$ en M y por 5.17 conserva cardinales y cofinalidades. Además, $(|\mathbb{P}| = \aleph_1)^M$, el número^M de anticadenas en $\mathbb{P}$ es a lo sumo $(2^{\aleph_1})^M$ y si κ es un cardinal no numerable^M, según el teorema 5.20, el número^M de buenos nombres^M para subconjuntos de $\check{\kappa}$ es a lo sumo $((2^{\aleph_1})^\kappa)^M = (2^\kappa)^M$. Según 5.22, esto implica que $(2^\kappa)^{M[G]} \leq (2^\kappa)^M$, y la otra desigualdad es obvia. Por lo tanto la función del continuo en M es la misma que en $M[G]$. ■

De aquí deducimos que $\Diamond$ no implica, por ejemplo, que $2^{\aleph_1} = \aleph_2$. Ahora demostramos que $\Diamond$ no implica $\Diamond^+$:

Teorema 5.52 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC+HCG, *consideremos $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega_2, 2, \aleph_1)^M$ y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces $M[G]$ cumple* HCG $+\Diamond + \neg\Diamond^+$.

Demostración: Por 5.23 sabemos que $\mathbb{P}$ conserva cardinales y cofinalidades y que $M[G]$ cumple la HCG. Como sólo vamos a considerar cardinales en M y en $M[G]$, por simplicidad omitiremos las relativizaciones, de modo que, por ejemplo, ω_1 representará en lo sucesivo a $\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$.

Ahora observamos que en ZFC se prueba que

$$\mathrm{Fn}(\omega_2, 2, \aleph_1) \cong \mathrm{Fn}(\omega_2 \setminus \omega_1, 2, \aleph_1) \times \mathrm{Fn}(\omega_1, 2, \aleph_1) \cong \mathrm{Fn}(\omega_2, 2, \aleph_1) \times \mathrm{Fn}(\omega_1, 2, \aleph_1).$$

Por lo tanto, $\mathbb{P} \cong^M \mathbb{P} \times \mathbb{Q}$, donde $\mathbb{Q} = \mathrm{Fn}(\omega_1, 2, \aleph_1)^M$, y por el teorema del producto, $M[G] = M[G_1][G_2]$, donde G_1 es $\mathbb{P}$-genérico sobre M y G_2 es $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[G_1]$. En particular $M[G_1]$ cumple la HCG.

Como $\mathbb{P}$ es $\aleph_1$-cerrado en M, es claro que $\mathbb{Q} = \mathrm{Fn}(\omega_1, 2, \aleph_1)^{M[G_1]}$, por lo que el teorema anterior nos da $\diamondsuit^{M[G]}$. Veamos ahora $\neg(\diamondsuit^+)^{M[G]}$.

Supongamos que $\{S_\alpha\}_{\alpha<\omega_1} \in M[G]$ es una sucesión $\diamondsuit^+$ en $M[G]$. Por el teorema 5.8, si $A \subset \alpha < \omega_1$, con $A \in M[G]$, de hecho $A \in M$, luego, para cada $\alpha < \omega_1$, tenemos que $S_\alpha \subset M$. Más aún, como $(|S_\alpha| < \omega_1)^{M[G]}$, también $S_\alpha \in M$. Por lo tanto, $S : \omega_1 \longrightarrow ([\omega_1]^{<\aleph_1})^M$, luego $S = \sigma_G$, donde $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ es un buen nombre para un subconjunto de (el nombre canónico de) $(\omega_1 \times [\omega_1]^{<\aleph_1})^M$.

Este conjunto tiene cardinal $\aleph_1$ en M, luego (siempre en M) se cumple que $\mathcal{R}\sigma$ es una unión de $\aleph_1$ anticadenas de $\mathbb{P}$, todas las cuales tienen a lo sumo cardinal $\aleph_1$, luego $|\mathcal{R}\sigma| \leq \aleph_1$, y $\mathcal{D}\sigma$ está formado por $\aleph_1$ nombres canónicos. Por otra parte, para cada $\alpha < \omega_1$ existe $p_\alpha \in G$ tal que $p_\alpha \Vdash \sigma(\check{\alpha}) = \check{S}_\alpha$. La elección de los p_α se hace en $M[G]$, y nos permite encontrar un ordinal $\theta < \omega_2$ tal que tanto σ como todos los p_α son $\mathbb{Q}$-nombres, donde $\mathbb{Q} = \mathrm{Fn}(\theta, 2, \omega_1)^M$.

Ahora usamos que, en M, se cumple $\mathbb{P} \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{P}'$, donde $\mathbb{P}' = \mathrm{Fn}(\omega_2 \setminus \theta, 2, \omega_1)$, por lo que $M[G] = M[G_1][G_2]$, donde $G_1 = G \cap \mathbb{Q}$ es $\mathbb{Q}$-genérico sobre M y $G_2 = G \cap \mathbb{P}'$ es $\mathbb{P}'$-genérico sobre $M[G_1]$.

Tenemos entonces que $p_\alpha \in G \cap \mathbb{Q} = G_1$, y el teorema 4.39 (apartado a) nos da que $p_\alpha \Vdash_{\mathbb{Q}} \sigma(\check{\alpha}) = \check{S}_\alpha$, luego $S = \sigma_{G_1} \in M[G_1]$.

Por otra parte, en $M[G_1]$ se cumple que $\mathbb{P}' \cong \mathrm{Fn}(\omega_2, 2, \aleph_1)^{M[G_1]} = \mathbb{P}$, donde la última igualdad se debe a que $\mathbb{Q}$ es $\aleph_1$-cerrado en M. Por lo tanto, $M[G]$ es también una extensión genérica de $M[G_1]$ a través de un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $M[G_1]$. Por lo tanto, cambiando M por $M[G_1]$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\{S_\alpha\}_{\alpha<\omega_1} \in M$.

Pasamos ya a probar que no cumple $(\diamondsuit^+)^{M[G]}$. Para ello consideramos $f_G = \bigcup G : \omega_2 \longrightarrow 2$ y $A = \{\delta < \omega_1 \mid f_G(\delta) = 1\} \subset \omega_1$. Si la sucesión cumpliera $(\diamondsuit^+)^{M[G]}$ existiría un $C \in M[G]$, c.n.a. en ω_1, tal que

$$\bigwedge \alpha \in C \; A \cap \alpha \in S_\alpha.$$

Pongamos que $C = \tau_G$ y sea $p_0 \in G$ tal que $p_0 \Vdash \tau$ no está acotado en $\check{\omega}_1$. Sea

$$D = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee \alpha < \omega_1 (p \Vdash \check{\alpha} \in \tau \land \alpha \subset \mathcal{D}p \land \{\delta \in \alpha \mid p(\alpha) = 1\} \notin S_\alpha)\} \in M.$$

Basta probar que D es denso bajo p_0, pues entonces existe un $p \in D \cap G$, lo que se traduce a su vez en que existe un $\alpha \in C$ tal que $A \cap \alpha \notin S_\alpha$.

En efecto, razonando en M, tomamos $q \leq p_0$ y tenemos que encontrarle una extensión en D. Como q es numerable^M, existe un $\beta < \omega_1$ tal que $\omega_1 \cap \mathcal{D}q < \beta$. Como $q \Vdash \bigvee \alpha < \check{\omega}_1\ (\check{\beta} + \omega < \alpha \wedge \alpha \in \tau)$, existe un α tal que $\beta + \omega < \alpha < \omega_1$ y $q \Vdash \check{\alpha} \in \tau$, y cualquier extensión $p \leq q$ cumplirá también $p \Vdash \check{\alpha} \in \tau$.

Consideramos todas las extensiones $p \leq q$ que cumplen $\alpha \subset \mathcal{D}p$. Teniendo en cuenta que $\alpha \setminus \beta$ es infinito, es claro que los conjuntos $\{\delta \in \alpha \mid p(\alpha) = 1\}$ que se forman con todas ellas forman una familia no numerable, mientras que S_α es numerable, por lo que es posible elegir una extensión p que cumpla $p \in D$. ∎

Notemos que en realidad con el teorema anterior hemos demostrado la consistencia de HCG $+\Diamond + \neg\Diamond^*$. Seguidamente construimos un modelo en el que no se cumple la hipótesis de Kurepa. Según 3.41, el modelo deberá cumplir que $\aleph_2$ es inaccesible^L, y sucede que el modelo natural para conseguir esto basta para conseguir $\neg$HK:

Teorema 5.53 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC *y sea κ un cardinal inaccesible^M, sea $\mathbb{P} = \mathrm{Lv}(\kappa, \aleph_1)^M$ y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces en $M[G]$ no hay árboles de Kurepa.*

Demostración: Por 5.45 sabemos que $\mathbb{P}$ conserva $\aleph_1$ y los cardinales y cofinalidades $\geq \kappa$, mientras que todos los cardinales $\aleph_1 < \nu < \kappa$ se colapsan. En particular, $\aleph_1^{M[G]} = \aleph_1^M$, $\aleph_2^{M[G]} = \kappa$. Por 5.46 sabemos que si M cumple la HCG, también la cumple $M[G]$. Además tenemos que, en M, $\mathbb{P}$ cumple la c.c. κ y es $\aleph_1$-cerrado.

Sea $(A, \leq)$ un $\aleph_1$-árbol$^{M[G]}$, es decir, un árbol de altura $\aleph_1$ y cuyos niveles tienen todos cardinal menor que $\aleph_1$ (todo ello en $M[G]$). Es claro entonces que su cardinal es $\aleph_1$, luego, pasando a otro árbol semejante, podemos suponer sin pérdida de generalidad que es de la forma $(A, \leq) = (\omega_1^M, R)$, con $R \subset \omega_1^M \times \omega_1^M$.

Sea $R = \sigma_G$, donde $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ es un buen nombre para un subconjunto de (el nombre canónico de) $\omega_1^M \times \omega_1^M$. Entonces, en M, el rango de σ es la unión de $\aleph_1$ anticadenas, todas ellas de cardinal $< \kappa$, luego $|\mathcal{R}\sigma| < \kappa$. Como κ es regular, existe un $\theta < \kappa$ tal que $\mathcal{R}\sigma \subset M^{\mathbb{P}_0}$, donde

$$\mathbb{P}_0 = \{p \in \mathbb{P} \mid \mathcal{D}p \subset \theta \times \omega_1\}^M, \qquad \mathbb{P}_1 = \{p \in \mathbb{P} \mid \mathcal{D}p \subset (\kappa \setminus \theta) \times \omega_1\}^M.$$

Claramente, en M tenemos una semejanza obvia $\mathbb{P} \cong \mathbb{P}_0 \times \mathbb{P}_1$, de modo que $G_0 = G \cap \mathbb{P}_0$ es un filtro $\mathbb{P}_0$-genérico sobre M y $G_1 = G \cap \mathbb{P}_1$ es $\mathbb{P}_1$-genérico sobre $M[G_0]$, y $M[G] = M[G_0][G_1]$. Además $R = \sigma_G = \sigma_{G_0}$, con lo que $R \in M[G_0]$.

Observemos que $\aleph_1^M = \aleph_1^{M[G_0]}$ (porque se conserva en $M[G]$) y que κ es inaccesible$^{M[G_0]}$. En efecto, en M se cumple que $\mathbb{P}_0$ cumple la condición de cadena $|\mathbb{P}_0|^+ = |\theta|^+ < \kappa$, luego conserva cardinales y cofinalidades $\geq \theta^+$, luego κ sigue siendo débilmente inaccesible en $M[G_0]$. Además, si $\mu < \kappa$ es un cardinal$^{M[G_0]}$, el número de buenos nombres (en M) para subconjuntos de $\check{\mu}$ es $< \kappa$ (por 5.20), luego por 5.22 tenemos que $(2^\mu)^{M[G_0]} < \kappa$, luego κ es fuertemente inaccesible$^{M[G_0]}$.

Por otra parte, como $\mathbb{P}_0$ es claramente $\aleph_1$-cerrado en M, sucede que

$$\mathbb{P}_1 = \{p \in \mathbb{P} \mid \mathcal{D}p \subset (\kappa \setminus \theta) \times \omega_1\}^{M[G_0]},$$

luego $\mathbb{P}_1$ es $\aleph_1$-cerrado en $M[G_0]$. En resumen, cambiando M por $M[G_0]$, $\mathbb{P}$ por $\mathbb{P}_1$ y G por G_1 tenemos que la extensión genérica con la que estamos trabajando puede expresarse como $M[G]$, donde G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, donde a su vez $\mathbb{P}$ es un c.p.o. $(\aleph_1\text{-cerrado})^M$, $\aleph_1^{M[G]} = \aleph_1^M$ y $\kappa = \aleph_2^{M[G]}$ es inaccesible^M. Además, ahora tenemos que el $\aleph_1$-árbol $(A \leq)$ que estamos considerando cumple $(A, \leq) \in M$. Basta probar que, en estas circunstancias, el número de caminos de $(A, \leq)$ en $M[G]$ es $< \kappa$.

A su vez, para probar esto es suficiente demostrar que todo camino de A está en M, pues entonces el número de caminos será a lo sumo $|\mathcal{P}A|^M = (2^{\aleph_1})^M < \kappa$.

Sea $C \in M[G]$ un camino en A y supongamos que $C \notin M$. Sea $P = (\mathcal{P}A)^M$, con lo que $C \notin P$. Sea $C = \tau_G$ y sea $p \in \mathbb{P}$ tal que

$$p \Vdash (\tau \text{ es un camino en } \check{A} \land \tau \notin \check{P}).$$

A partir de aquí trabajamos en M. Si $\alpha < \omega_1$ y $q \in \mathbb{P}$, escribiremos

$$q \parallel \tau_\alpha \equiv \bigvee b \in \mathrm{Niv}_\alpha A \; q \Vdash \check{b} \in \tau.$$

Informalmente, $q \parallel \tau_\alpha$ significa que la condición q determina cual es el α-ésimo elemento del camino nombrado por τ.

a) El conjunto $\{q \in \mathbb{P} \mid q \leq p \land q \parallel \tau_\alpha\}$ es denso bajo p.

   En efecto, si $r \leq p$ y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico tal que $r \in G$, entonces τ_G es un camino en A, luego existe un $b \in \mathrm{Niv}_\alpha(A)$ tal que $b \in \tau_G$, luego existe un $q \leq r$ tal que $q \Vdash \check{b} \in \tau$, luego $q \parallel \tau_\alpha$.

b) $\bigwedge q \leq p \bigvee \alpha < \omega_1 \; \neg q \parallel \tau_\alpha$.

   En caso contrario, existiría un $q \leq p$ tal que, para todo $\alpha < \omega_1$ existiría un $b_\alpha \in \mathrm{Niv}_\alpha(A)$ tal que $q \Vdash \check{b}_\alpha \in \tau$, pero llamando $B = \{b_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ tendríamos entonces que $q \Vdash \tau = \check{B}$, luego $q \Vdash \tau \in \check{P}$, en contradicción con que p fuerza lo contrario.

c) $\bigwedge \alpha\beta < \omega_1 \bigwedge q \in \mathbb{P}(q \leq p \land \alpha < \beta \land q \parallel \tau_\beta \rightarrow q \parallel \tau_\alpha)$.

   Si $b \in \mathrm{Niv}_\beta(A)$, $q \Vdash \check{b} \in \tau$ y $a \in A$ es el único $a \in \mathrm{Niv}_\alpha(A)$ que cumple $a \leq b$, es claro que $q \Vdash \check{a} \in \tau$.

Ahora es claro que si $q \leq p$ entonces $\delta(q) = \{\alpha < \omega_1 \mid q \parallel \tau_\alpha\}$ es un ordinal numerable, el mínimo ordinal δ tal que $\neg q \parallel \tau_\delta$.

d) Si $q \leq p$ y $\delta(q) < \alpha < \omega_1$, existen q_0, $q_1 \leq q$ y a_0, $a_1 \in \mathrm{Niv}_\alpha(A)$, $a_0 \neq a_1$, tales que $q_i \Vdash \check{a}_i \in \tau$.

   En efecto, tenemos que $\neg q \parallel \tau_\alpha$, pero por a) existe un $q_0 \leq q$ y un $a_0 \in \mathrm{Niv}_\alpha(A)$ tal que $q_0 \Vdash \check{a}_0 \in \tau$, pero $\neg q \Vdash \check{a}_0 \in \tau$, luego existe un $r \leq q$ tal que $r \Vdash \check{a}_0 \notin \tau$. De nuevo por a) existe un $q_1 \leq r$ y un $a_1 \in \mathrm{Niv}_\alpha(A)$ tal que $q_1 \Vdash \check{a}_1 \in \tau$, y necesariamente $a_1 \neq a_0$.

Es claro entonces que podemos construir recurrentemente tres sucesiones $\{p_s\}_{s\in 2^{<\omega}}$, $\{a_s\}_{s\in 2^{<\omega}}$ y $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ tales que:

- $p_\varnothing = p$,
- $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots$
- $\alpha_n > \text{máx}\{\delta(p_s) \mid s \in 2^{\leq n}\}$,
- Para todo $s \in 2^<\omega$ tal que $\ell(s) = n$, se cumple $a_{s\frown 0} \neq a_{s\frown 1}$, $p_{s\frown i} \leq p_s$, $a_{s\frown i} \in \text{Niv}_{\alpha_n}(A)$ y $p_{s\frown i} \Vdash \check{a}_{s\frown i} \in \tau$.

Sea $\alpha = \bigcup\limits_n \alpha_n < \omega_1$. Para cada $f \in 2^\omega$, como la sucesión $\{p_{f|_n}\}_{n\in\omega}$ es decreciente y $\mathbb{P}$ es $\aleph_1$-cerrado, existe $p_f \in \mathbb{P}$ tal que $\bigwedge n \in \omega\ p_f \leq p_{f|_n}$. Por a) existen $q_f \leq p_f$ y $a_f \in \text{Niv}_\alpha(A)$ de modo que $q_f \Vdash \check{a}_f \in \tau$. Como $q_f \Vdash \check{a}_{f|_n} \in \tau$, se cumple que $a_{f|_n} \leq a_f$. Pero si $f \neq g$, entonces existe un n tal que $f|_n = g|_n$ y $f(n) \neq g(n)$, en cuyo caso $a_{f|_{n+1}} \neq a_{g|_{n+1}}$, luego $a_f \neq a_g$.

En definitiva, el conjunto $\{a_f \mid f \in 2^{<\omega}\} \subset \text{Niv}_\alpha(A)$ tiene cardinal $2^{\aleph_0}$, en contradicción con que los niveles de A son numerables. ■

Con esto queda probado que la hipótesis de Kurepa no es ni demostrable ni refutable en ZFC.

Nota En el modelo construido en el teorema anterior se cumple $\Diamond$, por lo que podemos concluir que $\Diamond$ no basta para demostrar HK. En efecto, basta observar que

$$\mathbb{P} = \text{Lv}(\kappa, \aleph_1) \cong \mathbb{Q} \times \text{Fn}(\omega_1, 2, \aleph_1),$$

donde $\mathbb{Q} = \{p \in \mathbb{P} \mid p \cap (\{2\} \times \omega_1 \times 2) = \varnothing\}$, donde la semejanza es la dada por $p \mapsto (p_1, p_2)$, donde

$$p_1 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in p \mid \alpha \neq 2\}, \qquad p_2 = \{(\beta, \gamma) \in \omega_1 \times 2 \mid (2, \beta, \gamma) \in p\}.$$

Por lo tanto, $M[G] = M[G_1][G_2]$, donde G_1 es $\mathbb{Q}$-genérico sobre M y G_2 es $\text{Fn}(\omega_1, 2, \aleph_1)^M$-genérico sobre $M[G_1]$. Ahora bien, como $\mathbb{Q}$ es $\aleph_1$-cerrado en M, se cumple que $\text{Fn}(\omega_1, 2, \aleph_1)^M = \text{Fn}(\omega_1, 2, \aleph_1)^{M[G_1]}$, y basta aplicar 5.51. ■

5.9 El teorema de Hechler

Recordemos la relación de orden parcial $\leq^*$ en ${}^\omega\omega$ definida en [TC 8.9]:

$$f \leq^* g \leftrightarrow \bigvee k \in \omega \bigwedge n \in \omega (k \leq n \rightarrow f(n) \leq g(n)),$$

Consideramos también la relación de equivalencia

$$f =^* g \leftrightarrow \bigvee k \in \omega \bigwedge n \in \omega (k \leq n \rightarrow f(n) = g(n)),$$

de modo que $f <^* g$ se entenderá como $f \leq^* g \wedge f \neq^* g$ y no[2] como la definición análoga a $\leq^*$ cambiando $\leq$ por $<$.

[2]Observemos también que $f \neq^* g$ hay que entenderlo como la negación de $f =^* g$ y no como $\bigvee k \in \omega \bigwedge n \in \omega (k \leq n \rightarrow f(n) \neq g(n))$.

Vamos a probar un teorema que muestra que la relación $\leq^*$ está en gran medida indeterminada en ZFC, pues ${}^\omega\omega$ puede contener copias de cualquier conjunto parcialmente ordenado prefijado.

Teorema 5.54 (Hechler) *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea $(A, \leq) \in M$ un conjunto parcialmente ordenado en el que todo subconjunto numerable^M tiene una cota superor estricta. Entonces existe un c.p.o. $\mathbb{P} \in M$ con la c.c.n. y cardinal a lo sumo $|A|^{\aleph_0}$ tal que, si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, en $M[G]$ existe una aplicación $F : (A, \leq) \longrightarrow ({}^\omega\omega, \leq^*)$ que es una semejanza en su imagen y que es dominante, en el sentido de que para todo $f \in {}^\omega\omega$ existe un $a \in A$ tal que $f \leq^* F(a)$.*

Demostración: De momento trabajamos en ZFC, sin relativizar a ningún modelo. Conviene observar que no vamos a usar la hipótesis sobre la acotación de los conjuntos numerables hasta el paso final de la prueba.

Llamamos $A^* = A \cup \{A\}$ y extendemos el orden en A hasta A^* haciendo que A sea el elemento máximo. Fijamos un buen orden en A y definimos como sigue una sucesión $\{b_\delta\}_{\delta\in\Omega}$ en A^*: supuesta definida $\{b_\delta\}_{\delta<\alpha}$, tomamos como b_α el mínimo elemento de A (respecto al buen orden prefijado) que no está mayorado por ningún b_δ, si es que existe, y $b_\alpha = A$ en caso contrario.

Si todos los b_α fueran distintos de A, tendríamos una aplicación inyectiva $\Omega \longrightarrow A$, lo cual es imposible. Llamemos ξ al mínimo ordinal tal que $b_\xi = A$, de modo que $B = \{b_\delta \mid \delta < \xi\} \subset A$ es dominante en A (es decir, todo elemento de A es menor o igual que un b_δ) y además, por construcción, $b_\delta < b_\epsilon$ implica que $\delta < \epsilon$. En particular esto prueba que la relación $<$ está bien fundada en B. Llamamos $B^* = B \cup \{A\}$ y consideramos la función $\operatorname{rang} : B^* \longrightarrow \Omega$ determinada por la relación $<$. La extendemos a una función $\operatorname{rang} : A^* \longrightarrow \Omega$ estableciendo que, si $a \in A \setminus B^*$, entonces

$$\operatorname{rang}(a) = \min\{\operatorname{rang}(b) \mid b \in B^* \wedge a < b\}.$$

Definimos en A^* la relación $x \prec y \leftrightarrow x < y \wedge \operatorname{rang}(x) < \operatorname{rang}(y)$. Para cada $x \in A^*$ definimos $A_x = \{y \in A \mid y \prec x\}$.

Ahora definimos una familia de c.p.o.s $\{\mathbb{P}_a\}_{a\in A^*}$ por recurrencia sobre el rango de a, es decir, suponemos definido $\mathbb{P}_b$ para todo $b \in A$ de rango menor que a, y definimos entonces $\mathbb{P}_a$ como el conjunto de todas las funciones u que cumplen:

a) $\mathcal{D}u$ es un subconjunto finito de A_a.

b) Si $x \in \mathcal{D}u$, entonces $u(x) = (s^u_x, \tau^u_x)$, donde $s^u_x \in \omega^{<\omega}$ y τ^u_x es un buen $\mathbb{P}_x$-nombre para un subconjunto de $\omega\check{\times}\omega$ tal que $\mathbb{1}_x \Vdash_x \tau^u_x \in {}^\omega\omega$.

   (Usamos $\Vdash_x$ como abreviatura de $\Vdash_{\mathbb{P}_x}$.)

c) Si $x < y$ están en $\mathcal{D}u$ y $\operatorname{rang}(x) = \operatorname{rang}(y)$, entonces $\ell(s^u_y) \leq \ell(s^u_x)$.

Llamaremos $\mathbb{1}_a = \varnothing \in \mathbb{P}_a$. Observemos que cualquier restricción de un elemento de $\mathbb{P}_a$ a un subconjunto de su dominio sigue estando en $\mathbb{P}_a$. Más aún, si $u \in A_a$ y $x \in \mathcal{D}u$, entonces $u_x = u|_{A_x} \in \mathbb{P}_x$.

Ahora definimos un preorden en $\mathbb{P}_a$ estableciendo que $u < v$ si se cumple:

a) $\mathcal{D}v \subset \mathcal{D}u$.

b) Para cada $x \in \mathcal{D}v$, $s_x^v \subset s_x^u$ y

$$u_x \Vdash_x \bigwedge n \in \omega\ \tau_x^v(n) \leq \tau_x^u(n) \land \bigwedge n \in \mathcal{D}\check{s}_x^u \setminus \mathcal{D}\check{s}_x^v\ \tau_x^v(n) \leq \check{s}_x^u(n).$$

c) Si $x, y \in \mathcal{D}v$, $x < y$ y $\operatorname{rang}(x) = \operatorname{rang}(y)$, para todo $n \in \mathcal{D}s_y^u \setminus \mathcal{D}s_y^v$ se cumple $s_x^u(n) < s_y^u(n)$.

Es claro que la relación así definida es un preorden en $\mathbb{P}_a$ con máximo $\mathbb{1}_a$. Si $a \prec b$, la inclusión $\mathbb{P}_a \longrightarrow \mathbb{P}_b$ es una inmersión completa. Por ejemplo, si $u \in \mathbb{P}_b$, es fácil ver que u_a es una reducción de u a $\mathbb{P}_a$.

Llamamos $\mathbb{P} = \mathbb{P}_A$. Para cada $a \in A$, definimos

$$\phi_a = \{(\text{p.o.}(\check{m}, \check{n}), u) \mid u \in \mathbb{P} \land \mathcal{D}u = \{a\} \land m \in \mathcal{D}s^u \land s^u(m) = n\} \in V^{\mathbb{P}}.$$

Vamos a probar que $\mathbb{1} \Vdash \phi_a \in {}^\omega\omega$. Empezamos probando que el conjunto

$$D_a = \{u \in \mathbb{P} \mid a \in \mathcal{D}u\}$$

es denso en $\mathbb{P}$. Para ello tomamos $u \in \mathbb{P}$ y suponemos que $a \notin \mathcal{D}u$. Sea $\alpha = \operatorname{rang}(a)$ y sea $D_\alpha = \{x \in \mathcal{D}u \mid \operatorname{rang}(x) = \alpha\}$. Sea $k \in \omega$ tal que

$$\text{máx}\{\ell(s_x^u) \mid x \in D_\alpha \land a < x\} \leq k \leq \text{mín}\{\ell(s_x^u) \mid x \in D_\alpha \land x < a\}.$$

Esto es posible por la última condición de la definición de los c.p.o.s. Naturalmente, cualquiera de los dos conjuntos puede ser vacío, y en tal caso hay que entender que la desigualdad se cumple trivialmente. Consideramos $u' = u \cup \{(a, (s, \tau))\}$, donde $s \in {}^k\omega$ es arbitrario y τ es cualquier buen $\mathbb{P}_a$-nombre para un subconjunto de $\omega \check{\times} \omega$ que cumpla $\mathbb{1}_a \Vdash \tau \in {}^\omega\omega$. Es inmediato que $u' \in D_a$ extiende a u.

Ahora probamos que, para todo $m \in \omega$, el conjunto

$$D_m = \{u \in \mathbb{P} \mid \bigwedge x \in \mathcal{D}u\ \ell(s_x^u) \geq m\}$$

es denso en $\mathbb{P}$. Concretamente, probaremos que todo $u \in \mathbb{P}$ tiene una extensión en D_m (para todo m) por inducción sobre $\alpha_u = \text{máx}\{\operatorname{rang}(x) \mid x \in \mathcal{D}u\}$. Suponemos, pues, que esto es cierto para todas las condiciones w para las que $\alpha_w < \alpha_u = \alpha$. Llamamos $u_{<\alpha} = u|_{\{x \in \mathcal{D}u \mid \operatorname{rang}(x) < \alpha\}}$. Por hipótesis de inducción existe $v \in D_m$ tal que $v \leq u_{<\alpha}$. Podemos restringir v para que su dominio sea el mismo que el de $u_{<\alpha}$.

Definimos $u^0 \in \mathbb{P}$ sobre el mismo dominio que u mediante:

$$u^0(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si } x \in \mathcal{D}v, \\ u(x) & \text{si } x \in \mathcal{D}u \setminus \mathcal{D}v. \end{cases}$$

Es fácil ver que $u^0 \in \mathbb{P}$, $u^0_{<\alpha} = v \in D_m$ y $u^0 \leq u$. Pongamos que

$$\{x \in \mathcal{D}u \mid \operatorname{rang}(x) = \alpha\} = \{x_1, \ldots, x_n\},$$

donde hemos ordenado los elementos de modo que si $x_i < x_j$, entonces $i < j$. Sea $m' = \text{máx}\{m, \ell(s^{u^0}_{x_1}), \ldots, \ell(s^{u^0}_{x_n})\}$. Veamos que es posible definir condiciones $u^0 \geq u^1 \geq \cdots \geq u^n$ tales que:

a) $\mathcal{D}u^i$ no tiene elementos de rango mayor que α, y tiene los mismos elementos de rango α que $\mathcal{D}u^0$.

b) Si $1 \leq j \leq i$, $\ell(s^{u^i}_{x_j}) = m'$.

c) Si $1 \leq j \leq n$, $\ell(s^{u^i}_{x_j}) \leq m'$.

d) $u^i_{<\alpha} \in D_m$.

Admitiendo esto, tendremos que $u^n \in D_m$ y $u^n \leq u$, como había que probar.

Supongamos definidos $u^0, \ldots, u^{i-1}$ y sea

$$m_i = \text{máx}(\{m\} \cup \{\ell(s^{u^{i-1}}_x) \mid x \in \mathcal{D}u^{i-1}\}).$$

Consideramos la restricción $u^{i-1}_{x_i} \in \mathbb{P}_{x_i}$. Podemos extenderla a una condición $w' \in \mathbb{P}_{x_i}$ que decida $\tau^{u^{i-1}}_{x_i}|_{m'}$, es decir, de modo que exista $h \in {}^{m'}\omega$ tal que $w' \Vdash_{x_i} \tau^{u^{i-1}}_{x_i} = \check{h}$. Como $w' \in \mathbb{P}_{x_i}$, todos los elementos de su dominio tienen rango menor que α, luego por hipótesis de inducción existe $w \leq w' \leq u^{i-1}_{x_i}$ tal que $w \in D_{m_i}$. Podemos exigir que $\mathcal{D}w = \mathcal{D}w'$, con lo que $w \in \mathbb{P}_{x_i}$, luego todos los elementos de su dominio tienen rango $< \alpha$.

Tomemos $s \in {}^{m'}\omega$ que extienda a $s^{u^{i-1}}_{x_i}$ tal que para todo $n \in \mathcal{D}s \setminus \mathcal{D}s^{u^{i-1}}_{x_i}$ se cumpla $s(n) > s^{u^{i-1}}_{x_j}(n)$ (para $j = 1, \ldots, i-1$) y $s(n) > h(n)$.

Definimos u^i como la condición de dominio $\mathcal{D}w \cup \mathcal{D}u^{i-1}$ dada por

$$u^i(x) = \begin{cases} w(x) & \text{si } x \in \mathcal{D}w, \\ (s, \tau^{u^{i-1}}_{x_i}) & \text{si } x = x_i, \\ u^{i-1}(x) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La única parte no inmediata a la hora de probar que $u^i \in \mathbb{P}$ es la última condición, es decir, que si $x, y \in \mathcal{D}u^i$ cumplen $x < y$ y $\operatorname{rang}(x) = \operatorname{rang}(y) = \delta$, entonces $\ell(s^{u^i}_y) \leq \ell(s^{u^i}_x)$. Distinguimos dos casos:

1) $\delta < \alpha$. Distinguimos a su vez tres subcasos:

1a) $x, y \in \mathcal{D}w$ o bien $x, y \in \mathcal{D}u^{i-1} \setminus \mathcal{D}w$. Entonces $\ell(s^{u^i}_y) \leq \ell(s^{u^i}_x)$ porque se cumple $w, u^{i-1} \in \mathbb{P}$.

1b) $x \in \mathcal{D}u^{i-1} \setminus \mathcal{D}w$, $y \in \mathcal{D}w$. Este caso es imposible, pues entonces tendríamos que $x < y < x_i$, luego $\operatorname{rang}(x) \leq \operatorname{rang}(y) < \operatorname{rang}(x_i)$ y por consiguiente $x \in \mathcal{D}u^{i-1}_{x_i} \subset \mathcal{D}w$.

1c) $y \in \mathcal{D}u^{i-1} \setminus \mathcal{D}w$, $x \in \mathcal{D}w$. Entonces

$$\ell(s_x^{u^i}) = \ell(s_x^w) \geq m_i \geq \ell(s_y^{u^{i-1}}) = \ell(s_x^{u^i}).$$

2) $\delta = \alpha$. Entonces la sucesión $\ell(s_{x_1}^{u^i}), \ldots, \ell(s_{x_n}^{u^i})$ es constante igual a m' hasta el término i-ésimo y los términos siguientes son $\leq m'$ (por la hipótesis de inducción en i), y la conclusión es trivial salvo si $x = x_j$, $y = x_k$, con $i < j < k$, pero en ese caso $\ell(s_y^{u^i}) = \ell(s_y^{u^{i-1}}) \leq \ell(s_x^{u^{i-1}}) = \ell(s_x^{u^i})$ porque $u^{i-1} \in \mathbb{P}$.

Es claro que u^i cumple todas las condiciones requeridas. Observemos simplemente que $u^i \leq u^{i-1}$. En efecto, claramente se cumple la propiedad a) $\mathcal{D}u^{i-1} \subset \mathcal{D}u^i$, si $x \in \mathcal{D}u^{i-1}$, o bien $x \in \mathcal{D}w$, en cuyo caso la condición b) se cumple porque $w \leq u^{i-1}_{x_i}$, o bien $x = x_i$, en cuyo caso $s_x^{u^i} = s$ extiende a $s_x^{u^{i-1}}$ por construcción, $u^i_{x_i} \Vdash \bigwedge n \in \omega\ \tau_x^{u^{i-1}}(n) \leq \tau_x^{i-1}(n)$ porque ambos nombres son el mismo y $u^i_{x_i} \Vdash \bigwedge n \in \mathcal{D}\check{s} \setminus \mathcal{D}\check{s}_x^{u^{i-1}}\ \tau_x^{u^{i-1}}(n) \leq \check{s}(n)$, porque, como $u^i_{x_i} \leq w'$, se cumple que $u^i_{x_i} \Vdash \tau_{x_i}^{u^{i-1}} = \check{h}$ y $s(n) > h(n)$ por construcción. Por último, si x no está en ninguno de los dos casos anteriores, entonces la propiedad b) se cumple porque $u^i(x) = u^{i-1}(x)$.

Para comprobar la propiedad c) tomamos dos elementos $x, y \in \mathcal{D}u^{i-1}$, $x < y$, $\operatorname{rang}(x) = \operatorname{rang}(y) = \delta$ y tenemos que probar que si $n \in \mathcal{D}s_y^{u^i} \setminus \mathcal{D}s_y^{u^{i-1}}$, entonces $s_x^{u^i}(n) < s_y^{u^i}(n)$.

Supongamos primero que $\delta < \alpha$. Si $y \in \mathcal{D}u^{i-1} \setminus \mathcal{D}w$, entonces $s_y^{u^i} = s_y^{u^{i-1}}$ y no hay nada que probar. Por lo tanto podemos suponer que $y \in \mathcal{D}w$, y entonces también $x \in \mathcal{D}w$ (por el mismo motivo que antes era imposible el caso 1b). Ahora basta tener en cuenta que $w \leq u^{i-1}_{x_i}$.

Si $\delta = \alpha$ pero $y \neq x_i$ de nuevo $s_y^{u^i} = s_y^{u^{i-1}}$ y no hay nada que probar. Suponemos, pues que $y = x_i$ y entonces $x = x_j$, con $j < i$ y $n \in \mathcal{D}s \setminus \mathcal{D}s_{x_i}^{u^{i-1}}$, luego $s_{x_j}^{u^i}(n) = s_{x_j}^{u^{i-1}}(n) < s(n) = s_{x_i}^{u^i}(n)$.

Consideremos ahora el modelo M del enunciado y llamemos $\mathbb{P}$ a la relativización a M del c.p.o. que hemos construido. A partir del filtro G podemos definir, para cada $a \in A$, el conjunto $F(a) = \bigcup\limits_{u \in G} s_a^u$. La densidad de los conjuntos D_a y D_m implica claramente que $F(a) \in {}^\omega\omega$. Más aún, $F(a) = (\phi_a)_G$.

Esto prueba que $\mathbb{1} \Vdash \phi_a \in {}^\omega\omega$ y, más aún, si definimos

$$\phi = \{(\text{p.o.}(\check{a}, \phi_a), a) \mid a \in A\},$$

tenemos que $F = \phi_G$, luego $\mathbb{1} \Vdash \phi : \check{A} \longrightarrow {}^\omega\omega$.

Veamos que si $x < y$, entonces[3] $F(x) <^* F(y)$. Supongamos primeramente que $\operatorname{rang}(x) < \operatorname{rang}(y)$, de modo que $x \prec y$. Observemos que ϕ_x es, de hecho,

[3]De hecho, vamos a ver que esto se cumple en el sentido fuerte de que $F(x)(n) < F(y)(n)$ para todo n suficientemente grande.

un $\mathbb{P}_y$-nombre. Vamos a probar que el conjunto

$$D_{xy} = \{v \in \mathbb{P} \mid x, y \in \mathcal{D}v \wedge v_y \Vdash \phi_x < \tau_y^v\}$$

es denso en $\mathbb{P}$. Tomamos una condición arbitraria $v_0 \in \mathbb{P}$ y la extendemos a una condición v_1 que tenga a x e y en su dominio. Podemos tomar un buen $\mathbb{P}_y$-nombre τ para un subconjunto de $\omega \check{\times} \omega$ tal que

$$\mathbb{1}_y \Vdash \tau \in {}^\omega\omega \wedge \bigwedge n \in \omega\ \tau(n) = \phi_x(n) + \tau_y^{v_1}(n) + 1.$$

En particular, $\mathbb{1}_y \Vdash \phi_x < \tau$ y $\mathbb{1}_y \Vdash \tau_y^{v_1} \leq \tau$. Esto hace que la condición v que coincide con v^1 salvo que $\tau_y^v = \tau$ cumple $v \in D_{xy}$ y $v \leq v_1$.

Tomemos, pues, $v \in D_{xy} \cap G$ y sea $m \geq \ell(s_y^v)$. Existe $u \in G$ tal que $u \leq v$ y $m \in \mathcal{D}s_y^u$. Entonces $u_y \Vdash \tau_y^v(\check{m}) \leq \check{s}_y^u(\check{m})$, y $u_y \in G_y = G \cap \mathbb{P}_y$, luego

$$F(x) = (\phi_x)_{G_y}(m) < (\tau_y^v)_{G_y}(m) \leq s_y^u(m) = F(y)(m).$$

Así pues, $F(x) <^* F(y)$.

Supongamos ahora que $\operatorname{rang}(x) = \operatorname{rang}(y)$ y tomemos cualquier condición $v \in G$ que tenga a x e y en su dominio. Para todo $m \geq \ell(s_y^v)$, existe una condición $u \in G$ tal que $u \leq v$ y $m \in \mathcal{D}s_y^u \subset \mathcal{D}s_x^u$, y entonces

$$F(x)(m) = s_x^u(m) < s_y^u(m) = F(y)(m),$$

luego también $F(x) <^* F(y)$.

Para probar que $F(x) <^* F(y)$ implica que $x < y$ probaremos, equivalentemente, que si $a, b \in \mathbb{P}$ no están conectados, entonces $F(a)$ y $F(b)$ tampoco lo están. Para ello fijamos $m \in \omega$ y vamos a probar que el conjunto

$$D'_m = \{u \in \mathbb{P} \mid a, b \in \mathcal{D}u \wedge \bigvee i \in \omega \setminus m(i < \ell(s_x^u) \wedge i < \ell(s_y^u) \wedge s_x^u(i) < s_y^u(i))\}$$

es denso en $\mathbb{P}$. Esto implica que no se cumple $F(y) \leq^* F(x)$, e intercambiando los papeles de x e y vemos que tampoco se cumple que $F(x) \leq^* F(y)$.

El argumento es similar al que hemos empleado para probar que D_m era denso. Partimos de una condición arbitraria $u \in \mathbb{P}$, aunque podemos suponer que $a, b \in \mathcal{D}u$. Cambiando m por un número mayor, podemos suponer también que $m > \ell(s_x^u)$, para todo $x \in \mathcal{D}u$. Llamemos $\alpha = \operatorname{rang}(a)$ y ordenemos el conjunto

$$X = \{x \in \mathcal{D}u \mid x \leq a \wedge \operatorname{rang}(x) = \alpha\} = \{x_1, \ldots, x_n\},$$

de modo que $x_n = a$ y si $x_i < x_j$ entonces $i < j$. Llamemos $u^0 = u$ y, fijado $m' > m$, podemos definir condiciones $u^0 \geq u^1 \geq \cdots \geq u^n$ tales que:

a) $u^{i+1}(x) = u^i(x)$ si $x \in \mathcal{D}u^i \setminus (A_{x_i} \cup \{x_i\})$.

b) Si $1 \leq j \leq i$, $\ell(s_{x_j}^{u_i}) = m'$.

c) Si $i < j \leq n$, $s_{x_j}^{u^i} = s_{x_j}^{u^0}$.

El proceso es el mismo empleado al probar la densidad de D_m. La diferencia es que ahora no pretendemos extender las longitudes de todas las sucesiones asociadas a elementos del dominio de u, sino que sólo queremos extender la de s_a^u, y la clave es que para ello sólo necesitamos retocar elementos de X, y tal vez añadir nuevos elementos al dominio, pero todos en $A_a \cup X$, luego en ningún caso tocaremos $u(b)$, es decir, que se cumple que $u^i(b) = u(b)$ para todo i. En particular $m \geq \ell(s_b^{u^n})$.

Ahora llamamos $\beta = \operatorname{rang}(b)$, ordenamos el conjunto

$$Y = \{y \in \mathcal{D}u^n \mid y \leq b \wedge \operatorname{rang}(y) = \beta\} = \{y_1, \ldots, y_{n'}\}$$

de modo que $y_{n'} = b$ y si $y_i < y_j$ entonces $i < j$. Repetimos el proceso construyendo tomando $v^0 = u^n$ y construyendo condiciones $v^0 \geq v^1 \geq \cdots \geq v^{n'}$ de modo que $\ell(s_b^{v^{n'}}) = m'$, y observamos (en la prueba de que D_m es denso) que cuando elegimos la sucesión s que se convertirá en $s_b^{v^{n'}}$, tenemos libertad para exigir que $s(m) > s_a^{v^0}(m)$, con lo que $v^{n'} \in D'_m$.

Ya tenemos probado que F es una semejanza en su imagen. Ahora probaremos que $\mathbb{P}$ cumple la c.c.n., para lo cual necesitamos probar previamente que el conjunto siguiente es denso en $\mathbb{P}$:

$$D = \{u \in \mathbb{P} \mid \bigwedge \alpha \bigvee m \in \omega \bigwedge x \in \mathcal{D}u(\operatorname{rang}(x) = \alpha \rightarrow \ell(s_x^u) = m)\}.$$

Dada $u \in \mathbb{P}$, razonamos por inducción en $\alpha = \operatorname{máx}\{\operatorname{rang}(x) \mid x \in \mathcal{D}u\}$ que u admite una extensión a D sin elementos de rango mayor que α en su dominio. En efecto, en la prueba de que D_m es denso hemos construido una condición $u' = u^n \leq u$ tal que todo $x \in \mathcal{D}u'$ de rango α cumple $\ell(s_x^{u'}) = m'$. Por hipótesis de inducción $u'_{<\alpha}$ tiene una extensión $v' \in D$ sin elementos de rango $\geq \alpha$ en su dominio, y ambas definen una condición $v \in \mathbb{P}$ de dominio $\mathcal{D}u' \cup \mathcal{D}v'$ dada por

$$v(x) = \begin{cases} u'(x) & \text{si } \operatorname{rang}(x) = \alpha, \\ v'(x) & \text{si } \operatorname{rang}(x) < \alpha. \end{cases}$$

Es fácil ver que $v \in D$ y no tiene elementos de rango mayor que α en su dominio.

Para ver que $\mathbb{P}$ cumple la c.c.n., basta ver que D la tiene. Para ello tomamos una familia no numerable X de elementos de D. A cada $u \in X$ le podemos asignar el conjunto finito $d_u = \{\operatorname{rang}(x) \mid x \in \mathcal{D}u\}$. Aplicando el lema de los sistemas Δ concluimos que es posible reducir X a una familia no numerable en la que los conjuntos d_x formen una familia cuasidisjunta de raíz $r = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$. Para cada $u \in X$, para cada $x \in \mathcal{D}u$ con $\operatorname{rang}(x) = \alpha_i$, el natural $m_i^u = \ell(s_x^u)$ es independiente de x (porque $u \in D$). Como la k-tupla $(m_1^u, \ldots, m_k^u)$ sólo puede tomar una cantidad numerable de valores, restringiendo X podemos suponer que también es independiente de u.

Ahora aplicamos el lema de los sistemas Δ a la familia de los dominios de los elementos de X y concluimos que, pasando a un subconjunto, podemos exigir que éstos formen un sistema Δ de raíz $r' = \{x_1, \ldots, x_n\}$. A cada $u \in X$ le podemos asociar la n-tupla $(s_{x_1}^u, \ldots, s_{x_n}^u)$. Como el número total de n-tuplas posibles es numerable, restringiendo X podemos exigir que todas sean iguales. En estas condiciones, vamos a ver que dos elementos cualesquiera $u, v \in X$ son compatibles, luego no existen anticadenas no numerables.

En efecto, si $x \in \mathcal{D}u \cap \mathcal{D}v = r'$, entonces $s_x^u = s_x^v$ y existe un buen $\mathbb{P}_x$-nombre τ_x para un subconjunto de $\omega\check{\times}\omega$ tal que $\mathbb{1}_x \Vdash \bigwedge n \in \omega\ \tau_x(n) = \tau_x^u(n) + \tau_x^v(n)$. En particular $\mathbb{1}_x \Vdash \tau \in {}^\omega\omega \wedge \bigwedge n \in \omega(\tau_x^u(n) \leq \tau(x) \wedge \tau_x^v(n) \leq \tau(x))$.

Definimos una condición w de dominio $\mathcal{D}u \cup \mathcal{D}v$ de modo que si $x \in \mathcal{D}u \cap \mathcal{D}v$, entonces $s_x^w = s_x^u = s_x^v$ y τ_x^w es el nombre τ que acabamos de considerar. Si $x \in \mathcal{D}u \setminus \mathcal{D}v$, entonces $w(x) = u(x)$ y si $x \in \mathcal{D}v \setminus \mathcal{D}u$ entonces $w(x) = v(x)$.

Si $x, y \in \mathcal{D}w$ cumplen $x < y$ y $\operatorname{rang}(x) = \operatorname{rang}(y) = \alpha$, entonces, o bien $x, y \in \mathcal{D}u$, $x, y \in \mathcal{D}v$, en cuyo caso $\ell(s_x^w) = \ell(s_y^w)$ porque $u, v \in D$, o bien se cumple que $x \in \mathcal{D}u$, $y \in \mathcal{D}v$ o viceversa, en cuyo caso $\alpha \in d_u \cap d_v = r$, luego $\alpha = \alpha_i$ y $\ell(s_x^w) = \ell(s_y^w) = m_i$. Así pues, en cualquier caso $\ell(s_x^w) = \ell(s_y^w)$ y así podemos concluir que $w \in \mathbb{P}$. Por otra parte, es inmediato que $w \leq u$, $w \leq v$.

Con la condición de cadena numerable ya podemos acotar el cardinal de $\mathbb{P}$. Inductivamente, si admitimos que $|\mathbb{P}_x| \leq |A|^{\aleph_0}$ para todo x de rango menor que α y a tiene rango α, entonces el número de anticadenas en $\mathbb{P}_x$ es a lo sumo $|A|^{\aleph_0}$, de donde se sigue fácilmente que $|\mathbb{P}_a| \leq |A|^{\aleph_0}$.

Veamos por último que F es dominante, y éste es el único punto de la prueba que requiere la hipótesis sobre la acotación de los subconjuntos numerables de A. Dado $f \in ({}^\omega\omega)^{M[G]}$, podemos expresarlo como $f = \sigma_G$, de modo que $\mathbb{1} \Vdash \sigma \in {}^\omega\omega$. Más aún, podemos suponer que σ es un buen $\mathbb{P}$-nombre para un subconjunto de $\omega\check{\times}\omega$, con lo que está determinado por una familia numerable de anticadenas en $\mathbb{P}$, las cuales son numerables. Cada condición que aparezca en dicha anticadena tiene una cantidad finita de elementos de A en su dominio, luego todos ellos forman un subconjunto numerable de A. Por hipótesis existe un $a \in A$ mayor que todos ellos (y podemos tomarlo de rango estrictamente mayor que todos ellos), lo que se traduce en que $\sigma \in M^{\mathbb{P}_a}$. Pero el conjunto

$$E_a = \{v \in \mathbb{P} \mid a \in \mathcal{D}v \wedge v_a \Vdash \sigma < \tau_a^v\} \in M$$

es denso en $\mathbb{P}$, y la prueba es idéntica a la que hemos dado antes para D_{xy}. Dado $v \in E_a \cap G$ y $m \geq \ell(s_a^v)$, tomamos $u \in G$ tal que $u \leq v$, $m < \ell(s_a^u)$. Así $u_a \Vdash \tau_a^v(\check{m}) \leq \check{s}_a^u(\check{m})$, luego

$$f(m) = \sigma_{G_a}(m) < (\tau_a^v)_{G_a}(m) \leq s_a^u(m) = F(a)(m),$$

con lo que $f <^* F(a)$. ■

Como hemos observado en la prueba, si no queremos exigir que la función F sea dominante, podemos omitir la hipótesis de que los conjuntos numerables tengan cota superior. De hecho, en tal caso es posible simplificar mucho la prueba. Podemos añadir un elemento máximo a A y tomarlo como único elemento de B, con lo que todos los elementos de A^* tienen rango 0 excepto A, que tiene rango 1. Esto hace que todos $A_a = \varnothing$ y $\mathbb{P}_a = \{\mathbb{1}_a\}$ para todo $a \in A$, con lo que el único c.p.o. no trivial es el propio $\mathbb{P}$, cuya definición se simplifica bastante, pues los $\mathbb{P}_x$-nombres pueden sustituirse por elementos de ${}^\omega\omega$.

Veamos una aplicación:

Teorema 5.55 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC + HCG *y en M sean $\mathfrak{b}'$ y $\mathfrak{d}'$ dos cardinales tales que $\aleph_1 \leq \mathrm{cf}(\mathfrak{b}') = \mathfrak{b}' \leq \mathrm{cf}(\mathfrak{d}') \leq \mathfrak{d}'$. Entonces existe un c.p.o. $\mathbb{P}$ en M con la c.c.n. tal que si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, en $M[G]$ se cumple $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$ y $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}'$.*

Demostración: En M, sea $A = [\mathfrak{d}']^{<\mathfrak{b}'}$, es decir, el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathfrak{d}'$ de cardinal menor que $\mathfrak{b}'$, considerado como conjunto parcialmente ordenado con la inclusión. Como $\mathfrak{b}'$ es regular, todo conjunto de menos de $\mathfrak{b}'$ elementos de A tinene cota superior en A (su unión), pero existen conjuntos de $\mathfrak{b}'$ elementos de A sin cota superior (por ejemplo, conjuntos de un elemento cada uno). Como $\mathfrak{b}' \leq \mathrm{cf}(\mathfrak{d}')$, teniendo en cuenta la HCG concluimos que $|A| = \mathfrak{d}'$. Esto permite aplicar el teorema de Hechler, que nos da un c.p.o. $\mathbb{P}$ con la c.c.n. y cardinal $\leq \mathfrak{d}'$ de modo que en cualquier extensión genérica $M[G]$ existe un conjunto dominante $A' \subset {}^\omega\omega$ semejante a A. La c.c.n. implica que los cardinales en $M[G]$ son los mismos que en M. Es claro que $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$, pues un subconjunto de A' no acotado de cardinal $\mathfrak{b}'$ sigue siendo no acotado en $({}^\omega\omega)^{M[G]}$, mientras que un subconjunto no acotado de $({}^\omega\omega)^{M[G]}$ da lugar (tomando un elemento en A' por encima de cada elemento del conjunto dado) a un subconjunto no acotado de A'.

Similarmente $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}'$, pues el propio A' es un subconjunto dominante de $({}^\omega\omega)^{M[G]}$ y un subconjunto dominante de $({}^\omega\omega)^{M[G]}$ da lugar a un subconjunto dominante de A' de cardinal menor o igual, que a su vez da lugar a uno de A, y su cardinal no puede ser menor que $\mathfrak{d}'$, pues su unión tendría cardinal $\leq \mathfrak{d}'$, luego habría elementos de $\mathfrak{d}'$ que no estarían acotados por ninguno de los conjuntos dados. ■

Es fácil ver que en el modelo del teorema anterior $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$. Más adelante (teorema 6.24) veremos que con una extensión adicional podemos hacer que esto deje de cumplirse.

5.10 C.p.o.s distributivos

Aunque no vamos a necesitarlo en este libro, conviene observar que el teorema 5.8 (y, por consiguiente, 5.9, que se basa en 5.8) puede probarse a partir de una propiedad más débil que ser κ-cerrado, a saber, la propiedad de ser κ-distributivo en el sentido de [TC 7.55], que recordamos a continuación:

Definición 5.56 Si $\mathbb{P}$ es un c.p.o. y $D \subset \mathbb{P}$, se dice que D es *abierto* si cuando $p \in D$ y $q \leq p$ entonces $q \in D$.

Sea κ un cardinal infinito. Un c.p.o. $\mathbb{P}$ es κ-*distributivo* si cuando $\{D_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ es una familia de abiertos densos en $\mathbb{P}$, entonces $\bigcap\limits_{\alpha<\kappa} D_\alpha$ es abierto denso.

Diremos que $\mathbb{P}$ es $< \kappa$-distributivo si es μ-distributivo para todo $\mu < \kappa$.

Los conjuntos abiertos en $\mathbb{P}$ son los abiertos en la topología definida en [TC 7.48]. El concepto de κ-distributividad de un c.p.o. generaliza al concepto definido para álgebras de Boole en [TC 7.52] a través de la caracterización dada por [TC 7.54].

Teorema 5.57 *Si κ es un cardinal infinito, entonces todo c.p.o. κ-cerrado es $<\kappa$-distributivo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{D_\alpha\}_{\alpha<\mu}$, con $\mu<\kappa$, una familia de abiertos densos en un c.p.o. $\mathbb{P}$. La intersección es trivialmente abierta. Para probar que es densa tomamos $p \in \mathbb{P}$ y construimos una sucesión decreciente $\{d_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ tal que $\bigwedge\alpha<\mu\ d_\alpha \in D_\alpha$ y $d_0 \leq p$. Por último tomamos $d \in \mathbb{P}$ tal que $\bigwedge\alpha<\mu\ d \leq d_\alpha$ y es claro que $d \in \bigcap\limits_{\alpha<\mu} D_\alpha$. ■

Seguidamente probamos el resultado que habíamos anunciado:

Teorema 5.58 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *$\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y κ un cardinal^M tal que ($\mathbb{P}$ es $<\kappa$-distributivo)^M. Sea G un filtro genérico y supongamos que $B \in M[G]$ cumple $B \subset M$ y $|B|^{M[G]} < \kappa$. Entonces $B \in M$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mu = |B|^{M[G]} < \kappa$, sea $f \in M[G]$ tal que $f : \mu \longrightarrow B$ biyectiva. Por el teorema 4.46 existe un $A \in M$ tal que $f : \mu \longrightarrow A$. Es suficiente probar que $f \in M$, pues entonces también estará en M su rango B. Llamemos $K = (A^\mu)^M = A^\mu \cap M$. Hemos de probar que $f \in K$. En caso contrario, si $f = \tau_G$, existe $p_0 \in G$ tal que $p_0 \Vdash (\tau : \check{\mu} \longrightarrow \check{A} \land \tau \notin \check{K})$. Para cada $\alpha < \mu$ sea

$$D_\alpha = \{p \in \mathbb{P} \mid p \perp p_0 \lor (p \leq p_0 \land \bigvee x \in A\ p \Vdash \tau(\check{\alpha}) = \check{x})\}.$$

Es claro que D_α es abierto denso en $\mathbb{P}$, luego existe $p \in G \cap \bigcap\limits_{\alpha<\mu} D_\alpha$.

Como p tiene que ser compatible con p_0, para cada $\alpha < \mu$ existe un $x_\alpha \in A$ tal que $p \Vdash \tau(\check{\alpha}) = \check{x}_\alpha$, y claramente, $g = \{x_\alpha\}_{\alpha<\mu} \in M$. Sea H un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $p \in H$. Entonces $\tau_H = g \in K$, contradicción. ■

En realidad la distributividad es equivalente a la conclusión del teorema anterior:

Teorema 5.59 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *κ un cardinal infinito^M y $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. Entonces, $\mathbb{P}$ es κ-distributivo^M si y sólo si para todo filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M se cumple que $M^\kappa \cap M[G] \subset M$.*

DEMOSTRACIÓN: Una implicación es esencialmente el teorema anterior: si $\mathbb{P}$ es κ-distributivo (o $\leq \kappa^+$-distributivo), entonces toda $f : \kappa \longrightarrow M$, $f \in M[G]$ cumple $f \subset M$ y $|f|^{M[G]} \leq \kappa$, luego por el teorema anterior $f \in M$.

Para la implicación opuesta consideramos la inmersión densa $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{B}$ de $\mathbb{P}$ en su compleción. Por el teorema [TC 7.56] basta probar que $\mathbb{B}$ es κ-distributiva. Como las extensiones genéricas por $\mathbb{P}$ son las mismas que las extensiones por $\mathbb{B}$, en definitiva podemos suponer que el c.p.o. en consideración es un álgebra de Boole completa $\mathbb{B}$. Esto nos permite aplicar la caracterización de la distributividad dada por el teorema [TC 7.54].

Así pues, fijamos una familia $\{W_\alpha\}_{\alpha<\kappa} \in M$ de particiones de $\mathbb{B}$. Notemos que cada partición W_α corta a cada ultrafiltro genérico G, pues el conjunto

$$D_\alpha = \{p \in \mathbb{B} \mid \bigvee u \in W_\alpha\ p \leq u\}$$

es denso en $\mathbb{B}$. En efecto, si $b \in \mathbb{B}$ es no nulo, entonces

$$\mathbb{O} \neq b = b \wedge \mathbb{1} = \bigwedge_{p \in W_\alpha} (b \wedge p),$$

luego existe $p \in W_\alpha$ tal que $d = b \wedge p \neq \mathbb{O}$, con lo que $d \in D_\alpha$ y $d \leq b$.

Definimos $\sigma = \{(\text{p.o.}(\check{\alpha}, u), u) \mid \alpha < \kappa \wedge u \in W_\alpha\} \in M$. Así, si G es un ultrafiltro $\mathbb{B}$-genérico sobre M, se cumple que

$$\sigma_G = \{(\alpha, u) \mid \alpha < \kappa \wedge u \in W_\alpha \cap G\}.$$

Claramente $\sigma_G : \kappa \longrightarrow \mathbb{B}$ y $\bigwedge \alpha < \kappa\ \sigma_G(\alpha) \in W_\alpha$. Más precisamente,

$$\|\sigma : \check{\kappa} \longrightarrow \check{\mathbb{B}}\| = \mathbb{1} \quad \text{y} \quad \bigwedge \alpha < \kappa \bigwedge u \in W_\alpha\ \|\sigma(\check{\alpha}) = \check{u}\| = u.$$

En efecto, como $u \Vdash \sigma(\check{\alpha}) = \check{u}$, se cumple que $\|\sigma(\check{\alpha}) = \check{u}\| \leq u$. Si la desigualdad fuera estricta $v = u \wedge \|\sigma(\check{\alpha}) = \check{u}\|' \neq \mathbb{O}$ y si G es un ultrafiltro genérico tal que $v \in G$ se cumple que $u \in G$, luego $\sigma_G(\alpha) = u$, luego llegamos a que $\|\sigma(\check{\alpha}) = \check{u}\| \in G$, con lo que tenemos una contradicción.

Sea $A = \{\|\sigma = \check{f}\| \mid f \in (\mathbb{B}^\kappa)^M\}$. Se cumple que A es una partición de $\mathbb{B}$, pues claramente es una anticadena y si fuera $\bigvee A < \mathbb{1}$, entonces $p = (\bigvee A)' \neq \mathbb{O}$ y podríamos tomar un ultrafiltro genérico tal que $p \in G$ y llamamos $f = \sigma_G$. Por hipótesis $f \in M$ y $q = \|\sigma = \check{f}\| \in G \cap A$ y $q \leq \bigvee A$, luego $p' = \bigvee A \in G$ y tenemos una contradicción.

Por último probamos que A refina a todas las particiones W_α. Ahora bien, si $\alpha < \kappa$ y $u = f(\alpha)$, entonces

$$\|\sigma = \check{f}\| \leq \|\sigma(\check{\alpha}) = \check{f}(\check{\alpha})\| = f(\alpha) \in W_\alpha. \qquad \blacksquare$$

Terminamos con una propiedad de conservación de la distributividad:

Teorema 5.60 *Sea κ un cardinal infinito y sean $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ dos c.p.o.s tales que $\mathbb{P}$ cumple la c.c. κ y $\mathbb{Q}$ es κ-cerrado. Entonces $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \check{\mathbb{Q}}$ es $< \check{\kappa}$-distributivo.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema de reflexión, basta probar el teorema relativizado a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Tenemos que probar que $\mathbb{Q}$ es κ-distributivo en $M[G]$, para lo cual, según el teorema anterior, basta probar que si $\mu < \kappa$, H es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[G]$ y $f : \mu \longrightarrow M[G]$ cumple $f \in M[G][H]$ entonces $f \in M[G]$. Por el teorema del producto podemos expresar $M[G][H] = M[H][G]$.

Por el teorema 4.46 existe un $B \in M$ tal que $f : \mu \longrightarrow B$. Sea $f = \sigma_{H \times G}$, donde $\sigma \in M^{\mathbb{Q} \times \mathbb{P}}$. Podemos suponer que $\mathbb{1} \Vdash \sigma : \check{\mu} \longrightarrow \check{B}$. Para cada $\alpha < \mu$ definimos (en M) D_α como el conjunto de las condicines $q \in \mathbb{Q}$ tales que existe una anticadena maximal $W \subset \mathbb{P}$ y una familia $\{b^\alpha_{p,q}\}_{p \in W}$ tal que para cada $p \in W$ se cumple $(q, p) \Vdash \sigma(\check{\alpha}) = \check{b}^\alpha_{p,q}$.

Veamos que D_α es abierto denso en $\mathbb{Q}$. Claramente es abierto, pues si $q \in \mathbb{Q}$ y $q' \leq q$ la misma anticadena y la misma familia prueban que $q' \in D_\alpha$. Para probar que es denso tomamos $q' \in \mathbb{Q}$ y consideramos un filtro $\mathbb{Q} \times \mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $(q', \mathbb{1}) \in K$, llamamos $b_0 = \sigma_K(\alpha)$ y tomamos $(q_0, p_0) \in K$ tal que $(q_0, p_0) \Vdash \sigma(\check{\alpha}) = \check{b}_0$. Podemos exigir que $q_0 \leq q'$.

Supongamos construidas una sucesión decreciente $\{q_\delta\}_{\delta<\beta}$ en $\mathbb{Q}$, una anticadena $\{p_\delta\}_{\delta<\beta}$ en $\mathbb{P}$ y una sucesión $\{b_\delta\}_{\delta<\beta}$ de elementos de B de modo que $(q_\delta, p_\delta) \Vdash \sigma(\check{\alpha}) = \check{b}_\delta$ (con $q_0 \leq q'$).

Si la anticadena no es maximal podemos añadirle una condición p'' incompatible con todos sus elementos, como $\mathbb{P}$ cumple la c.c. κ, tiene que ser $\beta < \kappa$ y, como $\mathbb{Q}$ es κ-cerrado, existe $q'' \in \mathbb{Q}$ tal que $q'' \leq q_\alpha$ para todo $\alpha < \beta$. Tomamos un filtro generico tal que $(q'', p'') \in K$, llamamos $b_\beta = \sigma_K(\alpha)$ y tomamos $(q_\beta, p_\beta) \in K$ tal que $(q_\beta, p_\beta) \Vdash \sigma(\check{\alpha}) = \check{\beta}$. Podemos exigir que $q_\beta \leq q''$ y $p_\beta \leq p''$, con lo que las sucesiones $\{q_\delta\}_{\delta\leq\beta}$, $\{p_\delta\}_{\delta\leq\beta}$, $\{b_\delta\}_{\delta\leq\beta}$ cumplen las mismas condiciones.

Como la sucesión $\{p_\delta\}_{\delta<\beta}$ no puede prolongarse indefinidamente, existe un β para el cual la anticadena es maximal. De nuevo tiene que ser $\beta < \kappa$ y esto nos permite encontrar $q \in \mathbb{Q}$ por debajo de todas las condiciones q_δ. Es claro entonces que $q \in D_\alpha$, pues cumple la definición con $W = \{p_\delta \mid \delta < \beta\}$ y $b^\alpha_{p,q_\delta} = b_\delta$.

Como $\mathbb{Q}$ es κ-cerrado es $<\kappa$-distributivo, luego existe $q \in H \cap \bigcap\limits_{\alpha<\mu} D_\alpha$. Para cada $\alpha < \mu$ elegimos (en M) una anticadena maximal W_α y una familia $\{b^\alpha_{p,q}\}_{p\in W_\alpha}$ según la definición de D_α.

Para cada $\alpha < \mu$, existe una única condición $p \in W_\alpha \cap G$, y la función dada por $g(\alpha) = b^\alpha_{p,q}$ cumple $g \in M[G]$. Ahora bien, resulta que $g = f$, pues $(q, p) \in H \times G$, luego $f(\alpha) = \sigma_{H\times G}(\alpha) = g(\alpha)$. ■

Capítulo VI

Reales genéricos

En el capítulo anterior hemos visto que mediante una extensión genérica con el c.p.o. $\mathrm{Fn}(\kappa, 2, \aleph_0)$ podemos adjuntar a un modelo de ZFC κ reales[1] genéricos que muestran la consistencia de que $2^{\aleph_0}$ sea arbitrariamente grande. Sin embargo, vamos a ver que existen otros c.p.o.s que también tienen el efecto de añadir reales genéricos a un modelo con características sustancialmente diferentes. Los reales genéricos determinados por $\mathrm{Fn}(\kappa, 2, \aleph_0)$ se conocen como "reales de Cohen", y aquí vamos a estudiar otros dos tipos, los llamados reales aleatorios y los reales de Sacks, aunque hay muchos tipos más.

En la sección 7.7 de [TC] consideramos dos ejemplos notables de álgebras de Boole completas: el álgebra de categoría $\mathcal{B}_c$ y el álgebra de medida $\mathcal{B}_m$, definidas, respectivamente, como el cociente de la σ-álgebra de Borel de cualquier espacio polaco (sin puntos aislados, para el caso del álgebra de categoría) sobre el ideal I_c de los conjuntos de Borel de primera categoría, o el ideal I_m de los conjuntos de Borel nulos para cualquier medida de Borel unitaria respecto a la que los puntos tengan medida nula. Entre otras cosas, demostramos que la elección del espacio polaco o de la medida de Borel es irrelevante, en el sentido de que las álgebras correspondientes son isomorfas.

El hecho de que sean álgebras de Boole completas las hace idóneas para obtener a partir de ellas extensiones genéricas. Sucede que las extensiones por el álgebra de categoría son las mismas que proporciona $\mathrm{Fn}(\omega, 2, \aleph_0)$. En efecto, si consideramos $\mathcal{B}_c$ construida a partir de $\mathcal{N}$ (resp. de $\mathcal{C}$) y tomamos $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega, \omega, \aleph_0)$ o $\mathbb{P} = \omega^{<\omega}$ (resp. $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega, 2, \aleph_0)$ o $\mathbb{P} = 2^{<\omega}$) sucede que la aplicación $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathcal{B}_c$ dada por $i(s) = [B_s]$ es una inmersión densa (donde $B_s = \{x \in \mathcal{C} \mid x|_{\mathcal{D}s} = s\}$). (Por la propiedad de Baire, todo elemento de $\mathcal{B}_c$ es la clase de un abierto no vacío y todo abierto no vacío contiene un conjunto B_s.) Así pues:

[1]Es costumbre llamar "reales" a los elementos de ${}^{\omega}2$, o a los de ${}^{\omega}\omega$, o a los de $\mathcal{P}\omega$, porque en muchos contextos es equivalente trabajar con elementos de cualquiera de estos espacios en lugar de considerar números reales propiamente dichos. Un caso es precisamente el de determinar las posibilidades para el cardinal de $\mathbb{R}$.

El álgebra de categoría $\mathcal{B}_c$ es la compleción de cualquiera de los cuatro c.p.o.s $\mathrm{Fn}(\omega, \omega, \aleph_0)$*,* $\omega^{<\omega}$*,* $\mathrm{Fn}(\omega, 2, \aleph_0)$*,* $2^{<\omega}$*.*

En particular toda extensión genérica mediante $\mathcal{B}_c$ es también una extensión genérica mediante cualquiera de los cuatro c.p.o.s indicados. No obstante, este nuevo punto de vista nos proporcionará información adicional respecto a lo visto en el capítulo precedente.

Veremos que el álgebra $\mathcal{B}_c$ determina otra clase de reales genéricos (los reales aleatorios), mientras que los reales de Sacks se pueden obtener mediante el cociente del álgebra de Borel de cualquier espacio polaco sobre el ideal I_n de los subconjuntos numerables.

Por conveniencia consideraremos las álgebras construidas tomando como espacio polaco el cubo de Cantor $\mathcal{C}$, de modo que para la medida podemos considerar su medida de Haar unitaria m.

6.1 Reales de Cohen y aleatorios

El punto de partida para estudiar las extensiones genéricas construidas a partir del álgebra de medida o de categoría es el teorema siguiente:

Teorema 6.1 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC*, sea $\mathbb{B}$ (la relativización a M de) cualquiera de las álgebras $\mathcal{B}_m$ o $\mathcal{B}_c$ y sea G un ultrafiltro $\mathbb{B}$-genérico sobre M. Entonces existe un único $x_G \in \mathcal{C}^{M[G]}$ tal que, para todo $B \in \mathcal{B}$ (el álgebra de Borel de $\mathcal{C})^M$, se cumple $x_G \in B^{M[G]} \leftrightarrow [B] \in G$.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos en primer lugar la unicidad. Si x, $y \in \mathcal{C}^{M[G]}$ con $x \neq y$, existe un $s \in \omega^{<\omega}$ tal que $x \in B_s^{M[G]}$, $y \notin B_s^{M[G]}$. Se cumple que $B_s^{M[G]} = (B_s^M)^{M[G]}$ y, o bien $B_s^M \in G$ o bien $\mathcal{C} \setminus B_s^M \in G$ (pero no pueden darse los dos casos). Por lo tanto, uno de los puntos x o y no cumple la condición del enunciado. Para probar la existencia consideramos el conjunto

$$\mathcal{F} = \{C^{M[G]} \mid C \in \mathbb{B} \text{ es cerrado} \land [C] \in G\} \in M[G].$$

Se cumple que $\mathcal{F} \neq \varnothing$, pues todo conjunto medible de medida no nula contiene un cerrado de medida no nula (resp., por la propiedad de Baire, toda clase de $\mathcal{B}_m$ es la clase de un abierto no vacío, y éste contiene un cerrado de interior no vacío, luego de segunda categoría), luego las clases de los cerrados son densas en $\mathbb{B}$, luego G contiene al menos una. Además la intersección de un número finito de elementos de $\mathcal{F}$ es no vacía, luego, por compacidad, existe

$$x \in \bigcap_{C \in \mathcal{F}} C \in M[G].$$

De este modo, x cumple la condición del enunciado para conjuntos B cerrados. Vamos a probar que, de hecho, la cumple para conjuntos de Borel arbitrarios. Supongamos en primer lugar que $c \in (\Sigma_1^c)^M$. Entonces podemos tomar $d \in (\Pi_1^c)^M$ de modo que $B_c = \mathcal{C} \setminus B_d$ y sabemos que la condición del enunciado se cumple para B_d porque es cerrado. Entonces

$$x \in B_c^{M[G]} \leftrightarrow x \in \mathcal{C}^{M[G]} \setminus B_d^{M[G]} \leftrightarrow [B_d] \notin G \leftrightarrow [B_c] \in G.$$

Así tenemos que x cumple el enunciado para conjuntos con códigos $(\Sigma_1^c)^M$ y $(\Pi_1^c)^M$. Supongamos que se cumple para códigos en $\bigcup\limits_{0<\delta<\alpha} (\Sigma_\delta^c \cup \Pi_\delta^c)^M$, con $\alpha < \omega_1^M$ y sea $c \in (\Sigma_\alpha^c)^M$.

Si $c \in \bigcup\limits_{0<\delta<\alpha} (\Sigma_\delta^c \cup \Pi_\delta^c)^M$, aplicamos la hipótesis de inducción. En caso contrario sea $c_n = v_n(c) \in \bigcup\limits_{0<\delta<\alpha} (\Sigma_\delta^c \cup \Pi_\delta^c)^M$, con lo que la equivalencia del enunciado se cumple para cada B_{c_n} y

$$x \in B_c^{M[G]} \leftrightarrow x \in \bigcup_{n\in\omega} B_{c_n}^{M[G]} \leftrightarrow \bigvee n \in \omega\ x \in B_{c_n}^{M[G]} \leftrightarrow \bigvee n \in \omega\ [B_{c_n}] \in G$$

$$\leftrightarrow \bigvee\{[B_{c_n}] \mid n \in \omega\} \in G \leftrightarrow [\bigcup_{n\in\omega} B_{c_n}] \in G \leftrightarrow [B_c] \in G.$$

Por último, si $c \in (\Pi_\alpha^c)^M$, o bien $c \in \bigcup\limits_{0<\delta<\alpha} (\Sigma_\delta^c \cup \Pi_\delta^c)^M$, en cuyo caso aplicamos la hipótesis de inducción, o bien $d = u(c) \in \bigcup\limits_{0<\delta<\alpha} (\Sigma_\delta^c \cup \Pi_\delta^c)^M$, luego

$$x \in B_c^{M[G]} \leftrightarrow x \in \mathcal{C}^{M[G]} \setminus B_d^{M[G]} \leftrightarrow [B_d] \notin G \leftrightarrow [B_c] \in G.$$

Esto prueba que x cumple el teorema. ■

Nota Hemos enunciado el teorema anterior para las álgebras construidas sobre el espacio $\mathcal{C}$, pero también es válido si consideramos $\mathcal{N}$ en lugar de $\mathcal{C}$. La única modificación que requiere la prueba es observar que las clases de los compactos perfectos forman un conjunto denso en $\mathbb{B}$, luego la familia $\mathcal{F}$ contiene compactos y eso garantiza igualmente la existencia de x. ■

Definición 6.2 Un $x \in \mathcal{C}$ es un *real aleatorio* (resp. *de Cohen*) sobre un modelo transitivo M de ZFC si es de la forma x_G (según el teorema anterior) para un cierto ultrafiltro G del álgebra $\mathcal{B}_m^M$ (resp. $\mathcal{B}_c^M$)-genérico sobre M.

Observemos que, según el teorema anterior, G puede reconstruirse a partir de x_G, por lo que $M[G] = M[x_G]$ (en el sentido de 4.53). La inmersión densa natural $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathcal{B}_m$ que hemos considerado al principio de la sección muestra claramente que los reales de Cohen son los mismos que se obtienen a partir de cada filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M (donde $\mathbb{P}$ es cualquiera de los cuatro c.p.o.s considerados allí).

Respecto de los reales aleatorios, deben su nombre a que, por el teorema siguiente, la medida de un conjunto de Borel $B \subset \mathcal{C}$ puede verse como la probabilidad de que un real aleatorio esté en B, de modo que un número aleatorio no pertenece a ningún conjunto de medida 0 y pertenece a todos los conjuntos de medida 1:

Teorema 6.3 *Un real $x \in \mathcal{C}$ es aleatorio sobre un modelo transitivo M de* ZFC *si y sólo si no pertenece a ningún conjunto de Borel nulo con código en M y es de Cohen sobre M si y sólo si no pertenece a ningún conjunto de Borel de primera categoría con código en M.*

DEMOSTRACIÓN: Si x es aleatorio (resp. de Cohen) sobre M, de modo que $x = x_G$ para cierto ultrafiltro G, y B_c es nulo (resp. de primera categoría), entonces $[B_c^M] = \mathbb{O} \notin G$, luego $x_G \notin B_c$.

Recíprocamente, si x cumple la condición del enunciado, observamos que si B_c y B_d son dos conjuntos de Borel con código en M y $[B_c^M] = [B_d^M]$, entonces $B_c^M \triangle B_d^M$ es nulo (resp. de primera categoría), luego lo mismo le sucede a $B_c \triangle B_d$, luego $x \notin B_c \triangle B_d$, luego $x \in B_c \leftrightarrow x \in B_d$. Esto nos permite definir

$$G = \{[B_c^M] \mid x \in B_c\},$$

que claramente es un ultrafiltro en $\mathbb{B}$. Sólo hemos de probar que es $\mathbb{B}$-genérico sobre M.

Para ello tomamos $X \in M$, $X \subset G$, y hemos de probar que $\bigwedge X \in G$. Sea $Y = \{p \in \mathbb{B} \mid \bigvee q \in X \; q \leq p\}$, de modo que $X \subset Y \subset G$. Sea $A \in M$ una anticadena maximal de Y (que será numerable^M, ya que $\mathbb{B}$ cumple la condición de cadena numerable^M). Veamos que $\bigwedge A = \bigwedge X$.

Por una parte, $\bigwedge A$ es una cota inferior de X, pues si existiera $q \in X$ tal que $\bigwedge A \not\leq q$, entonces $\mathbb{O} \neq p = q \wedge (\bigwedge A)' \leq q$, luego p sería un elemento de Y incompatible con todos los elementos de A, contradicción.

Por otra parte, toda cota inferior de X es cota inferior de Y, luego de A, luego es menor o igual que $\bigwedge A$. Esto prueba que $\bigwedge A$ es el ínfimo de X.

Equivalentemente, podemos suponer que X es numerable^M. Pongamos que $X = \{B_{c_n}^M\}_{n\in\omega}$. Como $[B_{c_n}^M] \in G$, tenemos que $x \in B_{c_n}$, luego $x \in \bigcap\limits_{n\in\omega} B_{c_n}$, luego $\left[\bigcap\limits_{n\in\omega} B_{c_n}^M\right] = \bigwedge X \in G$. ■

Definición 6.4 Si M es un modelo transitivo de ZFC, llamaremos $A(M)$ y $C(M)$ a los conjuntos de reales aleatorios y de Cohen sobre M.

Según el teorema anterior

$$A(M) = \mathcal{C} \setminus \bigcup\{B_c \mid c \in \mathrm{CB} \cap M \wedge m(B_c) = 0\},$$

$$C(M) = \mathcal{C} \setminus \bigcup\{B_c \mid c \in \mathrm{CB} \cap M \wedge B_c \text{ es de primera categoría}\}.$$

En particular, si M es numerable entonces $A(M)$ es un conjunto de Borel de medida 1 y $C(M)$ es un conjunto de Borel con complementario de primera categoría.

Si tenemos dos modelos transitivos $M \subset N$, entonces

$$A(M)^N = A(M) \cap N, \qquad C(M)^N = C(M) \cap N.$$

Otra observación elemental es que $A(M) \cap C(M) = \varnothing$.

En efecto, por [T 6.46] podemos descomponer $\mathcal{C}^M = P \cup Q$, $P \cap Q = \varnothing$, donde P es nulo y Q es de primera categoría (y ambos son conjuntos de Borel). Entonces $A(M) \subset P^V$ y $C(M) \subset Q^V$.

Vemos así que los reales aleatorios son objetos esencialmente distintos a los reales de Cohen. En esta línea vamos a probar también que al añadir reales de Cohen a un modelo no aparecen reales aleatorios. Para ello probaremos un resultado general que requiere algunos conceptos previos:

Definición 6.5 Un c.p.o. $\mathbb{P}$ está *centrado* si todo subconjunto finito de $\mathbb{P}$ tiene cota inferior. Diremos que $\mathbb{P}$ está *σ-centrado* si es unión numerable de subconjuntos centrados.

Es claro que todo c.p.o. σ-centrado cumple la c.c.n. Por otro lado, todo c.p.o. numerable (por ejemplo $2^{<\omega}$) está trivialmente σ-centrado. En realidad, si $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ es un cardinal infinito, el c.p.o. $2^{<\kappa}$ está σ-centrado. Basta tener en cuenta que el espacio topológico ${}^\kappa 2$ es separable [T 8.7] y si $\{d_n\}_{n\in\omega}$ es un conjunto denso, entonces $\mathbb{P}_n = \{s \in 2^{<\omega} \mid s \subset d_n\}$ es un c.p.o. centrado y $2^{<\omega} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathbb{P}_n$.

Teorema 6.6 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC, *sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. σ-centrado y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces $A(M)^{M[G]} = \varnothing$.*

Demostración: Pongamos que $\mathbb{P} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathbb{P}_n$, donde cada $\mathbb{P}_n$ está centrado. Todo elemento de $\mathcal{C}^{M[G]}$ es de la forma σ_G, donde $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ cumple $\mathbb{1} \Vdash \sigma \in \mathcal{C}$. Vamos a probar que

$$\bigwedge mn \in \omega \bigvee s \in {}^m 2 \bigwedge p \in \mathbb{P}_n \bigvee q \in \mathbb{P}(q \leq p \wedge q \Vdash \check{s} \subset \tau).$$

En caso contrario, existen $m, n \in \omega$ tales que para cada $s \in {}^m 2$ existe un $p_s \in \mathbb{P}_n$ tal que $\bigwedge q \leq p_s \neg q \Vdash \check{s} \subset \tau$. Esto implica que $p_s \Vdash \check{s} \not\subset \tau$. Como $\mathbb{P}_n$ está centrado todos los p_s tienen una extensión común p, la cual fuerza que τ no extiende a ningún elemento de ${}^m 2$, lo cual es absurdo.

Fijemos ahora (en M) una enumeración $\{\mathbb{Q}_n\}_{n\in\omega}$ de los conjuntos $\mathbb{P}_n$ de modo que cada uno aparezca infinitas veces. Por lo que acabamos de probar, existe $s_n \in {}^n 2$ tal que $\bigwedge p \in \mathbb{Q}_n \bigvee q \leq p \; q \Vdash \check{s}_n \subset \tau$.

Tomamos $B = \bigcap\limits_{m\in\omega} \bigcup\limits_{n\geq m} B^M_{s_n} \in M$, y es claro que $B^{M[G]} = \bigcap\limits_{m\in\omega} \bigcup\limits_{n\geq m} B^{M[G]}_{s_n}$. Además $m(B_{s_n}) = 1/2^n$, de donde se sigue inmediatamente que $m(B) = 0$. Si probamos que $\tau_G \in B^{M[G]}$ tendremos que τ_G no es aleatorio, y como τ_G es un real arbitrario, podremos concluir que $A(M)^{M[G]} = \varnothing$.

Si $\tau_G \notin B^{M[G]}$, existe un $p \in G$ y un $m \in \omega$ de modo que $p \Vdash \tau \notin \bigcap\limits_{n\geq\check{m}} B_{\check{s}_n}$, luego $\bigwedge n \geq m \; p \Vdash \check{s}_n \not\subset \tau$. Podemos tomar $n \geq m$ tal que $p \in \mathbb{Q}_n$, pero entonces existe un $q \leq p$ tal que $q \Vdash \check{s}_n \subset \tau$, luego también $p \Vdash \check{s}_n \subset \tau$, contradicción. ■

En particular, si partimos de un modelo de ZFC + $V = L$, una extensión con $2^{<\omega}$ nos proporciona un modelo en el que $A(L) = \varnothing$, $C(L) \neq \varnothing$.

Ejercicio: Probar que $\mathbb{P} = 2^{<\kappa}$ no añade reales aleatorios a un modelo. AYUDA: si $x \in \mathcal{C}^{M[G]}$ existe $A \subset \kappa$ numerable tal que $x \in M[H]$, donde H es $\mathrm{Fn}(A, 2, \aleph_0)$-genérico sobre M. Por lo tanto, si $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$, es consistente que $|C(L)| = \kappa$ y $A(L) = \varnothing$.

Ahora vamos a ver que es consistente que $A(L) \neq \varnothing \neq C(L)$. Para ello necesitamos algunos resultados previos:

Teorema 6.7 *Sea $A \subset \mathcal{C}$ un conjunto tal que $m^*(A) > 0$ y sea $0 < \epsilon < 1$. Entonces existe un abierto cerrado B tal que $m(B) < \epsilon$ y*

$$m^*(A \cap B) \geq (1 - \epsilon)\, m(B).$$

DEMOSTRACIÓN: Por definición de la medida exterior existe una familia B_n de abiertos cerrados en $\mathcal{C}$ tal que $A \subset \bigcup\limits_{n \in \omega} B_n$ y $\sum\limits_{n \in \omega} m(B_n) < m^*(A)/(1 - \epsilon)$. Podemos suponer además que $m(B_n) < \epsilon$. Así

$$(1 - \epsilon) \sum_{n \in \omega} m(B_n) < m^*(A) \leq \sum_{n \in \omega} m^*(B_n \cap A),$$

luego tiene que existir un n tal que $(1 - \epsilon)\, m(B_n) \leq m^*(B_n \cap A)$. ■

Teorema 6.8 *Si $A_1, A_2 \subset \mathcal{C}$ son subconjuntos de medida positiva, entonces $A_1 + A_2$ tiene interior no vacío.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior existen abiertos cerrados B_1 y B_2 tales que $m(A_i \cap B_i) > \frac{1}{2} m(B_i)$. Si $B_i = B_{s_i}$, con $s_i \in 2^{<\omega}$, es fácil ver que podemos extender adecuadamente cada s_i conservando la desigualdad, luego podemos suponer que $\ell(s_1) = \ell(s_2) = n$. Basta probar que $B_{s_1+s_2} \subset A_1 + A_2$. En caso contrario sea $z \in B_{s_1+s_2} \setminus (A_1 + A_2)$. En particular

$$(z + (A_1 \cap B_{s_1})) \cap (A_2 \cap B_{s_2}) = \varnothing.$$

Como $z + (A_1 \cap B_{s_1}) = (z + A_1) \cap (z + B_{s_1}) = (z + A_1) \cap B_{s_2}$ (porque $z \in B_{s_1+s_2}$), concluimos que $((z + A_1) \cap B_{s_2}) \cap (A_2 \cap B_{s_2}) = \varnothing$, pero

$$m((z + A_1) \cap B_{s_2}) = m(A_1 \cap B_{s_1}) > \frac{1}{2} m(B_{s_1}) = \frac{1}{2}\, m(B_{s_2}),$$

y por otra parte $m(A_2 \cap B_{s_2}) > \frac{1}{2} m(B_{s_2})$, lo que nos da una contradicción. ■

Como consecuencia:

Teorema 6.9 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC *y sea $G = G_1 \times G_2$ un filtro $\mathcal{B}_m^M \times \mathcal{B}_m^M$-genérico sobre M. Sean x, y los reales aleatorios definidos por G_1 y G_2, respectivamente. Entonces $x + y \in M[G] = M[x, y]$ es un real de Cohen.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $C \in M$ un cerrado de interior vacío en $\mathcal{C}^M$. Razonando en M, vamos a probar que el conjunto

$$D = \{([A_1],[A_2]) \in \mathcal{B}_m \times \mathcal{B}_m \mid (A_1 + A_2) \cap C = \varnothing\}$$

es denso en $\mathcal{B}_m \times \mathcal{B}_m$. Para ello tomamos $([A_1],[A_2]) \in \mathcal{B}_m$. Podemos sustituir A_i por

$$A_i \setminus \bigcup\{A_i \cap B_t \mid t \in 2^{<\omega} \wedge m(A \cap B_t) = 0\}$$

y así se cumple que si $B_t \cap A_i \neq \varnothing$, entonces $m(B_t \cap A_i) > 0$. Por el teorema anterior A_1+A_2 tiene interior no vacío, luego podemos tomar $B_s \subset (A_1+A_2)\setminus C$, con $s \in {}^n2$ (pues el complementario de C es abierto denso). Cualquier $z \in B_s$ se descompone como $z = z_1 + z_2$, con $z_i \in A_i$, luego $t_i = z_i|_n$ cumple que $A_i \cap B_{t_i} \neq \varnothing$, y entonces $m(A_i \cap B_{t_i}) > 0$. Llamando $A_i' = A_i \cap B_{t_i}$ tenemos que $([A_1'],[A_2']) \leq ([A_1],[A_2])$ y $A_1' + A_2' \subset B_s \subset \mathcal{C} \setminus C$, luego $([A_1'],[A_2']) \in D$.

Así podemos concluir que existe una condición $([A_1],[A_2]) \in D \cap (G_1 \times G_2)$, lo que se traduce en que $x+y \in A_1^{M[G]} + A_2^{M[G]} = (A_1+A_2)^{M[G]} \subset \mathcal{C}^{M[G]} \setminus C^{M[G]}$, luego $x+y$ no pertenece a ningún cerrado de interior vacío con código en M, luego tampoco a ningún conjunto de Borel de primera categoría con código en M. Por 6.3 esto implica que $x+y$ es un real de Cohen. ■

Aplicando el teorema anterior a un modelo de ZFC + $V = L$ obtenemos la consistencia de que $A(L) \neq \varnothing \neq C(L)$. Más adelante veremos que también es consistente que $A(L) \neq \varnothing = C(L)$, así como que $A(L) = C(L) = \varnothing$ (pero a la vez $\mathcal{C}^L \subsetneq \mathcal{C}$).

Para enunciar el teorema siguiente tenemos que observar que una función medible Borel $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ es un conjunto de Borel $f \subset \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, por lo que podemos extenderla a una extensión genérica como cualquier otro conjunto de Borel.

Teorema 6.10 *Sea M un modelo transitivo de* ZF + ED *y sea $\mathbb{B}$ el álgebra de medida o de categoría en M. Sea G un ultrafiltro $\mathbb{B}$-genérico sobre M, sea $r \in M[G]$ el real genérico determinado por G y sea $x \in \mathcal{C}^{M[G]}$. Entonces existe una función medible Borel^M, $f : \mathcal{C}^M \longrightarrow \mathcal{C}^M$, tal que $f^{M[G]} : \mathcal{C}^{M[G]} \longrightarrow \mathcal{C}^{M[G]}$ y $x = f^{M[G]}(r)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $x = \sigma_G$, de modo que $\|\sigma \in \mathcal{C}\| = \mathbb{1}$. Para cada $n \in \omega$, elegimos en M un conjunto de Borel $A_n \subset \mathcal{C}^M$ tal que $\|\sigma(\check{n}) = 1\| = [A_n]$. Así $\{A_n\}_{n\in\omega} \in M$ y podemos definir

$$f = \bigcap_{n\in\omega} ((A_n \times C_n^M) \cup ((\mathcal{C}^M \setminus A_n) \times (\mathcal{C}^M \setminus C_n^M))),$$

donde $C_n = \{x \in \mathcal{C} \mid x(n) = 1\}$. Así:

$$(u,v) \in f \leftrightarrow \bigwedge n \in \omega((u \in A_n \wedge v(n) = 1) \vee (u \notin A_n \wedge v(n) = 0)).$$

Equivalentemente, $f : \mathcal{C}^M \longrightarrow \mathcal{C}^M$ es la aplicación (medible Borel) dada por

$$f(u)(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \in A_n, \\ 0 & \text{si } u \notin A_n. \end{cases}$$

A su vez,

$$f^{M[G]} = \bigcap_{n\in\omega}((A_n^{M[G]} \times C_n^{M[G]}) \cup ((\mathcal{C}^{M[G]} \setminus A_n^{M[G]}) \times (\mathcal{C}^{M[G]} \setminus C_n^{M[G]}))).$$

Equivalentemente, $f^{M[G]} : \mathcal{C}^{M[G]} \longrightarrow \mathcal{C}^{M[G]}$ es la aplicación dada por

$$f^{M[G]}(u)(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \in A_n^{M[G]}, \\ 0 & \text{si } u \notin A_n^{M[G]}. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$f^{M[G]}(r)(n) = 1 \leftrightarrow r \in A_n^{M[G]} \leftrightarrow \|\sigma(\check{n}) = 1\| = [A_n] \in G \leftrightarrow \sigma_G(n) = 1,$$

lo que significa que $f^{M[G]}(r) = x$. ■

Así pues, los elementos de $\mathcal{C}^{M[G]}$ pueden representarse en M mediante funciones medibles Borel. Veamos ahora una representación para los subconjuntos de Borel de $\mathcal{C}^{M[G]}$:

Teorema 6.11 *Sea M un modelo transitivo de* ZF + ED *y sea $\mathbb{B}$ el álgebra de medida o de categoría en M. Sea G un ultrafiltro $\mathbb{B}$-genérico sobre M, sea $r \in M[G]$ el real genérico determinado por G y sea $A \in M[G]$ un subconjunto de Borel de $\mathcal{C}^{M[G]}$. Entonces existe $B \in M$ tal que $B \subset \mathcal{C}^M \times \mathcal{C}^M$ es de Borel y $A = B_r^{M[G]}$. Si A es nulo (resp. de primera categoría), el conjunto B puede tomarse también nulo (resp. de primera categoría).*

Demostración: Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$, para cierto $\alpha < \omega_1$. El teorema [TD 6.29] nos da que existe un conjunto $U \in M$ que es $\mathcal{C}^M$-universal para $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(\mathcal{C})^M$ tal que $U^{M[G]}$ es $\mathcal{C}^{M[G]}$-universal para $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(\mathcal{C})^{M[G]}$. Por consiguiente, podemos tomar un $x \in \mathcal{C}^{M[G]}$ tal que $A = U_x^{M[G]}$. Por el teorema anterior podemos tomar $f \in M$ tal que $f : \mathcal{C}^M \longrightarrow \mathcal{C}^M$ es medible Borel y $f^{M[G]}(r) = x$. Consideramos entonces

$$B = \{(x, y) \in \mathcal{C}^M \times \mathcal{C}^M \mid (f(x), y) \in U\}.$$

Ciertamente es un conjunto de Borel en M. Vamos a ver que

$$B^{M[G]} = \{(x, y) \in \mathcal{C}^{M[G]} \times \mathcal{C}^{M[G]} \mid (f^{M[G]}(x), y) \in U^{M[G]}\},$$

con lo que

$$y \in B_r^{M[G]} \leftrightarrow (r, y) \in B^{M[G]} \leftrightarrow (x, y) \in U \leftrightarrow y \in U_x = A$$

y el teorema estará probado. Ahora bien, si $B = B_e^M$, $f = B_c^M$, $U = B_d^M$, la relación

$$c, d, e \in \mathrm{CB} \wedge \bigwedge xy \in \mathcal{N}((x, y) \in B_e \leftrightarrow \bigwedge z \in \mathcal{N}((x, z) \in B_c \wedge (x, y) \in B_d))$$

es Π^1_1 (teniendo en cuenta que $\bigwedge z$ puede cambiarse por $\bigvee z$), luego las extensiones cumplen la misma relación.

Consideremos ahora el caso en que $\mathbb{B} = \mathcal{B}_c$ y que el conjunto A es de primera categoría. Entonces $A \subset \bigcup\limits_{n\in\omega} F_n$, donde $\{F_n\}_{n\in\omega} \in M[G]$ es una sucesión de cerrados de interior vacío. Para cada n, existe un conjunto $I_n \subset 2^{<\omega}$ tal que $F_n = \bigcap\limits_{s\in I_n} (\mathcal{C} \setminus B_s)^{M[G]}$. Sea σ un nombre para la función $\sigma_G(n) = I_n$ tal que

$$\|\bigcup_{n\in\omega}\bigcap_{s\in\sigma(n)} (\mathcal{C} \setminus B_s) \in I_c\| = \mathbb{1}.$$

En M podemos elegir conjuntos de Borel T_{sn} tales que $[T_{sn}] = \|\check{s} \in \sigma(\check{n})\|$. Más aún, por [TC 7.65] podemos exigir que T_{sn} sea abierto en $\mathcal{C}$ y entonces $[T_{sn}] = [\overline{T}_{sn}]$. Definimos

$$D = \bigcup_{n\in\omega}\bigcap_{s\in 2^{<\omega}} ((\overline{T}_{sn} \times (\mathcal{C} \setminus B_s)^M) \cup ((\mathcal{C}^M \setminus T_{sn}) \times \mathcal{C}^M)) \in M.$$

Veamos que $A \subset D_r^{M[G]}$. En efecto, si $a \in A$, entonces existe un $n \in \omega$ tal que $a \in F_n$ y así, para cada $s \in 2^{<\omega}$, si $s \in I_n$ tenemos que $r \in T_{sn}^{M[G]}$ y $a \in (\mathcal{C} \setminus B_s)^{M[G]}$, mientras que si $s \notin I_n$ entonces $r \in (\mathcal{C} \setminus T_{sn})^{M[G]}$. En ambos casos $(r, a) \in D^{M[G]}$.

Ahora basta probar que D es de primera categoría, pues entonces la intersección de D con el conjunto B que hemos construido cumple lo requerido. Como las intersecciones que aparecen en la definición de D son cerradas, basta probar que todas ellas tienen interior vacío. Si esto no se cumple para un n, existen $p, q \in 2^{<\omega}$ tales que

$$B_p^M \times B_q^M \subset \bigcap_{s\in 2^{<\omega}} ((\overline{T}_{sn} \times (\mathcal{C} \setminus B_s)^M) \cup ((\mathcal{C}^M \setminus T_{sn}) \times \mathcal{C}^M)).$$

Ahora cambiamos el ultrafiltro G por otro que defina un real genérico r tal que $p \subset r$. Entonces, si $y \in B_q^{M[G]}$, resulta que $(r, y) \in B_p^{M[G]} \times B_q^{M[G]}$, luego, para todo $s \in 2^{<\omega}$ tal que $s \in \sigma_G(n)$, tenemos que $r \notin (\mathcal{C} \setminus T_{sn})^{M[G]}$, luego $y \in (\mathcal{C} \setminus B_s)^{M[G]}$, con lo que hemos probado la inclusión

$$B_q \subset \bigcap_{s\in\sigma_G(n)} (\mathcal{C} \setminus B_s)^{M[G]}$$

y el miembro derecho es de segunda categoría, en contra de la elección de σ.

Finalmente, supongamos que $\mathbb{B} = \mathcal{B}_m$ y que A es nulo. Sea

$$\gamma = \{(\text{p.o.}(\check{n}, \check{k}), [B_s]) \mid s \in 2^{<\omega} \wedge (n, k) \in s\} \in M$$

el nombre canónico para r y sea $P \in M$ tal que $[P] = \|B_\gamma \in I_m\|$, de modo que $r \in B^{M[G]}$. Llamamos $B' = (P \times \mathcal{C}^M) \cap B \in M$, de modo que claramente $B'_r = B_r = A$. Basta probar que B'^M es nulo.

En caso contrario lo mismo le sucede a $B'^{M[G]}$ luego, por el teorema de Fubini, existe un conjunto de Borel $P_0 \subset P^{M[G]}$ de medida positiva tal que todo $u \in P_0$ cumple que $B_u'^{M[G]}$ es no nulo.

Ahora usamos un resultado que demostraremos en la sección siguiente en un contexto un poco más general (teorema 6.20): en $M[G]$, todo conjunto medible no nulo contiene un real aleatorio. Así pues, existe un real aleatorio $x \in P_0 \subset M[G]$, de modo que $B_x'^{M[G]} = B_x^{M[G]}$ es no nulo. Como $x \in P^{M[G]}$, si H es el ultrafiltro en $\mathcal{B}_m$ que determina a x, se cumple que $[P] \in H$, luego $B_x^{M[x]}$ es nulo, luego también $B_x^{M[G]}$ es nulo, contradicción. ■

Como aplicación obtenemos:

Teorema 6.12 *Si r es un real aleatorio (resp. de Cohen) sobre un modelo transitivo M de* ZFC *y $H \in M[r]$ es un subconjunto de Borel nulo (resp. de primera categoría) de $\mathcal{C}^{M[r]}$, existe un subconjunto de Borel nulo (resp. de primera categoría) $H^* \in M$ de $\mathcal{C}^M$ tal que $H \cap \mathcal{C}^M \subset H^*$. En particular, si $X \in M$ es un subconjunto no nulo (resp. de segunda categoría) de $\mathcal{C}^M$, entonces sigue siendo no nulo (resp. de segunda categoría) en $M[r]$.*

Demostración: Por el teorema anterior existe un conjunto de Borel nulo (resp. de primera categoría) $B \in M$, $B \subset \mathcal{C}^M \times \mathcal{C}^M$ tal que $H = B_r^{M[r]}$. Sea

$$H^* = \{y \in \mathcal{C}^M \mid B^y \notin I\},$$

donde $I = I_m$ (resp. $I = I_c$) y $B^y = \{x \in \mathcal{C}^M \mid (x, y) \in B\}$. Por el teorema de Fubini (o su análogo para la categoría) sabemos que[2] $H^* \in I$. Si $y \in H \cap \mathcal{C}^M$, entonces $y \in B_r^{M[r]}$, luego $r \in (B^{M[r]})^y = (B^y)^{M[r]}$, que es un conjunto de Borel con código en M, luego $B^y \notin I$, luego $y \in H^*$.

Si $X \in M$ es no nulo (resp. de segunda categoría) pero en $M[r]$ es nulo (resp. de primera categoría), entonces existe un conjunto de Borel $H \in M[r]$ nulo (resp. de primera categoría) tal que $X \subset H$, luego $X = X \cap \mathcal{C}^M \subset H \cap \mathcal{C}^M \subset H^*$, con lo que X sería nulo (resp. de primera categoría) en M, contradicción. ■

Observemos que se cumple un recíproco del teorema 6.11:

Teorema 6.13 *Si r es un real aleatorio (resp. de Cohen) sobre un modelo transitivo M de* ZFC *y $B \subset \mathcal{C}^M \times \mathcal{C}^M$ es un conjunto de Borel nulo (resp. de primera categoría) en M, entonces $B_r^{M[r]}$ es nulo (resp. de primera categoría) en $M[r]$.*

Demostración: Consideramos primero el caso en que r es aleatorio y observamos que $B \subset \bigcap\limits_{n\in\omega} G_n$, donde cada G_n es abierto y $m(G_n) < 1/(n+1)$. Podemos suponer además que $G_{n+1} \subset G_n$. A su vez, expresamos $G_n = \bigcup\limits_{s\in I_n} B_s$, para cierto $I_n \subset \omega$. Podemos suponer además que los abiertos básicos B_s, con $s \in I_n$, son disjuntos dos a dos. Podemos construir explícitamente el código de Borel $d \in \Pi_2^c$ del G_δ determinado por la intersección de los G_n.

[2]Puede probarse que H^* es de Borel, pero para demostrar este teorema no es necesario, ya que podemos extenderlo hasta un conjunto de Borel en I (un G_δ en el caso de la medida y un F_σ en el de la categoría.

Concretamente, es el determinado por las condiciones:

$$d(0) = 0, \quad u(d)(0) = 1, \quad v_n(u(d))(0) = 0, \quad u(v_n(u(d)))(0) = 2,$$
$$u(v_n(u(d)))(s+1) = 1 \leftrightarrow s \in I_n.$$

Así, $B \subset B_d^M = \bigcap\limits_{n\in\omega} \bigcup\limits_{u(v_n(u(d)))(s+1)=1} B_s$. Basta probar que $(B_d)_r^{M[r]}$ es nulo. Para ello basta probar que existe una relación aritmética $R(x,d)$ tal que si d es el código de Borel de un G_δ en $\mathcal{C}\times\mathcal{C}$ en las condiciones anteriores (una intersección de una sucesión decreciente de abiertos, cada uno de los cuales es unión disjunta de abiertos básicos), entonces

$$R(x,d) \leftrightarrow (B_d)_x \in I_m.$$

Admitiendo esto, tenemos que el conjunto $\{x \in \mathcal{C} \mid (B_d)_x \in I_m\}$ es aritmético en d, luego es de Borel, luego podemos expresarlo como B_c, para cierto código de Borel c, y la relación

$$c \in \mathrm{CB} \land d \in \mathrm{CB} \land \bigwedge x \in \mathcal{C}(x \in B_c \leftrightarrow (B_d)_x \in I_m)$$

es Π^1_1, luego es absoluta para modelos transitivos de ZFC. Esto significa que

$$B_c^{M[r]} = \{x \in \mathcal{C}^M \mid (B_d^M)_x \in I_m\}^{M[r]} = \{x \in \mathcal{C}^{M[r]} \mid (B_d^{M[r]})_x \in I_m\}$$

es un conjunto de Borel en $M[r]$ con código en M. Como B_d^M es nulo, se cumple que $\mathcal{C}^M \setminus B_c^M \in I_m$ (por el teorema de Fubini), luego $\mathcal{C}^{M[r]} \setminus B_c^{M[r]} \in I_m$, luego $r \in B_c^{M[r]}$, que es lo que había que probar.

Ahora bien, si d es un código de Borel en las condiciones indicadas,

$$(B_d)_x \in I_m \leftrightarrow \lim_n m((G_n)_x) = 0 \leftrightarrow \bigwedge m \in \omega \bigvee n \in \omega\ m((G_n)_x) \leq 1/(m+1)$$
$$\leftrightarrow \bigwedge m \in \omega \bigvee n \in \omega \bigwedge k \in \omega\ \sum_{*} 1/2^{\ell(s_1)} \leq 1/(m+1),$$

donde s_1 es el número natural que codifica a la sucesión de términos impares de la sucesión codificada por s y el sumatorio $*$ recorre los naturales $s \leq k$ tales que $u(v_n(u(d)))(s+1) = 1$ y la sucesión s_0 de los términos pares de s cumple $s_0 \subset x$. Es claro que, así expresada, la relación es aritmética en x y en d.

La prueba en el caso en que r es de Cohen es similar, sólo que ahora tenemos que $B \subset B_d = \bigcup\limits_{n\in\omega} F_n$, donde los F_n son cerrados de interior vacío. Los expresamos como $F_n = \bigcap\limits_{s\in I_n} (\mathcal{C} \setminus B_s)$, de modo que el código $d \in \Sigma_2^c$ viene determinado por

$$d(0) = 1, \quad v_n(d)(0) = 0, \quad u(v_n(d))(0) = 2, \quad u(v_n(d))(s+1) = 1 \leftrightarrow s \in I_n.$$

Como antes, todo se reduce a probar que la relación $(B_d)_x \in I_c$ es aritmética, y en efecto,

$$(B_d)_x \in I_c \leftrightarrow \bigwedge n \in \omega\ \mathring{F}_{nx} = \varnothing \leftrightarrow \bigwedge nt \in \omega\ B_t \not\subset F_{nx} \leftrightarrow$$

$$\bigwedge nt\in\omega\bigvee y\in\mathcal{C}(y\in B_t\land(x,y)\notin F_n)\leftrightarrow$$

$$\bigwedge nt\in\omega\bigvee y\in\mathcal{C}(t\subset y\land\bigvee s\in I_n\ (x,y)\in B_s)\leftrightarrow$$

$$\bigwedge nt\in\omega\bigvee y\in\mathcal{C}(t\subset y\land\bigvee s\in\omega(u(v_n(d))(s+1)=1\land s\subset\langle x,y\rangle))\leftrightarrow$$

$$\bigwedge nt\in\omega\bigvee u\in\omega(t\subset u\land\bigvee s\in\omega(u(v_n(d))(s+1)=1\land s\subset\big\langle x|_{\ell(u)},u\big\rangle)),$$

que claramente es una relación aritmética en x y en d. ■

Nota El argumento del teorema anterior nos proporciona a su vez un refinamiento del teorema 6.11. A saber, si A es nulo (resp. de primera categoría), el conjunto B puede tomarse con todas sus secciones nulas (resp. de primera categoría).

En efecto, ya sabemos que se puede tomar nulo (resp. de primera categoría), y en la prueba del teorema anterior hemos visto que podemos construir códigos de Borel c, d tales que $B\subset B_d$, $B_c=\{x\in\mathcal{C}\mid (B_d)_x\in I\}$ y la relación

$$c\in\mathrm{CB}\land d\in\mathrm{CB}\land\bigwedge x\in\mathcal{C}(x\in B_c\leftrightarrow(B_d)_x\in I_*)$$

es Π^1_1. Si $B'=B\cap(B_c\times\mathcal{C}^M)$, entonces $B'^{M[r]}=B^{M[r]}\cap(B_c^{M[r]}\times\mathcal{C}^{M[r]})$ y como $r\in B_c^{M[r]}$, tenemos que $A=B_r^{M[r]}=B_r'^{M[r]}$, pero B' tiene todas sus secciones en I_*. ■

6.2 Adjunción de infinitos reales aleatorios

Si κ es un cardinal infinito, sabemos que una extensión genérica con el orden $\mathbb{P}=\mathrm{Fn}(\kappa,2,\aleph_0)$ (o con $2^{<\kappa}$) sobre un modelo transitivo M de ZFC añade κ reales de Cohen a M. Vamos a ver ahora cómo añadir κ reales aleatorios a un modelo dado.

En general, si I es un conjunto arbitrario, podemos considerar la medida de Haar unitaria m en el cubo de Cantor 2^I (véase el final de la sección 10.8 de [T]), que está determinada como la única medida de Borel unitaria regular en 2^I respecto a la que los cilindros

$$C_J(Y)=\{f\in 2^I\mid f|_J\in Y\},\qquad\text{con } J\subset I\text{ finito, } Y\subset 2^J,$$

tienen medida $|Y|/2^{|J|}$. Definimos $\mathbb{B}_I$ como el álgebra cociente de la σ-álgebra de Borel de 2^I sobre el ideal I_m formado por los conjuntos de medida nula. Por [TC 7.59] se trata de un álgebra de Boole completa.

Notemos que los cilindros son una base de abiertos cerrados de 2^I, pero no podemos asegurar que todo abierto sea una unión numerable de cilindros. Pese a ello, si llamamos $\mathcal{A}_I\subset B(2^I)$ a la σ-álgebra generada por los cilindros, es fácil ver que la inclusión induce un isomorfismo de álgebras de Boole

$$\mathcal{A}_I/(I_m\cap\mathcal{A}_I)\longrightarrow B(2^I)/I_m=\mathbb{B}_I.$$

En efecto, ciertamente se trata de un monomorfismo de álgebras y, si $[B] \in \mathbb{B}_I$, podemos tomar abiertos $B \subset U_n$ tales que $m(U_n) - m(B) < 1/n$, con lo que $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ cumple que $B \subset G$ y $m(G \setminus B) = 0$, luego $[B] = [G]$ y podemos suponer que $B = G$.

Por otra parte, aproximando la medida de U_n por la de un subconjunto compacto $K_{nm} \subset U_n$, de modo que $m(U_n) - m(K_{nm}) < 1/m$, podemos suponer que K_{nm} es una unión finita de cilindros, con lo que $K_{mn} \in \mathcal{A}_I$, y también $F_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_{nm} \in \mathcal{A}_I$ y $m(F_n) = m(U_n)$. Por último, $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{A}_I$ y, por [TC 7.59],

$$[B] = \bigwedge_{n=1}^{\infty} [U_n] = \bigwedge_{n=1}^{\infty} [F_n] = [F],$$

luego $[B]$ tiene antiimagen en $\mathcal{A}_I/(I_m \cap \mathcal{A}_I)$.

La ventaja de restringirnos a la σ-álgebra $\mathcal{A}_I$ es que el teorema [T B.14] nos da que la restricción de m es la única medida en $\mathcal{A}_I$ (sin exigir regularidad) que sobre los cilindros viene dada por $m(C_J(Y)) = |Y|/2^{|J|}$.

Si partimos $I = J \cup J'$ en unión de dos conjuntos disjuntos, tenemos un homeomorfismo natural $f : 2^I \longrightarrow 2^J \times 2^{J'}$ a través del cual los cilindros se corresponden con productos de cilindros, por lo que f hace corresponder $\mathcal{A}_I$ con el álgebra producto $\mathcal{A}_J \times \mathcal{A}_{J'}$ y es claro que la medida en $\mathcal{A}_I$ dada por $m(A) = (m_J \times m_{J'})(f[A])$ coincide con la medida de Haar m_I sobre los cilindros, luego $m_I = m_J \times m_{J'}$.

A partir de aquí identificaremos 2^I con $2^J \times 2^{J'}$ y dejaremos explicitar el homeomorfismo f. Así, (la composición de f con) la proyección $p_{IJ} : 2^I \longrightarrow 2^J$, no es sino la aplicación dada por la restricción a J. Ésta induce a su vez un monomorfismo de álgebras $i_{JI} : \mathbb{A}_J \longrightarrow \mathbb{A}_I$ dado por $i_{JI}(A) = p_{IJ}^{-1}[A] = A \times 2^{J'}$. En efecto, es fácil ver que el conjunto

$$\{A \in \mathcal{P}2^J \mid p_{IJ}^{-1}[A] \in \mathcal{A}_I\}$$

es una σ-álgebra que contiene a los cilindros (la antiimagen de un cilindro es un cilindro), luego contiene a $\mathcal{A}_J$. Como

$$m_I(i_{JI}(A)) = (m_J \times m_{J'})(A \times 2^{J'}) = m_J(A),$$

en particular la imagen de un conjunto nulo es nula, luego i_{JI} induce un monomorfismo de álgebras $i_{JI} : \mathbb{B}_J \longrightarrow \mathbb{B}_I$. Vamos a probar que es un monomorfismo completo.

De acuerdo con [TC 7.43], basta probar que si $[A] \in \mathbb{B}_I \setminus \{\mathbb{O}\}$ existe un $[B] \in \mathbb{B}_J \setminus \{\mathbb{O}\}$ tal que si $[C] \leq [B]$ es una extensión no nula, entonces la intersección $i_{JI}(C) \cap A$ no es nula.

Supongamos, por el contrario, que para todo $B \in \mathcal{A}_J$ de medida positiva existe un $C \subset B$ de medida positiva tal que $(C \times 2^{J'}) \cap A$ es nulo. Tomamos una anticadena W en $\mathbb{B}_J \setminus \{\mathbb{O}\}$, maximal respecto de la inclusión, formada por condiciones $[B]$ tales que $(B \times 2^{J'}) \cap A$ sea nulo. Como $\mathbb{B}_J$ cumple la c.c.n., W es numerable, luego la unión de un representante de cada clase de W es un conjunto $Y \in \mathcal{A}_J$. Entonces $D = 2^J \setminus Y$ es nulo, pues en caso contrario contendría un $C \subset D$ tal que $W \cup \{[C]\}$ contradiría la maximalidad de W. Pero entonces A está cubierto por $D \times 2^{J'}$ y los $(B \times 2^{J'}) \cap A$ con $[B] \in W$, luego A está contenido en una unión numerable de conjuntos nulos, contradicción.

Para cada $i \in I$ y $k < 2$, sea $U_i^k = \{x \in 2^I \mid h(i) = k\}$ y $u_i^k = [U_i^k] \in \mathbb{B}_I$. Claramente $u_i^0 = (u_i^1)'$. Sea

$$\gamma = \{(\text{p.o.}(\check{n}, \check{0}), u_i^0) \mid i \in I\} \cup \{(\text{p.o.}(\check{n}, \check{1}), u_i^0) \mid i \in I\} \in V^{\mathbb{B}_I}.$$

De este modo, $\|\gamma \in 2^{\check{I}}\| = \mathbb{1}$ y $\|\gamma(\check{\imath}) = k\| = u_i^k$.

Si $f : \omega \longrightarrow I$ es una aplicación inyectiva, definimos

$$\xi_f = \{(\text{p.o.}(\check{n}, \check{0}), u_{f(n)}^0) \mid n \in \omega\} \cup \{(\text{p.o.}(\check{n}, \check{1}), u_{f(n)}^0) \mid n \in \omega\} \in V^{\mathbb{B}_I},$$

y es claro que $\|\xi_f \in \mathcal{C}\| = \mathbb{1}$ y $\|\xi_f(\check{n}) = k\| = u_{f(n)}^k$. Más aún, $\|\xi_f = \check{f} \circ \gamma\| = \mathbb{1}$.

Con esto ya podemos probar:

Teorema 6.14 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC*, sea $I \in M$ y sea $f : \omega \longrightarrow I$ inyectiva, $f \in M$. Sea G un ultrafiltro $\mathbb{B}_I^M$-genérico sobre M y sea $x_f = (\xi_f)_G \in \mathcal{C}^{M[G]}$. Entonces x_f es un real aleatorio sobre M. Además, si $g : \omega \longrightarrow I$ es inyectiva, con $g \in M$, y $f[\omega] \cap g[\omega] = \varnothing$, entonces $x_f \neq x_g$.*

DEMOSTRACIÓN: Llamamos $J = f[\omega] \subset I$ y consideramos la inmersión completa $i_{JI} : \mathbb{B}_J \longrightarrow \mathbb{B}_I$, que nos da un ultrafiltro $G_J = i_{JI}^{-1}[G]$ $\mathbb{B}_J$-genérico sobre M. Es claro que f induce un homeomorfismo $\mathcal{C} \cong 2^J$, que a su vez induce un isomorfismo $\mathcal{B}_c \cong \mathbb{B}_J$, a través del cual G_J se corresponde con un ultrafiltro G_0. Sea x el real aleatorio determinado por G_0.

Es claro que el abierto básico $U_n^1 = \{x \in \mathcal{C} \mid x(n) = 1\}$ se corresponde con $\bar{U}_n^1 = \{x \in 2^J \mid x(f(n)) = 1\}$, que a su vez cumple $i_{JI}([\bar{U}_n^1]) = [U_{f(n)}^1] = u_{f(n)}^1$. Observemos que la extensión a $M[G_0]$ de $(U_n^1)^M$ es $(U_n^1)^{M[G_0]}$, pues es claro que ambos abiertos básicos tienen el mismo código de Borel. Entonces

$$x(n) = 1 \leftrightarrow x \in (U_n^1)^{M[G_0]} \leftrightarrow [(U_n^1)^M] \in G_0 \leftrightarrow [(\bar{U}_n^1)^M] \in G_J$$

$$\leftrightarrow u_{f(n)}^1 \in G \leftrightarrow \gamma_G(f(n)) = 1 \leftrightarrow x_f(n) = 1,$$

luego $x_f = x$ es aleatorio.

Veamos ahora que, en las condiciones del enunciado, $\|\xi_f = \xi_g\| = \mathbb{0}$. En efecto, para todo $k \in \omega$, se cumple que

$$\|\xi_f|_{\check{k}} = \xi_g|_{\check{k}}\| = \|\bigwedge n < \check{k}(\xi_f(n) = 1 \leftrightarrow \xi_g(n) = 1)\|$$

$$= \bigwedge_{n<k} (u_{f(n)}^1 \leftrightarrow u_{g(n)}^1) = [N_k],$$

donde
$$N_k = \{t \in 2^I \mid \bigwedge n \in k\ t(f(n)) = t(g(n))\}.$$

Por lo tanto,

$$\|\xi_f = \xi_g\| \leq \bigwedge_{k \in \omega} \|\xi_f|_{\check{k}} = \xi_g|_{\check{k}}\| = \bigwedge_{k \in \omega} [N_k].$$

Ahora bien, $N_k = C_{f[k] \cup g[k]}(Y)$, donde

$$Y = \{t \in 2^{f[k] \cup g[k]} \mid \bigwedge n \in k\ t(f(n)) = t(g(n))\}.$$

Por consiguiente (y aquí usamos que $f[k] \cap g[k] = \varnothing$)

$$m(N_k) = \frac{|Y|}{2^{|f[k] \cup g[k]|}} = \frac{2^k}{2^{2k}} = \frac{1}{2^k}.$$

Así, para todo $k < \omega$, tenemos que $m(\|\xi_f = \xi_g\|) \leq m(N_k) = 1/2^k$, luego $m(\|\xi_f = \xi_g\|) = 0$, de donde $\|\xi_f = \xi_g\| = \mathbb{O}$. ■

En resumen, un filtro $\mathbb{B}_\kappa$-genérico sobre un modelo M determina una función genérica $\gamma_G : \kappa \longrightarrow 2$, tal que si la "troceamos" en sucesiones numerables, cada una de ellas es un real aleatorio distinto.

Ahora necesitamos un hecho elemental:

Teorema 6.15 *Si $A \subset \mathcal{P}X$ cumple $|A| \geq 2$ y $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra generada por A, entonces $|\mathcal{B}| \leq |A|^{\aleph_0}$. Si $|A|^{\aleph_0} = |A|$, entonces $|\mathcal{B}| = |A|$.*

Demostración: Definamos

$$A_0 = A, \quad \bigwedge \alpha < \omega_1\ A_{\alpha+1} = A_\alpha \cup \{X \setminus U \mid U \in A_\alpha\} \cup \{\bigcup_{n<\omega} f(n) \mid f \in A_\alpha^\omega\},$$

$$\bigwedge \lambda \leq \omega_1\ A_\lambda = \bigcup_{n<\omega} A_\delta.$$

Se comprueba inmediatamente que A_{ω_1} es cerrado para complementos y uniones numerables, por lo que es una σ-álgebra en X que contiene a A. Así pues, $\mathcal{B} \subset A_{\omega_1}$ (de hecho se da la igualdad). Por otra parte, una simple inducción prueba que si $\alpha < \omega_1$ entonces $|A_\alpha| \leq |A|^{\aleph_0}$, por lo que

$$|\mathcal{B}| \leq |A_{\omega_1}| \leq \aleph_1 |A|^{\aleph_0} = |A|^{\aleph_0}.$$

La segunda parte del teorema es inmediata. ■

Teorema 6.16 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC*, sea κ un cardinal infinito en M y sea G un ultrafiltro $\mathbb{B}_\kappa^M$-genérico sobre M. Entonces $M[G]$ contiene κ reales aleatorios sobre M. Además, $(2^{\aleph_0})^{M[G]} = (\kappa^{\aleph_0})^M$.*

Demostración: Basta fijar una biyección $f : \kappa \times \omega \longrightarrow \kappa$ en M y a partir de ella las funciones $f_\alpha(n) = f(\alpha, n)$, cada una de las cuales define un real aleatorio $x_{f_\alpha} \in M[G]$, y todos ellos son distintos entre sí. Por lo tanto, en $M[G]$ existen al menos κ reales aleatorios.

Esto implica que $(2^{\aleph_0})^{M[G]} \geq \kappa$, luego $(2^{\aleph_0})^{M[G]} \geq (\kappa^{\aleph_0})^{M[G]} \geq (\kappa^{\aleph_0})^M$.

Por otra parte, $(|\mathbb{B}_\kappa|^{\aleph_0} \leq \kappa^{\aleph_0})^M$, por 6.15, ya que en ${}^\kappa 2$ hay κ cilindros. Los teoremas 5.20 y 5.22 implican entonces que $(2^{\aleph_0})^{M[G]} \leq (\kappa^{\aleph_0})^M$. ■

Por consiguiente, los reales aleatorios pueden usarse como alternativa a los reales de Cohen para "hinchar" $\mathcal{C}$ y violar la hipótesis del continuo. Ahora necesitamos algunos resultados sobre medibilidad:

Teorema 6.17 *Si κ es un cardinal infinito y $A \subset \mathcal{C}$ es un conjunto medible no nulo, entonces $\mathbb{1}_{\mathbb{B}_\kappa} \Vdash \check{A}$ es no nulo (no necesariamente medible).*

Demostración: Basta probar el teorema relativizado a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Sea G un ultrafiltro $\mathbb{B}_\kappa^M$-genérico sobre M tal que en $M[G]$ el conjunto A sea nulo. Entonces existe una función $u : \omega \longrightarrow \mathcal{P}\omega^{<\omega}$ en $M[G]$ tal que, para cada $k \in \omega$, se cumple que

$$A \subset \bigcup_{s \in u(k)} B_s^{M[G]}, \qquad m\big(\bigcup_{s \in u(k)} B_s^{M[G]}\big) < 1/2^k.$$

Sea $u = \tau_G$, con $\tau \in M^{\mathbb{B}_\kappa}$, de modo que $\|\tau : \omega \longrightarrow \mathcal{P}\omega^{<\omega}\| = \mathbb{1}$. Sea

$$[T] = \big\|\bigwedge k \in \omega(\check{A} \subset \bigcup_{s \in \tau(k)} B_s \wedge m\big(\bigcup_{s \in \tau(k)} B_s\big) \leq 1/2^k)\big\| \in G.$$

Todo cuanto sigue se ha de entender relativizado a M. Fijamos $k \in \omega$ tal que $1/2^k < m(A)\, m(T)$. Notemos que $m(A) > 0$ por hipótesis, mientras que $m(T) > 0$ porque $T \in G$.

Si $s \in \omega^{<\omega}$, sea $A_s \in \mathbb{A}_\kappa$ tal que $[A_s] = [T] \wedge \|\check{s} \in \tau\|$. Cambiando el representante de la clase podemos suponer que $A_s \subset T$. Sea $\lambda = m \times m_\kappa$ el producto de la medida de $\mathcal{C}$ por la de 2^κ. Sea

$$E = \bigcup_{s \in \omega^{<\omega}} B_s \times A_s.$$

Vamos a probar que $\lambda(E) \leq 1/2^k$. Para ello basta probar que, para todo $x \subset \omega^{<\omega}$ finito,

$$\lambda\big(\bigcup_{s \in x} B_s \times A_s\big) \leq 1/2^k.$$

Si $a = [A] \leq [T]$, existen $c = [C] \leq a$ e $Y \subset x$ tales que

$$c \Vdash \tau \cap \check{x} = \check{Y} \quad \text{y} \quad m\big(\bigcup_{s \in Y} B_s\big) \leq 1/2^k.$$

En efecto, basta tomar un ultrafiltro genérico H tal que $a \in H$, $Y = \tau_H \cap x$ y $c \in H$ que fuerce esto. Como $[T] \in H$ se cumple

$$\Big(m\big(\bigcup_{s\in Y} B_s\big) \leq 1/2^k\Big)^{M[H]}$$

y, por consiguiente,

$$\Big(m\big(\bigcup_{s\in Y} B_s\big) \leq 1/2^k\Big)^{M},$$

ya que la unión finita de abiertos básicos tiene un código de Borel en M, y la medida sólo depende del código de Borel.

Con esto hemos probado que el conjunto

$$D = \{c \in \mathbb{B}_\kappa \mid \bigvee Y \subset x(c \Vdash \tau \cap \check{x} = \check{Y} \wedge m\big(\bigcup_{s\in Y} B_s\big) \leq 1/2^k)\}$$

es denso bajo $[T]$.

Más aún, si $c = [C] \in D$ ($c \leq [T]$) e Y cumple la definición de D, para cada $s \in x$, o bien $s \in Y$, en cuyo caso $[C] \leq [T] \wedge \|\check{s} \in \tau\| = [A_s]$, o bien $s \in x \setminus Y$, en cuyo caso $[A_s] \wedge [C] = \mathbb{O}$. Por lo tanto

$$\lambda\big(\bigcup_{s\in x} B_s \times \big(A_s \cap C\big)\big) = \lambda\big(\bigcup_{s\in Y} B_s \times \big(A_s \cap C\big)\big) = \lambda\big(\bigcup_{s\in Y} B_s \times C\big)$$

$$= m\big(\bigcup_{s\in Y} B_s\big)\, m(C) \leq m(C)/2^k.$$

Sea $\{[C_r]\}_{r<\omega}$ una anticadena maximal en D. Entonces $A_k \setminus \bigcup\limits_{r<\omega} C_r$ es nulo, o de lo contrario su clase en $\mathbb{B}_\kappa$ sería no nula y $\leq [T]$, luego tendría una extensión en D que permitiría extender la anticadena. Así pues,

$$\lambda\big(\bigcup_{s\in x} B_s \times A_s\big) = \lambda\big(\bigcup_{s\in x} B_s \times \big(A_s \cap \bigcup_{r<\omega} C_r\big)\big) = \lambda\big(\bigcup_{r<\omega}\bigcup_{s\in x} B_s \times \big(A_s \cap C_r\big)\big)$$

$$\leq \sum_{r<\omega} \lambda\big(\bigcup_{s\in x} B_s \times \big(A_s \cap C_r\big)\big) \leq \sum_{r<\omega} m(C_r)/2^k = \overline{m}\big(\bigcup_{r<\omega}[C_r]\big)/2^k \leq 1/2^k.$$

Tenemos, pues, que $\lambda(E) \leq 1/2^k < \lambda(A \times T)$, por la elección de k. Por consiguiente, $\lambda(A \times T \setminus E) > 0$. Por el teorema de Fubini existe un $a \in A$ tal que la sección $S = \{t \in T \mid (a,t) \notin E\}$ cumple $m(S) > 0$.

Como $[S] \leq [T]$, tenemos que $[S] \Vdash \check{A} \subset \bigcup\limits_{s\in\tau} B_s$, luego $[S] \Vdash \check{a} \in \bigcup\limits_{s\in\tau} B_s$.

Sea H un ultrafiltro genérico tal que $[S] \in H$, sea $s \in \tau_H$ tal que $a \in B_s^{M[H]}$, sea $[C] \in H$ tal que $[C] \Vdash \check{s} \in \tau$. Podemos exigir que $C \subset A \cap T$, pero entonces $[C] \leq [T] \wedge \|\check{s} \in \tau\| = [A_s]$, luego existe $t \in C \cap A_s$ y entonces $(a,t) \in E$, en contradicción con que $t \in S$. ■

En particular:

Teorema 6.18 *Si κ es un cardinal infinito, entonces $\mathbb{1}_{\mathbb{B}_\kappa} \Vdash \check{\mathfrak{C}}$ no es medible.*

Demostración: Basta tener en cuenta que, en las condiciones del teorema anterior, $\mathcal{C}^M$ es un conjunto final, y por el teorema anterior no es nulo, luego por el teorema [TC B.5], si es medible cumple $m(\mathcal{C}^M) = 1$, pero eso es imposible, pues si tomamos $x \in \mathcal{C}^{M[G]} \setminus \mathcal{C}^M$, entonces $x + \mathcal{C}^M$ también tendría medida 1, pero es disjunto con $\mathcal{C}^M$. ■

De aquí podemos deducir algo más general. Hemos visto que el conjunto $A(M) \subset \mathcal{C}$ de todos los reales aleatorios sobre un modelo transitivo numerable de ZFC es medible (de Borel) y cumple $m(A(M)) = 1$. Si el modelo M no es numerable esto ya no es cierto, pero algo podemos decir.

En primer lugar observamos que $A(M)$ es un conjunto final. En efecto, si $x \in A(M)$ y $x|_n = y|_n$, entonces $x = y + s$, donde $s \in \mathcal{C}$ es una sucesión finalmente nula, por lo que $s \in M$. Si B_c es un conjunto de Borel nulo con $c \in M$, entonces $s + B_c$ también lo es,[3] luego $x \notin s + B_c$, luego $y \notin B_c$, luego $y \in A(M)$, por 6.3.

No podemos aplicar el teorema [TC B.5] porque $A(M)$ no es necesariamente medible, pero sucede que [TC B.5] puede generalizarse a conjuntos no medibles:

Teorema 6.19 *Si $A \subset \mathcal{C}$ es un conjunto final, entonces $m^*(A) = 0$ (en cuyo caso es un conjunto nulo) o bien $m^*(A) = 1$.*

Demostración: Dado $0 < \epsilon < 1$, por el teorema 6.7 existe $s \in 2^{<\omega}$ tal que $m(B_s) < \epsilon$ y $m(A \cap B_s) \geq (1-\epsilon)\, m(B_s)$. Pongamos que $s \in {}^n2$. Entonces $\mathcal{C} = \bigcup\limits_{t \in {}^n2} (t+B_s)$ y la unión es disjunta. Ahora usamos un hecho que se demuestra en la prueba del teorema [TC B.17], y es que

$$m^*(A) = m^*(A \cap \bigcup_{t \in {}^n2} (t + B_s)) = \sum_{t \in {}^n2} m^*(A \cap (t + B_s)).$$

Finalmente usamos que, como A es final y m^* es invariante por traslaciones,

$$m^*(A \cap (t + B_s)) = m^*((t + A) \cap (t + B_s)) = m^*(t + (A \cap B_s))$$

$$= m^*(A \cap B_s) \geq (1-\epsilon)\, m(B_s) = (1-\epsilon)/2^n,$$

luego

$$m^*(A) \geq 2^n\, (1-\epsilon)/2^n = 1 - \epsilon.$$

Como ϵ es arbitrario, $m^*(A) \geq 1$, luego $m^*(A) = 1$. ■

Teorema 6.20 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC*, sea κ un cardinal infinito en M y sea G un ultrafiltro $\mathbb{B}_\kappa^M$-genérico sobre M. Entonces, en $M[G]$ se cumple que $m^*(A(M)) = m^*(\mathcal{C} \setminus A(M)) = 1$. En particular, todo conjunto medible no nulo en $M[G]$ contiene reales aleatorios.*

[3]Por ejemplo, porque la relación $c, d \in \mathrm{CB} \wedge B_d = s + B_c$ es Π^1_1, luego absoluta para modelos transitivos.

DEMOSTRACIÓN: Hemos visto que $A(M)$ es un conjunto final, luego $\mathcal{C}\setminus A(M)$ también lo es. Por el teorema anterior, la medida exterior de ambos es 0 o 1. Ahora bien, por el teorema 6.17 sabemos que el conjunto $\mathcal{C}^M$ no es nulo en $M[G]$ y $\mathcal{C}^M \subset \mathcal{C}^{M[G]} \setminus A(M)^{M[G]}$, luego $\mathcal{C} \setminus A(M)$ no puede ser nulo en $M[G]$.

Similarmente, si $x \in A(M)$, entonces $x + \mathcal{C}^M \subset A(M)$. En efecto, si $y \in \mathcal{C}^M$ y B es un conjunto de Borel no nulo con código en M, entonces $y + B$ tiene código en M, luego $x \notin y + B$, luego $x + y \notin B$, luego $x + y \in A(M)$, luego $x + \mathcal{C}^M \subset A(M)$. Como $x + \mathcal{C}^M$ tampoco es medible, concluimos que $A(M)$ tampoco es nulo.

Si $C \in M[G]$ es un conjunto medible no nulo, entonces contiene un cerrado no nulo K, luego $m(\mathcal{C}^{M[G]} \setminus K) < 1$, luego el abierto $\mathcal{C}^{M[G]} \setminus K$ no puede contener a $A(M)$. ■

Observemos que el teorema anterior implica que $A(M)$ no es medible. Si partimos de un modelo con $V = L$ obtenemos la consistencia de que $A(L)$ y $\mathcal{C} \cap L$ no sean medibles.

Nota Usando la aplicación $F : \mathcal{C} \longrightarrow [0, 1]$ descrita en el teorema [T 9.25] es fácil ver (teniendo en cuenta [T 10.81]) que si $\mathcal{C} \cap L$ no es medible, tampoco lo es $[0, 1] \cap L$ (respecto de la medida de Lebesgue), lo cual a su vez implica que tampoco lo es $\mathbb{R}^L$. Por lo tanto, es consistente que $\mathbb{R}^L$ no sea medible Lebesgue y que $\mathfrak{c}$ sea $\aleph_1$ o también un cardinal arbitrariamente grande. ■

El teorema 6.20 lo habíamos usado en la prueba de una parte de 6.11, luego a partir de este punto ya lo podemos usar libremente. Como primera aplicación refinamos el teorema 6.14:

Teorema 6.21 *En las condiciones del teorema* 6.14, $x_g \in A(M[x_f])$.

DEMOSTRACIÓN: Se trata de probar que x_g no sólo es aleatorio sobre M, sino también sobre $M[x_f]$. En caso contrario existe un conjunto de Borel nulo $A \in M[x_f]$ tal que $x_g \in A$. Por el teorema 6.11 existe un conjunto de Borel nulo $B \subset \mathcal{C}^M \times \mathcal{C}^M$ $(B \in M)$ tal que $A = B_{x_f}$. Así, $(x_f, x_g) \in B^{M[G]}$, pero esto es imposible, porque entonces $y = \langle x_f, x_g \rangle \in B'^{M[G]}$, donde $B' \subset \mathcal{C}^M$ es la imagen de B por el homeomorfismo canónico $\mathcal{C}^M \times \mathcal{C}^M \cong \mathcal{C}^M$, pero y es el real aleatorio definido por la aplicación $h : \omega \longrightarrow J$ dada por $h(2n) = f(n)$, $h(2n + 1) = g(n)$. Pero B' es nulo, y eso contradice la aleatoriedad de y. ■

Así, si x es un real aleatorio sobre M y lo partimos en dos reales y, z (es decir, $x = \langle y, z \rangle$ es la imagen de (y, z) por el homeomorfismo canónico, o, equivalentemente, la sucesión que resulta de intercalar los términos de y con los de z, entonces $M[x] = M[y, z] = M[y][z]$, de modo que z es aleatorio sobre $M[y]$. La segunda extensión puede obtenerse mediante $\mathcal{B}_m * \sigma$, donde $\|\sigma = \mathcal{B}_m\| = \mathbb{1}$, luego lo que tenemos es que $\mathcal{B}_m$ y $\mathcal{B}_m * \sigma$ producen las mismas extensiones genéricas. De hecho, puede probase que ambos c.p.o.s tienen compleciones isomorfas.

Lo mismo vale para $\mathcal{B}_c$ en lugar de $\mathcal{B}_m$ y, teniendo en cuenta que $2^{<\omega}$ es absoluto para modelos transitivos de ZFC, esto se traduce en que $2^{<\omega} \times 2^{<\omega}$ tiene la misma compleción que $2^{<\omega}$, a saber, el álgebra $\mathcal{B}_c$, como ya sabemos, pero en cambio veremos que no es cierto que la compleción de $\mathcal{B}_m \times \mathcal{B}_m$ sea $\mathcal{B}_m$. Esto se debe en parte al teorema 6.9, según el cual si añadimos un real aleatorio x con $\mathcal{B}_m^M$ y luego otro real y, no con $\mathcal{B}_m^{M[x]}$, sino otra vez con $\mathcal{B}_m^M$, en la extensión $M[x,y]$ hay reales de Cohen. Por el contrario, veremos que en una extensión por un real aleatorio no hay reales de Cohen, con lo que $\mathcal{B}_m \times \mathcal{B}_m$ no puede tener la misma compleción que $\mathcal{B}_m$.

Diremos que un conjunto $A \subset {}^\kappa 2$ tiene soporte $I \subset \kappa$ si $A = p_I^{-1}[B]$, para cierto $B \subset 2^I$, donde $p_I : {}^\kappa 2 \longrightarrow 2^I$ es la proyección. Es claro que cada cilindro en ${}^\kappa 2$ tiene soporte finito, de donde se sigue a su vez que todo elemento de $\mathbb{A}_\kappa$ tiene soporte numerable.[4]

Si $I \subset \kappa$ es numerable, una biyección $\omega \longrightarrow I$ determina una inmersión completa $i_I : \mathcal{B}_m \longrightarrow \mathbb{B}_\kappa$ cuya imagen está formada por todas las condiciones de soporte I.

Si τ es un buen $\mathbb{B}_\kappa$-nombre para un subconjunto de $\omega \times \omega$, como está determinado por una cantidad numerable de anticadenas de $\mathbb{B}_\kappa$, las cuales son a su vez numerables, podemos encontrar un conjunto numerable $I \subset \kappa$ tal que todos los elementos de dichas anticadenas tengan un representante con soporte I, y entonces es claro que existe un $\mathcal{B}_m$-nombre $\bar{\tau}$ tal que $\tau = i_I(\bar{\tau})$ (y $\bar{\tau}$ se puede definir explícitamente a partir de τ).

Esto se traduce en que si M es un modelo transitivo de ZFC, κ es un cardinal infinito en M y G es un ultrafiltro $\mathbb{B}_\kappa$-genérico sobre M, para cada $x \in \mathcal{N}^{M[G]}$ existe un real aleatorio $y \in M[G]$ tal que $x \in M[y]$. En efecto, basta tomar un buen nombre tal que $x = \sigma_G$, considerar su soporte I y tomar el real aleatorio definido por $G_I = i_I^{-1}[G]$, pues entonces $x = \sigma_G = \bar{\sigma}_{G_I} \in M[G_I] = M[y]$.

Usaremos esto en la prueba del teorema siguiente:

Teorema 6.22 *Si κ es un cardinal infinito y τ es un $\mathbb{B}_\kappa$-nombre que cumple $\|\tau \in \mathcal{N}\| = \mathbb{1}$, existe un $g \in \mathcal{N}$ tal que $\|\tau \leq^* \check{g}\| = \mathbb{1}$.*

Demostración: Podemos sustituir τ por un buen nombre para un subconjunto de $\omega \times \omega$. Sea I un soporte numerable y sea $\bar{\tau}$ un $\mathcal{B}_m$-nombre tal que $\tau = i_I(\bar{\tau})$. Si probamos el teorema para $\kappa = \omega$, tendremos que existe $g \in \mathcal{N}$ tal que $\|\bar{\tau} \leq^* \check{g}\| = \mathbb{1}$, luego, aplicando i_I, también $\|\tau \leq^* \check{g}\| = \mathbb{1}$.

Así pues, podemos suponer que τ es un $\mathcal{B}_m$-nombre. Para cada $n \in \omega$, las condiciones $\|\tau(\check{n}) \leq \check{k}\|$ forman una sucesión creciente con supremo $\mathbb{1}$, luego sus medidas tienden a 1. Esto nos permite definir $g(n)$ como el mínimo $k \in \omega$ que cumple $m(\|\tau(\check{n}) \leq \check{k})\|) > 1 - 1/2^n$. Así $m(\|\tau(\check{n}) \leq \check{g}(\check{n}))\|) > 1 - 1/2^n$, luego

$$m(\bigwedge_{n \geq m} \|\tau(\check{n}) \leq \check{g}(\check{n})\|) \geq 1 - 1/2^m,$$

[4]Basta descomponer $\mathbb{A}_\kappa$ como en la prueba del teorema 6.15 partiendo del conjunto de todos los cilindros y probar inductivamente que todos los elementos de cada conjunto A_α tiene soporte numerable.

luego

$$m(\|\tau \leq^* \check{g}\|) = m(\|\bigvee m \in \omega \bigwedge n \geq m\ \tau(n) \leq \check{g}(n)\|) =$$

$$m(\bigvee_{m\in\omega} \bigwedge_{n\geq m} \|\tau(\check{n}) \leq \check{g}(\check{n})\|) = 1.$$

Por consiguiente $\|\tau \leq^* \check{g}\| = \mathbb{1}$. ■

Con esto obtenemos que los cardinales $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{d}$ no se modifican al añadir reales aleatorios:

Teorema 6.23 *Si κ es un cardinal infinito, el álgebra $\mathbb{B}_\kappa$ cumple $\|\mathfrak{b} = \check{\mathfrak{b}}\| = \mathbb{1}$ y $\|\mathfrak{d} = \check{\mathfrak{d}}\| = \mathbb{1}$.*

Demostración: Basta probar que si M es un modelo transitivo numerable de ZFC, κ es un cardinal infinito en M y G es un ultrafiltro $\mathbb{B}_\kappa$-genérico sobre M, entonces $\mathfrak{b}^M = \mathfrak{b}^{M[G]}$ y $\mathfrak{d}^M = \mathfrak{d}^{M[G]}$.

Sea $f : \xi \longrightarrow \mathcal{N}$ una aplicación inyectiva $f \in M[G]$ cuya imagen no esté acotada respecto a $\leq^*$. Entonces $f = \sigma_G$, donde podemos elegir $\sigma \in M^{\mathbb{B}_\kappa}$ de modo que $\|\sigma : \check{\xi} \longrightarrow \mathcal{N}\| = \mathbb{1}$. Podemos construir nombres $\{\tau_\alpha\}_{\alpha<\xi} \in M$ tales que $\|\sigma(\check{\alpha}) = \tau_\alpha\| = \mathbb{1}$, luego en particular $\|\tau_\alpha \in \mathcal{N}\| = \mathbb{1}$. El teorema anterior nos da una sucesión $\{g_\alpha\}_{\alpha<\xi} \in M$ tal que $\|\tau_\alpha \leq^* \check{g}_\alpha\| = \mathbb{1}$. Entonces $\bigwedge \alpha < \xi\ f(\alpha) \leq^* g_\alpha$, luego la sucesión $\{g_\alpha\}_{\alpha<\xi}$ no está acotada en M, pues si lo estuviera la imagen de f estaría acotada en $M[G]$, luego $\mathfrak{b}^M \leq \xi$, luego $\mathfrak{b}^M \leq \mathfrak{b}^{M[G]}$.

Por otra parte, si $\{f_\alpha\}_{\alpha<\xi} \in M$ no está acotada en $\mathcal{N}^M$, tampoco lo está en $\mathcal{N}^{M[G]}$, ya que si $h \in M[G]$ fuera una cota, podríamos expresarla como $h = \tau_G$, con $\|\tau \in \mathcal{N}\| = \mathbb{1}$, y por el teorema anterior existiría $g \in \mathcal{N}^M$ tal que $\|\tau \leq^* \check{g}\| = \mathbb{1}$, luego $h \leq^* g$ y entonces g sería una cota de la sucesión de partida en $\mathcal{N}^M$, contradicción. Esto prueba que $\mathfrak{b}^{M[G]} \leq \mathfrak{b}^M$. El razonamiento con $\mathfrak{d}$ es análogo. ■

Por ejemplo, ahora podemos probar una versión mejorada de 5.55

Teorema 6.24 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC + HCG *y en M sean $\mathfrak{b}', \mathfrak{d}', \mathfrak{c}'$ cardinales tales que $\aleph_1 \leq \operatorname{cf} \mathfrak{b}' = \mathfrak{b}' \leq \mathfrak{d}' \leq \mathfrak{c}'$ y $\operatorname{cf} \mathfrak{c}' \geq \aleph_0$. Entonces existe un c.p.o. $\mathbb{P}$ con la c.c.n. tal que si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, en $M[G]$ se cumple que $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$, $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}'$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}'$.*

Demostración: En el modelo construido en 5.55 se cumple lo requerido salvo $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}'$. Por el teorema 6.16, basta añadir $\mathfrak{c}'$ reales aleatorios para obtener el modelo deseado. ■

La prueba del teorema siguiente muestra que la situación al añadir un real de Cohen es completamente distinta a la descrita por el teorema 6.22:

Teorema 6.25 *Si M es un modelo transitivo de* ZFC, *κ es un cardinal infinito en M y G es un ultrafiltro $\mathbb{B}_\kappa$-genérico sobre M, entonces $C(M)^{M[G]} = \varnothing$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $x \in M[G]$ es un real de Cohen. Entonces $M[x] = M[H]$, donde H es un filtro $\omega^{<\omega}$-genérico sobre M, el cual define una función genérica $f \in \mathcal{N}^{M[x]}$. Podemos representarla como $f = \tau_G$, con $\tau \in M^{\mathbb{B}_\kappa}$, y el teorema 6.22 nos da un $g \in \mathcal{N}^M$ tal que $f \leq^* g$, pero esto es imposible, ya que los conjuntos

$$D_m = \{p \in \omega^{<\omega} \mid \bigvee n \in \mathcal{D}p(n \geq m \land g(n) < p(n))\}$$

son densos en $\omega^{<\omega}$, lo que implica que existen infinitos valores de n para los cuales $g(n) < f(n)$. ■

En otros términos: los elementos de $\mathcal{N}$ en una extensión de un modelo M mediante reales aleatorios están dominados por $\mathcal{N}^M$, mientras que los reales genéricos producidos por $\omega^{<\omega}$ no lo están.

Con esto queda probado que, tal y como habíamos afirmado, $\mathcal{B}_m \times \mathcal{B}_m$ no tiene la misma compleción que $\mathcal{B}_m$, pues en las extensiones por $\mathcal{B}_m$ hay reales aleatorios, pero no de Cohen, mientras que 6.9 nos da que en las extensiones por $\mathcal{B}_m \times \mathcal{B}_m$ sí que los hay. También hemos probado la consistencia de que $C(L) = \varnothing \neq A(L)$.

6.3 Descomposiciones en cerrados disjuntos

Según [TC 8.48], el axioma de Martin, o simplemente AM($\aleph_1$) implica que un espacio polaco X no puede descomponerse en unión disjunta de $\aleph_1$ subconjuntos cerrados. En esta sección probaremos que también es consistente que $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ y que $[0,1]$ admita tal descomposición. (Notemos que si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ basta considerar la descomposición en puntos.)

Partimos del resultado siguiente:

Teorema 6.26 *Supongamos $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Entonces $\mathcal{C} = \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} F_\alpha$, donde los conjuntos F_α son conjuntos F_σ de primera categoría no vacíos disjuntos dos a dos y, para toda medida de Borel unitaria μ en $\mathcal{C}$, existe un $\beta < \omega_1$ tal que $\mu(\bigcup\limits_{\alpha<\beta} F_\alpha) = 1$.*

DEMOSTRACIÓN: Una medida de Borel en $\mathcal{C}$ está determinada por las imágenes que toma sobre una base numerable, luego hay exactamente $\mathfrak{c} = \aleph_1$ medidas de Borel unitarias en $\mathcal{C}$. Sea $\{\mu_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ una enumeración de todas ellas.

Supongamos construidos $\{F_\alpha\}_{\alpha<\beta}$, todos de primera categoría, de modo que $\mu_\alpha(\bigcup\limits_{\delta\leq\alpha} F_\delta) = 1$, para todo $\alpha < \beta$. Sea $F^* = \bigcup\limits_{\alpha<\beta} F_\alpha$, que es un F_σ de primera categoría.

Si $\mu_\beta(F^*) = 1$, definimos $F_\beta = \{x\}$, para cualquier $x \in \mathcal{C} \setminus F^*$, y claramente $\{F_\alpha\}_{\alpha<\beta+1}$ cumple lo requerido. En caso contrario, $\mu_\beta(\mathcal{C} \setminus F^*) > 0$. Tomamos entonces un subconjunto denso numerable $D \subset \mathcal{C}$ y, para cada $n \geq 1$, sea U_n

un abierto en $\mathcal{C}$ tal que $D \subset U_n$ y $\mu_\beta(U_n) < 1/n$. Sea $G = \bigcap\limits_n U_n$, de modo que G es un abierto denso, $D \subset G$ y $\mu_\beta(G) = 0$. Entonces

$$\mu_\beta(\mathcal{C} \setminus (F^* \cup G)) = \mu_\beta(\mathcal{C} \setminus F^*) > 0.$$

Tomando compactos $K_n \subset \mathcal{C} \setminus (F^* \cup G)$ que aproximen la medida de este conjunto y formando la unión de todos ellos, obtenemos un $F_\beta \subset \mathcal{C} \setminus F^*$, de tipo F_σ, tal que $\mu_\beta(F_\beta) = \mu_\beta(\mathcal{C} \setminus F^*)$, luego $\mu_\beta(\bigcup\limits_{\alpha \leq \beta} F_\alpha) = 1$. Como $G \subset \mathcal{C} \setminus F_\beta$ y G es un abierto denso, F_β es de primera categoría.

De este modo obtenemos una sucesión $\{F_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ que cumple lo requerido salvo que, tal vez, $R = \mathcal{C} \setminus \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} F_\alpha \neq \varnothing$. En tal caso, partimos $R = \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} R_\alpha$, con $|R_\alpha| \leq 1$ y cambiamos cada F_α por $F_\alpha \cup R_\alpha$. ■

Por otra parte, tenemos este hecho elemental:

Teorema 6.27 *Todo F_σ en $\mathcal{C}$ se puede expresar como unión numerable de cerrados disjuntos.*

Demostración: Sea $F = \bigcup\limits_{n\in\omega} C_n$, con cada C_n cerrado. Sea

$$C'_n = C_n \setminus \bigcup_{m<n} C_m,$$

de modo que $F = \bigcup\limits_{n<\omega} C'_n$.

Sea $G_n = \mathcal{C} \setminus \bigcup\limits_{m<n} C_m$. Como G_n es abierto, se puede poner como unión numerable de abiertos-cerrados básicos, $G_n = \bigcup\limits_{m\in\omega} B_{n,m}$, y claramente podemos tomarlos disjuntos dos a dos. Entonces

$$F = \bigcup_{n<\omega} (C_n \cap G_n) = \bigcup_{m,n\in\omega} (C_n \cap B_{n,m})$$

y los $C_n \cap B_{n,m}$ son cerrados disjuntos dos a dos, es decir,

$$(C_n \cap B_{n,m}) \cap (C_{n'} \cap B_{n',m'}) = \varnothing$$

salvo si $m = m'$, $n = n'$. En efecto, si $n < n'$, entonces $B_{n',m'} \subset \mathcal{C} \setminus C_n$, luego para que la intersección sea no vacía tiene que ser $n = n'$, y entonces $B_{n,m}$ y $B_{n,m'}$ son disjuntos. ■

Ahora sólo necesitamos adjuntar suficientes reales aleatorios:

Teorema 6.28 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC + HCG *y sea $M[G]$ una adjunción a M de cualquier cantidad κ de reales aleatorios. Entonces en $M[G]$ se cumple que $\mathcal{C}$ es unión de $\aleph_1$ cerrados de interior vacío disjuntos dos a dos.*

Demostración: Llamemos $N = M[G]$. De acuerdo con 6.26, podemos tomar una descomposición $\{F_\alpha\}_{\alpha<\omega_1^M}$ de $\mathcal{C}^M$ en ω_1^M conjuntos F_σ de interior vacío disjuntos dos dos de modo que, para toda medida de Borel unitaria μ en M, exista un $\beta < \omega_1^M$ tal que $\mu(\bigcup\limits_{\alpha<\beta} F_\alpha) = 1$.

Sea $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de Borel de $\mathcal{C}$ en M. Para cada $x \in \mathcal{C}^{M[G]}$, sea $x = \sigma_G$, tal que $\|\sigma \in \mathcal{C}\| = 1$.

Cada conjunto de Borel $B \in \mathcal{M}$ es de la forma $B = B_c$, para cierto código de Borel $c \in \mathrm{CB}^M$ y $\|\sigma \in B_c\|$ es independiente de la elección de c, luego podemos definir $m_\sigma(B) = m(\|\sigma \in B_c\|)$, que es una medida de Borel en $\mathcal{C}$ (en M). Por lo tanto, existe un $\beta < \omega_1^M$ tal que $\mu_\sigma(\bigcup\limits_{\alpha<\beta} F_\alpha) = 1$.

Sea $\{c_\alpha\}_{\alpha<\omega_1} \in M$ una sucesión de códigos de Borel de modo que $F_\alpha = B_{c_\alpha}$. Podemos construir códigos de Borel $\{\bar{c}_\beta\}_{\beta<\omega_1} \in M$ tales que $B_{\bar{c}_\beta} = \bigcup\limits_{\alpha<\beta} F_\alpha$. Entonces $m(\|\sigma \in B_{\bar{c}_\beta}\|) = 1$, luego $\|\sigma \in B_{\bar{c}_\beta}\| = \mathbb{1}$, luego $x = \sigma_G \in \bigcup\limits_{\alpha<\beta} F_\alpha^N$.

Así pues, $\{F_\alpha^N\}_{\alpha<\omega_1^N}$ es una familia de conjuntos F_σ de primera categoría disjuntos dos a dos tales que $\mathcal{C}^N = \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1^N} F_\alpha^N$.

Por 6.27, en N podemos descomponer $\mathcal{C}$ en unión de ω_1 cerrados de interior vacío disjuntos dos a dos. ■

Sin embargo, no es obvio cómo este resultado puede transferirse de $\mathcal{C}$ hasta otros espacios como $[0, 1]$. Para ello necesitamos esta propiedad de $\mathcal{C}$:

Teorema 6.29 *Si D_1 y D_2 son subconjuntos densos numerables de $\mathcal{C}$, existe un homeomorfismo $\phi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que $\phi[D_1] = D_2$.*

Demostración: Cada semejanza $h : {}^{<\omega}2 \longrightarrow {}^{<\omega}2$ induce un homeomorfismo $\bar{h} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ dado por $\bar{h}(f) = \bigcup\limits_{n\in\omega} h(f|_n)$.

Sea $\mathbb{P}$ el conjunto de las funciones finitas $p \subset D_1 \times D_2$ tales que existe una semejanza $h : {}^{<\omega}2 \longrightarrow {}^{<\omega}2$ tal que $p \subset \bar{h}$, con el orden dado por $p \leq q$ si y sólo si $q \subset p$. Notemos que $\mathbb{1} = \varnothing \in \mathbb{P}$.

Si $f \in D_1$, el conjunto E_f de las condiciones que tienen a f en su dominio es denso en $\mathbb{P}$.

En efecto, sea $p \in \mathbb{P}$ y supongamos que f no está en su dominio. Sea h una semejanza de ${}^{<\omega}2$ tal que $p \subset \bar{h}$. Pongamos que $\mathcal{D}p = \{f_0, \ldots, f_{n-1}\}$ y sea $m \in \omega$ tal que las restricciones $f_i|_m$ y $f|_m$ sean todas distintas dos a dos. Como D_2 es denso, existe $g \in D_2$ tal que $h(f|_m) \subset g$. Llamemos $g_i = \bar{h}(f_i)$, $f_n = f$ y $g_n = g$.

Podemos construir entonces una función $h^* : {}^{<\omega}2 \longrightarrow {}^{<\omega}2$ de modo que $h^*(f_i|_k) = g_i|_k$, para todo $k \in \omega$. En efecto, definimos $h^*|_{{}^{<m+1}2} = h|_{{}^{<m+1}2}$, con lo que la condición requerida se cumple para $k \leq m$ y, supuesta definida $h^*|_{{}^{<k+1}2}$, definimos h^* sobre ${}^{k+1}2$ estableciendo que:

a) $h^*(f_i|_{k+1}) = g_i|_{k+1}$.

b) Si $s|_k = f_i|_k$, pero $s \neq f_i|_{k+1}$, entonces $h^*(s)$ es la única sucesión que cumple $h^*(s)|_k = g_i|_k$ y $h^*(s) \neq g_i|_{k+1}$.

c) Cada par de elementos de ${}^{k+1}2$ cuya restricción común a ${}^k2$ no es ninguno de los $f_i|_k$ se hace corresponder arbitrariamente con un par de elementos en ${}^{k+1}2$ cuya restricción común a ${}^k2$ no sea ninguno de los $g_i|_k$.

Claramente entonces $\bar{h}^*$ cumple $\bar{h}^*(f_i) = g_i$, luego $p \cup \{(f, g)\} \in E_f$. Extiende a p.

Igualmente se prueba que, si $g \in D_2$, el conjunto F_g de las condiciones que tienen a g en su dominio es denso en $\mathbb{P}$.

Si G es un filtro en $\mathbb{P}$ que corte a todos los E_f y F_g, entonces claramente $\phi_0 = \bigcup G : D_1 \longrightarrow D_2$ biyectiva y, para cada $A \subset D_1$ finito, existe una semejanza $h : {}^{<\omega}2 \longrightarrow {}^{<\omega}2$ tal que $\phi_0|_A \subset \bar{h}$.

Si $s \in {}^n2$, como D_1 es denso, existe $f \in D_1$ tal que $s \subset f$. Vamos a definir $h_0(s) = \phi_0(f)|_n$, para lo cual tenemos que comprobar que esto no depende de la elección de f.

En efecto, si $f' \in D_1$ cumple también que $s \subset f'$, entonces $\{f, f'\} \subset D_1$, luego existe una semejanza $h : {}^{<\omega}2 \longrightarrow {}^{<\omega}2$ tal que $\phi_0(f) = \bar{h}(f)$ y $\phi_0(f') = \bar{h}(f')$, con lo que $\phi_0(f)|_n = h(f|_n) = h(s) = h(f'|_n) = \phi_0(f')|_n$.

Por lo tanto, tenemos $h_0 : {}^{<\omega}2 \longrightarrow {}^{<\omega}2$, que claramente conserva el orden, pues si $s \subset t$, podemos calcular sus imágenes con un mismo $s \subset t \subset f \in D_1$, luego $h_0(s) \subset h_0(t)$. Además es suprayectiva, pues si $t \in {}^n2$, existe un $g \in D_2$ tal que $t \subset g$ y basta tomar $f_1 \in D_1$ tal que $\phi_0(f) = g$ y entonces $h_0(f|_n) = t$. Si $h_0|_{{}^n2} : {}^n2 \longrightarrow {}^n2$ es suprayectiva, necesariamente es inyectiva, pues el conjunto es finito, luego h_0 es una semejanza y $\phi = \bar{h}_0 : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ cumple que $\phi|_{D_1} = \phi_0$, luego $\phi[D_1] = D_1$. ■

Teorema 6.30 *Si $\mathcal{C}$ es unión disjunta de ω_1 cerrados no vacíos de interior vacío, también lo es $I = [0, 1]$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\mathcal{C} = \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} C_n$, con los C_n cerrados de interior vacío disjuntos dos a dos. Entonces, cualquier unión numerable de ellos tiene también interior vacío, luego todo abierto no vacío corta a una cantidad no numerable de ellos.

Sea $\{B_n\}_{n\in\omega}$ una base de $\mathcal{C}$. Tomemos $x_0 \in B_0 \cap C_{\alpha_0}$ y, supuestos definidos $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ distintos dos a dos y puntos $x_n \in B_n \cap C_{\alpha_n}$, como B_{m+1} corta a infinitos C_α, podemos tomar un α_{m+1} distinto de los anteriores tal que exista $x_{m+1} \in B_{m+1} \cap C_{\alpha_{m+1}}$.

Así obtenemos un conjunto denso numerable $D = \{x_n \mid n \in \omega\}$ tal que $|D \cap C_\alpha| \leq 1$ para todo $\alpha < \omega_1$.

Por el teorema anterior, existe un homeomorfismo de $\mathcal{C}_n$ en sí mismo que transforma D en el conjunto de las sucesiones finalmente constantes, luego podemos suponer que cada C_n contiene a lo sumo una sucesión finalmente constante.

Sea $f : \mathcal{C} \longrightarrow [0, 1]$ la aplicación que a cada sucesión de ceros y unos e asigna el número con dicho desarrollo binario. Las sucesiones finalmente constantes se agrupan en parejas con la misma imagen (excepto las constantes iguales a 0 o a 1, que no tienen pareja). Si sustituimos cada par de cerrados C_α y C_β que contienen una pareja de sucesiones finalmente constantes con la misma imagen por la unión de ambos, seguimos teniendo una descomposición de $\mathcal{C}$ es

ω_1 cerrados disjuntos dos a dos, pero ahora cada uno de ellos contiene una única pareja de sucesiones finalmente constantes con la misma imagen.

Por consiguiente, $[0,1] = \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} f[C_\alpha]$ es una unión de cerrados no vacíos disjuntos dos a dos. ■

Obviamente, el resultado vale también para $]0,1[$ y, por consiguiente, para $\mathbb{R}$.

6.4 Reales de Sacks

Vamos a estudiar ahora un tercer tipo de reales genéricos. Para ello empecemos observando que una distancia que induce la topología de $\mathcal{C}$ y respecto a la cual es un espacio métrico completo viene dada por

$$d(x,y) = \frac{1}{n+1}, \qquad \text{donde } n = \min\{i \in \omega \mid x(i) \neq y(i)\},$$

para $x \neq y$. Así $d(x,y) \leq 1/(n+1)$ si y sólo si $x|_n = y|_n$, por lo que $B_{1/(n+1)}(x) = \{y \in \mathcal{C} \mid y|_{n+1} = x|_{n+1}\}$, y estas bolas son ciertamente una base de entornos de x en $\mathcal{C}$. Además, si $\{x_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de Cauchy respecto de esta distancia, es claro que existe $x(i) = \lim\limits_n x_n(i)$ y que $x = \lim\limits_n x_n$.

Recordemos de [TD 1.1] que los subespacios cerrados de $\mathcal{C}$ son los de la forma $[A]$, donde A es un subárbol de $2^{<\omega}$ y $[A]$ representa el conjunto de todos los caminos de A, así como que $[A]$ es perfecto si y sólo si lo es A, donde un subconjunto de $\mathcal{C}$ es perfecto si es cerrado, no vacío y no tiene puntos aislados y un árbol es perfecto si no es vacío y todo nodo admite extensiones incompatibles.

Definición 6.31 El *orden de Sacks* es el conjunto $\mathbb{P}$ de todos los subárboles perfectos de $2^{<\omega}$, con el orden parcial dado por la inclusión. Obviamente tiene a $\mathbb{1} = 2^{<\omega}$ como máximo elemento.

Si $p \in \mathbb{P}$ y $s \in p$, definimos

$$p_s = \{t \in p \mid t \subset s \lor s \subset t\} \in \mathbb{P}, \qquad p_s \leq p,$$

que es el árbol que resulta de "podar" todas las ramas de p que nacen en un nodo menor que s. Diremos que un nodo $s \in p$ es *troncal* si $p = p_s$. Claramente $\varnothing$ es troncal y, si s, t son troncales, entonces $s \subset t$ o $t \subset s$. Además, como $\varnothing$ tiene que tener extensiones incompatibles, p tiene un nodo troncal máximo (el nodo de altura mínima que tiene extensiones inmediatas incompatibles), al que llamaremos *tronco* de p, y lo representaremos por $\operatorname{tr}(p)$.

Es obvio que si $p \leq q$, entonces $\operatorname{tr}(q) \subset \operatorname{tr}(p)$.

Notemos también que si $\ell(\operatorname{tr}(p)) = n$, entonces $d([p]) = 1/(n+1)$.

Puesto que $s \subset \operatorname{tr}(p_s)$, es claro que el conjunto

$$D_n = \{p \in \mathbb{P} \mid \ell(\operatorname{tr}(p)) \geq n\}$$

es denso en $\mathbb{P}$.

Teorema 6.32 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC*, sea $\mathbb{P}$ el orden de Sacks y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces existe un único real $x_G \in \mathcal{C}^{M[G]}$ tal que, para todo $p \in \mathbb{P}$, se cumple*

$$p \in G \leftrightarrow x_G \in [p]^{M[G]}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{F}_G = \{[p]^{M[G]} \mid p \in G\} \in M[G]$, que es una familia de cerrados en $\mathcal{C}^{M[G]}$ con la propiedad de la intersección finita (porque G es un filtro) y que contiene elementos de diámetro arbitrariamente pequeño, pues si $p \in G \cap D_n$, entonces $d([p]^{M[G]}) \leq 1/(n+1)$.

Por la compacidad de $\mathcal{C}^{M[G]}$ (en $M[G]$), concluimos que $\bigcap \mathcal{F}_G = \{x_G\}$, para un cierto $x_G \in \mathcal{C}^{M[G]}$. Más precisamente, se cumple que

$$x_G = \bigcup_{p \in G} \operatorname{tr}(p),$$

pues, como $x_G \in [p]^{M[G]}$, necesariamente $\operatorname{tr}(p) \subset x_G$, y en G hay condiciones con tronco de longitud arbitrariamente grande.

Notemos que x_G admite un nombre canónico:

$$\gamma = \{(\text{p.o}(\check{\imath}, \check{k}), p) \mid p \in \mathbb{P} \wedge (i,k) \in \operatorname{tr}(p)\} \in M^{\mathbb{P}},$$

es decir, se cumple que $\gamma_G = x_G$.

Por construcción es claro que si $p \in G$, entonces $x_G \in [p]^{M[G]}$. Supongamos ahora que $p \in \mathbb{P}$ y $x_G \in [p]^{M[G]}$. Sea $q \in G$ tal que $q \Vdash \gamma \in [\check{p}]$. Basta probar que $q \leq p$, pues entonces $p \in G$. Supongamos en primer lugar que el modelo M es numerable.

Si $\neg q \leq p$, existe $s \in q \setminus p$, y podemos tomar un filtro genérico H tal que $q_s \in H$. Como $q_s \leq q$, también $q_s \Vdash \gamma \in [\check{p}]$, luego

$$s = \operatorname{tr}(q_s) \subset x_H = \gamma_H \in [p]^{M[H]},$$

luego $s \in p$, contradicción.

Con esto hemos probado que

$$(\bigwedge p \in \mathbb{P}(\mathbb{1} \Vdash \check{p} \in \Gamma \leftrightarrow \gamma \in [\check{p}]))^M,$$

para cualquier modelo transitivo numerable M de ZFC, luego por reflexión concluimos que

$$\bigwedge p \in \mathbb{P}(\mathbb{1} \Vdash \check{p} \in \Gamma \leftrightarrow \gamma \in [\check{p}]).$$

Relativizando esto a un modelo transitivo arbitrario (no necesariamente numerable), tenemos la equivalencia del enunciado para modelos transitivos arbitrarios.

Claramente, todo $x \in \mathcal{C}^{M[G]}$ que cumpla la implicación del enunciado para todo $p \in \mathbb{P}$ cumple en particular que $x \in \bigcap \mathcal{F}_G$, luego $x = x_G$. ■

Definición 6.33 Sea M un modelo transitivo de ZFC y sea $\mathbb{P}$ el orden de Sacks en M. Un *real de Sacks* sobre M es un $x \in \mathcal{C}$ tal que existe un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $x = x_G$.

Nota Si $\mathbb{P}$ es el orden de Sacks, $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra de Borel de $\mathcal{C}$ e I_n es el ideal formado por los subconjuntos numerables de $\mathcal{C}$, podemos considerar la aplicación $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathcal{B}/I_n$ dada por $i(p) = [p] + I_n$. Se trata de una inmersión, pues si $p \perp q$, el cerrado $[p] \cap [q]$ no contiene subconjuntos perfectos, luego es numerable, luego $i(p) \wedge i(q) = \mathbb{O}$. Además es una inmersión densa, pues todo cerrado no numerable contiene un subconjunto perfecto.

Por lo tanto, las extensiones genéricas determinadas por $\mathbb{P}$ pueden obtenerse también con el álgebra $\mathcal{B}/I_n$. Los elementos de p representan el mismo papel que los códigos de Borel, de modo que $[p]$ es un análogo al conjunto de Borel (conjunto perfecto, en este caso) de código p. ■

Veamos ahora cómo adjuntar a un modelo infinitos reales de Sacks.

Definición 6.34 Sea κ un cardinal no nulo y sea $\mathbb{P}$ el orden de Sacks. Si $p \in \mathbb{P}^\kappa$, definimos su *soporte* como el conjunto $\operatorname{sop}(p) = \{\alpha < \kappa \mid p(\alpha) \neq \mathbb{1}\}$. Definimos $\mathbb{P}_\kappa$ como el conjunto de los elementos de $\mathbb{P}^\kappa$ con soporte numerable, con el orden parcial dado por $p \leq q$ si y sólo si $\bigwedge \alpha \in \kappa\ p(\alpha) \leq q(\alpha)$.

Claramente, las aplicaciones $i_\alpha : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}_\kappa$ dadas por

$$i_\alpha(p)(\delta) = \begin{cases} p & \text{si } \delta = \alpha, \\ \mathbb{1} & \text{si } \delta \neq \alpha, \end{cases}$$

son inmersiones completas. Si M es un modelo transitivo numerable de ZFC, κ es un cardinal^M no nulo y G es un filtro $\mathbb{P}_\kappa^M$-genérico sobre M, entonces $i_\alpha^{-1}[G]$ es un filtro $\mathbb{P}^M$-genérico sobre M que determina un real de Sacks

$$x_\alpha = \bigcup_{p \in G} \operatorname{tr}(p(\alpha)).$$

Los reales $\{x_\alpha\}_{\alpha<\kappa} \in M[G]$ son distintos dos a dos, pues si $\alpha < \beta < \kappa$, el conjunto

$$D_{\alpha,\beta} = \{p \in \mathbb{P}_\kappa^M \mid \operatorname{tr}(p(\alpha)) \perp \operatorname{tr}(p(\beta))\}$$

es denso en $\mathbb{P}_\kappa$, (donde la incompatibilidad $\perp$ se refiere al árbol $2^{<\omega}$), pues dada una condición $p \in \mathbb{P}_\kappa$ podemos tomar dos nodos incompatibles en $p(\alpha)$ de la misma longitud, y entonces un nodo de esa misma longitud en $p(\beta)$ será inconpatible con uno de los dos, por lo que podemos tomar $s \in p(\alpha)$, $t \in p(\beta)$ tales que $s \perp t$, y p puede extenderse a $p' \in D_{\alpha,\beta}$ cambiando $p(\alpha)$ y $p(\beta)$ por $p(\alpha)_s$ y $p(\beta)_t$, respectivamente.

Por lo tanto podemos tomar $p \in G \cap D_{\alpha,\beta}$, de modo que $\operatorname{tr}(p(\alpha)) \subset x_\alpha$ y $\operatorname{tr}(p(\beta)) \subset x_\beta$, y así $x_\alpha \neq x_\beta$.

Así pues, en $M[G]$ hay (al menos) κ reales de Sacks, aunque esto hay que tomarlo con precaución, porque de momento no sabemos si κ sigue siendo un cardinal en $M[G]$. A este respecto, empezamos probando lo siguiente:

Teorema 6.35 *Si κ es un cardinal no nulo, entonces $\mathbb{P}_\kappa$ cumple la c.c.$(2^{\aleph_0})^+$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $C \subset \mathbb{P}_\kappa$ con $|C| = (2^{\aleph_0})^+$. Si $\{\operatorname{sop}(p) \mid p \in C\}$ tiene cardinal $\leq 2^{\aleph_0}$, entonces, reduciendo C podemos suponer que todas las condiciones tienen el mismo soporte r. En caso contrario podemos aplicar el lema de los sistemas Δ (teorema 5.12) con $\kappa = \aleph_1$ y $\mu = (2^{\aleph_0})^+$, con lo que reduciendo C podemos suponer (en ambos casos) que existe $r \subset \kappa$ numerable de modo que si p, $q \in C$, entonces $\operatorname{sop}(p) \cap \operatorname{sop}(q) = r$.

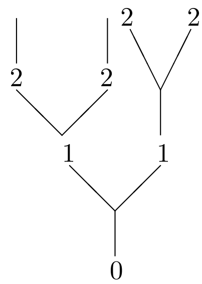
Notemos que $|\mathbb{P}| = 2^{\aleph_0}$ (pues $\mathbb{P} \subset \mathcal{P}2^{<\omega}$), luego también $|\mathbb{P}^r| = 2^{\aleph_0}$, luego la aplicación $p \mapsto p|_r$ no puede ser inyectiva, y así existen dos condiciones $p_1 \neq p_2$ en C tales que $p_1|_r = p_2|_r$, pero entonces la condición $p \in \mathbb{P}_\kappa$ dada por

$$p(\alpha) = \begin{cases} p_1(\alpha) & \text{si } \alpha \in \operatorname{sop}(p_1), \\ p_2(\alpha) & \text{si } \alpha \in \operatorname{sop}(p_2), \\ \mathbb{1} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es una extensión común de p_1 y p_2, luego C no es una anticadena en $\mathbb{P}_\kappa$. ■

Por lo tanto, $\mathbb{P}_\kappa$ conserva los cardinales $\geq (2^{\aleph_0})^+$, y esto basta para concluir que con c.p.o.s de tipo $\mathbb{P}_\kappa$ podemos hacer que $2^{\aleph_0}$ sea arbitrariamente grande. No obstante, vamos a probar que $\mathbb{P}_\kappa$ también conserva $\aleph_1$, y así, si partimos de un modelo en el que se cumpla la hipótesis del continuo, tendremos que $\mathbb{P}_\kappa$ conserva todos los cardinales (y las cofinalidades). La prueba es laboriosa, pero nos proporcionará mucha información adicional de interés.

Definición 6.36 Si $p \in \mathbb{P}$ y $s \in p$, el *grado de ramificación* de s es el cardinal del conjunto de los $i < \ell(s)$ tales que existe $t \in \mathbb{P}$ con $\ell(t) > i$, $t|_i = s|_i$, $t(i) \neq s(i)$. Diremos que s es un *nodo de ramificación n-simo* si tiene grado de ramificación n y ningún nodo anterior cumple lo mismo. Llamaremos $L(p, n)$ al conjunto de los nodos de ramificación n-simos de p.



La figura muestra el principio de un árbol perfecto en el que están señalados sus nodos de ramificación de órdenes 0, 1, 2. Notemos que $L(p, 0) = \{\varnothing\}$ y, en general, se cumple que $|L(p, n)| = 2^n$.

Definimos $p \leq_n q$ si $p \leq q$ y $L(p, n) = L(q, n)$.

Así, $p \leq_0 q$ equivale a $p \leq q$, y $p \leq_{n+1} q$ implica $p \leq_n q$.

Vamos a necesitar un hecho elemental:

Teorema 6.37 *Si $p \in \mathbb{P}$ y $n \in \omega$, entonces $p = \bigcup\limits_{s \in L(p,n)} p_s$, luego si $q \leq p$ existe un $s \in L(p, n))$ tal que q y p_s son compatibles.*

DEMOSTRACIÓN: La primera igualdad es evidente: si "podamos" el árbol p quitándole todas las ramas inferiores a cada nodo de ramificación n-simo y luego unimos las "podas", reconstruimos el árbol completo.

Si $q \leq p$, tomamos $t \in q$ de longitud mayor que las longitudes de todos los nodos de $L(p, n)$. Entonces $t \in p$ y contiene un nodo $s \in L(p, n)$, luego $q_s \leq q$ y $q_s \leq p_s$. ■

Probamos ahora un hecho fundamental sobre el orden de Sacks:

Teorema 6.38 *Sea* $\{p_n\}_{n\in\omega}$ *una sucesión en* $\mathbb{P}$ *de manera que existe una sucesión* $\{m_n\}_{n\in\omega}$ *en* ω *creciente y no acotada de modo que* $p_{n+1} \leq_{m_n} p_n$ *para todo* n*. Entonces* $q = \bigcap\limits_n p_n \in \mathbb{P}$ *y* $q \leq_{m_n} p_n$ *para todo* n*.*

Demostración: Claramente una intersección de subárboles de $2^{<\omega}$ es un subárbol de $2^{<\omega}$ y claramente $\varnothing \in q$, luego $q \neq \varnothing$. Sólo falta probar que q es perfecto. Para ello tomamos $s \in q$ y elegimos n tal que $m_n > \ell(s)$. Entonces $s \in p_n$ y su grado de ramificación es $\leq \ell(s) < m_n$, luego existen t_0, $t_1 \in L(p_n, m_n)$ tales que $s \subset t_i$. Como todo $n' \geq n$ cumple que $p_{n'} \leq_{m_n} p_n$, tenemos que $L(p_n, m_n)$ está contenido en todos los p_n, luego en q, y así t_0, $t_1 \in q$ son dos extensiones incompatibles de s. Hemos razonado que $L(p_n, m_n) = L(q, m_n)$, luego $q \leq_{m_n} p_n$. ■

Vamos a generalizar este hecho al caso de $\mathbb{P}_\kappa$.

Definición 6.39 Si κ es un cardinal no nulo, $p \in \mathbb{P}_\kappa$, $F \subset \kappa$ es un conjunto finito y $\sigma \in \prod\limits_{\alpha\in F} p(\alpha)$, definimos $p_\sigma \in \mathbb{P}_\kappa$ como la condición dada por

$$p_\sigma(\alpha) = \begin{cases} p(\alpha)_{\sigma(\alpha)} & \text{si } \alpha \in F, \\ p(\alpha) & \text{si } \alpha \in \kappa \setminus F. \end{cases}$$

Si $n \in \omega$, definimos

$$L(p, F, n) = \prod_{\alpha\in F} L(p(\alpha), n).$$

Diremos que $p \leq_{F,n} q$ si $p \leq q$ y $L(p, F, n) = L(q, F, n)$, que claramente equivale a que $p \leq q$ y $\bigwedge \alpha \in F\ p(\alpha) \leq_n q(\alpha)$.

Teorema 6.40 *Sea* κ *un cardinal no nulo, sea* $\{p_n\}_{n\in\omega}$ *una sucesión en* $\mathbb{P}_\kappa$ *tal que existe una sucesión* $\{(F_n, m_n)\}_{n\in\omega}$ *de modo que* $\{m_n\}_{n\in\omega}$ *es una sucesión de números naturales creciente y no acotada,* $\{F_n\}_{n\in\omega}$ *es una sucesión de subconjuntos finitos de* κ *creciente (respecto de la inclusión),* $\bigcup\limits_{n\in\omega} F_n = \bigcup\limits_{n\in\omega} \operatorname{sop} p_n$ *y* $p_{n+1} \leq_{F_n,m_n} p_n$*. Entonces la condición* $q \in \mathbb{P}_\kappa$ *dada por*

$$q(\alpha) = \bigcap_{n\in\omega} p_n(\alpha)$$

cumple $q \leq_{F_n,n} p_n$ *para todo* n*.*

Demostración: Si $\alpha \in \kappa \setminus \bigcup\limits_n \operatorname{sop} p_n$ tenemos que $q(\alpha) = \mathbb{1}$. Si $\alpha \in \operatorname{sop} p_k$, entonces existe un n tal que $\alpha \in F_n$ y para todo $k \geq n$ se cumple que $p_{k+1}(\alpha) \leq_{m_k} p_k(\alpha)$, luego el teorema anterior nos da que $q(\alpha) \in \mathbb{P}_\kappa$. Esto prueba que $q \in \mathbb{P}_\kappa$ (notemos que $\operatorname{sop} q = \bigcup\limits_n \operatorname{sop} p_n$ es numerable).

De hecho, el teorema anterior nos da que $q(\alpha) \leq_{m_n} p_n(\alpha)$ para todo $\alpha \in F_n$, lo que equivale a que $q \leq_{F_n,m_n} p_n$. ■

Teorema 6.41 *Sea* κ *un cardinal no nulo, sea* $p \in \mathbb{P}_\kappa$*, sea* $F \subset \kappa$ *finito, sea* $n \in \omega$ *y* $\sigma \in L(p, F, n)$*. Si* $q \leq p_\sigma$*, existe* $p' \in \mathbb{P}_\kappa$ *tal que* $p' \leq_{F,n} p$ *y* $p'_\sigma = q$*.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\alpha \in \kappa \setminus F$, definimos $p'(\alpha) = q(\alpha)$, mientras que si $\alpha \in F$ tomamos

$$p'(\alpha) = \bigcup \{p(\alpha)_s \mid s \in L(p(\alpha), n),\ s \neq \sigma(\alpha)\} \cup q(\alpha).$$

Claramente cumple lo requerido. ■

Teorema 6.42 *Sea κ un cardinal no nulo, sea $p \in \mathbb{P}_\kappa$, sea $F \subset \operatorname{sop} p$ finito, sea $n \in \omega$ y D un abierto denso bajo p en $\mathbb{P}_\kappa$. Entonces existe $q \in \mathbb{P}_\kappa$ tal que $q \leq_{F,n} p$ y $\bigwedge \sigma \in L(p, F, n)\ q_\sigma \in D$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\sigma_0, \ldots, \sigma_k$ una enumeración de $L(p, F, n)$. Tomamos $q_0 \leq p_{\sigma_0}$ tal que $q_0 \in D$. Por el teorema anterior existe $p_0 \leq_{F,n} p$ tal que $(p_0)_{\sigma_0} = q_0$. Ahora tomamos $q_1 \leq (p_0)_{\sigma_1}$ tal que $q_1 \in D$ y a su vez $p_1 \leq_{F,n} p_0$ tal que $(p_1)_{\sigma_1} = q_1$. Repetimos así hasta obtener

$$q = p_k \leq_{F,n} p_{k-1} \leq_{F,n} \cdots \leq_{F,n} p_0 \leq_{F,n} p.$$

Así, $q_{\sigma_i} \leq (p_i)_{\sigma_i} = q_i \in D$, luego $q_{\sigma_i} \in D$ porque D es abierto. ■

Teorema 6.43 *Sea κ un cardinal no nulo, sea $p \in \mathbb{P}_\kappa$, $F \subset \operatorname{sop} p$ finito y $n \in \omega$. Si $q \leq p$, existe $\sigma \in L(p, F, n)$ tal que q es compatible con p_σ.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $\alpha \in F$, tenemos que $q(\alpha) \leq p(\alpha)$, luego 6.37 nos da un $\sigma(\alpha) \in L(p(\alpha), n)$ tal que $q(\alpha)$ y $p(\alpha)_{\sigma(\alpha)}$ son compatibles, luego q y p_σ son compatibles. ■

Teorema 6.44 *Sea κ un cardinal no nulo, $p \in \mathbb{P}_\kappa$, $F \subset \operatorname{sop}(p)$ finito, $n \in \omega$ y $\tau \in V^{\mathbb{P}_\kappa}$ tal que $p \Vdash \tau \in \check{V}$. Entonces existe una condición $q \leq_{F,n} p$ tal que, para cada $\sigma \in L(p, F, n)$, existe a_σ de modo que $q_\sigma \Vdash \tau = \check{a}_\sigma$. Además, si llamamos $A = \{a_\sigma \mid \sigma \in L(p, F, n)\}$, se cumple que $q \Vdash \tau \in \check{A}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $D = \{q \in \mathbb{P}_\kappa \mid q \leq p \wedge \bigvee a\ q \Vdash \tau = \check{a}\}$. Claramente D es abierto denso bajo p en $\mathbb{P}_\kappa$, luego 6.42 nos da $q \leq_{F,n} p$ que cumple la primera afirmación.

Si $r \leq q$, por el teorema anterior existe $\sigma \in L(q, F, n) = L(p, F, n)$ tal que r es compatible con q_σ, luego existe $r' \leq r$ tal que $r' \Vdash \tau \in \check{A}$. Esto implica que $q \Vdash \tau \in \check{A}$. ■

Finalmente llegamos al resultado crucial sobre $\mathbb{P}_\kappa$:

Teorema 6.45 *Sea κ un cardinal no nulo, sean $p \in \mathbb{P}_\kappa$ y $\tau \in V^{\mathbb{P}}$ tales que $p \Vdash \tau : \omega \longrightarrow \check{V}$. Entonces existe $C : \omega \longrightarrow V$ y $q \leq p$ de modo que cada $C(n)$ es finito y $q \Vdash \bigwedge n \in \omega\ \tau(n) \in \check{C}(n)$*

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $q_0 = p$ y fijemos $f_0 : \omega \longrightarrow \operatorname{sop} q_0$ suprayectiva. Tomamos $F_0 = \{f_0(0)\}$ y el teorema anterior nos da una condición $q_1 \leq_{F_0,0} q_0$ y un conjunto A_0 tal que $q_1 \Vdash \tau(0) \in \check{A}_0$. Además $|A_0| \leq |L(q_0, F_0, 0)|$.

Fijamos $f_1 : \omega \longrightarrow \operatorname{sop} q_1$ suprayectiva, $F_1 = \{f_0(0), f_0(1), f_1(0), f_1(1)\}$ y aplicamos el teorema anterior para obtener $q_2 \leq_{F_1,1} q_1$ y un conjunto A_1 tal que $q_2 \Vdash \tau(1) \in \check{A}_1$ y $|A_1| \leq |L(q_1, F_1, 1)|$.

Procediendo de este modo obtenemos sucesiones $\{q_n\}_{n\in\omega}$, $\{(F_n, n)\}_{n\in\omega}$ y $\{A_n\}_{n\in\omega}$ de modo que las dos primeras están en las hipótesis del teorema 6.40 y además

$$q_{n+1} \Vdash \tau(\check{n}) \in \check{A}_n, \quad |F_n| = (n+1)^2, \quad |A_n| \leq |L(q_n, F_n, n)| \leq (n+1)^2 2^n.$$

El teorema 6.40 nos da una condición q que extiende a todas las q_n (con lo que en particular $q \leq p$) y llamando $C(n) = A_n$ se cumple lo requerido. ■

De aquí podemos extraer muchas consecuencias. La primera es el resultado que perseguíamos:

Teorema 6.46 *Si κ es un cardinal no nulo, entonces $\mathbb{P}_\kappa$ conserva $\aleph_1$.*

Demostración: Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, y sea G un filtro $\mathbb{P}_\kappa^M$-genérico sobre M. Supongamos que existe $f \in M[G]$ tal que $f : \omega \longrightarrow \omega_1^M$ suprayectiva. Sea $f = \tau_G$, con $\tau \in M^{\mathbb{P}_\kappa^M}$ y sea $p \in \mathbb{P}_\kappa^M$ tal que $p \Vdash \tau : \omega \longrightarrow \check{\omega}_1^M$ suprayectiva. Sean $q \leq p$ y $C \in M$ según el teorema anterior y pasemos a otro filtro genérico G tal que $q \in G$. Entonces $\bigwedge n \in \omega\ \tau_G(n) \in C(n)$, luego $\tau_G[\omega] \subset \bigcup\limits_{n\in\omega} C(n)$, pero este conjunto es numerable^M, y por otra parte tiene que contener a ω_1^M, contradicción. ■

Como consecuencia:

Teorema 6.47 *Sea M un modelo transitivo numerable de $\mathrm{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_1$, sea κ un cardinal^M no nulo y sea G un filtro $\mathbb{P}_\kappa^M$-genérico sobre M. Entonces $\mathbb{P}_\kappa^M$ conserva cardinales y cofinalidades.*

Demostración: Por 6.35 tenemos que $\mathbb{P}_\kappa^M$ cumple la c.c.$\aleph_2$ en M, luego 5.6 nos da que conserva cardinales y cofinalidades $\geq \aleph_2$, mientras que 6.46 nos da que también se conserva $\aleph_1$. ■

Tras la definición 6.34 hemos razonado que en $M[G]$ hay κ reales de Sacks, luego $(2^{\aleph_0})^{M[G]} \geq \kappa$. Vamos a calcular el valor exacto.

Sea J el conjunto de todos los pares (q, τ) tales que $q \in \mathbb{P}_\kappa$, $\tau \in V^{\mathbb{P}_\kappa}$, $q \Vdash \tau : \omega \longrightarrow 2$ y existen sucesiones $\{q_n\}_{n\in\omega}$, $\{(F_n, n)\}_{n\in\omega}$, $\{a_\sigma\}_\sigma$, donde σ recorre $\bigcup\limits_{n\in\omega} L(q, F_n, n)$, en las condiciones del teorema 6.44 y de la prueba del teorema 6.45.

Esto implica, entre otras cosas, que q es la condición dada por 6.40 a partir de dichas sucesiones, por lo que en particular

$$L(q, F_n, n) = L(q_n, F_n, n) = L(q_{n+1}, F_n, n)$$

y, para todo $\sigma \in L(q, F_n, n)$, se cumple que $q_\sigma \Vdash \tau(\check{n}) = \check{a}_\sigma$.

El teorema 6.45 prueba que si $p \Vdash \tau : \omega \longrightarrow 2$, entonces el conjunto de las condiciones $q \leq p$ tales que $(q, \tau) \in J$ es denso bajo p.

Diremos que (q_1, τ_1), $(q_2, \tau_2) \in J$ son equivalentes si $q_1 = q_2$ y $q_1 \Vdash \tau_1 = \tau_2$.

Observemos que si (q, τ_1), $(q, \tau_2) \in J$ tienen asociadas las mismas sucesiones, entonces son equivalentes, pues, para cada $n \in \omega$ y cada $\sigma \in L(q, F_n, n)$, se cumple que $q_\sigma \Vdash \tau_1(\check{n}) = \check{a}_\sigma = \tau_2(\check{n})$. El teorema 6.43 nos da entonces que si $r \leq q$, existe $\sigma \in L(q, F_n, n)$ tal que q es compatible con q_σ, luego existe $r' \leq r$ tal que $r' \Vdash \tau_1(\check{n}) = \tau_2(\check{n})$, luego $q \Vdash \tau_1(\check{n}) = \tau_2(\check{n})$, para todo n, luego $q \Vdash \tau_1 = \tau_2$.

Esto implica que el número de clases de equivalencia en J es menor o igual que el número de sucesiones posibles que determinan a cada elemento de J. Para calcularlo observamos en primer lugar que, suponiendo la hipótesis del continuo, $|\mathbb{P}_\kappa| \leq (2\kappa)^{\aleph_0}$. (El 2 hay que incluirlo para cubrir el caso $\kappa = 1$.)

En efecto, si identificamos cada condición de $\mathbb{P}_\kappa$ con la restricción a su soporte, tenemos que $\mathbb{P}_\kappa = \bigcup\limits_{S \in [\kappa]^{\aleph_0}} \mathbb{P}^S$, luego $|\mathbb{P}_\kappa| \leq (2\kappa)^{\aleph_0} \aleph_1^{\aleph_0}$. Con la hipótesis del continuo es $|\mathbb{P}_\kappa| \leq (2\kappa)^{\aleph_0}$.

El número de sucesiones $\{(F_n, n)\}_{n \in \omega}$ es a lo sumo $(2\kappa)^{\aleph_0}$ y, fijada una de ellas, el número de sucesiones $\{a_\sigma\}_\sigma$ (donde podemos suponer que $a_\sigma \in 2$) es a lo sumo $2^{\aleph_0}$ (pues σ varía en un conjunto numerable).

Así, el número de clases de equivalencia es a lo sumo $(2\kappa)^{\aleph_0} 2^{\aleph_0} = (2\kappa)^{\aleph_0}$. Ahora ya podemos probar:

Teorema 6.48 *Si M es un modelo transitivo numerable de* ZFC$+2^{\aleph_0} = \aleph_1$ *y κ es un cardinal no nulo en M, entonces para todo filtro $\mathbb{P}_\kappa^M$-genérico sobre M y todo cardinal^M infinito μ, se cumple que $(2^\mu)^{M[G]} = ((2\kappa)^\mu)^M$.*

Demostración: Consideremos primero el caso $\mu = \aleph_0$. Si $f \in ({}^\omega 2)^{M[G]}$, existe $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $f = \tau_G$, y podemos tomar $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \Vdash \tau : \omega \longrightarrow 2$. Como el conjunto de las condiciones $q \leq p$ tales que $(q, \tau) \in J$ es denso bajo p, existe una que cumple $q \in G$.

Así, en $M[G]$ podemos asociar a cada $f \in ({}^\omega 2)^{M[G]}$ un par $(q, \tau) \in J$ con $q \in G$ y $\tau_G = f$. Si dos de estos pares son equivalentes digamos (q, τ), (q, τ'), hemos visto que $q \Vdash \tau = \tau'$, luego $\tau'_G = \tau_G = f$, luego a cada f podemos asignarle una clase de equivalencia $[(q, \tau)]$, la cual determina f, pues basta tomar cualquier par en la clase y calcular τ_G para recuperar f.

En otras palabras, tenemos una aplicación inyectiva en $M[G]$ entre $({}^\omega 2)^{M[G]}$ y el conjunto de clases de equivalencia de J (en M). El cardinal de este conjunto en M es $((2\kappa)^{\aleph_0})^M$, luego $(2^{\aleph_0})^{M[G]} \leq ((2\kappa)^{\aleph_0})^M$.

Recíprocamente, sabemos que $\kappa \leq (2^{\aleph_0})^{M[G]}$, luego

$$((2\kappa)^{\aleph_0})^M \leq ((2\kappa)^{\aleph_0})^{M[G]} \leq ((2^{\aleph_0})^{\aleph_0})^{M[G]} = (2^{\aleph_0})^{M[G]}.$$

Supongamos ahora que $\mu \geq \aleph_1^M$ y llamemos $\xi = ((2\kappa)^{\aleph_0})^M$. Así,

$$((2\kappa)^\mu)^M = (\xi^\mu)^M \leq (\xi^\mu)^{M[G]} = ((2^{\aleph_0})^\mu)^{M[G]} = (2^\mu)^{M[G]}.$$

Por otro lado, el teorema 5.20 nos da que el número de buenos nombres en M para subconjuntos de $\check{\mu}$ es a lo sumo $((2\kappa)^{\aleph_0})^{\aleph_1\mu} = (2\kappa)^\mu$ (en M), y el teorema 5.22 nos da que $(2^\mu)^{M[G]} \leq ((2\kappa)^\mu)^M$. ■

En particular, si partimos de un modelo que cumple la HCG y añadimos un real de Sacks, en la extensión se sigue cumpliendo la HCG, pero si añadimos κ reales de Sacks con $\operatorname{cf}\kappa > \aleph_0$, entonces en la extensión se cumple $2^{\aleph_0} = \kappa$.

Conviene observar que $\mathbb{P}_\kappa$ cumple una propiedad más débil que el teorema 6.45, pero que es suficiente para muchas aplicaciones:

Definición 6.49 Sea $f : \omega \longrightarrow \omega \setminus \{0\}$. Diremos que $C : \omega \longrightarrow [\omega]^{<\omega}$ es un *f-cono* si para todo $n \in \omega$ se cumple que $|C(n)| \leq f(n)$. Un real $r \in \mathcal{N}$ *está cubierto* por C si $\bigwedge n \in \omega\ r(n) \in C(n)$.

Si $M \subset N$ son modelos de ZFC, se dice que N tiene la *propiedad de Sacks* sobre M si para toda función $f : \omega \longrightarrow \omega \setminus \{0\}$ creciente y no acotada $f \in M$ y todo real $r \in \mathcal{N}^N$ se cumple que r está cubierto por un f-cono $C \in M$.

Un c.p.o. $\mathbb{P} \in M$ tiene la *propiedad de Sacks* si toda extensión genérica de M por $\mathbb{P}$ tiene la propiedad de Sacks.

Nota Observemos que si la propiedad de Sacks se cumple para una función $f \in M$ en particular, entonces se cumple para todas.

En efecto, consideremos otra función $g : \omega \longrightarrow \omega \setminus \{0\}$ tal que $g \in M$ y que es creciente y no acotada.

Podemos suponer que $f(0) = 1$, pues si la función f' coincide con f salvo que $f'(0) = 1$, para cada $r \in \mathcal{N}^N$ podemos tomar un f-cono $C \in M$ que cubra a r, y modificando C de modo que $C'(0) = \{r(0)\}$ obtenemos un f'-cono $C' \in M$ que también cubre a r.

Sea $\{m_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión estrictamente creciente tal que $f(n) \leq g(m_n)$. Como $f(0) = 1 \leq g(0)$, podemos tomar $m_0 = 0$.

A través de una biyección en M entre ω y $\omega^{<\omega}$ podemos transformar la sucesión $\{r|_{m_n+1}\}_{n\in\omega}$ en una función $x \in \mathcal{N}$, y aplicándole la hipótesis obtenemos un "cono" $C : \omega \longrightarrow [\omega^{<\omega}]^{<\omega}$ en M tal que $r|_{m_n+1} \in C(n)$, para todo n. Sea $D : \omega \longrightarrow [\omega]^{<\omega}$ el cono dado por $D(m) = \{s(m) \mid s \in C(m) \wedge n < \ell(s)\}$. Claramente $D \in M$ y es un g-cono, pues, como $m_0 = 0$, para todo $m \in \omega$ existe un n tal que $m_n \leq m < m_{n+1}$, y entonces $|D(m)| \leq |C(n)| \leq f(n) \leq g(m_n) \leq g(m)$. Además D cubre a r, pues $r(n) = r|_{m_n+1}(n) \in D(n)$. ■

Teorema 6.50 *Si κ es un cardinal no nulo, entonces $\mathbb{P}_\kappa$ cumple la propiedad de Sacks.*

Demostración: Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, sea κ un cardinal^M no nulo y sea G un filtro $\mathbb{P}_\kappa^M$-genérico sobre M. Por la nota precedente, basta probar que se cumple la propiedad de Sacks para la función $f(n) = (n+1)^2 2^n$.

Sea $r \in \mathcal{N}^{M[G]}$ y supongamos que no existe ningún f-cono en M que cubra a f. Sea $X \in M$ el conjunto de todos los f-conos en M y sea $r = \tau_G$. Entonces existe $p \in G$ tal que

$$p \Vdash \tau : \omega \longrightarrow \omega \land \bigwedge C \in \check{X} \bigvee n \in \omega\ \tau(n) \notin C(n).$$

Sean $q \leq p$ y $C \in M$ según el teorema 6.45. Cambiamos G por otro filtro genérico tal que $q \in G$. Así seguimos teniendo que $r = \tau_G \in \mathcal{N}^{M[G]}$ es un real que no puede cubrirse por ningún f-cono en M, pero además tenemos $C : \omega \longrightarrow V$ tal que $\bigwedge n \in \omega\ r(n) \in C(n)$ y además $C(n)$ es finito. Más aún, en la prueba del teorema 6.45 se ve que $|C(n)| \leq f(n)$.

Si cambiamos $C(n)$ por $C(n) \cap [\omega]^{<\omega}$ se sigue cumpliendo todo lo dicho y además $C \in X$, con lo que tenemos una contradicción.

La hipótesis de que el modelo M sea numerable puede eliminarse, pues lo que hemos probado es que

$$(\mathbb{1} \Vdash \bigwedge r \in \mathcal{N} \bigvee C \in \check{X} \bigwedge n \in \omega\ r(n) \in C(n))^M,$$

luego por el teorema de reflexión lo mismo vale sin relativizar a M, entendiendo que X no es una variable, sino que representa el conjunto de los f-conos (en M a causa de la relativización), donde f tiene a su vez una definición, y a su vez lo mismo vale relativizado a cualquier modelo transitivo de ZFC. ■

El teorema siguiente prueba que los reales de Sacks no son aleatorios ni de Cohen:

Teorema 6.51 *Sean $M \subset N$ dos modelos transitivos de* ZFC *con los mismos ordinales y de modo que N tenga la propiedad de Sacks sobre M. Entonces:*

a) Si $A \in N$ es un conjunto de Borel en $\mathcal{C}^N$ de medida 0 *respecto de la medida de Haar, existe $B \in M$ de Borel en $\mathcal{C}^M$ y de medida* 0 *tal que $A \subset B^N$.*

b) Si $A \in N$ es un conjunto de Borel en $\mathcal{C}^N$ diseminado, existe $B \in M$ de Borel en $\mathcal{C}^M$ y diseminado tal que $A \subset B^N$.

Demostración: a) Para cada $s \in 2^{<n}$, consideramos el abierto básico $B_s = \{x \in \mathcal{C} \mid x|_n = s\}$. Sea $\mathcal{B}$ el álgebra de abiertos cerrados de $\mathcal{C}$. Los elementos de $\mathcal{B}$ son las uniones finitas de abiertos básicos. Observemos que todo abierto de $\mathcal{C}$ es unión (numerable) de elementos de $\mathcal{B}$ disjuntos dos a dos. (A partir de una descomposición en unión numerable de abiertos básicos, basta restarle a cada uno la unión de los anteriores.)

Observemos ahora que si $A \subset \mathcal{C}$ es un conjunto nulo y $\{\epsilon_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de números reales positivos, podemos cubrir $A \subset \bigcup\limits_{n\in\omega} U_n$, donde cada U_n es un abierto cerrado con $m(U_n) < \epsilon_n$.

En efecto, podemos cubrir A con un abierto de medida menor que ϵ_0, que a su vez podemos expresar como unión disjunta $A \subset \bigcup\limits_{n\in\omega} B_n$, donde cada $B_n \in \mathcal{B}$. Así $\sum\limits_{n=0}^{\infty} m(B_n) < \epsilon_0$. Tomamos $n_0 \in \omega$ tal que $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} m(B_n) < \epsilon_1$ y llamamos $U_0 = \bigcup\limits_{n<n_0} B_n$, con lo que $m(U_0) < \epsilon_0$. Igualmente, tomamos $n_1 > n_0$ tal que $\sum\limits_{n=n_1}^{\infty} m(B_n) < \epsilon_2$ y llamamos $U_1 = \bigcup\limits_{n_0\leq n<n_1} B_n$, con lo que $m(U_1) < \epsilon_1$, y procediendo de este modo obtenemos los abiertos requeridos.

La correspondencia entre los conjuntos de Borel de $\mathcal{C}^M$ y $\mathcal{C}^N$ (en M y N, respectivamente) determinada por los códigos de Borel hace corresponder B_s^M con B_s^N y, por consiguiente, biyecta $\mathcal{B}^M$ con $\mathcal{B}^N$. Por lo tanto, si $\{B_m\}_{m\in\omega} \in M$ es una enumeración de $\mathcal{B}^M$, tenemos que $\{B_m^N\}_{m\in\omega} \in N$ enumera $\mathcal{B}^N$.

Sea $e : \omega\times\omega \longrightarrow \omega$ biyectiva tal que $e \in M$. Para cada $i \in \omega$, sea $f_i \in \mathcal{N}^N$ tal que $A \subset \bigcup\limits_{j\in\omega} B^N_{f_i(j)}$, con

$$m(B^N_{f_i(j)}) < \frac{1}{2^{e(i,j)+i+j+1}}.$$

Sea $r \in \mathcal{N}^N$ dado por $r(e(i,j)) = f_i(j)$. Por la propiedad de Sacks existe un cono $C \in M$ que cubre a r y tal que $|C(n)| \leq 2^n$. Sea

$$B = \bigcap_{i\in\omega}\bigcup_{j\in\omega}\bigcup\{B_m \mid m \in C(e(i,j)) \wedge m(B_m) < 2^{-e(i,j)-i-j-1}\}.$$

Claramente $B \in M$ es un conjunto de Borel^M, y además $A \subset B^N$, pues si $x \in A$, para todo $i \in \omega$ existe un $j \in \omega$ tal que $x \in B^N_{f_i(j)}$ y

$$m = f_i(j) = r(e(i,j)) \in C(e(i,j)), \qquad m(B_m) = m(B_m^N) < 2^{-e(i,j)-i-j-1},$$

luego $x \in B$. Sólo falta probar que B es nulo^M. Ahora bien,

$$\begin{aligned} m(\bigcup\{B_m \mid m \in C(e(i,j)) \wedge m(B_m) < 2^{-e(i,j)-i-j-1}\}) \\ \leq \frac{|C(e(i,j))|}{2^{e(i,j)+i+j+1}} = 2^{-i-j-1}, \end{aligned}$$

de donde

$$m(\bigcup_{j\in\omega}\bigcup\{B_m \mid m \in C(e(i,j)) \wedge m(B_m) < 2^{-e(i,j)-i-j-1}\}) \leq 2^{-i}$$

luego $m(B) \leq 2^{-i}$ para todo i, luego B es nulo.

b) Observemos en primer lugar que si $A \subset \mathcal{C}$ es diseminado, para cada $n \in \omega$ existe $m > n$ y una función $t : m \setminus n \longrightarrow 2$ tal que el abierto $\{x \in \mathcal{C} \mid t \subset x\}$ es disjunto de A.

En efecto, sea $\{s_i\}_{i<2^n}$ una enumeración de ${}^n2$. Como A es diseminado, $\overline{A\cap B_{s_0}} \neq B_{s_0}$, luego existe $t_0 \in 2^{m_0\setminus n}$ tal que $B_{s_0\cup t_0} \cap \overline{A} = \varnothing$. Igualmente,

$\overline{A \cap B_{s_1 \cup t_0}} \neq B_{s_1 \cup t_0}$, luego t_0 se puede prolongar hasta $t_1 \in 2^{m_1 \setminus n}$ de modo que $B_{s_1 \cup t_1} \cap \overline{A} = \varnothing$, y también $B_{s_0 \cup t_1} \cap \overline{A} = \varnothing$. Repitiendo el proceso llegamos a un $t = t_{2^n - 1}$ que cumple $B_{s \cup t} \cap \overline{A} = \varnothing$ para todo $s \in {}^n 2$. Así, si $x \in \mathcal{C}$ cumple $t \subset x$, entonces $x \in B_{s \cup t}$, para cierto $s \in {}^n 2$, luego $x \notin \overline{A}$.

Aplicando repetidamente este hecho podemos construir una sucesión $\{n_i\}_{i \in \omega}$ estrictamente creciente de números naturales con $n_0 = 0$ y una sucesión $\{t_i\}_{i \in \omega}$ con $t_i \in 2^{n_{i+1} \setminus n_i}$ de modo que $\{x \in \mathcal{C} \mid t_i \subset x\} \cap A = \varnothing$. Si llamamos $z = \bigcup\limits_i t_i \in \mathcal{C}$, tenemos que, para cada $i \in \omega$,

$$\{x \in \mathcal{C} \mid x|_{n_{i+1} \setminus n_i} = z|_{n_{i+1} \setminus n_i}\} \cap A = \varnothing.$$

Aplicamos esto en N al conjunto A del enunciado y llamamos $r \in \mathcal{N}^N$ al real dado por $r(i) = n_i$. La propiedad de Sacks nos da un cono $C \in M$ que cubre a r y tal que $|C(i)| \leq 2^i$. Podemos suponer que $C(0) = \{r(0)\} = \{0\}$. Sea $m_0 = 0$ y $m_{i+1} = \max C(m_i + 1)$, con lo que $\{m_i\}_{i \in \omega} \in M$. Además, como $m_i + 1 \in C(m_i + 1)$,

$$m_i \leq n_{m_i} < n_{m_i + 1} \leq m_{i+1}$$

de donde se sigue que, para todo $i \in \omega$,

$$\{x \in \mathcal{C}^N \mid x|_{m_{i+1} \setminus m_i} = z|_{m_{i+1} \setminus m_i}\} \cap A = \varnothing.$$

Sea $\{j_i\}_{i \in \omega} \in M$ una sucesión de naturales tal que $j_{i+1} - j_i > 2^i$. Aplicando la propiedad de Sacks a través de una biyección entre ω y $2^{<\omega}$ podemos encontrar un "cono" $C : \omega \longrightarrow [2^{<\omega}]^{<\omega}$ en M tal que $z|_{m_{j_i+1}} \in C(i)$ y $|C(i)| \leq 2^i$. Podemos suponer que $C(i) \subset 2^{m_{j_i+1}}$, pues podemos eliminar los elementos que no cumplan esto sin salirnos de M y sin eliminar con ello a $z|_{m_{j_i+1}}$. Pongamos que $C(i) = \{t_0, \ldots, t_{k_i}\}$, con $k_i < 2^i$.

Sea $h_i : m_{j_{i+1}} \setminus m_{j_i} \longrightarrow 2$ tal que $h_i|_{m_{j_i+u+1} \setminus m_{j_i+u}} = t_u|_{m_{j_i+u+1} \setminus m_{j_i+u}}$ para todo $u \leq k_i$. Esto es posible porque $j_{i+1} - j_i > 2^i > k_i$. Además podemos tomar $\{h_i\}_{i \in \omega} \in M$.

Como $z|_{m_{j_i+1}} = t_u$, para cierto u, llamando $v = j_i + u$, tenemos que $h_i|_{m_{v+1} \setminus m_v} = z|_{m_{v+1} \setminus m_v}$, con $m_{j_i} \leq m_u < m_{u+1} \leq m_{j_{i+1}}$, luego el abierto

$$C = \bigcup_{i \in \omega} \{x \in \mathcal{C}^M \mid h_i \subset x\} \in M$$

cumple $C^N \cap A = \varnothing$. Ahora basta observar que $B = \mathcal{C}^M \setminus C$ cumple que $A \subset B^N$ y que B es diseminado^M, pues esto equivale a que C sea denso y, en efecto, dado cualquier abierto básico B_s, para cualquier i suficientemente grande se cumple que h_i es disjunto con s, luego existe un $x \in C \cap B_s$. ■

En particular el teorema anterior implica que en N no hay reales de Cohen ni aleatorios, pues si $x \in \mathcal{C}^N$, entonces $\{x\}$ es un conjunto nulo (diseminado), luego está contenido en un conjunto nulo (diseminado) inducido desde M, luego x no es de Cohen (aleatorio).

Así pues, si adjuntamos reales de Sacks a un modelo de ZFC + $V = L$, obtenemos un modelo en el que $\mathcal{C}^L \subsetneq \mathcal{C}$, pero en el que $A(L) = B(L) = \varnothing$.

6.5 El diagrama de Cichoń

Recordemos (definición [TC 8.20]) el diagrama de Cichoń, que relaciona varios cardinales característicos del continuo:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{cub}(I_m) \arrow[r] & \mathrm{un}(I_c) \arrow[r] & \mathrm{cf}(I_c) \arrow[r] & \mathrm{cf}(I_m) \arrow[r] & \mathfrak{c} \\
 & & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
\aleph_1 \arrow[r] & \mathrm{ad}(I_m) \arrow[r] \arrow[uu] & \mathrm{ad}(I_c) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{cub}(I_c) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{un}(I_m) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

Cada flecha indica una desigualdad demostrable en ZFC. A esto hay que añadir las igualdades (teorema [TC 8.33]):

$$\mathrm{ad}(I_c) = \mathrm{mín}\{\mathfrak{b}, \mathrm{cub}(I_c)\}, \qquad \mathrm{cf}(I_c) = \mathrm{máx}\{\mathfrak{d}, \mathrm{un}(I_c)\}.$$

En esta sección mostraremos el efecto que tiene sobre este diagrama la adición de reales de Cohen, aleatorios o de Sacks a un modelo dado. El caso de los reales de Sacks lo tenemos prácticamente resuelto:

Teorema 6.52 *Sean $M \subset N$ modelos transitivos de* ZFC *con los mismos ordinales y de modo que N tenga la propiedad de Sacks sobre M. Entonces todos los cardinales del diagrama de Cichoń en N son menores o iguales que $(2^{\aleph_0})^M$. En particular, si M cumple la hipótesis del continuo, son todos iguales a $\aleph_1^M$.*

Demostración: Sea $C \in M$ el conjunto de todos los conjuntos de Borel $c \in M$ tales que $m(B_c) = 0$. Como $C \subset \mathcal{N}^M$, tenemos que $|C|^M \leq \kappa = (2^{\aleph_0})^M$. Sea $\mathcal{B} = \{B_c^N \mid c \in C\} \in N$, que es una familia de conjuntos nulos tal que $|\mathcal{B}|^N \leq \kappa$. Por el teorema anterior todo subconjunto nulo de $\mathcal{C}^N$ (en N) está contenido en un conjunto de $\mathcal{B}$, lo que significa que $\mathrm{cf}(I_m)^N \leq \kappa$, y $\mathrm{cf}(I_m)$ es el mayor cardinal del diagrama de Cichoń. ■

Así pues, al adjuntar κ reales de Sacks, donde $\mathrm{cf}\,\kappa > \aleph_0$, a un modelo que cumpla la HCG, obtenemos un modelo en el que todos los cardinales del diagrama de Cichoń valen $\aleph_1$, mientras que $2^{\aleph_0} = \kappa$.

Notemos también que el teorema anterior implica que si en M se cumple la hipótesis del continuo, $\aleph_1^M$ se conserva en las extensiones con la propiedad de Sacks.

6.5.1 Adición de una cantidad no numerable de reales aleatorios y de Cohen

Pasamos ahora al caso de los reales aleatorios y de Cohen. Curiosamente, el caso no numerable es más simple que el caso numerable, y nos ocupamos de él en primer lugar.

Teorema 6.53 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC *y sea κ un cardinal^M tal que $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$. Si G es un ultrafiltro $\mathbb{B}_\kappa$-genérico sobre M, entonces en $M[G]$ se cumple que* $\mathrm{cub}(I_m) = \mathfrak{c}$ *y* $\mathrm{un}(I_m) = \aleph_1$, *por lo que el diagrama de Cichoń se reduce a*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{c} \arrow[r] & \mathfrak{c} \arrow[r] & \mathfrak{c} \arrow[r] & \mathfrak{c} \\
 & \mathfrak{b} \arrow[r] \arrow[u] & \mathfrak{d} \arrow[u] & \\
\aleph_1 \arrow[r] \arrow[uu] & \aleph_1 \arrow[r] \arrow[u] & \aleph_1 \arrow[r] \arrow[u] & \aleph_1 \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

donde $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{d}$ son los mismos que en M y $\mathfrak{c} = \kappa$.

Demostración: La clave está en que un conjunto de Borel nulo B en $M[G]$ sólo puede contener una cantidad numerable de los reales aleatorios considerados en el teorema 6.16.

En efecto, recordemos que allí hemos construido una familia $\{x_{f_\alpha}\}_{\alpha<\kappa}$ de reales aleatorios en $M[G]$, cada uno de los cuales tiene por soporte $I_\alpha = f_\alpha[\omega]$, de modo que los conjuntos I_α son disjuntos dos a dos y su unión es κ.

Sea $c \in \mathcal{N}^{M[G]}$ un código de Borel para B. Según la observación previa al teorema 6.22, el código c tiene un soporte numerable I, que podemos tomar de la forma $I = \bigcup\limits_{\alpha\in A} I_\alpha$, donde $A \subset \kappa$ es numerable. Dicho soporte I determina un real aleatorio x tal que $c \in M[x]$ y por 6.21 todos los demás x_{f_α}, con $\alpha \in \kappa \setminus A$, siguen siendo aleatorios sobre $M[x]$. El teorema 6.3 implica entonces que, para $\alpha \in \kappa \setminus A$, tenemos que $x_{f_\alpha} \notin B = B_c^{M[G]}$.

Por consiguiente, un cubrimiento de $\mathcal{C}^{M[G]}$ por conjuntos nulos tiene que constar de $\mathfrak{c} = \kappa$ miembros, ya que entre todos deben contener a todos los reales aleatorios x_{f_α} y cada uno de los conjuntos nulos sólo puede contener a una cantidad numerable de ellos. Esto implica que $\mathrm{cub}(I_m) = \mathfrak{c}$.

Por otro lado, $X = \{x_{f_\alpha} \mid \alpha < \omega_1^M\} \in M[G]$ es un conjunto no nulo, porque si fuera nulo estaría contenido en un conjunto de Borel nulo, el cual contendría una cantidad no numerable de reales aleatorios, lo cual ya hemos visto que es imposible. Además $(|X| = \aleph_1)^{M[G]}$, luego $\mathrm{un}(I_m) = \aleph_1$. La parte central del diagrama está determinada por el teorema 6.23. ■

Teniendo en cuenta el teorema 6.24, tenemos probada la consistencia de que todas las desigualdades "verticales" del diagrama de Cichoń sean estrictas.

Si añadimos reales de Cohen podemos razonar igualmente, aunque el efecto sobre el diagrama es diferente:

Teorema 6.54 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea κ un cardinal^M tal que $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$ y sea $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\kappa, 2, \aleph_0)$. Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces en $M[G]$ se cumple que* $\mathrm{cub}(I_c) = \mathfrak{c}$ *y* $\mathrm{un}(I_c) = \aleph_1$, *por lo que el* *diagrama de Cichoń se reduce a*

$$\begin{tikzcd}
\aleph_1 \arrow[r] & \aleph_1 \arrow[r] & \mathfrak{c} \arrow[r] & \mathfrak{c} \\
& \aleph_1 \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{c} \arrow[u] & \\
\aleph_1 \arrow[uu] \arrow[r] & \aleph_1 \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{c} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{c} \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

DEMOSTRACIÓN: Podemos sustituir el c.p.o. por $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2, \aleph_0)$, con lo que G define una función genérica $f : \kappa \times \omega \longrightarrow 2$, la cual define κ reales de Cohen $x_\alpha(n) = f(\alpha, n)$. Veamos que cada conjunto de Borel de primera categoría B sólo puede contener una cantidad numerable de los x_α. Para ello lo expresamos como $B = B_c^{M[G]}$, para cierto código de Borel $c \in \mathcal{N}^{M[G]}$.

A partir de un buen nombre para c se obtiene un conjunto $I \subset \kappa$ numerable tal que $c \in M[G_I]$, donde $G_I = p_I^{-1}[G]$, donde a su vez $p_I : \mathrm{Fn}(I \times \omega, 2, \aleph_0) \longrightarrow \mathbb{P}$ es la inclusión (que es una inmersión completa). Como

$$\mathbb{P} \cong \mathrm{Fn}(I \times \omega, 2, \aleph_0) \times \mathrm{Fn}((\kappa \setminus I) \times \omega, 2, \aleph_0)$$

y el segundo factor (con el filtro que cumple $G = G_I \times G_{\kappa \setminus I}$) define los mismos reales de Cohen $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \kappa \setminus I}$, resulta que, para cada $\alpha \in \kappa \setminus I$ el real x_α es de Cohen sobre $M[G_I]$, luego $x_\alpha \notin B_c^{M[G]}$. A partir de aquí el razonamiento es idéntico al del teorema anterior. ■

Así pues, también es consistente que las desigualdades "horizontales" centrales del diagrama de Cichoń sean estrictas.

6.5.2 Adición de un real de Cohen

Observemos que adjuntar un real de Cohen o aleatorio es equivalente a adjuntar una cantidad numerable de ellos. Para analizar el efecto sobre el diagrama de Cichoń de la adición de un real de Cohen necesitamos algunos resultados previos. En los dos primeros necesitamos hacer uso de algunas propiedades elementales de los logaritmos:

Teorema 6.55 *Sea A un conjunto finito y sea $B \subset A \times A$ tal que $A = \bigcup_{x \in A} B_x$, donde $B_x = \{y \in A \mid (x, y) \in B\}$, sea $a = \min\{|B^y| \mid y \in A\}$, donde llamamos $B^y = \{x \in A \mid (x, y) \in B\}$, y sea $b = \max\{|B_x| \mid x \in A\}$. Entonces existe un $H \subset A$ tal que $A = \bigcup_{x \in H} B_x$ y $|H| \leq |A|(1 + \log b)/a$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $x_0 \in A$ tal que $|B_{x_0}| = b$. Definimos recurrentemente $x_n \in A$ para $n < |A|$ de forma que $|B_{x_n} \setminus \bigcup_{j<n} B_{x_j}|$ sea el mayor posible. Como el cardinal de la unión no puede ir creciendo indefinidamente, tiene que haber

un mínimo $\hat{n}$ tal que $B_{x_{\hat{n}}} \setminus \bigcup_{j<\hat{n}} B_{x_j} = \varnothing$, y entonces $A = \bigcup_{j<\hat{n}} B_{x_j}$. Tomamos $H = \{x_j \mid j < \hat{n}\}$ y el problema es acotar $\hat{n}$.

Para cada $k \leq b$, sea $H_k = \{n < \hat{n} \mid |B_{x_n} \setminus \bigcup_{j<n} B_{x_j}| = k\}$ y sea

$$X_k = \bigcup_{j\leq k} \bigcup_{n\in H_j} B_{x_n} \setminus \bigcup_{j>k} \bigcup_{n\in H_j} B_{x_n}.$$

Así $\varnothing = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_b = A$. Más aún, $|X_1 \setminus X_0| = |X_1| = |H_1|$, $|X_2 \setminus X_1| = |X_2| - |X_1| = 2|H_2|$, y en general

$$|X_k| - |X_{k-1}| = k|H_k|.$$

Por otra parte, por la construcción de los x_n, para todo $x \in A$ y todo $k \leq b$, se cumple que

$$|B_x \cap X_k| \leq k,$$

pues si $|B_x \cap X_k| > k$, entonces $|B_x \setminus \bigcup_{j>k} \bigcup_{n\in H_j} B_{x_n}| > k$, pero la unión es de la forma $\bigcup_{j>k} \bigcup_{n\in H_j} B_{x_n} = \bigcup_{j<n} B_{x_j}$ para cierto n tal que $|B_{x_n} \setminus \bigcup_{j<n} B_{x_j}| \leq k$, luego x contradice el criterio de elección de x_n. Por consiguiente,

$$a|X_k| \leq |B \cap (A \times X_k)| \leq k|A|,$$

luego $|X_k| \leq k|A|/a$.

Finalmente:

$$\hat{n} = \sum_{j=1}^{b} |H_j| = \sum_{j=1}^{b} \frac{1}{j}(|X_j| - |X_{j-1}|) = \frac{1}{b}|X_b| + \sum_{j=1}^{b-1} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right)|X_j| \leq$$

$$\frac{|A|}{a} + \sum_{j=1}^{b-1} \frac{j|A|}{a} \frac{1}{j(j+1)} \leq \frac{|A|}{a}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{b}\right) \leq \frac{|A|}{a}(1 + \log b),$$

donde hemos acotado la suma por $1 + \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = 1 + \log b$. ■

Como consecuencia:

Teorema 6.56 *Si $X \subset \mathcal{C}$ es infinito y $\epsilon > 0$, existe un abierto cerrado $C \subset \mathcal{C}$ de medida $< \epsilon$ tal que $X + C = \mathcal{C}$.*

Demostración: Vamos a probar algo más fuerte: Existe un n_ϵ tal que para todo $F \subset \mathcal{C}$ finito con $|F| > n_\epsilon$ existe un abierto cerrado C de medida $< \epsilon$ tal que $F + C = \mathcal{C}$.

En efecto, tomemos en principio cualquier $F = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathcal{C}$ finito. Sea $m \in \omega$ tal que las restricciones $x_1|_m, \ldots, x_n|_m$ sean distintas dos a dos. Sea $F' = \{x_1|_m, \ldots, x_n|_m\}$, sea $A = {}^m2$ y sea

$$B = \{(s,t) \in A \times A \mid \bigvee j\ s = t + x_j|_m\}.$$

Con la notación del teorema anterior, tenemos que $a = b = |F|$. Concluimos que existe un $H \subset A$ tal que $A = H + F'$ y $|H| \leq 2^m(1 + \log|F|)/|F|$.

Llamamos $C = \bigcup\limits_{s\in H} B_s$ (donde aquí B_s es el abierto básico de $\mathcal{C}$ determinado por s), de modo que C es un abierto cerrado tal que $C + F = \mathcal{C}$. Además,

$$m(C) = \sum_{x\in H} \frac{1}{2^m} = \frac{1+\log|F|}{|F|},$$

y el cociente de la derecha tiende a 0 cuando $|F|$ tiende a ∞. ∎

Teorema 6.57 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC*, sea $\mathbb{P} = \omega^{<\omega}$ y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces existe un $H \in M[G]$ tal que $H \subset \mathcal{C}^{M[G]}$, tiene medida nula y para todo $X \in M[G]$ que cumpla $X \subset \mathcal{C}^M$ y $(|X| = \aleph_1)^{M[G]}$ se tiene que $H + X = \mathcal{C}$.*

Demostración: Sea $\{c^n_m\}_{m\in\omega} \in M$ una enumeración de todos los códigos de Borel de abiertos cerrados en $\mathcal{C}$ tales que $m(B^M_{c^n_m}) \leq 1/2^n$. Sea $r = \bigcup G$ el real de Cohen definido por G y, para cada $n \in \omega$, sea $H_n = \bigcup\limits_{m\geq n} B^{M[G]}_{c^m_{r(m)}} \in M[G]$. Claramente $m(H_{n+1}) \leq 2^{-n}$.

Veamos que $H = \bigcap\limits_{n\in\omega} H_n$ cumple lo requerido. Ciertamente tiene medida nula. Observemos que podemos definir un nombre canónico para cada H_n, a saber, llamando $\mathcal{C}^{\mathbb{P}}$ al conjunto de los buenos nombres para subconjuntos de $\omega \times 2$ tales que $\mathbb{1} \Vdash \xi \in \mathcal{C}$,

$$\sigma_n = \{(\xi, p) \mid p \in \mathbb{P} \land \xi \in \mathcal{C}^{\mathbb{P}} \land \bigvee m \geq n (m \in \mathcal{D}p \land p \Vdash \xi \in B_{c^m_{p(m)}})\}$$

De aquí obtenemos un nombre canónico para $\{H_n\}_{n\in\omega}$ y a su vez un nombre canónico para σ, es decir, un nombre $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $\mathbb{1} \Vdash \sigma = \bigcap\limits_{n\in\omega} \sigma_n$.

A partir de aquí simplificaremos la notación y escribiremos $C^n_m = B_{c^n_m}$, que, según el contexto, se referirá a $(C^n_m)^M$ o a $(C^n_m)^{M[G]}$.

Si H no cumple el teorema existe $X \in M[G]$ tal que $X \subset \mathcal{C}^M$, $(|X| = \aleph_1)^{M[G]}$ y hay un $x \in \mathcal{C}^{M[G]}$ tal que $x \notin H + X$. Sea $x = \tau_G$ y sea $\rho_G : \omega_1 \longrightarrow X$ biyectiva. Tomemos una condición $p^* \in G$ que fuerce todos estos hechos, es decir,

$$p^* \Vdash \tau \in \mathcal{C} \land \rho : \omega_1 \longrightarrow \check{\mathcal{C}}^M \text{ inyectiva} \land \tau \notin \sigma + \rho[\omega_1].$$

Tenemos que $x \notin \rho_G(\delta) + H$, luego $x + \rho_G(\delta) \notin H$, luego existe un $n_\delta \in \omega$ tal que $x + \rho_G(\delta) \notin H_{n_\delta}$, luego $x \notin \rho_G(\delta) + H_{n_\delta}$. Por lo tanto, en M tenemos que existe un $x_\delta \in \mathcal{C}^M$, un $n_\delta \in \omega$ y una condición $p_\delta \leq p^*$ de modo que

$$p_\delta \Vdash \rho(\check{\delta}) = \check{x}_\delta \land \tau \notin \check{x}_\delta + \sigma_{n_\delta}.$$

Como $\mathbb{P}$ es numerable^M, existen $p \in \mathbb{P}$, $n \in \omega$ y un conjunto no numerable $A \subset \omega_1$ tales que si $\delta \in A$ entonces $p_\delta = p$, $n_\delta = n$. Como podemos extender p, podemos suponer que $l = \ell(p) > n$. Llamemos $Y = \{x_\delta \mid \delta \in A\} \in M$. Entonces

$$p \Vdash \sigma_n + \check{Y} \neq \mathcal{C}.$$

Como Y es infinito (los x_δ son distintos dos a dos), por el teorema anterior existe un $k \in \omega$ tal que $Y + (C_k^l)^M = \mathcal{C}^M$. Sea $p' = p^\frown k$ y consideremos un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $p' \in G$. Entonces $(C_k^l)^{M[G]} = (C_{r(l)}^l)^{M[G]} \subset (\sigma_n)_G$. Vamos a ver que $Y + (C_k^l)^{M[G]} = \mathcal{C}^{M[G]}$. Admitiendo esto, resulta que

$$\mathcal{C}^{M[G]} = Y + (C_k^l)^{M[G]} \subset Y + (\sigma_n)_G,$$

luego $(\sigma_n)_G + Y = \mathcal{C}^{M[G]}$, cuando p (luego también p') fuerza lo contrario.

Ahora bien, tenemos que $Y + (C_k^l)^M = \mathcal{C}^M$, y por compacidad existe $Y_0 \subset Y$ finito tal que $Y_0 + (C_k^l)^M = \mathcal{C}^M$. El abierto cerrado $(C_k^l)^M$ es una unión finita de abiertos básicos, digamos $(C_k^l)^M = \bigcup\limits_{i<t} B_{s_i}^M$, y podemos exigir que todos los $s_i \in \omega^{<\omega}$ tengan la misma longitud d. Entonces, $\{y|_d + s_i \mid y \in Y_0, i < t\} = {}^d\omega$ y como $(C_k^l)^{M[G]} = \bigcup\limits_{i<t} B_{s_i}^{M[G]}$, ahora es claro que $Y + (C_k^l)^{M[G]} = \mathcal{C}^{M[G]}$. ■

Con esto ya podemos determinar los cardinales característicos de la medida:

Teorema 6.58 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC*, sea $\mathbb{P} = \omega^{<\omega}$ y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces, en $M[G]$ se cumple que* $\operatorname{cub}(I_m) = \aleph_1$ *y* $\operatorname{un}(I_m) = \mathfrak{c}$.

Demostración: Sea $X \in M$, $X \subset \mathcal{C}$ de cardinal $\aleph_1$. Por el teorema anterior $H + X = \mathcal{C}^{M[G]}$, luego $\mathcal{C}^{M[G]}$ se puede cubrir por $\aleph_1$ trasladados del conjunto nulo H. Esto implica que $\operatorname{cub}(I_m) = \aleph_1$.

Por otra parte, supongamos que en $M[G]$ existe $Y \subset \mathcal{C}^{M[G]}$ no nulo con $|Y| < \mathfrak{c}$. Para cada $x \in \mathcal{C}^M$, no puede ser que $Y \subset H + x$, porque entonces Y sería nulo, luego podemos tomar $y_x \in Y \setminus (H + x)$. Como $|Y| < \mathfrak{c} = |\mathcal{C}^M|$, existe $y \in Y$ y un conjunto no numerable $X \subset \mathcal{C}^M$ tal que $y_x = y$ para todo $x \in X$. Entonces $y \notin X + H$, en contradicción con el teorema anterior. ■

Pasamos ahora a considerar los cardinales característicos de la categoría, y en primer lugar probamos que dos de ellos no se ven alterados:

Teorema 6.59 *Si M es un modelo transitivo de* ZFC *y c es un real de Cohen sobre M, entonces* $\operatorname{ad}(I_c)^{M[c]} = \operatorname{ad}(I_c)^M$, $\operatorname{cf}(I_c)^{M[c]} = \operatorname{cf}(I_c)^M$.

Demostración: Sea $\kappa = \operatorname{ad}(I_c)^M$ y supongamos que $\{H_\alpha\}_{\alpha<\beta} \in M[c]$, con $\beta < \kappa$, es una familia de conjuntos de primera categoría. No perdemos generalidad si suponemos que son conjuntos de Borel. Por el teorema 6.11 existe $B_\alpha \in M$ tal que $B_\alpha \subset \mathcal{C}^M \times \mathcal{C}^M$ es un conjunto de Borel de primera categoría tal que $H_\alpha = (B_\alpha)_c$. Más aún, analizando la prueba se sigue que podemos tomar $\{B_\alpha\}_{\alpha<\beta} \in M$. Entonces $\bigcup\limits_{\alpha<\beta} B_\alpha \in I_c$, luego podemos tomar un conjunto de Borel $B \in I_c^M$ tal que $\bigcup\limits_{\alpha<\beta} B_\alpha \subset B$.

Así, como $B_\alpha \subset B$, también $B_\alpha^{M[c]} \subset B^{M[c]}$, luego $(B_\alpha)_c^{M[c]} \subset B_c^{M[c]}$. En definitiva, tenemos que $\bigcup\limits_{\alpha<\beta} H_\alpha \subset B_c^{M[c]}$, luego es de primera categoría por el teorema 6.13. Esto prueba que $\operatorname{ad}(I_c)^M \leq \operatorname{ad}(I_c)^{M[c]}$.

Ahora tomamos una familia $\{H_\alpha\}_{\alpha<\kappa} \in M$ de conjuntos de Borel nulos en M cuya unión sea no nula, y vamos a probar que la familia $\{H_\alpha^{M[c]}\}_{\alpha<\kappa} \in M[c]$ cumple lo mismo en $M[c]$, lo que nos da la igualdad $\mathrm{ad}(I_c)^M = \mathrm{ad}(I_c)^{M[c]}$.

Ciertamente, los conjuntos $H_\alpha^{M[c]}$ son nulos en $M[c]$. Si su unión fuera nula, existiría un conjunto de Borel nulo $H \in M[c]$ tal que $\bigcup\limits_{\alpha<\kappa} H_\alpha^{M[c]} \subset H$. El teorema 6.12 nos da entonces un conjunto de Borel nulo $H^* \in M$ tal que $H \cap \mathcal{C}^M \subset H^*$, pero $H_\alpha = H_\alpha^{M[c]} \cap \mathcal{C}^M \subset H \cap \mathcal{C}^M \subset H^*$, luego $\bigcup\limits_{\alpha<\kappa} H_\alpha \subset H^*$, contradicción.

Sea ahora $\{H_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ una base de $I_c(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ en M, es decir, una familia de conjuntos de Borel de primera categoría en $\mathcal{C}^M \times \mathcal{C}^M$ tal que todo conjunto de primera categoría está contenido en uno de sus elementos. Entonces, si $H \in M[c]$ es un conjunto de Borel de primera categoría, podemos representarlo en la forma $H = B_c^{M[c]}$, para cierto conjunto de Borel de primera categoría $B \subset \mathcal{C}^M \times \mathcal{C}^M$, que estará contenido en un H_α, luego concluimos que $H = B_c^{M[c]} \subset H_{\alpha,c}^{M[c]}$ y que, por tanto, $\{H_{\alpha c}^{M[c]}\}_{\alpha<\kappa}$ es una base de I_c en $M[c]$. Teniendo en cuenta que los cardinales característicos de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ son los mismos que los de $\mathcal{C}$, concluimos que $\mathrm{cf}(I_c)^{M[c]} \leq \mathrm{cf}(I_c)^M$.

Recíprocamente, si $\{H_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ es una base de I_c en $M[c]$, la prueba del teorema 6.12 muestra que podemos construir en M una familia $\{H_\alpha^*\}_{\alpha<\kappa}$ de conjuntos de I_c tales que $H_\alpha \cap \mathcal{C}^M \subset H_\alpha^*$. Así, si H es un conjunto de Borel de primera categoría en M, se cumple que $H^{M[c]}$ es un conjunto de Borel de primera categoría en $M[c]$, luego existe un α tal que $H^{M[c]} \subset H_\alpha$, luego

$$H = H^{M[c]} \cap \mathcal{C}^M \subset H_\alpha \cap \mathcal{C}^M \subset H_\alpha^*,$$

luego $\{H_\alpha^*\}_{\alpha<\kappa}$ es una base de I_c en M, y esto prueba que $\mathrm{cf}(I_c)^{M[c]} = \mathrm{cf}(I_c)^M$. ■

Para estudiar los dos cardinales característicos restantes probamos primero lo siguiente:

Teorema 6.60 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC, *sea c un real de Cohen sobre M y sea $D \in M[c]$ un abierto denso en $\mathcal{C}^{M[c]}$. Entonces existe $F \in \mathcal{N}^M$ tal que para toda $f \in \mathcal{N}^M$ monótona creciente estricta que cumpla $f \not\leq^* F$ se cumple que $f \circ c \in D$.*

Demostración: Sea $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega, 2, \aleph_0)$ y sea G el filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M que define el real c. Sea $D = \sigma_G$, para cierto nombre σ tal que $\mathbb{1} \Vdash \sigma$ es abierto denso en $\mathcal{C}$. Observemos que cada condición $p \in \mathbb{P}$ define un abierto básico $B_p = \{f \in \mathcal{C} \mid p \subset f\}$. (Normalmente consideramos únicamente $p \in 2^{<\omega}$, pero así tenemos igualmente una base numerable mayor). Para cada $p \in \mathbb{P}$, podemos definir en M dos sucesiones $\{p_n\}_{n\in\omega}$, $\{p'_n\}_{n\in\omega}$ en $\mathbb{P}$ tales que

$$\mathcal{D}p_n \cap p = \varnothing, \quad \mathcal{D}p'_n \cap n = \varnothing, \quad p \cup p_n \Vdash B_{\check{p}'_n} \subset \sigma.$$

En efecto, tomamos un filtro G tal que $p \in G$, con lo que $D = \sigma_G$ es abierto denso en $\mathcal{C}^{M[G]}$. Dado $n \in \omega$, enumeramos ${}^n2 = \{s_1, \ldots, s_k\}$ y tomamos $t_1 \in \mathbb{P}$ tal que $\mathcal{D}t_1 \cap n = \varnothing$ y $B_{s_1 \frown t_1} \subset D$, a su vez, t_1 puede prolongarse a una sucesión t_2 tal que $B_{s_2 \frown t_2} \subset D$, y así llegamos hasta una condición t_k tal que $B_{s_k \frown t_k} \subset D$. Entonces $p'_n = t_k$ cumple $B_{p'_n} \subset D$, ya que en caso contrario existiría un s_i tal que $B_{s_i \frown t_k} \not\subset D$, lo cual es imposible, porque $B_{s_i \frown t_k} \subset B_{s_i \frown t_i} \subset D$. Una vez tomado p'_n podemos tomar $q \in G$ tal que $q \leq p$ y $q \Vdash B_{\check{p}'_n} \subset \sigma$, y entonces $p_n = q \setminus p$ cumple lo requerido.

Ahora definimos $F_p(n) = \max \mathcal{D}(p \cup p_n)$, con lo que tenemos una familia numerable de elementos de $\mathcal{N}^M$, luego podemos tomar $F \in \mathcal{N}^M$ tal que $F_p \leq^* F$ para todo $p \in \mathbb{P}$. Veamos que cumple lo requerido. Para ello tomamos $f \in \mathcal{N}^M$ monótona creciente estricta tal que $f \not\leq^* F$. Fijamos $p \in \mathbb{P}$. Existe un $n \in \omega$ tal que $f(n) > F_p(n)$. Esto implica que $\mathcal{D}(f^{-1} \circ p'_n) \cap \mathcal{D}(p \cup p_n) = \varnothing$, pues si $m \in \mathcal{D}(f^{-1} \circ p'_n)$ está definido $f^{-1}(m) \in \mathcal{D}p'_n$, luego $f^{-1}(m) \geq n$, luego $m \geq f(n) > F_p(n) \geq \max \mathcal{D}(p \cup p_n)$. Por lo tanto $q = p \cup p_n \cup f^{-1} \circ p'_n \in \mathbb{P}$ y $q \Vdash \check{f}^{-1} \circ \check{p}'_n \subset \gamma$, donde γ es el nombre canónico del real genérico. Por lo tanto, $q \Vdash \check{p}'_n \subset \check{f} \circ \gamma$.

Por otra parte, $q \leq p \cup p_n \Vdash B_{\check{p}'_n} \subset \sigma$, luego $q \Vdash \check{f} \circ \gamma \in \sigma$. Como $q \leq p$, hemos probado que $\mathbb{1} \Vdash \check{f} \circ \gamma \in \sigma$, luego $f \circ c \in D$. ■

Como consecuencia:

Teorema 6.61 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC *y sea c un real de Cohen sobre M. Entonces, en $M[c]$ se cumple* $\mathrm{un}(I_c) \leq \mathfrak{b}^M$ *y* $\mathfrak{d}^M \leq \mathrm{cub}(I_c)$.

Demostración: Sea $\kappa < \mathfrak{d}^M$ y sea $\{C_\alpha\}_{\alpha<\kappa} \in M[c]$ una familia de conjuntos de primera categoría en $\mathcal{C}^{M[c]}$. Vamos a probar que su unión no es $\mathcal{C}^{M[c]}$. Como cada C_α está contenido en una unión numerable de cerrados de interior vacío, no perdemos generalidad si suponemos que cada C_α es un cerrado de interior vacío. A partir de un nombre para la sucesion dada, el teorema anterior nos permite construir $\{F_\alpha\}_{\alpha<\kappa} \in M$ tal que $F_\alpha \in \mathcal{N}^M$ cumple la condición del teorema (para los conjuntos $\mathcal{C} \setminus C_\alpha$. Por hipótesis, existe $f \in \mathcal{N}^M$ tal que $\bigwedge \alpha < \kappa\ F_\alpha \leq^* f$. Es claro que podemos tomar f monótona creciente estricta, y entonces $f \circ c \in \bigcap\limits_{\alpha<\kappa} (\mathcal{C}^{M[G]} \setminus C_\alpha)$, es decir, $f \circ c \notin \bigcup\limits_{\alpha<\kappa} C_\alpha$.

Por otra parte, si $\{f_\alpha\}_{\alpha<\kappa} \in M$ es una familia no acotada en $\mathcal{N}^M$, basta ver que $\{f_\alpha \circ c \mid \alpha < \kappa\} \notin I_c$, pues esto implica que $\mathrm{un}(I_c) \leq \mathfrak{b}^M$. En caso contrario la familia estaría contenida en una unión numerable de cerrados de interior vacío y (como podemos suponer que κ es no numerable) habría κ funciones contenidas en el mismo cerrado de interior vacío C (y que seguirían formando una familia no acotada). No perdemos generalidad, pues, si suponemos que $\{f_\alpha \circ c \mid \alpha < \kappa\} \subset C$. Las funciones de la familia dada pueden tomarse también estrictamente monótonas. Tomamos la función $F \in \mathcal{N}^M$ asociada a $D = \mathcal{C}^{M[c]} \setminus C$ por el teorema anterior. Entonces existe un $\alpha < \kappa$ tal que $f_\alpha \not\leq^* F$, con lo que $f_\alpha \circ c \in D$, contradicción. ■

Necesitamos un último resultado técnico:

Teorema 6.62 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC *y sea c un real de Cohen sobre M. Para cada $f \in \mathcal{N}^{M[c]}$ existe $g \in \mathcal{N}^M$ tal que si $h \in \mathcal{N}^M$ y $h \leq^* f$ entonces $h \leq^* g$.*

Demostración: La extensión $M[c]$ puede obtenerse con $\mathbb{P} = \omega^{<\omega}$. Sea G el filtro $\mathbb{P}$-genérico que la determina y sea $f = \sigma_G$, para cierto $\sigma \in M[G]$ tal que $\mathbb{1} \Vdash \sigma \in \mathcal{N}$. Consideremos una enumeración $\{s_n\}_{n\in\omega} \in M$ de $\omega^{<\omega}$. Para cada $n \in \omega$ definimos dos sucesiones $\{s_n^k\}_{k\in\omega}$ y $\{a_n^k\}_{k\in\omega}$ de modo que $s_n \subset s_n^k$, $a_n^k \in \omega$ y $s_n^k \Vdash \sigma(\check{k}) = \check{a}_n^k$. Definimos $g \in \mathcal{N}^M$ mediante $g(k) = \max\{a_0^k, \ldots, a_k^k\}$. Tomamos ahora $h \in \mathcal{N}^M$ tal que $h \leq^* f$. Entonces existen $i, m \in \omega$ tales que $s_m \Vdash \bigwedge n > \check{\imath}\ \check{h}(n) \leq \sigma(n)$. Entonces, si $k > \max\{i, m\}$, tenemos que

$$s_m^k \Vdash \check{h}(\check{k}) \leq \sigma(\check{k}) = \check{a}_m^k \leq \check{g}(\check{k}),$$

pero esto implica que $h(k) \leq g(k)$, luego $h \leq^* g$. ■

De aquí deducimos:

Teorema 6.63 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC *y sea c un real de Cohen sobre M. Entonces $\mathfrak{b}^{M[c]} \leq \mathfrak{b}^M$ y $\mathfrak{d}^M \leq \mathfrak{d}^{M[c]}$.*

Demostración: Por el teorema anterior, una familia no acotada en $\mathcal{N}^M$ sigue siendo no acotada en $\mathcal{N}^{M[c]}$, luego $\mathfrak{b}^{M[c]} \leq \mathfrak{b}^M$.

Por otra parte, si $F \subset \mathcal{N}^{M[c]}$ es una familia dominante en $M[c]$, a partir de un nombre para F, podemos construir una familia $F' \in M$ del mismo cardinal con las funciones $g \in F'$ asociadas a las $f \in F$ por el teorema anterior, y claramente F' es dominante en $\mathcal{N}^M$, luego $\mathfrak{d}^M \leq \mathfrak{d}^{M[c]}$. ■

Finalmente:

Teorema 6.64 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC *y sea c un real de Cohen sobre M. Entonces en $M[c]$ se cumple que*

$$\operatorname{ad}(I_c)^M = \operatorname{ad}(I_c) = \mathfrak{b} = \operatorname{un}(I_c), \quad \operatorname{cub}(I_c) = \mathfrak{d} = \operatorname{cf}(I_c) = \operatorname{cf}(I_c)^M.$$

Por lo tanto, el diagrama de Cichoń en $M[c]$ es

$$\begin{tikzcd}
\aleph_1 \arrow[r] & \mathfrak{b} \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[r] & \mathfrak{c} \\
 & \mathfrak{b} \arrow[r] \arrow[u] & \mathfrak{d} \arrow[u] & \\
\aleph_1 \arrow[r] \arrow[uu] & \mathfrak{b} \arrow[r] \arrow[u] & \mathfrak{d} \arrow[r] \arrow[u] & \mathfrak{c} \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

donde las columnas centrales están determinadas por $\operatorname{ad}(I_c)^M$ *y* $\operatorname{cf}(I_c)^M$.

Demostración: Una parte es el teorema 6.59. Por el teorema anterior y el teorema 6.61 tenemos que $\mathfrak{b}^{M[c]} \leq \mathfrak{b}^M \leq \mathfrak{d}^M \leq \operatorname{cub}(I_c)^{M[c]}$. Por consiguiente, $\operatorname{ad}(I_c) = \min\{\mathfrak{b}, \operatorname{cub}(I_c)\} = \mathfrak{b}$.

Podemos descomponer $M[c] = M[c_1][c_2]$, donde c_1 es un real de Cohen sobre M y c_2 es un real de Cohen sobre $M[c_1]$. Entonces, por 6.61 tenemos que $\operatorname{un}(I_c)^{M[c]} \leq \mathfrak{b}^{M[c_1]} = \operatorname{ad}(I_c)^{M[c_1]} = \operatorname{ad}(I_c)^{M[c]}$, donde hemos usado las partes ya probadas. El diagrama de Cichoń nos da ya el primer bloque de igualdades. La prueba del segundo es totalmente análoga. ■

6.5.3 Caracterizaciones de cub(I_c) y un(I_c)

Para estudiar los cardinales caracterísiticos asociados a la categoría en una extensión aleatoria vamos a necesitar unas caracterizaciones combinatorias de dos de ellos. A su vez, para enunciar una de estas caracterizaciones tenemos que introducir el conjunto:

$$C = \{S \in \mathcal{P}_f(\omega)^\omega \mid \bigvee k \in \omega \bigwedge n \geq k \ |S(n)| \leq n^2\}.$$

Teorema 6.65 *Para todo cardinal κ, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) $\mathrm{cub}(I_c) \geq \kappa$.

b) Para todo $F \subset \mathcal{N}$ con $|F| < \kappa$ existe $g \in \mathcal{N}$ tal que, para todo $f \in F$, el conjunto $\{n \in \omega \mid f(n) = g(n)\}$ es infinito.

c) Para todo $F \subset \mathcal{N}$ con $|F| < \kappa$ y toda familia G de subconjuntos infinitos de $\mathcal{N}$ con $|G| < \kappa$, existe $g \in \mathcal{N}$ tal que para todo $f \in F$ y todo $X \in G$, el conjunto $\{n \in X \mid f(n) = g(n)\}$ es infinito.

d) Para todo $F \subset \mathcal{N}$ con $|F| < \kappa$ existe $S \in C$ tal que, para todo $f \in F$ el conjunto $\{n \in \omega \mid f(n) \in S(n)\}$ es infinito.

Demostración: a) $\Rightarrow$ b) Sea $F \subset \mathcal{N}$ con $|F| < \kappa$. Para cada $f \in F$ sea $G_f = \{g \in \mathcal{N} \mid \{n \in \omega \mid f(n) = g(n)\}$ es infinito$\}$. Claramente es denso en $\mathcal{N}$, y además es un G_δ, pues es la intersección de los abiertos

$$U_n = \{g \in \mathcal{N} \mid \bigvee m > n \ g(m) = f(m)\}.$$

Por a) tenemos que existe $g \in \bigcap_{f \in F} G_f$, que claramente cumple lo pedido.

b) $\Rightarrow$ c) Sea $F = \{F_\alpha\}_{\alpha<\mu}$, con $\mu < \kappa$ y $G = \{X_\alpha\}_{\alpha<\mu}$. Admitiendo repeticiones en las enumeraciones no perdemos generalidad al tomar el mismo μ en ambos casos. Sea x_α^n el n-simo elemento de X_α. Para cada $\alpha, \beta < \mu$ definimos $h_{\alpha,\beta}(n) = f_\beta|_{\{x_\alpha^0,\ldots,x_\alpha^n\}}$. Es fácil codificar cada $h_{\alpha,\beta}$ con un elemento de $\mathcal{N}$, luego por b) existe una función h tal que, para todo $\alpha, \beta < \mu$, el conjunto $\{n \in \omega \mid h_{\alpha,\beta}(n) = h(n)\}$ es infinito.

Definimos recurrentemente una sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega}$ de modo que

$$x_n \in \mathcal{D}h(n) \setminus \{x_0, \ldots, x_{n-1}\},$$

lo cual es posible porque el dominio de $h(n)$ tiene $n+1$ elementos. Sea $g \in \mathcal{N}$ cualquier función que cumpla $g(x_n) = h(n)(x_n)$. Veamos que cumple lo requerido. Para ello tomamos cualquier $f_\beta \in F$ y cualquier $X_\alpha \in G$ y sea n cualquiera de los infinitos naturales que cumplen $h_{\alpha,\beta}(n) = h(n)$. Entonces $g(x_n) = h(n)(x_n) = h_{\alpha,\beta}(x_n) = f_\beta(x_n)$.

c) $\Rightarrow$ a) Sea $\{F_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ con $\mu < \kappa$ una familia de cerrados de interior vacío en $\mathcal{C}$. Para cada $\alpha < \mu$ y $n \in \omega$ elegimos $s_n^\alpha \in 2^{<\omega}$ de modo que para todo $t \in 2^{<n}$ se cumpla que $B_{t^\frown s_n^\alpha} \cap F_\alpha = \varnothing$. (Enumeramos todos los t posibles y, para cada uno de ellos, podemos ir prolongando s hasta que cumpla lo requerido. Para que no fuera posible tendría que ser $B_{t^\frown s} \subset F_\alpha$.)

Como antes, cada sucesión $n \mapsto s_n^\alpha$ puede codificarse con un elemento de $\mathcal{N}$, luego por hipótesis existe una sucesión $\{s_n\}_{n\in\omega}$ tal que para todo $\alpha < \mu$ el conjunto $X_\alpha = \{n \in \omega \mid s_n^\alpha = s_n\}$ es infinito.

Veamos ahora que existe una sucesión creciente $\{k_n\}_{n\in\omega}$ de números naturales tal que $\sum\limits_{j\leq k_n} \ell(s_j) < k_{n+1}$ y para cada $\alpha < \mu$ hay infinitos n tales que

$$X_\alpha \cap \{u \in \omega \mid k_{2n} \leq u < k_{2n+1}\} \neq \varnothing.$$

Para cada conjunto finito $A \subset \mu$ definimos $f_A \in \mathcal{N}$ mediante

$$f_A(n) = \text{mín}\{m \in \omega \mid \textstyle\bigwedge \alpha \in A\ \{u \in \omega \mid n \leq u < m\} \cap X_\alpha \neq \varnothing\}.$$

Para cada $k \in \omega$ definimos $f'_{A,k}(0) = k$ y $f'_{A,k}(n+1) = f_A(f'_{A,k}(n))$.

No perdemos generalidad si suponemos que $\mu < \text{cub}(I_c) \leq \mathfrak{d}$, por lo que podemos encontrar una función creciente $f \in \mathcal{N}$ que domine a todas las $f_{A,k}$. Más aún, podemos exigir que $\sum\limits_{j\leq f(n)} \ell(s_j) < f(n+1)$.

Observemos que para todo $A \subset \mu$ finito existen infinitos valores de n para los que existe un k tal que $f(n) \leq k < f_A(k) \leq f(n+1)$.

En efecto, en caso contrario existiría un $A \subset \mu$ finito y un $m \in \omega$ tal que si $n \geq m$ entonces $f(n+1) < f_A(f(n))$ (o de lo contrario valdría $k = f(n)$). Pero entonces

$$\begin{aligned} f(n) \leq f(n+m) < f_A(f(n+m-1)) &< f_A(f_A(f(n+m-2)) < \cdots \\ &< f_A^{n)}(f(m)) = f'_{A,k}(n), \end{aligned}$$

donde $k = f(n)$, lo cual es imposible, porque f domina a $f'_{A,k}$.

Definimos $X'_\alpha = \{n \in \omega \mid X_\alpha \cap \{u \in \omega \mid f(n) \leq u < f(n+1)\} \neq \varnothing\}$. Estos conjuntos son infinitos, pues hay infinitos valores de n tales que existe un k tal que $f(n) \leq k < f_{\{\alpha\}}(k) \leq f(n+1)$ y entre k y $f_{\{\alpha\}}(k)$ hay elementos de X'_α. Más aún, o bien todos los X'_α contienen infinitos pares, o bien todos contienen infinitos impares. En caso contrario, habría un X'_α con un número finito de pares y un X'_β con un número finito de impares, pero eso es imposible, porque hay infinitos n para los cuales $f(n) \leq k < f_{\{\alpha,\beta\}}(k) \leq f(n+1)$, y estos n están en $X'_\alpha \cap X'_\beta$, y entre ellos habrá infinitos pares o infinitos impares.

Cambiando f por $f'(n) = f(n+1)$ si es necesario, podemos suponer que todos los X'_α contienen infinitos pares, y entonces $k_n = f(n)$ cumple lo requerido.

Ahora probamos que existe $X \subset \omega$ que corta a todos los conjuntos X_α y que consta a lo sumo de un número en cada intervalo $k_{2n} \leq u < k_{2n+1}$.

Para cada $\alpha < \mu$ definimos

$$Y_\alpha = \{n \in \omega \mid \{u \in X_\alpha \mid k_{2n} \leq u < k_{2n+1}\} \neq \varnothing\},$$

que es un conjunto infinito, y sea $f_\alpha \in \mathcal{N}$ la función dada por

$$f_\alpha(n) = \begin{cases} \text{mín}\{u \in X_\alpha \mid k_{2n} \leq u < k_{2n+1}\} & \text{si } n \in Y_\alpha, \\ 0 & \text{si } n \notin Y_\alpha. \end{cases}$$

Por la hipótesis c) existe una función $g \in \mathcal{N}$ tal que para todo $\alpha < \mu$ el conjunto $A_\alpha = \{n \in Y_\alpha \mid g(n) = f_\alpha(n)\}$ es infinito. Sea $X = \bigcup\limits_{\alpha<\mu} g[A_\alpha]$. Así, todo $u \in X$ es de la forma $u = g(n) = f_\alpha(n)$, y entonces $k_{2n} \leq u < k_{2n+1}$, luego el único elemento de X que puede cumplir $k_{2n} \leq u < k_{2n+1}$ es $g(n)$. Por otra parte, si $n \in A_\alpha$, entonces $g(n) \in X_\alpha \cap X \neq \varnothing$.

Sea m_i el i-ésimo elemento de X y definamos

$$x = s_{m_0}{}^\frown s_{m_1}{}^\frown s_{m_1}{}^\frown \cdots$$

Basta probar que $x \notin \bigcup\limits_{\alpha<\mu} F_\alpha$. Para ello fijamos un $\alpha < \mu$. Existe un $m_i \in X_\alpha \cap X$, y entonces $s_{m_i} = s^\alpha_{m_i}$. Pongamos que $k_{2n} \leq m_i < k_{2n+1}$. Por construcción

$$\sum_{j<i} \ell(s_{m_j}) \leq \sum_{j \leq k_{2n-1}} \ell(s_j) < k_{2n} \leq m_i,$$

luego $t = s_{m_0}{}^\frown s_{m_1}{}^\frown \cdots {}^\frown s_{m_{i-1}}$ cumple $\ell(t) < m_i$ y por construcción tenemos que $B_{t^\frown s^\alpha_{m_i}} \cap F_\alpha = \varnothing$, pero $x \in B_{t^\frown s^\alpha_{m_i}}$, luego $x \notin F_\alpha$.

b) $\Rightarrow$ d) es inmediata. (Basta tomar $S(n) = \{g(n)\}$.)

d) $\Rightarrow$ b) Sea $F \subset \mathcal{N}$ con $|F| < \kappa$ y fijemos una partición $\{I_n\}_{n\in\omega}$ en conjuntos finitos de modo que $|I_n| \geq n^2$. Para cada $f \in F$ sea $f'(n) = f|_{I_n}$. De este modo, f' es una función de dominio ω con imágenes en el conjunto $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega, \omega, \aleph_0)$ de funciones de un subconjunto finito de ω en ω. Biyectando $\mathbb{P}$ con ω podemos codificar f' con una función $f'' \in \mathcal{N}$ y, aplicando la hipótesis, obtenemos una función $S'' \in C$ tal que, para cada $f \in F$, el conjunto $\{n \in \omega \mid f''(n) \in S''(n)\}$ es infinito. Deshaciendo la codificación podemos convertir S'' en una función S que toma valores en $\mathcal{P}^f\mathbb{P}$ de modo que, $|S(n)| \leq n^2 \leq |I_n|$ para todo n suficientemente grande y, para cada $f \in F$, el conjunto $\{n \in \omega \mid f|_{I_n} \in S(n)\}$ es infinito. Podemos exigir además que todas las funciones de $S(n)$ tengan dominio I_n. Así, siempre para n suficientemente grande, podemos construir un $t_n \in \omega^{I_n}$ tal que $\bigwedge s \in S(n) \bigvee j \in I_n\ t_n(j) = s(j)$.

Finalmente definimos $g \in \mathcal{N}$ tal que $g|_{I_n} = t_n$ para los n para los que está definido t_n. Claramente cumple lo pedido, pues si $f \in F$ y n es grande tenemos que $f|_{I_n} \in S(n)$, luego existe un $j \in I_n$ tal que $f(j) = g(j)$. ■

Teorema 6.66 *Para todo cardinal κ, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) $\mathrm{un}(I_c) \geq \kappa$.

b) Para todo $F \subset \mathcal{N}$ con $|F| < \kappa$ existe $g \in \mathcal{N}$ y existe $X \subset \omega$ infinito de modo que para todo $f \in F$ el conjunto $\{n \in X \mid f(n) = g(n)\}$ es finito.

c) Para todo $F \subset \mathcal{N}$ con $|F| < \kappa$ existe $g \in \mathcal{N}$ tal que para todo $f \in F$ el conjunto $\{n \in \omega \mid f(n) = g(n)\}$ es finito.

d) Para todo $F \subset C$ con $|F| < \kappa$ existe $g \in \mathcal{N}$ tal que para todo $S \in F$ el conjunto $\{n \in \omega \mid g(n) \in S(n)\}$ es finito.

Demostración: a) $\Rightarrow$ b) Supongamos que no se cumple b), es decir, que existe $F \subset \mathcal{N}$ con $\mu = |F| < \kappa$ tal que para todo $g \in \mathcal{N}$ y todo $X \subset \omega$ infinito existe $f \in F$ tal que el conjunto $\{n \in X \mid f(n) = g(n)\}$ es infinito. Vamos a construir un subconjunto de $\mathcal{C}$ de segunda categoria de cardinal μ. Concretamente, tomamos un modelo transitivo M de ZFC tal que $F \in M$ y $|M| = \mu$ y vamos a probar que $\mathcal{C}^M$ es de segunda categoría. Para ello tomamos $H \subset \mathcal{C}$ de primera categoría y veamos que $\mathcal{C}^M \setminus H \neq \varnothing$.

Tenemos que $H \subset \bigcup\limits_{n\in\omega} H_n$, donde los conjuntos H_n son cerrados de interior vacío y forman una sucesión creciente. Para cada $n \in \omega$ definimos $f_H(n)$ como un $s \in 2^{<\omega}$ tal que para todo $t \in 2^{<n}$ se cumpla que $B_{t^\frown s} \cap H_n = \varnothing$.

Codificando f_H como un elemento de $\mathcal{N}$ obtenemos una función en $F \subset M$ (que al descodificarla se convierte en una sucesión $\{s_n\}_{n\in\omega} \in M$) tal que el conjunto $X = \{n \in \omega \mid f_H(n) = s_n\}$ es infinito. Sea $\{k_n\}_{n\in\omega} \in M$ una sucesión creciente de números naturales tal que $\sum\limits_{j\leq k_n} \ell(s_j) < k_{n+1}$. El conjunto X tiene que cortar a infinitos intervalos de la forma $\{u \in \omega \mid k_{2n} \leq u < k_{2n+1}\}$ o bien a infinitos de la forma $\{u \in \omega \mid k_{2n+1} \leq u < k_{2n+2}\}$. Suponemos el primer caso. En el segundo se razonaría análogamente. Llamamos

$$Y = \{n \in \omega \mid \{u \in X \mid k_{2n} \leq u < k_{2n+1}\} \neq \varnothing\} \in M,$$

que es un conjunto infinito, y sea

$$f(n) = \begin{cases} \min\{u \in X \mid k_{2n} \leq u < k_{2n+1}\} & \text{si } n \in Y, \\ 0 & \text{si } n \notin Y. \end{cases}$$

De nuevo por hipótesis existe una función $h \in F \subset M$ tal que el conjunto $Y' = \{n \in Y \mid h(n) = f(n)\}$ es infinito. Sea $\{m_i\}_{i\in\omega} \in M$ la enumeración creciente de $h[Y']$. Observemos que cada m_i es de la forma $f(n)$ para cierto $n \in Y$, y entonces $k_{2n} \leq m_i < k_{2n+1}$. Definimos

$$x = s_{m_0}{}^\frown s_{m_1}{}^\frown s_{m_2}{}^\frown \cdots \in \mathcal{C}^M.$$

Basta ver que $x \notin \bigcup\limits_{n\in\omega} H_n$. En efecto, fijado $n_0 \in \omega$, tomamos un $n \in Y'$ de modo que $h(n) = m_i \geq n_0$, para cierto i, luego $k_{2n} \leq m_i < k_{2n+1}$. Así, $t = s_{m_0}{}^\frown \cdots {}^\frown s_{m_{i-1}}$ cumple que

$$\ell(t) = \sum_{j<i} \ell(s_{m_j}) \leq \sum_{j\leq k_{2n-1}} \ell(s_j) < k_{2n} \leq m_i,$$

luego $x \in B_{t^\frown s_{m_i}} \cap H_{m_i} = \varnothing$, luego $x \notin H_{m_i}$ y también $x \notin H_{n_0}$.

b) $\Rightarrow$ c) Supongamos que c) es falso, es decir, que existe un conjunto $F \subset \mathcal{N}$ con $|F| = \mu < \kappa$ tal que para todo $g \in \mathcal{N}$ existe $f \in F$ de modo que el conjunto $\{n \in \omega \mid f(n) = g(n)\}$ es infinito.

Sea M un modelo transitivo de ZFC tal que $|M| = \mu$ y $F \in M$. Vamos a probar que $F' = \mathcal{N}^M$ contradice b).

Dada cualquier $g \in \mathcal{N}$ y cualquier $X \subset \omega$ infinito, sea $\{x_n\}_{n\in\omega}$ una enumeración de X y definamos $g'(n) = g|_{\{x_0,\ldots,x_n\}}$. Por hipótesis (codificando g' con una función de $\mathcal{N}$) existe $f' \in M$ tal que $A = \{n \in \omega \mid f'(n) = g'(n)\}$ es infinito. Podemos suponer que $f'(n) \in {}^{n+1}\omega$. Definimos recurrentemente una sucesión $\{y_n\}_{n\in\omega} \in M$ tal que $y_n \in \mathcal{D}f'(n) \setminus \{y_0, \ldots, y_{n-1}\}$, y a su vez tomamos $f \in \mathcal{N}^M$ tal que $f(y_n) = f'(n)(y_n)$.

Si $n \in A$, entonces $f(y_n) = f'(n)(y_n) = g'(n)(y_n) = g(y_n)$ y además tenemos que $y_n = x_i \in X$, para cierto $i \leq n$, luego

$$\{y_n \mid n \in A\} \subset \{n \in X \mid f(n) = g(n)\},$$

luego este conjunto es infinito.

c) $\Rightarrow$ a) Si $F \subset \mathcal{N}$ cumple $|F| = \mu < \kappa$, por hipótesis existe $g \in \mathcal{N}$ tal que

$$F \subset X = \{x \in \mathcal{N} \mid \{n \in \omega \mid x(n) = g(n)\} \text{ es finito}\}.$$

Y X es un cerrado de interior vacío (lo hemos probado al principio de la prueba de 6.65), luego F es de primera categoría.

c) $\Rightarrow$ d) Supongamos que no se cumple d), es decir, que existe $F \subset C$ con $|F| < \kappa$ tal que para toda $g \in \mathcal{N}$ existe $S \in F$ de modo que $\{n \in \omega \mid g(n) \in S(s)\}$ es infinito.

Sea $\{I_n\}_{n\in\omega}$ una partición de ω con $|I_n| = n^2$. Sea $H_n = \omega^{I_n}$. Biyectando cada H_n con ω podemos transformar F en un conjunto F' con $|F'| < \kappa$ de modo que para toda $g' \in \prod\limits_n H_n$ existe $S' \in F'$ tal que $\{n \in \omega \mid g'(n) \in S'(n)\}$ es infinito.

Para cada $S' \in F'$ y cada $n \geq 1$, fijamos una enumeración (con repeticiones si es preciso) $S'(n) = \{s_0^n, \ldots, s_{n^2-1}^n\}$, donde $s_i^n : I_n \longrightarrow \omega$. Definimos $f_{S'} \in \mathcal{N}$ mediante $f_{S'}(n) = w_i^n(u)$, donde u es el i-ésimo elemento de I_n. Consideremos $F'' = \{f_{S'} \mid S' \in F'\}$. De este modo $F'' \subset \mathcal{N}$ y $|F''| < \kappa$. Vamos a probar que F'' incumple c).

Dada $g \in \mathcal{N}$, definimos $g'(n) = g|_{I_n}$, de modo que $g \in \prod\limits_n H_n$. Tenemos que existe $S' \in F'$ tal que $\{n \in \omega \mid g'(n) \in S'(n)\}$ es infinito. Cada n en este conjunto cumple $g|_{I_n} = w_{i_n}^n$ para cierto $i_n < n^2$, luego si u_n es el i_n-ésimo elemento de I_n, tenemos que $g(u_n) = w_{i_n}^n(u_n) = f_{S'}(u_n)$, así pues, g y $f_{S'}$ coinciden en un elemento de I_n, luego $\{n \in \omega \mid g(n) = f_{S'}(n)\}$ es infinito.

d) $\Rightarrow$ c) es trivial: dada $F \subset \mathcal{N}$, para cada $f \in F$ definimos $S_f(n) = \{f(n)\}$ y aplicamos d) a $F' = \{S_f \mid f \in F\}$. ■

6.5.4 Funciones continuas en $\mathcal{C}$

Para estudiar el comportamiento de los cardinales característicos asociados a la categoría al adjuntar un real aleatorio necesitaremos trabajar también con conjuntos de Borel en un espacio polaco algo más sofisticado que $\mathcal{N}$ o $\mathcal{D}$:

Definición 6.67 Llamaremos $\mathbb{X}$ al conjunto de todas las funciones continuas $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, que es un espacio polaco con la topología de la convergencia uniforme [T 6.7].

El problema principal que plantea el espacio $\mathbb{X}$ es que, si tenemos dos modelos transitivos $M \subset N$, mientras que se cumple $\mathcal{C}^M \subset \mathcal{C}^N$, si la inclusión es estricta ya no es cierto que $\mathbb{X}^M \subset \mathbb{X}^N$, pues una función $f : \mathcal{C}^M \longrightarrow \mathcal{C}^M$ no es una función $\mathcal{C}^N \longrightarrow \mathcal{C}^N$. No obstante, vamos a ver que toda función de $\mathbb{X}^M$ admite una única extensión a $\mathbb{X}^N$, lo cual nos permitirá identificar $\mathbb{X}^M$ con un subespacio de $\mathbb{X}^N$.

Si $M \subset N$ son modelos transitivos de ZF + ED y $f \in \mathbb{X}^M$, entonces, el teorema [T 4.19] nos da que $f \subset \mathcal{C}^M \times \mathcal{C}^M$ es cerrado, luego $f^N \subset \mathcal{C}^N \times \mathcal{C}^N$ también es cerrado. Si $f = B_c$, para cierto $c \in \mathrm{CB}$, como

$$c \in \mathrm{CB} \wedge \bigwedge xyz \in \mathcal{C}((x, y) \in B_c \wedge (x, z) \in B_c \to y = z)$$

es una relación Π^1_1, es absoluta, y podemos concluir que f^N es una función. En principio, su dominio no tendría por qué ser todo $\mathcal{C}^N$, pero, como $f \subset f^N$, dicho dominio contiene todas las funciones finalmente constantes, que forman un conjunto denso en $\mathcal{C}^M$ y también en $\mathcal{C}^N$. Además, $\mathcal{D}f^N$ es la proyección de f^N en $\mathcal{C}^N$, que es cerrada, porque f^M es compacto y la proyección es una aplicación continua, luego $\mathcal{D}f^N = \mathcal{C}^N$ (porque es cerrado y contiene un conjunto denso). Esto prueba que $f^N : \mathcal{C}^N \longrightarrow \mathcal{C}^N$, y como f^N es cerrado [T 4.19] nos da que f^N es continua.

Más aún, es claro que f^N no es sino la clausura topológica de f en $\mathcal{C}^N \times \mathcal{C}^N$, pues si $f \subset C \subset f^N$ es un cerrado, entonces C es una función por estar contenido en f^N, y su dominio es $\mathcal{C}^N$ por el mismo argumento empleado con f^N, luego $C = f^N$.

En definitiva, podemos identificar cada $f \in \mathbb{X}^M$ con su clausura $f^N \in \mathbb{X}^N$ en $\mathcal{C}^N \times \mathcal{C}^N$ e identificar así a $\mathbb{X}^M$ con un subconjunto de $\mathbb{X}^N$.

Ahora vamos a ver que, a través de esta identificación, podemos decir que $\mathbb{X}^M$ y $\mathbb{X}^N$ tienen "una misma base" en el mismo sentido en que podemos decir esto de $\mathcal{C}^M$ y $\mathcal{C}^N$. Para ello conviene particularizar la prueba de [T 6.7].

Observemos en primer lugar que una métrica completa en $\mathcal{C}$ que induce su topología es la dada por $d(x, y) = 1/n$, donde n es el mínimo natural tal que $x|_n \neq y|_n$, siempre que $x, y \in \mathcal{C}$ son distintos. Respecto de esta distancia, la bola abierta $B_{1/n}(x)$ es simplemente el abierto básico $B_{x|_n}$.

A su vez, la bola abierta $B_{1/n}(f)$ en $\mathbb{X}$ es

$$B_{1/n}(f) = \{g \in \mathbb{X} \mid \bigwedge x \in \mathcal{C}\ g(x)|_n = f(x)|_n\}.$$

Ahora consideramos el conjunto

$$C_{m,n} = \{f \in \mathbb{X} \mid \bigwedge xy \in \mathcal{C}(x|_m = y|_m \to f(x)|_n = f(y)|_n)\}.$$

Para cada $h : {}^m2 \longrightarrow {}^n2$, definimos $d_h \in C_{m,n}$ mediante $d_h(x) = h(x|_m)^\frown 0$, donde esta expresión debe entenderse como la sucesión que empieza como $h(x|_m)$ y continúa constantemente igual a 0. Definimos

$$D_{m,n} = \{d_h \mid h : {}^m2 \longrightarrow {}^n2\} \subset C_{m,n}.$$

Se cumple entonces que

$$\bigwedge f \in C_{m,n} \bigvee g \in D_{m,n} \bigwedge s \in {}^m2\ f(s^\frown 0)|_n = g(s^\frown 0)|_n.$$

En efecto, basta tomar $h(s) = f(s^\frown 0)|_n$, y entonces $g = d_h$ cumple lo requerido, pues $g(s^\frown 0)|_n = h(s) = f(s^\frown 0)|_n$.

Veamos ahora que $D = \bigcup\limits_{m,n\in\omega} D_{m,n}$ es denso en $\mathbb{X}$.

En efecto, dada $f \in \mathbb{X}$ y $n \in \omega$, como f es uniformemente continua existe un $m \in \omega$ tal que $f \in C_{m,n}$, luego existe un $g \in D_{m,n}$ que cumple la propiedad precedente. Entonces, para todo $x \in \mathcal{C}$, tenemos que

$$f(x)|_n = f(x|_m{}^\frown 0)|_n = g(x|_m{}^\frown 0)|_n = g(x)|_n,$$

luego $d(f, g) < 1/n$.

Así pues, una base numerable de $\mathbb{X}$ está formada por las bolas abiertas $B_{1/l}(d)$, con $d \in D$. Más aún, si $d \in D_{m,n}$ podemos restringirnos a bolas con $l \geq \max\{m, n\}$. Más explícitamente, un abierto básico de $\mathbb{X}$ está determinado por una aplicación $h : {}^m2 \longrightarrow {}^n2$ y un $l \geq \max\{m, n\}$, y es

$$B_{h,l} = \{f \in \mathbb{X} \mid \bigwedge x \in \mathcal{C}\ f(x)|_l = h(x|_m)^\frown 0\},$$

donde en este caso $0 \in {}^{l-m}2$.

Como las funciones ${}^m2 \longrightarrow {}^n2$ son las mismas en todos los modelos transitivos de ZF + ED (al igual que los $l \in \omega$), concluimos que el espacio $\mathbb{X}$ tiene "los mismos" abiertos básicos $B_{h,l}$ en todos los modelos, si bien éstos tienen "realizaciones" distintas $B^M_{h,l}$ en cada modelo M particular.

Es claro que podemos definir una aplicación $k \mapsto (h_k, l_k)$ que recorra todos los pares de aplicaciones $h_k : {}^{m_k}2 \longrightarrow {}^{n_k}2$ y números $l_k \geq \max\{m_k, n_k\}$ de modo que las fórmulas $u = m_k$, $v = n_k$, $w = l_k$, $s_u = h_k(s_v)$ sean aritméticas. Fijada esta aplicación, tenemos una enumeración B_k de los abiertos básicos del espacio $\mathbb{X}$, que a su vez sirve de base para la aplicación $c \mapsto B_c$ que asigna a cada código de Borel un conjunto de Borel en $\mathbb{X}$.

Para obtener en este contexto propiedades similares a las que hemos probado para $\mathcal{N}$ (o $\mathcal{C}$) conviene introducir una codificación alternativa de los elementos de $\mathbb{X}$ distinta de la que resulta de considerarlos como meros cerrados en $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$.

Para ello definimos CX como el conjunto de todas las aplicaciones monótonas $\phi : 2^{<\omega} \longrightarrow 2^{<\omega}$ tales que $\bigwedge x \in \mathcal{C}\ \lim\limits_n \ell(\phi(x|_n)) = \infty$.

Según el teorema [TD 1.3] cada $\phi \in \mathrm{CX}$ define una función $f_\phi \in \mathbb{X}$ mediante $f_\phi(x) = \bigcup\limits_{n\in\omega} \phi(x|_n)$ y, recíprocamente, toda $f \in \mathbb{X}$ es de esta forma.

Identificando los elementos de $2^{<\omega}$ con números naturales podemos considerar que $\mathrm{CX} \subset \mathcal{N}$. Más aún:

Teorema 6.68 CX *es un conjunto aritmético.*

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que

$$\phi \in \mathrm{CX} \leftrightarrow \bigwedge s \in \omega \bigvee t \in \omega (t = \phi(s) \land (s \in 2^{<\omega} \to t \in 2^{<\omega})) \land$$

$$\bigwedge st \in \omega (s \in 2^{<\omega} \land t \in 2^{<\omega} \land s \subset t \to \bigvee uv \in \omega (u = \phi(s) \land v = \phi(t) \land u \subset v))$$

$$\land \bigwedge m \bigvee n \bigwedge stk (s \in 2^{<\omega} \land \ell(s) = n \land t = \phi(s) \land k = \ell(t) \to m \leq k). \qquad \blacksquare$$

Por lo tanto, ser un código de una función de $\mathbb{X}$ es absoluto para modelos transitivos de ZFC, al igual que lo es la relación en $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ dada por

$$\phi \in \mathrm{CX} \land \psi \in \mathrm{CX} \land f_\phi = f_\psi \leftrightarrow \phi \in \mathrm{CX} \land \psi \in \mathrm{CX} \land$$

$$\bigwedge s \in \omega \bigvee tuv \in \omega (s \in 2^{<\omega} \to t = \phi(s) \land u \in 2^{<\omega} \land v = \psi(u) \land t \subset v).$$

Esto se traduce en que si $M \subset N$ son dos modelos de ZFC y $f \in \mathcal{C}^M$, entonces $f = f_\phi^M$ para cierto $\phi \in \mathrm{CX}^M \subset \mathrm{CX}^N$ y $f^N = f_\phi^N$ es independiente de la elección del código ϕ.

Sucede que f^N es el mismo conjunto que ya teníamos definido considerando $f \subset \mathcal{C}^M \times \mathcal{C}^M$. Es fácil probarlo viendo que f^N tiene que ser igualmente la clausura de f, pero una prueba más explícita consiste en observar que

$$(x, y) \in f_\phi \leftrightarrow \bigwedge n \in \omega (s_n \subset x \to \phi(s_n) \subset y),$$

luego $(x, y) \notin f_\phi \leftrightarrow \bigvee n \in \omega (x \in B_{s_n} \land y \notin B_{\phi(s_n)})$, luego $(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \setminus f_\phi = \bigcup\limits_{n \in \omega} A_n$, donde $A_n = B_{s_n} \times (\mathcal{C} \setminus B_{\phi(s_n)})$ es abierto.

A partir de aquí es fácil definir explícitamente, para cada $\phi \in \mathrm{CX}$, un código $c_\phi \in \mathrm{CB}$ de manera que $f_\phi = B_{c_\phi}$ y de modo que la definición es absoluta para modelos transitivos. Esto hace que si $f = f_\phi^M = B_{c_\phi}^M$, podemos concluir que $f^N = f_\phi^N = B_{c_\phi}^N = f^N$, donde el primer f^N es el que acabamos de definir y el último el que ya teníamos definido.

Ahora observamos que, si $\phi \in \mathrm{CX}$, $h : {}^m 2 \longrightarrow {}^n 2$ y $l \geq \max\{m, n\}$, entonces

$$f_\phi \in B_{h,l} \leftrightarrow \bigwedge x \in \mathcal{C}\ f(x)|_l = h(x|_m)^\frown 0 \leftrightarrow$$

$$\bigwedge x \in \mathcal{C} \bigvee u \in \omega (\ell(\phi(x|_u)) \geq l \land \phi(x|_u)|_l = h(x|_m)^\frown 0) \leftrightarrow$$

$$\bigwedge s \in 2^{<\omega} (\ell(s) \geq m \land \ell(\phi(s)) \geq l \to \phi(s)|_l = h(s|_m)^\frown 0).$$

A través de una codificación aritmética de los pares (h, l) concluimos lo siguiente:

Teorema 6.69 *Existe una relación aritmética P en $\omega \times \mathcal{N}$ tal que para todo $\phi \in \mathrm{CX}$ se cumple que $f_\phi \in B_k \leftrightarrow P(k, \phi)$.*

Este teorema es el equivalente a que la relación $x \in B_{s_n} \subset \mathcal{N}$ es aritmética en $\omega \times \mathcal{N}$. Usando esta relación en lugar de $x \in B_{s_n}$ en la prueba del teorema [TD 4.36] obtenemos el resultado análogo para $\mathbb{X}$:

Teorema 6.70 *Existen relaciones P y Q en $\mathcal{N}^2$ que son Σ^1_1 y Π^1_1 respectivamente tales que, si $\phi \in \mathrm{CX}$ y $c \in \mathrm{CB}$, entonces*

$$f_\phi \in B_c \leftrightarrow P(\phi, c) \leftrightarrow Q(\phi, c).$$

A su vez, este teorema, junto con 6.68, permite probar para $\mathbb{X}$ la versión análoga del teorema [TD 4.37] y sus consecuencias, como el carácter absoluto de las relaciones consideradas y las recogidas tras la definición [TD 6.28]. Aparte de esto, sólo necesitaremos que también se cumple el análogo al teorema [TD 6.31], cuya prueba vale sin cambio alguno:

Teorema 6.71 *"$B_c \subset \mathbb{X}$ es de primera categoría" es absoluto para modelos transitivos de* ZF + ED.

6.5.5 Adición de un real aleatorio

Finalmente estamos en condiciones de estudiar el diagrama de Cichoń tras la adjunción de un real aleatorio. Concretamente, veremos que éste apenas se modifica. La prueba del teorema siguiente es completamente análoga a la del teorema 6.59:

Teorema 6.72 *Si M es un modelo transitivo de* ZFC *y a es un real aleatorio sobre M, entonces* $\mathrm{ad}(I_m)^{M[a]} = \mathrm{ad}(I_m)^M$, $\mathrm{cf}(I_m)^{M[a]} = \mathrm{cf}(I_m)^M$.

También es fácil probar lo siguiente:

Teorema 6.73 *Si M es un modelo transitivo de* ZFC *y a es un real aleatorio sobre M, entonces* $\mathrm{cub}(I_m)^{M[a]} \geq \mathrm{cub}(I_m)^M$, $\mathrm{un}(I_m)^{M[a]} \leq \mathrm{un}(I_m)^M$.

Demostración: Dada una familia en $M[a]$ de conjuntos nulos que cubran a $\mathcal{C}^{M[a]}$, el teorema 6.12 nos permite construir una familia en M del mismo cardinal que cubre a $\mathcal{C}^M$. Similarmente, si $X \in M$ es un conjunto no nulo, dicho teorema implica que también es no nulo en $M[a]$. ■

Veremos que los dos cardinales considerados en el teorema anterior son los únicos que pueden variar al añadir un real aleatorio. El valor que toman en la extensión depende fuertemente del modelo base, pero podemos probar un resultado general que se basa en el siguiente análogo a 6.60:

Teorema 6.74 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC *y a un real aleatorio sobre M. Sea $A \in M[a]$ un conjunto nulo. Entonces existe $F \in \mathcal{N}^M$ tal que para toda función creciente $f \in \mathcal{N}^M$ tal que $F \leq^* f$, se cumple que $f \circ a \notin A$.*

Demostración: Por 6.11 existe un conjunto de Borel $B \subset \mathcal{C}^M \times \mathcal{C}^M$ en M que es nulo y $A = B_a^{M[a]}$. Entonces[5]

$$B \subset \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{k\geq n} B_{s_k} \times B_{t_k}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\ell(s_k)-\ell(t_k)} < \infty,$$

para ciertas sucesiones $\{s_k\}_{k\in\omega}$, $\{t_k\}_{k\in\omega}$ en $2^{<\omega}$. Si $f \in \mathcal{N}^M$ es creciente y $s, t \in 2^{<\omega}$, entonces es fácil ver que

$$m(\{x \in \mathcal{C} \mid (x, f\circ x) \in B_s \times B_t)\}) \leq 2^{-\ell(s)-\ell(t)+|f^{-1}[\ell(s)]|}$$

(para pertenecer al conjunto, x tiene que cumplir $\ell(s)$ condiciones binarias que garanticen que $x \in B_s$ y $\ell(t)$ condiciones que garanticen que $f\circ x \in B_t$, de las cuales $|f^{-1}[\ell(s)]|$ estarán repetidas (o serán contradictorias con las anteriores, en cuyo caso el conjunto es vacío). Vamos a ver que existe $F \in \mathcal{N}^M$ creciente tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{|F^{-1}[\ell(s_k)]|-\ell(s_k)-\ell(t_k)} < \infty.$$

Podemos suponer que la sucesión $\{\ell(s_k)\}_{k\in\omega}$ es creciente, y entonces también lo es $\{c_k\}_{k\in\omega}$, donde $c_k = |F^{-1}[\ell(s_k)]|$. De hecho, eligiendo $f(0)$ suficientemente grande podemos hacer que c_k empiece tomando el valor 0 tantas veces como queramos, eligiendo $F(1)$ suficientemente grande podemos hacer que c_k continúe tomando el valor 1 tantas veces como queramos, y así sucesivamente. En concreto, hacemos que c_k tome el valor m hasta un n_m suficientemente grande como para que

$$\sum_{k=n_m+1}^{\infty} 2^{-\ell(s_k)-\ell(t_k)} < \frac{1}{2^{2m+1}},$$

de modo que

$$\sum_{k=n_m+1}^{n_{m+1}} 2^{c_k} 2^{-\ell(s_k)-\ell(t_k)} = \sum_{k=n_m+1}^{n_{m+1}} 2^{m+1} 2^{-\ell(s_k)-\ell(t_k)}$$

$$< \sum_{k=n_m+1}^{\infty} 2^{m+1} 2^{-\ell(s_k)-\ell(t_k)} < \frac{1}{2^m}.$$

Esto garantiza que

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{|F^{-1}[\ell(s_k)]|-\ell(s_k)-\ell(t_k)} < \sum_{k=0}^{n_0} 2^{-\ell(s_k)-\ell(t_k)} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} < \infty.$$

Veamos que esta función F cumple lo requerido. Para ello tomamos una función $f \in \mathcal{N}^M$ tal que $F \leq^* f$. Entonces el conjunto

$$H_f = \{x \in \mathcal{C}^M \mid (x, f\circ x) \in \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{k\geq n} B_{s_k}^M \times B_{t_k}^M\}$$

[5]Esto es cierto en un contexto más general: si B es un conjunto nulo, existen abiertos básicos U_{mn} tales que $B \subset \bigcup_{m\in\omega} U_{mn}$ y $\sum_{m\in\omega} \mu(U_{mn}) \leq 1/2^n$, luego llamando $\{U_n\}_{n\in\omega}$ a una enumeración de todos los U_{nm} tenemos que $B \subset \bigcup_{n\in\omega} \bigcap_{k\geq n} U_k$ y $\sum_{n\in\omega} \mu(U_n) < \infty$.

$$\subset \bigcap_{n\in\omega}\bigcup_{k\geq n}\{x\in \mathcal{C}^M \mid (x, f\circ x)\in B^M_{s_k}\times B^M_{t_k}\}$$

tiene medida nula, porque para todo k suficientemente grande se cumple que

$$m(\{x\in \mathcal{C}^M \mid (x, f\circ x)\in B^M_{s_k}\times B^{M[a]}_{t_k})\})\leq 2^{-\ell(s_k)-\ell(t_k)+|F^{-1}[\ell(s_k)]|}.$$

Ahora observamos que las sucesiones s_k y t_k pueden codificarse mediante dos funciones $u, v\in \mathcal{N}^M$, y es claro que $x\in H_f \leftrightarrow R(x,d,u,v)$, donde R es una relación aritmética. Por lo tanto, la relación

$$c\in \mathrm{CB}\wedge \bigwedge y\in \mathcal{C}(y\in B_c\leftrightarrow R(x,d,u,v))$$

es Π^1_1, luego absoluta para modelos transitivos, luego $H_f^{M[a]}$ cumple la misma definición que en M, y es un conjunto de Borel nulo con código en M. Por consiguiente $a\notin H_f^{M[a]}$, luego $(a, f\circ a)\notin B^{M[a]}$, luego $f\circ a\notin B_a^{M[a]}=A$. ■

Ahora es inmediato:

Teorema 6.75 *Si M es un modelo transitivo de* ZFC *y a es un real aleatorio sobre M, entonces* $\mathrm{cub}(I_m)^{M[a]}\geq \mathfrak{b}^{M[a]}$, $\mathrm{un}(I_m)^{M[a]}\leq \mathfrak{d}^{M[a]}$.

Demostración: Recordemos que $\mathfrak{b}^{M[a]}=\mathfrak{b}^M$ y $\mathfrak{d}^{M[a]}=\mathfrak{d}^M$, por 6.23. Sea $\kappa<\mathfrak{b}$ y supongamos que $\{H_\alpha\}_{\alpha<\kappa}\in M[a]$ es una familia de conjuntos nulos. El teorema anterior nos permite construir una familia de funciones $\{F_\alpha\}_{\alpha<\kappa}\in M$. Como $\kappa<\mathfrak{b}$ existe $f\in\mathcal{N}^M$ tal que $\bigwedge\alpha<\kappa\ F_\alpha\leq^* f$. Por el teorema anterior $f\circ a\notin \bigcup\limits_{\alpha<\kappa} H_\alpha$. Esto prueba la primera desigualdad del enunciado.

Para la segunda tomamos en M una familia dominante $D\subset \mathcal{N}^M$ $(D\in M)$ de cardinal^M $\mathfrak{d}$, y entonces $H=\{f\circ a\mid f\in D\}\in M[a]$ es un conjunto no nulo, pues si fuera nulo, el teorema anterior nos daría una función $F\in\mathcal{N}^M$, para la cual existiría $f\in D$ tal que $F\leq^* f$, pero entonces $f\circ a\notin H$, contradicción. ■

Para el siguiente resultado vamos a considerar el espacio $\mathbb{X}$ de las funciones continuas de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}$. Para cada $x\in\mathcal{C}$, sea $\Phi_x:\mathbb{X}\longrightarrow\mathcal{C}$ la aplicación continua dada por $\Phi_x(f)=f(x)$.

Teorema 6.76 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC *y sea a un real aleatorio sobre M. Si $F\in M[a]$ es un subconjunto de $\mathcal{C}^{M[a]}$ de primera categoría, existe un conjunto $H\in M$, $H\subset\mathbb{X}^M$ de primera categoría tal que $\Phi_a^{-1}[F]\subset H^{M[a]}$.*

Demostración: Por la nota tras el teorema 6.13 existe un conjunto de Borel $B\subset\mathcal{C}^M\times\mathcal{C}^M$ con todas sus secciones de primera categoría tal que $F=B_a^{M[a]}$. También podemos suponer que B es unión numerable de cerrados de interior vacío (con lo que tal vez cambiamos F por un conjunto mayor, pero igualmente de primera categoría). Sea, pues, $B=\bigcup\limits_{n\in\omega}F_n$, donde cada F_n es cerrado de interior vacío en $\mathcal{C}^M\times\mathcal{C}^M$. Sea

$$H_n=\{f\in\mathbb{X}^M\mid \bigvee z\in\mathcal{C}^M\ (z,f(z))\in F_n\}\in M$$

y sea $H = \bigcup\limits_{n\in\omega} H_n$. Si $H_n = B_c$, $F_n = B_d$, con $c, d \in \mathrm{CB}$, tenemos que

$$c, d \in \mathrm{CB} \wedge \bigwedge \phi z w(\phi \in \mathrm{CX} \wedge (z, w) \in f_\phi \wedge (z, w) \in B_d \to f_\phi \in B_c).$$

El antecedente de la implicación es aritmético y el consecuente es Π^1_1, luego la fórmula anterior es una relación Π^1_1 en c y d, luego se cumple también en $M[a]$, luego

$$\{f \in \mathbb{X}^{M[a]} \mid \bigvee z \in \mathcal{C}^{M[a]}(z, f(x)) \in F_n^{M[a]}\} \subset H_n^{M[a]}.$$

Esto implica que $\Phi_a^{-1}[F] \subset H^{M[a]}$. En efecto, si $f \in \Phi_a^{-1}[F]$, entonces $\Phi_a(f) = f(a) \in F = B_a^{M[a]}$, luego tenemos que $(a, f(a)) \in B^{M[a]}$, luego existe un $n \in \omega$ tal que $(a, f(a)) \in F_n^{M[a]}$, luego $f \in H_n^{M[a]} \subset H^{M[a]}$.

Por consiguiente, basta probar que (en M) cada H_n es un cerrado de interior vacío. Siempre razonando en M, si $f \in \mathbb{X} \setminus H_n$, para cada $z \in \mathcal{C}$ tenemos que $(z, f(z)) \notin F_n$, luego existe un $k \in \omega$ tal que $(B_{z|_k} \times B_{f(z)|_k}) \cap F_n = \varnothing$ (de lo contrario $(z, f(z))$ estaría en la clausura de F_n, que es el propio F_n). Sea $N : \mathcal{C} \longrightarrow \omega$ la función que a cada $z \in \mathcal{C}$ le asigna el mínimo k que cumple lo anterior. Es claro que N es continua, y como $\mathcal{C}$ es compacto existe un $k \in \omega$ tal que $N(z) < k$ para todo $z \in \mathcal{C}$. Esto implica que $f \in B_{1/k}(f) \subset \mathbb{X} \setminus H_n$, pues si $g \in B_{1/k}(f)$, entonces $\bigwedge z \in \mathcal{C}\ f(z)|_k = g(z)|_k$, luego $(B_{z|_k} \times B_{g(z)|_k}) \cap F_n = \varnothing$, luego $(z, g(z)) \notin F_n$, luego $g \notin H_n$. Así queda probado que H_n es cerrado.

Veamos ahora que $\mathbb{X} \setminus H_n$ es denso en $\mathbb{X}$. Para ello consideramos una bola abierta $B_{1/k}(f)$ cualquiera y veamos que corta al conjunto. Para cada $z \in \mathcal{C}$, sabemos que F_n y $(F_n)_z$ tienen interior vacío, luego existe $x_z \in B_{f(z)|_k} \setminus (F_n)_z$, con lo que $(z, x_z) \notin F_n$, luego existe un producto de abiertos cerrados tal que $(z, x_z) \in C_z \times C'_z \subset (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \setminus F_n$. Por compacidad existen $z_1, \ldots, z_l \in \mathcal{C}$ tales que $\mathcal{C} = C_{z_1} \cup \cdots \cup C_{z_l}$. Reduciendo los abiertos cerrados podemos suponer que son disjuntos dos a dos. Definimos $g \in \mathbb{X}$ de modo que en C_{z_j} tome el valor x_{z_j}. Claramente $\bigwedge z \in \mathcal{C}\ g(z)|_k = f(z)|_k$, luego $g \in B_{1/k}(f)$. Por otra parte, si $z \in \mathcal{C}$, tenemos que $(z, g(z)) = (z, x_{z_j}) \in C_{z_j} \times C'_{z_j} \subset (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \setminus F_n$, luego $(z, g(z)) \notin F_n$, lo que prueba que $g \notin H_n$. ■

Como consecuencia:

Teorema 6.77 *Si M es un modelo transitivo de* ZFC *y a es un real aleatorio sobre M, entonces* $\mathrm{cub}(I_c)^{M[a]} \geq \mathrm{cub}(I_c)^M$, $\mathrm{un}(I_c)^{M[a]} \leq \mathrm{un}(I_c)^M$.

Demostración: Si $X \in M$ es un subconjunto de $\mathbb{X}^M$ que no es de primera categoría y $\bar{X} = \{f^M \mid f \in X\} \in M[a]$, entonces $\Phi_a[\bar{X}] \in M[a]$ no es de primera categoría en $\mathcal{C}^{M[a]}$, pues si lo fuera podríamos tomar H según el teorema anterior, y entonces se cumpliría que $\bar{X} \subset \Phi_a^{-1}[\Phi_a[\bar{X}]] \subset H^{M[a]}$, luego $X \subset H$ y X sería de primera categoría. Como $|\Phi_a[\bar{X}]| \leq |X|$, concluimos la segunda desigualdad del enunciado.

Para la primera partimos de una familia $\{F_\alpha\}_{\alpha<\kappa} \in M[a]$ de conjuntos de primera categoría que cubran $\mathcal{C}^{M[a]}$. Entonces $\{\Phi_a^{-1}[H_\alpha]\}_{\alpha<\kappa}$ cubre $\mathbb{X}^{M[a]}$ y el teorema anterior nos permite construir una familia $\{H_\alpha\}_{\alpha<\kappa} \in M$ de conjuntos de primera categoría tales que $\Phi_a^{-1}[F_\alpha] \subset H_\alpha^{M[a]}$, luego los $H_\alpha^{M[a]}$ cubren $\mathbb{X}^{M[a]}$, y esto implica que los H_α cubren $\mathbb{X}^M$. ■

Teorema 6.78 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC *y sea a un real aleatorio sobre M. Entonces* $\operatorname{cub}(I_c)^{M[a]} \leq \operatorname{cub}(I_c)^M$, $\operatorname{un}(I_c)^{M[a]} \geq \operatorname{un}(I_c)^M$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\kappa = \operatorname{cub}(I_c)^{M[a]}$. Si fuera $\kappa > \operatorname{cub}(I_c)^M$, por el teorema 6.65 aplicado en M existiría $F \subset \mathcal{N}^M$ con $|F| < \kappa$ tal que para todo $S \in C^M$ existe $f \in F$ tal que el conjunto $\{n \in \omega \mid f(n) \in S(n)\}$ es finito.

Vamos a probar que en $M[a]$ se cumple que para todo $g \in \mathcal{N}^{M[a]}$ existe $f \in F$ tal que el conjunto $\{n \in \omega \mid f(n) = g(n)\}$ es finito. Esto implica que $\kappa > \operatorname{cub}(I_m)^{M[a]}$, lo cual es absurdo.

Sea G el ultrafiltro determinado por a y sea $g = \sigma_G$, para un cierto nombre tal que $\|\sigma \in \mathcal{N}\| = \mathbb{1}$. Para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$ definimos

$$S(n) = \{k \in \omega \mid m(\|\sigma(\check{n}) = \check{k}\|) > 1/n^2\}.$$

Como las condiciones $\|\sigma(\check{n}) = \check{k}\|$ son incompatibles para distintos valores de k, es claro que $|S(n)| < n^2$. Por lo tanto existe $f \in F$ tal que $f(n) \notin S(n)$ para todo n suficientemente grande, es decir, que $m(\|\sigma(\check{n}) = \check{f(n)}\|) \leq 1/n^2$. Vamos a ver que f cumple lo pedido.

Fijamos $p \in \mathcal{B}_m$ y tomamos un k tal que $\sum\limits_{n=k}^{\infty} 1/n^2 < m(p)$. Entonces

$$q = p \wedge (\bigvee_{n=k}^{\infty} \|\sigma(\check{n}) = \check{f(n)}\|) \neq \mathbb{0},$$

$q \leq p$ y $q \Vdash \bigwedge n > \check{k}\ \sigma(n) \neq \check{f}(n)$. Por lo tanto

$$\|\{n \in \omega \mid \check{f}(n) = \sigma(n)\} \text{ es finito}\| = \mathbb{1}.$$

Sea $\kappa = \operatorname{un}(I_c)^M$. Si fuera $\operatorname{un}(I_c)^{M[a]} < \kappa$, según 6.66 existiría $F \in M[a]$ tal que $F \subset \mathcal{N}^{M[a]}$, $|F| < \kappa$ tal que para todo $g \in \mathcal{N}^{M[a]}$ existe $f \in F$ tal que el conjunto $\{n \in \omega \mid f(n) = g(n)\}$ es infinito. Sea $F' \in M$ un conjunto de nombres para los elementos de F, con $|F'| < \kappa$.

Para cada $\sigma \in F'$ y $n > 0$ definimos

$$S_\sigma(n) = \{k \in \omega \mid m(\|\sigma(\check{n}) = \check{k}\|) > 1/n^2\}.$$

Claramente $S_\sigma \in C$ y consideramos la familia $F'' = \{S_\sigma \mid \sigma \in F'\} \subset C$. Veamos que para cada $g \in \mathcal{N}^M$ existe un $\sigma \in F'$ tal que $\{n \in \omega \mid g(n) \in S_\sigma(n)\}$ es infinito. Según 6.66 esto implica que $\kappa > \operatorname{un}(I_c)^M$, lo cual es absurdo.

Dado $g \in \mathcal{N}^M$, sabemos que existe un $\sigma \in F'$ tal que $\{n \in \omega \mid g(n) = \sigma_G(n)\}$ es infinito. Si $\{n \in \omega \mid g(n) \in S_\sigma(n)\}$ fuera finito, tendríamos que para todo n suficientemente grande $m(\|\sigma(\check{n}) = \check{g(n)}\|) \leq 1/n^2$, y más arriba hemos visto que esto implica que

$$\|\{n \in \omega \mid \check{g}(n) = \sigma(n)\} \text{ es finito}\| = \mathbb{1},$$

contradicción. ■

En conclusión:

Teorema 6.79 *Si M es un modelo transitivo de* ZFC *y a es un real aleatorio sobre M, entonces los cardinales del diagrama de Chichoń en $M[a]$ son los mismos que en M, salvo a lo sumo* $\operatorname{cub}(I_m)$ *y* $\operatorname{un}(I_m)$*, que cumplen*

$$\operatorname{cub}(I_m)^{M[a]} \geq \text{máx}\{\operatorname{cub}(I_m)^M, \mathfrak{b}\}, \qquad \operatorname{un}(I_m)^{M[a]} \leq \text{mín}\{\operatorname{un}(I_m)^M, \mathfrak{d}\}.$$

Puede probarse que existen modelos M en los que las desigualdades del teorema anterior son estrictas.

Capítulo VII

Extensiones iteradas

En 1971, R.M. Solovay y S. Tennenbaum probaron mediante una extensión genérica la consistencia de la hipótesis de Suslin. El argumento se basaba en las ideas siguientes: Partimos de un modelo transitivo numerable M de ZFC y queremos conseguir una extensión genérica en la que no haya árboles de Suslin. De hecho basta con garantizar que no haya árboles de Suslin bien podados (véase [TC 9.14]). Si $(A, \leq) \in M$ es un árbol de Suslin bien podado en M, entonces $\mathbb{P} = (A, \leq^*)$, donde $p \leq^* q \leftrightarrow q \leq p$, es un c.p.o. (con máximo) en el que los conjuntos $D_\alpha = \{p \in A \mid \operatorname{alt}_A p \geq \alpha\}$ son densos. Además $\mathbb{P}$ cumple la condición de cadena numerable. Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces A sigue siendo un $\aleph_1$-árbol en $M[G]$, pero ya no es un árbol de Suslin, pues el conjunto $C = \{p \in A \mid \bigvee q \in G\ p \leq q\}$ es un camino en A.

Vemos así que para destruir un árbol de Suslin basta con ponerlo "copa abajo" y pasar a una extensión genérica. Ahora bien, con esto no garantizamos la hipótesis de Suslin, pues en M puede haber más árboles de Suslin o, lo que es peor, pueden aparecer nuevos árboles de Suslin en $M[G]$ que no estuvieran en M. Solovay y Tennenbaum resolvieron esto mediante una sucesión transfinita de extensiones genéricas en cada una de las cuales se destruía un árbol de Suslin mediante el procedimiento anterior. Esto requiere resultados sobre extensiones iteradas más potentes que los que empleamos para demostrar el teorema de Easton, pues ahora hemos de reducir a una única extensión genérica una sucesión de extensiones respecto a c.p.o.s que no están necesariamente en el modelo base, sino que aparecen gradualmente en los pasos intermedios.

Posteriormente, D.A. Martin se dio cuenta de que el mismo argumento de Solovay y Tennenbaum demostraba en realidad la consistencia de una sentencia mucho más fuerte que la hipótesis de Suslin. Así fue como surgió el axioma de Martin (AM) que ya hemos estudiado en la sección 8.3 de [TC]. En este capítulo expondremos la teoría básica sobre iteración de extensiones genéricas y, entre otras aplicaciones, demostraremos la consistencia de AM.

7.1 Productos generalizados

Sabemos que si M es un modelo transitivo numerable de ZFC y $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$ son dos c.p.o.s en M, entonces una extensión respecto a $\mathbb{P}$ seguida de una extensión respecto a $\mathbb{Q}$ es equivalente a una única extensión respecto al producto $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$. El problema que abordamos ahora consiste básicamente en partir de un c.p.o. $\mathbb{P} \in M$, de un filtro G $\mathbb{P}$-genérico sobre M y de un c.p.o. $\mathbb{Q} \in M[G]$. Hemos de reducir una extensión por $\mathbb{Q}$ de $M[G]$ a una única extensión de M. Para ello expresaremos $\mathbb{Q} = \pi_G$ y definiremos un c.p.o. $\mathbb{P} * \pi \in M$ que hará las veces de $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$. En realidad estas ideas han de ser precisadas en varios puntos. En primer lugar probamos un par de resultados técnicos que nos evitarán trabajar con clases propias de nombres.

Teorema 7.1 *Sea $\mathbb{P}$ un c.p.o. y π un $\mathbb{P}$-nombre. Entonces existe un ordinal α tal que si σ es un $\mathbb{P}$-nombre y $\mathbb{1} \Vdash \sigma \in \pi$, entonces existe un $\mathbb{P}$-nombre $\sigma' \in V_\alpha$ tal que $\mathbb{1} \Vdash \sigma = \sigma'$.*

Demostración: Sea $A = \{\sigma \in V^{\mathbb{P}} \mid \mathbb{1} \Vdash \sigma \in \pi\}$. No es difícil probar que, salvo en casos triviales, A es una clase propia, aunque no vamos a necesitar este hecho (en realidad es el inconveniente que hace que el teorema no sea trivial).

Para cada par de nombres σ, $\tau \in V^{\mathbb{P}}$, sea $D_{\sigma\tau} = \{p \in \mathbb{P} \mid p \Vdash \sigma = \tau\}$. Definimos $f : A \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{D}\pi \times \mathcal{P}\mathbb{P})$ mediante

$$f(\sigma) = \{(\tau, D_{\sigma\tau}) \mid \tau \in \mathcal{D}\pi\}.$$

Vamos a ver que si σ, $\sigma' \in A$, entonces $\mathbb{1} \Vdash \sigma = \sigma'$ si y sólo si $f(\sigma) = f(\sigma')$. Una implicación es obvia. Respecto a la otra, si $\neg\mathbb{1} \Vdash \sigma = \sigma'$ pero $f(\sigma) = f(\sigma')$, entonces existe una condición $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \Vdash \sigma \neq \sigma'$. Como $\mathbb{1} \Vdash \sigma \in \pi$, existen un $q \leq p$ y un $\tau \in \mathcal{D}\pi$ tales que $q \Vdash \sigma = \tau$, es decir,

$$q \in D_{\sigma\tau} = f(\sigma)(\tau) = f(\sigma')(\tau) = D_{\sigma'\tau},$$

con lo que también $q \Vdash \sigma' = \tau$ y así $q \Vdash \sigma = \sigma'$, mientras que p fuerza lo contrario.

Si escogemos una antiimagen para cada elemento del rango de f, obtenemos un subconjunto B de A tal que para todo $\sigma \in A$ existe un $\sigma' \in B$ tal que $\mathbb{1} \Vdash \sigma = \sigma'$. Basta tomar un α tal que $B \in V_\alpha$. ■

Definición 7.2 Sea $\mathbb{P}$ un c.p.o. y π un $\mathbb{P}$-nombre. Sea α el mínimo ordinal que cumple el teorema anterior. Llamaremos $\hat{\pi} = \{\sigma \in V_\alpha \mid \sigma \in V^{\mathbb{P}} \land \mathbb{1} \Vdash \sigma \in \pi\}$.

Teorema 7.3 *Sea $\mathbb{P}$ un c.p.o. y π un $\mathbb{P}$-nombre.*

a) $\hat{\pi}$ es un conjunto de $\mathbb{P}$-nombres tal que si $\sigma \in \hat{\pi}$ entonces $\mathbb{1} \Vdash \sigma \in \pi$.

b) Si $\hat{\pi} \neq \varnothing$, σ es un $\mathbb{P}$-nombre y $p \Vdash \sigma \in \pi$, entonces existe un $\sigma' \in \hat{\pi}$ de manera que $p \Vdash \sigma = \sigma'$.

c) *En particular si $\phi(x)$ es una fórmula quizá con más variables libres, $\hat{\pi} \neq \varnothing$ y $p \Vdash \bigvee x \in \pi\ \phi(x)$ (donde las demás variables de ϕ se interpretan como $\mathbb{P}$-nombres cualesquiera), existe un $\sigma \in \hat{\pi}$ tal que $p \Vdash \phi(\sigma)$.*

DEMOSTRACIÓN: a) es inmediato por la definición de $\hat{\pi}$.

b) Notemos que $\mathbb{1} \Vdash \bigvee x \in \pi(\sigma \in \pi \to \sigma = x)$. Aquí usamos que, como $\hat{\pi} \neq \varnothing$, se cumple que $\mathbb{1} \Vdash \bigvee x\ x \in \pi$.

Por el teorema 4.49 existe $\rho \in V^{\mathbb{P}}$ tal que $\mathbb{1} \Vdash \rho \in \pi \wedge (\sigma \in \pi \to \sigma = \rho)$. En particular $\mathbb{1} \Vdash \rho \in \pi$, luego por el teorema anterior existe un $\sigma' \in \hat{\pi}$ tal que $\mathbb{1} \Vdash \sigma = \sigma'$, de donde también $\mathbb{1} \Vdash (\sigma \in \pi \to \sigma = \sigma')$. Claramente entonces $p \Vdash \sigma = \sigma'$.

c) Si $p \Vdash \bigvee x \in \pi\ \phi(x)$, por 4.49 existe un $\sigma \in \hat{\pi}$ tal que $p \Vdash \sigma' \in \pi \wedge \phi(\sigma')$. Por b) existe un $\sigma \in \hat{\pi}$ tal que $p \Vdash \sigma' = \sigma$, luego $p \Vdash \phi(\sigma)$. ■

En definitiva, $\hat{\pi}$ es un conjunto con nombres suficientes para nombrar a cualquier posible elemento de π en una extensión genérica. Ahora ya podemos definir un producto generalizado entre un c.p.o. y el nombre de otro c.p.o. que no esté necesariamente en el modelo base.

Definición 7.4 Sea $\mathbb{P}$ un c.p.o. Un $\mathbb{P}$-*nombre para un c.p.o.* es una terna (π, π', π'') de $\mathbb{P}$-nombres tales que $\pi'' \in \hat{\pi}$ y $\mathbb{1} \Vdash (\pi, \pi', \pi'')$ es un c.p.o.

En la práctica escribiremos $\leq_\pi$ o simplemente $\leq$ en lugar de π' y $\mathbb{1}_\pi$ o simplemente $\mathbb{1}$ en lugar de π''. Si no hay confusión escribiremos π en lugar de $(\pi, \leq_\pi, \mathbb{1}_\pi)$.

Sea $\mathbb{P}$ un c.p.o. y π un $\mathbb{P}$-nombre para un c.p.o. Definimos $\mathbb{P} * \pi$ como el producto cartesiano $\mathbb{P} \times \hat{\pi}$ con el preorden dado por

$$(p, \sigma) \leq (q, \tau) \leftrightarrow p \leq q \wedge p \Vdash \sigma \leq_\pi \tau.$$

Es fácil ver que el *producto generalizado* $\mathbb{P} * \pi$ es ciertamente un c.p.o. con máximo $\mathbb{1} = (\mathbb{1}, \mathbb{1}_\pi)$. Notemos que el preorden no es antisimétrico (y hemos trabajado en general con c.p.o.s no necesariamente antisimétricos precisamente para incluir esta situación).

Si M es un modelo transitivo numerable de ZFC, $\mathbb{P} \in M$ es un c.p.o. y $\pi \in M$ es un $\mathbb{P}$-nombre para un c.p.o.^{M}, por simplicidad escribiremos $\hat{\pi}$ en lugar de $\hat{\pi}^M$ y $\mathbb{P} * \pi$ en lugar de $(\mathbb{P} * \pi)^M = \mathbb{P} \times \hat{\pi}^M$, pero hemos de tener presente que estos conceptos no son absolutos.

Aún no es evidente que estos conceptos recojan realmente la situación que queríamos estudiar. Los teoremas siguientes lo ponen de manifiesto.

Teorema 7.5 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y sea π un nombre para un c.p.o.^{M}. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y $\mathbb{Q} = \pi_G$. Entonces $(\mathbb{Q}, \leq_{\pi G}, \mathbb{1}_{\pi G})$ es un c.p.o. tal que todo $q \in \mathbb{Q}$ es de la forma $q = \sigma_G$, donde $\sigma \in \hat{\pi}$.*

DEMOSTRACIÓN: Notemos que $\hat{\pi} \neq \varnothing$ porque por definición $\mathbb{1}_\pi \in \hat{\pi}$, luego siempre podemos aplicar el teorema 7.3. Sea $q = \rho_G$, para cierto $\rho \in M^{\mathbb{P}}$. Obviamente $\mathbb{1} \Vdash \bigvee x \in \pi(\rho \in \pi \rightarrow x = \rho)$. Por 7.3 c) existe $\sigma \in \hat{\pi}$ tal que

$$\mathbb{1} \Vdash (\rho \in \pi \rightarrow \sigma = \rho).$$

En particular esto es cierto en $M[G]$, es decir, $q \in \mathbb{Q} \rightarrow \sigma_G = q$ y por consiguiente $q = \sigma_G$. ■

Todavía falta probar que la definición que hemos dado de nombre para un c.p.o. no es restrictiva, en el sentido de que todo c.p.o. en una extensión genérica admite un nombre en esas condiciones.

Teorema 7.6 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o., sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y sea $(\mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}}, \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}) \in M[G]$ un c.p.o. Entonces existe un $\mathbb{P}$-nombre para un c.p.o. $(\pi, \leq_\pi, \mathbb{1}_\pi) \in M$ tal que $\mathbb{Q} = \pi_G$, $\leq_{\mathbb{Q}} = \leq_{\pi G}$ y $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{1}_{\pi G}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $\mathbb{Q} = \rho_G$, $\leq_{\mathbb{Q}} = \rho'_G$, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = \rho''_G$. Entonces

$$\mathbb{1} \Vdash \bigvee xyz((x,y,z) \text{ es un c.p.o.} \wedge ((\rho,\rho',\rho'') \text{ es un c.p.o.} \rightarrow (\rho,\rho',\rho'') = (x,y,z))),$$

luego por 4.49 existen π, π', $\pi'' \in M^{\mathbb{P}}$ tales que

$$\mathbb{1} \Vdash (\pi,\pi',\pi'') \text{ es un c.p.o.} \wedge ((\rho,\rho',\rho'') \text{ es un c.p.o.} \rightarrow (\rho,\rho',\rho'') = (\pi,\pi',\pi'')).$$

En particular $\mathbb{1} \Vdash \pi'' \in \pi$, luego por 7.3 existe $\mathbb{1}_\pi \in \hat{\pi}$ tal que $\mathbb{1} \Vdash \pi'' = \mathbb{1}_\pi$. Esto nos permite sustituir π'' por $\mathbb{1}_\pi$ en la fórmula anterior. Llamando $\leq_\pi = \pi'$ tenemos que $(\pi, \leq_\pi, \mathbb{1}_\pi)$ es un $\mathbb{P}$-nombre para un c.p.o. y

$$\mathbb{1} \Vdash ((\rho,\rho',\rho'') \text{ es un c.p.o.} \rightarrow (\rho,\rho',\rho'') = (\pi, \leq_\pi, \mathbb{1}_\pi)).$$

Obviamente entonces $(\mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}}, \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}) = (\pi_G, \leq_{\pi G}, \mathbb{1}_{\pi G})$. ■

Nuestra intención es probar que si, en las condiciones del teorema anterior, tenemos también un filtro H $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[G]$, entonces la extensión $M[G][H]$ puede reducirse a una única extensión genérica de M respecto al producto $\mathbb{P} * \pi$. Demostramos un resultado previo:

Teorema 7.7 *Sea $\mathbb{P}$ un c.p.o. y π un $\mathbb{P}$-nombre para un c.p.o. Entonces la aplicación $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P} * \pi$ dada por $i(p) = (p, \mathbb{1}_\pi)$ es una inmersión completa y cumple $i(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$.*

DEMOSTRACIÓN: Es obvio que i es una inmersión que cumple $i(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Dado $(p, \sigma) \in \mathbb{P} * \pi$, se cumple que p es una reducción de (p, σ) a $\mathbb{P}$, pues si $p' \leq p$, entonces $(p', \sigma) \leq (p, \sigma) \wedge (p', \sigma) \leq (p', \mathbb{1})$, luego $i(p')$ es compatible con (p, σ). ■

Ahora demostramos los dos teoremas fundamentales sobre productos generalizados. Necesitamos la definición siguiente, que generaliza la noción de producto cartesiano de filtros genéricos.

Definición 7.8 Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y π un $\mathbb{P}$-nombre para un c.p.o.^{M}. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y $H \subset \pi_G$. Definimos $G * H = \{(p, \sigma) \in \mathbb{P} * \pi \mid p \in G \wedge \sigma_G \in H\}$.

Teorema 7.9 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o., sea π un $\mathbb{P}$-nombre para un c.p.o.^{M} e $i \in M$ la inmersión completa natural de $\mathbb{P}$ en $\mathbb{P} * \pi$. Sea K un filtro $\mathbb{P} * \pi$-genérico sobre M, sea $G = i^{-1}[K]$ y sea $H = \{\sigma_G \mid \sigma \in \hat{\pi} \wedge \bigvee p \in \mathbb{P}\ (p, \sigma) \in K\}$. Entonces G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, H es un filtro π_G-genérico sobre $M[G]$, $K = G * H$ y $M[K] = M[G][H]$.*

Demostración: Como i es una inmersión completa, por 4.31 sabemos que G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Sea $\mathbb{Q} = \pi_G$. También sabemos que $\mathbb{Q}$ es un c.p.o. en $M[G]$. Veamos que H es un filtro en $\mathbb{Q}$. Como $(\mathbb{1}_{\mathbb{P}}, \mathbb{1}_\pi) \in K$, se cumple que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{1}_{\pi G} \in H$.

Sean $\sigma_G \in H$, $\tau_G \in \mathbb{Q}$ tales que $\sigma_G \leq \tau_G$ (podemos suponer que σ, $\tau \in \hat{\pi}$). Por definición de H existe $q \in \mathbb{P}$ tal que $(q, \sigma) \in K$. Sea $p \in G$ tal que $p \Vdash \sigma \leq \tau$. Entonces $i(p) = (p, \mathbb{1}) \in K$. Sea $(r, \rho) \in K$ tal que $(r, \rho) \leq (p, \mathbb{1})$ y $(r, \rho) \leq (q, \sigma)$.

Como $r \leq p$ se cumple que $r \Vdash \sigma \leq \tau$ y como $(r, \rho) \leq (q, \sigma)$ también $r \Vdash \rho \leq \sigma$, luego $r \Vdash \rho \leq \tau$, de donde $(r, \rho) \leq (r, \tau)$. Por consiguiente $(r, \tau) \in K$ y $\tau_G \in H$.

Sean ahora σ_G, $\tau_G \in H$, es decir, σ, $\tau \in \hat{\pi}$ y existen q, $q' \in \mathbb{P}$ tales que (q, σ), $(q', \tau) \in K$. Sea $(r, \rho) \in K$ tal que $(r, \rho) \leq (q, \sigma)$ y $(r, \rho) \leq (q', \tau)$. Entonces $(r, \rho) \leq (r, \mathbb{1})$, luego $i(r) = (r, \mathbb{1}) \in K$ y por consiguiente $r \in G$. Como $(r, \rho) \leq (q, \sigma)$, se cumple que $r \Vdash \rho \leq \sigma$, de donde $\rho_G \leq \sigma_G$, e igualmente $\rho_G \leq \tau_G$. Como $(r, \rho) \in K$ se cumple que $\rho_G \in H$.

Seguidamente probamos que H es $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[G]$. Para ello tomamos $D \in M[G]$ denso en $\mathbb{Q}$. Sea $\delta \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $D = \delta_G$. Sea $p \in G$ tal que $p \Vdash \delta$ es denso en π. Sea

$$D' = \{(q, \tau) \in \mathbb{P} * \pi \mid q \Vdash \tau \in \delta\} \in M.$$

Veamos que D' es denso bajo $(p, \mathbb{1})$. Si $(q, \sigma) \leq (p, \mathbb{1})$, entonces $q \leq p$, luego $q \Vdash \delta$ es denso en π. También $q \Vdash \sigma \in \pi$, luego $q \Vdash \bigvee x \in \pi (x \in \delta \wedge x \leq \sigma)$. Por 7.3 existe un $\rho \in \hat{\pi}$ tal que $q \Vdash \rho \in \delta \wedge \rho \leq \sigma$. Es claro entonces que $(q, \rho) \in \mathbb{P} * \pi$, $(q, \rho) \leq (q, \sigma)$ y $(q, \rho) \in D'$.

Como $(p, \mathbb{1}) = i(p) \in K$, existe un $(q, \tau) \in K \cap D'$, y así $\tau_H \in H \cap D \neq \varnothing$.

Veamos ahora que $K = G * H$. Si $(p, \sigma) \in K$, entonces $\sigma_G \in H$ y, como $(p, \sigma) \leq (p, \mathbb{1})$ también $(p, \mathbb{1}) \in K$, luego $p \in G$. En consecuencia $(p, \sigma) \in G * H$.

Recíprocamente, si $(p, \sigma) \in G * H$, entonces $p \in G$, $\sigma \in \hat{\pi}$ y $\sigma_G \in H$. Esto último implica que existen $\sigma' \in \hat{\pi}$ y $q \in \mathbb{P}$ de modo que $\sigma_G = \sigma'_G$ y $(q, \sigma') \in K$.

Sea $q' \in G$ tal que $q' \Vdash \sigma = \sigma'$. Entonces $i(q') = (q', \mathbb{1}) \in K$. Sea $(r, \tau) \in K$ tal que $(r, \tau) \leq (q, \sigma')$ y $(r, \tau) \leq (q', \mathbb{1})$. Tenemos que $r \Vdash \tau \leq \sigma'$ y $r \Vdash \sigma = \sigma'$, luego $r \vdash \tau \leq \sigma$, $(r, \tau) \leq (q, \sigma)$ y $(q, \sigma) \in K$. Ahora $(p, \mathbb{1}) \in K$ y $(q, \sigma) \in K$, luego existe un $(s, \rho) \in K$ tal que $(s, \rho) \leq (p, \mathbb{1})$, $(s, \rho) \leq (q, \sigma)$, con lo que $s \leq p$ y $s \Vdash \rho \leq \sigma$. Por consiguiente $(s, \rho) \leq (p, \sigma)$ y concluimos que $(p, \sigma) \in K$.

Es claro que G, $H \in M[K]$, luego $M[G][H] \subset M[K]$. Así mismo es claro que $K = G * H \in M[G][H]$, luego $M[K] \subset M[G][H]$. Esto nos da la igualdad. ■

Teorema 7.10 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y y π un $\mathbb{P}$-nombre para un c.p.o.^{M}. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, sea $\mathbb{Q} = \pi_G$ y sea H un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[G]$. Entonces $K = G * H$ es un filtro $\mathbb{P} * \pi$-genérico sobre M y los filtros G y H construidos en en teorema anterior a partir de K son los dados. Por lo tanto $M[K] = M[G][H]$.*

Demostración: Obviamente $(\mathbb{1}, \mathbb{1}) \in K$.

Tomemos pares (p, σ), $(p', \sigma') \in K$. Entonces p, $p' \in G$ y σ_G, $\sigma'_G \in H$. Por lo tanto existen $q \in G$ y $h \in H$ tales que $q \leq p$, $q \leq p'$, $h \leq \sigma_G$, $h \leq \sigma'_G$. Por 7.3 se cumple que $h = \tau_G$, con $\tau \in \hat{\pi}$. Sea $q' \in \mathbb{P}$ tal que $q' \Vdash \tau \leq \sigma \wedge \tau \leq \sigma'$. Podemos tomar $q' \leq q$. Entonces $(q', \tau) \in K$, $(q', \tau) \leq (p, \sigma)$ y $(q', \tau) \leq (p', \sigma')$.

Ahora suponemos que $(p, \sigma) \in K$, $(p', \sigma') \in \mathbb{P} * \pi$ y $(p, \sigma) \leq (p', \sigma')$. Entonces $p \in G$ y $p \leq p'$, luego $p' \in G$. Por otra parte $p \Vdash \sigma \leq \sigma'$, luego $\sigma_G \leq \sigma'_G$ y, como $\sigma_G \in H$, también $\sigma'_G \in H$, de donde $(p', \sigma') \in K$.

Para probar que K es genérico tomamos un conjunto $D \in M$ denso en $\mathbb{P} * \pi$. Sea

$$D^* = \{\sigma_G \mid \sigma \in \hat{\pi} \wedge \bigvee p \in G\ (p, \sigma) \in D\} \in M[G].$$

Vamos a probar que D^* es denso en $\mathbb{Q}$. Para ello tomamos $q = \tau_G \in \mathbb{Q}$. Podemos suponer que $\tau \in \hat{\pi}$. Definimos

$$D' = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee \sigma \in \hat{\pi}((p, \sigma) \in D \wedge p \Vdash \sigma \leq \tau)\} \in M.$$

Se cumple que D' es denso en $\mathbb{P}$, pues si $t \in \mathbb{P}$, entonces $(t, \tau) \in \mathbb{P} * \pi$, luego existe un $(p, \sigma) \in D$ tal que $(p, \sigma) \leq (t, \tau)$, luego $p \leq t$ y $p \in D'$.

Tomemos, pues, $p \in D' \cap G$. Sea $\sigma \in \hat{\pi}$ tal que $p \Vdash \sigma \leq \tau \wedge (p, \sigma) \in D$. Entonces $\sigma_G \leq \tau_G = q$ y $\sigma_G \in D^*$. Esto prueba la densidad de D^*.

Por consiguiente podemos tomar un $\sigma_G \in D^* \cap H$. Así, existe un $p \in G$ tal que $(p, \sigma) \in D$ y, en consecuencia, $(p, \sigma) \in D \cap K$.

Así queda probado que K es $\mathbb{P} * \pi$-genérico sobre M. Se comprueba inmediatamente que G y H son los filtros construidos en el teorema anterior a partir de K. ■

Estos teoremas generalizan claramente al teorema del producto que vimos en la sección 5.4.

Ejercicio: Sean $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ dos c.p.o.s. Probar que existe una inmersión densa de $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ en $\mathbb{P} * \check{\mathbb{Q}}$.

Conviene explicitar la igualdad $M[K] = M[G][H]$ en términos de nombres:

Definición 7.11 Dado un c.p.o. $\mathbb{P}$ y un $\mathbb{P}$-nombre para un c.p.o. π, definimos una aplicación $V^{\mathbb{P}*\pi} \longrightarrow V^{\mathbb{P}}$ mediante

$$\sigma^* = \{(\text{p.o.}(\xi^*, \tau), p) \mid (\xi, (p, \tau)) \in \sigma\}.$$

Una simple inducción prueba que $\mathbb{1} \Vdash \sigma^* \in V^\pi$. En efecto, relativizando la prueba a un modelo transitivo numerable M de ZFC, se trata de probar que si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y $\mathbb{Q} = \pi_G$, entonces $\sigma^*_G \in M^{\mathbb{Q}}$, pero si suponemos que $\xi^*_G \in M^{\mathbb{Q}}$ por hipótesis de inducción, la conclusión para σ^* es trivial: los elementos de σ^*_G son pares $(\xi^*_G, \tau_G) \in M^{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q}$.

Teorema 7.12 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y $\pi \in M^{\mathbb{P}}$ un $\mathbb{P}$-nombre para un c.p.o. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, sea $\mathbb{Q} = \pi_G$ y sea H un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[G]$. Entonces, para todo $\sigma \in M^{\mathbb{P}*\pi}$ se cumple que $(\sigma^*_G)_H = \sigma_{G*H}$.*

Demostración: Por inducción sobre σ. Si vale para nombres de rango menor y $u \in (\sigma^*_G)_H$, entonces $u = \epsilon_G$, donde $(\epsilon, q) \in \sigma^*_G$ y $q \in H$. A su vez $(\epsilon, q) = (\xi^*_G, \tau_G)$, donde $(\xi, (p, \tau)) \in \sigma$ y $p \in G$, pero entonces $u = (\xi^*_G)_H = \xi_{G*H}$ y $q = \tau_G \in H$, con $(p, \tau) \in G * H$, luego $u \in \sigma_{G*H}$. La otra inclusión se prueba análogamente. ■

Para probar la consistencia de la hipótesis de Suslin hemos de aplicar estos resultados a c.p.o.s que no son sino posibles árboles de Suslin puestos del revés. En realidad los aplicaremos en un contexto ligeramente distinto, pero siempre a c.p.o.s que cumplen la condición de cadena numerable. Por ello demostramos ahora que las condiciones de cadena se conservan bajo hipótesis naturales al formar productos generalizados. Para ello necesitamos un hecho técnico:

Teorema 7.13 *Sea κ un cardinal regular y $\mathbb{P}$ un c.p.o. que cumpla la c.c.κ. Sea $\sigma \in V^{\mathbb{P}}$ tal que $\mathbb{1} \Vdash (\sigma \subset \check{\kappa} \wedge |\sigma| < \check{\kappa})$. Entonces existe un $\beta < \kappa$ tal que $\mathbb{1} \Vdash \sigma \subset \check{\beta}$.*

Demostración: Por el teorema de reflexión basta probar la relativización del teorema a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Sea

$$E = \{\alpha < \kappa \mid \bigvee p \in \mathbb{P}\ p \Vdash \check{\alpha} \text{ es el supremo de } \sigma\} \in M.$$

Por el axioma de elección^M existe $\{p_\alpha\}_{\alpha \in E} \in M$ tal que, para cada $\alpha \in E$ se cumple que $p_\alpha \Vdash \check{\alpha}$ es el supremo de σ. Es claro que si $\alpha \neq \beta$ entonces $p_\alpha \perp p_\beta$, pues ambas condiciones fuerzan fórmulas contradictorias. Así, la aplicación $\alpha \mapsto p_\alpha$ es inyectiva y su imagen es una anticadena en $\mathbb{P}$. Por hipótesis $|E|^M < \kappa$. Como κ es regular^M, existe un $\beta < \kappa$ tal que $E \subset \beta$.

Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, como $\mathbb{P}$ cumple la c.c.κ en M, tenemos que $\mathbb{P}$ conserva cardinales y cofinalidades $\geq \kappa$, luego κ es un cardinal regular$^{M[G]}$. Por hipótesis $\sigma_G \subset \kappa$ y $|\sigma_G|^{M[G]} < \kappa$. Por consiguiente, el supremo α de σ_G cumple $\alpha < \kappa$. Existe un $p \in G$ tal que $p \Vdash \check{\alpha}$ es el supremo de σ, luego $\alpha \in E$ y por tanto $\alpha < \beta$, es decir, $\sigma_G \subset \beta$. ■

Teorema 7.14 *Sea κ un cardinal regular, sea $\mathbb{P}$ un c.p.o. que cumpla la c.c.κ y sea π un $\mathbb{P}$-nombre para un c.p.o. tal que $\mathbb{1} \Vdash \pi$ cumple la c.c.$\check{\kappa}$. Entonces $\mathbb{P} * \pi$ cumple la c.c.κ.*

Demostración: Como en el teorema anterior, basta probar la relativización de este teorema a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Supongamos que existe una anticadena en $\mathbb{P} * \pi$ con κ elementos: $\{(p_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha<\kappa} \in M$. Sea $\sigma = \{(\check{\alpha}, p_\alpha) \mid \alpha < \kappa\} \in M^{\mathbb{P}}$. Claramente $\mathbb{1} \Vdash \sigma \subset \check{\kappa}$.

Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces

$$\sigma_G = \{\alpha < \kappa \mid p_\alpha \in G\} \in M[G].$$

Sea $W = \{\tau_{\alpha G} \mid \alpha \in \sigma_G\} \in M[G]$. Veamos que si $\alpha, \beta \in \sigma_G$, $\alpha \neq \beta$, entonces $\tau_{\alpha G} \perp \tau_{\beta G}$. En efecto, supongamos que existe $\rho_G \in \pi_G$ (con $\rho \in \hat{\pi}$) tal que $\rho_G \leq \tau_{\alpha G}$ y $\rho_G \leq \tau_{\beta G}$. Tomemos entonces $q \in G$ tal que $q \Vdash \rho \leq \tau_\alpha \wedge \rho \leq \tau_\beta$. Como $\alpha, \beta \in \sigma_G$, ha de ser $p_\alpha, p_\beta \in G$, luego podemos tomar $q \leq p_\alpha \wedge q \leq p_\beta$. Así $(q, \rho) \leq (p_\alpha, \tau_\alpha) \wedge (q, \rho) \leq (p_\beta, \tau_\beta)$, en contradicción con que estos pares forman parte de una anticadena.

Por hipótesis $|\sigma_G|^{M[G]} = |W|^{M[G]} < \kappa$, pues W es una anticadena en π_G y éste cumple la c.c.κ en $M[G]$.

Con esto hemos probado que $\mathbb{1} \Vdash (\sigma \subset \check{\kappa} \wedge |\sigma| < \check{\kappa})$ y por el teorema anterior existe un $\beta < \kappa$ tal que $\mathbb{1} \Vdash \sigma \subset \check{\beta}$, pero por definición de σ tenemos que $p_\beta \Vdash \check{\beta} \in \sigma$, contradicción. ■

Ejercicio: Probar que si $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son dos c.p.o.s y κ es un cardinal regular, entonces $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ cumple la c.c.κ si y sólo si $\mathbb{P}$ cumple la c.c.κ y $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \check{\mathbb{Q}}$ cumple la c.c.$\check{\kappa}$.

Podríamos probar un resultado similar para la propiedad de ser κ-cerrado, pero como vamos a trabajar con c.p.o.s con la condición de cadena numerable no nos va a ser necesario. El teorema anterior tiene una consecuencia curiosa. En la sección 8.4 de [TC] vimos que el producto de dos c.p.o.s con la c.c.n. no cumple necesariamente la c.c.n. La teoría de las extensiones genéricas permite enunciar una condición necesaria y suficiente muy simple para que un producto de c.p.o.s cumpla la c.c.n.:

Teorema 7.15 *Si $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son dos c.p.o.s, entonces $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ cumple la c.c. κ si y sólo si $\mathbb{P}$ cumple la c.c. κ y $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \check{\mathbb{Q}}$ cumple la c.c. κ*

Demostración: Una implicación es un caso particular del teorema 7.14: si $\mathbb{P}$ cumple la c.c. κ y $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \check{\mathbb{Q}}$ cumple la c.c. κ, entonces $\mathbb{P} * \check{\mathbb{Q}}$ cumple la c.c. κ, pero es fácil ver que $(p, q) \mapsto (p, \check{q})$ es una inmersión densa de $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ en $\mathbb{P} * \check{\mathbb{Q}}$, luego $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ también cumple la c.c. κ.

Supongamos ahora que $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ cumple la c.c. κ. Es claro entonces que $\mathbb{P}$ también la cumple. Podemos trabajar en un modelo transitivo numerable M de ZFC, con lo que tomamos un filtro $\mathbb{P}$-genérico G y tenemos que probar que $\mathbb{Q}$ cumple la c.c. κ en $M[G]$. En caso contrario, sea $f : \kappa \longrightarrow \mathbb{Q}$ una aplicación inyectiva $f \in M[G]$ cuya imagen sea una anticadena en $\mathbb{Q}$. Sea $f = \sigma_G$ y sea $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \Vdash \sigma : \kappa \longrightarrow \check{\mathbb{Q}}$ inyectiva $\wedge\ \sigma[\kappa]$ es una anticadena.

Para cada $\alpha < \kappa$, existen un $p_\alpha \in \mathbb{P}$ y un $q_\alpha \in \mathbb{Q}$ tales que $p_\alpha \leq p$, $p_\alpha \Vdash \sigma(\check{\alpha}) = \check{q}_\alpha$. Entonces, la sucesión $\{(p_\alpha, q_\alpha)\}_{\alpha<\kappa} \in M$ es una anticadena en

$\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$, pues si existiera $(p', q') \leq (p_\alpha, q_\alpha)$, $(p', q') \leq (p_\beta, q_\beta)$, entonces

$$p' \Vdash \check{q}' \leq \sigma(\check{\alpha}) \wedge \check{q}' \leq \sigma(\check{\beta}),$$

pero p' también fuerza que $\sigma[\kappa]$ es una anticadena, contradicción. ■

Teorema 7.16 *Sea $\mathbb{P}$ un c.p.o. separativo y π un $\mathbb{P}$-nombre para un c.p.o. tal que $\mathbb{1} \Vdash \pi$ es separativo. Entonces $\mathbb{P} * \pi$ es separativo.*

Demostración: Basta probar el teorema relativizado a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Sean $(p, \sigma), (q, \tau) \in \mathbb{P} * \pi$ tales que la primera no extiende a la segunda. Si $p \not\leq q$, entonces existe $p' \leq p$, $p' \perp q$, con lo que $(p', \sigma) \leq (p, \sigma)$ y $(p', \sigma) \perp (q, \tau)$.

Si $p \leq q$, entonces $\neg p \Vdash \sigma \leq \tau$, luego existe un filtro G $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $\sigma_G \not\leq \tau_G$ y, como π_G es separativo, existe $\sigma'_G \leq \sigma_G$ tal que $\sigma'_G \perp \tau_G$. Podemos suponer que $\sigma' \in \hat{\pi}$. Sea $p' \in G$ tal que $p' \leq p$ y $p' \Vdash \sigma' \leq \sigma \wedge \sigma' \perp \tau$. Entonces $(p', \sigma') \leq (p, \sigma)$ y $(p', \sigma') \perp (q, \tau)$. ■

Cocientes de inmersiones completas Terminamos la sección probando que si $h : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es una inmersión completa, entonces $\mathbb{Q}$ es equivalente a un producto generalizado $\mathbb{P} * (\mathbb{Q}/\Gamma)$, donde $\mathbb{Q}/\Gamma$ es un $\mathbb{P}$-nombre para un c.p.o. definido adecuadamente. Por lo tanto, toda extensión genérica obtenida con $\mathbb{Q}$ puede descomponerse en una extensión genérica obtenida con $\mathbb{P}$ seguida de otra obtenida con el c.p.o. nombrado por $\mathbb{Q}/\Gamma$ en la extensión.

Definición 7.17 Sea $h : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ una inmersión completa entre c.p.o.s. Diremos que $R : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{P}$ es una *restricción* para h si a cada $q \in \mathbb{Q}$ le asigna una reducción de q a $\mathbb{P}$ y además cumple las dos propiedades siguientes:

$$\bigwedge q q' \in \mathbb{Q}(q \leq q' \to R(q) \leq R(q')), \qquad \bigwedge p \in \mathbb{P}\ R(h(p)) = p.$$

Esto se cumple cuando h es un monomorfismo completo entre álgebras de Boole completas, pues en tal caso basta definir

$$R(q) = \bigwedge\{p \in \mathbb{P} \mid q \leq h(p)\} \in \mathbb{P} \setminus \{\mathbb{O}\},$$

que es una reducción de q a $\mathbb{P}$, tal y como se ve en la prueba de [TC 10.17].

Por lo tanto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que h tiene una restricción, ya que siempre podemos trabajar con las compleciones de los c.p.o.s.

Definición 7.18 Sea $h : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ una inmersión completa entre c.p.o.s dotada de una restricción R. Definimos $\mathbb{Q}/\Gamma$ como un $\mathbb{P}$-nombre tal que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \mathbb{Q}/\Gamma = \{q \in \check{\mathbb{Q}} \mid R(q) \in \Gamma\}.$$

Similarmente, definimos $\tilde{\leq}$ como un $\mathbb{P}$-nombre tal que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \ \tilde{\leq} \ = \check{\leq} \cap (\mathbb{Q}/\Gamma \times \mathbb{Q}/\Gamma),$$

es decir, que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$ fuerza que $\tilde{\leq}$ es la restricción a $\mathbb{Q}/\Gamma$ del preorden de $\mathbb{Q}$. De este modo, $(\mathbb{Q}/\Gamma, \tilde{\leq}, \check{\mathbb{1}}_{\mathbb{Q}})$ es un nombre para un c.p.o. que normalmente abreviaremos a $\mathbb{Q}/\Gamma$.

Si tenemos todo esto en un modelo transitivo numerable M de ZFC y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, llamaremos $\mathbb{Q}/G = (\mathbb{Q}/\Gamma)_G$, y entonces en $M[G]$ tenemos que $\mathbb{Q}/G = \{q \in \mathbb{Q} \mid R(q) \in G\}$, considerado como c.p.o. con la restricción del orden de $\mathbb{Q}$.

Para cada $q \in \mathbb{Q}$, trivialmente $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \bigvee x \in \mathbb{Q}(\check{q} \in \Gamma \to x = \check{q})$, luego podemos tomar un $\mathbb{P}$-nombre $\sigma_q \in \widehat{\mathbb{Q}/\Gamma}$ tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \check{q} \in \Gamma \to \sigma_q = \check{q}$.

Teorema 7.19 *Si $h : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es una inmersión completa de c.p.o.s, dotada de una restricción, la aplicación $j : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{P} * (\mathbb{Q}/\Gamma)$ dada por $j(q) = (R(q), \sigma_q)$ es una inmersión densa de c.p.o.s.*

Demostración: Basta probar el teorema relativizado a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Si $q \leq q'$, entonces $R(q) \leq R(q')$ y obviamente $R(q) \Vdash \sigma_q \leq \sigma_{q'}$, pues si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $R(q) \in G$, , se cumple que $q \in G$, luego $q' \in G$, luego $\sigma_q = q \leq q' = \sigma_{q'}$. Por consiguiente $j(q) \leq j(q')$.

Por otra parte, si existe $(r, \sigma) \leq (R(q), \sigma_q)$, $(r, \sigma) \leq (R(q'), \sigma_{q'})$, tomamos un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $r \in G$. Entonces $R(q)$, $R(q') \in G$, luego $\sigma_G \leq q$, $\sigma_G \leq q'$, luego $\neg q \perp q'$. Esto prueba que j es una inmersión.

Para probar que es densa tomamos $(p, \sigma) \in \mathbb{P} * (\mathbb{Q}/\Gamma)$ y fijamos un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $p \in G$, sea $q = \sigma_G \in \mathbb{Q}/G$, con lo que $R(q) \in G$. Sea $r \in G$ tal que $r \leq p \wedge r \leq R(q) \wedge r \Vdash \sigma = \check{q}$. Entonces, como $R(q)$ es una reducción de q a $\mathbb{P}$, tenemos que $\neg h(r) \perp q$, luego existe un $q' \in \mathbb{Q}$ tal que $q' \leq q \wedge q' \leq h(r)$.

Veamos que $j(q') = (R(q'), \sigma_{q'}) \leq (p, \sigma)$. En efecto, por una parte tenemos que $R(q') \leq R(h(r)) = r \leq p$ y, por otra, si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $R(q') \in G$, también $r \in G$, luego $\sigma_G = q$ y, como $q' \in \mathbb{Q}/G$, tenemos que $(\sigma_{q'})_G = q' \leq q = \sigma_G$, luego $R(q') \Vdash \sigma_{q'} \leq \sigma$. ■

En las condiciones del teorema anterior (relativizadas a un modelo M) podemos considerar además la inmersión completa $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P} * (\mathbb{Q}/\Gamma)$ dada por $i(p) = (p, \mathbb{1})$. Si K es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M, podemos considerar el filtro

$$\hat{\jmath}(K) = \{(p, \sigma) \in \mathbb{P} * (\mathbb{Q}/\Gamma) \mid \bigvee q \in \mathbb{Q}\ (R(q), \sigma_q) \leq (p, \sigma)\},$$

que según 4.32 es un filtro $\mathbb{P} * (\mathbb{Q}/\Gamma)$-genérico sobre M. El teorema 7.9 nos da que $i^{-1}[\hat{\jmath}(K)]$ es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Vamos a comprobar que $i^{-1}[\hat{\jmath}(K)] = h^{-1}[K]$.

En efecto: si $p \in h^{-1}[K]$ entonces $h(p) \in K$, luego $j(h(p)) \in \hat{\jmath}(K)$, es decir, $(p, \sigma_{h(p)}) \in \hat{\jmath}(K)$, luego $(p, \mathbb{1}) \in \hat{\jmath}(K)$, luego $p \in i^{-1}[\hat{\jmath}(K)]$. Esto nos da una inclusión, y la otra se da porque los filtros genéricos son maximales. A su vez, si llamamos $G = h^{-1}[K]$, el teorema 7.9 nos da que

$$H = \{\sigma_G \mid \sigma \in \widehat{\mathbb{Q}/\Gamma} \wedge \bigvee p \in \mathbb{P}\ (p, \sigma) \in \hat{\jmath}(K)\}$$

es un filtro $\mathbb{Q}/G$-genérico sobre $M[G]$. Vamos a ver que $H = K$.

En efecto, si $q \in K$, se cumple que $R(q) \in G$, pues esto equivale a que $h(R(q)) \in K$. Si no fuera así, por 4.6 existiría un $k \in K$ tal que $k \perp h(R(q))$, y podemos exigir que $k \leq q$, luego $R(k) \leq R(q)$ y, como $R(k)$ es una reducción de k, resulta que $h(R(k))$ es compatible con k, luego $h(R(q))$ también, y tenemos una contradicción. Por lo tanto, $q = (\sigma_q)_G$ con $(R(q), \sigma_q) = j(q) \in \hat{\jmath}(K)$, y esto significa que $q \in H$.

Recíprocamente, un elemento de H es de la forma σ_G, donde $(p, \sigma) \in \hat{\jmath}(K)$, luego existe un $q \in K$ tal que $(R(q), \sigma_q) \in (p, \sigma)$. Como antes concluimos que $R(q) \in G$, luego $q \in \mathbb{Q}/G$, luego $q = (\sigma_q)_G \leq \sigma_G \in K$.

Por consiguiente, el teorema siguiente es un caso particular de 7.9:

Teorema 7.20 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC *y $h : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ una inmersión completa^M de c.p.o.s. dotada de una restricción. Si K es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M y $G = h^{-1}[K]$, entonces K es $\mathbb{Q}/G$-genérico sobre $M[G]$ y se da la igualdad $M[K]_{\mathbb{Q}} = M[G][K]_{\mathbb{Q}/G}$.*

Similarmente, si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y H es un filtro $\mathbb{Q}/G$-genérico sobre $M[G]$, el teorema 7.10 nos da que $K = G*H$ es un filtro $\mathbb{P}*(\mathbb{Q}/\Gamma)$-genérico sobre M, luego $j^{-1}[K]$ es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M. Veamos que $j^{-1}[K] = H$.

En efecto, si $q \in j^{-1}[K]$, entonces $j(q) \in G * H$, es decir, $(R(q), \sigma_q) \in G * H$, luego $R(q) \in G$, lo que implica que $q \in \mathbb{Q}/G$, y $q = (\sigma_q)_G \in H$. Esto nos da una inclusión y por genericidad se da la igualdad. Por lo tanto, el teorema siguiente es un caso particular de 7.10:

Teorema 7.21 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC *y $h : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{Q}$ una inmersión completa^M de c.p.o.s dotada de una restricción. Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y H es un filtro $\mathbb{Q}/G$-genérico sobre $M[G]$, entonces H es $\mathbb{Q}$-genérico sobre M, $G = i^{-1}[H]$ y se da la igualdad $M[H]_{\mathbb{Q}} = M[G][H]_{\mathbb{Q}/G}$.*

7.2 Iteraciones de preórdenes

Los resultados de la sección anterior nos permiten reducir un número finito de extensiones genéricas sucesivas a una única extensión (aunque los c.p.o.s utilizados no estén todos en el modelo de partida). Por conveniencia podemos suponer en primer lugar la extensión trivial producida con el c.p.o. $\mathbb{P}_0 = \{\varnothing\}$ (es trivial porque todos los $\mathbb{P}$-nombres son canónicos). Un $\mathbb{P}_0$-nombre para un c.p.o. es de la forma $\pi_0 = \check{\mathbb{Q}}$, donde $\mathbb{Q}$ es un cierto c.p.o. en el modelo base. El producto $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_0 * \pi_0$ es equivalente a $\mathbb{Q}$, en el sentido de que hay una inmersión densa natural de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{P}_1$. Ahora tomamos un $\mathbb{P}_1$-nombre π_1 para un c.p.o. y formamos el producto $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}_1 * \pi_1 = (\mathbb{P}_0 * \pi_0) * \pi_1$. Tomamos un $\mathbb{P}_2$-nombre π_2 para un c.p.o. y formamos el producto $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}_2 * \pi_2 = ((\mathbb{P}_0 * \pi_0) * \pi_1) * \pi_2$, y así sucesivamente.

Notemos que un elemento de $\mathbb{P}_3$ es de la forma $(\varnothing, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2)$. A la hora de generalizar esta construcción a un producto infinito conviene sustituir las

n-tuplas que se obtienen de este modo por sucesiones, de modo que podemos identificar a la cuádrupla $(\varnothing, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2)$ con la sucesión $\{(0, \sigma_0), (1, \sigma_1), (2, \sigma_2)\}$. Esto no supone más que pasar de un c.p.o. a otro semejante. De este modo, la generalización al caso infinito consiste esencialmente en considerar sucesiones transfinitas en lugar de sucesiones finitas. En realidad en los términos correspondientes a ordinales límite tenemos cierta libertad de decisión, tal y como se refleja en la definición siguiente:

Definición 7.22 Sea α un ordinal. Una *iteración de preórdenes* de longitud α es un par $(\{(\mathbb{P}_\delta, \leq_{\mathbb{P}_\delta}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta})\}_{\delta\leq\alpha}, \{(\pi_\delta, \leq_{\pi_\delta}, \mathbb{1}_{\pi_\delta})\}_{\delta<\alpha})$ que cumpla las condiciones siguientes:

a) Cada $(\mathbb{P}_\delta, \leq_{\mathbb{P}_\delta}, \mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta})$ es un c.p.o. cuyos elementos son funciones de dominio δ, de modo que si $\delta < \epsilon \leq \alpha$ y $p \in \mathbb{P}_\epsilon$, entonces $p|_\delta \in \mathbb{P}_\delta$. En particular $\mathbb{P}_0 = \{\varnothing\}$.

b) Cada $(\pi_\delta, \leq_{\pi_\delta}, \mathbb{1}_{\pi_\delta})$ es un $\mathbb{P}_\delta$-nombre para un c.p.o. Si $p \in \mathbb{P}_\delta$, se cumple

$$\bigwedge \epsilon < \delta \ p(\epsilon) \in \hat{\pi}_\epsilon \quad \text{y} \quad \bigwedge \epsilon < \delta \ \mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta}(\epsilon) = \mathbb{1}_{\pi_\epsilon}.$$

c) Si p es una función de dominio $\delta + 1$,

$$p \in \mathbb{P}_{\delta+1} \leftrightarrow p|_\delta \in \mathbb{P}_\delta \wedge p(\delta) \in \hat{\pi}_\delta.$$

Si p, $p' \in \mathbb{P}_{\delta+1}$, entonces

$$p \leq p' \leftrightarrow p|_\delta \leq p'|_\delta \wedge p|_\delta \Vdash p(\delta) \leq_{\pi_\delta} p'(\delta).$$

d) Si $\lambda \leq \alpha$ es un ordinal límite entonces

$$\bigwedge pp' \in \mathbb{P}_\lambda (p \leq p' \leftrightarrow \bigwedge \delta < \lambda \ p|_\delta \leq p'|_\delta).$$

Exigimos además que si $\delta < \lambda$ y $p \in \mathbb{P}_\delta$, entonces

$$i_{\delta\lambda}(p) = p \cup \{(\epsilon, \mathbb{1}_{\pi_\epsilon}) \mid \delta \leq \epsilon < \lambda\} \in \mathbb{P}_\lambda.$$

Observemos que el apartado c) afirma que la aplicación $p \mapsto (p|_\delta, p(\delta))$ es una semejanza entre $\mathbb{P}_{\delta+1}$ y $\mathbb{P}_\delta * \pi_\delta$. En particular la aplicación $i_{\delta,\delta+1} : \mathbb{P}_\delta \longrightarrow \mathbb{P}_{\delta+1}$ dada por $i_{\delta,\delta+1}(p) = p \cup \{(\delta, \mathbb{1}_{\pi_\delta})\}$ es la inmersión completa que se corresponde con la dada por el teorema 7.7.

Combinando esto en el apartado d), es claro que, siempre que $\delta \leq \eta \leq \alpha$, podemos definir aplicaciones $i_{\delta\eta} : \mathbb{P}_\delta \longrightarrow \mathbb{P}_\eta$ mediante

$$i_{\delta\eta}(p) = p \cup \{(\epsilon, \mathbb{1}_{\pi_\epsilon}) \mid \delta \leq \epsilon < \eta\},$$

y claramente, si $\delta \leq \eta \leq \zeta$, se cumple que $i_{\delta\eta} \circ i_{\eta\zeta} = i_{\delta\zeta}$.

Como indicábamos, la definición no determina $\mathbb{P}_\lambda$ a partir de $\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta<\lambda}$, sino que únicamente impone que cada $p \in \mathbb{P}_\lambda$ se restringe a condiciones $p|_\delta \in \mathbb{P}_\delta$, para todo $\delta < \lambda$ y que cada condición de $\mathbb{P}_\delta$ admite al menos la extensión trivial $i_{\delta\lambda}(p)$ a $\mathbb{P}_\lambda$. Por lo tanto, cada vez que definamos una iteración de preórdenes tenemos que especificar cómo se construyen los c.p.o.s $\mathbb{P}_\lambda$ para los ordinales límite λ. En la práctica vamos a considerar sólo unas pocas opciones que introducimos a continuación. Para ello definimos los conceptos siguientes:

Diremos que $\mathbb{P}_\lambda$ es el *límite inverso* de $\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta<\lambda}$ si consta de todas las funciones p de dominio λ tales que $\bigwedge\delta < \lambda \ p|_\delta \in \mathbb{P}_\delta$.

Diremos que $\mathbb{P}_\lambda$ es el *límite directo* de $\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta<\lambda}$ si consta de todas las funciones p de dominio λ tales que $\bigwedge\delta < \lambda \ p|_\delta \in \mathbb{P}_\delta$ y además existe un $\delta < \lambda$ tal que $\operatorname{sop} p \subset \delta$, donde el *soporte* de p se define como $\operatorname{sop} p = \{\epsilon < \delta \mid p(\epsilon) \neq \mathbb{1}_{\pi_\epsilon}\}$.

Todas las iteraciones $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\alpha}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\alpha})$ que vamos a considerar en este capítulo serán *iteraciones con límites directos/inversos,* lo cual significa que, para cada ordinal límite $\lambda \leq \alpha$, el c.p.o. $\mathbb{P}_\lambda$ será el límite directo o el límite inverso de los precedentes, y sólo tendremos que especificar en cada caso concreto para qué ordinales λ tomamos uno u otro.

Las únicas iteraciones de este tipo que vamos a considerar en ejemplos concretos son las *iteraciones con soportes finitos,* que son aquellas en las que todos los $\mathbb{P}_\lambda$ son límites directos, y una simple inducción prueba que esto equivale a que todas las condiciones $p \in \mathbb{P}_\delta$ tienen soporte finito.

Por otra parte, en los capítulos XI y XII consideraremos *iteraciones con soportes numerables,* que son aquellas en las que cada $\mathbb{P}_\lambda$ está formado por todas las funciones p de dominio λ tales que $\bigwedge\delta < \lambda \ p|_\delta \in \mathbb{P}_\delta$ y $|\operatorname{sop} p| \leq \aleph_0$.

En este caso es claro que todas las condiciones de cualquier $\mathbb{P}_\delta$ (con δ límite o sucesor) tienen soporte numerable.

Veamos ahora algunas propiedades elementales de las iteraciones de preórdenes.

Teorema 7.23 *Sea* $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\alpha}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\alpha})$ *una iteración de preórdenes y consideremos ordinales* $\epsilon \leq \delta \leq \gamma \leq \alpha$.

a) $i_{\epsilon\gamma} = i_{\epsilon\delta} \circ i_{\delta\gamma}$.

b) $i_{\epsilon\delta}(\mathbb{1}|_{\mathbb{P}_\epsilon}) = \mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta}$.

c) $\bigwedge pp' \in \mathbb{P}_\delta (p \leq p' \to p|_\epsilon \leq p'|_\epsilon)$.

d) $\bigwedge pp' \in \mathbb{P}_\epsilon (p \leq p' \leftrightarrow i_{\epsilon\delta}(p) \leq i_{\epsilon\delta}(p'))$.

e) $\bigwedge pp' \in \mathbb{P}_\delta (p|_\epsilon \perp p'|_\epsilon \to p \perp p')$.

f) $\bigwedge pp' \in \mathbb{P}_\delta (\operatorname{sop} p \cap \operatorname{sop} p' \subset \epsilon \to (p|_\epsilon \perp p'|_\epsilon \leftrightarrow p \perp p'))$.

g) $\bigwedge pp' \in \mathbb{P}_\epsilon (p \perp p' \leftrightarrow i_{\epsilon\delta}(p) \perp i_{\epsilon\delta}(p'))$.

h) $i_{\epsilon\delta} : \mathbb{P}_\epsilon \longrightarrow \mathbb{P}_\delta$ *es una inmersión completa.*

DEMOSTRACIÓN: a) y b) son inmediatas, c) y d) se prueban fácilmente por inducción sobre δ, e) es consecuencia de c).

Una implicación de f) se da por e), luego sólo hemos de probar que si $p \perp p'$ entonces $p|_\epsilon \perp p'|_\epsilon$. Supongamos que existe $p'' \in \mathbb{P}_\epsilon$ tal que $p'' \leq p|_\epsilon$ y $p'' \leq p'|_\epsilon$. Sea p^* la función de dominio δ dada por $p^*|_\epsilon = p''$ y, para todo ordinal γ tal que $\epsilon \leq \gamma < \delta$

$$p^*(\gamma) = \begin{cases} p(\gamma) & \text{si } \gamma \in \operatorname{sop} p, \\ p'(\gamma) & \text{si } \gamma \in \operatorname{sop} p', \\ \mathbb{1}_{\pi_\gamma} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La hipótesis sobre los soportes hace que p^* esté bien definida y una simple inducción sobre γ demuestra que si $\epsilon \leq \gamma \leq \delta$ entonces

$$p^*|_\gamma \in \mathbb{P}_\gamma \wedge p^*|_\gamma \leq p|_\gamma \wedge p^*|_\gamma \leq p'|_\gamma.$$

En particular $p^* \in \mathbb{P}_\delta \wedge p^* \leq p \wedge p^* \leq p'$, luego p y p' son compatibles.

g) es un caso particular de f), pues $\operatorname{sop} i_{\epsilon\delta}(p) = \operatorname{sop} p \subset \epsilon$.

h) Por d) y g) tenemos que $i_{\epsilon\delta}$ es una inmersión. Si $p \in \mathbb{P}_\delta$ entonces $p|_\epsilon$ es una reducción de p a $\mathbb{P}_\epsilon$, pues si $q \leq p|_\epsilon$ entonces $i_{\epsilon\delta}(q)|_\epsilon = q$, luego $\neg i_{\epsilon\delta}(q)|_\epsilon \perp p|_\epsilon$ y, por f), $\neg i_{\epsilon\delta}(q) \perp p$. ■

Es inmediato comprobar que las iteraciones de preórdenes dan lugar a sucesiones transfinitas de extensiones genéricas:

Teorema 7.24 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *y consideremos una iteración de preórdenes^M $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\alpha}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\alpha})$. Sea G un filtro $\mathbb{P}_\alpha$-genérico sobre M. Para cada $\delta \leq \alpha$ sea $G_\delta = i_{\delta\alpha}^{-1}[G]$. Entonces G_δ es un filtro $\mathbb{P}_\delta$-genérico sobre M y si $\delta \leq \epsilon \leq \alpha$ entonces $M[G_\delta] \subset M[G_\epsilon]$. Además si llamamos $\mathbb{Q}_\delta = \pi_{\delta G_\delta} \in M[G_\delta]$ y $H_\delta = \{\rho_{G_\delta} \mid \rho \in \hat{\pi}_\delta \wedge \bigvee p \in \mathbb{P}_\delta \; p \cup \{(\delta, \rho)\} \in G_{\delta+1}\}$, entonces tenemos que $\mathbb{Q}_\delta$ es un c.p.o., H_δ es un filtro $\mathbb{Q}_\delta$-genérico sobre $M[G_\delta]$ y $M[G_{\delta+1}] = M[G_\delta][H_\delta]$.*

DEMOSTRACIÓN: Como $i_{\delta\alpha} \in M$ es una inmersión completa, el teorema 4.31 nos da que G_δ es $\mathbb{P}_\delta$-genérico sobre M. Evidentemente, $G_\delta = i_{\delta\epsilon}^{-1}[G_\epsilon]$, luego este mismo teorema nos da la inclusión $M[G_\delta] \subset M[G_\epsilon]$.

Se cumple que $\mathbb{Q}_\delta$ es un c.p.o. por la definición de buen nombre para un c.p.o. Claramente H_δ se corresponde a través de la semejanza $\mathbb{P}_{\delta+1} \cong \mathbb{P}_\delta * \pi_\delta$ con el filtro considerado en el teorema 7.9, luego H_δ es un filtro $\mathbb{Q}_\delta$-genérico sobre $M[G_\delta]$ y $M[G_{\delta+1}] = M[G_\delta][H_\delta]$. ■

Así pues, en las condiciones del teorema anterior tenemos una sucesión de extensiones genéricas

$$M = M[G_0] \subset M[G_1] \subset M[G_2] \subset \cdots \subset M[G_\omega] \subset M[G_{\omega+1}] \subset \cdots$$

de modo que cada $M[G_{\delta+1}]$ es una extensión genérica de $M[G_\delta]$.

Notemos que si $\mathbb{P}_\lambda$ es límite directo de los c.p.o.s anteriores, entonces

$$\mathbb{P}_\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} i_{\delta\lambda}[\mathbb{P}_\delta] \qquad \text{y} \qquad G_\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} i_{\delta\lambda}[G_\delta].$$

Podría conjeturarse que $M[G_\lambda] = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} M[G_\delta]$, pero esto es falso incluso en los casos más simples. Lo máximo que tenemos a este respecto es el teorema siguiente:

Teorema 7.25 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea $\lambda \in M$ un ordinal límite y $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\lambda}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\lambda})$ una iteración de preórdenes en M con soportes finitos o numerables (y en el segundo caso suponemos $(\operatorname{cf}\lambda > \aleph_0)^{M[G]}$). Sea G un filtro $\mathbb{P}_\lambda$-genérico sobre M. Supongamos que $S \in M$, $X \in M[G]$, $X \subset S$ y $(|X| < \operatorname{cf}\lambda)^{M[G]}$. Entonces existe un $\delta < \lambda$ tal que $X \in M[G_\delta]$.*

Demostración: Sea $\xi \in M^{\mathbb{P}_\lambda}$ tal que $X = \xi_G$. Para cada $s \in X$, existe un $p_s \in G$ tal que $p_s \Vdash \check{s} \in \xi$, de modo que $\{p_s\}_{s\in X} \in M[G]$. Por hipótesis tenemos que $|\operatorname{sop} p_s| < \operatorname{cf}\lambda$ y a su vez

$$\bigcup_{s\in X} \operatorname{sop} p_s \subset \lambda$$

tiene cardinal menor que $\operatorname{cf}\lambda$ (porque $\operatorname{cf}\lambda$ es un cardinal regular). Por consiguiente, existe un $\delta < \lambda$ que contiene a todos los soportes de todos los p_s. Sea

$$\tau = \{(\check{s}, p) \mid s \in S \wedge p \in \mathbb{P}_\lambda \wedge \operatorname{sop} p \subset \delta \wedge p \Vdash \check{s} \in \xi\} \in M^{\mathbb{P}_\lambda}.$$

Se cumple que $\tau_G = X$, pues, por una parte, si $s \in X$ entonces $(\check{s}, p_s) \in \tau$, luego $s \in \tau_G$ y, recíprocamente, si $s \in \tau_G$ existe un $p \in G$ tal que $(\check{s}, p) \in \tau$, luego $p \Vdash \check{s} \in \xi$, luego $s \in \xi_G = X$.

Y es claro que existe $\tau^* \in M^{\mathbb{P}_\delta}$ tal que $\tau = i_{\delta\lambda}(\tau^*)$, con lo que podemos concluir que $X = \xi_G = \xi^*_{G_\delta} \in M[G_\delta]$. ■

Por otro lado, tenemos el siguiente resultado general sobre los filtros correspondientes a ordinales límite (para iteraciones con límites directos/inversos o con soportes numerables):

Teorema 7.26 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea $\lambda \in M$ un ordinal límite y $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\lambda}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\lambda})$ una iteración de preórdenes en M. Sea G un filtro $\mathbb{P}_\lambda$-genérico sobre M. Entonces, para toda condición $p \in \mathbb{P}_\lambda$, se cumple que $p \in G \leftrightarrow \bigwedge\delta < \lambda\ p|_\delta \in G_\delta$.*

Demostración: Es fácil ver que $p \leq i_{\delta\lambda}(p|_\delta)$, y de aquí se sigue una implicación. Supongamos que se cumple $\bigwedge\delta < \lambda\ p|_\delta \in G_\delta$ pero $p \notin G$. Sea $q \in G$ tal que

$$q \Vdash \bigwedge\delta < \check{\lambda}\ \check{p}|_\delta \in \Gamma_\delta \wedge \check{p} \notin \Gamma.$$

Claramente, $1\!\!1_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \bigvee r \in \pi_\delta\ (r \leq q(\delta) \wedge (r \leq p(\delta) \vee r \perp p(\delta)))$, pues si $p(\delta)$ y $q(\delta)$ son incompatibles basta tomar $r = q(\delta)$, y en caso contrario tomamos una extensión común. Por lo tanto existe $r(\delta) \in \hat{\pi}_\delta$ tal que

$$1\!\!1_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash r(\delta) \leq q(\delta) \wedge (r(\delta) \leq p(\delta) \vee r(\delta) \perp p(\delta)).$$

Podemos exigir que $r(\delta) = 1\!\!1_{\pi_\delta}$ siempre que $\delta \notin \operatorname{sop} p \cup \operatorname{sop} q$, con lo que r tiene soporte finito, numerable o acotado en λ si lo tienen p y q. Por lo tanto, $r \in \mathbb{P}_\lambda$. Claramente $r \leq q$. Veamos ahora que $r|_\delta \Vdash r(\delta) \leq p(\delta)$ para todo $\delta < \lambda$.

En caso contrario existe un filtro genérico G_δ tal que $r|_\delta \in G_\delta$ pero no $r(\delta)_{G_\delta} \leq p(\delta)_{G_\delta}$, pero entonces $r(\delta)_{G_\delta} \perp p(\delta)_{G_\delta}$, por la construcción de r, luego existe $r_0' \leq r|_\delta$ tal que $r_0' \Vdash r(\delta) \perp p(\delta)$. Sea $r' \in \mathbb{P}_\lambda$ dado por

$$r'(\alpha) = \begin{cases} r_0'(\alpha) & \text{si } \alpha < \delta, \\ r(\alpha) & \text{si } \delta \leq \alpha < \lambda. \end{cases}$$

Es claro que $r' \leq r \leq q$, luego si G es un filtro $\mathbb{P}_\lambda$-genérico que contenga a r', también $q \in G$, luego $r|_{\delta+1}$, $q|_{\delta+1} \in G_{\delta+1}$, pero $r_0' = r'|_\delta \in G_\delta$, luego $r(\delta)_{G_\delta} \perp p(\delta)_{G_\delta}$, luego $r|_{\delta+1} \perp p|_{\delta+1}$, luego $p|_{\delta+1} \notin G_{\delta+1}$, en contra de la elección de q.

Así pues, $r \leq p$, luego si G es un filtro $\mathbb{P}_\lambda$-genérico sobre M tal que $r \in G$, también p, $q \in G$, mientras que $q \Vdash \check{p} \notin \Gamma$, contradicción. ■

Ahora generalizamos el teorema 7.14 sobre condiciones de cadena a iteraciones de preórdenes.

Teorema 7.27 *Sea κ un cardinal regular no numerable y $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\alpha}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\alpha})$ una iteración de preórdenes con soportes finitos tal que para todo $\delta < \alpha$ se cumpla que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi_\delta$ cumple la c.c.$\check{\kappa}$. Entonces para todo $\delta \leq \alpha$ tenemos que $\mathbb{P}_\delta$ cumple la c.c.κ.*

Demostración: Lo probamos por inducción sobre δ. Es obvio que $\mathbb{P}_0 = \{\mathbb{1}\}$ cumple la c.c.κ. Si la cumple $\mathbb{P}_\delta$ también la cumple $\mathbb{P}_{\delta+1}$ por 7.14. Supongamos que $\lambda \leq \alpha$ es un ordinal límite tal que todos los $\mathbb{P}_\delta$ con $\delta < \lambda$ cumplen la c.c.κ.

Si $\{p_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ es una anticadena en $\mathbb{P}_\lambda$, o bien la familia de los soportes tiene cardinal menor que κ, en cuyo caso existe $A \subset \kappa$ tal que $|A| = \kappa$ y todas las condiciones $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ tienen el mismo soporte $r \subset \lambda$; o bien la familia de los soportes tiene cardinal κ, en cuyo caso podemos aplicarle el lema de los sistemas Δ (es una familia no numerable de conjuntos finitos) de modo que existe $A \subset \kappa$, con $|A| = \kappa$, y la familia $\{\operatorname{sop} p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es cuasidisjunta de raíz $r \subset \lambda$.

En cualquiera de los dos casos tenemos una familia $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de condiciones de $\mathbb{P}_\lambda$ tal que si α, $\beta \in A$, $\alpha \neq \beta$, entonces $\operatorname{sop} p_\alpha \cap \operatorname{sop} p_\beta = r$.

Sea $\delta < \lambda$ tal que $r \subset \delta$. Entonces por 7.23 f) tenemos que $\{p_\alpha|_\delta\}_{\alpha\in A}$ es una anticadena en $\mathbb{P}_\delta$ de cardinal κ, en contra de la hipótesis de inducción. ■

Generalizamos también el teorema 7.16:

Teorema 7.28 *Sea $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\alpha}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\alpha})$ una iteración de preórdenes tal que para todo $\delta < \alpha$ se cumpla que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi_\delta$ es separativo. Entonces para todo $\delta \leq \alpha$ tenemos que $\mathbb{P}_\delta$ es separativo.*

Demostración: Por inducción sobre δ. Trivialmente $\mathbb{P}_0 = \{\mathbb{1}\}$ es separativo. Si $\mathbb{P}_\delta$ es separativo, entonces $\mathbb{P}_{\delta+1} \cong \mathbb{P}_\delta * \pi_\delta$ es separativo por 7.16. Supongamos ahora que $\mathbb{P}_\delta$ es separativo para todo $\delta < \lambda \leq \alpha$.

Si p, $q \in \mathbb{P}_\lambda$ cumplen $p \not\leq q$, entonces existe un $\delta < \lambda$ tal que $p|_\delta \not\leq q|_\delta$. Por hipótesis de inducción existe $p' \in \mathbb{P}_\delta$ tal que $p' \leq p|_\delta$ y $p' \perp q|_\delta$. Definimos

$$\bar{p}(\epsilon) = \begin{cases} p'(\epsilon) & \text{si } \epsilon < \delta, \\ p(\epsilon) & \text{si } \delta \leq \epsilon < \lambda. \end{cases}$$

Es claro entonces que $\bar{p} \in \mathbb{P}_\lambda$ (tanto si para pertenecer a $\mathbb{P}_\lambda$ se exigen soportes finitos, como numerables como arbitrarios) así como que $\bar{p} \leq p$ y $\bar{p} \perp q$. ■

Con esto podríamos demostrar ya la consistencia de la hipótesis de Suslin, pero, según hemos indicado, demostraremos la consistencia de una sentencia más general que presentamos en la sección siguiente. Terminamos esta sección probando que toda iteración de c.p.o.s con soportes finitos se puede descomponer en dos iteraciones sucesivas.

Factorización de iteraciones Hasta el final de la sección fijamos un modelo transitivo numerable M de ZFC y, en M, una iteración $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\gamma}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\gamma})$.

Si $\alpha \leq \gamma$, tenemos que $i_{\alpha\gamma} : \mathbb{P}_\alpha \longrightarrow \mathbb{P}_\gamma$ es una inmersión completa, y la aplicación $p \mapsto p|_\gamma$ es una restricción en el sentido de 7.17. Por lo tanto, tenemos definido el nombre para un c.p.o. dado por 7.18, que en este caso representaremos por $\mathbb{P}_\gamma/\Gamma_\alpha$ y que está caracterizado por que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash \mathbb{P}_\gamma/\Gamma_\alpha = \{p \in \check{\mathbb{P}}_\gamma \mid p|_{\check{\alpha}} \in \Gamma\}.$$

Si G_α es un filtro $\mathbb{P}_\alpha$-genérico sobre M, llamaremos $\mathbb{P}_\gamma/G_\alpha = (\mathbb{P}_\gamma/\Gamma_\alpha)_{G_\alpha}$, y entonces en $M[G_\alpha]$ tenemos que $\mathbb{P}_\gamma/G_\alpha = \{p \in \mathbb{P}_\gamma \mid p|_\alpha \in G_\alpha\}$, considerado como c.p.o. con la restricción del orden de $\mathbb{P}_\gamma$.

Si $\bar{p} \in \mathbb{P}_\gamma$, llamaremos $\bar{p}$ al nombre que en 7.18 hemos llamado σ_p, de modo que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash (\check{p}|_{\check{\alpha}} \in \Gamma \rightarrow \bar{p} = \check{p}),$$

Definimos $i : \mathbb{P}_\gamma \longrightarrow \mathbb{P}_\alpha * (\mathbb{P}_\gamma/\Gamma_\alpha)$ mediante $i(p) = (p|_\alpha, \bar{p})$, y así el teorema 7.19 se particulariza al resultado siguiente:

Teorema 7.29 *La aplicación $i : \mathbb{P}_\gamma \longrightarrow \mathbb{P}_\alpha * (\mathbb{P}_\gamma/\Gamma_\alpha)$ es una inmersión densa.*

A su vez, los teoremas 7.20 y 7.21 se particularizan a:

Teorema 7.30 *Si G_γ es un filtro $\mathbb{P}_\gamma$-genérico sobre M, entonces $G_\alpha = i_{\alpha\gamma}^{-1}[G_\gamma]$ es un filtro $\mathbb{P}_\alpha$-genérico sobre M y G_γ también es un filtro $\mathbb{P}_\gamma/G_\alpha$-genérico sobre $M[G_\alpha]$ y se da la igualdad $M[G_\gamma] = M[G_\alpha][G_\gamma]$.*

Teorema 7.31 *Si G_α es un filtro $\mathbb{P}_\alpha$-genérico sobre M y G_γ es un filtro $\mathbb{P}_\gamma/G_\alpha$-genérico sobre $M[G_\alpha]$, entonces G_γ es también un filtro $\mathbb{P}_\gamma$-genérico sobre M y $G_\alpha = i_{\alpha\gamma}^{-1}[G_\gamma]$.*

Finalmente probamos que estas factorizaciones permiten factorizar la iteración completa:

Teorema 7.32 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC *y, en M, sea $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\gamma}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\gamma})$ una iteración de longitud $\gamma = \alpha+\beta$ con soportes finitos y sea G_α un filtro $\mathbb{P}_\alpha$-genérico sobre M. Entonces en $M[G_\alpha]$ existe una iteración de c.p.o.s $(\{\mathbb{P}'_\delta\}_{\delta\leq\beta}, \{\pi'_\delta\}_{\delta<\beta})$ con soportes finitos y una familia de inmersiones densas $j_{\alpha\delta} : \mathbb{P}_{\alpha+\delta}/G_\alpha \longrightarrow \mathbb{P}'_\delta$ tales que si G'_δ es un filtro $\mathbb{P}'_\delta$-genérico sobre $M[G_\alpha]$ y $G_{\alpha+\delta} = j^{-1}_{\alpha\delta}[G'_\delta]$, entonces $(\pi'_\delta)_{G'_\delta} = (\pi_{\alpha+\delta})_{G_{\alpha+\delta}}$.*

Demostración: Construimos recurrentemente la iteración y las inmersiones densas, que además cumplirán que si $\epsilon<\delta$, entonces $j_{\alpha\delta}(p)|_\epsilon = j_{\alpha\epsilon}(p|_{\alpha+\epsilon})$ y $j_{\alpha\delta}(p)(\epsilon) = \mathbb{1}$ si y sólo si $p(\alpha+\epsilon) = \mathbb{1}$. Observemos que, en particular, esto implica que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}_{\alpha+\epsilon}/G_\alpha \arrow[r, "j_{\alpha\epsilon}"] & \mathbb{P}'_\epsilon \\
\mathbb{P}_{\alpha+\delta}/G_\alpha \arrow[u, "i_{\alpha+\delta,\alpha+\epsilon}"] \arrow[r, "j_{\alpha\delta}"] & \mathbb{P}'_\delta \arrow[u, "i_{\delta\epsilon}"']
\end{tikzcd}$$

Para $\delta = 0$ tomamos $\mathbb{P}'_0 = \{\varnothing\}$ y definimos $j_{\alpha 0} : \mathbb{P}_\alpha/G_\alpha \longrightarrow \mathbb{P}'_0$ como la aplicación constante. Observamos que $\mathbb{P}_\alpha/G_\alpha = G_\alpha$, por lo que todas las condiciones son compatibles, por lo que $j_{\alpha 0}$ es trivialmente una inmersión y obviamente es densa.

Supongamos definida $(\{\mathbb{P}'_\delta\}_{\delta\leq\epsilon}, \{\pi'_\delta\}_{\delta<\epsilon})$, para $\epsilon<\beta$, junto con la inmersión $j_{\alpha\epsilon} : \mathbb{P}_{\alpha+\epsilon}/G_\alpha \longrightarrow \mathbb{P}'_\epsilon$.

Observemos que si $\sigma\in M^{\mathbb{P}_{\alpha+\epsilon}}$, entonces $i_{\alpha\epsilon}(\sigma)$ es un $\mathbb{P}_\alpha * (\mathbb{P}_{\alpha+\epsilon}/\Gamma_\alpha)$-nombre, luego, usando 7.11, $i_{\alpha\epsilon}(\sigma)^*_{G_\alpha}$ es un $\mathbb{P}_{\alpha+\epsilon}/G_\alpha$-nombre, que a su vez determina el $\mathbb{P}'_\epsilon$-nombre $\bar\sigma = j_{\alpha\epsilon}(i_{\alpha\epsilon}(\sigma)^*_{G_\alpha})$.

Este nombre tiene la propiedad de que si H' es un filtro $\mathbb{P}'_\epsilon$-genérico sobre $M[G_\alpha]$ y $H = j^{-1}_{\alpha\epsilon}[H']$, que es un filtro $\mathbb{P}_{\alpha+\epsilon}/G_\alpha$-genérico sobre $M[G_\alpha]$ y también $\mathbb{P}_{\alpha+\epsilon}$-genérico sobre M, entonces $\bar\sigma_{H'} = \sigma_H$.

En particular, podemos definir $\pi'_\epsilon = \bar\pi_{\alpha+\epsilon}$, de modo que $(\pi'_\epsilon)_{H'} = (\pi_{\alpha+\epsilon})_H$ es un c.p.o., por lo que π'_ϵ es un $\mathbb{P}'_\epsilon$-nombre para un c.p.o., lo que determina a su vez un c.p.o. $\mathbb{P}'_{\epsilon+1}$ y así tenemos la iteración $(\{\mathbb{P}'_\delta\}_{\delta\leq\epsilon+1}, \{\pi'_\delta\}_{\delta<\epsilon+1})$.

Ahora definimos $j_{\alpha,\epsilon+1} : \mathbb{P}_{\alpha+\epsilon+1}/G_\alpha \longrightarrow \mathbb{P}'_{\epsilon+1}$ mediante

$$j_{\alpha,\epsilon+1}(p)|_\epsilon = i_{\alpha\epsilon}(p|_{\alpha+\epsilon}), \quad j_{\alpha,\epsilon+1}(p)(\epsilon) = \overline{p(\alpha+\epsilon)}.$$

Notemos que, como $\mathbb{1} \Vdash p(\alpha+\epsilon)\in\pi_{\alpha+\epsilon}$, también[1] $\mathbb{1}\Vdash j_{\alpha,\epsilon+1}(\epsilon)\in\pi'_\epsilon$, luego ciertamente $j_{\alpha,\epsilon+1}(p)\in\mathbb{P}'_\epsilon$.

Se comprueba sin dificultad que $p\leq q \rightarrow i_{\alpha,\epsilon+1}(p) \leq i_{\alpha,\epsilon+1}(q)$. Similarmente, si $p\perp q$, entonces, o bien $p|_{\alpha+\epsilon} \perp q|_{\alpha+\epsilon}$, o bien existe $r\leq p|_{\alpha+\epsilon}$,

[1]En realidad, hay que sustituir $\overline{p(\alpha+\epsilon)}$ por otro nombre equivalente en $\bar\pi'_\epsilon$, pero no detallamos este tecnicismo (ni aquí ni en otros puntos de la prueba) por no complicar más la construcción. Tambien podemos pedir que si $p(\alpha+\epsilon) = \mathbb{1}$ entonces $j_{\alpha,\epsilon+1}(p)(\epsilon) = \mathbb{1}$.

$r \leq q|_{\alpha+\epsilon}$ tal que $r \Vdash p(\alpha+\epsilon) \perp q(\alpha+\epsilon)$ y es fácil ver que esto implica que $j_{\alpha+\epsilon+1}(p)|_\epsilon \perp j_{\alpha+\epsilon+1}(p)|_\epsilon$ o bien $j_{\alpha+\epsilon}(r) \Vdash j_{\alpha+\epsilon+1}(p)(\epsilon) \perp j_{\alpha+\epsilon+1}(q)(\epsilon)$, y en ambos casos $j_{\alpha+\epsilon+1}(p) \perp j_{\alpha+\epsilon+1}(q)$.

Por lo tanto, $j_{\alpha+\epsilon+1}$ es una inmersión. Además es densa, pues si $p' \in \mathbb{P}'_{\epsilon+1}$, entonces $p'|_\epsilon \in \mathbb{P}_\epsilon$, luego por hipótesis de inducción existe $p_0 \in \mathbb{P}_{\alpha+\epsilon}/G_\alpha$ tal que $j_{\alpha\epsilon}(p_0) \leq p'|_\epsilon$. Por otra parte, $p'(\epsilon) \in M^{\mathbb{P}'_\epsilon}$, luego podemos considerar el $\mathbb{P}_{\alpha+\epsilon}/G_\alpha$-nombre $\sigma = j_{\alpha\epsilon}^{-1}(p'(\epsilon))$ considerado en el teorema 4.34, que es también un $\mathbb{P}_{\alpha+\epsilon}$-nombre y, como $\mathbb{1} \Vdash p'(\epsilon) \in \pi'_\epsilon$, es claro que también $\mathbb{1} \Vdash \sigma \in \pi_{\alpha+\epsilon}$. Por lo tanto, podemos formar una condición $p \in \mathbb{P}_{\alpha+\epsilon+1}/G_\alpha$ haciendo que $p|_{\alpha+\epsilon} = p_0$ y $p(\alpha+\epsilon) = \sigma$.

Observemos que $\mathbb{1} \Vdash \bar{\sigma} = p'(\epsilon)$, pues si tomamos un filtro genérico H', se cumple que $\bar{\sigma}_{H'} = j_{\alpha\epsilon}^{-1}(p'(\epsilon))_H = p'(\epsilon)_{H'}$, por 4.34. Es claro entonces que $j_{\alpha+\epsilon+1}(p) \leq p'$, luego la inmersión es densa y claramente cumple las propiedades requeridas.

Si tenemos definidas las iteraciones para todo $\epsilon < \lambda \leq \beta$, entonces tenemos definida una iteración $(\{\mathbb{P}'_\delta\}_{\delta\leq\lambda}, \{\pi'_\delta\}_{\delta<\lambda})$ sin más que construir $\mathbb{P}'_\lambda$ tomando el límite con soportes finitos de los c.p.o.s precedentes. Además, las propiedades de compatibilidad de las inmersiones densas construidas hacen que esté bien definida $j_{\alpha\lambda} : \mathbb{P}_{\alpha+\lambda}/G_\alpha \longrightarrow \mathbb{P}'_\lambda$ mediante $j_{\alpha\lambda}(p)(\delta) = j_{\alpha,\delta+1}(p|_{\alpha+\delta+1})(\delta)$.

Es fácil ver que es una inmersión. Por ejemplo, si $p \perp q$, existe un $\alpha+\epsilon < \lambda$ tal que $\operatorname{sop} p \cup \operatorname{sop} q \subset \alpha+\epsilon$, con lo que $p = i_{\alpha+\epsilon,\alpha+\lambda}(p_0)$, $q = i_{\alpha+\epsilon,\alpha+\lambda}(q_0)$, luego $p_0 \perp q_0$, luego $j_{\alpha\epsilon}(p_0) \perp j_{\alpha\epsilon}(q_0)$, luego $i_{\epsilon\lambda}(j_{\alpha\epsilon}(p_0)) \perp i_{\epsilon\lambda}(j_{\alpha\epsilon}(q_0))$, pero esto es lo mismo que $j_{\alpha\lambda}(p) \perp j_{\alpha\lambda}(q)$.

También es fácil ver que $j_{\alpha\lambda}$ es una inmersión densa. En efecto, si $p' \in \mathbb{P}'_\lambda$, existe un $\epsilon < \lambda$ tal que $p' = i_{\epsilon\lambda}(p'_0)$, luego existe un $p_0 \in \mathbb{P}_{\alpha+\epsilon}/G_\alpha$ tal que $j_{\alpha\epsilon}(p_0) \leq p'_0$, luego $j_{\alpha\epsilon}(i_{\alpha+\epsilon,\alpha+\lambda}(p_0)) = i_{\epsilon\lambda}(j_{\alpha\epsilon}(p_0)) \leq i_{\epsilon\lambda}(p'_0) = p'$. ■

7.3 La consistencia del axioma de Martin

Según comentábamos al principio del capítulo —concretando ahora un poco más— Solovay y Tennenbaum demostraron la consistencia de la hipótesis de Suslin construyendo una iteración de preórdenes $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\alpha}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\alpha})$ en un modelo M, de modo que cualquier árbol bien podado con la condición de cadena numerable A en el modelo final $M[G]$, puesto "copa abajo", coincidiera con uno de los c.p.o.s $\mathbb{Q}_\delta = \pi_{\delta G_\delta} \in M[G_\delta]$. De este modo $M[G_{\delta+1}] = M[G_\delta][H_\delta]$ para un cierto filtro $\mathbb{Q}_\delta$-genérico H_δ y, por consiguiente, $H_\delta \in M[G]$ resulta ser un camino en A, lo que garantiza que A no es un árbol de Suslin en $M[G]$. Sin embargo, D.A. Martin se dio cuenta de que en realidad no era necesario tratar únicamente con posibles árboles de Suslin, sino que bastaba exigir la condición de cadena numerable. Esta observación conduce a la formulación del axioma de Martin, cuyo enunciado recordamos aquí:

Definición 7.33 Para cada cardinal κ, llamaremos *axioma de Martin* para κ a la fórmula:

AM(κ) *Si* $\mathbb{P}$ *es un c.p.o. que cumple la condición de cadena numerable y* $\mathcal{D}$ *es una familia de conjuntos densos en* $\mathbb{P}$ *tal que* $|\mathcal{D}| \leq \kappa$*, entonces existe un filtro* G *en* $\mathbb{P}$ *que corta a todos los elementos de* $\mathcal{D}$*.*

El *axioma de Martin* (AM) es la sentencia $\bigwedge \kappa < 2^{\aleph_0}$ AM(κ), es decir:

Si $\mathbb{P}$ *es un c.p.o. que cumple la condición de cadena numerable y* $\mathcal{D}$ *es una familia de conjuntos densos en* $\mathbb{P}$ *tal que* $|\mathcal{D}| < 2^{\aleph_0}$*, entonces existe un filtro* G *en* $\mathbb{P}$ *que corta a todos los elementos de* $\mathcal{D}$*.*

Ejercicio: Probar que AM es equivalente a la sentencia análoga en la que no se exige que los c.p.o.s tengan máximo. (En la definición de filtro para un c.p.o. sin máximo hemos de cambiar $\mathbb{1} \in G$ por $G \neq \varnothing$.)

A la hora de probar la consistencia del axioma de Martin nos encontramos con una dificultad, y es que hay una clase propia de c.p.o.s con la condición de cadena numerable no semejantes entre sí. No podemos realizar una iteración de extensiones que pase por todos ellos, pues necesitaríamos que el último c.p.o. fuera una clase propia. Afortunadamente AM equivale a su restricción a un cierto conjunto de c.p.o.s. La idea central de la prueba es el argumento del teorema de Löwenheim-Skolem.

Teorema 7.34 *Sea* κ *un cardinal infinito. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) AM(κ),

b) AM(κ) *para c.p.o.s* $\mathbb{P}$ *con la hipótesis adicional de que* $|\mathbb{P}| \leq \kappa$*,*

c) AM(κ) *para c.p.o.s* $\mathbb{P}$ *de la forma* $(\kappa, \leq, \varnothing)$ *(donde* $\leq$ *es un preorden arbitrario en* κ*).*

DEMOSTRACIÓN: Obviamente a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c). Es obvio que b) equivale a AM(κ) para c.p.o.s de la forma $(\mathbb{P}, \leq, \varnothing)$ con $\mathbb{P} \subset \kappa$ (pues todo c.p.o. $\mathbb{P}$ tal que $|\mathbb{P}| \leq \kappa$ es semejante a un c.p.o. en estas condiciones). Así, para demostrar que c) $\Rightarrow$ b) podemos partir de un c.p.o. $\mathbb{P} \subset \kappa$ con máximo $\varnothing$ (y, por supuesto, con la condición de cadena numerable).

Extendamos el preorden de $\mathbb{P}$ a κ estableciendo que todos los elementos de $\kappa \setminus \mathbb{P}$ son máximos. Así κ se convierte en un c.p.o. con la condición de cadena numerable en el cual $\mathbb{P}$ es denso. Es claro que si $\mathcal{D}$ es una familia de a lo sumo κ subconjuntos densos de $\mathbb{P}$, éstos siguen siendo densos en κ, luego por c) existe un filtro G en κ que corta a todos los elementos de $\mathcal{D}$. Es inmediato comprobar que $G \cap \mathbb{P}$ es un filtro en $\mathbb{P}$ que cumple lo mismo.

Veamos por último que b) $\Rightarrow$ a). Sea $\mathbb{P}$ un c.p.o. arbitrario con la condición de cadena numerable y sea $\mathcal{D}$ una familia de a lo sumo κ subconjuntos densos de $\mathbb{P}$.

Veamos que existe $\mathbb{Q} \subset \mathbb{P}$ tal que

1. $|\mathbb{Q}| \leq \kappa$,

2. Para todo $D \in \mathcal{D}$, se cumple que $D \cap \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{Q}$,

3. Dos condiciones de $\mathbb{Q}$ son compatibles en $\mathbb{Q}$ si y sólo si lo son en $\mathbb{P}$.

Si $D \in \mathcal{D}$, sea $f_D : \mathbb{P} \longrightarrow D$ tal que

$$\bigwedge p \in \mathbb{P}\,(f_D(p) \in D \wedge f_D(p) \leq p)).$$

Sea $g : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ tal que

$$\bigwedge pq \in \mathbb{P}(\neg p \perp q \rightarrow g(p,q) \leq p \wedge g(p,q) \leq q).$$

Definimos $\mathbb{Q}_0 = \{\mathbb{1}\} \wedge \bigwedge n \in \omega\ \mathbb{Q}_{n+1} = \mathbb{Q}_n \cup g[\mathbb{Q}_n \times \mathbb{Q}_n] \cup \bigcup\limits_{D \in \mathcal{D}} f_D[\mathbb{Q}_n]$.

Es claro que $\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{n \in \omega} \mathbb{Q}_n$ cumple lo pedido.

Por 3) tenemos que $\mathbb{Q}$ cumple la condición de cadena numerable, por 1), 2) y la hipótesis b) tenemos que existe un filtro H sobre $\mathbb{Q}$ que corta a todos conjuntos $D \cap \mathbb{Q}$, con $D \in \mathcal{D}$. Definimos

$$G = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee q \in H\ q \leq p\}.$$

Es fácil comprobar que G es un filtro en $\mathbb{P}$ y obviamente contiene a H, luego corta a todos los elementos de D. ■

Finalmente estamos en condiciones de demostrar la consistencia del axioma de Martin. La idea básica de la prueba es una de las paradojas del infinito: imaginemos que metemos en un saco bolas numeradas del 0 al 9, luego sacamos la bola 0, luego metemos bolas numeradas del 10 al 19 y sacamos la bola 2, etc. De este modo, aunque cada vez tenemos más bolas en el saco, al cabo de infinitos pasos no nos quedarán bolas, porque la número 0 la hemos sacado en el primer paso, la número 1 en el segundo, etc.

En nuestro caso, partimos de un modelo M con infinitos c.p.o.s que pueden incumplir el axioma de Martin, extendiendo con uno de ellos conseguimos un filtro que corta a todos los sus conjuntos densos en M, pero en la extensión puede haber nuevos conjuntos densos que necesiten otro filtro y pueden aparecer infinitos c.p.o.s nuevos que no cumplan el axioma de Martin. Así, en cada paso resolvemos parcialmente un caso y nos aparecen infinitos contraejemplos más, pero, si lo organizamos bien, al cabo de κ pasos podemos haber eliminado todos los contraejemplos.

Teorema 7.35 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC *y en M sea κ un cardinal regular no numerable tal que $2^{<\kappa} = \kappa$. Existe una extensión genérica N de M que cumple* AM, *tiene los mismos cardinales y cofinalidades,* $(2^{\aleph_0} = \kappa)^N$ *y la función del continuo sobre κ es la misma en M y en N.*

Demostración: Sea $g \in M$ tal que $g : \kappa \longrightarrow \kappa \times \kappa \times \kappa$ biyectiva. Sea $f : \kappa \longrightarrow \kappa \times \kappa$ definida como sigue: si $g(\alpha) = (\beta, \gamma, \delta)$, entonces

$$f(\alpha) = \begin{cases} (\beta, \gamma) & \text{si } \beta \leq \alpha, \\ (0, 0) & \text{si } \alpha < \beta. \end{cases}$$

De este modo, $f \in M$, $f : \kappa \longrightarrow \kappa \times \kappa$ suprayectiva y

$$\bigwedge \alpha\beta\gamma(f(\alpha) = (\beta, \gamma) \to \beta \leq \alpha).$$

En efecto, si $(\beta, \gamma) \in \kappa \times \kappa$, entonces el conjunto

$$\{\alpha < \kappa \mid \bigvee \delta < \kappa\ g(\alpha) = (\beta, \gamma, \delta)\}$$

tiene cardinal^M κ, luego no está acotado en κ, luego existe un $\alpha \geq \beta$ tal que $g(\alpha) = (\beta, \gamma, \delta)$, y entonces $f(\alpha) = (\beta, \gamma)$.

Vamos a usar la función f para determinar en qué orden usamos cada c.p.o. que pueda incumplir AM para formar una extensión que le añada un filtro genérico. Más concretamente, $f(\alpha) = (\beta, \gamma)$ significará que para formar la extensión α-ésima usaremos el γ-ésimo c.p.o. de entre los disponibles en la iteración β-ésima. Naturalmente, para que esto tuviera sentido hemos tenido que garantizar que $\beta \leq \alpha$.

Definiremos una iteración de preórdenes^M con soportes finitos de la forma

$$(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \kappa}, \{(\check{\nu}_\delta, \leq_\delta, \check{\varnothing})\}_{\delta < \kappa}),$$

donde $\bigwedge \delta < \kappa\ \nu_\delta < \kappa$. Además se cumplirá que

$$\bigwedge \delta < \kappa\ \mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash (\check{\nu}_\delta, \leq_\delta, \check{\varnothing}) \text{ es un c.p.o. con la c.c.n.}$$

Por 7.27, tendremos que cada $\mathbb{P}_\delta$ cumplirá la condición de cadena numerable en M. Veamos que estas condiciones implican que cada $\mathbb{P}_\delta$ tendrá un subconjunto denso $\overline{\mathbb{P}}_\delta$ tal que $\bigwedge \delta < \kappa\ |\overline{\mathbb{P}}_\delta|^M < \kappa$ y $|\overline{\mathbb{P}}_\kappa|^M \leq \kappa$.

Lo probamos por inducción sobre δ. Para $\mathbb{P}_0 = \{\varnothing\}$ es trivial. Supongamos que $\overline{\mathbb{P}}_\delta$ es denso en $\mathbb{P}_\delta$ y $|\overline{\mathbb{P}}_\delta|^M < \kappa$. Definimos

$$\overline{\mathbb{P}}_{\delta+1} = \big\{p \cup \{(\delta, \check{\alpha})\} \mid p \in \overline{\mathbb{P}}_\delta \land \alpha < \nu_\delta\big\}.$$

Podemos suponer que los nombres $\check{\alpha}$ están en $\hat{\pi}_\delta$, o también podemos sustituirlos por nombres equivalentes que sí lo estén. Claramente $\overline{\mathbb{P}}_{\delta+1} \subset \mathbb{P}_{\delta+1}$ y $|\overline{\mathbb{P}}_{\delta+1}|^M < \kappa$. Veamos que es denso.

Dado $p \in \mathbb{P}_{\delta+1}$, sea G un filtro $\mathbb{P}_\delta$-genérico sobre M tal que $p|_\delta \in G$. Como $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash p(\delta) \in \check{\nu}_\delta$, se cumple que $p(\delta)_G = \alpha$, para un cierto $\alpha < \nu_\delta$, luego existe un $q \in \overline{\mathbb{P}}_\delta$, $q \leq p|_\delta$ tal que $q \Vdash p(\delta) = \check{\alpha}$. Entonces $q \cup \{(\delta, \check{\alpha})\} \in \overline{\mathbb{P}}_{\delta+1}$ es una extensión de p.

Dados $\{\overline{\mathbb{P}}_\delta\}_{\delta < \lambda}$, para $\lambda \leq \kappa$ definimos $\overline{\mathbb{P}}_\lambda = \bigcup\limits_{\delta < \lambda} i_{\delta\lambda}[\overline{\mathbb{P}}_\delta]$. Como κ es regular^M es claro que $|\overline{\mathbb{P}}_\lambda|^M < \kappa$ si $\lambda < \kappa$ y $|\overline{\mathbb{P}}_\kappa|^M \leq \kappa$. Del hecho de que los límites son directos se sigue inmediatamente que $\overline{\mathbb{P}}_\lambda$ es denso en $\mathbb{P}_\lambda$.

La razón por la que acotamos el cardinal de conjuntos densos es porque el preorden no es antisimétrico, por lo que hay muchas condiciones que contienen la misma información, lo que hace que el cardinal de los c.p.o.s completos no sea significativo.

Si δ, $\epsilon < \kappa$, según 5.20, el número de buenos $\overline{\mathbb{P}}_\delta$-nombres para subconjuntos de $\epsilon\check{\times}\epsilon$ en M es a lo sumo $(\kappa^{\aleph_0})^{|\epsilon\times\epsilon|} \leq \kappa^{<\kappa} = (2^{<\kappa})^{<\kappa} = 2^{<\kappa} = \kappa$ (aquí usamos que $\overline{\mathbb{P}}_\delta$ cumple la condición de cadena numerable por ser denso en $\mathbb{P}_\delta$).

Vamos a construir la iteración por recurrencia en M. Tomamos $\mathbb{P}_0 = \{\varnothing\}$. Supongamos construidos $(\{\mathbb{P}_\beta\}_{\beta\leq\alpha}, \{(\check{\nu}_\beta, \leq_\beta, \check{\varnothing})\}_{\beta<\alpha})$, para $\alpha < \kappa$, de modo que cumplan las propiedades indicadas y, por consiguiente, las consecuencias que acabamos de probar. En particular tenemos definidos los conjuntos $\{\overline{\mathbb{P}}_\beta\}_{\beta\leq\alpha}$.

Sea $\{(\nu^\alpha_\gamma, \leq^\alpha_\gamma)\}_{\gamma<\kappa} \in M$ una enumeración de todos los pares $(\nu, \leq)$ tales que $\nu < \kappa$ es un cardinal^M y $\leq$ es un buen $\overline{\mathbb{P}}_\alpha$-nombre^M para un subconjunto de $\nu\check{\times}\nu$. Informalmente, entre ellos están todos los c.p.o.s que nos han aparecido en el último paso construido hasta ahora, a los cuales tendremos que añadir filtros genéricos tarde o temprano. Nuestro razonamiento recurrente nos permite suponer definidos los pares correspondientes a pasos anteriores, es decir, tenemos definidos $(\nu^\beta_\gamma, \leq^\beta_\gamma)$ para $\beta \leq \alpha$ y $\gamma < \kappa$.

Sea $f(\alpha) = (\beta, \gamma)$. Por construcción de f tenemos que $\beta \leq \alpha$, luego el par $(\nu^\beta_\gamma, \leq^\beta_\gamma)$ está definido y $\leq^\beta_\gamma$ es un buen $\overline{\mathbb{P}}_\beta$-nombre para un subconjunto de $\nu^\beta_\gamma\check{\times}\nu^\beta_\gamma$. Definimos $\nu_\alpha = \nu^\beta_\gamma$ y sea $\sigma = i_{\beta\alpha}(\leq^\beta_\gamma) \in M^{\mathbb{P}_\alpha}$.

Claramente

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash \bigvee R((\check{\nu}_\alpha, R, \check{\varnothing}) \text{ es un c.p.o. con la c.c.n.} \land$$

$$((\check{\nu}_\alpha, \sigma, \check{\varnothing}) \text{ es un c.p.o. con la c.c.n.} \rightarrow R = \sigma)).$$

Por 4.49 existe un $\leq_\alpha \in M^{\mathbb{P}_\alpha}$ tal que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash ((\check{\nu}_\alpha, \leq_\alpha, \check{\varnothing}) \text{ es un c.p.o. con la c.c.n.} \land$$

$$((\check{\nu}_\alpha, i_{\beta\alpha}(\leq^\beta_\gamma), \check{\varnothing}) \text{ es un c.p.o. con la c.c.n.} \rightarrow \leq_\alpha = i_{\beta\alpha}(\leq^\beta_\gamma))).$$

Definimos $\mathbb{P}_{\alpha+1}$ tal y como exige la definición de iteración de preórdenes. Esta definición también determina el caso límite (teniendo en cuenta que exigimos siempre límites directos).

Con esto tenemos definido el c.p.o. $\mathbb{P} = \mathbb{P}_\kappa \in M$. Además hemos probado que $\mathbb{P}_\kappa$ cumple la condición de cadena numerable^M y contiene un subconjunto denso $\overline{\mathbb{P}}_\kappa$ tal que $|\overline{\mathbb{P}}_\kappa|^M \leq \kappa$. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Por la condición de cadena numerable, los cardinales y las cofinalidades en M son los mismos que en $M[G]$. Vamos a calcular la función del continuo en $M[G]$. Puesto que $M[G]$ puede obtenerse también como extensión genérica sobre $\overline{\mathbb{P}} = \overline{\mathbb{P}}_\kappa$, podemos trabajar con éste último.

Si $\mu \geq \kappa$ es un cardinal^M, por 5.20, el número de buenos $\overline{\mathbb{P}}$-nombres^M para subconjuntos de $\check{\mu}$ es a lo sumo $\kappa^\mu = 2^\mu$, de donde se sigue que $(2^\mu)^M = (2^\mu)^{M[G]}$ para cardinales mayores o iguales que κ.

El número de buenos $\overline{\mathbb{P}}$-nombres^M para subconjuntos de $\check{\omega}$ es a lo sumo $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$, luego, en $M[G]$, $2^{\aleph_0} \leq \kappa$.

El resto de la función del continuo en $M[G]$ quedará completamente determinado en cuanto probemos que $M[G]$ cumple AM(ν) para todo cardinal infinito $\nu < \kappa$, pues entonces $\nu < (2^{\aleph_0})^{M[G]}$, de donde $(2^{\aleph_0})^{M[G]} = \kappa$. A su vez esto implica que $M[G]$ cumple AM. Finalmente, los teoremas [TC 8.5], [TC 8.44] nos dan que $(2^{\nu})^{M[G]} = \kappa$ para todo cardinal infinito $\nu \leq \kappa$.

Según el teorema anterior, para probar AM$(\nu)^{M[G]}$, donde $\nu < \kappa$ es un cardinal$^{M[G]}$, basta considerar un c.p.o. de la forma $(\nu, R, \varnothing) \in M[G]$ con la condición de cadena numerable$^{M[G]}$ y una familia $\mathcal{D} \in M[G]$ de conjuntos densos en $(\nu, R, \varnothing)$ tal que $|\mathcal{D}|^{M[G]} \leq \nu$.

Por 7.25, como $R \subset \nu \times \nu \in M$ y $(|\nu \times \nu| < \kappa = \operatorname{cf} \kappa)^{M[G]}$, existe un $\beta < \kappa$ tal que $R \in M[G_\beta]$.

Fijemos una enumeración $\{D_\alpha\}_{\alpha<\nu} \in M[G]$ de la familia $\mathcal{D}$. Consideremos el conjunto $A = \{(\alpha, \delta) \in \nu \times \nu \mid \delta \in D_\alpha\} \subset \nu \times \nu$. De nuevo por 7.25 podemos afirmar que existe un $\beta < \kappa$ tal que $A \in M[G_\beta]$, con lo que $\mathcal{D} \in M[G_\beta]$. Tomándolo suficientemente grande podemos suponer que R, $\mathcal{D} \in M[G_\beta]$.

De este modo, $R = (\leq_\gamma^\beta)_{G_\beta}$ para cierto $\gamma < \kappa$ y $\nu = \nu_\gamma^\beta$. Sea $\alpha \geq \beta$ tal que $f(\alpha) = (\beta, \gamma)$. Sea $\sigma = i_{\beta\alpha}(\leq_\gamma^\beta)$. Como $i_{\beta\alpha}$ es una inmersión completa, sabemos por 4.34 que $R = (\leq_\gamma^\beta)_{G_\beta} = (\leq_\gamma^\beta)_{i_{\beta\alpha}^{-1}[G_\alpha]} = i_{\beta\alpha}(\leq_\gamma^\beta)_{G_\alpha} = \sigma_{G_\alpha}$.

Así pues, $(\nu, R, \varnothing) \in M[G_\alpha]$ y es un c.p.o. con la condición de cadena numerable$^{M[G_\alpha]}$, pues si tuviera una anticadena no numerable$^{M[G_\alpha]}$ ésta sería también no numerable$^{M[G]}$, porque los cardinales son los mismos. Por construcción tenemos que $\nu_\alpha = \nu_\gamma^\beta = \nu$ y

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash ((\check{\nu}_\alpha, \leq_\alpha, \check{\varnothing}) \text{ es un c.p.o. con la c.c.n.} \land$$

$$((\check{\nu}_\alpha, i_{\beta\alpha}(\leq_\gamma^\beta), \check{\varnothing}) \text{ es un c.p.o. con la c.c.n.} \rightarrow \leq_\alpha = i_{\beta\alpha}(\leq_\gamma^\beta))),$$

luego

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash ((\check{\nu}, \sigma, \check{\varnothing}) \text{ es un c.p.o. con la c.c.n.} \rightarrow \leq_\alpha = \sigma).$$

Por consiguiente $\leq_{\alpha G_\alpha} = \sigma_{G_\alpha} = R$. Según el teorema 7.24, tenemos que $M[G_{\alpha+1}] = M[G_\alpha][H]$, donde H es un filtro $(\nu, R, \varnothing)$-genérico sobre $M[G_\alpha]$, con lo que en particular corta a todos los conjuntos densos de la familia $\mathcal{D}$. Esto demuestra AM$(\nu)^{M[G]}$. ■

Con esto queda probado que el axioma de Martin es consistente con cualquier determinación consistente de la función del continuo que satisfaga además que $\mathfrak{c}$ es un cardinal regular y $\bigwedge \kappa < \mathfrak{c}\ 2^\kappa = \mathfrak{c}$. Estas restricciones son necesarias, pues pueden probarse a partir de AM, como ya hemos señalado en el transcurso de la prueba.

7.4 Huecos en ${}^\omega\omega$ o en $\mathcal{P}\omega$

La completitud de $\mathbb{R}$ puede expresarse diciendo que $\mathbb{R}$ no tiene "huecos", en el sentido de que dadas dos sucesiones $\{a_n\}_{n\in\omega}$ y $\{b_n\}_{n\in\omega}$ de números reales tales que $a_n \leq a_n+1 \leq b_{n+1} \leq b_n$ para todo n, siempre existe un $r \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq r \leq b_n$ para todo n.

Sucede (lo veremos enseguida) que esto mismo es cierto en ${}^\omega\omega$ o en $\mathcal{P}\omega$ respecto a la relación $\leq^*$ o $\subset^*$, respectivamente, lo que podría llevarnos a pensar que estos conjuntos ordenados también son "completos" en un sentido análogo en el que $\mathbb{R}$ lo es. Sin embargo, esta conclusión sería más aparente que real, pues se viene abajo si consideramos sucesiones "más largas":

Definición 7.36 Una *sección* en ${}^\omega\omega$ de tipo (κ,μ) es un par de sucesiones $(\{f_\alpha\}_{\alpha<\kappa},\{g_\beta\}_{\beta<\mu})$ de modo que si $\alpha<\alpha'<\kappa$ y $\beta<\beta'<\mu$, entonces

$$f_\alpha <^* f_{\alpha'} \leq^* g_{\beta'} <^* g_\beta.$$

Un *hueco* de tipo (κ,λ) en ${}^\omega\omega$ es una sección tal que no existe ninguna función $h\in{}^\omega\omega$ tal que, la *separe,* es decir, que para cada $\alpha<\kappa$ y cada $\beta<\mu$, se cumpla $f_\alpha \leq^* h \leq^* g_\beta$.

Análogamente se definen las secciones y los huecos en $\mathcal{P}\omega$, considerando la relación $\subset^*$ en lugar de $\leq^*$. Más en general, podemos definir estos conceptos en $\mathcal{P}A$, para cualquier conjunto A.

Vamos a demostrar que existen huecos, pero antes conviene hacer algunas observaciones generales. Es evidente que no existen huecos con κ o μ finitos, pues si, por ejemplo, una sección cumple que $\kappa=n+1$ es finito, entonces $h=f_n$ prueba que la sección no es un hueco. Por el mismo motivo κ y μ tienen que ser ordinales límite.

Más aún, si $(\{f_\alpha\}_{\alpha<\kappa},\{g_\beta\}_{\beta<\mu})$ es un hueco y $\{\alpha_\delta\}_{\delta<\operatorname{cf}\kappa}$, $\{\beta_\epsilon\}_{\epsilon<\operatorname{cf}\mu}$ son sucesiones cofinales crecientes en κ y μ, respectivamente, es evidente que el par $(\{f_{\alpha_\delta}\}_{\delta<\operatorname{cf}\kappa},\{g_{\beta_\epsilon}\}_{\epsilon<\operatorname{cf}\mu})$ es también un hueco (esencialmente "el mismo"), por lo que no perdemos generalidad si consideramos únicamente posibles huecos de tipo (κ,μ) con κ y μ cardinales regulares, que necesariamente no podrán ser mayores que $\mathfrak{c}$. Lo mismo vale para huecos en $\mathcal{P}\omega$.

Otro hecho básico es que si existe un hueco de tipo (κ,μ), también existe otro de tipo (μ,κ). Esto es especialmente evidente en $\mathcal{P}\omega$, donde basta pasar de $(\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa},\{B_\beta\}_{\beta<\mu})$ a $(\{\omega\setminus B_\beta\}_{\beta<\mu},\{\omega\setminus A_\beta\}_{\alpha<\kappa})$.

En ${}^\omega\omega$ hay que hacer un pequeño "truco" y pasar de $(\{f_\alpha\}_{\alpha<\kappa},\{g_\beta\}_{\beta<\mu})$ a $(\{g_0-g_\beta\}_{\beta<\mu},\{g_0-f_\alpha\}_{\alpha<\kappa})$, donde, para $h\leq^* g_0$, definimos

$$(g_0-h)(n)=\begin{cases} g_0(n)-h(n) & \text{si } h(n)\leq g_0(n),\\ 0 & \text{en caso contario.}\end{cases}$$

Los resultados sobre existencia o no existencia de huecos de un determinado tipo valen indistintamente para ${}^\omega\omega$ o $\mathcal{P}\omega$. La razón es que podemos conectar como sigue ambos espacios:

Por una parte, tenemos la aplicación $\mathcal{P}\omega \longrightarrow {}^\omega\omega$ (inyectiva) que a cada conjunto A le hace corresponder su función característica χ_A. Es inmediato que

$$A \subset B \leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B, \qquad A \subset^* B \leftrightarrow \chi_A \leq^* \chi_B.$$

Si $(\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}, \{B_\beta\}_{\beta<\mu})$ es un hueco en $\mathcal{P}\omega$, es fácil comprobar que el par $(\{\chi_{A_\alpha}\}_{\alpha<\kappa}, \{\chi_{B_\beta}\}_{\beta<\mu})$ es un hueco (del mismo tipo) en ${}^\omega\omega$. En efecto, si existiera una función h "en el hueco", como $\chi_{A_0} \leq^* h \leq^* \chi_{B_0}$, h sólo tomaría los valores 0, 1 salvo a lo sumo en un número finito de casos, y podemos modificarla en esos casos sin que deje de estar "en el hueco". Entonces $h = \chi_A$, para cierto $A \subset \omega$ que, ciertamente, estaría "en el hueco" dado.

Por otra parte consideramos la aplicación $I : {}^\omega\omega \longrightarrow \mathcal{P}(\omega\times\omega)$ dada por $I_f = \{(m,n) \in \omega\times\omega \mid n \leq f(m)\}$. Es inmediato que I es inyectiva, y además

$$f \leq g \leftrightarrow I_f \subset I_g, \qquad f \leq^* g \leftrightarrow I_f \subset^* I_g.$$

Fijada cualquier biyección $h : \omega\times\omega \longrightarrow \omega$, podemos llamar $I'_f = h[I_f]$, y entonces tenemos una aplicación inyectiva $I' : {}^\omega\omega \longrightarrow \mathcal{P}\omega$ que sigue cumpliendo

$$f \leq g \leftrightarrow I'_f \subset I'_g, \qquad f \leq^* g \leftrightarrow I'_f \subset^* I'_g.$$

Esta aplicación nos permite transformar huecos en ${}^\omega\omega$ en huecos en $\mathcal{P}\omega$ del mismo tipo.

Al principio de la sección hemos afirmado lo que en términos de huecos se expresa diciendo que no existen huecos de tipo $(\aleph_0, \aleph_0)$. Esto es consecuencia del teorema siguiente, que de paso prueba también que existen huecos:

Teorema 7.37 *$\mathfrak{b}$ es el menor cardinal κ tal que existe un hueco de tipo (κ, ω).*

DEMOSTRACIÓN: Veamos en primer lugar que existe un hueco de tipo $(\mathfrak{b}, \omega)$ en $\mathcal{P}\omega$. Por comodidad construiremos uno en $\mathcal{P}(\omega\times\omega)$, pero es claro que se puede transportar trivialmente a $\mathcal{P}\omega$ a través de una biyección $\omega\times\omega \longrightarrow \omega$.

Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha<\mathfrak{b}}$ una sucesión creciente y no acotada en ${}^\omega\omega$, y consideremos la sucesión creciente en $\mathcal{P}(\omega\times\omega)$ dada por $E_n = \{(i,j) \in \omega\times\omega \mid i \leq n\}$. Sea $F_n = (\omega\times\omega) \setminus E_n$.

Es claro que $(\{I_{f_\alpha}\}_{\alpha<\mathfrak{b}}, \{F_n\}_{n\in\omega})$ es una sección en $\mathcal{P}(\omega\times\omega)$. Supongamos que no es un hueco, de modo que existe un conjunto $C \subset \omega\times\omega$ tal que $I_{f_\alpha} \subset^* C$ para todo $\alpha < \mathfrak{b}$ y $C \subset^* F_n$. Entonces $C \cap E_n$ es finito para todo n y podemos definir

$$g(n) = \text{máx}\{j \in \omega \mid (n,j) \in C \cap E_n\},$$

entendiendo que $g(n) = 0$ si el conjunto es vacío. Existe un $\alpha < \mathfrak{b}$ tal que $\neg f_\alpha \leq^* g$, pues hemos tomado una sucesión no acotada. Pero esto implica que $\neg I_{f_\alpha} \subset^* C$, y tenemos una contradicción.

Consideremos ahora una sección $(\{A_n\}_{n<\omega}, \{B_\alpha\}_{\alpha<\kappa})$ en $\mathcal{P}\omega$ con $\kappa < \mathfrak{b}$. Definimos $f_\alpha : \omega \longrightarrow \omega$ mediante $f_\alpha(n) = 1 + \text{máx}(A_n \setminus B_\alpha)$, entendiendo que el máximo de $\varnothing$ es 0.

Como la familia $\{f_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ no puede ser no acotada, existe un $g \in {}^{\omega}\omega$ tal que $f_\alpha \leq^* g$ para todo $\alpha < \kappa$. Sea $C = \bigcup\limits_{n\in\omega} (A_n \setminus g(n))$. Claramente $A_n \subset^* C$, para todo n. Además, si $\alpha < \kappa$, tenemos que

$$f_\alpha(n) = 1 + \max(A_n \setminus B_\alpha) \leq g(n)$$

para casi todo n, luego $A_n \setminus g(n) \subset B_\alpha$ para casi todo n, y las excepciones cumplen igualmente que $A_n \setminus g(n) \subset A_n \subset^* B_\alpha$, luego $C \subset^* B_\alpha$. Esto prueba que C separa la sección dada y ésta no es un hueco. ■

Podría pensarse que el mínimo cardinal tal que existe un hueco de tipo $(\kappa, \aleph_1)$ es otro cardinal característico del continuo que puede tomar valores diferentes, como sucede con $\mathfrak{b}$, pero no es así:

Teorema 7.38 (Hausdorff) *Existen huecos de tipo* $(\aleph_1, \aleph_1)$.

Demostración: Si A, $B \subset \omega$ cumplen que $A \cap B$ es finito, podemos definir

$$p(A, B) = \min\{k \in \omega \mid (A \setminus k) \cap B = \varnothing\}.$$

Así, si $A \cap B = \varnothing$ se cumple que $p(A, B) = 0$, y si $\max(A \cap B) = k$ entonces $p(A, B) = k + 1$. Convenimos en que $p(A, B) = \infty$ si $A \cap B$ es infinito.

Si $A \subset \omega$ y F es una familia de subconjuntos de ω, escribiremos $A \approx F$ para indicar que, para todo $k \in \omega$, el conjunto

$$\{B \in F \mid p(A, B) < k\}$$

es finito. Observemos que si $A \approx F$ y $A \subset^* A'$, entonces $A' \approx F$.

En efecto, sea $n \in \omega$ tal que $A \setminus n \subset A'$. Para cada $B \in F$, se cumple que $p(A, B) \leq p(A', B)$, salvo a lo sumo si $p(A, B) < n + 1$, pues esto equivale a que $\max(A \cap B) \leq n$ y en caso contrario $\max(A \cap B) \in A'$, luego se cumple que $\max(A \cap B) \leq \max(A' \cap B)$. Ahora bien, sabemos que

$$F_0 = \{B \in F \mid p(A, B) < n + 1\}$$

es finito, luego

$$\{B \in F \mid p(A', B) < k\} \subset \{B \in F \mid p(A, B) < k\} \cup F_0$$

es finito, luego $A' \approx F$.

Vamos a definir inductivamente dos sucesiones $\{A_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ y $\{B_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$, estrictamente crecientes respecto de $\subset^*$, tales que $A_\alpha \cap B_\alpha = \varnothing$ y de modo que

$$(*) \qquad A_\alpha \approx \{B_\delta \mid \delta < \alpha\}.$$

Admitamos de momento que tenemos estas sucesiones. Entonces es claro que

$$(\{A_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}, \{\omega \setminus B_\alpha\}_{\alpha<\omega_1})$$

es una sección en $\mathcal{P}\omega$. Vamos a ver que es un hueco. Para ello suponemos que un conjunto C lo separa, de modo que $A_\alpha \subset^* C$ y $C \cap B_\alpha$ es finito para todo $\alpha < \omega_1$.

Entonces $C \approx \{B_\delta \mid \delta < \alpha\}$ para todo α. Por otra parte, la función dada por $f(\alpha) = p(C, B_\alpha)$ sólo toma valores finitos, luego debe tomar un mismo valor k sobre un conjunto no numerable de ordinales $Z \subset \omega_1$. Tomemos $\alpha < \omega_1$ suficientemente grande como para que $Z \cap \alpha$ sea infinito. Entonces

$$C \not\approx \{B_\delta \mid \delta < \alpha\},$$

pues k no cumple la definición de $\approx$, contradicción.

Pasamos a construir el par de sucesiones. Partimos de dos conjuntos disjuntos infinitos A_0 y B_0 tales que $\omega \setminus (A_0 \cup B_0)$ sea infinito. Supongamos construidas $\{A_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ y $\{B_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ que cumplan lo requerido y además $\omega \setminus (A_\alpha \cup B_\alpha)$ sea infinito, para todo $\alpha < \beta$. Si $\beta = \gamma + 1$, precisamente porque $\omega \setminus (A_\gamma \cup B_\gamma)$ es infinito, podemos tomar conjuntos disjuntos A_β y B_β que contengan estrictamente a A_γ y B_γ respectivamente y $\omega \setminus (A_\beta \cup B_\beta)$ siga siendo infinito. Entonces la propiedad $(*)$ se cumple también para β, pues sigue siendo cierto que

$$A_\gamma \approx \{B_\delta \mid \delta < \beta\}$$

(ya que sólo hemos añadido un conjunto a la familia) y $A_\gamma \subset A_\beta$, luego también $A_\beta \approx \{B_\delta \mid \delta < \beta\}$.

Supongamos ahora que tenemos $\{A_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ y $\{B_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$, siempre con la condición adicional de que la sucesión decreciente $\{\omega \setminus (A_\alpha \cup B_\alpha)\}_{\alpha<\lambda}$ esté formada por conjuntos infinitos. Como es numerable, no puede ser una torre, luego existe un $H \subset \omega$ infinito tal que $H \subset^* \omega \setminus (A_\alpha \cup B_\alpha)$ para todo $\alpha < \lambda$. Sea $E = \omega \setminus H$. Entonces $\omega \setminus E = H$ es infinito y A_α, $B_\alpha \subset^* E$ para todo $\alpha < \lambda$.

Por otra parte, $(\{A_\alpha\}_{\alpha<\lambda}, \{\omega \setminus B_\alpha\}_{\alpha<\lambda})$ es una sección en $\mathcal{P}\omega$, y hemos visto que si fuera un hueco, entonces habría un hueco de tipo $(\aleph_0, \aleph_0)$, pero también hemos visto que no los hay, luego existe un $C \subset \omega$ que la separa. Esto significa que $A_\alpha \subset^* C$ y $C \cap B_\alpha$ es finito. Cambiando C por $C \cap E$ podemos suponer que $C \subset E$.

Como $(*)$ se cumple para todo $\alpha < \lambda$, también tenemos que

$$C \approx \{B_\delta \mid \delta < \alpha\}.$$

No obstante, esto no implica necesariamente que $C \approx \{B_\delta \mid \delta < \lambda\}$. Consideremos los conjuntos

$$W_k = \{\delta < \lambda \mid p(C, B_\delta) < k\}.$$

Vamos a definir una sucesión $C = C_0 \subset C_1 \subset \cdots$ de modo que $C_n \subset E$, $C_n \cap B_\alpha$ sea finito, para todo $n \in \omega$ y todo $\alpha < \lambda$ y

$$C_{n+1} \approx \{B_\delta \mid \delta \in W_n\}.$$

Supuesto definido C_n, si W_n es finito tomamos $C_{n+1} = C_n$. Si es infinito, sabemos que $W_n \cap \alpha$ es finito para todo $\alpha < \lambda$, luego W_n es cofinal en λ y su ordinal es ω. Digamos que $W_n = \{\delta_i \mid i < \omega\}$, donde la sucesión $\{\delta_i\}$ es cofinal creciente en λ.

Los conjuntos
$$Z_i = B_{\delta_i} \setminus (B_{\delta_0} \cup \cdots \cup B_{\delta_{i-1}})$$
cumplen que $Z_i \cap E$ es infinito (porque suponemos que los B_α forman una sucesión estrictamente creciente, es decir, que cada uno contiene infinitos elementos más que los anteriores). Esto nos permite construir una sucesión $\{j_n\}_{n\in\omega}$ tal que $\bigwedge i \in \omega\ (i < j_i \wedge j_i \in Z_i \cap E)$. Llamamos $D = \{j_i \mid n \in \omega\}$ y definimos $C_{n+1} = C_n \cup D \subset E$.

Obviamente $D \cap B_{\delta_i}$ es finito para todo i, luego $D \cap B_\alpha$ es finito para todo $\alpha < \lambda$, luego lo mismo vale para $C_{n+1} \cap B_\alpha$. También es obvio que
$$D \approx \{B_{\delta_i} \mid i < \omega\} = \{B_\delta \mid \delta \in W_n\},$$
pues $p(D \cap B_{\delta_i}) = j_i + 1$. Por lo tanto $C_{n+1} \approx \{B_\delta \mid \delta \in W_n\}$. Esto termina la construcción de los C_n.

Como $(\{C_n\}_{n\in\omega}, \{\omega \setminus B_\alpha\}_{\alpha<\lambda})$ no puede ser un hueco, existe un $A \subset \omega$ tal que $C_n \subset^* A$ para todo n y $A \cap B_\alpha$ es finito para todo $\alpha < \lambda$. Cambiando A por $A \cap E$ podemos suponer que $A \subset E$. Más aún, añadiendo a A un número finito de elementos podemos suponer que $C = C_0 \subset A$. Veamos que
$$A \approx \{B_\alpha \mid \alpha < \lambda\}.$$

En efecto, supongamos que existe un k tal que el conjunto
$$W = \{\alpha < \lambda \mid p(A, B_\alpha) < k\}$$
es infinito. Como $C \subset A$, tenemos que $W \subset W_k$, luego también es infinito el conjunto $\{\alpha \in W_k \mid p(A, B_\alpha) < k\}$, pero entonces $A \not\approx \{B_\alpha \mid \alpha \in W_k\}$, pero esto es imposible, porque
$$C_{k+1} \approx \{B_\alpha \mid \alpha \in W_k\} \wedge C_{k+1} \subset^* A.$$

Por consiguiente, podemos definir $A_\lambda = A$ y $B_\lambda = E \setminus A$, con lo que se cumple $(*)$, $A_\lambda \cap B_\lambda = \varnothing$, y $\omega \setminus (A_\lambda \cup B_\lambda) = \omega \setminus E$ es infinito. ■

Aquí termina todo lo que puede probarse en ZFC sobre existencia de huecos. En realidad se pueden probar resultados como el siguiente, que, no obstante, no aseguran en general la existencia de ningún tipo que hueco que no hayamos considerado ya:

Teorema 7.39 *Si $\kappa < \mathfrak{b}$ es un cardinal regular no numerable, entonces existe otro cardinal regular no numerable μ tal que hay un hueco de tipo (κ, μ).*

DEMOSTRACIÓN: Vamos a construir recurrentemente una sucesión $\{f_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ en ${}^\omega\omega$. Elegimos f_0 que sea estrictamente creciente y, dada $\{f_\alpha\}_{\alpha<\beta}$, como la sucesión no puede ser no acotada, elegimos $f \in {}^\omega\omega$ tal que $f_\alpha \leq^* f$ para todo α y definimos
$$f_\beta(n) = \max\{f(m) \mid m \leq n\} + 1.$$

Así f_β es estrictamente creciente y para cada α existe un n tal que

$$f_\alpha|_{\omega\setminus n} < f_{\alpha+1}|_{\omega\setminus n}$$

Ahora construimos $\{g_\beta\}_{\beta<\mathfrak{c}^+}$. Partimos de una función g_0 tal que $f_\alpha \leq^* g_0$ para todo α, que existe porque $\kappa < \mathfrak{b}$. Si tenemos definidas $\{g_\beta\}_{\beta<\gamma}$, elegimos g_γ de modo que $f_\alpha \leq^* g_\gamma \leq^* g_\beta \wedge g_\gamma \neq^* g_\beta$ para todo $\alpha < \kappa$ y todo $\beta < \gamma$ si existe tal g_γ, y $g_\beta = 0$ en caso contrario.

Obviamente tiene que haber un β tal que $g_\beta = 0$, pues no hay $\mathfrak{c}^+$ funciones en ${}^\omega\omega$. Sea $\lambda = \sup\{\beta < \mathfrak{c}^+ \mid g_\beta \neq 0\}$. Vamos a probar que λ es un ordinal límite, con lo que $(\{f_\alpha\}_{\alpha<\kappa}, \{g_\beta\}_{\beta<\lambda})$ será un agujero en ${}^\omega\omega$.

Dado β tal que $g_\beta \neq 0$, sea $g(n) = g_\beta(n) - 1$ (entendiendo que $0 - 1 = 0$). De hecho, como $f_0 \leq^* g_\beta$ y f_0 es estrictamente creciente, a lo sumo toma una vez el valor 0, luego g_β toma el valor 0 un número finito de veces, luego $g \leq^* g_\beta$ y $g \neq^* g_\beta$. Dado $\alpha < \kappa$, sea n tal que $f_\alpha|_{\omega\setminus n} < f_{\alpha+1}|_{\omega\setminus n}$. Entonces

$$f_\alpha \leq^* f_{\alpha+1} - 1 \leq^* g_\beta - 1 = g$$

Por lo tanto g cumple los requisitos para que se cumpla $g_{\beta+1} \neq 0$. Esto implica claramente que λ es un ordinal límite. Sea $\mu = \operatorname{cf}\lambda$ y sea $\{\beta_\delta\}_{\delta<\mu}$ una sucesión cofinal creciente en λ. Entonces $(\{f_\alpha\}_{\alpha<\kappa}, \{g_{\beta_\delta}\}_{\delta<\mu})$ es un hueco, donde μ es un cardinal regular que, por 7.37 no puede ser numerable. ■

Ahora vamos a probar que es consistente que existan huecos de cualquier tipo salvo $(\aleph_0, \aleph_0)$. Construiremos los modelos correspondientes a partir de una versión simplificada del teorema de Hechler:

Teorema 7.40 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC *y sea $X \in M$ un conjunto parcialmente ordenado. Entonces existe un c.p.o. $\mathbb{P} \in M$ que cumple la c.c.n. y $|\mathbb{P}| = |X|$, tal que si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces en $M[G]$ existe una semejanza de X en un subconjunto de $\mathcal{P}\omega/\mathrm{fin}$.*

Demostración: Razonando en M, definimos $\mathbb{P}$ como el conjunto de todas las funciones $p : d \times l \longrightarrow 2$, donde $d \subset X$ es finito y $l \in \omega$. Dada una condición $p \in \mathbb{P}$, representaremos su dominio por $d_p \times l_p$. Consideramos en $\mathbb{P}$ el orden dado por

$$p \leq q \leftrightarrow q \subset p \wedge \bigwedge i \in \omega \bigwedge xy \in d_p(l_q \leq i < l_p \wedge x \leq y \rightarrow p(x,i) \leq p(y,i)).$$

Obviamente $\mathbb{1} = \varnothing$ es el máximo en $\mathbb{P}$.

Veamos que $\mathbb{P}$ cumple la c.c.n. Sea $E \subset \mathbb{P}$ no numerable. Tomando un subconjunto podemos suponer que $\{l_p\}_{p\in E}$ es constante igual a $l \in \omega$. Por el lema de los sistemas Δ podemos reducir E aún más para exigir que $\{d_p\}_{p\in E}$ sea constante o cuasidisjunta de raíz $r \subset X$. Más aún, podemos suponer que las restricciones de las condiciones de E a $r \times l$ sean todas iguales, pero entonces dos condiciones cualesquiera de E son compatibles, pues se extienden a su unión.

Fijemos ahora un filtro genérico G, de modo que la extensión $M[G]$ tiene los mismos cardinales y cofinalidades que M. Para cada $x \in X$ definimos

$$A_x = \{i \in \omega \mid \bigvee p \in G\ p(x,i) = 1\}.$$

Así la aplicación $F : X \longrightarrow (\mathcal{P}\omega/\mathrm{fin})^{M[G]}$ dada por $F(x) = [A_x]$ cumple obviamente $F \in M[G]$. Vamos a probar que es una semejanza en su imagen.

En primer lugar, los conjuntos A_x son todos infinitos, pues los conjuntos

$$D_x^n = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee i \in \omega(n \leq i \wedge p(x,i) = 1)\} \in M$$

son densos en $\mathbb{P}$. En efecto, si $q \in \mathbb{P}$, llamamos $i = \max\{l_q, n\}$ y definimos p sobre $d_p \times (i+1)$ mediante

$$p(y,j) = \begin{cases} q(y,j) & \text{si } (y,j) \in d_q \times l_q, \\ \quad 1 & \text{si } j = i \wedge x \leq y, \\ \quad 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es claro que $p \in D_x^n$ y $p \leq q$, luego D_x^n es denso.

También es denso el conjunto $E_{x,y} = \{p \in \mathbb{P} \mid x, y \in d_p\}$. En efecto, dada $q \in \mathbb{P}$, basta definir p sobre $(d_q \cup \{x,y\}) \times l_q$ asignando valores cualesquiera a los pares que no estaban en el dominio de q.

Ahora, si $x < y$ y tomamos $q \in D_{x,y} \cap G$, se cumple que $A_x \setminus l_q \subset A_y$, pues si $i \in A_x$ cumple $i \geq l_q$, entonces $p(x,i) = 1$ para cierto $p \in G$, que podemos tomar $p \leq q$, Por lo tanto $p(y,i) = 1$, luego $i \in A_y$.

Esto prueba que si $x < y$ entonces $F(x) \leq F(y)$, pero queremos probar que $F(x) < F(y)$. Para ello basta observar que, para $x < y$, los conjuntos siguientes son densos:

$$F_{x,y}^n = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee i \in \omega(n \leq i \wedge p(x,i) = 0 \wedge p(y,1) = 1)\}.$$

Dado $q \in \mathbb{P}$, basta tomar $i = \max\{l_q, n\}$ y definir p sobre $d_q \times (i+1)$ mediante

$$p(z,j) = \begin{cases} q(z,j) & \text{si } (z,j) \in d_q \times l_q, \\ \quad 1 & \text{si } j = i \wedge y \leq z, \\ \quad 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La densidad de estos conjuntos se traduce en que $A_y \setminus A_x$ es infinito, luego ciertamente $F(x) < F(y)$. Como el orden de X no es necesariamente total, para asegurar que F es una semejanza en su imagen hace falta probar que si x e y son incomparables entonces $F(x)$ y $F(y)$ también lo son.

Para ello basta probar la densidad de los conjuntos siguientes:

$$H_n = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee i \in \omega(n \leq i \wedge p(x,i) = 0 \wedge p(y,i) = 1)\}.$$

Esto implica que $A_y \setminus A_x$ es infinito, pero por simetría también $A_x \setminus A_y$ es infinito y concluimos que $F(x)$ y $F(y)$ no son comparables. Para probar que en efecto son densos, tomamos $q \in \mathbb{P}$. Podemos suponer que x, $y \in d_q$, pues ya hemos visto que podemos extender q hasta una condición que cumpla esto. Llamamos $i = \max\{l_q, n\}$ y definimos p sobre $d_q \times (i+1)$ mediante

$$p(z,j) = \begin{cases} q(z,j) & \text{si } (z,j) \in d_q \times l_q, \\ 1 & \text{si } j = i \wedge y \leq z, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

claramente $p \leq q$ y esto termina la prueba. ■

Con esto ya podemos probar un teorema general sobre modelos con huecos:

Teorema 7.41 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC *y en M consideremos dos cardinales κ, $\mu \leq \mathfrak{c}$ y* $\operatorname{cf}\kappa > \aleph_0$*. Entonces existe una extensión genérica de M con los mismos cardinales, cofinalidades y el mismo valor de $\mathfrak{c}$ en la cual hay un hueco de tipo (κ, μ).*

Demostración: Consideramos en M el conjunto $X = \kappa + \mu$ (suma ordinal) con el orden que restringido a κ es el orden usual en κ y que restringido a $X \setminus \kappa$ es el inverso del usual, es decir:

$$0 < 1 < 2 < \cdots < \kappa + 2 < \kappa + 1 < \kappa.$$

Sea $\mathbb{P}$ el c.p.o. dado por el teorema anterior, que cumple la c.c.n. y tiene cardinal $\kappa\mu$. Sea G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces los cardinales y cofinalidades en $M[G]$ son iguales que en M y, como en M se cumple que $\kappa^{\aleph_0} = \mu^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, es fácil comprobar que $\mathfrak{c}^{M[G]} = \mathfrak{c}^M$.

Además en $M[G]$ existe una semejanza entre X y un subconjunto de $\mathcal{P}\omega$, lo que nos da una sección $(\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}, \{B_\beta\}_{\beta<\mu})$ de tipo (κ, μ). Vamos a ver que es un agujero.

En caso contrario existe un $C \subset \omega$ que la separa, que será de la forma $C = \sigma_G$, donde σ es un buen nombre para un subconjunto de $\check{\omega}$. Como las anticadenas de $\mathbb{P}$ son numerables y $\operatorname{cf}\kappa > \aleph_0$, existe un $\gamma < \mu$ tal que $\sigma \in M^{\mathbb{P}_\gamma}$, donde, con la notación de la prueba del teorema anterior,

$$\mathbb{P}_\gamma = \{p \in \mathbb{P} \mid d(p) \cap \kappa \subset \gamma\}.$$

Es inmediato comprobar que la inclusión $i : \mathbb{P}_\gamma \longrightarrow \mathbb{P}$ es una inmersión completa, pues una reducción de una condición $p \in \mathbb{P}$ a $\mathbb{P}_\gamma$ es simplemente $p|_\gamma = \{(\alpha, i) \in p \mid \alpha < \gamma \vee \kappa \leq \alpha\}$. Más aún, la aplicación $R : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}_\gamma$ dada por $R(p) = p|_\gamma$ es una restricción en el sentido de 7.17.

Por lo tanto, según 7.20, tenemos que $G_\gamma = i^{-1}[G]$ es un filtro $\mathbb{P}_\gamma$-genérico sobre M y $M[G] = M[G_\gamma][G]$, donde en el miembro derecho consideramos a G como filtro $\mathbb{P}/G_\gamma$-genérico sobre $M[G_\gamma]$. La elección de γ hace que $C \in M[G_\gamma]$.

Ahora basta probar que los conjuntos siguientes son densos en $\mathbb{P}/G_\gamma$:

$$E_n = \{p \in \mathbb{P}/G_\gamma \mid \bigvee i \in \omega \setminus C\, (n \leq i \wedge p(\gamma, i) = 1)\} \in M[G_\gamma],$$

pues entonces $A_\gamma \setminus C$ es infinito y tenemos una contradicción.

Dada una condición $q \in \mathbb{P}/G_\gamma$, podemos tomar un $i \in \omega \setminus C$ tal que $i \geq n$, $i \geq l_q$, pues $\omega \setminus C$ es infinito, y podemos extender q a otra condición p cuyo dominio sea $(d_q \cup \{\gamma\}) \times (i+1)$, mediante

$$p(\alpha, j) = \begin{cases} q(\alpha, j) & \text{si } \alpha \in d_q \wedge j < l_q, \\ 1 & \text{si } \alpha < \gamma \wedge j \in A_\alpha, \\ 1 & \text{si } \alpha \geq \kappa \wedge j \in B_\alpha, \\ 1 & \text{si } \gamma \leq \alpha < \kappa \wedge j \geq l_q, \\ 1 & \text{si } \alpha = \gamma \notin d_q, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Los tres primeros casos (y el último) garantizan que $p|_\gamma \in G$. Por lo tanto, $p \in \mathbb{P}/G_\gamma$, y claramente $p \leq q$ y $p \in E_n$. ■

Nota Una versión simplificada del teorema anterior prueba que es consistente que haya torres de distintas longitudes (de cofinalidad no numerable). Sólo hay que tomar un X formado únicamente por una sucesión, en lugar de un par de sucesiones opuestas. ■

Con lo visto hasta ahora queda abierta la posibilidad de que la existencia de huecos de ciertos tipos no sólo sea consistente con ZFC, sino que sea demostrable, como sucede con los de tipo $(\aleph_1, \aleph_1)$. El axioma de Martin implica que en casi todos los casos la respuesta es negativa:

Teorema 7.42 (AM+$\mathfrak{c} > \aleph_1$) *Si existe un hueco de tipo (κ, μ), donde κ y μ son cardinales regulares no numerables, entonces $\kappa = \mu = \aleph_1$ o bien $\kappa = \mathfrak{c}$ o bien $\mu = \mathfrak{c}$.*

Demostración: Consideremos una sección $(\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}, \{B_\beta\}_{\beta<\mu})$ en $\mathcal{P}\omega$ en las condiciones del enunciado, y vamos a ver que no es un hueco salvo a lo sumo en los casos indicados. Para ello definimos un c.p.o. $\mathbb{P}$ cuyos elementos son ternas $p = (u_p, x_p, w_p)$ de modo que $u_p \subset \kappa$, $w_p \subset \mu$ son conjuntos finitos y $x_p \in 2^{<\omega}$ es una sucesión de dominio $l_p \in \omega$, de modo que

$$\bigcup_{\alpha \in u_p} A_\alpha \cap \bigcup_{\beta \in w_p} (\omega \setminus B_\beta) \subset l_p.$$

Consideramos en $\mathbb{P}$ el orden dado por $q \leq p$ si y sólo si $u_p \subset u_q$, $w_p \subset w_q$, $x_p \subset x_q$ y para todo $i \in \omega$ tal que $l_p \leq i < l_q$, se cumple

$$i \in \bigcup_{\alpha \in u_p} A_\alpha \to x_q(i) = 1, \qquad i \in \bigcup_{\beta \in w_p} (\omega \setminus B_\beta) \to x_q(i) = 0.$$

Notemos que no pueden darse los dos casos, ya que entonces $i \in l_p$.

Veamos que si existe un conjunto C que separa la sección, entonces, $\mathbb{P}$ cumple la c.c.n. Tenemos que para cada $q \in \mathbb{P}$ existe un $k_q \in \omega$ tal que

$$\bigcup_{\alpha \in u_q} A_\alpha \setminus k_q \subset C \setminus k_q \subset \bigcap_{\beta \in w_q} B_\beta.$$

El conjunto $\mathbb{P}^* = \{q \in \mathbb{P} \mid k_q \leq l_q\}$ es denso en $\mathbb{P}$, pues la sucesión x_q siempre se puede extender arbitrariamente sin tocar las otras dos componentes de q. Basta probar que $\mathbb{P}^*$ cumple la c.c.n. Ahora bien, si $E \subset \mathbb{P}^*$ es no numerable, tiene que haber una cantidad no numerable de condiciones $p \in E$ para las que k_q sea el mismo y, de entre ellas, tiene que haber a su vez una cantidad no numerable para las que x_q sea el mismo.

Ahora basta observar que si p, $q \in \mathbb{P}^*$ cumplen $x_p = x_q = x$ y $k_p = k_q = k$, entonces son compatibles, pues una extensión común es $(u_p \cup u_q, x, w_p \cup w_q)$. En efecto, sólo hay que tener en cuenta que si

$$i \in \bigcup_{\alpha \in u_p \cup u_q} A_\alpha \cap \bigcup_{\beta \in w_p \cup w_q} (\omega \setminus B_\beta),$$

entonces $i \in A_\alpha$, para cierto $\alpha \in u_p \cup u_q$, pero entonces tiene que ser $i < k$, pues en caso contrario $i \in A_\alpha \setminus k \subset C \setminus k \subset \bigcap_{\beta \in w_p \cup w_q} B_\beta$, y tenemos una contradicción. Luego $i < k < l$.

Notemos que el razonamiento anterior vale para secciones cualesquiera, aunque sus longitudes no sean cardinales ni cumplan las hipótesis del enunciado.

Ahora probamos que si $\kappa > \aleph_1$, entonces $\mathbb{P}$ cumple la c.c.n. Para ello tomamos $E \subset \mathbb{P}$ tal que $|E| = \aleph_1$. Elegimos $\gamma < \kappa$ tal que $\bigcup_{q \in E} u_q \subset \gamma$ (suponemos que κ es regular, de acuerdo con el enunciado).

Sea $\mathbb{P}_\gamma$ el c.p.o. correspondiente a la sección $(\{A_\alpha\}_{\alpha<\gamma}, \{B_\beta\}_{\beta<\mu})$. Entonces $E \subset \mathbb{P}_\gamma$, pero $\mathbb{P}_\gamma$ cumple la c.c.n., por lo que acabamos de probar, ya que A_γ separa la sección. Esto implica que en E hay dos condiciones compatibles en $\mathbb{P}_\gamma$, que seguirán siéndolo en $\mathbb{P}$, luego $\mathbb{P}$ no tiene anticadenas no numerables. Un razonamiento similar se aplica si $\mu > \aleph_1$.

Por lo tanto podemos aplicar AM. Consideramos los conjuntos densos

$$D_i = \{p \in \mathbb{P} \mid i < l_p\},$$

$$E_{\alpha,\beta} = \{q \in \mathbb{P} \mid \alpha \in u_q \land \beta \in w_q\}.$$

Suponiendo que κ, $\mu < \mathfrak{c}$, el axioma de Martin nos da un filtro G que los corta a todos. Entonces el conjunto

$$C = \{i \in \omega \mid \bigvee p \in G\ (i \in l_p \land x_p(i) = 1)\}$$

separa la sección. En efecto, dados $\alpha < \kappa$ y $\beta < \mu$, usando $E_{\alpha,\beta}$ obtenemos una condición $q \in \mathbb{P}$ tal que $\alpha \in u_q$, $\beta \in w_q$. Si $i \in A_\alpha \setminus l_q$, usando D_n obtenemos una condición $p \in \mathbb{P}$, y podemos suponer $p \leq q$, tal que $i \in l_p$, con lo que $x_p(i) = 1$, por la definición del orden en $\mathbb{P}$, luego $i \in C$, y así $A_\alpha \subset^* C$.

Por otra parte, si $i \in C \setminus l_q$ entonces existe $p \in G$, y podemos suponer $p \leq q$, tal que $x_p(i) = 1$, luego $i \in \bigcap_{\beta \in w_q} B_\beta$, en particular $i \in B_\beta$, para el β prefijado. Por lo tanto $C \subset^* B_\beta$. ■

Teniendo en cuenta que AM implica $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, tenemos que bajo AM (salvo simetría) existen a lo sumo huecos de tipo $(\mathfrak{c}, \kappa)$ y $(\aleph_1, \aleph_1)$. (Notemos que no hace falta exigir $\mathfrak{c} > \aleph_1$ aunque forme parte de las hipótesis del teorema anterior, pues bajo HC el resultado es cierto trivialmente.) Por otro lado:

Teorema 7.43 (AM) *Si $\aleph_1 < \kappa < \mathfrak{c}$, existen huecos de tipo $(\mathfrak{c}, \kappa)$.*

DEMOSTRACIÓN: Es una consecuencia trivial del teorema anterior y de 7.39, pues, como $\kappa < \mathfrak{c} = \mathfrak{b}$, tiene que haber un hueco de tipo (κ, μ) y por el teorema anterior tiene que ser $\mu = \mathfrak{c}$. ■

En resumen, bajo AM sabemos que existen huecos de tipo $(\aleph_1, \aleph_1)$, de tipo $(\mathfrak{c}, \aleph_0)$ y de tipo $(\mathfrak{c}, \kappa)$ para todo $\aleph_1 < \kappa < \mathfrak{c}$, y que no existen de ningún otro tipo salvo a lo sumo de tipo $(\mathfrak{c}, \aleph_1)$ y $(\mathfrak{c}, \mathfrak{c})$.

El teorema siguiente implica que la existencia de huecos de estos dos tipos es consistente con AM:

Teorema 7.44 *En el modelo de* AM *construido en* 7.35, *todos los huecos de tipo (κ, μ), con $\mu \leq \kappa$, del modelo base siguen siendo huecos (de tipo $(\mathfrak{c}, \mu)$) en la extensión genérica.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $(\{A_\alpha\}_{\alpha<\kappa}, \{B_\beta\}_{\beta<\mu})$ un hueco en M. Claramente sigue siendo una sección en la extensión genérica $M[G]$. Tenemos que probar que no hay ningún conjunto $S \in M[G]$ que la separe. En caso contrario, sea $S = \sigma_G$, donde σ es un buen nombre para un subconjunto de ω. Como las anticadenas de $\mathbb{P}_\kappa$ son numerables, existe un $\gamma < \kappa$ tal que $\sigma \in M^{\mathbb{P}_\gamma}$, con lo que $S \in M[G_\gamma]$.

En $M[G_\gamma]$ podemos encontrar números naturales n_α tales que $A_\alpha \setminus n_\alpha \subset S$. Como κ no es numerable en $M[G_\gamma]$, existe un conjunto $X \subset \kappa$ en $M[G_\gamma]$ de cardinal κ, y un $n \in \omega$ de modo que $\bigwedge \alpha \in X\ n_\alpha = n$.

Sea $X = \tau_{G_\gamma}$ y, para cada $p \in \mathbb{P}_\gamma$, sea $X_p = \{\alpha \in \kappa \mid p \Vdash \check{\alpha} \in \tau\}$. Entonces, en $M[G_\gamma]$,

$$X = \bigcup_{p \in G_\gamma} X_p.$$

En realidad podemos considerar $G_\gamma \cap \bar{\mathbb{P}}_\gamma$, donde $\bar{\mathbb{P}}_\gamma$ es el conjunto denso construido en la prueba de 7.35, y así su cardinal es $< \kappa$, por lo que existe un $p \in G_\gamma$ tal que $|X_p| = \kappa$. Como $X_p \in M$, también $A = \bigcup\limits_{\alpha \in X_p} A_\alpha \in M$, y $A \setminus n \subset S$. Ahora bien, X_p es cofinal en κ, luego para todo $\alpha < \kappa$ existe $\alpha \leq \alpha' \in X_p$, luego $A_\alpha \subset^* A_{\alpha'} \subset A \subset^* S \subset^* X_\beta$, para todo $\beta < \mu$, luego A separa el hueco dado en M, contradicción. ■

Así pues, podemos construir una extensión genérica de L que cumpla, por ejemplo,

$$2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} = 2^{\aleph_2} = 2^{\aleph_3} = \aleph_4 = \kappa.$$

A su vez formamos una extensión genérica según el teorema 7.41 en la que igualmente $\mathfrak{c} = \aleph_4$ y además haya huecos de tipo $(\mathfrak{c}, \mathfrak{c})$, o $(\mathfrak{c}, \aleph_1)$, o de ambos a la vez, y por último el teorema anterior nos da un modelo con los mismos huecos y el mismo valor de $\mathfrak{c}$, en el que además se cumple AM.

No obstante, la existencia de huecos de estos dos tipos no es demostrable ni siquiera con AM. En la sección siguiente presentamos otro axioma que, entre otras cosas, implica que no existen.

7.5 El axioma de las coloraciones abiertas

Vamos a probar la consistencia de un axioma introducido por Stevo Todorčević en relación con ciertos problemas topológicos. Para presentarlo necesitamos algunos conceptos:

Definición 7.45 Si X es un conjunto, podemos considerar la diagonal

$$\Delta_X = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\},$$

y su complementario $D(X) = (X \times X) \setminus \Delta_X$. Un conjunto $S \subset D(X)$ es *simétrico* si y sólo si $S = \{(x, y) \mid (y, x) \in S\}$. Es claro que existe una biyección natural entre los subconjuntos de $[X]^2$ y los subconjuntos simétricos de $D(X)$. Concretamente, cada $C \subset [X]^2$ se corresponde con $C^* = \{(x, y) \mid \{x, y\} \in C\}$.

Una *coloración* de un conjunto X es un conjunto $C \subset [X]^2$. Un conjunto $H \subset X$ es *homogéneo* respecto a la coloración C si $[H]^2 \subset C$ (y entonces diremos que está *totalmente coloreado*) o bien $[H]^2 \subset [X]^2 \setminus C$ (y entonces diremos que está *totalmente no coloreado*).[2] Notemos que los subconjuntos de cardinal 1 son trivialmente totalmente coloreados y totalmente no coloreados.

Si X es un espacio topológico, una *coloración abierta* de X es una coloración que, como subconjunto de $D(X)$, es abierta en $X \times X$, respecto de la topología producto.

El *espacio de Baire* es $\mathcal{N} = {}^\omega\omega$ con la topología producto que resulta de considerar en ω la topología discreta. Una base está formada por los conjuntos $B_s = \{x \in \mathcal{N} \mid x|_n = s\}$, donde $s \in \omega^{<\omega}$ y $n = \mathcal{D}s$.

Axioma de las coloraciones abiertas (ACA) *Si $X \subset \mathcal{N}$ y C es una coloración abierta en X, o bien X tiene un subconjunto totalmente coloreado no numerable, o bien X es unión de una cantidad numerable de conjuntos totalmente no coloreados.*

Puede probarse que es equivalente exigir ACA para subespacios del espacio de Baire o exigirlo para cualquier espacio métrico separable. En la sección siguiente mostraremos algunas consecuencias de este axioma, mientras que en ésta nos ocupamos de probar su consistencia y algunos hechos relacionados. En realidad vamos a demostrar la consistencia de ACA para cualquier espacio de Hausdorff con una base numerable. Más aún, vamos a probar la consistencia de MA + ACA.

[2]El lector puede imaginarse un grafo infinito cuyos vértices son todos los puntos del conjunto X en el que los vértices correspondientes a elementos de C han sido unidos por una arista. Así, un subconjunto de X es homogéneo si todos sus vértices están conectados por aristas o ninguno lo está. El término "coloreado" proviene de la generalización de este tipo de conceptos a coloraciones determinadas por aplicaciones $[X]^2 \longrightarrow n$ con $n > 2$, donde hay que pensar que todos los pares de vértices están conectados por una arista, a la cual se le ha asignado un color $i < n$, de modo que un conjunto es homogéneo si todos sus vértices están unidos por aristas del mismo color. No obstante, y a pesar del nombre del axioma que vamos a estudiar, no necesitamos tratar con coloraciones en este sentido general, sino que sólo necesitaremos considerar aristas de dos colores, lo cual equivale a distinguir entre la presencia o ausencia una arista que una dos vértices dados.

Empezamos con un hecho elemental que usaremos en varias ocasiones:

Teorema 7.46 *Sea X un espacio de Hausdorff y C una coloración abierta de X. Si $H \subset X$ está totalmente no coloreado, entonces lo mismo vale para $\overline{H}$.*

DEMOSTRACIÓN: En caso contrario existen x, $y \in \overline{H}$ tales que $x \neq y$ y $\{x, y\} \in C$. Como C^* es abierto, existen abiertos disjuntos U, V en X tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \times V \subset C^*$. Podemos tomar puntos $x' \in U \cap H$, $y' \in V \cap H$. En particular $x' \neq y'$, y se cumple que $(x', y') \in C^*$, luego $\{x', y'\} \subset C$, contradicción. ■

En particular, es equivalente decir que X es unión de una cantidad numerable de conjuntos totalmente no coloreados que decir que es unión de una cantidad numerable de cerrados totalmente no coloreados.

El teorema siguiente nos da los c.p.o.s que iteraremos para probar la consistencia de ACA:

Teorema 7.47 *Supongamos que $2^{\aleph_0}$ es un cardinal regular. Sea X un espacio de Hausdorff con una base numerable y C una coloración abierta de X tal que X no es unión de menos de $2^{\aleph_0}$ conjuntos totalmente no coloreados. Entonces:*

a) Existe un $Y \subset X$ tal que $|Y| = 2^{\aleph_0}$ y el conjunto

$$\mathbb{Q} = \{q \in \mathcal{P}^f Y \mid q \text{ está totalmente coloreado}\},$$

considerado como c.p.o. con la inversa de la inclusión, cumple la condición de cadena $2^{\aleph_0}$.

b) Podemos elegir Y de modo que $\mathbb{Q}$ cumpla que para cada $s \in \mathbb{Q}$ existen $2^{\aleph_0}$ elementos $y \in Y$ tales que $s \cup \{y\} \in \mathbb{Q}$.

DEMOSTRACIÓN: Fijemos una base numerable $\mathcal{B}$ de X. Notemos que X tiene un subconjunto denso numerable, y que todo elemento de X es límite de una sucesión en dicho conjunto denso, lo que nos da que $|X| \leq 2^{\aleph_0}$, y como los conjuntos con un punto son totalmente no coloreados, la hipótesis del teorema implica que $|X| = 2^{\aleph_0}$.

Si $n \in \omega$, $p \in X^n$ y $U \subset X^n$ es un abierto tal que $p \in U$, definimos

$$U_p = \{q \in U \mid \bigwedge i < n\ (p_i \neq q_i \wedge \{p_i, q_i\} \in C)\}.$$

Si $A \subset X^n$, $f : A \longrightarrow X$ y $p \in X^n$, definimos

$$\omega_f(p) = \bigcap \{\overline{f[U_p \cap A]} \mid U \subset X^n \text{ es abierto} \wedge p \in U\}.$$

Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha < 2^{\aleph_0}}$ una enumeración de todas las funciones f en las condiciones anteriores para cualquier $n \geq 1$ y cualquier A numerable, y sea $\{T_\alpha\}_{\alpha < 2^{\aleph_0}}$ una enumeración de los subconjuntos cerrados de X totalmente no coloreados. Definimos por recurrencia una sucesión $\{x_\delta\}_{\delta < 2^{\aleph_0}}$ que cumpla las condiciones siguientes:

a) $x_\delta \in X \setminus x[\delta]$,

b) $x_\delta \notin T_\alpha$ para todo $\alpha < \delta$,

c) Para cada $\alpha < \delta$, si $f_\alpha : A \subset X^n \longrightarrow X$, $p \in x[\delta]^n$ y $\omega_{f_\alpha}(p)$ es totalmente no coloreado, entonces $x_\delta \notin \omega_{f_\alpha}(p)$.

Esto es posible porque la familia formada por todos los conjuntos $\{x_\alpha\}$, T_α y $\omega_{f_\alpha}(p)$ en las condiciones de c) tiene cardinal $< 2^{\aleph_0}$, luego por hipótesis su unión no es todo X. Definimos $Y = \{x_\delta \mid \delta < 2^{\aleph_0}\}$. Vamos a ver que cumple lo requerido en la parte a) del enunciado. Para ello basta probar que lo siguiente es cierto para todo n:

> $(*)$ *Si $F \subset [Y]^n \cap \mathbb{Q}$ es una familia de $2^{\aleph_0}$ conjuntos disjuntos dos a dos, entonces existen p, $q \in F$ distintos tales que $p \cup q \in \mathbb{Q}$.*

En efecto, si se cumple $(*)$ y F es cualquier subconjunto de $\mathbb{Q}$ de cardinal $2^{\aleph_0}$, contiene una subfamilia del mismo cardinal formada por elementos de $[Y]^n \cap \mathbb{Q}$, y por el lema de los sistemas Δ podemos suponer que es cuasidisjunta de raíz r. Entonces podemos aplicar $(*)$ a la familia $\{x \setminus r \mid x \in F\}$, lo que nos da p, $q \in F$ tales que $(p \setminus r) \cup (q \setminus r) \in \mathbb{Q}$, pero entonces es claro que $p \cup q \in \mathbb{Q}$, luego la familia inicial no es una anticadena.

Probamos $(*)$ por inducción sobre n. Si $n = 1$ sea $Y' = \{y \in Y \mid \{y\} \in F\}$ y sea

$$Y'' = \{x \in Y' \mid \bigwedge y \in Y' \setminus \{x\}(\{x, y\} \in [X]^2 \setminus C)\}.$$

Obviamente Y'' es totalmente no coloreado, luego por el teorema anterior existe un α tal que $\overline{Y''} = T_\alpha$. Como $|Y'| = 2^{\aleph_0}$, existe un $\alpha < \beta < 2^{\aleph_0}$ tal que $x_\beta \in Y'$, pero entonces $x_\beta \notin Y''$ por b). Por lo tanto existe un $y \in Y' \setminus \{x_\beta\}$ tal que $\{x_\beta, y\} \in C$, luego $\{x_\beta\}$, $\{y\} \in F$ cumplen que $\{x_\beta, y\} \in \mathbb{Q}$, como había que probar.

Supongamos ahora que $n > 1$ y que $(*)$ se cumple para todo natural menor. Cada elemento de F es de la forma $s[n]$, para cierta $s : n \longrightarrow X$ que es única si exigimos además que $s(i) = x_{\alpha_i}$ con $\alpha_0 < \cdots < \alpha_{n-1}$.

Para cada $s \in F$ y cada $i < j < n$, tenemos que $\{s(i), s(j)\} \in C$ y, como la coloración es abierta, existen abiertos $A^s_{i,j}$, $A^s_{j,i}$ tales que $s(i) \in A^s_{i,j}$, $s(j) \in A^s_{j,i}$ y $A^s_{i,j} \times A^s_{j,i} \subset C^*$. Tomamos entonces $B^s_i \in \mathcal{B}$ tal que $s(i) \in B^s_i \subset \bigcap\limits_j A^s_{i,j}$, de modo que

$$B^s_i \times B^s_j \subset A^s_{ij} \times A^s_{ji} \subset C^*.$$

Como la base $\mathcal{B}$ es numerable, podemos tomar un subconjunto de F de cardinal $2^{\aleph_0}$ para el que todos los B^s_0 sean un mismo $B_0 \in \mathcal{B}$, en este subconjunto podemos tomar otro subconjunto del mismo cardinal para el que todos los B^s_1 sean el mismo $B_1 \in \mathcal{B}$ y, dando n pasos, obtenemos abiertos básicos $B_0, \ldots, B_{n-1}$ (y un subconjunto de F al que podemos seguir llamando F) de manera que $\bigwedge s \in F \bigwedge i < n\ s(i) \in B_i$ y, para $i < j$, $B_i \times B_j \subset C^*$.

En particular, si p, $q \in F$ son distintos, tenemos asegurado que si $i < j < n$ entonces $\{p(i), q(j)\} \in C$, luego para que $p[n] \cup q[n]$ esté totalmente coloreado sólo falta garantizar que $\{p(i), q(i)\} \in C$ para todo $i < n$.

Sea $A = \{s|_{n-1} \mid s \in F\} \subset X^{n-1}$ y sea $g : A \longrightarrow X$ la función dada por $g(s|_{n-1}) = s(n-1)$. Notemos que g está bien definida porque los conjuntos de F son disjuntos dos a dos. Definimos

$$F_0 = \{s \in F \mid s(n-1) \in \omega_g(s|_{n-1})\}.$$

Veamos que $|F \setminus F_0| < 2^{\aleph_0}$. En caso contrario, para cada $s \in F \setminus F_0$, puesto que $s(n-1) \notin \omega_g(s|_{n-1})$, existe un abierto básico $U^s \subset X^{n-1}$ de manera que $s|_{n-1} \in U$, pero $s(n-1) \notin \overline{g[U^s_{s|_{n-1}} \cap A]}$. Tomemos un abierto básico I^s tal que $s(n-1) \in I^s$ y $I^s \cap \overline{g[U^s_{s|_{n-1}} \cap A]} = \varnothing$.

Podemos tomar $F' \subset F \setminus F_0$ de cardinal $2^{\aleph_0}$ de modo que I^s y U^s sean los mismos I, U para todo $s \in F'$. Entonces $\{s|_{n-1} \mid s \in F'\}$ se corresponde con una familia de $2^{\aleph_0}$ elementos de $[Y]^{n-1} \cap \mathbb{Q}$ disjuntos dos a dos. Por hipótesis de inducción existen s, $t \in F \setminus F_0$ distintos y tales que $s[n-1] \cup t[n-1]$ está totalmente coloreado. Pero entonces $t|_{n-1} \in U_{s|_{n-1}} \cap A$, luego $g(t|_{n-1}) \notin I$, pero $g(t|_{n-1}) = t(n-1) \in I$, contradicción.

Observemos que g es un subespacio de X^n, luego tiene un subconjunto denso numerable g_0, que será también una función parcial de X^{n-1} en X, luego existe $\alpha < 2^{\aleph_0}$ tal que $g_0 = f_\alpha : A_0 \longrightarrow X$. Vamos a probar que para todo $s \in F$ se cumple

$$\omega_g(s|_{n-1}) = \omega_{f_\alpha}(s|_{n-1}).$$

Para ello tomamos un abierto $U \subset X^{n-1}$ tal que $s|_{n-1} \in U$ y basta probar que $\overline{g[U_{s|_{n-1}} \cap A]} = \overline{f_\alpha[U_{s|_{n-1}} \cap A_0]}$. Una inclusión es obvia. Para la opuesta basta demostrar que $g[U_{s|_{n-1}} \cap A] \subset \overline{f_\alpha[U_{s|_{n-1}} \cap A_0]}$.

Supongamos que $t \in F$ cumple que $t|_{n-1} \in U_{s|_{n-1}}$. Sea B^*_{n-1} un entorno abierto de $g(t|_{n-1}) = t(n-1)$. Tenemos que encontrar un $u \in F$ de manera que $u|_{n-1} \in U_{s|_{n-1}} \cap A_0$ y $u(n-1) \in B_{n-1}$. Sabemos que $t|_{n-1} \in U$ y que si $i < n-1$ entonces $t(i) \neq s(i)$ y $\{t(i), s(i)\} \in C$. Como C es abierto podemos tomar abiertos B^*_i en X tales que

$$t|_{n-1} \in B^*_0 \times \cdots \times B^*_{n-2} \subset U$$

y de modo que si $q \in B^*_0 \times \cdots \times B^*_{n-2}$ entonces, para todo $i < n-1$ se cumple $q(i) \neq s(i)$ y $\{q(i), s(i)\} \in C$. De este modo $t \in (B^*_0 \times \cdots \times B^*_{n-1}) \cap g$, luego el miembro derecho es un abierto no vacío en g. Como f_α es denso en g, existe un $u \in (B^*_0 \times \cdots \times B^*_{n-1}) \cap f_\alpha$, es decir, $u \in F$, $u|_{n-1} \in (B^*_0 \times \cdots \times B^*_{n-2}) \cap A_0$ y $u(n-1) \in B^*_{n-1}$. Pero esto implica que $u \in U_{s|_{n-1}}$, luego cumple lo pedido.

Como $|F - F_0| < 2^{\aleph_0}$, existe un $s \in F_0$ tal que $s(0) = x_\delta$, con $\alpha < \delta$ (donde α es el ordinal que acabamos de probar que cumple $\omega_g(s|_{n-1}) = \omega_{f_\alpha}(s|_{n-1})$). Por definición de F_0 tenemos que $s(n-1) \in \omega_g(s|_{n-1}) = \omega_{f_\alpha}(s|_{n-1})$ y por la propiedad c) concluimos que $\omega_{f_\alpha}(s|_{n-1})$ no puede ser totalmente no coloreado, luego podemos tomar u, $v \in \omega_{f_\alpha}(s|_{n-1})$ distintos entre sí y tales que $\{u, v\} \in C$. Sean I, J abiertos tales que $(u, v) \in I \times J \subset C^*$.

Tomamos $U = X^{n-1}$. Puesto que $u \in \omega_{f_\alpha}(s|_{n-1})$, se cumple que

$$\overline{f_\alpha[U_{s|_{n-1}} \cap A_0]} \cap I \neq \varnothing,$$

luego existe un $p^* \in F$ tal que $p^*|_{n-1} \in U_{s|_{n-1}} \cap A_0$ y $f_\alpha(p^*|_{n-1}) = p^*(n-1) \in I$. En particular $p^*[n-1] \cup s[n-1]$ está completamente coloreado.

Como C es abierto, se comprueba fácilmente que podemos tomar un abierto $U \subset X^{n-1}$ tal que $s|_{n-1} \in U$ y $p^*[n-1] \cup q[n-1]$ esté totalmente coloreado para todo $q \in U$. Como $v \in \omega_{f_\alpha}(s|_{n-1})$, tenemos que $\overline{f_\alpha[U_{s|_{n-1}} \cap A_0]} \cap J \neq \varnothing$, luego existe un $q^* \in F$ tal que $q^*|_{n-1} \in U_{s|_{n-1}} \cap A_0$ y $f_\alpha(q^*|_{n-1}) = q^*(n-1) \in J$, y ahora podemos concluir que $p^*[n-1] \cup q^*[n-1]$ está totalmente coloreado. Más aún, lo mismo vale para $p^*[n] \cup q^*[n]$, ya que $p^*(n) \in I$ y $q^*(n) \in J$. Esto termina la prueba de $(*)$.

Veamos ahora la segunda parte del enunciado. Sea

$$B = \{p \in \mathbb{Q} \mid |\{y \in Y \mid p \cup \{y\} \in \mathbb{Q}\}| < 2^{\aleph_0}\}.$$

Veamos que $|B| < 2^{\aleph_0}$. En caso contrario podríamos construir una sucesión $\{p_\alpha\}_{\alpha < 2^{\aleph_0}}$ en B tal que si $\beta < \alpha < 2^{\aleph_0}$

$$p_\alpha \not\subset p_\beta \cup \{y \in Y \mid p_\beta \cup \{y\} \in \mathbb{Q}\},$$

pero dicha familia sería una anticadena en $\mathbb{Q}$ de cardinal $2^{\aleph_0}$, en contradicción con el apartado anterior. En efecto, si r extendiera a p_α y p_β, entonces

$$p_\alpha \subset r \subset p_\beta \cup \{y \in Y \mid p_\beta \cup \{y\} \in \mathbb{Q}\}.$$

Así pues, $|B| < 2^{\aleph_0}$ y lo mismo vale para $\bigcup B$. Ahora basta reemplazar Y por $Y' = Y \setminus \bigcup B$. Si llamamos $\mathbb{Q}' \subset \mathbb{Q}$ al correspondiente c.p.o., es claro que sigue cumpliendo la condición de cadena $2^{\aleph_0}$, y si $s \in \mathbb{Q}'$, entonces

$$|\{y \in Y \mid s \cup \{y\} \in \mathbb{Q}\}| = 2^{\aleph_0},$$

luego también $|\{y \in Y' \mid s \cup \{y\} \in \mathbb{Q}\}| = 2^{\aleph_0}$, pero esto es exactamente lo mismo que $|\{y \in Y' \mid s \cup \{y\} \in \mathbb{Q}'\}| = 2^{\aleph_0}$. ■

Ahora probamos que los c.p.o.s construidos en el teorema anterior resuelven posibles incumplimientos de ACA:

Teorema 7.48 (HC) *Si X es un espacio de Hausdorff con una base numerable y C es una coloración abierta en X, entonces, o bien X es unión de una cantidad numerable de conjuntos totalmente no coloreados, o en caso contrario el c.p.o. $\mathbb{Q}$ construido en el teorema anterior cumple la c.c.n. y $|\mathbb{Q}| = \aleph_1$, y $\mathbb{1} \Vdash \bigcup \Gamma$ es un subconjunto de $\check{X}$ totalmente coloreado y no numerable.*

Demostración: Basta probar la relativización del teorema a un modelo transitivo numerable M de ZFC + HC. Sólo hay que probar la última parte. Sea G un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M y sea $H = \bigcup G \subset X$. Es obvio que H está

totalmente coloreado. Supongamos que es numerable$^{M[G]}$. Entonces, la c.c.n. implica (por 5.5) que existe $A \in M$ numerable^M tal que $H \subset A \subset X$. Así pues, el conjunto
$$D = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \setminus A \neq \varnothing\} \in M$$
es denso en $\mathbb{Q}$, por la propiedad b) del teorema anterior, luego existe $q \in D \cap G$, luego existe un $x \in q \setminus A$, pero entonces $x \in q \subset H$ y $x \in X \setminus A \subset X \setminus H$, contradicción. ■

Recordemos la iteración construida en la prueba del teorema 7.35 para probar la consistencia del axioma de Martin, particularizada al caso $\kappa = \aleph_2$. Partimos de un modelo transitivo numerable M de ZFC en el que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ y $2^{\aleph_1} = \aleph_2$, lo que garantiza la hipótesis de que $2^{<\kappa} = \kappa$. En la prueba se construye una iteración con soportes finitos
$$(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \kappa}, \{(\check{\nu}_\delta, \leq_\delta, \check{\varnothing})\}_{\delta < \kappa}),$$
donde cada ν_δ es un cardinal (en M) menor que κ (que, de hecho, podemos suponer no numerable). En el caso particular que estamos considerando tendremos que todos ellos son iguales a ω_1. En definitiva, tenemos una iteración con soportes finitos
$$(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \omega_2}, \{\pi_\delta\}_{\delta < \omega_2})$$
tal que
$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi_\delta = \check{\omega}_1 \wedge \pi_\delta \text{ cumple la c.c.n.} \qquad (*)$$
(en la primera parte hay que entender que nos referimos a π_δ como conjunto, mientras que en la segunda nos referimos al c.p.o. $(\pi_\delta, \leq_\delta, \mathbb{1}_{\pi_\delta})$).

En 7.35 se demuestra que cualquier iteración con soportes finitos que cumpla la condición $(*)$ cumple también que cada $\mathbb{P}_\delta$ tiene (en M) un subconjunto denso $\overline{\mathbb{P}}_\delta$ tal que $|\overline{\mathbb{P}}_\delta| = \aleph_1$ para todo $\delta < \omega_2$, y $|\overline{\mathbb{P}}_{\omega_2}| = \aleph_2$. A su vez, esto basta para asegurar que, si G es un filtro $\mathbb{P}_{\omega_2}$-genérico sobre M, la extensión $M[G]$ tiene los mismos cardinales y cofinalidades que M, la función del continuo por encima de $\aleph_2$ es la misma que en M y $2^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_1} \leq \aleph_2$.

Notemos además que en las extensiones intermedias $M[G_\delta]$, con $\delta < \omega_2$, se cumple la hipótesis del continuo, pues el número (en M) de buenos $\bar{\mathbb{P}}_\delta$-nombres para subconjuntos de $\check{\omega}$ es a lo sumo $(\aleph_1^{<\aleph_1})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$, y basta aplicar el teorema 5.22.

Vamos a modificar como sigue la construcción recurrente considerada en 7.35. Supuesto definido $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \alpha}, \{\pi_\delta\}_{\delta < \alpha})$, distinguimos dos casos: si $\alpha = 2\alpha_0 + 1$, tomamos en M una enumeración $\{\leq_\gamma^{\alpha_0}\}_{\gamma < \omega_2}$ de todos los buenos $\bar{\mathbb{P}}_\alpha$-nombres para subconjuntos de $\omega_1 \check{\times} \omega_1$ y suponemos definidos los $\leq_\gamma^{\beta_0}$, para $\beta_0 < \alpha_0$ y $\gamma < \omega_2$. Ahora consideramos la función $f : \omega_2 \longrightarrow \omega_2 \times \omega_2$ construida al principio de la prueba de 7.35, calculamos $f(\alpha_0) = (\beta_0, \gamma)$, con $\beta_0 \leq \alpha_0$ y continuamos la construcción de π_α sin cambio alguno, pero usando el $\bar{\mathbb{P}}_\beta$-nombre $\leq_\gamma^{\beta_0}$.

Si $\alpha = 2\alpha_0$ definiremos π_α más adelante de modo que se cumplirá también la condición $(*)$.

De momento observamos que, independientemente de cómo definamos π_α cuando α es par, en $M[G]$ seguirá cumpliéndose $\mathrm{AM}(\aleph_1)$, y en particular tendremos que $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} = \aleph_2$ (luego en $M[G]$ se cumple AM). En efecto, la prueba vale sin más cambios que los siguientes: encontramos un $\beta < \omega_2$ que cumple R, $\mathcal{D} \in M[G_\beta]$, y cambiando si es preciso β por $\beta+1$, podemos suponer que $\beta = 2\beta_0 + 1$, lo que hace que $R = (\leq_\gamma^{\beta_0})_{G_\beta}$ para cierto $\gamma < \omega_2$. Entonces tomamos un $\alpha_0 \geq \beta_0$ tal que $f(\alpha_0) = (\beta_0, \gamma)$ y llamamos $\alpha = 2\alpha_0 + 1 < \omega_2$.

Así pues, para garantizar que en $M[G]$ se cumpla AM $+\ 2^{\aleph_0} = \aleph_2$ tenemos libertad para definir la iteración sobre los ordinales pares siempre y cuando la definición respete la condición $(*)$. Ahora vamos a probar que podemos aprovechar este grado de libertad para asegurar que la extensión genérica cumpla ACA:

Teorema 7.49 *Existe un modelo transitivo de* ZFC $+\ 2^{\aleph_0} = \aleph_2 +$ AM $+$ ACA.

Demostración: Vamos a probar que podemos construir el modelo deseado definiendo oportunamente los nombres π_α cuando $\alpha < \omega_2$ es par en la variante de la construcción de 7.35 que acabamos de describir. Consideramos, pues, un modelo M en las condiciones indicadas y vamos a definir una iteración $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \omega_2}, \{\pi_\delta\}_{\delta < \omega_2})$ con soportes finitos o, más precisamente, vamos a completar la construcción indicada especificando la definición de π_α cuando $\alpha < \omega_2$ es par.

Antes observemos que en la construcción de la iteración podemos ir construyendo a la vez una sucesión creciente de ordinales $\{\theta_\delta\}_{\delta < \omega_2}$ en ω_2 junto con biyecciones $h_\delta : \theta_\delta \longrightarrow \bar{\mathbb{P}}_\delta$, de modo que los diagramas siguientes conmuten, para todo $\delta < \epsilon < \omega_2$:

$$\begin{tikzcd}
\theta_\epsilon \arrow[r, "h_\epsilon"] & \bar{\mathbb{P}}_\epsilon \\
\theta_\delta \arrow[u, "i"] \arrow[r, "h_\delta"'] & \bar{\mathbb{P}}_\delta \arrow[u, "i_{\delta\epsilon}"']
\end{tikzcd}$$

Notemos que en particular $\theta_\lambda = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} \theta_\delta$, para todo límite $\lambda < \omega_2$. Finalmente las aplicaciones h_δ definen una biyección $h : \omega_2 \longrightarrow \bar{\mathbb{P}}_{\omega_2}$, de modo que si identificamos cada $\bar{\mathbb{P}}_\delta$ con $i_{\delta\omega_2}[\bar{\mathbb{P}}_\delta]$, entonces se cumple que $h[\theta_\delta] = \bar{\mathbb{P}}_\delta$.

La construcción se simplifica un poco si observamos que nos basta probar que existe un filtro G con el cual $M[G]$ cumple ACA, pues entonces podemos razonar por reducción al absurdo suponiendo $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\omega_2}} \Vdash \neg\mathrm{ACA}$.

Entonces, si G es cualquier filtro $\mathbb{P}_{\omega_2}$-genérico sobre M, en $M[G]$ existe un espacio de Hausdorff X con una base numerable y una coloración abierta C en X de modo que ni X tiene un subconjunto totalmente coloreado no numerable ni es unión de una cantidad numerable de conjuntos totalmente no coloreados.

Al igual que hemos razonado al principio de la prueba de 7.47, en $M[G]$ tiene que cumplirse que $|X| = 2^{\aleph_0}$, es decir, $|X| = \aleph_2$. Por lo tanto, transportando toda la estructura de X a ω_2 mediante una biyección (en $M[G]$), podemos suponer que el conjunto subyacente al espacio topológico X es $X = \omega_2$.

Sea $\mathcal{B}$ una base numerable de X, aunque, por razones técnicas, en lugar de considerarla como un mero conjunto numerable de abiertos o como una sucesión $\{B_n\}_{n\in\omega}$, vamos a considerar que $\mathcal{B} \subset \omega \times X \subset \omega \times \omega_2$, de modo que los abiertos básicos son los conjuntos $\mathcal{B}_n = \{x \in X \mid (n, x) \in \mathcal{B}\}$. Es claro que toda familia numerable de subconjuntos de X puede codificarse así.

Así pues, podemos tomar $\mathbb{P}_{\omega_2}$-nombres $\mathcal{X}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ (en M) con la propiedad de que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\omega_2}} \Vdash \mathcal{X} \subset \check{\omega}_2 \wedge \mathcal{B}$ es una base numerable para una topología de Hausdorff en $\mathcal{X} \wedge \mathcal{C}$ es una coloración abierta en $\mathcal{X} \wedge \mathcal{X}$ no contiene un subconjunto no numerable totalmente coloreado ni es unión numerable de conjuntos totalmente no coloreados.

Más concretamente, podemos suponer que $\mathcal{X}$ es un buen $\bar{\mathbb{P}}_{\omega_2}$-nombre para un subconjunto de $\check{\omega}_2$, con lo que $\mathcal{X} = \bigcup\limits_{\delta<\omega_2} \{\check{\delta}\} \times A_\delta$, donde A_δ es una anticadena (numerable) en $\bar{\mathbb{P}}_{\omega_2}$. Si llamamos $\mathcal{X}^*(\delta) = h^{-1}[A_\delta]$, tenemos una aplicación $\mathcal{X}^* : \omega_2 \longrightarrow [\omega_2]^{\leq\aleph_0}$ (en M) que determina completamente a $\mathcal{X}$.

Similarmente, suponemos que $\mathcal{B}$ es un buen $\bar{\mathbb{P}}_{\omega_2}$-nombre para un subconjunto de $\omega \check{\times} \omega_2$, luego viene determinado por una aplicación $\mathcal{B}^* : \omega \times \omega_2 \longrightarrow [\omega_2]^{\leq\aleph_0}$.

Por último, podemos suponer que $\mathcal{C}$ es un buen nombre para un subconjunto de $[\check{\omega_2}]^2$, luego está determinado por una aplicación $\mathcal{C}^* : [\omega_2]^2 \longrightarrow [\omega_2]^{\leq\aleph_0}$.

Observemos ahora que la sucesión $\{\theta_\delta\}_{\delta<\omega_2}$ es normal, por lo que el conjunto de sus puntos fijos $C_0 = \{\delta < \omega_2 \mid \theta_\delta = \delta\}$ es c.n.a. en ω_2.

Para cada $\alpha < \omega_2$ definimos $\mathcal{X}^*_\alpha : \alpha \longrightarrow [\alpha]^{\leq\aleph_0}$ como la aplicación dada por $\mathcal{X}^*_\alpha(\delta) = \mathcal{X}^*(\delta) \cap \alpha$. Si definimos $F : \omega_2 \longrightarrow \omega_2$ mediante $F(\alpha) = \bigcup \mathcal{X}^*[\alpha]$ (lo cual es posible, porque $F(\alpha)$ es una unión de a lo sumo $\aleph_1$ conjuntos numerables, luego está acotado en ω_2), el conjunto C_1 formado por los ordinales de C_0 cerrados para F es c.n.a. en ω_2, y si $\alpha \in C_2$ tenemos que $\mathcal{X}^*_\alpha = \mathcal{X}^*|_\alpha$, y además $\mathcal{X}^*_\alpha(\delta) \subset \alpha = \theta_\alpha$, por lo que $A_\delta = h[\mathcal{X}^*_\alpha(\delta)] \subset \bar{\mathbb{P}}_\delta$. Esto significa que $\mathcal{X}^*_\alpha$ determina un $\bar{\mathbb{P}}_\alpha$-nombre $\mathcal{X}_\alpha = \bigcup\limits_{\delta<\alpha} \{\check{\delta}\} \times A_\delta$, que claramente cumple

$$(\mathcal{X}_\alpha)_{G_\alpha} = \mathcal{X}_G \cap \alpha.$$

Ahora definimos $\mathcal{B}^*_\alpha : \omega \times \alpha \longrightarrow [\alpha]^{\leq\aleph_0}$ mediante $\mathcal{B}^*_\alpha(n, \delta) = \mathcal{B}^*(n, \delta) \cap \alpha$. El mismo razonamiento nos permite definir un c.n.a. $C_2 \subset C_1$ de modo que si $\alpha \in C_2$ entonces $\mathcal{B}^*_\alpha$ define un $\bar{\mathbb{P}}_\alpha$-nombre $\mathcal{B}_\alpha$ tal que

$$(\mathcal{B}_\alpha)_{G_\alpha} = \mathcal{B}_G \cap (\omega \times \alpha),$$

y es claro entonces que $\mathbb{1}_{\bar{\mathbb{P}}_\alpha} \Vdash \mathcal{X}_\alpha \subset \omega_2 \wedge \mathcal{B}_\alpha$ determina una base numerable para una topología de Hausdorff en $\mathcal{X}_\alpha$.

Igualmente podemos definir una aplicación $\mathcal{C}^*_\alpha : [\alpha]^2 \longrightarrow [\alpha]^{\leq\aleph_0}$ mediante $\mathcal{C}^*_\alpha(\{\delta, \epsilon\}) = \mathcal{C}^*(\{\delta, \epsilon\}) \cap \alpha$, y nuevamente podemos formar un c.n.a. $C_3 \subset C_2$ de modo que si $\alpha \in C_3$ entonces $\mathcal{C}^*_\alpha$ defina un $\bar{\mathbb{P}}_\alpha$-nombre $\mathcal{C}_\alpha$ tal que

$$(\mathcal{C}_\alpha)_G = \mathcal{C}_G \cap [\alpha]^2,$$

y consecuentemente $1\!\!1_{\bar{\mathbb{P}}_\alpha} \Vdash \mathcal{C}_\alpha$ es una coloración abierta en $\mathcal{X}_\alpha$ con la topología definida por $\mathcal{B}_\alpha$.

Ahora observamos que, por el teorema 7.46, que un espacio no sea unión de una cantidad numerable de conjuntos totalmente no coloreados equivale a que no sea unión numerable de conjuntos cerrados totalmente no coloreados. Si $\{B_n\}_{n\in\omega}$ es una base de un espacio topológico X, todo cerrado en X es de la forma $C_a = X \setminus \bigcup\limits_{n\in a} B_n$, para cierto $a \subset \omega$, y toda familia numerable de cerrados de X puede codificarse por un conjunto $a \subset \omega \times \omega$ (si llamamos $a_n = \{i \in \omega \mid (n,i) \in c\}$, la familia codificada por a es es $\{C_{a_n}\}_{n\in\omega}$).

Fijado $\delta < \omega_2$, si σ es un buen $\bar{\mathbb{P}}_\delta$-nombre (en M) para un subconjunto de $\omega\check{\times}\omega$, entonces $a = \sigma_{G_\delta}$ determina a través de la base $\mathcal{B}_G$ una familia numerable de cerrados $\{C_n\}_{n\in\omega}$ en $\mathcal{X}_G$, luego, o bien no cubren todo el espacio, o bien alguno de ellos no es totalmente no coloreado.

En el primer caso existe un $\beta \in \mathcal{X}_G \subset \omega_2$ tal que β no pertenece a ninguno de los C_n, es decir, para cada n existe un $i_n \in a_n$ tal que $\beta \in (\mathcal{B}_G)_{i_n}$ (o equivalentemente, $(i_n, \beta) \in \mathcal{B}_G$). En el segundo caso existe un $n \in \omega$ y existen $\beta, \gamma \in C_{a_n}$ (es decir, existen $i, j \in a_n$ tales que $(i,\beta), (j,\gamma) \notin \mathcal{B}_G$) de modo que $\{\beta,\gamma\} \in \mathcal{C}_G$.

Si llamamos ϵ al menor elemento de C_3 mayor que δ y β en el primer caso o que δ, β y γ en el segundo, hemos probado que

$$1\!\!1_{\mathbb{P}_{\omega_2}} \Vdash \bigvee \epsilon \in \check{C}_3(\check{\delta} < \epsilon \wedge (\bigvee \beta < \epsilon \bigwedge n \in \omega \bigvee i \in i_{\delta\omega_2}(\sigma)_n\ (i,\beta) \in \mathcal{B}) \vee$$

$$(\bigvee \beta\gamma < \epsilon \bigvee n \in \omega \bigvee ij \in i_{\delta\omega_2}(\sigma)_n((i,\beta),(j,\gamma) \notin \mathcal{B} \wedge \{\beta,\gamma\} \in \mathcal{C}))).$$

Por consiguiente existe un $\bar{\mathbb{P}}_{\omega_2}$-nombre τ (en M) tal que

$$1\!\!1_{\mathbb{P}_{\omega_2}} \Vdash \tau \in \check{C}_3 \wedge ((\check{\delta} < \epsilon \wedge (\bigvee \beta < \epsilon \bigwedge n \in \omega \bigvee i \in i_{\delta\omega_2}(\sigma)_n\ (i,\beta) \in \mathcal{B}) \vee$$

$$(\bigvee \beta\gamma < \epsilon \bigvee n \in \omega \bigvee ij \in i_{\delta\omega_2}(\sigma)_n((i,\beta),(j,\gamma) \notin \mathcal{B} \wedge \{\beta,\gamma\} \in \mathcal{C})))).$$

En M podemos considerar el conjunto $A = \{\epsilon \in C_3 \mid \bigvee p \in \mathbb{P}_{\omega_2}\ p \Vdash \tau = \check{\epsilon}\}$, y para cada $\epsilon \in A$ podemos elegir un $p_\epsilon \in \mathbb{P}_{\omega_2}$ tal que $p_\epsilon \Vdash \tau = \epsilon$. Es claro entonces que los p_ϵ son incompatibles dos a dos, y como $\mathbb{P}_{\omega_2}$ cumple la c.c.n., concluimos que A es numerable, luego podemos definir ϵ^σ_δ como el menor elemento de C_3 mayor que todos los elementos de A. Más aún, como en M hay a lo sumo $\aleph_1$ buenos $\bar{\mathbb{P}}_\delta$-nombres para subconjuntos de $\omega\check{\times}\omega$, podemos definir $\epsilon \in C_3$ como el menor elemento mayor que todos los ϵ^σ_δ. Concluimos que, para todo σ,

$$1\!\!1_{\mathbb{P}_{\omega_2}} \Vdash \check{\epsilon}_\delta \in \check{C}_3 \wedge ((\check{\delta} < \check{\epsilon}_\delta \wedge (\bigvee \beta < \check{\epsilon}_\delta \bigwedge n \in \omega \bigvee i \in i_{\delta\omega_2}(\sigma)_n\ (i,\beta) \in \mathcal{B}) \vee$$

$$(\bigvee \beta\gamma < \check{\epsilon}_\delta \bigvee n \in \omega \bigvee ij \in i_{\delta\omega_2}(\sigma)_n((i,\beta),(j,\gamma) \notin \mathcal{B} \wedge \{\beta,\gamma\} \in \mathcal{C})))).$$

Si llamamos C_4 al conjunto de los ordinales de C_3 cerrados para $\delta \mapsto \epsilon_\delta$, se trata de un conjunto c.n.a. en ω_2 y si $\alpha \in C_4$, para cada $\delta < \alpha$ se cumple que $\delta < \epsilon_\delta < \alpha$, luego, para todo buen $\bar{\mathbb{P}}_\delta$-nombre para un subconjunto de $\omega \check{\times} \omega$:

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\omega_2}} \Vdash ((\bigvee \beta < \check{\alpha} \bigwedge n \in \omega \bigvee i \in i_{\delta\omega_2}(\sigma)_n \ (i, \beta) \in \mathcal{B}) \vee$$
$$(\bigvee \beta\gamma < \check{\alpha} \bigvee n \in \omega \bigvee ij \in i_{\delta\omega_2}(\sigma)_n ((i, \beta), (j, \gamma) \notin \mathcal{B} \wedge \{\beta, \gamma\} \in \mathcal{C}))),$$

o también

$$\mathbb{1}_{\bar{\mathbb{P}}_\alpha} \Vdash ((\bigvee \beta < \check{\alpha} \bigwedge n \in \omega \bigvee i \in i_{\delta\alpha}(\sigma)_n \ (i, \beta) \in \mathcal{B}_\alpha) \vee$$
$$(\bigvee \beta\gamma < \check{\alpha} \bigvee n \in \omega \bigvee ij \in i_{\delta\alpha}(\sigma)_n ((i, \beta), (j, \gamma) \notin \mathcal{B}_\alpha \wedge \{\beta, \gamma\} \in \mathcal{C}_\alpha))).$$

Llamemos C_5 al conjunto de los puntos límite de C_4, que es también c.n.a. en ω_2. Observemos ahora que si $\alpha \in C_5$, un buen $\bar{\mathbb{P}}_\alpha$-nombre σ para un subconjunto de $\omega \check{\times} \check{\omega}$ es de la forma

$$\sigma = \bigcup_{m,n \in \omega} \{\text{p.o.}(\check{m}, \check{n})\} \times A_{m,n},$$

donde $A_{m,n}$ es una anticadena (numerable) en $\bar{\mathbb{P}}_\alpha$, que se corresponde a través de la biyección h con el conjunto numerable $h^{-1}[A_{m,n}] \subset \alpha$. Si además $\operatorname{cf} \alpha = \aleph_1$ existe un $\delta \in C_4$ tal que $\delta < \alpha$ y δ acota superiormente a todos los conjuntos $h^{-1}[A_{m,n}]$, luego $A_{m,n} \subset h[\delta] = h[\theta_\delta] = \bar{\mathbb{P}}_\delta$. Así pues, todo buen $\bar{\mathbb{P}}_\alpha$-nombre para un subconjunto de $\omega \check{\times} \omega$ es un buen $\bar{\mathbb{P}}_\delta$-nombre para un subconjunto de $\omega \check{\times} \omega$, para cierto $\delta \in C_4$, $\delta < \alpha$.

Así, si $\alpha \in C_5$ y $\operatorname{cf} \alpha = \aleph_1$, para cada buen $\bar{\mathbb{P}}_\alpha$-nombre para un subconjunto de $\omega \check{\times} \omega$ se cumple:

$$\mathbb{1}_{\bar{\mathbb{P}}_\alpha} \Vdash ((\bigvee \beta < \check{\alpha} \bigwedge n \in \omega \bigvee i \in \sigma_n \ (i, \beta) \in \mathcal{B}_\alpha) \vee$$
$$(\bigvee \beta\gamma < \check{\alpha} \bigvee n \in \omega \bigvee ij \in \sigma_n ((i, \beta), (j, \gamma) \notin \mathcal{B}_\alpha \wedge \{\beta, \gamma\} \in \mathcal{C}_\alpha))).$$

Por consiguiente:

$$\mathbb{1}_{\bar{\mathbb{P}}_\alpha} \Vdash \bigwedge a \in \mathcal{P}(\omega \times \omega)((\bigvee \beta < \check{\alpha} \bigwedge n \in \omega \bigvee i \in a_n \ (i, \beta) \in \mathcal{B}_\alpha) \vee$$
$$(\bigvee \beta\gamma < \check{\alpha} \bigvee n \in \omega \bigvee ij \in a_n ((i, \beta), (j, \gamma) \notin \mathcal{B}_\alpha \wedge \{\beta, \gamma\} \in \mathcal{C}_\alpha))),$$

pero esto equivale a

$$\mathbb{1}_{\bar{\mathbb{P}}_\alpha} \Vdash \mathcal{X}_\alpha \text{ no es unión numerable de conjuntos totalmente no coloreados.}$$

En resumen, si llamamos $C = C_5$ y $E = \{\alpha \in \omega_2 \mid \operatorname{cf} \alpha = \aleph_1\}$, bajo la hipótesis de que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\omega_2}} \Vdash \neg\text{ACA}$, hemos encontrado $\mathbb{P}_{\omega_2}$-nombres $\mathcal{X}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ tales que

> $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\omega_2}} \Vdash \mathcal{X} \subset \check{\omega}_2 \wedge \mathcal{B}$ determina una base numerable para una topología de Hausdorff en $\mathcal{X} \wedge \mathcal{C}$ es una coloración abierta en $\mathcal{X} \wedge \mathcal{X}$ no contiene un subconjunto no numerable totalmente coloreado ni es unión numerable de conjuntos totalmente no coloreados.

y para todo $\alpha \in C \cap E$ se cumple:

> $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash \mathcal{X}_\alpha \subset \check{\alpha} \land \mathcal{B}_\alpha$ determina una base numerable para una topología de Hausdorff en $\mathcal{X}_\alpha \land \mathcal{C}_\alpha$ es una coloración abierta en $\mathcal{X}_\alpha \land \mathcal{X}_\alpha$ no es unión numerable de conjuntos totalmente no coloreados.

Ahora tenemos que completar la definición de la iteración de c.p.o.s para que lo segundo contradiga lo primero.

Para ello observamos que, a través de la biyección h (que se construye recurrentemente al mismo tiempo que la iteración de c.p.o.s) el nombre $\mathcal{X}$ se corresponde con la función $\mathcal{X}^* : \omega_2 \longrightarrow [\omega_2]^{\leq\aleph_0}$, que a su vez puede codificarse como un subconjunto $\mathcal{X}' \subset \omega_2 \times \omega_2$ (de modo que $\mathcal{X}^*(\delta) = \{\epsilon \in \omega_2 \mid (\delta, \epsilon) \in \mathcal{X}'\}$ y entonces, si $\alpha \in C$, se cumple que $\mathcal{X}^*_\alpha$ se corresponde con $\mathcal{X}' \cap (\alpha \times \alpha)$). Igualmente la función $\mathcal{B}^*$ puede codificarse con un subconjunto $\mathcal{B}' \subset \omega \times \omega_2 \times \omega_2$ y $\mathcal{C}^*$ mediante un subconjunto $\mathcal{C}' \subset \omega_2 \times \omega_2 \times \omega_2$.

En total, $(\mathcal{C}^*, \mathcal{B}^*, \mathcal{C}^*)$ puede codificarse mediante un subconjunto de

$$S = (\omega_2 \times \omega_2 \times \{0\}) \cup (\omega \times \omega_2 \times \omega_2 \times \{1\}) \cup (\omega_2 \times \omega_2 \times \omega_2 \times \{2\}).$$

Fijemos en M una biyección $c : \omega_2 \longrightarrow S$. Entonces, el conjunto C' formado por los ordinales $\alpha < \omega_2$ tales que

$$c[\alpha] = (\alpha \times \alpha \times \{0\}) \cup (\omega \times \alpha \times \alpha \times \{1\}) \cup (\alpha \times \alpha \times \alpha \times \{2\})$$

es c.n.a. en ω_2. En efecto, es claro que es cerrado, y para probar que es no acotado, para cada $\delta < \omega_2$ definimos $u(\delta)$ como el mínimo ordinal $\alpha > \delta$ tal que $c(\delta)$ está contenido en el miembro derecho de la fórmula anterior y $v(\alpha)$ como el mínimo $\beta > \delta$ tal que dicho miembro derecho está contenido en $c[\beta]$. Así, C' contiene al c.n.a. formado por los ordinales cerrados para u y v.

El conjunto $E' = C' \cap E \cap \{2\alpha \mid \alpha < \omega_2\}$ es estacionario en ω_2. Vamos a suponer que M cumple $\diamondsuit_{E'}$. En particular esto sucede si cumple $\diamondsuit_E$ o, más en particular, si cumple $V = L$ (teorema 3.33).

Sea $\{A'_\alpha\}_{\alpha \in E'}$ una sucesión $\diamondsuit_{E'}$ en M y sea $A_\alpha = c[A'_\alpha]$. Así, la propiedad de las sucesiones $\diamondsuit_{E'}$ se traduce en que $A_\alpha \subset c[\alpha]$ y, para todo $A \subset S$, el conjunto

$$\{\alpha \in E' \mid A \cap c[\alpha] = A_\alpha\}$$

es estacionario en ω_2. Pasemos ya a terminar la definición de la iteración de c.p.o.s. Para ello suponemos definida $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \alpha}, \{\pi_\delta\}_{\delta < \alpha})$ con $\alpha = 2\alpha_0$, así como los subconjuntos densos $\{\bar{\mathbb{P}}_\delta\}_{\delta \leq \alpha}$ y las biyecciones $h_\alpha : \theta_\delta \longrightarrow \bar{\mathbb{P}}_\delta$, para $\delta \leq \alpha$. Distinguimos dos casos. El primero se da cuando se cumplen las condiciones siguientes:

a) $\alpha \in E'$ y $\theta_\alpha = \alpha$.

b) El conjunto A_α define una función $\mathcal{X}^*_\alpha : \alpha \longrightarrow [\alpha]^{\leq\aleph_0}$ mediante $\mathcal{X}^*_\alpha(\delta) = \{\epsilon \in \alpha \mid (\delta, \epsilon, 0) \in A_\alpha\}$, la cual, a través de h_α, determina a su vez un buen $\bar{\mathbb{P}}_\alpha$-nombre $\mathcal{X}_\alpha$ para un subconjunto de $\check{\alpha}$.

c) El conjunto A_α define una función $\mathcal{B}^*_\alpha : \omega \times \alpha \longrightarrow [\alpha]^{\leq \aleph_0}$ dada por $\mathcal{B}^*_\alpha(n, \delta) = \{\epsilon \in \alpha \mid (n, \delta, \epsilon, 1) \in A_\alpha\}$, la cual, a través de h_α, determina un buen nombre $\mathcal{B}_\alpha$ para un subconjunto de $\omega \check{\times} \check{\alpha}$.

d) El conjunto A_α define una función $\mathcal{C}^*_\alpha : [\alpha]^2 \longrightarrow [\alpha]^{\leq \aleph_0}$ mediante

$$\mathcal{C}^*_\alpha(\{\gamma, \delta\}) = \{\epsilon \in \alpha \mid (\gamma, \delta, \epsilon, 3) \in \mathcal{A}_\alpha\},$$

la cual, a través de h_α, determina un buen nombre $\mathcal{C}_\alpha$ para un subconjunto de $[\check{\alpha}]^2$.

e) $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash \mathcal{X}_\alpha \subset \check{\alpha} \wedge \mathcal{B}_\alpha$ determina una base numerable para una topología de Hausdorff en $\mathcal{X}_\alpha \wedge \mathcal{C}_\alpha$ es una coloración abierta en $\mathcal{X}_\alpha \wedge \mathcal{X}_\alpha$ no es unión numerable de conjuntos totalmente no coloreados.

En estas condiciones, definimos $\pi_\alpha \in M^{\mathbb{P}_\alpha}$ de modo que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha}$ fuerce que π_α tiene como conjunto subyacente a ω_1 y es isomorfo al c.p.o. construido en 7.47. (Esto es posible porque sabemos que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash \text{HC}$.)

En el caso en que no se cumpla alguna de las condiciones anteriores, definimos π_α de modo que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha}$ fuerce que π_α cumple $(*)$.

Esto completa la definición de la iteración. Ahora podemos continuar el argumento por reducción al absurdo. Tenemos unos nombres $\mathcal{X}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, que determinan funciones $\mathcal{X}^*$, $\mathcal{B}^*$, $\mathcal{C}^*$, que a su vez determinan un conjunto $A \subset S$ de la forma que hemos explicado. Además en función de estos objetos hemos construido un c.n.a. C y podemos tomar un ordinal

$$\alpha \in C \cap \{\alpha \in E' \mid A \cap c[\alpha] = A_\alpha\},$$

pues el conjunto de la derecha es estacionario. Como $\alpha \in E'$, en particular $\alpha = 2\alpha_0$. Como $\alpha \in C$, en particular $\alpha = \theta_\alpha$, y como A es el conjunto determinado por $\mathcal{X}^*$, $\mathcal{B}^*$ y $\mathcal{C}^*$, es inmediato que las funciones $\mathcal{X}^*_\alpha$, $\mathcal{B}^*_\alpha$ y $\mathcal{C}^*_\alpha$ definidas a partir de A_α son las mismas que hemos definido antes a partir de $\mathcal{X}^*$, $\mathcal{B}^*$ y $\mathcal{C}^*$, luego se cumplen todos los requisitos del primer caso de la definición de π_α.

Por lo tanto, en $M[G_\alpha]$ tenemos que $X_\alpha = (\mathcal{X}_\alpha)_{G_\alpha}$ es un espacio de Hausdorff con una base numerable determinada por $B_\alpha = (\mathcal{B}_\alpha)_{G_\alpha}$, que $C_\alpha = (\mathcal{C}_\alpha)_{G_\alpha}$ es una coloración abierta en X_α y que X_α no es unión numerable de conjuntos totalmente no coloreados.

Consecuentemente, según el teorema 7.48, en $M[G_{\alpha+1}] = M[G_\alpha][H]$, donde H es un filtro $(\pi_\alpha)_{G_\alpha}$-genérico sobre $M[G_\alpha]$, se cumple que X_α tiene un subconjunto totalmente coloreado no numerable N.

Por otra parte, en $M[G]$ tenemos que $C = \mathcal{C}_G$ es una coloración en $X = \mathcal{X}_G$ respecto a la que X no tiene subconjuntos no numerables totalmente coloreados. Ahora bien, $X_\alpha = X \cap \alpha \subset X$, y $C_\alpha = C \cap [\alpha]^2$, por lo que N es un subconjunto totalmente coloreado de X respecto a C, y es no numerable en $M[G]$ porque la extensión conserva los cardinales, con lo que tenemos una contradicción. ■

Vamos a probar otro resultado sobre modelos que cumplen ACA, pero antes necesitamos un resultado técnico elemental sobre extensiones genéricas:

Teorema 7.50 *Sea $\mathbb{P}$ un c.p.o. con la c.c.n. y sea $\{p_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ una familia de condiciones de $\mathbb{P}$. Entonces existe un $\alpha_0 < \omega_1$ tal que para todo $\alpha_0 \leq \alpha < \omega_1$ se cumple que $p_\alpha \Vdash \{\beta < \omega_1 \mid \check{p}_\beta \in \Gamma\}$ es no numerable.*

Demostración: En caso contrario existe un conjunto W de $\aleph_1$ ordinales $\alpha < \omega_1$ tales que

$$p_\alpha \Vdash \{\beta < \omega_1 \mid \check{p}_\beta \in \Gamma\} \text{ es numerable.}$$

Por 7.13 existe un $\eta_\alpha < \omega_1$ tal que

$$p_\alpha \Vdash \{\beta < \omega_1 \mid \check{p}_\beta \in \Gamma\} \subset \check{\eta}_\alpha,$$

donde la sucesión $\{\eta_\alpha\}_{\alpha\in W}$ está en M.

Ahora bien, entonces podemos formar una sucesión creciente $\{\alpha_\delta\}_{\delta<\omega_1}$ en W tomando $\alpha_\delta \in W$ mayor que todos los α_ϵ y que todos los η_{α_ϵ}, para $\epsilon < \delta$, con lo que $p_{\alpha_\epsilon} \Vdash \check{p}_{\alpha_\delta} \notin \Gamma$. Como trivialmente $p_{\alpha_\delta} \Vdash \check{p}_{\alpha_\delta} \in \Gamma$, concluimos que los p_{α_ϵ} son incompatibles dos a dos, en contra de que $\mathbb{P}$ cumple la c.c.n. ■

Teorema 7.51 *Si M es un modelo transitivo numerable de* ZFC + ACA, *T es un árbol de Suslin en M, $\mathbb{P}$ es T con el orden opuesto y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, entonces en $M[G]$ se sigue cumpliendo* ACA.

Demostración: Del teorema 5.50 se sigue que $\mathcal{N}^{M[G]} = \mathcal{N}^M$, por lo que nos referiremos a este conjunto como $\mathcal{N}$, simplemente. Sea $X \in M[G]$, $X \subset \mathcal{N}$ y sea $C \in M[G]$ una coloración abierta en X. Fijemos una biyección $s : \omega \longrightarrow \omega^{<\omega}$ definida en M, que nos permite enumerar la base natural de $\mathcal{N}$:

$$B_n = B_{s(n)} = \{x \in \mathcal{N} \mid x|_{\mathcal{D}s(n)} = s(n)\}.$$

Notemos que B_n es el mismo en M o en $M[G]$. Podemos considerar la coloración como subconjunto $C \subset X \times X$, y entonces, que sea abierta quiere decir que existe $A \subset \omega \times \omega$ de modo que $C = \bigcup\limits_{(m,n)\in A} (B_m \times B_n) \cap (X \times X)$. De nuevo por 5.50 tenemos que $A \in M$.

Sea $X = \xi_G$. Si X no contiene ningún subconjunto totalmente coloreado no numerable ni es unión numerable de subconjuntos totalmente no coloreados, podemos tomar una condición $p \in \mathbb{P}$ que fuerce que $\xi \subset \mathcal{N}$ y $\check{A}$ codifica una coloración abierta en ξ respecto a la cual ξ no contiene ningún conjunto totalmente coloreado no numerable ni es unión numerable de subconjuntos totalmente no coloreados.

Sea $X_0 = \{x \in \mathcal{N} \mid \bigvee q \in \mathbb{P}(q \leq p \wedge q \Vdash \check{x} \in \xi\} \in M$. Al formar el conjunto A podemos exigir que la unión $\bigcup\limits_{(m,n)\in A} (B_m \times B_n)$ sea simétrica, y desde luego no puede contener elementos de la diagonal de $X \times X$, luego A define en M una coloración abierta de X_0. Vamos a ver que X_0 no es unión numerable de subconjuntos totalmente no coloreados.

En efecto, si $\{H_n\}_{n\in\omega}$ fuera tal colección, en $M[G]$ se cumple claramente que $X \subset X_0$, y cada H_n sigue siendo totalmente no coloreado en $M[G]$, luego $\{X \cap H_n\}_{n\in\omega}$ sería una descomposición de X en unión numerable de subconjuntos totalmente no coloreados.

Como en M se cumple ACA, existe $Y \subset X_0$ totalmente coloreado y no numerable. Podemos suponer que $Y = \{x_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ tiene cardinal $\aleph_1$, concretamente. Para cada $\alpha < \omega_1$, existe $q_\alpha \in \mathbb{P}$ tal que $q_\alpha \leq p$ y $q_\alpha \Vdash \check{x}_\alpha \in \xi$, y podemos aplicar el teorema anterior a las condiciones $\{q_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$, lo que nos da un α tal que $q_\alpha \Vdash \{\beta < \omega_1 \mid \check{q}_\beta \in \Gamma\}$ es no numerable. Si G es un filtro genérico que contenga a q_α, tenemos que $\{\beta < \omega_1 \mid q_\beta \in G\}$ es no numerable en $M[G]$, pero si $q_\beta \in G$ entonces $x_\beta \in \xi_G$, luego $Y \cap \xi_G$ es no numerable en $M[G]$, y es un subconjunto totalmente coloreado, en contra de que p fuerza que no existe tal conjunto. ■

El único modelo de ACA que hemos construido es el del teorema 7.49, donde se cumple también AM y, por lo tanto, no hay árboles de Suslin a los que podamos aplicar el teorema anterior. Sin embargo, para remediar la situación basta eliminar de la prueba de 7.49 todo el esfuerzo que hemos hecho para garantizar AM:

Teorema 7.52 *Existe un modelo transitivo numerable de* ACA + ¬HS.

Demostración: Consideramos una iteración $(\{\mathbb{P}_\alpha\}_{\alpha\leq\omega_2}, \{\pi_\alpha\}_{\alpha<\omega_2})$ con soportes finitos similar a la considerada en la demostración del teorema 7.49, pero sin distinguir entre ordinales pares e impares, de modo que para todo $\alpha < \omega_2$ se cumpla que

$$1\!\!1_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash \pi_\alpha = \omega_1 \text{ y } \pi_\alpha \text{ es isomorfo a un c.p.o. de los construidos en 7.47.}$$

Es pura rutina comprobar que la prueba se simplifica para llegar igualmente a que en $M[G]$ se cumple ACA + $2^{\aleph_0} = \aleph_2$. En particular, en todas las extensiones intermedias de la iteración se sigue cumpliendo la hipótesis del continuo. En la prueba suponemos que en M se cumple un diamante, con lo que en particular se cumple $\Diamond$ y, por lo tanto, existe un árbol de Suslin $T \in M$. Vamos a probar que T sigue siendo un árbol de Suslin en todas las extensiones intermedias, y en particular en la última, de modo que en $M[G]$ se cumple ¬HS.

Como los cardinales se conservan en todas las extensiones intermedias, T es en todas ellas un $\aleph_1$-árbol. Además podemos tomarlo ramificado, y esta propiedad se conserva trivialmente, con lo que [TC 9.16] implica que basta probar que las anticadenas de T siguen siendo numerables en todas las extensiones. Equivalentemente, si llamamos $\mathbb{P}_T$ a T con el orden inverso, basta probar que el c.p.o. $\mathbb{P}_T$ cumple la c.c.n. en todas las extensiones intermedias.

Supongamos que $1\!\!1_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash \check{T}$ es un árbol de Suslin. Para probar que lo mismo vale para $\alpha + 1$ tomamos un filtro genérico $G_{\alpha+1}$ y usamos la factorización $M[G_{\alpha+1}] = M[G_\alpha][H]$, donde H es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[G_\alpha]$, siendo

$\mathbb{Q} \in M[G_\alpha]$ un c.p.o. de los construidos en el teorema 7.47. Tenemos que T es un árbol de Suslin en $M[G_\alpha]$, luego todo se reduce a demostrar que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \Vdash \check{T} \text{ cumple la c.c.n.}$$

Ahora aplicamos un truco, y es que por el teorema 7.15 esto es equivalente a probar que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_T} \Vdash \check{\mathbb{Q}} \text{ cumple la c.c.n.}$$

Para ello sea K un filtro $\mathbb{P}_T$-genérico sobre $M[G_\alpha]$, y tenemos que probar que $\mathbb{Q}$ cumple la c.c.n. en $M[G_\alpha][K]$. Observemos que esta extensión genérica tiene los mismos cardinales que el modelo base, y cumple igualmente HC.

Notemos que $\mathbb{Q}$ está construido en $M[G_\alpha]$ a partir de un espacio topológico X y una coloración abierta C. En $M[G_\alpha]$ se cumple que X no es unión numerable de cerrados totalmente no coloreados, y esto sigue siendo cierto en $M[G_\alpha][K]$. Esto se debe a que cada cerrado puede codificarse con un cierto $A \subset \omega$ (enumeramos en $M[G_\alpha]$ una base de X y tomamos como A el conjunto de los abiertos básicos contenidos completamente en el complementario del cerrado), luego una familia numerable de cerrados puede codificarse con un conjunto $F \subset \omega \times \omega$, que estaría en $M[G_\alpha]$ por el teorema 5.50, y permitiría recuperar en el modelo base la familia numerable de cerrados totalmente no coloreados.

Ahora todo se reduce a comprobar que la construcción del teorema 7.47 es absoluta, de modo que si construimos en $M[G_\alpha][K]$ el c.p.o. $\mathbb{Q}$ asociado a X con la coloración C obtenemos precisamente el $\mathbb{Q}$ que ya tenemos, luego éste también cumple la c.c.n. en la extensión.

Veamos ahora que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\lambda} \Vdash \mathbb{P}_T$ cumple la c.c.n. admitiendo que esto se cumple para todo $\delta < \lambda$. Nuevamente, por el teorema 7.15 basta probar que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_T} \Vdash \mathbb{P}_\lambda$ cumple la c.c.n., y sabemos que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_T} \Vdash \mathbb{P}_\delta$ cumple la c.c.n., para todo $\delta < \lambda$.

Sea K un filtro $\mathbb{P}_T$-genérico sobre M. Basta tener en cuenta que en $M[K]$ seguimos teniendo una iteración $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \lambda}, \{\pi_\delta\}_{\delta < \lambda})$ con soportes finitos en la que cada $\mathbb{P}_\delta$ cumple la c.c.n., y basta aplicar en $M[K]$ el razonamiento empleado para el caso límite en la prueba del teorema 7.27. ■

Así pues, ACA es consistente tanto con AM como con su negación. Si combinamos el teorema anterior con 7.51 y 5.49 obtenemos que ACA es consistente con $\mathfrak{t} = \aleph_1$ (y también con $\mathfrak{t} = \aleph_2$, que es el valor que toma en el modelo en que se cumple ACA+ AM+$\mathfrak{c} = \aleph_2$).

Para terminar esta sección mostramos que la restricción de ACA a coloraciones abiertas es necesaria, puesto que en ZFC podemos probar que existen coloraciones (no abiertas) para las que la conclusión que da ACA es falsa.

Teorema 7.53 *Existe una coloración abierta C de $X = \mathcal{N}$ tal que X no contiene ningún subconjunto no numerable totalmente no coloreado ni puede expresarse como unión numerable de conjuntos totalmente coloreados.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $f \in \mathcal{N}$ vamos a definir una sucesión $\{f_i\}_{i\omega}$ en $\mathcal{N}$. Concretamente, hacemos

$$f_i|_i = f|_i, \qquad f_i(i+j) = f(2^{i+1}(2i+2j+1)).$$

Notemos que la sucesión $\{f_i\}_{i\in\omega}$ converge a f. Esto significa que si tomamos un abierto básico que contenga a f, que será de la forma $B_{f|_n}$, para cierto $n \in \omega$, se cumple que $f_i \in B_{f|_n}$ para todo $n \geq i$.

Definimos una coloración C mediante $\{f, g\} \in C$ si y sólo si $f \neq g$ y $f \neq g_i$, $g \neq f_i$ para todo $i \in \omega$.

La coloración es abierta. Esto significa que si $(f, g) \in C$ (viendo ahora a C como subconjunto de $\mathcal{N}\times\mathcal{N}$), existe un producto de abiertos básicos que cumplen $(f, g) \in B_{f|_m} \times B_{g|_m} \subset C$. En otras palabras, se trata de probar que existe un $m \in \omega$ tal que, para todo par $(f', g') \in \mathcal{N}$ tal que $f'|_m = f|_m$ y $g'|_m = g|_m$, se cumple que $(f', g') \in C$, o que si $(f, g) \in C$, sólo necesitamos conocer una parte finita $(f|_m, g|_m)$ de las sucesiones para comprobar que así sucede.

Sea $m_0 \in \omega$ tal que $f(m_0) \neq g(m_0)$. Entonces, para todo $i > m_0$ tenemos que $f_i(m_0) = f(m_0) \neq g(m_0)$ y $g_i(m_0) = g(m_0) \neq f(m_0)$, luego se cumple $f_i \neq g$ y $g_i \neq f$, y lo mismo pasará con cualquier par de funciones (f', g') tales que $f'|_{m_0+1} = f|_{m_0+1}$, $g'|_{m_0+1} = g|_{m_0+1}$.

Por otro lado, para comprobar que $f_i \neq g$ y $g_i \neq f$ para $i \leq m_0$, sólo tenemos que evaluar las cuatro funciones en un número finito de puntos, y para evaluar las f_i y las g_i en dicho número finito de puntos, sólo necesitamos conocer f y g en un número finito de puntos, luego es claro que podemos tomar un $m > m_0$ de modo que si $f'|_m = f|_m$ y $g'|_m = g|_m$ entonces se cumplirá igualmente que $f'_i \neq g'$, $g'_i \neq f'$, para todo $i \leq m_0$ por una parte, y para todo $i > m_0$ por la parte vista antes. Por lo tanto $(f', g') \in C$.

Veamos ahora que no existen conjuntos totalmente no coloreados no numerables. Sea $Y \subset \mathcal{N}$ un subconjunto no numerable y sea $D \subset Y$ un subconjunto denso numerable. Sea $D^* = \{f_i \mid f \in D \wedge i \in \omega\}$. Como D^* es numerable, podemos tomar $g \in Y \setminus D^*$ y a su vez un $h \in Y$ tal que $h \neq g$ y $h \neq g_i$ para todo $i \in \omega$. Sean U_g y U_h entornos disjuntos de g y h, respectivamente. Como la sucesión g_i converge a g, todos sus términos salvo un número finito de ellos están en U_g, luego restringiendo U_h si es preciso podemos suponer que $g_i \notin U_h$ para todo $i \in \omega$. Como D es denso en Y y $h \in Y \cap U_h \neq \varnothing$, existe $f \in D \cap U_h$. Entonces $f_i \neq g$ para todo $i \in \omega$ porque $g \notin D^*$, y $g_i \neq f$ para todo $i \in \omega$ porque $g_i \notin U_h$. Por lo tanto $\{f, g\} \in C$.

Por último veamos que $\mathcal{N}$ no es unión numerable de conjuntos totalmente coloreados. Sea $\{H_n\}_{n<\omega}$ una sucesión de conjuntos totalmente coloreados y vamos a definir una $f \in \mathcal{N}$ que no pertenezca a ninguno de ellos.

Hacemos $f(2n+1) = 0$ para todo $n \in \omega$. Vamos a definir recurrentemente los valores $f(2i)$ al mismo tiempo que una sucesión $\{f^i\}_{i\in\omega}$ de elementos de $\mathcal{N}$.

Supongamos definida $f|_{2l}$ y las funciones $\{f^i\}_{i<l}$. Si $2l = 2^{i+1}(2i+2j+1)$, para ciertos $i < l$ y $j \in \omega$, claramente únicos, definimos $f(2l) = f^i(i+j)$. En caso contrario tomamos $f(2l)$ el menor número mayor que $f^i(2l)$ para todo $i < l$.

Si existe $g \in H_l$ tal que $g|_l = f|_l$, definimos $f^l = g$, y en caso contrario definimos f^l como cualquier función que extienda a $f|_l$.

Ahora observamos que las funciones f^i que hemos construido son precisamente las funciones f_i asociadas a f. En efecto, fijado un $l \in \omega$, tenemos que $f_l|_l = f|_l = f^l|_l$, donde la primera igualdad es por la definición de f_l y la segunda por la construcción de f^l, que se toma en cualquier caso como una extensión de $f|_l$. Por otra parte,

$$f_l(l+j) = f(2^{l+1}(2l+2j+1)) = f^l(l+j).$$

No puede ocurrir que f esté en ningún H_l, pues en tal caso, existe $g \in H_l$ tal que $g|_l = f|_l$ (sirve $g = f$, pero no podemos asegurar que en la construcción hayamos elegido precisamente f), con lo que también $f_l \in H_l$. Pero no puede ser $f = f_l$, porque tomando $2l' = 2^{i+1} > 2l$, por construcción $f(2l') > f_l(2l')$. Así pues, como H_l está totalmente coloreado, tiene que ser $\{f, f_l\} \in C$, lo cual contradice la definición de la coloración. ■

Así, en ACA no podemos intercambiar "totalmente coloreado" por "totalmente no coloreado" sin que el axioma se vuelva contradictorio. Si en el ejemplo anterior cambiamos la coloración por su opuesta (es decir, consideramos pares coloreados a los que en el ejemplo anterior son no coloreados y viceversa), tenemos un ejemplo de coloración cerrada (en $(\mathcal{N} \times \mathcal{N}) \setminus \Delta_{\mathcal{N}}$) que no cumple ACA.

7.6 Aplicaciones del axioma de las coloraciones abiertas

Como primera aplicación de ACA vamos a ver que implica que no existen más huecos que los que hemos demostrado que existen en ZFC:

Teorema 7.54 (ACA) *Si $\kappa \geq \aleph_2$ y $\mu \geq \aleph_1$ son cardinales regulares, entonces no existen huecos de tipo (κ, μ).*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $(\{f_\alpha\}_{\alpha<\kappa}, \{g_\beta\}_{\beta<\mu})$ es un hueco en ${}^\omega\omega$. Como $f_\alpha <^* f_{\alpha+1} \leq^* g_{\beta+1} <^* g_\beta$, existe un mínimo número natural $n_{\alpha\beta}$ tal que $f_\alpha|_{\omega\setminus n_{\alpha\beta}} < g_\beta|_{\omega\setminus n_{\alpha\beta}}$. Para cada $\alpha < \kappa$ existe un n_α tal que $\{\beta < \mu \mid n_{\alpha\beta} = n_\alpha\}$ tiene cardinal μ, y a su vez, existe un $n \in \omega$ tal que $\{\alpha < \kappa \mid n_\alpha = n\}$ tiene cardinal κ. Tomando una sucesión cofinal creciente en este conjunto y formando la subsucesión correspondiente de $\{f_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$, podemos pasar a otro hueco tal que $n_\alpha = n$ para todo $\alpha < \kappa$. Más aún, definiendo

$$f'_\alpha(m) = f_\alpha(n+m), \qquad g'_\beta(m) = g_\beta(n+m)$$

podemos suponer sin pérdida de generalidad que $n = 0$, en otras palabras, que, para cada $\alpha < \kappa$, el conjunto

$$S_\alpha = \{\beta < \mu \mid f_\alpha < g_\beta\}$$

tiene cardinal μ. Sea

$$X = \{(f_\alpha, g_\beta) \mid \alpha < \kappa \land \beta \in S_\alpha\} \subset \mathcal{N}^2,$$

y sea

$$C = \{\{(f, g), (f', g')\} \in [X]^2 \mid \bigvee k \in \omega (f(k) > g'(k) \lor f'(k) > g(k))\}.$$

Claramente es una coloración abierta en X (pues si un par esta en C y otro par coincide con el dado hasta un natural suficientemente grande (hasta $k+1$), entonces también está en C). Vamos a probar que contradice a ACA.

Supongamos que $X = \bigcup\limits_{n\in\omega} H_n$, donde cada H_n es totalmente no coloreado. Para cada $\alpha < \kappa$ y cada $\beta \in S_\alpha$, sea $n_{\alpha\beta}$ tal que $(f_\alpha, g_\beta) \in H_{n_{\alpha\beta}}$. Para cada α, existe un n_α tal que $T_\alpha = \{\beta \in S_\alpha \mid n_{\alpha\beta} = n_\alpha\}$ tiene cardinal μ, y a su vez existe un n tal que $A = \{\alpha < \kappa \mid n_\alpha = n\}$ tiene cardinal κ.

En definitiva, tenemos que $|A| = \kappa$, para cada $\alpha \in A$ el conjunto T_α tiene cardinal μ y $\{(f_\alpha, g_\beta) \mid \alpha \in A \land \beta \in T_\alpha\} \subset H_n$.

Fijemos $\alpha' \in A$ y $B = T_{\alpha'}$. Así A es cofinal en κ y B es cofinal en μ. Además, si $\alpha \in A$ y $\beta \in B$, tomamos $\beta' \in T_\alpha$, de modo que $(f_\alpha, g_{\beta'})$, $(f_{\alpha'}, g_\beta) \in H_n$, y esto implica que $f_\alpha \leq g_\beta$.

Por consiguiente, si definimos $g(k) = \min\limits_{\beta\in B} g_\beta(k)$, se cumple

$$\bigwedge \alpha \in A \bigwedge \beta \in B \ f_\alpha \leq g \leq g_\beta,$$

luego $\bigwedge \alpha < \kappa \bigwedge \beta < \mu \ f_\alpha \leq^* g \leq^* g_\beta$, en contradicción con que la sección de partida era un hueco.

Supongamos ahora que existe $Y \subset X$ no numerable totalmente coloreado. Si (f_α, g_β), $(f_{\alpha'}, g_{\beta'}) \in Y$ son pares distintos, entonces existe un k tal que $f_\alpha(k) > g_{\beta'}(k)$ o bien $f_{\alpha'}(k) > g_\beta(k)$. Supongamos el primer caso, pues con el segundo se razona igual. La conclusión es que $\alpha \neq \alpha'$ y $\beta \neq \beta'$, pues si fuera $\alpha = \alpha'$ tendríamos que $f_{\alpha'}(k) > g_{\beta'}(k)$, en contra de que $\beta' \in S_{\alpha'}$, y si fuera $\beta = \beta'$ entonces $f_\alpha(k) > g_\beta(k)$, que es igualmente contradictorio.

Esto nos permite construir sucesiones estrictamente crecientes $\{\alpha_\delta\}_{\delta<\omega_1}$, $\{\beta_\delta\}_{\delta<\omega_1}$ tales que $\{(f_{\alpha_\delta}, g_{\beta_\delta}) \mid \delta < \omega_1\} \subset Y$. En efecto, puesto que el conjunto $A = \{\alpha < \kappa \mid \bigvee \beta < \mu \ (f_\alpha, \mu_\beta) \in Y\}$ es no numerable, reduciendo Y podemos suponer que tiene ordinal ω_1, y volviendo a reducir Y podemos suponer que lo mismo vale para $B = \{\beta < \mu \mid \bigvee \alpha < \kappa \ (f_\alpha, g_\beta) \in Y\}$. Entonces, supuesta construida $\{\alpha_\delta\}_{\delta<\gamma}$, $\{\beta_\delta\}_{\delta<\gamma}$, sean α^* y β^* sus supremos respectivos. Entonces, el conjunto

$$\{(f_\alpha, g_\beta) \in Y \mid \alpha \leq \alpha^*\} \cup \{(f_\alpha, g_\beta) \in Y \mid \beta \leq \beta^*\}$$

es numerable pues hemos visto que $(f_\alpha, f_\beta) \mapsto \alpha$ y $(f_\alpha, f_\beta) \mapsto \beta$ son inyectivas, luego existe un $(f_{\alpha_\gamma}, g_{\beta_\gamma}) \in Y$ que no está en dicho conjunto, de modo que $\{\alpha_\delta\}_{\delta\leq\gamma}$, $\{\beta_\delta\}_{\delta\leq\gamma}$ son estrictamente crecientes.

Como $\kappa > \aleph_1$, existe $\alpha < \kappa$ tal que $\alpha > \sup\limits_{\delta<\omega_1} \alpha_\delta$. Llamamos $h = f_\alpha$. Así $f_{\alpha_\delta} \leq^* h \leq^* g_{\beta_\delta}$. Sea $n_\delta \in \omega$ tal que $f_{\alpha_\delta}|_{\omega\setminus n_\delta} \leq h|_{\omega\setminus n_\delta} \leq g_{\beta_\delta}|_{\omega\setminus n_\delta}$. Cambiando la sucesión $\{\alpha_\delta\}_{\delta<\omega_1}$ por una subsucesión cofinal, podemos suponer que existe un $n \in \omega$ tal que $n_\delta = n$ para todo $\delta < \omega_1$. Así, $f_{\alpha_\delta}|_{\omega\setminus n} \leq h|_{\omega\setminus n} \leq g_{\beta_\delta}|_{\omega\setminus n}$. Como hay una cantidad numerable de pares $(f_{\alpha_\delta}|_n, g_{\beta_\delta}|_n)$, restringiendo más la sucesión podemos suponer que todos son el mismo par (s,t), y así resulta que $f_{\alpha_\delta} \leq h \leq g_{\beta_\delta}$.

Pero entonces, si δ, $\epsilon < \omega_1$ son distintos, tenemos que $f_{\alpha_\delta} \leq h \leq g_{\beta_\epsilon}$, y también $f_{alpha_\epsilon} \leq h \leq g_{\beta_\delta}$, pero por otra parte $(f_{\alpha_\delta}, g_{\beta_\delta})$, $(f_{\alpha_\epsilon}, g_{\beta_\epsilon}) \in Y$, que es totalmente coloreado, y esto implica que existe un k tal que $f_{\alpha_\delta}(k) > g_{\beta_\epsilon}(k)$ o bien $f_{\alpha_\epsilon}(k) > g_{\beta_\delta}(k)$, con lo que tenemos una contradicción. ■

Así pues, bajo ACA, los únicos huecos posibles son los de tipo $(\aleph_1, \aleph_1)$ y los de tipo $(\aleph_0, \kappa)$, con $\kappa \geq \mathfrak{b}$. Más aún, el teorema 7.39 nos da:

Teorema 7.55 (ACA) $\mathfrak{b} \leq \aleph_2$.

DEMOSTRACIÓN: Si fuera $\aleph_2 > \mathfrak{b}$, por el teorema 7.39 existiría un hueco de tipo $(\aleph_2, \kappa)$, para cierto $\kappa \geq \aleph_1$, en contradicción con el teorema anterior.

Vamos a probar que en realidad ACA implica que $\mathfrak{b} = \aleph_2$. Para ello necesitamos algunos resultados previos.

Teorema 7.56 (ACA) *Todo subconjunto no numerable de $\mathcal{P}\omega$ contiene una cadena no numerable o bien una anticadena (en el sentido de conjuntos no comparables dos a dos por la inclusión) no numerable.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $A \subset \mathcal{P}\omega$ no numerable, y sea $X \subset \mathcal{N}$ el conjunto formado por las funciones características de los elementos de A. Definimos en X la coloración C formada por los pares de funciones características de conjuntos incomparables respecto de la inclusión.

Se trata de una coloración abierta, pues si $(f,g) \in C$, existen i, $j \in \omega$ tales que $f(i) = g(j) = 0$ y $f(j) = g(i) = 1$, y si $n > i, j$, todo par $(f', g') \in X \times X$ de funciones que cumplan $f'|_n = f|_n$, $g'|_n = g|_n$ cumplirá lo mismo, luego $(f', g') \in C$.

Si X tiene un subconjunto no numerable completamente coloreado, entonces sus elementos se corresponden con una anticadena no numerable en A. Si X es unión numerable de conjuntos totalmente no coloreados, al menos uno de ellos será no numerable, y se corresponderá con una cadena en A. ■

Teorema 7.57 *Sea κ un cardinal y $\{f_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ una sucesión en ${}^\omega\omega$ tal que:*

a) Cada $f_\alpha : \omega \longrightarrow \omega$ es creciente.

b) La sucesión $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\omega}$ es estrictamente creciente en el sentido de que si $\alpha < \beta$ entonces $f_\alpha \leq^* f_\beta$ y $f_\alpha \neq^* f_\beta$.

c) La sucesión no está acotada en ${}^\omega\omega$.

Entonces para cada $A \subset [\kappa]^\kappa$ existen α, $\beta \in I$ tales que $\alpha < \beta$ y $f_\alpha \leq f_\beta$.

Demostración: Sea $g : \kappa \longrightarrow A$ la única semejanza en su ordinal. Entonces la sucesión $\{f_{g(\alpha)}\}_{\alpha<\kappa}$ cumple las condiciones del enunciado, y si probamos el teorema para ella con $A = \kappa$, se cumple también para el conjunto A dado. Así pues, no perdemos generalidad si suponemos $A = \kappa$. Sea

$$S = \{s \in \omega^{<\omega} \mid \bigvee \alpha < \kappa \; s \subset f_\alpha\}.$$

Para cada $s \in S$ sea $\alpha_s = \min\{\alpha < \kappa \mid s \subset f_\alpha\}$ y $\beta_0 = \sup\{\alpha_s \mid s \in S\}$. Como $\operatorname{cf}\kappa \geq \mathfrak{b} \geq \aleph_1$ y S es numerable, concluimos que $\beta_0 < \kappa$. Observemos que $f_{\alpha_s} \leq^* f_{\beta_0}$ para todo $s \in S$. Sea $\phi : \kappa \setminus \beta_0 \longrightarrow \omega$ tal que para todo $\alpha \in \kappa \setminus \beta_0$ se cumpla

$$f_{\beta_0}|_{\omega\setminus\phi(\alpha)} \leq f_\alpha|_{\omega\setminus\phi(\alpha)}.$$

Usando de nuevo que la cofinalidad de κ no es numerable, existe un $n_0 \in \omega$ y $X_0 \subset \kappa$ cofinal de modo que $\phi[X_0] = \{n_0\}$. Podemos partir X_0 en un número finito de subconjuntos según el valor de $f_\alpha|_{n_0}$, para cada $\alpha \in X_0$. Alguno de estos subconjuntos de X_0 será cofinal en κ, luego restringiendo X_0 podemos suponer que $f_\alpha|_{n_0} = s_0$, para un mismo $s_0 \in {}^{n_0}\omega$ independiente de α. Notemos que la sucesión $\{f_\alpha\}_{\alpha\in X_0}$ sigue siendo no acotada.

Veamos ahora que $\bigvee n \in \omega \bigwedge \alpha < \kappa \bigwedge m \in \omega \bigvee \beta \in X_0(\alpha \leq \beta \wedge f_\beta(n) \geq m)$.

En caso contrario para cada $n \in \omega$ existen $\alpha_n < \kappa$ y $m_n \in \omega$ tales que

$$\bigwedge \beta \in X_0(\alpha_n \leq \beta \rightarrow f_\beta(n) < m_n).$$

Sea $\gamma = \sup\limits_n \alpha_n < \kappa$, sea $f \in {}^\omega\omega$ definida por $f(n) = m_n$. Entonces, para cada $\beta \in X_0$ tal que $\gamma \leq \beta$ se cumple $f_\beta \leq f$, luego f acota a $\{f_\alpha\}_{\alpha\in X_0}$, contradicción.

Sea $n_1 \in \omega$ el menor natural que cumple

$$\bigwedge \alpha < \kappa \bigwedge m \in \omega \bigvee \beta \in X_0(\alpha \leq \beta \wedge f_\beta(n_1) \geq m).$$

Como todas las funciones f_β con $\beta \in X_0$ cumplen que $f_\beta|_{n_0}$ es fijo, tiene que ser $n_0 \leq n_1$. La minimalidad de n_1 hace que $f_\beta(i)$ para $i < n_1$ esté acotado para β grande, es decir, existe un $\beta_1 \geq \beta_0$ y un $s_1 \in {}^{n_1}\omega$ de modo que

$$\bigwedge \beta \in X_0(\beta_1 \leq \beta \rightarrow f_\beta|_{n_1} \leq s).$$

De nuevo podemos partir X_0 en un número finito de partes y quedarnos con una de ellas, $X_1 \subset X_0$, de modo que para todo $\beta \in X_1$ la restricción $f_\beta|_{n_1} = s_1$ sea un valor fijo independiente de β y el conjunto $\{f_\alpha(n_1) \mid \alpha \in X_1\}$ no esté acotado en ω. (Aquí usamos que sólo hay un número de funciones $s' \leq s$ en ${}^{n_1}\omega$.) Sea $n_1 \leq n_2$ tal que

$$f_{\alpha_{s_1}}|_{\omega \setminus n_2} \leq f_{\beta_0}|_{\omega \setminus n_2}.$$

Finalmente sea $\alpha^* \in X_1$ tal que $\beta_0 < \alpha^*$ y $f_{\alpha_{s_1}}(n_2) \leq f_{\alpha^*}(n_1)$. Veamos que $f_{\alpha_{s_1}} \leq f_{\alpha^*}$, lo cual concluirá la prueba.

Tomamos $n \in \omega$. Si $n < n_1$ entonces $f_{\alpha_{s_1}}(n) = s_1(n) = f_{\alpha^*}(n)$. Si, por el contrario, $n_1 \leq n < n_2$, entonces

$$f_{\alpha_{s_1}}(n) \leq f_{\alpha_{s_1}}(n_2) \leq f_{\alpha^*}(n_1) \leq f_{\alpha^*}(n).$$

Por último, si $n_2 \leq n$, entonces $f_{\alpha_{s_1}}(n) \leq f_{\beta_0}(n) \leq f_{\alpha^*}(n)$. ■

Como consecuencia:

Teorema 7.58 (ACA) $\mathfrak{b} = \aleph_2$.

DEMOSTRACIÓN: Ya sabemos que $\mathfrak{b} \leq \aleph_2$. Si no se da la igualdad existe una sucesión $\{f_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ no acotada en ${}^\omega\omega$, y la podemos modificar para que cumpla las condiciones del teorema anterior. En efecto, podemos definir una sucesión estrictamente creciente de funciones monótonas $\{g_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ como sigue: supuesta definida $\{g_\alpha\}_{\alpha<\beta}$, con $\beta < \omega_1$, no puede ser no acotada, luego existe una función g_β que las acota a todas, y modificándola adecuadamente podemos hacer que sea creciente, que acote estrictamente a todas las funciones anteriores y de modo que además $f_\alpha \leq g_\alpha$. De este modo, la sucesión completa no está acotada, pues si lo estuviera también lo estaría la sucesión inicial.

Para cada $\alpha < \omega_1$ sea $x_\alpha = \{(n, m) \in \omega \times \omega \mid f_\alpha(n) \leq m\}$. Claramente, se trata de una sucesión estrictamente decreciente respecto de $\subset^*$. Vamos a probar que la familia $\{x_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ no contiene ni cadenas ni anticadenas no numerables respecto de $\subset$, lo que contradice al teorema 7.56.

Sea $A \subset \omega_1$ no numerable. Entonces $\{x_\alpha \mid \alpha \in A\}$ no puede ser una cadena respecto de $\subset$, porque si $\alpha < \beta$, sabemos que $x_\beta \subset^* x_\alpha$ y $x_\beta \neq^* x_\alpha$, luego la única relación de inclusión que se puede dar entre x_α y x_β es $x_\beta \subset x_\alpha$. Por lo tanto, tendríamos que para todo $\alpha < \beta$ en A, se cumpliría $x_\beta \subsetneq x_\alpha$, pero eso es imposible, porque tomando $u_\alpha \in x_\alpha \setminus x_{\alpha'}$, donde α' es el siguiente de α en A, tendríamos una cantidad no numerable de elementos de $\omega \times \omega$.

Por otra parte, el teorema anterior nos da $\alpha < \beta$ en A tales que $f_\alpha \leq f_\beta$, luego $x_\beta \subset x_\alpha$, luego $\{x_\alpha \mid \alpha \in A\}$ tampoco es una anticadena. ■

En particular ACA$\rightarrow \mathfrak{c} \geq \aleph_2$, luego el teorema 7.54 implica ahora que, bajo ACA, no existen huecos de tipo $(\mathfrak{c}, \mathfrak{c})$, ni de tipo $(\mathfrak{c}, \aleph_1)$. Como hemos demostrado que AM + ACA es consistente, ahora podemos afirmar que AM no implica la existencia de huecos de estos tipos. Por otra parte,

$$\mathrm{AM} + \mathrm{ACA} \to \mathfrak{c} = \aleph_2,$$

pues $\mathfrak{c} = \mathfrak{b} = \aleph_2$, la primera igualdad por AM y la segunda por ACA. Los teoremas 5.49, 7.51 y 7.52 implican que ACA es consistente con $\mathfrak{t} = \aleph_1$ (y también con $\mathfrak{t} = \aleph_2$, que se sigue de AM + ACA, luego ACA no determina $\mathfrak{t}$). Es un problema abierto si ACA implica $\mathfrak{c} = \aleph_2$.

Terminamos la sección con una aplicación elemental de ACA. No es difícil probar que toda sucesión en $\mathbb{R}$ contiene una subsucesión monótona. Una aplicación elemental del teorema anterior es la siguiente generalización de este hecho:

Teorema 7.59 (ACA) *Si $X \subset \mathbb{R}$ es un conjunto no numerable y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces existe $Y \subset X$ no numerable tal que $f|_Y : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ es monótona.*

Demostración: Si existe un $a \in \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}[\{a\}]$ es no numerable, basta tomar $Y = f^{-1}[\{a\}]$. En caso contrario $f[X]$ es no numerable, pues $X = \bigcup\limits_{a \in f[X]} f^{-1}[\{a\}]$ y todos los conjuntos de la unión son numerables.

Por lo tanto, eligiendo una antiimagen de cada elemento de $f[X]$ podemos reducir X y suponer que f es inyectiva. Para cada $x \in X$ sea

$$q_x = \{y \in \mathbb{Q} \mid y \leq x\} \times \{z \in \mathbb{Q} \mid z \leq f(x)\}.$$

Sea $Z = \{q_x \mid x \in X\}$, que es un subconjunto no numerable de $\mathcal{P}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$. Es claro que el teorema anterior vale para subconjuntos no numerables de cualquier $\mathcal{P}U$, con U numerable, luego podemos concluir que Z tiene una cadena o una anticadena no numerable Z'. Sea $Y = \{x \in X \mid q_x \in Z'\}$, que es un subconjunto no numerable de X. Si Z' es una cadena, entonces $f|_Y$ es monótona creciente, mientras que si Z' es una anticadena entonces $f|_Y$ es monótona decreciente. ■

Capítulo VIII

La independencia del axioma de elección

Ya hemos demostrado que si ZF es consistente, también lo es ZFC, puesto que hemos probado la consistencia de ZF + $V = L$, y el axioma de constructibilidad implica el axioma de elección. Por otra parte, en [TD 6.34] hemos probado la consistencia de ZF + $V = L(\mathcal{P}\omega)$ + $\mathcal{P}\omega$ no puede ser bien ordenado, lo que conlleva que en ZF (o incluso en ZF + ED) no es posible demostrar que $\mathcal{P}\omega$ (o $\mathbb{R}$) admita un buen orden, y en particular no es posible demostrar el axioma de elección.

En este capítulo vamos a exponer técnicas que nos permitirán construir modelos transitivos de ZF en los que fallen diversas consecuencias del axioma de elección, con lo que probaremos que realmente requieren AE para ser demostradas.

8.1 Modelos simétricos

En esta sección presentamos una técnica para construir modelos de ZF ideada por von Neumann que no es compatible con el axioma de regularidad, pero en la sección siguiente veremos que los argumentos que emplearemos aquí pueden adaptarse para obtener extensiones genéricas con las mismas propiedades y en las que sí que se cumple el axioma de regularidad. Salvo por algunas definiciones básicas sobre grupos que introduciremos aquí y que necesitaremos después (8.4 y 8.6), el lector puede omitir los resultados de esta sección y pasar directamente a la siguiente. La única utilidad de esta sección es que presenta más claramente las ideas importantes del argumento, al no "mezclarlas" con la teoría de extensiones genéricas, por lo que constituyen una buena aproximación al problema de violar el axioma de elección.

En esta sección trabajamos en la teoría ZFCA definida en [LM 12.28] y cuya consistencia (relativa a la consistencia de ZFC) está probada en [LM 12.29]. Vamos a recordarla brevemente:

En ZFC menos el axioma de regularidad podemos definir la clase de todos los *átomos* como

$$A = \{x \mid x = \{x\}\}.$$

Obviamente el axioma de regularidad implica que $A = \varnothing$, pero aquí vamos a tomar como axioma que A es un conjunto (posiblemente no vacío). Además, construimos la jerarquía

$$R_0(A) = A, \quad R_{\alpha+1}(A) = \mathcal{P}R_\alpha(A), \quad R_\lambda(A) = \bigcup_{\delta<\lambda} R_\delta(A),$$

$$R(A) = \bigcup_{\alpha\in\Omega} R_\alpha(A).$$

La teoría ZFCA es la que resulta de añadir a ZFC menos el axioma de regularidad los axiomas "A es un conjunto" y $V = R(A)$. Según hemos indicado, [LM 12.29] prueba que si ZFC es consistente también lo es ZFCA + A es infinito numerable.[1]

Notemos que la sucesión $\{R_\alpha(A)\}_{\alpha\in\Omega}$ es una sucesión creciente de conjuntos transitivos.

Lo que podemos hacer con ZFCA que no podemos hacer con ZFC es construir automorfismos de la clase universal. Para ello definimos el conjunto Σ_A de todas las permutaciones de A, es decir, de todas las aplicaciones $f : A \longrightarrow A$ biyectivas, que claramente es un grupo con la operación dada por la composición de aplicaciones.

Si $f \in \Sigma_A$, definimos como sigue una sucesión transfinita automorfismos $f_\alpha : R_\alpha(A) \longrightarrow R_\alpha(A)$, es decir, de aplicaciones biyectivas que cumplen

$$\bigwedge xy \in R_\alpha(A)(x \in y \leftrightarrow f_\alpha(x) \in f_\alpha(y)).$$

Notemos que esto equivale a que $\bigwedge y \in R_\alpha(A)\ f_\alpha(y) = f_\alpha[y]$.

Tomamos $f_0 = f : R_0(A) \longrightarrow R_0(A)$, que trivialmente es un automorfismo, porque los elementos de A son átomos.

Supuesto definido el automorfismo f_α, definimos $f_{\alpha+1} : \mathcal{P}R_\alpha(A) \longrightarrow \mathcal{P}R_\alpha(A)$ mediante $f_{\alpha+1}(x) = f_\alpha[x]$. De este modo, si $x \in R_\alpha(A) \subset R_{\alpha+1}(A)$, se cumple que $f_{\alpha+1}(x) = f_\alpha[x] = f_\alpha(x)$, luego $f_{\alpha+1}$ extiende a f_α. Además la definición de $f_{\alpha+1}$ puede reescribirse ahora en la forma $\bigwedge x \in R_{\alpha+1}(A)\ f_{\alpha+1}(x) = f_{\alpha+1}[x]$, con lo que $f_{\alpha+1}$ es un automorfismo.

Por último, si tenemos definidas $\{f_\delta\}_{\delta<\lambda}$ de modo que sean automorfismos y cada cual extienda a los anteriores, basta definir $f_\lambda = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} f_\delta$, y claramente es un automorfismo que extiende a los anteriores.

Finalmente, podemos definir $\bar{f} = \bigcup\limits_{\alpha\in\omega} f_\alpha : V \longrightarrow V$, que es claramente un automorfismo de la clase universal. Concretamente, se cumplen las propiedades siguientes, cuya prueba dejamos a cargo del lector:

[1] La prueba se adapta fácilmente para probar que también es consistente que A no sea numerable, pero sólo vamos a necesitar este caso en la práctica.

Teorema 8.1 *Sean f, $g \in \Sigma_A$. Entonces:*

a) $\bar{f} : V \longrightarrow V$ *biyectiva.*

b) $\bigwedge xy(x \in y \leftrightarrow \bar{f}(x) \in \bar{f}(y))$.

c) $\bigwedge x\ \bar{f}(x) = \bar{f}[x]$.

d) $\bar{f}|_A = f$.

e) $\bar{1} = 1$ *(donde el primer* 1 *representa a la identidad en* A *y el segundo es la identidad en* V*).*

f) $\overline{f \circ g} = \bar{f} \circ \bar{g}$.

g) $\overline{f^{-1}} = \bar{f}^{-1}$.

En lo sucesivo escribiremos f en lugar de $\bar{f}$. En la práctica, en virtud de la construcción precedente podemos hacer actuar cualquier $f \in \Sigma_A$ sobre cualquier conjunto, aunque no sea un átomo.

Ejemplo Un conjunto "típico" de ZFCA es

$$x = \{\{a, \{b, c\}\}, \{\{\varnothing\}, \{a, \varnothing\}\}\},$$

donde a, b y c son átomos, es decir, los conjuntos de ZFCA están construidos a partir de $\varnothing$ y de los átomos. Si $f \in \Sigma_A$, entonces

$$f(x) = \{\{f(a), \{f(b), f(c)\}\}, \{\{\varnothing\}, \{f(a), \varnothing\}\}\}.$$

Podemos decir que $f(x)$ es un conjunto construido con los mismos "planos" que x pero con diferentes "ladrillos". ■

La idea básica de la teoría que vamos a exponer aquí es que podemos "medir" la simetría de un conjunto mediante el conjunto de elementos de Σ_A que lo dejan invariante,[2] y la clase de todos los conjuntos "suficientemente simétricos", en un sentido que tenemos que precisar, será un modelo de ZFA, es decir, de ZFCA sin el axioma de elección, debido a que este axioma postula la existencia de conjuntos "poco simétricos".

Definición 8.2 Si H es un subgrupo de Σ_A y $x \in V$, definimos el *grupo de simetrías* de x en H como

$$\mathrm{Sim}_H(x) = \{f \in H \mid f(x) = x\}.$$

Es claro que $\mathrm{Sim}_H(x)$ es un subgrupo de H.

[2]La analogía geométrica que sugiere el uso de la palabra "simetría" en este contexto abstracto es que, por ejemplo, un cuadrado es "más simétrico" que un rectángulo, porque sólo hay cuatro isometrías que dejan invariante a un rectángulo (dos simetrías y dos giros, uno de ellos la identidad), mientras que hay ocho isometrías que dejan invariante a un cuadrado (cuatro simetrías y cuatro giros, contando la identidad).

Así, un conjunto es "más simétrico" cuanto mayor es su grupo de simetrías. Por ejemplo, dados dos átomos a y b, el par desordenado $\{a, b\}$ es más simétrico que el par ordenado (a, b), pues, como $f(\{a, b\}) = \{f(a), f(b)\}$, el grupo de simetrías $\mathrm{Sim}_G(\{a, b\})$ está formado por todas las permutaciones de G que fijan o intercambian a y b, mientras que, como $f((a, b)) = (f(a), f(b))$, el grupo $\mathrm{Sim}_G((a, b))$ está formado únicamente por las permutaciones de G que fijan a a y a b.

Es evidente que $\mathrm{Sim}_H(A) = H$, por lo que A es totalmente simétrico. Lo mismo les sucede a todos los conjuntos regulares:

Teorema 8.3 *Si H es un subgrupo de Σ_A y $x \in R$, entonces* $\mathrm{Sim}_H(x) = H$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $f \in H$. Hemos de probar que $f(x) = x$ para todo $x \in R$. Como la relación de pertenencia está bien fundada en R podemos probarlo por $\in$-inducción. Suponemos que $f(u) = u$ para todo $u \in x$ y vemos entonces que

$$f(x) = \{f(u) \mid u \in x\} = \{u \mid u \in x\} = x.$$

■

Ahora necesitamos resolver el problema siguiente: dado $f \in \Sigma_A$ y un conjunto x, el conjunto $f(x)$ tiene la misma estructura que x, luego es de esperar que x y $f(x)$ tengan grupos de simetrías similares. Concretamente, ¿cuál es la relación entre $\mathrm{Sim}_H(x)$ y $\mathrm{Sim}_H(f(x))$? Para responder a esta pregunta introducimos algunos conceptos más:

Definición 8.4 Si A es un conjunto y f, $g \in \Sigma_A$, definimos el *conjugado* de g por f como $g^f = f^{-1} \circ g \circ f$.

Si G es un subgrupo de Σ_A definimos el *subgrupo conjugado* de G por f como

$$G^f = \{g^f \mid g \in G\},$$

que claramente es también un subgrupo de Σ_A.

Teorema 8.5 *Si H es un subgrupo de Σ_A, $f \in \Sigma_A$ y $x \in \mathrm{V}$, entonces*

$$\mathrm{Sim}_H(f(x)) = \mathrm{Sim}_H(x)^f.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $g \in \mathrm{Sim}_H(x)^f$. Entonces existe un $u \in \mathrm{Sim}_H(x)$ tal que $g = u^f$. Así pues, $g(f(x)) = f(u(f^{-1}(f(x)) = f(u(x)) = f(x)$. Esto prueba que $g \in \mathrm{Sim}_H(x)$.

Recíprocamente, si $g \in \mathrm{Sim}_H(x)$ tenemos que $g(f(x)) = f(x)$, de donde se sigue que $f^{-1}(g(f(x))) = x$, lo cual quiere decir que $u = fgf^{-1} \in \mathrm{Sim}_H(x)$ y, por consiguiente $g = f^{-1}uf = u^f \in \mathrm{Sim}_H(x)^f$. ■

Ahora marcamos la frontera entre los conjuntos "suficientemente simétricos" y los que no lo son. Para ello introducimos el concepto siguiente:

Definición 8.6 Sea H un subgrupo de Σ_A. Un *filtro de subgrupos* de H es una familia $\mathcal{F}$ de subgrupos de H tal que

a) $H \in \mathcal{F}$,

b) Si $G \in \mathcal{F}$ y K es un subgrupo de H tal que $G \subset K \subset H$, entonces $K \in \mathcal{F}$,

c) Si G, $K \in \mathcal{F}$, entonces $G \cap K \in \mathcal{F}$.

Diremos que $\mathcal{F}$ es un *filtro normal* si además verifica que si $K \in \mathcal{F}$ y $f \in H$, entonces $K^f \in \mathcal{F}$.

La idea es que $\mathcal{F}$ determina una familia de subgrupos de H a los que podemos llamar "grandes" (H es grande, todo subgrupo que contenga un subgrupo grande es grande, etc.) Ahora definimos los conjuntos simétricos como los que tienen un grupo de simetrías grande:

Definición 8.7 Si H es un subgrupo de Σ_A y $\mathcal{F}$ es un filtro normal de subgrupos de H, definimos la clase de los conjuntos *simétricos* (respecto de H y $\mathcal{F}$) como

$$S = \{x \mid \mathrm{Sim}_H(x) \in \mathcal{F}\}.$$

Ejemplo Supongamos[3] que $A = \{a, b, c\}$, que $H = \Sigma_A$ y que $\mathcal{F} = \{H\}$. Entonces

$$\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\} \in S,$$

pero $\{a, b\} \notin S$. Esto muestra que la clase S no tiene por qué ser transitiva. ■

En vista de este ejemplo, pasamos a considerar conjuntos hereditariamente simétricos:

Definición 8.8 Sea H un subgrupo de Σ_A y $\mathcal{F}$ un filtro normal de subgrupos de H. Definimos la clase de los conjuntos *hereditariamente simétricos* (respecto de H y $\mathcal{F}$) como

$$HS = \{x \in S \mid \mathrm{ct}\, x \subset S\}.$$

Así, los conjuntos hereditariamente simétricos son los conjuntos simétricos tales que sus elementos son simétricos y los elementos de sus elementos son simétricos, etc. El teorema siguiente contiene sus propiedades básicas:

Teorema 8.9 *Sea H un subgrupo de Σ_A y $\mathcal{F}$ un filtro normal de subgrupos de H. Entonces*

a) La clase HS es transitiva.

b) $\bigwedge x(x \in HS \leftrightarrow x \in S \land x \subset HS)$,

c) $R \subset HS$,

d) Si $f \in H$, entonces $f|_{HS} : HS \longrightarrow HS$ biyectiva.

[3]Aunque estamos suponiendo que A es infinito, en este ejemplo lo tomamos finito por simplicidad. Es fácil construir un ejemplo análogo con A infinito.

Demostración: a) Si $u \in x \in HS$, entonces $\operatorname{ct} u \subset \operatorname{ct} x \subset S$ y $u \in \operatorname{ct} x \subset S$, luego $u \in HS$.

b) Si $x \in S \wedge x \subset HS$, como HS es una clase transitiva, $\operatorname{ct} x \subset HS \subset S$, luego $x \in HS$. El recíproco es obvio.

c) Para probar que $R \subset HS$ razonamos por $\in$-inducción, suponemos que $x \in R$ cumple $x \subset HS$ y hemos de probar que $x \in HS$. Por el apartado anterior basta ver que $x \in S$, pero sabemos que $\mathrm{Sim}_H(x) = H \in \mathcal{F}$.

d) En primer lugar observamos que si $x \in S$ entonces $f(x) \in S$, pues si $x \in S$ entonces $\mathrm{Sim}_H(x) \in \mathcal{F}$, luego $\mathrm{Sim}_H(f(x)) = \mathrm{Sim}_H(x)^f \in \mathcal{F}$ por la condición de normalidad.

Supongamos ahora que existe un conjunto $x \in HS$ tal que $f(x) \notin HS$. Podemos tomar el mínimo ordinal α tal que existe un conjunto $x \in R_\alpha(A)$ en estas condiciones. Obviamente α no puede ser un límite. Si $\alpha = 0$ entonces x es un átomo, luego $f(x)$ también lo es. Hemos visto que $f(x) \in S$, y al ser un átomo $\operatorname{ct} f(x) = f(x) \subset S$, luego $f(x) \in HS$, contradicción.

Si $\alpha = \beta + 1$ entonces $x \subset R_\beta(A)$ y por la minimalidad de α ha de ser $f(x) = f[x] \subset HS$. Como $f(x) \in S$, de hecho $f(x) \in HS$, contradicción.

Con esto hemos probado que $f|_{HS} : HS \longrightarrow HS$. Lo mismo vale para f^{-1}, y $(f^{-1})|_{HS}$ resulta ser la inversa de $f|_{HS}$. Así pues, $f|_{HS} : HS \longrightarrow HS$ biyectiva. ■

Es evidente que los automorfismos de una clase transitiva conservan las fórmulas. Concretamente:

Teorema 8.10 *Sea $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula de $\mathcal{L}_m$. Entonces en ZFCA se demuestra que si H es un subgrupo de Σ_A, $\mathcal{F}$ es un filtro normal de subgrupos de H y $f \in H$, entonces*

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in HS(\phi^{HS}(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi^{HS}(f(x_1), \ldots, f(x_n))).$$

Esto se prueba por inducción sobre la longitud de ϕ probando simultáneamente la versión correspondiente para términos, es decir,

$$\bigwedge x_1 \cdots x_n \in HS(f(t^{HS}(x_1, \ldots, x_n)) = t^{HS}(f(x_1), \ldots, f(x_n))).$$

Ahora estamos en condiciones de probar el resultado básico:

Teorema 8.11 *Si H es un subgrupo de Σ_A y $\mathcal{F}$ es un filtro normal de subgrupos de H entonces HS es un modelo transitivo de* ZFA.

Demostración: Como HS es transitivo, cumple el axioma de extensionalidad.

Para comprobar el axioma del par tomamos x, $y \in HS$. Consideremos una permutación $f \in \mathrm{Sim}_H(x) \cap \mathrm{Sim}_H(x)$. Claramente

$$f(\{x, y\}) = \{f(x), f(y)\} = \{x, y\}.$$

Con esto hemos probado que $\mathrm{Sim}_H(x) \cap \mathrm{Sim}_H(y) \subset \mathrm{Sim}_H(\{x, y\})$, luego $\mathrm{Sim}_H(\{x, y\}) \in \mathcal{F}$ y $\{x, y\} \in S$. Puesto que obviamente $\{x, y\} \subset HS$, tenemos, de hecho, que $\{x, y\} \in HS$.

Para el axioma de la unión tomamos $x \in HS$ y vamos a probar que

$$\mathrm{Sim}_H(x) \subset \mathrm{Sim}_H(\bigcup x).$$

En efecto, si $f \in \mathrm{Sim}_H(x)$, entonces

$$f(\bigcup_{u\in x} u\Big) = f\Big[\bigcup_{u\in x} u\Big] = \bigcup_{u\in x} f[u] = \bigcup_{u\in x} f(u) = \bigcup_{u\in x} u.$$

porque, como $f[x] = x$, resulta que f permuta los conjuntos $u \in x$. Esto prueba que la unión es simétrica, pero por transitividad $\bigcup\limits_{u\in x} u \subset HS$, luego la unión es hereditariamente simétrica.

Para el axioma de reemplazo consideramos una fórmula $\phi(x, y, x_1, \ldots, x_n)$, fijamos $x_1, \ldots, x_n \in HS$ y suponemos que

$$\bigwedge xyz \in HS(\phi^{HS}(x, y) \land \phi^{HS}(x, z) \to y = z).$$

A su vez, fijamos $a \in HS$ y tenemos que probar que

$$b = \{y \in HS \mid \bigvee x \in a\ \phi^{HS}(x, y, x_1, \ldots, x_n)\} \in HS.$$

Como $b \subset HS$, sólo hay que probar que $b \in S$. Para ello probaremos que

$$\mathrm{Sim}_H(a) \cap \mathrm{Sim}_H(x_1) \cap \cdots \cap \mathrm{Sim}_H(x_n) \subset \mathrm{Sim}_H(b).$$

Tomamos una permutación f en la intersección de los grupos de simetrías. Si $y \in b$ entonces existe $x \in a$ tal que $\phi^{HS}(x, y, x_1, \ldots, x_n)$. Por el teorema anterior $\phi^{HS}(f(x), f(y), x_1, \ldots, x_n)$ y $f(x) \in f(a) = a$, luego $f(y) \in b$. Esto prueba que $f[b] \subset b$ y el mismo razonamiento aplicado a f^{-1} nos da que $f^{-1}[b] \subset b$, que equivale a $b \subset f[b]$, luego tenemos la igualdad y $f \in \mathrm{Sim}_H(b)$.

Como $\Omega \subset R \subset HS$ tenemos que HS cumple el axioma de infinitud.

Para probar el axioma de partes tomamos $x \in HS$ y hemos de ver que $\mathcal{P}x \cap HS \in HS$. Como $\mathcal{P}x \cap HS \subset HS$, sólo hay que probar que $\mathcal{P}x \cap HS \in S$. Para ello basta ver que $\mathrm{Sim}_H(x) \subset \mathrm{Sim}_H(\mathcal{P}x \cap HS)$.

Si $f \in \mathrm{Sim}_H(x)$ y $u \in \mathcal{P}x \cap HS$, entonces $u \subset x$, luego

$$f(u) = f[u] \subset f[x] = f(x) = x,$$

luego $f(u) \in \mathcal{P}x \cap HS$. Con esto hemos probado que $f[\mathcal{P}x \cap HS] \subset \mathcal{P}X \cap HS$. Razonando con f^{-1} tenemos la otra inclusión, luego $f(\mathcal{P}x \cap HS) = \mathcal{P}X \cap HS$.

Con esto tenemos que HS es un modelo de ZF. Para probar que es un modelo de ZFA observamos primero que "x es un ordinal" es absoluto para HS. En efecto, en ZF se demuestra que

x es un ordinal $\to$ x es transitivo $\land$ x es conexo $\land$ x no contiene átomos, y en ZFA se demuestra también la implicación contraria (en general, un conjunto transitivo y sin átomos está bien fundado). En particular ser un ordinal es Δ_0 en ZFA. No obstante esto no nos vale porque todavía no sabemos que HS sea un modelo de ZFA.

Ahora bien, si α es un ordinal, entonces α es un ordinal^{HS}, porque ser un ordinal es Π_1 en cualquier caso, y si α es un ordinal^{HS}, entonces α es (transitivo, conexo y sin átomos)^{HS}, luego cumple todo esto sin relativizar (porque todo es Δ_0) y, como estamos trabajando en ZFCA, esto implica que α es un ordinal.

Ahora es claro que ser un ordinal límite o un ordinal sucesor también es absoluto para HS. Seguidamente demostramos por inducción sobre α que

$$\bigwedge\alpha\ R_\alpha(A)^{HS} = R_\alpha(A) \cap HS.$$

En efecto, para $\alpha = 0$ relativizamos $\bigwedge x(x \in R_0(A) \leftrightarrow x$es un átomo) y así obtenemos $\bigwedge x(x \in R_0(A)^{HS} \leftrightarrow x \in A \cap HS)$, luego

$$R_0(A)^{HS} = A \cap HS = R_0(A) \cap HS.$$

Supuesto cierto para α, relativizamos $R_{\alpha+1}(A) = \mathcal{P}R_\alpha(A)$, con lo que

$$\begin{aligned} R_{\alpha+1}(A)^{HS} &= \mathcal{P}^{HS}R_\alpha(A)^{HS} = \mathcal{P}R_\alpha(A)^{HS} \cap HS \\ &= \mathcal{P}(R_\alpha(A) \cap HS) \cap HS = \mathcal{P}R_\alpha(A) \cap HS = R_{\alpha+1}(A) \cap HS. \end{aligned}$$

Para el caso límite relativizamos $\bigwedge x(x \in R_\lambda(A) \leftrightarrow \bigvee\delta < \lambda\ x \in R_\delta(A))$. El resultado es

$$\bigwedge x(x \in R_\lambda(A)^{HS} \leftrightarrow \bigvee\delta < \lambda\ x \in R_\delta(A)^{HS}).$$

Si suponemos que $R_\delta(A)^{HS} = R_\delta(A) \cap HS$ la conclusión es que

$$R_\lambda(A)^{HS} = \bigcup_{\delta<\lambda} R_\delta(A) \cap HS = R_\lambda(A) \cap HS.$$

Para terminar, si $x \in HS$ entonces existe un α tal que $x \in R_\alpha(A) \cap HS$, luego $\bigwedge x \in HS \bigvee\alpha \in HS\ x \in R_\alpha(A)^{HS}$, lo cual equivale a

$$(\bigwedge x \bigvee\alpha\ x \in R_\alpha(A))^{HS},$$

y esto es $(\mathrm{V} = R(A))^{HS}$. ■

En principio los átomos no tienen por qué ser simétricos, por lo que puede ocurrir que $A^{HS} = \varnothing$ y HS cumpla el axioma de regularidad (y entonces cumple automáticamente el axioma de elección). A continuación veremos cómo definir un filtro normal de subgrupos que asegure la simetría de los átomos.

Definición 8.12 Sea H un subgrupo de Σ_A. Para cada $B \subset A$ definimos el *estabilizador* de B en H como

$$\mathrm{Est}_H(B) = \{f \in H \mid \bigwedge x \in B\ f(x) = x\}.$$

Se comprueba inmediatamente que $\mathrm{Est}_H(B)$ es un subgrupo de H, así como que si $f \in H$ entonces $\mathrm{Est}_H(f[B]) = \mathrm{Est}_H(B)^f$.

Definimos el *filtro de soportes finitos* de H como el filtro dado por

$$\mathcal{F}_H = \{G \mid G \text{ es subgrupo de } H \wedge \bigvee B(B \subset A \wedge B \text{ finito} \wedge \mathrm{Est}_H(B) \subset G)\}.$$

Es fácil ver que $\mathcal{F}_H$ es ciertamente un filtro normal de subgrupos de H. Para la propiedad de la intersección se usa que, claramente,

$$\mathrm{Est}_H(B \cup C) \subset \mathrm{Est}_H(B) \cap \mathrm{Est}_H(C).$$

Respecto a este filtro, un conjunto x es simétrico si existe un conjunto finito de átomos B tal que $\mathrm{Est}_H(B) \subset \mathrm{Sim}_H(x)$, es decir, si para que un automorfismo fije a x es suficiente que fije a un cierto conjunto finito B de átomos. Se dice entonces que B es un *soporte* de x.

En particular, si x es un átomo tenemos que $\mathrm{Est}_H(\{x\}) \subset \mathrm{Sim}_H(x)$, luego $x \in S$, que es tanto como decir $x \in HS$. Por consiguiente se cumple que $A \subset HS$, y como $\mathrm{Sim}_H(A) = H$, tenemos que $A \in S$ y por tanto $A \in HS$.

Veamos finalmente el comportamiento de HS respecto al axioma de elección. Observemos que en ZFA podemos definir el rango de un conjunto x como el mínimo ordinal α tal que $x \subset R_\alpha(A)$, y así los conjuntos de rango 0 son $\varnothing$ y los átomos. Con esta definición de rango, la definición de cardinal dada en [TC 5.1] vale igualmente en ZFA, al igual que toda la teoría de cardinales desarrollada a continuación (sin el axioma de elección). En particular, podemos considerar la clase $\mathfrak{C}$ de todos los cardinales.

Teorema 8.13 *Supongamos que A es infinito numerable, sea $H = \Sigma_A$ y sea HS el modelo simétrico construido con el filtro de soportes finitos. Sea $\mathfrak{p}$ el cardinal de A en HS. Entonces en HS se cumple:*

a) A es infinito, pero todos sus subconjuntos son finitos o cofinitos (es decir, de complementario finito).

b) A no tiene subconjuntos (infinitos) numerables.

c) A no puede ser totalmente ordenado.

d) Los cardinales menores que $\mathfrak{p}$ son exactamente:

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 \cdots \qquad\qquad \cdots < \mathfrak{p} - 4 < \mathfrak{p} - 3 < \mathfrak{p} - 2 < \mathfrak{p} - 1,$$

con lo que la clase $\mathfrak{C}$ no está ni totalmente ordenada ni bien fundada.

e) Se cumple

$$\mathfrak{p} < \mathfrak{p} + 1 < \mathfrak{p} + 2 < \cdots < \mathfrak{p} + \mathfrak{p} < \mathfrak{p}^2 < \mathfrak{p}^3 < \cdots$$

f) No se cumple $\mathfrak{p}^2 \leq 2^{\mathfrak{p}}$ (compárese con [TC 5.89] *y la nota posterior).*

Demostración: a) Se cumple que A es infinito^{HS} porque ser infinito es absoluto. Sea $x \subset A$, $x \in HS$ y supongamos que no es finito^{HS} ni cofinito^{HS}, es decir, que no es finito ni cofinito. Sea $B \subset A$ un soporte finito de x. Como x y $A \setminus x$ son infinitos, existen átomos u, v tales que $u \in x \setminus B$ y $v \in (A \setminus x) \setminus B$. Sea $g \in \Sigma_A$ la permutación que cumple $g(u) = v$, $g(v) = u$ y deja fijos a los demás átomos. Entonces $g \in \mathrm{Est}_H(B) \subset \mathrm{Sim}_H(x)$, luego $g(x) = x$, pero como $u \in x$ se cumple que $v = g(u) \in g(x) = x$, lo cual es una contradicción. Así pues, x ha de ser finito o cofinito.

b) es consecuencia de a): un conjunto cuyos subconjuntos sean todos finitos o cofinitos no puede tener subconjuntos infinitos numerables, pues un conjunto infinito numerable se puede descomponer en unión de dos conjuntos infinitos numerables disjuntos, y ambos serían subconjuntos infinitos no cofinitos del conjunto de partida.

c) también se sigue de a): Si A pudiera ser totalmente ordenado por una relación $\leq$, definimos $B = \{x \in A \mid \{u \in A \mid u < x\} \text{ es finito}\}$. O bien B o bien $A \setminus B$ es finito. Podemos suponer que lo es $A \setminus B$, pues si lo fuera B cambiaríamos la relación de orden por su inversa.

Entonces $\leq$ es un buen orden en B, pues si $X \subset B$ es no vacío y $x \in X$, entonces $\{u \in A \mid u < x\}$ es finito, luego $\{u \in X \mid u \leq x\}$ también lo es, luego tiene un mínimo elemento m, que también es mínimo de X.

Así pues B tiene un buen orden y $A \setminus B$ también porque es finito, luego A admite un buen orden. Ahora bien, un conjunto infinito que admite un buen orden puede biyectarse con un ordinal infinito, y la restricción a ω de dicha biyección nos da un subconjunto infinito numerable en A, contradicción.

d) Todo conjunto finito de átomos está en HS, por lo que A tiene (en HS) subconjuntos de todos los cardinales finitos. Si $x \subset A$ tiene cardinal n, llamemos $\mathfrak{p} - n$ al cardinal (en HS) de $A \setminus x$. Es fácil probar en ZF que este cardinal no depende de la elección de x. A su vez, la notación $\mathfrak{p} - n$ está justificada porque, según la definición usual de suma de cardinales, se cumple $(\mathfrak{p} - n) + n = \mathfrak{p}$. En particular esto prueba que $\mathfrak{p} - n$ es infinito. Por a) sabemos que los únicos cardinales (en HS) menores que $\mathfrak{p}$ son los de la forma n o $\mathfrak{p} - n$. Falta probar que son todos distintos y que están ordenados.

Sean $n \leq m$ cardinales finitos. Tomemos $x \subset y \subset A$ de cardinales $m - n$ y n respectivamente. Así $(A \setminus y) \cup (y \setminus x) = A \setminus x$, luego $(\mathfrak{p} - m) + n = \mathfrak{p} - (m - n)$. En particular $\mathfrak{p} - m \leq \mathfrak{p} - (m - n)$. Con esto tenemos las desigualdades

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 \cdots \qquad\qquad \cdots \leq \mathfrak{p} - 4 \leq \mathfrak{p} - 3 \leq \mathfrak{p} - 2 \leq \mathfrak{p} - 1.$$

Basta probar que $\mathfrak{p} - 1 \neq \mathfrak{p}$, pues entonces $\mathfrak{p} - n \neq \mathfrak{p} - (n - 1)$, ya que sumando $n - 1$ contradiríamos la primera desigualdad. Ahora bien, esto es una consecuencia de que A no tiene subconjuntos infinitos numerables. Más concretamente, en ZF se demuestra que si A no tiene subconjuntos numerables entonces su cardinal $\mathfrak{p}$ ha de cumplir $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p} - 1$, pues en caso contrario tenemos un $a \in A$ y una biyección $f : A \longrightarrow A \setminus \{a\}$, que nos permite definir la sucesión $a_0 = a$, $a_{n+1} = f(a_n)$, y es fácil probar que $\{a_n \mid n \in \omega\}$ es un subconjunto infinito numerable de A.

En particular la clase $\mathfrak{C}$ no está totalmente ordenada porque $\mathfrak{p}$ no es comparable con $\aleph_0$.

e) Las desigualdades $\mathfrak{p} < \mathfrak{p}+1 < \mathfrak{p}+2 < \cdots$ se deben a que si x es un conjunto de cardinal n disjunto con A, entonces $A \cup x$ no puede tener subconjuntos infinitos numerables, luego, según hemos visto en el apartado anterior, su cardinal $\mathfrak{p}+n$ cumple que $\mathfrak{p}+n-1 < \mathfrak{p}+n$.

La desigualdad $\mathfrak{p}+\mathfrak{p} \leq \mathfrak{p}^2$ es general. Si se diera la igualdad existiría $f : 2 \times A \longrightarrow A \times A$ biyectiva $f \in HS$. Sea B un soporte finito de f y sean v, $w \in A \setminus B$ dos átomos distintos. Sea $f(i,u) = (v,w)$ y supongamos que $u \neq v$ (si no sería $u \neq w$ y razonaríamos igual. Sea $z \in A \setminus B$ distinto de u, v, w y sea $g \in \Sigma_A$ la permutación que intercambia v y z. Entonces $g(f) = f$ y haciendo actuar g sobre $f(i,u) = (v,w)$ obtenemos que $f(i,u) = (z, g(w))$, luego $v = z$, contradicción.

Las desigualdades $\mathfrak{p}^2 < \mathfrak{p}^3 < \cdots$ se demuestran mediante un argumento similar.

f) Supongamos que existe una aplicación $f : A \times A \longrightarrow \mathcal{P}A \cap HS$ inyectiva tal que $f \in HS$. Sea B un soporte finito para f y sean u, $v \in A \setminus B$ dos átomos distintos. Tomemos $x = f(u,v)$ o $x = A \setminus f(u,v)$ de modo que x sea finito. Si u y v están ambos en x o ninguno lo está, permutándolos obtenemos que $f(u,v) = f(v,u)$, contradicción (porque en este caso el automorfismo que los permuta fija a x). Si $u \in x$ y $v \notin x$ (o viceversa) tomamos $w \in A \setminus x$ que no esté en B (esto es posible porque $A \setminus x$ es infinito). Al permutar v y w resulta $f(u,v) = f(u,w)$, contradicción. ■

En el modelo siguiente el axioma de elección es violado de la forma más drástica posible:

Teorema 8.14 *Supongamos que A es infinito numerable y descompongámoslo en una unión disjunta $A = \bigcup\limits_{n\in\omega} P_n$, de pares $P_n = \{a_n, b_n\}$ con $a_n \neq b_n$. Consideremos el grupo $H = \{f \in \Sigma_A \mid \bigwedge n \in \omega\ f(P_n) = P_n\}$ y sea HS el modelo simétrico formado con el correspondiente filtro de soportes finitos. Entonces en HS se cumple que $P = \{P_n \mid n \in \omega\}$ es una familia numerable de pares desordenados que no tiene función de elección. En particular A es una unión numerable de conjuntos de cardinal 2, pero no es numerable.*

Demostración: Todos los pares P_n son simétricos por la definición de H. Como $P_n \subset A \subset HS$, de hecho $P_n \in HS$. Sea $f : \omega \longrightarrow P$ dada por $f(n) = P_n$. La aplicación f no es sino el conjunto $f = \{(n, P_n) \mid n \in \omega\}$, y si $g \in H$ se cumple que $g(f) = \{(g(n), g(P_n)) \mid n \in \omega\} = f$, pues g fija tanto a los números naturales como a los pares P_n. Así pues $f \in S$ y, como HS es un modelo de ZF, es cerrado para pares ordenados, de modo que $f \subset HS$ y concluimos que $f \in HS$. Así mismo, como el rango es un concepto absoluto, P, que es el rango de f, está en HS. Con esto no sólo hemos probado que $P \in HS$ sino que, de hecho, P es numerable^{HS}.

Supongamos que P tuviera una función de elección $h \in HS$, es decir, suponemos que $h : P \longrightarrow A$ cumple que $h(P_n) \in P_n$. Sea B un soporte finito para h y tomemos un $n \in \omega$ tal que a_n, $b_n \notin B$. Sea g la permutación que intercambia a_n con b_n. Es claro que $g \in H$ y $g(h) = h$. Ahora bien, si, por ejemplo, $h(P_n) = a_n$, al aplicar g obtenemos que $g(h)(g(P_n)) = g(a_n)$, es decir, $h(P_n) = b_n$, contradicción, e igualmente si $h(P_n) = b_n$. En consecuencia no existe tal h.

Notemos que si A fuera numerable tendría un buen orden que determinaría una función de elección sobre P. ■

No damos más ejemplos, ni incidimos más en las consecuencias de los que hemos dado, porque en la sección siguiente podremos obtener las mismas conclusiones sin negar el axioma de regularidad.

8.2 Extensiones simétricas

Veamos ahora cómo modificar la teoría de extensiones genéricas para obtener modelos en los que falle el axioma de elección y en los que se pueden adaptar los argumentos de la sección anterior, pero sin excluir al axioma de regularidad. Trabajamos en ZFC.

La idea básica es sustituir Σ_A por el conjunto $\mathrm{Aut}\,\mathbb{P}$ de los automorfismos de un c.p.o. $\mathbb{P}$, que claramente es un subgrupo del grupo simétrico $\Sigma_{\mathbb{P}}$. Igual que en ZFCA hemos probado que los elementos de Σ_A inducen automorfismos de la clase universal, ahora tenemos que cada elemento $f \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{P}$ determina una biyección $f : V^{\mathbb{P}} \longrightarrow V^{\mathbb{P}}$.

Antes de entrar en la teoría propiamente dicha mostraremos un ejemplo simple en el que se ilustra cómo con estos elementos podemos aprovechar los argumentos empleados en la sección anterior (aunque en este ejemplo sólo lo haremos parcialmente, sin necesidad de considerar grupos de simetrías).

Sabemos que si $V = L$ entonces $x \trianglelefteq y$ es una fórmula con x e y como únicas variables libres que ordena bien a la clase universal, en particular a $\mathcal{P}\omega$, es decir, tenemos un criterio explícito (que no es lo mismo que verificable en casos concretos) que establece cuándo un subconjunto de ω es menor que otro, de modo que el orden así definido es, de hecho, un buen orden.

Ahora probaremos que es consistente con ZFC que ninguna fórmula $\phi(x, y)$ con x e y como únicas variable libres determine un buen orden en $\mathcal{P}\omega$. Esto no contradice al axioma de elección: éste implica que existe una relación R que ordena bien $\mathcal{P}\omega$, pero la fórmula $x\,R\,y$ tiene tres variables libres, que es tanto como decir que no tenemos ninguna definición explícita de R.

Teorema 8.15 *Si* ZFC *es consistente también lo es* ZFC $+\mathcal{P}\omega$ *no puede ser bien ordenado por una fórmula.*

Demostración: Más concretamente, queremos probar que es consistente añadir a ZFC los infinitos axiomas de la forma

$$\{(x, y) \in \mathcal{P}\omega \times \mathcal{P}\omega \mid \phi(x, y)\} \text{ no es un buen orden en } \mathcal{P}\omega,$$

para toda fórmula $\phi(x, y)$.

Fijemos un modelo transitivo numerable M de ZFC + $V = L$ y consideremos el c.p.o. $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega \times \omega, 2, \aleph_0)$. Sea G un filtro genérico y supongamos que una fórmula $\phi(x, y)$ ordena bien $\mathcal{P}\omega$ en $M[G]$.

Consideremos la función genérica $f_G = \bigcup\limits_{p\in G} p : \omega \times \omega \longrightarrow 2$. Para cada $i \in \omega$ definimos

$$a_i = \{n \in \omega \mid f_G(i, n) = 1\} \in (\mathcal{P}\omega)^{M[G]}.$$

Sea $A = \{a_i \mid i \in \omega\} \in M[G]$. El conjunto A va a desempeñar el papel que en la sección anterior desempeñaba el conjunto de átomos. Así, hemos sustituido los átomos por conjuntos genéricos. Definimos

$$\sigma_i = \{(\check{n}, p) \mid p \in \mathbb{P} \wedge (i, n, 1) \in p\} \in M^{\mathbb{P}},$$

$$\sigma = \{(\sigma_i, \mathbb{1}) \mid i \in \omega\} \in M^{\mathbb{P}}.$$

Claramente $a_i = \sigma_{iG}$ y $A = \sigma_G$. Veamos que si i, $j \in \omega$, $i \neq j$, entonces

$$\mathbb{1} \Vdash \sigma_i \neq \sigma_j.$$

En efecto, dado cualquier filtro genérico H, el conjunto

$$D_{ij} = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee n \in \omega\,((i, n), (j, n) \in \mathcal{D}p \wedge p(i, n) \neq p(j, n))\} \in M$$

es denso en $\mathbb{P}$, luego $H \cap D_{ij} \neq \varnothing$ y esto se traduce en que σ_{iH} y σ_{jH} se diferencian en un elemento n (que está en uno y no en otro).

Volviendo a $M[G]$, estamos suponiendo que $R = \{(x, y) \in \mathcal{P}\omega \times \mathcal{P}\omega \mid \phi(x, y)\}$ es un buen orden en $\mathcal{P}\omega$ (en $M[G]$), luego el conjunto $A \in M[G]$ debe tener un mínimo, digamos a_i. Existe una condición $p \in \mathbb{P}$ tal que

$$p \Vdash \bigvee R(R = \{(x, y) \in \mathcal{P}\omega \times \mathcal{P}\omega \mid \phi(x, y)\} \wedge R \text{ bien ordena } \mathcal{P}\omega \wedge \bigwedge z \in \sigma\ \sigma_i R z).$$

Como $\mathcal{D}p \subset \omega \times \omega$ es finito, podemos encontrar un $j \neq i$ que no aparezca como primera componente en ninguno de sus pares. Sea $g : \omega \longrightarrow \omega$ la permutación que intercambia i con j y fija a los demás números. Sea $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ la aplicación dada por $f(r) = \{(g(u), v, w) \mid (u, v, w) \in r\}$, es decir, f intercambia i por j en las primeras componentes de los dominios de las condiciones. Es claro que $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ es una semejanza. Además $\neg p \perp f(p)$, pues los únicos pares en los que $f(p)$ se diferencia de p empiezan por j, luego no están en el dominio de p.

También es inmediato que $f(\sigma_i) = \sigma_j$, $f(\sigma_j) = \sigma_i$ y $f(\sigma_k) = \sigma_k$ cuando $i \neq k \neq j$. Esto implica a su vez que $f(\sigma) = \sigma$. Así pues, el teorema 4.37 nos da que

$$f(p) \Vdash \bigvee R(R = \{(x, y) \in \mathcal{P}\omega \times \mathcal{P}\omega \mid \phi(x, y)\}$$
$$\wedge\ R \text{ bien ordena } \mathcal{P}\omega \wedge \bigwedge z \in \sigma\ \sigma_j\, R\, z).$$

Sea $q \leq p \wedge q \leq f(p)$ y sea H un filtro genérico con $q \in H$. Tenemos que en $M[H]$ la relación $R = \{(x, y) \in \mathcal{P}\omega \times \mathcal{P}\omega \mid \phi(x, y)\}$ es un buen orden en $\mathcal{P}\omega$ tal que $\sigma_{iG}\, R\, \sigma_{jG} \wedge \sigma_{jG}\, R\, \sigma_{iG}$, pero esto implica que $\sigma_{iG} = \sigma_{jG}$, cuando por otra parte $\mathbb{1} \Vdash \sigma_i \neq \sigma_j$, contradicción. ■

Veamos ahora cómo construir modelos en los que falle el axioma de elección:

Definición 8.16 Sea $\mathbb{P}$ un c.p.o. y sea H un subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P})$. Para cada $\sigma \in V^{\mathbb{P}}$, definimos el *grupo de simetrías* de σ en H como el conjunto

$$\mathrm{Sim}_H(\sigma) = \{h \in H \mid h(\sigma) = \sigma\}.$$

Claramente $\mathrm{Sim}_H(\sigma)$ es un subgrupo de H y para todo conjunto x se cumple que $\mathrm{Sim}_H(\check{x}) = H$. Un argumento formalmente idéntico a la prueba del teorema 8.5 nos da que si $f \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{P}$ entonces $\mathrm{Sim}_H(f(\sigma)) = \mathrm{Sim}_H(\sigma)^f$.

Si $\mathcal{F}$ es un filtro normal de subgrupos de H (definición 8.6), diremos que σ es *simétrico* (respecto a H y $\mathcal{F}$) si $\mathrm{Sim}_H(\sigma) \in \mathcal{F}$.

Diremos que σ es *hereditariamente simétrico* (respecto de H y $\mathcal{F}$) si σ es simétrico y todo $\pi \in \mathcal{D}\sigma$ es hereditariamente simétrico. (Es fácil justificar la validez de esta definición definiendo recurrentemente la función característica de los $\mathbb{P}$-nombres hereditariamente simétricos.) Llamaremos $SV^{\mathbb{P}}$ a la clase de todos los $\mathbb{P}$-nombres hereditariamente simétricos.

Una simple inducción prueba que $\bigwedge x\ \check{x} \in SV^P$.

Si M es un modelo transitivo de ZF y $\mathbb{P} \in M$, llamaremos $SM^{\mathbb{P}} = SV^{\mathbb{P}} \cap M$ a la clase de todos los $\mathbb{P}$-nombres $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ hereditariamente simétricos^M.

Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M definimos la *extensión simétrica*

$$SM[G] = \{\tau_G \mid \tau \in SM^{\mathbb{P}}\}.$$

A los elementos de $SM[G]$, es decir, los elementos de $M[G]$ que admiten un nombre hereditariamente simétrico, los llamaremos *conjuntos simétricos.*

Hemos de probar que las extensiones simétricas son modelos transitivos de ZF. Empezamos probando que los automorfismos de $\mathbb{P}$ permutan los nombres hereditariamente simétricos:

Teorema 8.17 *Sea $\mathbb{P}$ un c.p.o., sea H un subgrupo de* $\mathrm{Aut}\,\mathbb{P}$*, sea $\mathcal{F}$ un filtro normal de subgrupos de H y sea $g \in H$. Entonces $g|_{SV^{\mathbb{P}}} : SV^{\mathbb{P}} \longrightarrow SV^{\mathbb{P}}$ biyectiva.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos que $\bigwedge \sigma \in SV^{\mathbb{P}}\ g(\sigma) \in SV^{\mathbb{P}}$ por $\in$-inducción. Lo suponemos cierto para los nombres en la clausura transitiva de σ, con lo que $\mathcal{D}g(\sigma) \subset SV^{\mathbb{P}}$. Por otra parte, $\mathrm{Sim}_H(g(\sigma)) = \mathrm{Sim}_H(\sigma)^g \in \mathcal{F}$, luego $g(\sigma)$ es simétrico y, por consiguiente, hereditariamente simétrico.

Esto prueba que $g|_{SV^{\mathbb{P}}} : SV^{\mathbb{P}} \longrightarrow SV^{\mathbb{P}}$. Ciertamente la restricción es inyectiva porque g lo es. Además es suprayectiva, pues si $\sigma \in SV^{\mathbb{P}}$, su antiimagen por g es $g^{-1}(\sigma)$, que está en $SV^{\mathbb{P}}$ por la parte ya probada. ■

En particular, si M es un modelo transitivo de ZFC y $\mathbb{P}$, H, $\mathcal{F} \in M$ cumplen (en M) las condiciones del teorema anterior y $g \in H$, por la versión relativizada del teorema concluimos que $g|_{SM^{\mathbb{P}}} : SM^{\mathbb{P}} \longrightarrow SM^{\mathbb{P}}$ biyectiva.

Teorema 8.18 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC, *sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o., sea $H \in M$ un subgrupo de* $\mathrm{Aut}^M \mathbb{P}$ *y $\mathcal{F} \in M$ un filtro normal^M de subgrupos de H. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces $M \subset SM[G] \subset M[G]$ y $SM[G]$ es un modelo transitivo de* ZF *salvo a lo sumo los axiomas de reemplazo y partes.*

DEMOSTRACIÓN: Si $x \in M$ entonces $\check{x} \in SM^{\mathbb{P}}$, luego $x = \check{x}_G \in SM[G]$. la inclusión $SM[G] \subset M[G]$ es obvia.

Si $u \in v \in SM[G]$, entonces $v = \tau_G$ con $\tau \in SM^{\mathbb{P}}$. Por consiguiente $u = \sigma_G$, con σ en el dominio de τ, luego $\sigma \in SM^{\mathbb{P}}$. Así pues, $u = \sigma_G \in SM[G]$.

Esto prueba que $SM[G]$ es transitivo, con lo que cumple el axioma de extensionalidad. El axioma de regularidad se cumple en cualquier clase.

Veamos el axioma del par. Sean x, $y \in SM[G]$. Entonces $x = \sigma_G$, $y = \tau_G$, con σ, $\tau \in SM^{\mathbb{P}}$. Sea $\rho = \mathrm{pd}(\sigma, \tau) = \{(\sigma, \mathbb{1}), (\tau, \mathbb{1})\}$.

Tenemos que $\mathrm{Sim}_H(\sigma)$, $\mathrm{Sim}_H(\tau) \in \mathcal{F}$ y claramente

$$\mathrm{Sim}_H(\sigma) \cap \mathrm{Sim}_H(\tau) \leq \mathrm{Sim}_H(\rho).$$

Por lo tanto ρ es simétrico. Como su dominio está formado por los nombres hereditariamente simétricos σ y τ, de hecho $\rho \in SM^{\mathbb{P}}$, luego concluimos que $\{x, y\} = \rho_G \in SM[G]$.

Ahora comprobamos el axioma de la unión. Tomemos $x \in SM[G]$, de modo que $x = \sigma_G$ con $\sigma \in SM^{\mathbb{P}}$. En la prueba de 4.19 vimos que

$$\pi = \{(\rho, p) \mid p \in \mathbb{P} \wedge \bigvee \tau q r((\tau, q) \in \sigma \wedge (\rho, r) \in \tau \wedge p \leq r \wedge p \leq q)\} \in M^{\mathbb{P}}.$$

cumple $\pi_G = \bigcup\limits_{y \in x} y$. Basta probar que $\pi \in SM^{\mathbb{P}}$.

Si $\rho \in \mathcal{D}\pi$, existe $\tau \in \mathcal{D}\sigma$ tal que $\rho \in \mathcal{D}\tau$. Entonces $\tau \in SM^{\mathbb{P}}$, porque σ es hereditariamente simétrico, luego también $\rho \in SM^{\mathbb{P}}$. Falta probar que π es simétrico, para lo cual basta a su vez comprobar que $\mathrm{Sim}_H(\sigma) \leq \mathrm{Sim}_H(\pi)$.

Si $g \in \mathrm{Sim}_H(\sigma)$, sea $(\rho, p) \in \pi$ y sean τ, q, r tales que

$$(\tau, q) \in \sigma \wedge (\rho, r) \in \tau \wedge p \leq r \wedge p \leq q.$$

Entonces

$$(g(\tau), g(q)) \in g(\sigma) \wedge (g(\rho), g(r)) \in g(\tau) \wedge g(p) \leq g(r) \wedge g(p) \leq g(q),$$

de donde se sigue que $(g(\rho), g(p)) \in \pi$, es decir, $g(\pi) \subset \pi$. Aplicando esto a g^{-1} concluimos que $g^{-1}(\pi) \subset \pi$, luego $\pi \subset g(\pi)$ y tenemos la igualdad. Esto prueba que $g \in \mathrm{Sim}_H(\pi)$.

El axioma de infinitud se sigue de que $\omega \in M \subset SM[G]$. ∎

Demostrar que $SM[G]$ satisface los axiomas de reemplazo y partes presenta la misma dificultad que en el caso de $M[G]$, pero afortunadamente el trabajo que ya hemos hecho para el caso de $M[G]$ simplifica el necesario para $SM[G]$:

Definición 8.19 Si $\mathbb{B}$ es un álgebra de Boole completa, H es un subgrupo de $\operatorname{Aut}\mathbb{B}$ y $\mathcal{F}$ es un filtro normal de subgrupos de H, para cada fórmula $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ sin descriptores y nombres $\sigma_1,\ldots,\sigma_n \in SV^{\mathbb{B}}$, definimos como sigue el valor booleano simétrico $\|\phi(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\|_S$:

a) $\|\sigma = \tau\|_S = \|\sigma = \tau\|$ y $\|\sigma \in \tau\|_S = \|\sigma \in \tau\|$.

b) $\|\neg\phi\|_S \equiv \|\phi\|_S'$,

c) $\|\phi \to \psi\|_S \equiv \|\phi\|_S \to \|\psi\|_S$,

d) $\|\bigwedge x\,\phi\|_S \equiv \bigwedge\limits_{\sigma\in SV^{\mathbb{B}}} \|\phi(\sigma)\|_S$.

Si comparamos con la definición 4.26, hay una diferencia, y es que en el apartado d), donde el ínfimo se toma para $\mathbb{B}$-nombres hereditariamente simétricos.

Claramente $\|\phi\|_S$ cumple las propiedades análogas e), f), g), h) enunciadas tras la definición 4.26. El teorema 4.25 es trivial para $\|\sigma = \tau\|_S$ y $\|\sigma \in \tau\|_S$, pues sólo consiste en restringir a nombres hereditariamente simétricos lo que el teorema fundamental afirma para nombres cualesquiera. Ahora la demostración del teorema fundamental 4.27 se adapta mínimamente para probar:

Teorema 8.20 *Sea $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ una fórmula*[4] *con a lo sumo las variables libres indicadas. Sea M un modelo transitivo de* ZF*, sea $\mathbb{B}$ un álgebra de Boole completa^M, sea $H \in M$ un subgrupo de $\operatorname{Aut}\mathbb{B}$, sea $\mathcal{F} \in M$ un filtro normal de subgrupos de H, sean $\sigma_1,\ldots,\sigma_n \in SM^{\mathbb{B}}$ y sea G un ultrafiltro $\mathbb{B}$-genérico sobre M. Entonces*

$$\phi^{SM[G]}(\sigma_{1G},\ldots,\sigma_{nG}) \leftrightarrow \|\phi(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\|_S^M \in G.$$

El paso siguiente es generalizar este teorema a c.p.o.s arbitrarios. Para ello observamos que si $\mathbb{P}$ es un c.p.o., e $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{B} = R(\mathbb{P})$ es su compleción, para cada $f \in \operatorname{Aut}\mathbb{P}$, el teorema [TC 7.49] aplicado a la inmersión densa $f \circ i$ nos da la existencia de un único automorfismo f^* que hace conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{B} \arrow[r, dashed, "f^*"] & \mathbb{B} \\
\mathbb{P} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{P} \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

Tenemos así una aplicación $\operatorname{Aut}\mathbb{P} \longrightarrow \operatorname{Aut}\mathbb{B}$, y la unicidad de la extensión implica[5] que $(f \circ g)^* = f^* \circ g^*$. De aquí se sigue fácilmente que si H es un subgrupo de $\operatorname{Aut}\mathbb{P}$ y llamamos $H^* = \{f^* \mid f \in H\}$, entonces H^* es un subgrupo de $\operatorname{Aut}\mathbb{B}$, y si $\mathcal{F}$ es un filtro normal de subgrupos de H y $\mathcal{F}^* = \{G^* \mid G \in \mathcal{F}\}$, entonces $\mathcal{F}^*$ es un filtro normal de subgrupos de H^*.

[4] En principio sin descriptores, pero luego eliminaremos esta restricción.

[5] Esto significa que $f \mapsto f^*$ es un homomorfismo de grupos.

Más aún, si $\sigma \in V^{\mathbb{P}}$ y $f \in \operatorname{Aut}\mathbb{P}$, tenemos que $f^*(i(\sigma)) = i(f(\sigma))$, de donde se sigue inmediatamente que $\operatorname{Sim}_H(\sigma)^* \subset \operatorname{Sim}_{H^*}(i(\sigma))$, luego $\operatorname{Sim}_H(\sigma) \in \mathcal{F}$ implica que $\operatorname{Sim}_{H^*}(i(\sigma)) \in \mathcal{F}^*$, y de aquí que si $\sigma \in SV^{\mathbb{P}}$, entonces $i(\sigma) \in SV^{\mathbb{B}}$.

Así pues, tenemos que $i : V^{\mathbb{P}} \longrightarrow V^{\mathbb{B}}$ se restringe a $i : SV^{\mathbb{P}} \longrightarrow SV^{\mathbb{B}}$.

Por otra parte, consideramos la definición de $i^{-1}(\sigma)$ dada justo antes del teorema 4.34 y observamos que si $\sigma \in V^{\mathbb{B}}$ y $f \in \operatorname{Aut}\mathbb{P}$, se cumple

$$f(i^{-1}(\sigma)) = i^{-1}(f^*(\sigma)).$$

En efecto, razonando por $\in$-inducción, puesto que

$$i^{-1}(\sigma) = \{(i^{-1}(\tau), p) \mid \bigvee q \in \mathbb{B}\ ((\tau, q) \in \sigma \wedge i(p) \leq q)\},$$

tenemos que

$$f(i^{-1}(\sigma)) = \{(i^{-1}(f^*(\tau)), f(p)) \mid \bigvee q \in \mathbb{B}\ ((\tau, q) \in \sigma \wedge i(p) \leq q)\},$$

mientras que

$$i^{-1}(f^*(\sigma)) = \{(i^{-1}(\tau), p) \mid \bigvee q \in \mathbb{B}\ ((\tau, q) \in f^*(\sigma) \wedge i(p) \leq q)\}.$$

Ahora es pura rutina comprobar la doble inclusión.[6]

Por consiguiente, $\operatorname{Sim}_{H^*}(\sigma) \subset \operatorname{Sim}_H(i^{-1}(\sigma))^*$, de donde se sigue inmediatamente que si $\sigma \in SV^{\mathbb{B}}$, entonces $i^{-1}(\sigma) \in SV^{\mathbb{P}}$.

En definitiva, tenemos $i : SV^{\mathbb{P}} \longrightarrow SV^{\mathbb{B}}$, $i^{-1} : SV^{\mathbb{B}} \longrightarrow SV^{\mathbb{P}}$. El teorema 4.34 implica ahora trivialmente:

Teorema 8.21 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC, *sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y sea $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{B}$ la inmersión en su compleción^M. Sea H un subgrupo de* $\operatorname{Aut}^M \mathbb{P}$, *sea $\mathcal{F}$ un filtro normal^M de subgrupos de H y consideremos el subgrupo $H^* \subset \operatorname{Aut}\mathbb{B}$ y el filtro $\mathcal{F}^*$. Sea G^* un ultrafiltro $\mathbb{B}$-genérico sobre M y sea $G = i^{-1}[G^*]$. Entonces $SM[G] = SM[G^*]$.*

Demostración: En efecto, si $x \in SM[G]$ entonces $x = \sigma_G$, con $\sigma \in SM^{\mathbb{P}}$, luego por 4.34 tenemos que $x = i(\sigma)_{G^*}$, y hemos visto que $i(\sigma) \in SM^{\mathbb{B}}$, luego $x \in SM[G^*]$. Igualmente se prueba la otra inclusión. ■

Ahora adaptamos la definición 4.38:

[6]En efecto, si $(i^{-1}(f^*(\tau)), f(p)) \in f(i^{-1}(\sigma))$, entonces

$$f^*(q) \in \mathbb{B} \wedge (f^*(\tau), f^*(q)) \in f^*(\sigma) \wedge i(f(p)) = f^*(i(p)) \leq f^*(q),$$

y esto prueba que $(i^{-1}(f^*(\tau)), f(p)) \in i^{-1}(f^*(\sigma))$.

A su vez, si $(i^{-1}(\tau), p) = (i^{-1}(f^*((f^*)^{-1}(\tau)), f(f^{-1}(p))) \in i^{-1}(f^*(\sigma))$, entonces

$$(f^*)^{-1}(q) \in \mathbb{B} \wedge ((f^*)^{-1}(\tau), (f^*)^{-1}(q)) \in \sigma \wedge i(f^{-1}(p)) = (f^*)^{-1}(i(p)) \leq (f^*)^{-1}(q),$$

y esto prueba que $(i^{-1}(\tau), p) \in f(i^{-1}(\sigma))$.

Definición 8.22 Sea $\mathbb{P}$ un c.p.o., sea $i : \mathbb{P} \longrightarrow R(\mathbb{P})$ la inmersión densa en su compleción, sea $p \in \mathbb{P}$ y sean $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in SV^{\mathbb{P}}$. Definimos

$$p \Vdash_S \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \equiv i(p) \leq \|\phi(i(\sigma_1), \ldots, i(\sigma_n))\|_S.$$

También podemos definir $\Vdash^*_S$ como en 4.35 cambiando $M[G]$ por $SM[G]$, los análogos de 4.36 y 4.37 b) se demuestran sin dificultad y con ello obtenemos finalmente el teorema fundamental:

Teorema 8.23 *Sea $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula con a lo sumo las variables libres indicadas. Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC*, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o., sea $H \in M$ un subgrupo de $\mathrm{Aut}^M \mathbb{P}$, sea $\mathcal{F} \in M$ un filtro normal^M de subgrupos de H, y $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in SM^{\mathbb{P}}$.*

a) Si $p \in \mathbb{P}$ entonces $(p \Vdash_S \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))^M$ si y sólo si para todo filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M con $p \in G$ se cumple $\phi^{SM[G]}(\sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG})$.

b) Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M entonces

$$\phi^{SM[G]}(\sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG}) \leftrightarrow \bigvee p \in G\, (p \Vdash_S \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))^M.$$

En principio el teorema vale para fórmulas sin descriptores, pero ahora es inmediato que si ϕ y ψ son fórmulas sin descriptores equivalentes en ZF menos reemplazo y partes, entonces $\mathbb{1} \Vdash_S (\phi \leftrightarrow \psi)$ (donde las variables se sustituyen por nombres de $SV^{\mathbb{P}}$), lo que permite definir $p \Vdash_S \phi$ y $\|\phi\|_S$ para fórmulas con descriptores y generalizar los resultados a fórmulas arbitrarias.

Seguidamente demostramos el caso particular de 4.39 que realmente vamos a necesitar:

Teorema 8.24 *Sea $\mathbb{P}$ un c.p.o., sea H un subgrupo de $\mathrm{Aut}\,\mathbb{P}$, sea $\mathcal{F}$ un filtro normal de subgrupos de H y sea $f \in H$. Si $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula metamatemática y $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in SV^{\mathbb{P}}$, entonces*

$$p \Vdash_S \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \leftrightarrow f(p) \Vdash_S \phi(f(\sigma_1), \ldots, f(\sigma_n)).$$

Demostración: Por el teorema de reflexión basta probar la relativización del teorema a un modelo transitivo numerable M. Suponemos, pues, que todos los datos del enunciado están en M y que $(p \Vdash_S \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))^M$. Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $f(p) \in G$, entonces por 4.34 sabemos que $f^{-1}[G]$ es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $M[f^{-1}[G]] = M[G]$, y además, para todo $\sigma \in SM^{\mathbb{P}}$, se cumple $\sigma_{f^{-1}[G]} = f(\sigma)_G$. Esto implica que $SM[G] = SM[f^{-1}[G]]$.

Por otra parte, $p \in f^{-1}[G]$, luego $\phi^{SM[f^{-1}[G]]}((\sigma_1)_{f^{-1}[G]}, \ldots, (\sigma_n)_{f^{-1}[G]})$, pero esto es lo mismo que $\phi^{SM[G]}(\sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG})$, luego podemos concluir que $f(p) \Vdash_S \phi(f(\sigma_1), \ldots, f(\sigma_n))$. La inclusión contraria se obtiene aplicando la parte ya probada a f^{-1}. ■

Con el teorema siguiente completamos la teoría básica sobre extensiones simétricas:

Teorema 8.25 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o., sea $H \in M$ un subgrupo de $\mathrm{Aut}^M \mathbb{P}$, sea $\mathcal{F} \in M$ un filtro normal^M de subgrupos de H y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces $SM[G]$ es un modelo transitivo numerable de* ZF.

DEMOSTRACIÓN: La prueba es análoga a la de 4.22. Sólo hay que comprobar en añadidura que ciertos $\mathbb{P}$-nombres son hereditariamente simétricos. Para probar el axioma de reemplazo partimos de una fórmula $\phi(x, y, x_1, \ldots, x_n)$ y de conjuntos $\sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG}, \sigma_G \in SM[G]$ como en 4.22. Construimos $S \subset SM^{\mathbb{P}}$ igual que allí pero ahora completamos la construcción como sigue: definimos

$$S'_0 = S \land \bigwedge n \in \omega \; S'_{n+1} = \bigcup_{g \in H} g[S'_n] \land S' = \bigcup_{n \in \omega} S'_n.$$

De este modo $S' \in M$ cumple lo mismo que S (porque lo contiene) y además $\bigwedge g \in H \; g[S'] = S'$. Definimos

$$\rho = \{(\mu, p) \mid \mu \in S' \land p \in \mathbb{P} \land \bigvee \pi \in \mathcal{D}\sigma \, p \Vdash_S (\pi \in \sigma \land \phi(\pi, \mu))\}.$$

Basta comprobar que $\rho \in SM^{\mathbb{P}}$. El resto de la prueba es idéntico a 4.22. Como $S' \subset SM^{\mathbb{P}}$, tenemos que el dominio de ρ está contenido en $SM^{\mathbb{P}}$, luego sólo hemos de ver que ρ es simétrico. Para ello bastará probar que

$$\mathrm{Sim}_H(\sigma_1) \cap \cdots \cap \mathrm{Sim}_H(\sigma_n) \cap \mathrm{Sim}_H(\sigma) \subset \mathrm{Sim}_H(\rho).$$

Tomamos g en el grupo de la izquierda. Si $(\mu, p) \in \rho$, sea $\pi \in \mathcal{D}\sigma$ tal que

$$p \Vdash_S (\pi \in \sigma \land \phi(\pi, \mu, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)).$$

Entonces $g(\pi) \in \mathcal{D}(g(\sigma) = \mathcal{D}\sigma$, $g(\mu) \in g[S'] = S'$ y por el teorema anterior

$$g(p) \Vdash_S (g(\pi) \in \sigma \land \phi(g(\pi), g(\mu), \sigma_1, \ldots, \sigma_n)).$$

Esto prueba que $(g(\mu), g(p)) \in \rho$. Por consiguiente $g(\rho) \subset \rho$ y razonando con g^{-1} obtenemos la igualdad.

Para probar el axioma de partes tomamos $\sigma_G \in SM[G]$ y definimos

$$S = \{\mu \in SM^{\mathbb{P}} \mid \mathcal{D}\mu \subset \mathcal{D}\sigma\} \in M, \quad \rho = S \times \{\mathbb{1}\} \in M^{\mathbb{P}}.$$

Es fácil ver que $\mathrm{Sim}_H(\sigma) \subset \mathrm{Sim}_H(\rho)$, de donde se sigue que $\rho \in SM^{\mathbb{P}}$. Siguiendo el argumento de 4.22, tomamos $\tau_G \subset \sigma_G$ y definimos

$$\mu = \{(\pi, p) \mid \pi \in \mathcal{D}\sigma \land p \Vdash_S \pi \in \tau\}.$$

Se cumple que $\mu \in SM^{\mathbb{P}}$ porque $\mathrm{Sim}_H(\sigma) \cap \mathrm{Sim}_H(\tau) \subset \mathrm{Sim}_H(\mu)$. Por lo tanto $\mu \in S$ y el argumento de 4.22 vale igualmente. ■

Ahora es claro que si ϕ es un teorema de ZF, entonces $\mathbb{1} \Vdash_S \phi$.

8.3 Ejemplos de extensiones simétricas

En la sección 8.1 considerábamos filtros de subgrupos definidos mediante el concepto de soporte. Vamos a ver que es posible hacer algo análogo con extensiones simétricas:

Definición 8.26 Sea X un conjunto y $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(X \times \omega, 2, \aleph_0)$. Sea H un subgrupo del grupo de permutaciones Σ_X^M. Para cada $g \in H$ definimos $g^* : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ mediante
$$g^*(p) = \{(g(x), m, r) \mid (x, m, r) \in p\}.$$

Es fácil ver que $g^* \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{P}$, así como que
$$\bigwedge gh \in H\ (g \circ h)^* = g^* \circ h^* \wedge \bigwedge g \in H\ (g^{-1})^* = (g^*)^{-1}.$$

Además la identidad en X induce la identidad en $\mathbb{P}$. Esto se traduce en que $H^* = \{g^* \mid g \in H\}$ es un subgrupo de $\mathrm{Aut}\,\mathbb{P}$.

Por consiguiente, cada $g \in H$ puede identificarse con el automorfismo g^* de $\mathrm{Aut}\,\mathbb{P}$ y, por ello, en lo sucesivo escribiremos[7] g en lugar de g^* y haremos actuar indistintamente sus elementos sobre elementos de X, condiciones o $\mathbb{P}$-nombres.

Si $B \subset X$, llamaremos
$$\mathrm{Est}_H(B) = \{h \in H \mid \bigwedge n \in B\ h(n) = n\}.$$

Claramente $\mathrm{Est}_H(B)$ es un subgrupo de H. Definimos el *filtro de los soportes finitos* en H como
$$\mathcal{F} = \{K \mid K \text{ es subgrupo de } H \wedge \bigvee B \in \mathcal{P}X (B \text{finito} \wedge \mathrm{Est}_H(B) \subset K)\}.$$

Se comprueba fácilmente que $\mathcal{F}$ es un subgrupo normal de subgrupos de H.

Ahora relativizamos todo esto a un modelo transitivo numerable M de ZFC: tomamos $X \in M$, con lo que $\mathbb{P} \in M$. Fijamos un subgrupo $H \subset \mathrm{Aut}\,\mathbb{P}$ tal que $H \in M$ y consideramos $\mathcal{F}^M \in M$. Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, podemos considerar la extensión simétrica $SM[G]$ determinada por H y $\mathcal{F}^M$. Sea $f_G : X \times \omega \longrightarrow 2$ la función genérica. Para cada $x \in X$ sean
$$s_x = \{n \in \omega \mid f_G(x, n) = 1\} \in M[G],$$
$$\sigma_x = \{(\check{n}, p) \mid p \in \mathbb{P} \wedge (x, n, 1) \in p\} \in M^{\mathbb{P}}.$$

Claramente $\sigma_{xG} = s_x$ y si $g \in H$ entonces $g(\sigma_x) = \sigma_{g(x)}$. En consecuencia $\mathrm{Est}_H(\{x\}) \subset \mathrm{Sim}_H(\sigma_x)$, por lo que cada σ_x es simétrico, y como los nombres $\check{n}$ son hereditariamente simétricos, concluimos que $\sigma_x \in SM^{\mathbb{P}}$ y $s_x \in SM[G]$.

A los conjuntos s_x los llamaremos *conjuntos genéricos simétricos* y los nombres σ_x serán los *nombres canónicos de los conjuntos genéricos simétricos.*

[7]Notemos que la aplicación $g \mapsto g^*$ es un isomorfismo de grupos entre H y H^*.

Es fácil probar que si x, $y \in A$ cumplen $a \neq b$, entonces el conjunto

$$D_{xy} = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee n((x,n),(y,n) \in \mathcal{D}p \land p(x,n) \neq p(y,n))\} \in M$$

es denso en $\mathbb{P}$, de donde se sigue que todo filtro genérico G ha de cortarlo, y esto a su vez implica que $s_x \neq s_y$. Así pues, $\mathbb{1} \Vdash_S \sigma_x \neq \sigma_y$.

El teorema siguiente se corresponde con los primeros apartados de 8.13.

Teorema 8.27 *Si* ZFC *es consistente, también lo es* ZF *más la existencia de un conjunto infinito $A \subset \mathcal{P}\omega$ sin subconjuntos infinitos numerables. En particular A no puede ser bien ordenado y, por consiguiente, $\mathcal{P}\omega$ tampoco.*

Demostración: Partimos de un modelo transitivo numerable M de ZFC, consideramos $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega \times \omega, 2, \aleph_0)$, $H = \Sigma_\omega^M$, G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y $N = SM[G]$ la extensión simétrica determinada por el filtro de soportes finitos.

Sea $A = \{s_n \mid n \in \omega\}$ el conjunto de los conjuntos genéricos simétricos definido en las consideraciones previas a este teorema. Se cumple que $A \in N$ porque tiene por nombre a $\sigma = \{(\sigma_n, \mathbb{1}) \mid n \in \omega\}$ y $\mathrm{Sim}_H(\sigma) = H$ (ya que los automorfismos de H permutan los nombres canónicos σ_n).

Veamos que A cumple lo pedido en el modelo N. Ciertamente $A \subset \mathcal{P}\omega$ y es infinito^N porque ser infinito es absoluto. Ahora hemos de probar que no existe $f : \omega \longrightarrow A$ inyectiva tal que $f \in N$. Si existiera sería $f = \tau_G$, para un cierto $\tau \in SM^{\mathbb{P}}$. Sea $B \subset \omega$ finito tal que $\mathrm{Est}_H(B) \subset \mathrm{Sim}_H(\tau)$.

Tomamos $i \in \omega \setminus B$ tal que $s_i \in f[\omega]$ y $n \in \omega$ tal que $f(n) = s_i$. Sea $p \in G$ tal que

$$p \Vdash_S (\tau : \omega \longrightarrow \sigma \text{ inyectiva} \land \tau(\check{n}) = \sigma_i).$$

Sea $j \in \omega$ tal que $j \notin B$, $j \neq i$ y que no figure como primera componente de un par en el dominio de p. Sea $g \in H$ la permutación que intercambia i con j y deja fijos a los demás números. Entonces $g \in \mathrm{Est}_H(B) \subset \mathrm{Sim}_H(\tau)$, luego $g(\tau) = \tau$ y también $g(\sigma) = \sigma$, $g(\check{n}) = \check{n}$ y, según las observaciones previas al teorema, $g(\sigma_i) = \sigma_j$. Por consiguiente

$$g(p) \Vdash_S (\tau : \omega \longrightarrow \sigma \text{ inyectiva} \land \tau(\check{n}) = \sigma_j).$$

Además p y $g(p)$ son compatibles, ya que los únicos pares en los que discrepan empiezan por i o j, pero en el dominio de p no hay pares que empieces por j y el el dominio de $g(p)$ no hay pares que empiecen por i. Sea $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p \land r \leq g(p)$. Así

$$r \Vdash_S (\tau : \omega \longrightarrow \sigma \text{ inyectiva} \land \tau(\check{n}) = \sigma_i \land \tau(\check{n}) = \sigma_j).$$

Por consiguiente $r \Vdash_S \sigma_i = \sigma_j$, en contradicción con que $\mathbb{1} \Vdash_S \sigma_i \neq \sigma_j$. ■

Conviene reflexionar sobre la prueba que acabamos de ver. Bajo el supuesto de que A tiene un subconjunto numerable determinamos un σ_i mediante una propiedad que lo caracteriza en términos de nombres τ y $\check{n}$; fijamos una condición p que fuerce esta propiedad y construimos un automorfismo g que mantenga los parámetros $\check{n}$ y τ, pero transforme σ_i en un σ_j. El punto más delicado es que p y $g(p)$ han de resultar compatibles, pues entonces una extensión común fuerza que σ_i y σ_j cumplan una misma propiedad que supuestamente caracteriza a un único conjunto genérico, y así tenemos la contradicción. Garantizar la compatibilidad de p y $g(p)$ nos ha obligado a elegir j después de haber fijado p. Si el lector intenta demostrar los apartados siguientes del teorema 8.13 se encontrará con que necesitaría permutar dos nombres σ_i y σ_j elegidos antes de determinar la condición p, y no después, pero entonces ya no es posible garantizar la compatibilidad de p y $g(p)$, y el argumento se viene abajo. Esto no es casual. De hecho $\mathcal{P}\omega$ (y en particular A), sí que puede ser totalmente ordenado en N (puede biyectarse con el conjunto de los números reales sin necesidad del axioma de elección, y el orden total de $\mathbb{R}$ se traslada así a $\mathcal{P}\omega$).

La conclusión es que para adaptar las pruebas de consistencia en ZFA no podemos en general sustituir los átomos por subconjuntos de ω. A continuación veremos que todo funciona bien si usamos subconjuntos de subconjuntos de ω. Como el resto de 8.13 es un poco más complejo, veremos primero la versión del teorema 8.14.

Teorema 8.28 *Si* ZFC *es consistente, también lo es ZF más la existencia de una familia numerable de pares desordenados que no tiene funciones de elección.*

Demostración: Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC y sea $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(2\times\omega\times\omega\times\omega, 2, \aleph_0)$. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y consideremos la función genérica $f_G : 2\times\omega\times\omega\times\omega \longrightarrow 2$. Sean

$$\begin{aligned}
a_{nm} &= \{i\in\omega \mid f_G(0,n,m,i)=1\}\in M[G],\\
b_{nm} &= \{i\in\omega \mid f_G(1,n,m,i)=1\}\in M[G],\\
a_n &= \{a_{nm} \mid m\in\omega\}\in M[G],\\
b_n &= \{b_{nm} \mid m\in\omega\}\in M[G],\\
P_n &= \{a_n, b_n\}\in M[G],\\
P &= \{P_n \mid n\in\omega\}\in M[G],\\
\sigma_{nm} &= \{(\check{\imath},p) \mid i\in\omega\land p\in\mathbb{P}\land(0,n,m,i,1)\in p\}\in M^{\mathbb{P}},\\
\tau_{nm} &= \{(\check{\imath},p) \mid i\in\omega\land p\in\mathbb{P}\land(1,n,m,i,1)\in p\}\in M^{\mathbb{P}},\\
\sigma_n &= \{(\sigma_{nm},\mathbb{1}) \mid m\in\omega\}\in M^{\mathbb{P}},\\
\tau_n &= \{(\tau_{nm},\mathbb{1}) \mid m\in\omega\}\in M^{\mathbb{P}},\\
\rho_n &= \{(\sigma_n,\mathbb{1}),(\tau_n,\mathbb{1})\}\in M^{\mathbb{P}},\\
\rho &= \{(\rho_n,\mathbb{1}) \mid n\in\omega\}\in M^{\mathbb{P}}.
\end{aligned}$$

Notemos que los conjuntos a_{nm} y b_{nm} son los conjuntos genéricos simétricos (con la notación de la definición general, estamos tomando $X = 2\times\omega\times\omega$) y σ_{nm}, τ_{nm} son sus nombres canónicos. Así pues, $\sigma_{nmG} = a_{nm}$, $\tau_{nmG} = b_{nm}$. Así mismo es claro que $\sigma_{nG} = a_n$, $\tau_{nG} = b_n$, $\rho_{nG} = P_n$ y $\rho_G = P$.

Definimos ahora H como el conjunto de todas las permutaciones $g\in\Sigma^M_{2\times\omega\times\omega}$ tales que existen $g_1 : 2\times\omega \longrightarrow 2$ y $g_3 : 2\times\omega\times\omega \longrightarrow \omega$ de modo que

$$g(a,n,m) = (g_1(a,n), n, g_3(a,n,m)).$$

Se comprueba fácilmente que $H \in M$ y que es un subgrupo de $\Sigma^M_{2\times\omega\times\omega}$. La definición de H puede parecer compleja a primera vista, pero responde a una idea muy concreta que entenderemos tan pronto como pensemos en la forma en que actúa sobre los conjuntos que hemos definido.

Sea $g \in H$ con $g(0,n,m) = (r_0,n,m_0)$, $g(1,n,m) = (r_1,n,m_1)$. Notemos que $r_0 \neq r_1$, o si no g no sería suprayectiva. Es fácil ver que

$$g(\sigma_{nm}) = \begin{cases} \sigma_{nm_0} & \text{si } r_0 = 0, \\ \tau_{nm_0} & \text{si } r_0 = 1, \end{cases} \qquad g(\tau_{nm}) = \begin{cases} \tau_{nm_1} & \text{si } r_1 = 1, \\ \sigma_{nm_1} & \text{si } r_1 = 0, \end{cases}$$

$$g(\sigma_n) = \begin{cases} \sigma_n & \text{si } r_0 = 0, \\ \tau_n & \text{si } r_0 = 1, \end{cases} \qquad g(\tau_n) = \begin{cases} \tau_n & \text{si } r_1 = 1, \\ \sigma_n & \text{si } r_1 = 0, \end{cases}$$

Por consiguiente $g(\rho_n) = \rho_n$ y $g(\rho) = \rho$.

Si el lector comprueba estos hechos entenderá la definición de H: al exigir que n permanezca inalterada estamos exigiendo que cada σ_{nm} se transforme en un $\sigma_{nm'}$ o en un $\tau_{nm'}$, y al exigir que la primera componente de la imagen dependa sólo de a y de n estamos exigiendo que si un σ_{nm_0} se transforma en un $\sigma_{nm'}$, entonces lo mismo valga para todos los σ_{nm}, de modo que g permuta los elementos de σ_n, mientras que si un σ_{nm_0} se transforma en un $\tau_{nm'}$, entonces g transforma σ_n en τ_n.

Llamemos $N = SM[G]$ a la extensión simétrica determinada por el filtro de soportes finitos. Todos los nombres que hemos definido son hereditariamente simétricos, lo cual se deduce inmediatamente de los hechos siguientes:

$$\mathrm{Est}_H(\{(0,n,m)\}) \subset \mathrm{Sim}_H(\sigma_{nm}), \quad \mathrm{Est}_H(\{(1,n,m)\}) \subset \mathrm{Sim}_H(\tau_{nm}),$$

$$\mathrm{Est}_H(\{(0,n,0)\}) \subset \mathrm{Sim}_H(\sigma_n), \quad \mathrm{Est}_H(\{(1,n,0)\}) \subset \mathrm{Sim}_H(\tau_n),$$

$$\mathrm{Sim}_H(\rho_n) = \mathrm{Sim}_H(\rho) = H.$$

Como consecuencia, $P \in N$. Para ver que P es numerable^N basta tener en cuenta que

$$\mu = \{(\mathrm{po}(\check{\mathrm{n}}, \rho_{\mathrm{n}}), \mathbb{1}) \mid \mathrm{n} \in \omega\} \in \mathrm{SM}^{\mathbb{P}}$$

y así $\mu_G = \{P_n\}_{n\in\omega} \in N$. Vamos a ver que P no tiene una función de elección en N o, equivalentemente, que no existe una función $f \in N$ tal que f sea una función de dominio ω y $\bigwedge n \in \omega\ f(n) \in P_n$.

Si existiera tal f, sería $f = \pi_G$, con $\pi \in SM^{\mathbb{P}}$. Sea $B \subset 2 \times \omega \times \omega$ tal que $\mathrm{Est}_H(B) \subset \mathrm{Sim}_H(\pi)$. Tomemos un $n \in \omega$ que no figure entre las segundas componentes de las ternas de B. Supongamos por ejemplo que $f(n) = a_n$. Sea $p \in G$ tal que

$$p \Vdash_S (\pi \text{ es una función de dominio } \omega \wedge \pi(\check{n}) = \sigma_n).$$

Ahora vamos a permutar σ_n con τ_n para llegar a una contradicción. Sea $r \in \omega$ tal que si $m \geq r$ entonces r no esté entre las terceras componentes de las ternas del dominio de p. Definimos $g : 2 \times \omega \times \omega \longrightarrow 2 \times \omega \times \omega$ la aplicación dada por

$$\begin{aligned}
g(a, n', m) &= (a, n', m) \qquad \text{si } n' \neq n, \\
g(0, n, m) &= \begin{cases} (1, n, m + r) & \text{si } m < r, \\ (1, n, m - r) & \text{si } r \leq m < 2r, \\ (1, n, m) & \text{si } 2r \leq m, \end{cases} \\
g(1, n, m) &= \begin{cases} (0, n, m + r) & \text{si } m < r, \\ (0, n, m - r) & \text{si } r \leq m < 2r, \\ (0, n, m) & \text{si } 2r \leq m. \end{cases}
\end{aligned}$$

La idea es la siguiente: queremos transformar las ternas que empiezan por $(0, n)$ en las que empiezan por $(1, n)$ y viceversa. Si sólo tocamos este tipo de ternas dejamos fijos los elementos de B, pues ninguna de ellas está en B por la elección de n. Pero también queremos que al permutar las ternas mediante g, las condiciones p y $g(p)$ resulten compatibles. Para ello establecemos que todas las ternas de la forma $(0, n, m)$ con $m \leq r$ (entre las cuales se encuentran todas las del dominio de p) sean enviadas a ternas $(1, n, m')$ con $m' \geq r$ (ninguna de las cuales está en el dominio de p). Así ninguna terna del dominio de $g(p)$ con segunda componente n aparece en el domino de p, con lo que p y $g(p)$ no pueden contradecirse.

Es fácil ver que $g \in H$ y que de hecho $g \in \mathrm{Est}_H(B) \subset \mathrm{Sim}_H(\pi)$, de donde $g(\pi) = \pi$, y por otra parte $g(\sigma_n) = \tau_n$. Por consiguiente

$$g(p) \Vdash_S (\pi \text{ es una función de dominio } \omega \wedge \pi(\check{n}) = \tau_n),$$

luego una extensión común de p y $g(p)$ fuerza que $\sigma_n = \tau_n$, lo cual es imposible. ■

Nota En las condiciones del teorema anterior, tenemos que $\bigcup P$ es un conjunto que no puede ser totalmente ordenado, pues un orden total permitiría definir una función de elección en P. Así pues, sin el axioma de elección no puede probarse que todo conjunto puede ser totalmente ordenado. ■

Recordemos que un conjunto es *Dedekind-infinito* o, simplemente, *D-infinito* si existe $f : x \longrightarrow x$ inyectiva y no suprayectiva o, equivalentemente, si se puede biyectar con un subconjunto propio. En caso contrario es *D-finito*. Es fácil ver también que un conjunto es D-infinito si y sólo si tiene un subconjunto numerable (véase el final de la sección 5.2 de [TC]).

En ZFC, los conjuntos D-finitos y D-infinitos coinciden respectivamente con los conjuntos finitos e infinitos, pero en ZF esto no es necesariamente cierto, como ya mostraba el teorema 8.13 en ausencia del axioma de regularidad, o como muestra su traducción a extensiones simétricas sin excluir este axioma:

Teorema 8.29 *Si* ZFC *es consistente también lo es* ZF *más la existencia de un conjunto* $A \subset \mathcal{P}\mathcal{P}\omega$ *de cardinal* $\mathfrak{p}$ *tal que* *a) A es infinito, pero todos sus subconjuntos son finitos o cofinitos (es decir, de complementario finito).*

b) A no tiene subconjuntos (infinitos) numerables (o sea, es D-finito).

c) A no puede ser totalmente ordenado.

d) Los cardinales menores que $\mathfrak{p}$ *son exactamente:*

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 \cdots \qquad \cdots < \mathfrak{p} - 4 < \mathfrak{p} - 3 < \mathfrak{p} - 2 < \mathfrak{p} - 1,$$

con lo que la clase $\mathfrak{C}$ *no está ni totalmente ordenada ni bien fundada.*

e) Se cumple

$$\mathfrak{p} < \mathfrak{p} + 1 < \mathfrak{p} + 2 < \cdots < \mathfrak{p} + \mathfrak{p} < \mathfrak{p}^2 < \mathfrak{p}^3 < \cdots$$

f) No se cumple $\mathfrak{p}^2 \leq 2^{\mathfrak{p}}$.

Demostración: partimos de un modelo transitivo numerable M de ZFC y consideramos el c.p.o. $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega \times \omega \times \omega, 2, \aleph_0)$. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y sean s_{nm}, s_n, A, σ_{nm}. σ_n y σ como en el teorema anterior (omitiendo las primeras componentes 0/1). Tomamos como H el grupo de las permutaciones $g : \omega \times \omega \longrightarrow \omega \times \omega$ tales que existen $h_1 : \omega \longrightarrow \omega$ biyectiva y $h_2 : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ de modo que $g(n, m) = (h_1(n), h_2(n, m))$.

Esta construcción nos garantiza que si $g \in H$ y $g(n, m) = (r, s)$, entonces $g(\sigma_{nm}) = \sigma_{rs}$, $g(\sigma_n) = \sigma_r$ y $g(\sigma) = \sigma$.

Consideramos la extensión simétrica $N = SM[G]$ determinada por H y el filtro de soportes finitos. Las observaciones anteriores nos dan que todos los nombres que hemos construido son hereditariamente simétricos y por lo tanto $A \in N$.

Si existiera $x \in N$, $x \subset A$ que no fuera finito ni cofinito, entonces $x = \tau_G$ para cierto $\tau \in SM^{\mathbb{P}}$. Sea $B \subset \omega \times \omega$ finito tal que $\mathrm{Est}_H(B) \subset \mathrm{Sim}_H(\tau)$. Tomemos $i, j \in \omega \setminus B$ tales que $s_i \in x \wedge s_j \notin x$. Sea $p \in G$ tal que $p \Vdash_S \sigma_i \in \tau \wedge \sigma_j \notin \tau$.

Sea $r \in \omega$ tal que si $m \geq r$ entonces m no aparece como segunda componente de ninguna terna del dominio de p. Como en el teorema anterior definimos $g \in H$ tal que $g(n, m) = (n, m)$ para $i \neq n \neq j$, $g(\sigma_i) = \sigma_j$ y $\neg g(p) \perp p$.

De este modo $g(p) \Vdash_S \sigma_j \in \tau \wedge \sigma_i \notin \tau$, y una extensión común de p y $g(p)$ fuerza una contradicción.

Esto prueba a). Los apartados b) y c) son consecuencias de a) (ver 8.13).

d) La prueba del apartado correspondiente en 8.13 se basa únicamente en los apartados anteriores, luego es válida igualmente en nuestro contexto.

e) Dejamos al lector la adaptación del apartado correspondiente de 8.13.

f) Supongamos que existe una aplicación $f : A \times A \longrightarrow \mathcal{P}A \cap N$ inyectiva tal que $f \in N$. Entonces $f = \tau_G$ con $\tau \in SM^{\mathbb{P}}$. Sea $B \subset \omega \times \omega$ tal que $\mathrm{Est}_H(B) \subset \mathrm{Sim}_H(\tau)$. Sean $i, j \in \omega$ dos números naturales distintos que no figuren como primera componente de ningún par de B. Tomemos $x = f(s_i, s_j)$ o bien $x = A \setminus f(s_i, s_j)$ de modo que x sea finito (por a).

Digamos que $x = \{s_{i_1}, \ldots, s_{i_n}\}$ y sea $\rho = \{(\sigma_{i_1}, \mathbb{1}), \ldots, (\sigma_{i_n}, \mathbb{1})\}$. Es inmediato comprobar que $\rho \in SM^{\mathbb{P}}$ y $x = \rho_G$. Sea $p \in G$ tal que

$$p \Vdash_S \tau : \sigma \times \sigma \longrightarrow \mathcal{P}\sigma \text{ inyectiva} \wedge \tau(\sigma_i, \sigma_j) = \rho,$$

(o bien $\sigma \setminus \tau(\sigma_i, \sigma_j) = \rho$) según hayamos elegido x).

Si s_i y s_j están ambos o ninguno en x permutaremos i con j, mientras que si, por ejemplo, $s_i \in x \wedge s_j \notin x$, tomaremos $k \in \omega$ que no esté entre las primeras componentes de los pares de B y que sea distinto de i, j, $i_1, \ldots, i_n$. En este caso permutaremos j y k.

Jugando con las segundas componentes podemos construir $g \in \mathrm{Est}_H(B)$ que deje invariantes a todos los σ_r excepto a los dos que queremos permutar y de modo que $\neg p \perp g(p)$. Como es habitual, una extensión común de ambas condiciones fuerza una contradicción. ■

Los conjuntos D-finitos son una rica fuente de anomalías. Notemos ante todo que la existencia de un subconjunto infinito D-finito de $\mathcal{P}\omega$ implica fácilmente la existencia de un subconjunto análogo del conjunto de los números reales (porque $\mathcal{P}\omega$ puede biyectarse con $\mathbb{R}$ en ZF).

Ejercicio: Probar que es consistente con ZF la existencia de un subconjunto acotado del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales (no vacío) que no contenga ninguna sucesión convergente a su supremo. (Ayuda: considerar un subconjunto infinito D-finito del intervalo $]0,1[$. Puede tomarse sin máximo elemento.)

Teorema 8.30 *Sea A un conjunto infinito D-finito.*

a) El conjunto $S = \{s \in A^{<\omega} \mid s \text{ es inyectiva}\}$ es infinito y D-finito.

b) El conjunto $T = S \setminus \{\varnothing\}$ tiene cardinal menor estrictamente que S pero existe $f : T \longrightarrow S$ suprayectiva.

Demostración: a) Si existiera un subconjunto numerable $\{s_n\}_{n\in\omega} \subset S$, podemos tomarlo con $s_0 \neq \varnothing$. Definimos $a_0 = s_0(0)$ y, definido $a_n \in A$, sea k el mínimo natural tal que s_k toma un valor distinto de $a_0, \ldots, a_n$ (existe porque hay un número finito de elementos de $A^{<\omega}$ que toman valores en $\{a_0, \ldots, a_n\}$). Sea l el mínimo natural tal que $s_k(l) \notin \{a_0, \ldots, a_n\}$. Definimos $a_{n+1} = s_k(l)$. De este modo obtenemos un subconjunto numerable de A, contradicción.

b) Por definición de D-finitud, T no puede ser equipotente a S, luego su cardinal es estrictamente menor. Sin embargo, a cada sucesión $s \in T$, digamos $s : n \longrightarrow A$, podemos signarle $f(s) = s|_{n-1} \in S$ y claramente f es suprayectiva. ■

Ejercicio: Probar que si existe un conjunto infinito D-finito entonces existe un conjunto de cardinales R semejante en orden al conjunto de los números reales. (Ayuda: Considerar una biyección entre ω y el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales. Para cada número real r sea D_r el conjunto de los números naturales cuya imagen es menor que r. Así $r \leq s \leftrightarrow D_r \subset D_s$. Sea S según el teorema anterior y $S_r = \{s \in S \mid |s| \in D_r\}$, claramente D-finito. El conjunto R de los cardinales de los conjuntos S_r cumple lo pedido.)

Probamos ahora un teorema muy general sobre las posibilidades de ordenación de los cardinales en ausencia del axioma de elección:

Teorema 8.31 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC *y consideremos un conjunto parcialmente ordenado $(D, \leq) \in M$. Existe una extensión simétrica N de M en la cual existe un conjunto $\{\mathfrak{p}_d\}_{d \in D}$ de cardinales^N de modo que $\bigwedge de \in D(d \leq e \leftrightarrow \mathfrak{p}_d \leq \mathfrak{p}_e)$.*

Demostración: Tomamos $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(D \times \omega \times \omega \times \omega, 2, \aleph_0)$ y como H el conjunto de las biyecciones $g : D \times \omega \times \omega \longrightarrow D \times \omega \times \omega$, $g \in M$, de la forma

$$g(d, n, m) = (d, g_2(d, n), g_3(d, n, m)).$$

Claramente $H \in M$ es un subgrupo de $\Sigma^M_{D \times \omega \times \omega}$ que podemos identificar de la forma usual con un grupo de automorfismos de $\mathbb{P}$. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y $N = SM[G]$ la extensión simétrica determinada por el filtro de soportes finitos. Consideramos los conjuntos simétricos s_{dnm} y a partir de ellos formamos los conjuntos $s_{dn} = \{s_{dnm} \mid m \in \omega\} \in M[G]$. Sea $J = (\mathcal{P}D)^M$. Para cada $j \in J$ definimos $s_j = \{s_{dn} \mid d \in j \wedge n \in \omega\} \in M[G]$. Finalmente tomamos $S = \{s_j \mid j \in J\} \in M[G]$.

De forma natural se definen los nombres σ_{dmn}, σ_{dn}, σ_j y σ que nombran respectivamente a s_{dnm}, s_{dn}, s_j y S.

Es claro que si $g \in H$ cumple $g(d, n, m) = (d, n', m')$, entonces tenemos que $g(\sigma_{dnm}) = \sigma_{dn'm'}$, $g(\sigma_{dn}) = \sigma_{dn'}$, $g(\sigma_j) = \sigma_j$ y $g(\sigma) = \sigma$. De aquí se sigue que todos los nombres considerados son hereditariamente simétricos y que todos los conjuntos que hemos construido están en N. También es fácil comprobar que $\mathbb{1}$ fuerza que todos son distintos entre sí. Más aún, $\rho = \{(\mathrm{po}(\check{\jmath}, \sigma_\mathrm{j}), \mathbb{1}) \mid \mathrm{j} \in \mathrm{J}\}$ también es hereditariamente simétrico, de donde $\{s_j\}_{j \in J} \in N$.

Para cada $d \in D$ sea $j_d = \{e \in D \mid e \leq d\}$ y sea $\mathfrak{p}_d$ el cardinal (en N) de s_{j_d}. Claramente $\{\mathfrak{p}_d\}_{d \in D} \in N$. Si $d \leq e$ entonces $j_d \subset j_e$, luego $s_{j_d} \subset s_{j_e}$, luego $(\mathfrak{p}_d \leq \mathfrak{p}_e)^N$. Recíprocamente, si $d \not\leq e$, entonces $j_d \not\subset j_e$. Si demostramos que $(\mathfrak{p}_d \not\leq \mathfrak{p}_e)^N$ el teorema estará probado. En caso contrario existe $f \in N$ tal que $f : s_{j_d} \longrightarrow s_{j_e}$ inyectiva. Digamos $f = \mu_G$, para un cierto $\mu \in SM^{\mathbb{P}}$. Sea $B \subset D \times \omega \times \omega$ finito tal que $\mathrm{Est}_H(B) \subset \mathrm{Sim_H}(\mu)$. Sean n_1, $n_2 \in \omega$ tales que no aparezcan como segundas componentes de ninguna terna de B. Tenemos que $s_{dn_1} \in s_{j_d}$, luego $f(s_{dn_1}) \in s_{j_e}$ será de la forma $f(s_{dn_1}) = s_{d'k}$, con $d' \leq e$, luego en particular $d' \neq d$. Sea $p \in \mathbb{P}$ tal que

$$p \Vdash_S (\mu : \sigma_{j_d} \longrightarrow \sigma_{j_e} \text{ inyectiva} \wedge \sigma_{dn_1} \in \sigma_{j_d} \wedge \mu(\sigma_{dn_1}) = \sigma_{d'k}).$$

Sea $r \in \omega$ mayor que todas las terceras componentes de las ternas del dominio de p. Definimos $g : D \times \omega \times \omega \longrightarrow D \times \omega \times \omega$ mediante

$$g(a, n, m) = (a, n, m) \text{ si } (n \neq n_1 \wedge n \neq n_2) \vee a \neq d,$$

$g(d, n_1, m) = (d, n_2, s)$,
$g(d, n_2, m) = d(n_1, s)$, donde

$$s = \begin{cases} m + r & \text{si } m < r, \\ m - r & \text{si } r \leq m < 2r, \\ m & \text{si } 2r \leq m. \end{cases}$$

Así $g(\mu) = \mu$, $g(\sigma_{j_d} = \sigma_{j_d}$, $g(\sigma_{j_e} = \sigma_{j_e}$, $g(\sigma_{dn_1}) = \sigma_{dn_2}$, $g(\sigma_{dn_2}) = \sigma_{dn_1}$, $g(\sigma_{d'k}) = \sigma_{d'k}$ y las condiciones p y $g(p)$ son compatibles. Así, una extensión común a ambas fuerza que

$$\mu : \sigma_{j_d} \longrightarrow \sigma_{j_e} \text{ inyectiva} \wedge \sigma_{dn_1}, \sigma_{dn_2} \in \sigma_{j_d} \wedge \mu(\sigma_{dn_1}) = \sigma_{d'k} = \mu(\sigma_{dn_2}),$$

en particular, que $\sigma_{dn_1} = \sigma_{dn_2}$, cuando $\mathbb{1}$ fuerza lo contrario. ■

El teorema 8.28 implica que (sin AE) una unión numerable de conjuntos numerables no tiene por qué ser numerable. El teorema siguiente va más allá:

Teorema 8.32 *Si* ZFC *es consistente, también lo es* ZF+ $\aleph_1$ *es singular* $+ \mathcal{P}\omega$ *es unión numerable de conjuntos numerables.*

Demostración: La idea de esta prueba es muy diferente a la de las anteriores. Vamos a colapsar todos los cardinales no numerables menores que $\aleph_\omega$ de modo que $\aleph_\omega$ se convierta en $\aleph_1$.

Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC+$V = L$. Tomamos

$$\mathbb{P} = \{p \mid p \subset \omega \times \omega \times \omega_\omega \wedge p \text{ es una función} \wedge p \text{ es finito}$$

$$\wedge \bigwedge ni \in \omega((n, i) \in \mathcal{D}p \rightarrow p(n, i) \in \omega_n)\}^M,$$

ordenado por la inversa de la inclusión.

Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y sea $f_G = \bigcup\limits_{p \in G} p \in M[G]$ la función genérica. Considerando los conjuntos densos oportunos se comprueba sin dificultad que $f_G : \omega \times \omega \longrightarrow \omega_\omega^M$ así como que las aplicaciones $f_n : \omega \longrightarrow \omega_\omega^M$ dadas por $f_n(i) = f(n, i)$ son en realidad aplicaciones $f_n : \omega \longrightarrow \omega_n^M$ suprayectivas, y obviamente $f_n \in M[G]$.

Es claro que f_G colapsa a $\aleph_\omega^M$ en $M[G]$, pero vamos a construir una extensión simétrica en la que esto no sucede. Tomamos como H el conjunto de las aplicaciones $g : \omega \times \omega \longrightarrow \omega \times \omega$ biyectivas, $g \in M$, de la forma $g(n, i) = (n, g_2(n, i))$. Así $H \in M$ es un grupo de permutaciones de $\omega \times \omega$. Para cada $g \in H$ sea $g^* : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ dada por $g^*(p) = \{(g(n, i), \alpha) \mid (n, i, \alpha) \in p\}$. Aunque no estamos exactamente en la misma situación que en los teoremas anteriores, es fácil ver que la correspondencia $g \mapsto g^*$ permite identificar a H con un grupo de automorfismos de $\mathbb{P}$.

Para cada $n \in \omega$ sea $H_n = \{g \in H \mid \bigwedge ki \in \omega(k \leq n \rightarrow g(k, i) = (k, i))\}$. Es fácil ver que $\{H_n\}_{n \in \omega} \in M$ y es una familia de subgrupos de H, por lo que

$$\mathcal{F} = \{L \in M \mid L \text{ es subgrupo de } H \wedge \bigvee n \in \omega \, H_n \subset L\} \in M,$$

y se comprueba así mismo que $\mathcal{F}$ es un filtro normal^M de subgrupos de H. Sea $N = SM[G]$ la extensión simétrica determinada por H y $\mathcal{F}$. Definimos

$$\sigma_n = \{(\mathrm{po}(\check{\imath}, \check{\alpha}), p) \mid i \in \omega \land \alpha \in \omega_n^M \land p \in \mathbb{P} \land (n, i, \alpha) \in p\}.$$

Así $H_n \subset \mathrm{Sim}_H(\sigma_n)$, luego $\sigma_n \in SM^{\mathbb{P}}$ y $f_n = \sigma_{nG} \in N$. Por consiguiente ω_n^M es numerable^N (notemos que la existencia en N de $f_n : \omega \longrightarrow \omega_n^M$ suprayectiva implica —sin el axioma de elección— que ω_n^M es numerable porque ω está bien ordenado).

De este modo, los cardinales $\aleph_n^M$ se siguen colapsando en N. Ahora probaremos que $\aleph_\omega^M$ no se colapsa. Si $p \in \mathbb{P}$ y $n \in \omega$, llamaremos $p|_n = p|_{n\times\omega}$. Necesitaremos el resultado siguiente:

$(*)$ *Si $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula, $\sigma_1, \ldots, \sigma_m \in SM^{\mathbb{P}}$ cumplen que*

$$H_n \subset \mathrm{Sim}_H(\sigma_1) \cap \cdots \cap \mathrm{Sim}_H(\sigma_m)$$

y $p \in \mathbb{P}$ cumple $p \Vdash_S \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$, entonces $p|_{n+1} \Vdash_S \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$.

En efecto, en caso contrario existiría una condición $q \leq p|_{n+1}$ tal que

$$q \Vdash_S \neg\phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_m).$$

Sea $r \in \omega$ mayor que todas las segundas componentes de los pares del dominio de q. Definimos $g : \omega \times \omega \longrightarrow \omega \times \omega$ mediante

$$g(m, i) = \begin{cases} (m, i) & \text{si } m \leq n \lor 2r \leq i, \\ (m, i + r) & \text{si } n < m \land i < r, \\ (m, i - r) & \text{si } n < m \land r \leq i < 2r. \end{cases}$$

Así $g \in H_n$ y $g(p)$ es compatible con q. Por hipótesis $g(\sigma_i) = \sigma_i$ para $i = 1, \ldots, m$ y, por lo tanto $g(p) \Vdash_S \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Pero entonces una extensión común de q y $g(p)$ fuerza $\phi \land \neg\phi$, contradicción.

$f \in N$ tal que $f : \omega \longrightarrow \omega_\omega^M$ suprayectiva, sería $f = \tau_G$, con $\tau \in SM^{\mathbb{P}}$. Sea $p_0 \in G$ tal que $p_0 \Vdash_S \tau : \omega \longrightarrow \check{\omega}_\omega^M$ suprayectiva. Sea $n \in \omega$ suficientemente grande como para que $H_n \subset \mathrm{Sim}_H(\tau)$ y $p_0|_{n+1} = p_0$.

Si $\alpha \in \omega_\omega^M$, existe un $m \in \omega$ tal que $f(m) = \alpha$, luego existe un $p \in G$, $p \leq p_0$ tal que $p \Vdash_S \tau(\check{m}) = \check{\alpha}$. Por lo tanto

$$\omega_\omega^M = \bigcup_{m\in\omega} \{\alpha \in \omega_\omega^M \mid \bigvee p \in \mathbb{P}(p \leq p_0 \land p \Vdash_S \tau(\check{m}) = \check{\alpha})\}.$$

La familia de conjuntos de la derecha está en M, luego ha de existir un $m \in \omega$ tal que el conjunto $A = \{\alpha \in \omega_\omega^M \mid \bigvee p \in \mathbb{P}(p \leq p_0 \land p \Vdash_S \tau(\check{m}) = \check{\alpha})\}$ cumpla $|A|^M > \aleph_{n+1}^M$.

Usando el axioma de elección ^{M}, obtenemos una familia de condiciones $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A} \in M$ tal que para todo $\alpha \in A$ se cumpla $p_\alpha \leq p_0 \land p_\alpha \Vdash_S \tau(\check{m}) = \check{\alpha}$. Por $(*)$ se cumple, de hecho, que $p_\alpha|_{n+1} \Vdash_S \tau(\check{m}) = \check{\alpha}$. Equivalentemente, podemos suponer que $p_\alpha \subset (n + 1) \times \omega \times \omega_\omega^M$.

Se cumple que si α, $\beta \in A$ son distintos, entonces $p_\alpha \perp p_\beta$, pues fuerzan fórmulas contradictorias. Por lo tanto, el conjunto $W = \{p_\alpha \mid \alpha \in A\} \in M$ cumple $|W|^M > \aleph_{n+1}^M$, cuando por otra parte sus elementos son aplicaciones de $\omega \times \omega$ en ω_n, y por consiguiente $|W|^M \leq (\aleph_n^{\aleph_0})^M = \aleph_{n+1}^M$, ya que estamos suponiendo que M cumple la HCG.

Esta contradicción prueba que $\aleph_\omega^M$ no es numerable en N, luego $\aleph_\omega^M = \aleph_1^N$.

Cualquier aplicación cofinal $f : \omega \longrightarrow \aleph_\omega^M$ tal que $f \in M$ está también en N y sigue siendo cofinal, pues esto es absoluto. Esto prueba que $(\operatorname{cf} \aleph_1 = \aleph_0)^N$.

Nos ocupamos ahora de $\mathcal{P}\omega$. Dado $n \in \omega$, llamamos ρ_n al conjunto de todos los pares $(\sigma, \mathbb{1})$, donde $\sigma \in SM^{\mathbb{P}}$ contiene únicamente pares de la forma $(\check{\imath}, p)$, con $i \in \omega$ y $p \in \mathbb{P}$ y las primeras componentes de los pares del dominio de p son menores o iguales que n. Obviamente ρ_n es un $\mathbb{P}$-nombre y cada $g \in H$ permuta a sus elementos, luego $\operatorname{Sim}_H(\rho_n) = H$. Por consiguiente $\rho_n \in SM^{\mathbb{P}}$. Sea $A_n = \rho_{nG} \in N$. Es claro que $A_n \subset \mathcal{P}\omega$. Sea $\rho = \{(\rho_n, \mathbb{1}) \mid n \in \omega\} \in M^{\mathbb{P}}$. También $\operatorname{Sim}_H(\rho) = H$, con lo que $\rho \in SM^{\mathbb{P}}$ y $A = \{A_n \mid n \in \omega\} = \rho_G \in N$. Más aún, se cumple que $\mu = \{(\operatorname{po}(\check{n}, \rho_n), \mathbb{1}) \mid n \in \omega\} \in SM^{\mathbb{P}}$, por lo que $\{A_n\}_{n\in\omega} = \mu_G \in N$. En particular A es numerable^N.

Si llamamos B al conjunto de las condiciones de $\mathbb{P}$ en cuyo dominio sólo haya pares con primera componente $\leq n$, tenemos que $|B|^M \leq (\aleph_n^{\aleph_0})^M = \aleph_{n+1}^M$ y, en consecuencia,

$$|\rho_n|^M = \bigl|\{\sigma \in SV^{\mathbb{P}} \mid \sigma \subset \{\check{\imath} \mid i \in \omega\} \times B\}\bigr|^M \leq (2^{\aleph_0 \cdot \aleph_{n+1}})^M = \aleph_{n+2}^M.$$

Sea $f \in M$ tal que $f : \omega_{n+1}^M \longrightarrow \rho_n$ suprayectiva y llamemos

$$\tau = \bigl\{\bigl(\operatorname{po}(\check{\alpha}, f(\alpha)), \mathbb{1}\bigr) \mid \alpha \in \omega_{n+1}^M\bigr\} \in M^{\mathbb{P}}.$$

Si $g \in H_n$ y $\alpha \in \omega_{n+1}^M$, entonces $g(f(\alpha)) = f(\alpha)$, por lo que $H_n \subset \operatorname{Sim}_H(\tau)$. Por consiguiente $\tau \in SM^{\mathbb{P}}$ y $\tau_G \in N$ es una aplicación de dominio ω_{n+1}^M y cuyo rango contiene a A_n. Teniendo en cuenta que ω_{n+1}^M es bien ordenable en N, de aquí se sigue que $|A_n|^N \leq |\omega_{n+1}^M|^N = \aleph_0$.

En definitiva, $\{A_n\}_{n\in\omega}$ es una familia numerable^N de subconjuntos numerables^N de $(\mathcal{P}\omega)^N$. Para concluir la prueba basta ver que

$$(\mathcal{P}\omega)^N = \bigcup_{n\in\omega} A_n.$$

Si $x \in (\mathcal{P}\omega)^N$, entonces $x = \pi_G$, para cierto $\pi \in SM^{\mathbb{P}}$. Tomemos un $n \in \omega$ tal que $H_n \subset \operatorname{Sim}_H(\pi)$. Sea

$$\sigma = \{(\check{\imath}, p) \mid i \in \omega \land p \in \mathbb{P} \land p \subset (n+1) \times \omega \times \omega_{n+1}^M \land p \Vdash_S \check{\imath} \in \pi\}.$$

Es claro que $H_n \subset \operatorname{Sim}_H(\sigma)$, por lo que $\sigma \in SM^{\mathbb{P}}$, $(\sigma, \mathbb{1}) \in \rho_n$ y $\sigma_G \in A_n$. Basta probar que $x = \pi_G = \sigma_G$.

Si $i \in \sigma_G$, entonces existe $p \in G$ tal que $(\check{\imath}, p) \in \sigma$. En particular $p \Vdash_S \check{\imath} \in \pi$, luego $i \in \pi_G$.

Recíprocamente, si $i \in \pi_G$ existe un $p \in G$ tal que $p \Vdash_S \check{\imath} \in \pi$. Por $(*)$ tenemos que $p|_{n+1} \Vdash_S \check{\imath} \in \pi$, y como $p \leq p|_{n+1}$ también $p|_{n+1} \in G$. Claramente $(\check{\imath}, p|_{n+1}) \in \sigma$, luego $i \in \sigma_G$. ■

En particular vemos que sin el axioma de elección no puede definirse consistentemente la suma infinita de cardinales, pues ciertamente ω puede descomponerse en unión numerable de conjuntos numerables, de modo que podemos tener dos familias numerables $\{A_n\}_{n\in\omega}$ y $\{B_n\}_{n\in\omega}$ de conjuntos numerables cuyas uniones tengan cardinales distintos.

Para terminar probamos que el principio de elecciones dependientes es estrictamente más fuerte que el axioma de elección numerable:

Teorema 8.33 *Si* ZF *es consistente, también lo es* ZF+AEN+¬ED.

DEMOSTRACIÓN: Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC + $V = L$, sea $\kappa = \omega_1^M$ y sea $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\kappa^{<\omega} \times \kappa, 2, \kappa)^M$. Observemos que $\mathbb{P}$ es semejante (en M) a $\mathrm{Fn}(\kappa, 2, \kappa)$, luego ambos c.p.o.s determinan las mismas extensiones genéricas, pero nos será más cómodo trabajar con $\mathbb{P}$.

Consideramos a $\kappa^{<\omega}$ con la estructura de árbol dada por la inclusión y llamamos H al grupo de todas las semejanzas de $\kappa^{<\omega}$, es decir, las biyecciones que conservan la inclusión. Cada $f \in H$ se identifica con el automorfismo de $\mathbb{P}$ dado por

$$f(p) = \{(f(s), \alpha, i) \mid (s, \alpha, i) \in p\}.$$

Un *subárbol* de $\kappa^{<\omega}$ es un subconjunto $T \subset \kappa^{<\omega}$ tal que

$$\bigwedge s \in \kappa^{<\omega} \bigwedge t \in T(s \subset t \to s \in T).$$

Diremos que es un *árbol pequeño* si además es numerable y no tiene ramas infinitas.

Definimos $\mathcal{F}$ como el filtro formado por los subgrupos de H que contienen al estabilizador de un árbol pequeño. Es fácil ver que se trata de un filtro normal de subgrupos de H. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y sea $N = SM[G]$ la extensión simétrica correspondiente. Veamos que cumple lo requerido.

Es claro que $F_G = \bigcup G$ es una función $F_G : \kappa^{<\omega} \times \kappa \longrightarrow 2$, que a su vez nos permite definir, para cada $s \in \kappa^{<\omega}$, el conjunto

$$a_s = \{\alpha \in \kappa \mid F_G(s, \alpha) = 1\} \in M[G].$$

De hecho, un nombre canónico para a_s es

$$\sigma_s = \{(\check{\alpha}, p) \mid \alpha < \kappa \land p \in \mathbb{P} \land (s, \alpha, 1) \in p\}.$$

Claramente $T_s = \{t \in \kappa^{<\omega} \mid t \subset s\}$ es un árbol pequeño y $\mathrm{Est}_H(T_s) \subset \mathrm{Sim}_H(\sigma_s)$, luego $\sigma_s \in SM^{\mathbb{P}}$ y, por consiguiente, $a_s = (\sigma_s)_G \in N$.

Como G es genérico, es fácil ver que si $s \neq t$, entonces $a_s \neq a_t$.

Observemos que si $f \in H$ entonces $f(\sigma_s) = \sigma_{f(s)}$. Esto hace que

$$\sigma = \{(\sigma_s, \mathbb{1}) \mid s \in \kappa^{<\omega}\} \in SM^{\mathbb{P}},$$

pues su grupo de simetrías es H. Por lo tanto, $A = \sigma_G = \{a_s \mid s \in \kappa^{<\omega}\} \in N$. Sea

$$\rho = \{(\text{p.o.}(\sigma_s, \sigma_t), \mathbb{1}) \mid s, t \in \kappa^{<\omega} \wedge t \subset s \wedge \ell(s) = \ell(t) + 1\}.$$

Es claro también que $\mathrm{Sim}_H(\rho) = H$, por lo que $\pi \in SM^{\mathbb{P}}$ y $R = \rho_G \in N$, donde

$$R = \{(a_s, a_t) \mid s, t \in \kappa^{<\omega} \wedge t \subset s \wedge \ell(s) = \ell(t) + 1\}.$$

Por consiguiente, en N se cumple

$$R \subset A \times A \wedge \bigwedge a \in A \bigvee b \in A\; b\, R\, a.$$

Si N cumpliera el principio de elecciones dependientes existiría $h : \omega \longrightarrow A$ tal que $h \in N$ y $\bigwedge n \in \omega\; h(n+1)\, R\, h(n)$. Existe (en $M[G]$, pero no necesariamente en N) una aplicación $s : \omega \longrightarrow \kappa^{<\omega}$ tal que $\bigwedge n \in \omega\; h(n) = a_{s(n)}$. A su vez, esto implica que $s(n+1) \subset s(n)$ y $\ell(s(n+1)) = \ell(s(n)) + 1$. Añadiendo un número finito de términos a la sucesión, no perdemos generalidad si suponemos que $\ell(s(n)) = n$.

Sea $h = \tau_G$, con $\tau \in SM^{\mathbb{P}}$. Esto implica que existe un árbol pequeño T tal que $\mathrm{Est}_H(T) \subset \mathrm{Sim}_H(\tau)$. Como es un árbol pequeño, existe un $n_0 \in \omega \setminus \{0\}$ tal que $s_0 = s(n_0) \notin T$. Sea $p \in G$ tal que

$$p \Vdash_S (\tau : \omega \longrightarrow \sigma \wedge \tau(\check{n}_0) = \sigma_{s_0}).$$

Como T es numerable^M, existe un $\alpha < \kappa$ tal que

$$s_1 = s_0|_{n_0 - 1} \cup \{(n_0 - 1, \alpha)\} \notin T \wedge s_1 \neq s_0.$$

Más aún, como p es numerable podemos elegir α de modo que p no contenga ninguna terna de la forma (t, β, i) con $\alpha \in \mathcal{R}t$.

Sea $f \in H$ la semejanza de $\kappa^{<\omega}$ que deja invariantes a los nodos que no extienden a s_0 ni a s_1 y que intercambia las extensiones de s_0 con las de s_1. En particular $f(s_0)) = s_1$ y $f \in \mathrm{Est}_H(T)$, ya que, al ser T un árbol, ninguno de sus elementos extiende a s_0 o a s_1. Además, $\neg p \perp f(p)$, pues si $(t, \beta, i) \in p$, entonces $(f(t), \beta, i)$ es la misma terna (t, β, i) o bien t extiende a s_0, en cuyo caso $f(t)$ extiende a s_1, luego contiene a α en su rango, luego $(f(t), \beta, 1-i) \notin p$.

Concluimos que $f(p) \Vdash_S \tau(\check{n}_0) = \sigma_{s_1}$, luego una extensión común q de p y $f(p)$ cumple $q \Vdash_S (\tau : \omega \longrightarrow \sigma \wedge \tau(\check{n}_0) = \sigma_{s_0} \wedge \tau(\check{n}_0) = \sigma_{s_1})$, luego llegamos a que $q \Vdash_S \sigma_{s_0} = \sigma_{s_1}$, lo cual es imposible.

Esto prueba que N no cumple ED. Veamos ahora que sí que cumple AEN.

Sea $\{X_n\}_{n \in \omega} \in N$ una familia numerable de conjuntos no vacíos y supongamos que no tiene una función de elección en N, es decir, que no existe ninguna sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega} \in N$ tal que $\bigwedge n \in \omega\ x_n \in X_n$. En cualquier caso, sí que existe una función de elección $\{x_n\}_{n\in\omega} \in M[G]$, que a su vez determina una función $\{\sigma_n\}_{n\in\omega}$ tal que $\tau_n \in SM^{\mathbb{P}}$ y $\tau_{nG} = x_n \in X_n$.

Ahora usamos que $\mathbb{P}$ es claramente $(\aleph_1\text{-cerrado})^M$, por lo que 5.8 nos da que $\{\tau_n\}_{n\in\omega} \in M$. Ahora usamos el axioma de elección en M para obtener $\{T_n\}_{n\in\omega} \in M$ tal que cada T_n sea un árbol pequeño y $\mathrm{Est}_H(T_n) \subset \mathrm{Sim}_H(\tau_n)$. Por otra parte, sea $\{X_n\}_{n\in\omega} = \pi_G$, con $\pi \in SM^{\mathbb{P}}$ y sea T un árbol pequeño tal que $\mathrm{Est}_H(T) \subset \mathrm{Sim}_H(\pi)$.

Sea $p^* \in G$ una condición tal que $p^* \Vdash_S (\pi$ es una familia numerable de conjuntos no vacíos sin función de elección). Podemos definir una sucesión $\{p_n\}_{n\in\omega}$ de condiciones decrecientes en G tales que

$$p_n \leq p^* \wedge p_n \Vdash_S \tau_n \in \pi(\check{n}).$$

Usando nuevamente que $(\mathbb{P}$ es $\aleph_1\text{-cerrado})^M$ obtenemos una condición $p \in \mathbb{P}$ que extiende a todas las condiciones p_n (y en particular a p^*).

Ahora vamos a definir (en M) semejanzas $f_n \in \mathrm{Est}_H(T)$ de manera que $T^* = \bigcup\limits_{n\in\omega} f_n[T_n]$ sea un árbol pequeño y cada $f_n(p)$ sea compatible con p y con todos los $f_i(p)$, para $i < n$.

Admitiendo esto, usando que $(\mathbb{P}$ es $\aleph_1\text{-cerrado})^M$ podemos obtener una condición $q \in \mathbb{P}$ que extienda a p y todas las condiciones $f_n(p)$. Definimos

$$\tau' = \{(\text{p.o.}(\check{n}, f_n(\tau_n), \mathbb{1}) \mid n \in \omega)\},$$

y se cumple que

$$\mathrm{Est}_H(T^*) \subset \mathrm{Est}_H(f_n[T_n]) \subset \mathrm{Est}_H(f_n(\tau_n)),$$

luego $\mathrm{Est}_H(T^*) \subset \mathrm{Est}_H(\tau')$ y $\tau' \in SM^{\mathbb{P}}$. Además, claramente $\mathbb{1} \Vdash_S \tau' : \omega \longrightarrow V$ y $\mathbb{1} \Vdash_S \tau'(\check{n}) = f_n(\tau_n)$.

Entonces $f(p_n) \Vdash_S f_n(\tau_n) \in \pi(\check{n})$, luego $q \Vdash_S \tau'(\check{n}) \in \pi(\check{n})$. Es claro entonces que $q \Vdash_S (\tau'$ es una función de elección para $\pi)$ y, como $q \leq p$, también fuerza lo contrario, y tenemos una contradicción.

Sólo queda, pues, construir las semejanzas f_n. Suponemos construidas f_i, para $i < n$. Consideramos el árbol T_n y sea $\{t_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ una enumeración de los elementos de $t \in T_n \setminus T$ tales que $t|_{\ell(t)-1} \in T$ (notemos que $0 \leq \beta < \kappa$). Sea $\gamma_\alpha = t_\alpha(\ell(t_\alpha) - 1)$ y sea $\{\delta_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ una sucesión de ordinales menores que κ que no aparezcan en el rango de ningún elemento de T, ni de los árboles $f_i(T_i)$ para $i \leq n$, ni en los rangos de las primeras componentes de los elementos de p o de algún $f_i(p)$.

Sea t'_α la sucesión que coincide con t_α salvo su último elemento, que es δ_α en lugar de γ_α. Llamamos f_n a la semejanza que intercambia las extensiones de cada t_α con las de t'_α.

Como ninguna extensión de ningún t_α (ni mucho menos de ningún t'_α) puede estar en T, es inmediato que $f \in \mathrm{Est}_H(T)$.

Además $f_n(p)$ es compatible con p y con todos los $f_i(p)$, para $i < n$. En efecto, un elemento de $f_n(p)$ es de la forma $(f_n(t), \epsilon, i)$, donde $(t, \epsilon, i) \in p$. Si $f_n(t) = t$, entonces (t, ϵ, i) no puede dar lugar a ninguna incompatibilidad con p ni con ningún $f_i(p)$, pues todos ellos son compatibles con p.

Si $f_n(t) \neq t$, es porque t extiende a un t_α (no puede extender a un t'_α, porque entonces contendría a δ_α en su rango, luego (t, ϵ, i) no podría estar en p). Tenemos entonces que $f_n(t)$ contiene un δ_α en su rango, por lo que $(f_n(t), \epsilon, 1 - i)$ no puede aparecer ni en p ni en ningún $f_i(t)$, luego (t, ϵ, i) no puede dar lugar a ninguna contradicción.

Sólo falta probar que $T^* = \bigcup\limits_{n \in \omega} f_n[T_n]$ es un árbol pequeño. Ciertamente es un árbol numerable, y falta ver que no contiene cadenas infinitas. Si $\{t_k\}_{k \in \omega}$ fuera una cadena infinita en T^* (digamos con $\ell(t_k) = k$), existirá un k tal que $t_k \in T$ y $t_{k+1} \notin T$ (notemos que $t_0 = \varnothing \in T$). Digamos que $t_{k+1} \in f_n[T_n]$. Entonces, por construcción, tiene un δ_α en su rango que no está en el rango de ningún elemento de ningún otro $f_i[T_i]$, luego todos los t_l para $l \geq k+1$ deberían estar en $f_n[T_n]$, pero eso es imposible, porque $f_n[T_n]$ es un árbol pequeño. ■

Capítulo IX

El modelo de Solovay

En este capítulo vamos a construir un modelo N de ZF + ED en el que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es medible Lebesgue, tiene la propiedad de Baire y, si es no numerable, con tiene un subconjunto perfecto. Más precisamente, el modelo N será la clase de los conjuntos hereditariamente definibles por sucesiones de ordinales de una extensión genérica adecuada de un modelo transitivo numerable M de ZFC + $V = L$. Por [TD 6.17] y [TD 6.18], el modelo M debe contener necesariamente un cardinal inaccesible.

En la primera sección definiremos la clase de los conjuntos hereditariamente definibles por sucesiones de ordinales, que es una variante debida a Solovay de la clase de los conjuntos hereditariamente definibles por ordinales, que fue introducida por Gödel y que proporciona una prueba alternativa de la consistencia del axioma de elección.

9.1 Conjuntos hereditariamente definibles por ordinales

Para definir los conjuntos constructibles hemos introducido el concepto de subconjunto definible de un conjunto dado X, que es un conjunto de la forma

$$\{x \in X \mid \phi^X(x, x_1, \ldots, x_n)\},$$

donde $x_1, \ldots, x_n \in X$. Aquí se entiende que ϕ es una fórmula metamatemática, pero en la definición "real" del conjunto de partes definibles necesitamos considerar las fórmulas definidas en ZF, de modo que los subconjuntos definibles de X son en realidad de la forma

$$\{x \in X \mid X \vDash \phi[x, x_1, \ldots, x_n]\}.$$

El considerar fórmulas relativizadas a X (o su equivalente formal, consistente en usar $X \vDash \phi$) era justo lo que necesitábamos en ese contexto, en el que nuestro objetivo era definir "nuevos" conjuntos a partir de conjuntos "ya definidos", de modo que la definición no debía involucrar más conjuntos que los ya contenidos en X. Sin embargo, podemos plantearnos estudiar los conjuntos definibles "en general", a partir de conjuntos cualesquiera, sin restringir la definición a un conjunto de conjuntos "previamente definidos". Esto supondría considerar como conjuntos definibles a todos los conjuntos a que admiten una definición de la forma

$$\bigwedge x(x = a \leftrightarrow \phi(x, x_1, \ldots, x_n)).$$

Ahora bien, aquí es fundamental precisar qué parámetros $x_1, \ldots, x_n$ admitimos, porque si admitimos conjuntos arbitrarios como parámetros, nos encontramos con que todo conjunto es definible a partir de sí mismo, considerando la fórmula $\phi(x, a) \equiv x = a$ y la definibilidad se vuelve trivial. La alternativa más restrictiva sería no admitir parámetros, de modo que un conjunto a es definible si y sólo si existe una fórmula (metamatemática) $\phi(x)$ tal que

$$\bigwedge x(x = a \leftrightarrow \phi(x)).$$

Ciertamente, hay muchos conjuntos que cumplen esta propiedad (todos los que tienen una definición en el sentido usual, como $\varnothing$, ω, etc.) Sin embargo, este concepto de definibilidad no es formalizable en ZFC, porque no podemos expresar lo de "existe una fórmula metamatemática", y si tratamos de sustituir las fórmulas metamatemáticas por fórmulas definidas en ZF no sabemos expresar $\phi(x)$, ya que lo más que podemos escribir en su lugar es $X \vDash \phi[x]$, pero eso involucra ya un parámetro X y acabaríamos llegando al concepto de subconjunto definible que ya hemos estudiado.

No es sorprendente que tengamos problemas a la hora de definir formalmente la definibilidad, porque si pudiéramos hacerlo, como sólo hay una cantidad numerable de fórmulas de $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$, podríamos probar que sólo hay una cantidad numerable de conjuntos definibles, luego podríamos demostrar que hay conjuntos no definibles, mientras que ya hemos probado que existen modelos de ZFC en los que todos los conjuntos son definibles.[1]

Sin embargo, Gödel demostró que es posible llegar a un concepto fructífero de definibilidad (formalizable en ZF, pero no trivial) consistente en admitir como parámetros los ordinales. Así pues, la idea es estudiar los conjuntos a "definibles por ordinales" en el sentido de que existen ordinales $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de modo que

$$\bigwedge x(x = a \leftrightarrow \phi(a, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)),$$

para una cierta fórmula metamatemática ϕ. Aparentemente tenemos el mismo problema de antes, y es que no podemos formalizar lo de "existe una fórmula metamatemática", pero veremos en este caso podemos esquivar el problema.

[1]Notemos que no hay ningún problema en definir el concepto de conjunto definible en un modelo, cosa que ya hicimos justo antes del teorema 3.27. El problema está en definir un concepto de "definibilidad" mediante una fórmula "x es definible" con la propiedad de que si M es un modelo de ZFC entonces $\bigwedge a \in M$ ($M \vDash [a]$ es definible $\leftrightarrow a$ es definible en M), donde en la parte izquierda "definible" es el concepto de existencia dudosa y en la parte derecha es el que ya tenemos definido.

Definición 9.1 Se dice que un conjunto a es *definible por ordinales* si existen $\beta > \operatorname{rang}(a)$, $n \in \omega$, $s \in \beta^n$ y $R \in \mathrm{Df}(V_\beta, n+1)$ tales que

$$\bigwedge x \in V_\beta(x = a \leftrightarrow s^\frown x \in R).$$

Llamaremos $\mathrm{D}(\Omega)$ a la clase de todos los conjuntos definibles por ordinales.

En lugar de R, podemos tomar una fórmula $\phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$ y escribir la condición en la forma

$$\bigwedge x \in V_\beta(x = a \leftrightarrow V_\beta \vDash \phi[s, x]).$$

De este modo, un conjunto es definible por ordinales si en un V_β suficientemente grande puede definirse mediante una fórmula cuyos parámetros sean ordinales. La introducción de V_β es un tecnicismo para evitar el problema de que $V \vDash \phi[s, x]$ no puede definirse en ZFC. No obstante, aunque técnicamente es imprescindible, en el fondo es redundante, pues todo conjunto definible mediante una fórmula (metamatemática) con parámetros en Ω está en $\mathrm{D}(\Omega)$:

Teorema 9.2 *Sea $\phi(x_1, \ldots, x_n, x)$ una fórmula (metamatemática) con a lo sumo las variables libres indicadas. Entonces*

$$\bigwedge \alpha_1 \cdots \alpha_n a(\bigwedge x(x = a \leftrightarrow \phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x)) \to a \in \mathrm{D}(\Omega)).$$

Demostración: Fijemos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, a$ y supongamos

$$\bigwedge x(x = a \leftrightarrow \phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x)).$$

Por el teorema de reflexión [LM 12.32] existe $\beta > \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \operatorname{rang}(a)\}$ tal que ϕ es absoluta para $V_\beta - V$. Esto implica que

$$\bigwedge x \in V_\beta(x = a \leftrightarrow \phi^{V_\beta}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x)).$$

Si llamamos

$$R = \{t \in V_\beta^{n+1} \mid \phi^{V_\beta}(t(0), \ldots, t(n))\} = \{t \in V_\beta^{n+1} \mid V_\beta \vDash \ulcorner\phi\urcorner[t]\},$$

(donde $\ulcorner\phi\urcorner \in \mathrm{Form}(\mathcal{L})$ es la fórmula que representa a la fórmula metamatemática ϕ) se cumple que $R \in \mathrm{Df}(V_\beta, n+1)$ y, llamando

$$s = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \beta^n.$$

tenemos que

$$\bigwedge x \in V_\beta(x = a \leftrightarrow s^\frown x \in R),$$

luego $a \in \mathrm{D}(\Omega)$. ■

De este modo hemos probado que $D(\Omega)$ contiene a todos los conjuntos definibles mediante una fórmula metamatemática con parámetros ordinales, es decir, a todos los conjuntos que queríamos considerar definibles por ordinales. Pronto demostraremos el recíproco.

Observemos que el teorema anterior aplicado a la fórmula $\phi \equiv x = \alpha$ nos da que $\Omega \subset \mathrm{D}(\Omega)$. En particular, vemos que $\mathrm{D}(\Omega)$ es una clase propia.

Si consideramos la fórmula $\phi(\alpha, x) \equiv \bigwedge u(u \in x \leftrightarrow u \subset \alpha)$ concluimos que $\mathcal{P}\alpha \in \mathrm{D}(\Omega)$. En cambio, no podemos asegurar que $\mathcal{P}\omega \subset \mathrm{D}(\Omega)$, pues que podamos definir $\mathcal{P}\omega$ no significa que podamos definir todos y cada uno de los subconjuntos de ω. En otras palabras, no está claro que la clase $\mathrm{D}(\Omega)$ sea transitiva.

Antes de ocuparnos de ésta y otras cuestiones, introducimos una extensión debida a Solovay de la clase $\mathrm{D}(\Omega)$ porque su tratamiento es totalmente paralelo, así que merece la pena considerar las dos a la vez:

Definición 9.3 Se dice que un conjunto a es *definible por una sucesión de ordinales* si existen $s \in \Omega^\omega$, $\beta > \max\{\mathrm{rang}(a), \mathrm{rang}(s)\}$, $n \in \omega$ y $R \in \mathrm{Df}(V_\beta, 2)$ tales que

$$\bigwedge x \in V_\beta (x = a \leftrightarrow (s, x) \in R).$$

Llamaremos $\mathrm{D}(\Omega^\omega)$ a la clase de todos los conjuntos definibles por sucesiones de ordinales.

La demostración de 9.2 se adapta fácilmente para el caso en que $\mathrm{D}(\Omega)$ se sustituye por $\mathrm{D}(\Omega^\omega)$, aunque una adaptación aún más directa de la prueba nos da el teorema siguiente:

Teorema 9.4 *Sea $\phi(s, x)$ una fórmula (metamatemática) con a lo sumo las variables libres indicadas. Entonces*

$$\bigwedge s \in \Omega^\omega \bigwedge a(\bigwedge x(x = a \leftrightarrow \phi(s, x)) \rightarrow a \in \mathrm{D}(\Omega^\omega)).$$

Por ejemplo, con $\phi \equiv x = s$ obtenemos que $\Omega^\omega \subset \mathrm{D}(\Omega^\omega)$, mientras que con $\phi \equiv x = s(0)$ obtenemos que $\Omega \subset \mathrm{D}(\Omega^\omega)$. No sería difícil probar que $\mathrm{D}(\Omega) \subset \mathrm{D}(\Omega^\omega)$, pero un poco más adelante será inmediato.

También se cumple $\mathcal{P}\omega \in \mathrm{D}(\Omega^\omega)$, pero en este caso podemos añadir que $\mathcal{P}\omega \subset \mathrm{D}(\Omega^\omega)$. En efecto, dado $a \in \mathcal{P}\omega$, aplicamos el teorema anterior a la sucesión $s = \chi_a \in \Omega^\omega$ y la fórmula $\phi(s, x) \equiv \bigwedge u(u \in x \leftrightarrow u \in \omega \wedge s(u) = 1)$, con lo que concluimos que $a \in \mathrm{D}(\Omega^\omega)$.

Podemos suponer que los signos del lenguaje $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$ de la teoría de conjuntos son números naturales, y entonces $\mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}) \subset \omega^{<\omega}$. Esto da sentido a la definición siguiente:

Definición 9.5 Si $s \in \Omega^{<\omega}$ (resp. $s \in \Omega^\omega$), definimos $E_\Omega(s)$ (resp. $E_{\Omega^\omega}(s)$) como sigue:

a) Si $s = (\beta, k)^\frown \phi^\frown t$, donde $\beta \in \Omega$, $k \in \omega$, $\phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$ con $n + 1$ (resp. 2) variables libres, $\ell(\phi) = k$, $t \in \Omega^n$ (resp. $t \in \Omega^\omega$) y existe un (necesariamente único) $a \in V_\beta$ tal que

$$\bigwedge x \in V_\beta (x = a \leftrightarrow V_\beta \vDash \phi[t, x]),$$

entonces $E(s) = a$.

b) Si no se dan las condiciones anteriores, $E(s) = \varnothing$.

Teniendo en cuenta que, evidentemente, $\varnothing \in \mathrm{D}(\Omega) \cap \mathrm{D}(\Omega^\omega)$, es obvio que

$$\mathrm{D}(\Omega) = \{E_\Omega(s) \mid s \in \Omega^{<\omega}\}, \qquad \mathrm{D}(\Omega^\omega) = \{E_{\Omega^\omega}(s) \mid s \in \Omega^\omega\}.$$

En el caso de $\mathrm{D}(\Omega)$ podemos simplificar un poco la representación observando que $\Omega^{<\omega}$ se puede biyectar con Ω. Para ello definimos en $\Omega^{<\omega}$ el orden dado por $s < t$ si y sólo si

a) $\max s < \max t$ (donde, si $\ell(s) = n$, representamos $\max s = \max s[n]$) o

b) $\max s = \max t \wedge \ell(s) < \ell(t)$ o

c) $\max s = \max t \wedge \ell(s) = \ell(t) \wedge \bigvee k < \ell(s)\ (s|_k = t|_k \wedge s(k) < t(k))$.

Es fácil ver que este orden es un buen orden en el que los segmentos iniciales son conjuntos, por lo que existe una única semejanza $F : \Omega \longrightarrow \Omega^{<\omega}$. Si llamamos E_Ω a la composición de F con el E_Ω definido previamente tenemos aplicaciones suprayectivas

$$E_\Omega : \Omega \longrightarrow \mathrm{D}(\Omega), \qquad E_{\Omega^\omega} : \Omega^\omega \longrightarrow \mathrm{D}(\Omega^\omega).$$

Notemos que hemos definido explícitamente ambas funciones, con lo que tenemos fórmulas (metamatemáticas)

$$\Phi_\Omega(\alpha, x) \equiv \alpha \in \Omega \wedge x = E_\Omega(\alpha), \qquad \Phi_{\Omega^\omega}(s, x) \equiv s \in \Omega^\omega \wedge x = E_{\Omega^\omega}(s)$$

de modo que, para todo $a \in \mathrm{D}(\Omega)$ existe un $\alpha \in \Omega$ tal que

$$\bigwedge x(x = a \leftrightarrow \Phi_\Omega(\alpha, x)), \tag{9.1}$$

e igualmente con Ω^ω, con lo que tenemos recíprocos de los teoremas 9.2 y 9.4, es decir, todo conjunto definible por ordinales o sucesiones de ordinales se puede definir mediante una fórmula metamatemática explícita (la misma para todos), lo cual nos libera del problema de tener que expresar "existe una fórmula metamatemática" en el lenguaje $\mathcal{L}_{\mathrm{tc}}$. No necesitamos decir "existe una fórmula" porque podemos usar una misma fórmula explícita en todos los casos. Con esto queda demostrado que las clases que hemos definido son exactamente las clases que pretendíamos definir.

Más aún, ahora es fácil probar lo siguiente:

Teorema 9.6 *$V = \mathcal{D}(\Omega) \to$ AE.*

DEMOSTRACIÓN: Un poco más en general, podemos probar que, al igual que sucede con la clase L, existe una fórmula (metamatemática) $x \leq y$ con x e y como únicas variables libres, que (en ZF) determina un buen orden de la clase $\mathcal{D}(\Omega)$. En efecto, basta tomar

$$x \leq y \equiv \bigvee \alpha(x = E_\Omega(\alpha) \wedge \bigwedge \beta < \alpha\ y \neq E_\Omega(\beta)).$$

Esto significa que x es menor o igual que y si el menor ordinal que define a x es menor o igual que el menor ordinal que define a y o, equivalentemente, si x aparece antes que y en la enumeración de $\mathrm{D}(\Omega)$ determinada por E_Ω.

Claramente, esta fórmula cumple lo requerido. En particular, si suponemos $V = \mathcal{D}(\Omega)$ tenemos un buen orden sobre la clase universal V, lo cual implica a su vez el axioma de elección. ■

No obstante, con esto no tenemos probada la consistencia del axioma de elección si no demostramos la consistencia de $V = \mathcal{D}(\Omega)$. Veamos primeramente algunas propiedades elementales de la clase $\mathrm{D}(\Omega)$:

Teorema 9.7 *Se cumple:*

a) $\Omega \subset \mathrm{D}(\Omega)$.

b) Si $u, v \in \mathrm{D}(\Omega)$, *entonces* $\{u, v\} \in \mathrm{D}(\Omega)$.

c) Si $u \in \mathrm{D}(\Omega)$, *entonces* $\bigcup\limits_{x \in u} x$, $\mathcal{P}u \in \mathrm{D}(\Omega)$.

Todo esto vale también para $\mathrm{D}(\Omega^\omega)$ *y además* $\Omega^\omega \subset \mathrm{D}(\Omega^\omega)$, $\mathrm{D}(\Omega) \subset \mathrm{D}(\Omega^\omega)$.

Demostración: Ya hemos visto que $\Omega \subset \mathrm{D}(\Omega) \cap \mathrm{D}(\Omega^\omega)$ y que $\Omega^\omega \subset \mathrm{D}(\Omega^\omega)$. La última inclusión se debe a que si $a \in \mathrm{D}(\Omega)$ existe un $\alpha \in \Omega$ que cumple (9.1), luego, llamando $s \in \Omega^\omega$ a la sucesión constante igual a α,

$$\bigwedge x(x = a \leftrightarrow \phi(s, x)),$$

donde $\phi(s, x) \equiv \Phi_\Omega(s(0), x)$, luego $a \in \mathrm{D}(\Omega^\omega)$, por 9.4.

b) Si u, v cumplen (9.1) con ordinales α_1 y α_2 respectivamente, entonces podemos aplicar a $\{u, v\}$ el teorema 9.2 con

$$\phi(\alpha_1, \alpha_2, x) \equiv \bigwedge y(y \in x \leftrightarrow \Phi_\Omega(\alpha_1, y) \vee \Phi_\Omega(\alpha_2, y)).$$

En el caso de Ω^ω tenemos $s_0, s_1 \in \Omega^\omega$, y entonces tomamos

$$\phi(s, x) \equiv \bigwedge y(y \in x \leftrightarrow \Phi_\Omega(s_0, y) \vee \Phi_\Omega(s_1, y)).$$

donde $s_i(n) = s(2n + i)$.

Las dos afirmaciones de c) son similares. Demostramos la segunda: Si u cumple (9.1) con un ordinal α, entonces podemos aplicar a $\mathcal{P}u$ el teorema 9.2 con

$$\phi(\alpha, x) \equiv \bigvee z(\Phi_\Omega(\alpha, z) \wedge x = \mathcal{P}z).$$

Para Ω^ω basta cambiar α por una sucesión s. ■

Todo esto apunta hacia la posibilidad de que $\mathrm{D}(\Omega)$ sea un modelo transitivo de ZFC, pero enseguida veremos que no es posible demostrar que cumpla el axioma de extensionalidad, lo cual a su vez está relacionado con que la clase $\mathrm{D}(\Omega)$ no es necesariamente transitiva. Para comprender la situación conviene considerar la definición siguiente:

Definición 9.8 Diremos que un conjunto a es *hereditariamente definible por ordinales* (resp. *por sucesiones de ordinales)* si $a \in \mathrm{D}(\Omega)$ y $\mathrm{ct}(a) \subset \mathrm{D}(\Omega)$ (resp. si $a \in \mathrm{D}(\Omega^\omega)$ y $\mathrm{ct}(a) \subset \mathrm{D}(\Omega^\omega)$). Llamaremos $\mathrm{HD}(\Omega)$ y $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ a las clases de los conjuntos hereditariamente definibles por ordinales y sucesiones de ordinales, respectivamente.

Así pues, un conjunto es hereditariamente definible por ordinales si es definible por ordinales, y sus elementos son definibles por ordinales, y los elementos de sus elementos también lo son, etc.

Las inclusiones siguientes son inmediatas:

$$\Omega \subset \mathrm{HD}(\Omega) \subset \mathrm{D}(\Omega), \qquad \Omega,\ \Omega^\omega \subset \mathrm{HD}(\Omega^\omega) \subset \mathrm{D}(\Omega^\omega), \qquad \mathrm{HD}(\Omega) \subset \mathrm{HD}(\Omega^\omega).$$

Además, $\mathrm{HD}(\Omega)$ y $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ son claramente clases transitivas. Esto a su vez implica el siguiente hecho elemental, que enunciamos para referencias posteriores:

Teorema 9.9 *Si* $a \in \mathrm{D}(\Omega)$ *y* $a \subset \mathrm{HD}(\Omega)$ *entonces* $a \in \mathrm{HD}(\Omega)$, *y lo mismo vale para* Ω^ω.

El teorema siguiente muestra que considerar clases de conjuntos hereditariamente definibles es imprescindible si queremos obtener modelos de ZF:

Teorema 9.10 *Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) $\mathrm{D}(\Omega)$ *cumple el axioma de extensionalidad.*

b) $\mathrm{D}(\Omega)$ *es transitiva.*

c) $\mathrm{D}(\Omega) = \mathrm{HD}(\Omega)$.

d) $V = \mathrm{HD}(\Omega)$.

e) $V = \mathrm{D}(\Omega)$.

Y lo mismo vale si cambiamos Ω *por* Ω^ω.

Demostración: Se cumple que a) $\Rightarrow$ e), pues $V_\alpha, V_\alpha \cap \mathrm{D}(\Omega) \in \mathrm{D}(\Omega)$ y ambos conjuntos tienen los mismos elementos en $\mathrm{D}(\Omega)$. Por lo tanto, si $\mathrm{D}(\Omega)$ cumple el axioma de extensionalidad, entonces $V_\alpha = V_\alpha \cap \mathrm{D}(\Omega) \subset \mathrm{D}(\Omega)$ para todo α, luego $V = \mathrm{D}(\Omega)$.

La equivalencia d) $\Leftrightarrow$ e) es inmediata, como también lo son las implicaciones e) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a). ■

Con este ajuste, no hay dificultad en probar que tenemos modelos de ZF:

Teorema 9.11 $\mathrm{HD}(\Omega)$ *y* $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ *son modelos transitivos de* ZF.

DEMOSTRACIÓN: La prueba es idéntica para ambas clases. La veremos únicamente para Ω. La clase $\mathrm{HD}(\Omega)$ cumple el axioma de extensionalidad porque es transitiva, y cumple el axioma de regularidad porque todas las clases lo cumplen.

El axioma del par se cumple porque si $u, v \in \mathrm{HD}(\Omega)$, entonces tenemos que $\{u, v\} \in \mathrm{D}(\Omega)$ por 9.7, luego $\{u, v\} \in \mathrm{HD}(\Omega)$ por 9.9. El mismo razonamiento se aplica al axioma de la unión y al axioma de partes. El axioma de infinitud se cumple porque $\omega \in \mathrm{HD}(\Omega)$. Falta probar el axioma del reemplazo. Para ello fijamos una fórmula $\phi(x, y, x_1, \ldots, x_n)$ y conjuntos $x_1, \ldots, x_n, a \in \mathrm{HD}(\Omega)$ y suponemos que

$$\bigwedge xyz \in \mathrm{HD}(\Omega)(\phi^{\mathrm{HD}(\Omega)}(x, y) \land \phi^{\mathrm{HD}(\Omega)}(x, z) \to y = z).$$

Sea $b = \{y \in \mathrm{HD}(\Omega) \mid \bigvee x \in a\ \phi^{\mathrm{HD}(\Omega)}(x, y)\}$, que es un conjunto por el axioma del reemplazo. Se cumple que $b \in \mathrm{D}(\Omega)$, pues

$$\bigwedge x(x = b \leftrightarrow \bigwedge v(v \in x \leftrightarrow v \in \mathrm{HD}(\Omega) \land \bigvee u \in a\ \phi^{\mathrm{HD}(\Omega)}(u, v))).$$

Esto prueba el axioma del reemplazo en $\mathrm{HD}(\Omega)$. ■

Teorema 9.12 $\mathrm{HD}(\Omega)$ *es un modelo transitivo de* ZFC.

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que todo conjunto $A \in \mathrm{HD}(\Omega)$ puede ser bien ordenado$^{\mathrm{HD}(\Omega)}$. Puesto que "ser un buen orden" es absoluto para modelos transitivos de ZF, basta probar que existe un buen orden R sobre A tal que $R \in \mathrm{HD}(\Omega)$. Para ello basta definir

$$R = \{(x, y) \in A \times A \mid x \leq y\},$$

donde $x \leq y$ es la fórmula definida en la prueba del teorema 9.6. Así R es un buen orden en A, y es fácil ver que si A es definible a partir de un ordinal γ, lo mismo le sucede a R, luego $R \in \mathrm{D}(\Omega)$ y como $R \subset \mathrm{HD}(\Omega)$, concluimos que $R \in \mathrm{HD}(\Omega)$. ■

Puesto que el teorema anterior se demuestra en ZF, tenemos así una prueba alternativa de la consistencia de AE basada en la clase $\mathrm{HD}(\Omega)$ en lugar de en L. El argumento no es adaptable a $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$, pues no podemos definir explícitamente un buen orden en Ω^ω. Sin embargo, sí que podemos demostrar que $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ satisface el principio de elecciones dependientes ED, para lo cual nos basamos en lo siguiente:

Teorema 9.13 (ED) $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)^\omega \subset \mathrm{HD}(\Omega^\omega)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : \omega \longrightarrow \mathrm{HD}(\Omega^\omega)$. Por transitividad, $f \subset \mathrm{HD}(\Omega^\omega)$, luego sólo hemos de probar que $f \in \mathrm{D}(\Omega^\omega)$. Para cada $n \in \omega$ existe[2] $s_n \in \Omega^\omega$ tal que $f(n) = E_{\Omega^\omega}(s_n)$.

[2]Aquí usamos ED, pues estamos realizando una elección numerable.

Fijemos una biyección definible $\langle\ ,\ \rangle : \omega\times\omega \longrightarrow \omega$, por ejemplo la semejanza determinada por el orden canónico en $\omega\times\omega$. Sea $s\in\Omega^\omega$ la aplicación dada por $s(\langle n,m\rangle) = s_n(m)$. De este modo:

$$\bigwedge x(x = f \leftrightarrow x : \omega \longrightarrow \mathrm{HD}(\Omega^\omega) \land$$

$$\bigwedge n\in\omega \bigvee t\in\Omega^\omega(\bigwedge m\in\omega\ t(m) = s(\langle n,m\rangle) \land x(n) = E_{\Omega^\omega}(t))),$$

y esta equivalencia demuestra que $f\in\mathrm{D}(\Omega^\omega)$. ■

Teorema 9.14 (ED) $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ *es un modelo transitivo de* ZF + ED.

DEMOSTRACIÓN: Sean $A, R \in \mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ en las hipótesis de ED, es decir, $R\subset A\times A$ y $\bigwedge x\in A\bigvee y\in A\ y\,R\,x$. Por ED existe $f:\omega\longrightarrow A$ tal que $\bigwedge n\in\omega\ f(n+1)\,R\,f(n)$ y por el teorema anterior $f\in\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$. Así pues, $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ cumple ED. ■

Como ya hemos observado, el teorema 9.12 nos proporciona una prueba alternativa de la consistencia de AE distinta de la que obtenemos al considerar la clase L, pero no hemos demostrado la consistencia de $V = \mathrm{HD}(\Omega)$. Una prueba elemental de este hecho consiste en observar que tenemos las inclusiones

$$L\subset \mathrm{HD}(\Omega)\subset \mathrm{D}(\Omega)\subset V, \qquad L\subset \mathrm{HD}(\Omega^\omega)\subset \mathrm{D}(\Omega^\omega)\subset V.$$

Y si $V = L$ todas ellas son igualdades, luego es consistente que ése sea el caso, es decir, es consistente que todo conjunto sea hereditariamente definible por ordinales (y en particular por sucesiones de ordinales).

Podría pensarse que podríamos dar una prueba directa de este hecho (que no involucrara a L) demostrando que la clase $\mathrm{HD}(\Omega)$ es un modelo de $V = \mathrm{HD}(\Omega)$, pero sucede que esto no es necesariamente cierto. Equivalentemente, la fórmula "$x\in\mathrm{HD}(\Omega)$" no es necesariamente absoluta para $\mathrm{HD}(\Omega)$. Para probarlo nos apoyamos en el teorema siguiente:

Teorema 9.15 (AE) *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, $\mathbb{P}\in M$ *un c.p.o. casi homogéneo^M y G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces se cumple que* $\mathrm{HD}(\Omega)^{M[G]}\subset M$ *y si $\mathbb{P}$ es $\aleph_1$-cerrado^M también* $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)^{M[G]}\subset M$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que existe un $x\in\mathrm{HD}(\Omega)^{M[G]}\setminus M$. Podemos tomarlo de rango mínimo δ, con lo que $x\subset\mathrm{HD}(\Omega)^{M[G]}$. Sea $\alpha\in\Omega^M$ tal que $(\bigwedge u(u = x\leftrightarrow \Phi_\Omega(\alpha,u)))^{M[G]}$. Así, $\bigwedge y\in M(y\in x\leftrightarrow \Psi^{M[G]}(\alpha,y))$, donde $\Psi(\alpha,y)\equiv\bigvee u(y\in u\land\Phi_\Omega(\alpha,u))$. De este modo, si $y\in x$, tenemos que $\Psi^{M[G]}(\alpha,y)$, luego existe un $p\in G$ tal que $p\Vdash\Psi(\check\alpha,\check y)$, y por 4.45 tenemos que, de hecho, $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}\Vdash\Psi(\check\alpha,\check y)$. El recíproco es trivial, luego

$$x = \{y\in V_{\delta+1}\mid \mathbb{1}_{\mathbb{P}}\Vdash\Psi(\check\alpha,\check y)\}^M\in M,$$

contradicción.

Si consideramos $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ la situación es la misma salvo que ahora tenemos una sucesión $s \in (\Omega^\omega)^{M[G]}$ en lugar de un $\alpha \in \Omega^M$, pero si $\mathbb{P}$ es $\aleph_1$-cerrado^M entonces $s \in M$ y el argumento se aplica igualmente. ∎

Así, por ejemplo, si aplicamos el teorema anterior a $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega, 2, \aleph_0)$ y a un modelo de ZFC + $V = L$ obtenemos una extensión genérica en la que $V = L[a]$, para un cierto $a \subset \omega$ y $\mathrm{HD}(\Omega) = L$.

Más concretamente, la prueba del teorema anterior muestra que $a \notin \mathrm{D}(\Omega)$, con lo que, aunque claramente $\mathcal{P}\omega \in \mathrm{D}(\Omega)$, es consistente que haya elementos de $\mathcal{P}\omega$ que no sean definibles por ordinales.

Usando $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega_1, 2, \aleph_1)^M$ obtenemos el resultado análogo para $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ (aunque ahora $a \subset \omega_1$, ya que $\mathcal{P}\omega \in \mathrm{HD}(\Omega^\omega)$).

Más significativo es que, como anunciábamos, $\mathrm{HD}(\Omega)$ no cumple necesariamente $V = \mathrm{HD}(\Omega)$:

Teorema 9.16 *Si* ZFC *es consistente, también lo es*

$$\mathrm{ZFC} \ + \ L \subsetneq \mathrm{HD}(\Omega) \subsetneq V \ + \ \mathrm{HD}(\Omega)^{\mathrm{HD}(\Omega)} = L.$$

Demostración: Razonamos en ZFC. Partimos de un modelo transitivo numerable M de ZFC + $V = L$ y tomamos $\mathbb{Q} = \mathrm{Fn}(\omega, 2, \aleph_0) \in M$ y un filtro $\mathbb{Q}$-genérico H sobre M. De este modo, si llamamos $a = \bigcup G$ a la función genérica determinada por H, tenemos un modelo $N = M[H] = M[a]$ que, según el teorema anterior, cumple que $\mathrm{HD}(\Omega)^N \subset M$ y, como $M = L^N$, de hecho, $(\mathrm{HD}(\Omega) = L)^N$. Por otra parte, $(V = L[a])^N$. Además, como M cumple la HCG, lo mismo le sucede a N.

Sea ahora $A = \{\aleph_n^N \mid n \in \omega\} \in N$ y definamos

$$E(\aleph_n) = \begin{cases} \aleph_{n+1} & \text{si } a(n) = 1, \\ \aleph_{n+2} & \text{si } a(n) = 0. \end{cases}$$

Tomamos $\mathbb{P} = (\prod\limits_{n\in\omega} \mathrm{Fn}(E(\aleph_n), 2, \aleph_n))^N$ y un filtro G $\mathbb{P}$-genérico sobre N. Entonces, según 5.36 la extensión $N[G]$ tiene los mismos cardinales que N y, según 5.38,

$$\bigwedge n \in \omega \ (2^{\aleph_n})^{N[G]} = E(\aleph_n).$$

Esto hace que $a \in \mathrm{D}(\Omega)^{N[G]}$, pues

$$(\bigwedge x(x = a \leftrightarrow x \in \mathcal{C} \land \bigwedge n \in \omega(a(n) = 1 \leftrightarrow 2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1})))^{N[G]}.$$

Claramente entonces $a \in \mathrm{HD}(\Omega)^{N[G]}$, luego $(N = L[a] \subset \mathrm{HD}(\Omega))^{N[G]}$. Por otra parte, es inmediato comprobar que un producto de c.p.o.s casi homogéneos es casi homogéneo, luego el teorema anterior nos da la inclusión opuesta. Así pues, $(\mathrm{HD}(\Omega) = L[a] \subsetneq V)^{N[G]}$, mientras que, según habíamos visto,

$$(\mathrm{HD}(\Omega)^{\mathrm{HD}(\Omega)})^{N[G]} = \mathrm{HD}(\Omega)^N = M = L^{N[G]}.$$

∎

Notas Una variante del teorema anterior consiste en suponer que M tiene un (mínimo) cardinal inaccesible κ y tomar como conjunto A el formado por los cardinales $\aleph_{\kappa+n}^M$ en lugar de $\aleph_n$. De este modo obtenemos un modelo en el que existe un $a \in {}^\omega 2$ (o, equivalentemente, un $x \subset \omega$) que cumple $a \in \mathrm{HD}(\Omega)$, pero $a \notin \mathrm{HD}(\Omega)^{V_\kappa}$, ya que $V_\kappa^{N[G]} = V_\kappa^N$ y si a fuera hereditariamente definible por ordinales en V_κ^N también lo sería en N.

Así pues, vemos que "ser hereditariamente definible por ordinales" no es absoluto ni siquiera para los modelos V_κ, para los que "prácticamente todo" es absoluto. Hay que tener en cuenta todo V para determinar si un simple subconjunto de ω es o no definible por ordinales.

Otra variante es en tomar $\mathbb{Q} = \mathrm{Fn}(\omega_2 \times \omega, 2, \aleph_0)$, con lo que $(2^{\aleph_0} = \aleph_2)^N$ (y tomar como a una cualquiera de las $\aleph_2$ funciones genéricas que hay en N). Así vemos que es consistente que $(2^{\aleph_0} = \aleph_2)^{\mathrm{HD}(\Omega)}$, por lo que, al contrario que L, la clase $\mathrm{HD}(\Omega)$ no puede usarse para probar la consistencia de la hipótesis del continuo.

Por último, todo el argumento se adapta al caso de $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ sin más que excluir el factor correspondiente a $n = 0$ en la definición de $\mathbb{P}$, para que éste sea $\aleph_1$-cerrado. ■

Vemos así que el hecho de que el modelo $\mathrm{HD}(\Omega)$ cumpla una determinada propiedad (por ejemplo, $2^{\aleph_0} = \aleph_2$) no implica necesariamente que dicha propiedad sea consistente con $V = \mathrm{HD}(\Omega)$. Por ejemplo, el teorema 9.12 no sirve como prueba de que $V = \mathrm{HD}(\Omega) \rightarrow \mathrm{AE}$.

Por consiguiente, hasta ahora el único argumento que hemos dado que prueba la consistencia de $V = \mathrm{HD}(\Omega)$ es que se cumple trivialmente si $V = L$. Veamos a continuación que también es consistente con $V \neq L$:

Teorema 9.17 *Si* ZFC *es consistente, también lo es* ZFC $+L \subsetneq \mathrm{HD}(\Omega) = V$.

Demostración: Razonamos en ZFC. Partimos de un modelo transitivo numerable M de ZFC $+$ $V = L$ y consideramos un cardinal^M κ tal que $\kappa = \omega_\kappa^M$. Consideramos

$$\mathbb{P} = (\prod_{\alpha<\kappa} \mathrm{Fn}(\omega_{2\alpha+3} \setminus \omega_{2\alpha+1}, 2, \aleph_{2\alpha+1}))^M,$$

tomamos un filtro $\mathbb{P}$-genérico G y formamos la extensión genérica $M[G]$. Notemos que $\mathbb{P}$ es semejante al producto de Easton (5.32) correspondiente (en M) a la función E de dominio $A = \{\aleph_{2\alpha+1} \mid \alpha < \kappa\}$ dada por $E(\mu) = \mu^{++}$. Por lo tanto, sabemos que $M[G]$ tiene los mismos cardinales y cofinalidades que M y que la función del continuo en $M[G]$ (bajo κ) viene dada por

$$2^{\aleph_{2\alpha+1}} = \aleph_{2\alpha+3}, \qquad 2^{\aleph_{2\alpha}} = \aleph_{2\alpha+1}.$$

Sea $\mathbb{P}_\alpha = \mathrm{Fn}(\omega_{2\alpha+3} \setminus \omega_{2\alpha+1}, 2, \aleph_{2\alpha+1})^M$, sea $i_\alpha : \mathbb{P}_\alpha \longrightarrow \mathbb{P}$ la inmersión completa, $G_\alpha = i_\alpha^{-1}[G]$ y $f_\alpha = \bigcup G_\alpha$. Así $f_\alpha : \omega_{2\alpha+3} \setminus \omega_{2\alpha+1} \longrightarrow 2$.

Notemos que $\{f_\alpha\}_{\alpha<\kappa} \in M[G]$. Ahora definimos en $M[G]$ una sucesión creciente $\{B_\alpha\}_{\alpha\leq\kappa}$ de conjuntos $B_\alpha \subset \omega_{2\alpha+3}$ mediante

$$B_\alpha = \begin{cases} \bigcup\limits_{\delta<\alpha} B_\delta & \text{si } \alpha \notin \{0\} \cup \bigcup\limits_{\delta<\alpha} B_\delta, \\ \{0\} \cup \bigcup\limits_{\delta<\alpha} B_\delta \cup \{\delta \in \omega_{2\alpha+3} \setminus \omega_{2\alpha+1} \mid f_\alpha(\delta) = 1\} & \text{si } \alpha \in \{0\} \cup \bigcup\limits_{\delta<\alpha} B_\delta. \end{cases}$$

De este modo,

$$B_0 = \{0\} \cup \{\delta \in \omega_3 \setminus \omega_1 \mid f_0(\delta) = 1\}$$

determina a f_0. Los siguientes B_α son todos iguales a E_0 hasta el mínimo $\alpha < \omega_3$ tal que $f_0(\alpha) = 1$, para el cual tenemos que

$$B_\alpha = B_0 \cup \{\delta \in \omega_{2\alpha+3} \setminus \omega_{2\alpha+1} \mid f_\alpha(\delta) = 1\},$$

y así B_α codifica a f_0 y f_α, etc. Llamamos $B = B_\kappa = \bigcup\limits_{\alpha<\kappa} B_\alpha$.

Notemos que, en general, $\bigcup\limits_{\delta<\alpha} B_\delta \subset \omega_{2\alpha+1}$ y $\alpha \leq \omega_\alpha < \omega_{2\alpha+1}$, por lo que si $\alpha < \kappa$ pertenece o no a B se determina antes de definir B_α.

Ahora consideramos el modelo $N = M[B] \subset M[G]$ dado por el teorema 4.53. El hecho de que los cardinales y la cofinalidades en M se conserven en $M[G]$ implica que también se conservan en N, de modo que los tres modelos tienen los mismos cardinales y cofinalidades. Observemos que si $\alpha \in B$, entonces

$$f_\alpha(\delta) = 1 \leftrightarrow \delta \in B \cap (\omega_{2\alpha+3}^N \setminus \omega_{2\alpha+1}^N),$$

por lo que $\{f_\alpha\}_{\alpha\in B} \in N$. En particular, ahora es claro que $N \neq M$, luego $(V \neq L)^N$. Basta probar que $B \in \mathrm{HD}(\Omega)^N$, pues la minimalidad de $M[B]$ implica entonces que $N = M[B] \subset \mathrm{HD}(\Omega)^N \subset N$, y en definitiva concluimos que $(L \subsetneq \mathrm{HD}(\Omega) = V)^N$.

A su vez, basta probar que

$$\bigwedge \alpha < \kappa (\alpha \in B \leftrightarrow 2^{\aleph_{2\alpha+1}} = \aleph_{2\alpha+3})^N,$$

pues esto, junto con el hecho de que $B \subset \kappa$, nos da una definición de B en N a partir del ordinal κ.

Si $\alpha \in B$, entonces $f_\alpha \in N$, luego $G_\alpha \in N$, pero G_α es un filtro $\mathbb{P}_\alpha$-genérico sobre M, donde $\mathbb{P}_\alpha = \mathrm{Fn}(\omega_{2\alpha+3}, 2, \aleph_{2\alpha+1})^M$ y $M[G_\alpha] \subset N$. Sabemos que en $M[G_\alpha]$ se cumple $2^{\aleph_{2\alpha+1}} = \aleph_{2\alpha+3}$, luego en N hay al menos $\aleph_{2\alpha+3}$ subconjuntos de $\omega_{2\alpha+1}$ y, como en $M[G]$ no hay más, ése tiene que ser el número exacto.

Supongamos ahora que $\alpha \in \kappa \setminus B$ y sea

$$\mathbb{P}^* = (\prod_{\alpha\neq\alpha_0} \mathrm{Fn}(\omega_{2\alpha+3} \setminus \omega_{2\alpha+1}, 2, \aleph_{2\alpha+1}))^M,$$

de modo que en M tenemos la descomposición $\mathbb{P} \cong \mathbb{P}^* \times \mathbb{P}_\alpha$, que a su vez se traduce en que $M[G] = M[G^*][G_\alpha]$ donde G^* es $\mathbb{P}^*$-genérico sobre M. Tenemos entonces que $\{f_\delta\}_{\delta\neq\alpha} \in M[G^*]$ y es claro que $B \in M[G^*]$, porque f_α no interviene realmente en la definición de B, en el sentido de que si aplicamos la misma definición en $M[G^*]$ tomando cualquier $f_\alpha \in M[G^*]$ en lugar de "la auténtica", el conjunto definido es el mismo, pues al llegar a la definición de B_α se tiene que $\alpha \notin \bigcup\limits_{\delta<\alpha} B_\delta$ y f_α no se emplea en la definición.

Por lo tanto, $N = M[B] \subset M[G^*]$, pero $M[G^*]$ es una extensión mediante un producto de Easton (con los mismos cardinales que M, luego que N) que cumple $2^{\aleph_{2\alpha+1}} = \aleph_{2\alpha+2}$, por lo que en N tiene que cumplirse esto mismo. ■

Ahora sí que podemos afirmar que $V = \mathrm{HD}(\Omega)$ no implica la hipótesis del continuo. Recordemos que, trivialmente, el axioma $V = \mathrm{HD}(\Omega)$ es equivalente a $V = \mathrm{D}(\Omega)$. Notemos además que si se cumple $V = \mathrm{HD}(\Omega)$, al igual que si $V = L$, tenemos que la clase de todos los conjuntos admite un buen orden definible mediante una fórmula (metamatemática) explícita.

9.2 Los c.p.o.s Col(κ) y Lv(κ)

En la sección siguiente presentaremos el modelo de Solovay en el que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es medible Lebesgue, tiene la propiedad de Baire y, si es no numerable, contiene un subconjunto perfecto. Según ya hemos señalado al comienzo de este capítulo, para que esto suceda en tal modelo $\aleph_1$ tiene que ser inaccesible en L. La forma más elemental de conseguir esto es mediante el orden colapsante de Lévy, que colapsa todos los cardinales no numerables menores que un cardinal inaccesible para que éste pase a ser $\aleph_1$. Solovay demostró que esto basta para asegurar que todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ en $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ sean medibles Lebesgue. Lo veremos en la sección siguiente, pero antes estudiaremos el orden de Lévy con más detalle.

Previamente obtendremos algunos resultados sobre el c.p.o. $\mathrm{Fn}(\omega, \kappa, \aleph_0)$, que colapsa (vuelve numerable) a un cardinal κ, aunque, dado que está formado por condiciones finitas, es más cómodo trabajar con $\mathrm{Col}(\kappa) = \kappa^{<n}$, que obviamente es denso en $\mathrm{Fn}(\omega, \kappa, \aleph_0)$, luego equivalente a la hora de construir extensiones genéricas. Llamaremos $\overline{\mathrm{Col}}(\kappa)$ a la compleción de $\mathrm{Col}(\kappa)$.

Necesitamos una caracterización del álgebra $\overline{\mathrm{Col}}(\kappa)$, que esencialmente está contenida en el teorema siguiente:

Teorema 9.18 *Sea $\mathbb{Q}$ un conjunto parcialmente ordenado separativo de cardinal no numerable κ tal que $\mathbb{1}_\mathbb{Q} \Vdash \check{\kappa}$ es numerable. Entonces $\mathbb{Q}$ tiene un subconjunto denso isomorfo a* $\mathrm{Col}(\kappa)$.

DEMOSTRACIÓN: Basta demostrar el teorema relativizado a un modelo transitivo numerable arbitrario M de ZFC. Observemos que $\mathbb{Q}$ no puede cumplir la condición de cadena κ, pues entonces[3] conservaría cardinales $\geq \kappa$. Más aún, si

[3]Según 5.6 tendríamos que exigir que κ fuera regular^M, pero en realidad puede probarse que el máximo cardinal μ tal que un c.p.o. cumple la condición de cadena μ es siempre regular, por lo que la hipótesis es en realidad redundante. No obstante, nosotros sólo vamos a aplicar este teorema al caso en que κ es regular.

$q \in \mathbb{Q}$, el conjunto

$$\mathbb{Q}_q = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \leq q\}$$

tampoco puede cumplir dicha condición. En efecto: si G es un filtro $\mathbb{Q}_q$-genérico sobre M, tenemos que G genera un filtro G^* en $\mathbb{Q}$, que claramente es $\mathbb{Q}$-genérico y $M[G] = M[G^*]$, pues $G = G^* \cap \mathbb{Q}_q \in M[G^*]$ y $G^* \in M[G]$. Así pues, también se cumple que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_q} \Vdash \check{\kappa}$ es numerable.

Seguidamente observamos que, si G es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M, como $G \subset \mathbb{Q}$, ha de ser numerable$^{M[G]}$. Sea $\sigma \in M^{\mathbb{Q}}$ tal que $\mathbb{1} \Vdash \sigma : \omega \longrightarrow \Gamma$ suprayectiva.

Vamos a definir (en M) una aplicación $q : \mathrm{Col}(\kappa) \longrightarrow \mathbb{Q}$ que sea un isomorfismo entre $\mathrm{Col}(\kappa)$ y un subconjunto denso de $\mathbb{Q}$. Definimos $q(p)$ por recurrencia sobre la longitud de p. Hacemos $q(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ y veamos a continuación cómo definir q sobre las condiciones de longitud 1.

Para ello consideramos una anticadena $W \subset \mathbb{Q}$. Para cada $w \in W$, podemos tomar un filtro G $\mathbb{Q}$-genérico sobre M tal que $w \in G$. Si $\sigma_G(0) = q$, existe $w' \leq w$ tal que $w' \Vdash \sigma(\check{0}) = \check{q}$. Sustituyendo cada $w \in W$ por un w' en estas condiciones, podemos suponer que para cada $w \in W$ existe un $q_w \in \mathbb{Q}$ tal que $w \Vdash \sigma(\check{0}) = \check{q}_w$. Sea $W_\varnothing$ una anticadena en $\mathbb{Q}$ maximal respecto de esta propiedad, digamos $W_\varnothing = \{w_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ y, para cada condición $p \in \mathrm{Col}(\kappa)$ de longitud 1, definimos $q(p) = w_{p(0)}$.

Supongamos definida q sobre las condiciones de longitud n. Dada una condición $p \in \mathrm{Col}(\kappa)$ de longitud $n+1$, tomamos una anticadena $W_{p|_n}$ en $\mathbb{Q}$ formada por condiciones $w \leq q(p|_n)$ tales que exista un $q_w \in \mathbb{Q}$ tal que $w \Vdash \sigma(\check{n}) = \check{q}_w$ y que sea maximal respecto de estas propiedades. Puesto que $\mathbb{Q}_{q(p|_n)}$ no cumple la condición de cadena κ (y la existencia de q_w se puede exigir siempre), tenemos que $|W_{p|_n}|^M = \kappa$. Elegimos una enumeración $W_{p|_n} = \{w_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ y definimos $q(p) = w_{p(n)}$.

Así es evidente que el conjunto $D = \{q(p) \mid p \in \mathrm{Col}(\kappa)\}$ es isomorfo a $\mathrm{Col}(\kappa)$. Sólo falta probar que es denso en $\mathbb{Q}$. Para ello tomamos $q \in \mathbb{Q}$. Si G es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M que contenga a q, tenemos que $\sigma_G : \omega \longrightarrow G$, luego existe un $n \in \omega$ tal que $\sigma_G(n) = q$, luego existe un $r \leq q$ tal que $r \Vdash \sigma(\check{n}) = \check{q}$.

La condición r ha de ser compatible con alguna condición de la anticadena $W_\varnothing$, digamos que con la asignada a p_1. A su vez, ha de ser compatible con alguna condición de la anticadena W_{p_1}, digamos con la asignada a p_2 y, repitiendo el argumento, concluimos que r ha de ser compatible con $q(p)$, para cierta condición $p \in \mathrm{Col}(\kappa)$ de longitud $n+1$. En principio, existe un $q' \in \mathbb{Q}$ tal que $q(p) \Vdash \sigma(\check{n}) = \check{q}'$. Ahora bien, como podemos tomar un filtro genérico G que contenga a $q(p)$ y a r, en $M[G]$ tendremos que $\sigma_G(n) = q' = q$, de modo que $q(p) \Vdash \sigma(n) = \check{q}$. En particular $q(p) \Vdash \check{q} \in \Gamma$.

Finalmente observamos que $q(p) \leq q$, ya que, en caso contrario, como $\mathbb{Q}$ es separativo, existiría $q' \leq q(p)$ tal que $q' \perp q$, y si G es un filtro genérico que contiene a q', como $q' \Vdash \check{q} \in G$, tendríamos también que $q \in G$, lo cual es imposible. Así hemos probado que D es denso en $\mathbb{Q}$. ■

Equivalentemente, podríamos enunciar el teorema anterior con la conclusión $\mathbb{B}(\mathbb{Q}) \cong \overline{\mathrm{Col}}(\kappa)$ (donde $\mathbb{B}(\mathbb{Q})$ es la compleción de $\mathbb{Q}$), o también como que toda álgebra de Boole completa que contenga un subconjunto denso no numerable de cardinal κ y tal que $\|\check{\kappa}$ es numerable$\| = \mathbb{1}$ es isomorfa a $\overline{\mathrm{Col}}(\kappa)$. Otra consecuencia sencilla es la siguiente:

Teorema 9.19 *Si κ es un cardinal no numerable y $\mathbb{B}$ es un álgebra de Boole completa con un subconjunto denso de cardinal $\leq \kappa$, entonces existe una inmersión completa $i : \mathbb{B} \longrightarrow \overline{\mathrm{Col}}(\kappa)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathbb{P}$ denso en $\mathbb{B}$ con $|\mathbb{P}| \leq \kappa$. Entonces $\mathbb{Q} = \mathbb{P} \times \mathrm{Col}(\kappa)$ es un c.p.o. de cardinal κ que obviamente colapsa κ, luego su compleción es isomorfa a $\overline{\mathrm{Col}}(\kappa)$, luego tenemos inmersiones completas

$$\mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P} \times \mathrm{Col}(\kappa) \longrightarrow \overline{\mathrm{Col}}(\kappa)$$

cuya composición induce una inmersión completa $\mathbb{B} \longrightarrow \overline{\mathrm{Col}}(\kappa)$. ■

Nota La versión para $\kappa = \aleph_0$ del teorema anterior es [TC 7.67]. ■

Con esto podemos probar:

Teorema 9.20 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea δ un cardinal infinito^M, sea $\mathbb{Q} = \mathrm{Col}(\delta)$, sea G un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre M y sea $A \in M[G]$ tal que $A \subset M$. Entonces $M[A] = M[G]$ o bien existe un filtro G_0 $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[A]$ tal que $M[G] = M[A][G_0]$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathbb{B} \in M$ la compleción^M de $\mathbb{Q}$ y llamemos G^* al ultrafiltro $\mathbb{B}$-genérico sobre M generado por G en $\mathbb{B}$. En la demostración del teorema 4.53 se ve que existe una subálgebra completa $\mathbb{C}$ de $\mathbb{B}$ tal que, si llamamos $H = G^* \cap \mathbb{C}$, entonces $M[A] = M[H]$.

La inclusión $i : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{B}$ es una inmersión completa y $H = i^{-1}[G^*]$. Por el teorema 7.20 sabemos que G^* es también un filtro $\mathbb{B}/H$-genérico sobre $M[H]$ y que $M[G] = M[G^*] = M[H][G^*]$.

Tenemos que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{B}$ y en la demostración de 7.21 se ve que entonces $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q} \cap (\mathbb{B}/H)$ es denso en $\mathbb{B}/H$, luego llamando $G' = G \cap \mathbb{Q}'$, tenemos que $M[G] = M[A][G']$, donde G' es un filtro $\mathbb{Q}'$-genérico sobre $M[A]$.

Por otra parte, $|\mathbb{Q}'|^{M[A]} \leq |\delta|^{M[A]}$. Si δ es no numerable$^{M[A]}$, como δ es numerable$^{M[G]}$, tenemos que $\mathbb{Q}'$ colapsa a $|\delta|^{M[A]}$, luego necesariamente $|\mathbb{Q}'|^{M[A]} = |\delta|^{M[A]}$. Más aún, para todo filtro G' $\mathbb{Q}'$-genérico sobre $M[A]$ (no necesariamente el que tenemos fijado) se cumple que G' es $\mathbb{Q}$-genérico sobre M y $M[A][G'] = M[G']$, luego δ es numerable$^{M[A][G']}$. Así pues, se cumple que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}'} \Vdash \check{\delta}$ es numerable y por 9.18 tenemos que $\mathbb{Q}'$ contiene un subconjunto denso isomorfo a $\mathrm{Col}(|\delta|^{M[A]})$, que a su vez es isomorfo a $\mathrm{Col}(\delta)$. Por consiguiente, $M[A][G'] = M[A][G_0]$, para un cierto filtro G_0 $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[A]$.

Supongamos ahora que δ es numerable$^{M[A]}$ y que $M[A] \subsetneq M[G]$. Entonces las compleciones$^{M[A]}$ de $\mathbb{Q}'$ y $\mathbb{Q}$ son isomorfas por [TC 7.67], ya que ambos c.p.o.s son numerables$^{M[A]}$ (y no atómicos, luego las compleciones también). Así pues, $M[A][G'] = M[A][G_0]$ en las mismas condiciones que en el caso anterior. ■

Consideramos ahora el c.p.o. $\mathbb{P} = \mathrm{Lv}(\kappa)$, donde κ es un cardinal débilmente inaccesible, formado por las funciones definidas sobre subconjuntos finitos de $\kappa \times \omega$ tales que $p(\alpha, n) < \alpha$.

Así, si M es un modelo transitivo numerable de ZFC, κ es un cardinal débilmente inaccesible^M y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, éste determina en $M[G]$ una familia de κ funciones que colapsan todos los ordinales (y en particular los cardinales) menores que κ hasta $\aleph_0$, de modo que $\kappa = \aleph_1^{M[G]}$. Además, según el teorema 5.46, se cumple que $(2^{\aleph_0} = \aleph_1)^{M[G]}$ y, para todo cardinal$^{M[G]}$ $\mu > \kappa$, tenemos que $(2^\mu)^{M[G]} = (2^\mu)^M$.

Esto significa que podemos conseguir que en $M[G]$ se cumpla cualquier determinación razonable de la exponenciación cardinal, salvo por el hecho de que se cumple necesariamente la hipótesis del continuo. Para evitar esta restricción vamos a considerar un c.p.o. ligeramente más general que el de Lévy:

Fijemos un cardinal^M μ de cofinalidad $\geq \kappa$ y consideramos los c.p.o.s

$$\mathbb{P}_1 = \mathrm{Lv}(\kappa), \qquad \mathbb{P}_2 = \mathrm{Fn}(\mu, 2, \aleph_0), \qquad \mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2,$$

de modo que un filtro G $\mathbb{P}$-genérico sobre M es de la forma $G_1 \times G_2$, donde G_1 es $\mathbb{P}_1$-genérico sobre M y G_2 es $\mathbb{P}_2$-genérico sobre $M[G_1]$, y entonces se cumple que $M[G] = M[G_1][G_2]$. Es claro que en esta extensión $2^{\aleph_0} = \mu$ (lo cual se puede concretar en $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ o $2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega+1}$, etc.).

El teorema siguiente es una generalización obvia de 5.43:

Teorema 9.21 *$\mathbb{P}$ cumple la condición de cadena κ.*

Demostración: Supongamos que $\mathbb{P}$ admite una anticadena de cardinal κ. Podemos ver cada par $(p, q) \in \mathbb{P}$ como una función de un subconjunto finito de $\kappa \times \omega \times \mu$ en $\kappa \times 2$. Si la familia de dominios tiene cardinal $< \kappa$, como κ es regular, la anticadena tiene un subconjunto de cardinal κ cuyos miembros tienen todos el mismo dominio. Si la familia tiene cardinal κ, entonces podemos tomar un subconjunto de cardinal κ cuyos dominios formen una subfamilia cuasidisjunta de raíz r. Esto último es válido trivialmente en el primer caso. Si $(\alpha, n, \beta) \in r$, entonces su imagen por cada elemento de la anticadena está en $\alpha \times 2$, luego, si $\alpha < \kappa$ es el supremo de las primeras componentes de las ternas de r, tenemos que todas las condiciones de la anticadena se restringen a funciones de r en $(\alpha + 1) \times 2$, y el número de posibilidades es $< \kappa$, luego existen κ condiciones en la anticadena cuya restricción a r es la misma, pero entonces son compatibles, contradicción. ■

El resultado fundamental que necesitamos es la variante siguiente de 9.20:

Teorema 9.22 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea κ un cardinal débilmente inaccesible^M, sea μ un cardinal^M de cofinalidad^M $\geq \kappa$, sean $\mathbb{P}_1 = \mathrm{Lv}(\kappa)$, $\mathbb{P}_2 = \mathrm{Fn}(\mu, 2, \aleph_0)$, $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$, sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y sea $X \in M[G]$ un conjunto numerable$^{M[G]}$ tal que $X \subset M$. Entonces podemos descomponer $\mathbb{P} = \mathbb{Q}_1 \times \mathbb{Q}_2$ de modo que $|\mathbb{Q}_1|^M < \kappa$, $X \in M[\mathbb{Q}_1 \cap G]$ y existe un filtro H $\mathbb{P}$-genérico sobre $M[X]$ tal que $M[G] = M[X][H]$. Además κ y μ cumplen las mismas hipótesis en $M[X]$.*

Demostración: Podemos tomar $\alpha \in M$ tal que $X \subset V_\alpha^{M[G]} \cap M = V_\alpha^M$. Sea $f : \omega \longrightarrow X$ biyectiva, $f \in M[G]$. Como $\mathbb{P}$ cumple^M la condición de cadena κ, por el teorema 5.5 existe una función $F \in M$ tal que $F : \omega \longrightarrow \mathcal{P}V_\alpha^M$ y $\bigwedge n \in \omega(|F(n)|^M < \kappa \wedge f(n) \in F(n))$. Así pues, tomando $B = \bigcup\limits_{n\in\omega} F(n) \in M$, tenemos que $X \subset B$ y $|B|^M < \kappa$.

Pongamos que $X = \tau_G$, donde τ es un buen nombre para un subconjunto de $\check{B}$, es decir:

$$\tau = \bigcup_{x\in B} \{\check{x}\} \times A_x \in M$$

y cada A_x es una anticadena en $\mathbb{P}$, luego $|A_x|^M < \kappa$. Es claro entonces que existen un cardinal^M $\nu < \kappa$ y un conjunto $A \subset \mu$, $A \in M$, $|A|^M \leq \nu$ tales que $\tau \in M^{\mathbb{Q}_1}$, donde

$$\mathbb{Q}_1 = \{p \in \mathbb{P}_1 \mid \mathcal{D}p \subset (\nu + 1) \times \omega\} \times \mathrm{Fn}(A, 2, \aleph_0).$$

Por lo tanto, $X \in M[\mathbb{Q}_1 \cap G^*]$ y, si llamamos

$$\mathbb{Q}_2 = \{p \in \mathbb{P} \mid \mathcal{D}p \subset (\kappa \setminus (\nu + 1)) \times \omega\} \times \mathrm{Fn}(\mu \setminus A, 2, \aleph_0),$$

claramente $\mathbb{P}$ puede identificarse con $\mathbb{Q}_1 \times \mathbb{Q}_2$.

Ahora observamos que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_1} \Vdash \check{\nu}$ es numerable y $|\mathbb{Q}_1|^M = \nu$, luego el teorema 9.18 nos da[4] que $\mathbb{Q}_1$ tiene un subconjunto denso isomorfo a $\mathrm{Col}(\nu)$. Esto nos permite aplicar 9.20, de modo que existe un filtro K $\mathbb{Q}_1$-genérico sobre $M[X]$ tal que $M[\mathbb{Q}_1 \cap G] = M[X][K]$. Por lo tanto,

$$M[G] = M[X][K][\mathbb{Q}_2 \cap G] = M[X][H],$$

donde $H = K \times (\mathbb{Q}_2 \cap G^*)$ es un filtro $\mathbb{Q}_1 \times \mathbb{Q}_2$-genérico sobre $M[X]$, que obviamente se puede sustituir por un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $M[X]$.

Para que κ y μ sigan cumpliendo las hipótesis en $M[X]$ basta con que las sigan cumpliendo en $M[\mathbb{Q}_1 \cap G]$, es decir, tras una extensión por $\mathrm{Col}(\nu)$, con $\nu < \kappa$, lo cual es fácil de comprobar. ■

9.3 El modelo de Solovay

Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC + $V = L$. Supondremos también que existe un $\kappa \in M$ tal que κ es un cardinal fuertemente inaccesible^M.

En lo sucesivo mantendremos la notación descrita en el teorema 9.22, es decir, M será un modelo transitivo numerable de ZFC, μ será un cardinal^M de cofinalidad^M $\geq \kappa$, $\mathbb{P} = \mathrm{Lv}(\kappa) \times \mathrm{Fn}(\mu, 2, \aleph_0)$ y G será un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Así se cumple que $\aleph_1^{M[G]} = \kappa$ y $(2^{\aleph_0})^{M[G]} = \mu$.

Definimos además $N = \mathrm{HD}(\Omega^\omega)^{M[G]}$, es decir, la clase de los conjuntos hereditariamente definibles por sucesiones de ordinales. Por 9.14 es un modelo transitivo numerable de ZF + ED. Llamaremos $S = (\Omega^\omega)^{M[G]}$.

[4]Notemos que ν puede elegirse regular^M, de acuerdo con la nota al pie en la demostración de 9.18.

Teorema 9.23 *Para cada $s \in S$, el conjunto de los $x \in \mathcal{N}^{M[G]}$ que no son aleatorios sobre $M[s]$ es nulo y el conjunto de los $x \in \mathcal{N}^{M[G]}$ que no son genéricos sobre $M[s]$ es de primera categoría.*

DEMOSTRACIÓN: Por 6.3, el conjunto de los $x \in M[G]$ que no son aleatorios sobre $M[s]$ es el conjunto

$$B = (\bigcup\{B_c \mid c \in \mathcal{N}^{L[s]} \land B_c \text{ es nulo}\})^{M[G]},$$

que claramente está en $M[G]$. Sólo hemos de demostrar que $(n^{L[s]})^{M[G]} = \mathcal{N}^{M[s]}$ es numerable$^{M[G]}$, pues entonces B será (en $M[G]$) una unión numerable de conjuntos nulos, luego será nula.

Ahora bien, por 9.22 sabemos que $s \in M[\mathbb{Q}_1 \cap G]$, con $|\mathbb{Q}_1|^M < \kappa$. Como κ es fuertemente inaccesible^M, es inmediato que el conjunto de buenos $\mathbb{Q}_1$-nombres para subconjuntos de $\check{\omega}$ en M tiene cardinal $< \kappa$, luego $(2^{\aleph_0})^{M[\mathbb{Q}_1 \cap G]} < \kappa$, luego $\mathcal{N}^{M[s]} \subset \mathcal{N}^{M[\mathbb{Q}_1 \cap G]}$ tiene cardinal$^{M[G]} < \kappa = \aleph_1^{M[G]}$, luego es numerable$^{M[G]}$.

La demostración para los reales aleatorios es idéntica. ■

Teorema 9.24 *Existe una fórmula (metamatemática) $\phi(s, x)$ tal que para todo conjunto $X \in N$, $X \subset \mathcal{N}$ existe una sucesión $s \in S$ tal que, para todo $x \in \mathcal{N}^{M[G]}$,*

$$x \in X \leftrightarrow \phi(s, x)^{M[s][x]}.$$

DEMOSTRACIÓN: Como $X \in N$, existe $s \in S$ tal que

$$(\bigwedge y(X = y \leftrightarrow \Phi_{\Omega^\omega}(s, y)))^{M[G]},$$

donde Φ_{Ω^ω} es la fórmula definida en 9.5. Consideremos ahora la fórmula $\psi(s, x) \equiv \bigvee y(x \in y \land \Phi_{\Omega^\omega}(s, y))$, de modo que

$$\bigwedge x \in M[G]\ (x \in X \leftrightarrow \psi^{M[G]}(s, x)).$$

Definimos $\phi(x, s) \equiv \mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \psi(\check{s}, \check{x})$. Fijamos $x \in \mathcal{N}^{M[G]}$ y vamos a probar que cumple la equivalencia del enunciado o, lo que es lo mismo,

$$\psi^{M[G]}(s, x) \leftrightarrow (\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \psi(\check{s}, \check{x}))^{M[s][x]}.$$

Para ello aplicamos el teorema 9.22 (al conjunto $X = s \times \{0\} \cup x \times \{1\}$), según el cual existe un filtro H $\mathbb{P}$-genérico sobre $M[X] = M[s, x]$ de modo que $M[G] = M[s, x][H]$. Ahora basta tener presente que $\mathbb{P}$ es claramente casi-homogéneo, por lo que

$$\psi^{M[G]}(s, x) \leftrightarrow \psi^{M[s,x][H]}(s, x) \leftrightarrow \bigvee p \in \mathbb{P}\ (p \Vdash \psi(\check{s}, \check{x}))^{M[s,x]}$$
$$\leftrightarrow (\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \psi(\check{s}, \check{x}))^{M[s][x]}.$$

■

Como consecuencia:

Teorema 9.25 *Todo $X \in N$ tal que $X \subset \mathcal{C}$ es m-medible y tiene la propiedad de Baire en $M[G]$.*

DEMOSTRACIÓN: Dado $X \in N$ en las condiciones del enunciado, sea $s \in S$ en las condiciones del teorema anterior. Llamemos $\mathcal{B}_m$ al álgebra de medida en $M[s]$ y consideremos $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}^{M[s]}$, $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}^{M[s]}$. Consideremos además la fórmula

$$\psi = \bigvee x \in \mathcal{C}(\bigwedge c \in \check{\mathcal{N}}_0(x \in B_c \leftrightarrow \bigvee C \in \Gamma\ B_c \cap \check{\mathcal{C}}_0 \in C) \wedge \phi(\check{s}, x)),$$

donde Γ es el nombre canónico del ultrafiltro genérico y ϕ es la fórmula dada por el teorema anterior. Notemos que ψ afirma que, en una extensión genérica $M[s][H]$, el real aleatorio x_H cumple la propiedad ϕ. Entonces $\|\psi\|^{M[s]} \in \mathcal{B}_m$, luego existe un $d \in \mathcal{N}_0$ tal que $[B_d]^{M[s]} = \|\psi\|^M$.

Definimos $B = B_d^{M[G]}$, que es un conjunto de Borel$^{M[G]}$ en $\mathcal{C}^{M[G]}$. Vamos a probar que si llamamos $\mathrm{Al}(M[s])$ al conjunto de los puntos de $\mathcal{C}^{M[G]}$ aleatorios sobre $M[s]$ (que pertenece a $M[G]$, según hemos visto en 9.23), entonces

$$X \cap B = \mathrm{Al}(M[s]) \cap B.$$

En efecto, dado $x \in \mathrm{Al}(M[s])$, existe un ultrafiltro H $\mathcal{B}_m$-genérico sobre $M[s]$ tal que $x = x_H$, con lo que

$$x \in X \leftrightarrow \phi(s, x)^{M[s][x]} \leftrightarrow \phi(s, x)^{M[s][H]} \leftrightarrow \|\psi\|^{M[s]} \in H$$

$$\leftrightarrow [B_d]^{M[s]} \in H \leftrightarrow x_H \in B_d^{M[G]} \leftrightarrow x \in B.$$

Teniendo en cuenta que, según 9.23, el complementario de $\mathrm{Al}(M[s])$ tiene medida nula, ahora es claro que $X \,\Delta\, B$ es nulo, por lo que X es m-medible$^{M[G]}$. El razonamiento para la propiedad de Baire es idéntico. ■

Teorema 9.26 *Todo $X \in N$ tal que $X \subset \mathcal{C}$ no numerable$^{M[G]}$ contiene un subconjunto perfecto$^{M[G]}$.*

DEMOSTRACIÓN: Dado X, tomamos $s \in S$ según el teorema 9.24. Por 9.22 existe un filtro H $\mathbb{P}$-genérico sobre $M[s]$ tal que $M[G] = M[s][H]$ y κ sigue siendo fuertemente inaccesible$^{M[s]}$. Por lo tanto, cambiando M por $M[s]$ podemos simplificar la notación y suponer que $s \in M$.

Como $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}^M$ es numerable$^{M[G]}$, existe $x \in X \setminus \mathcal{C}_0$. De nuevo por 9.22 tenemos que $x \in M[G_1]$, donde $G_1 = \mathbb{Q}_1 \cap G$ y $|\mathbb{Q}_1|^M < \kappa$. Así,

$$(\bigvee x \in \mathcal{C}(x \notin \mathcal{C}_0 \wedge \phi^{L[s,x]}(s, x)))^{M[G_1]},$$

luego existen un nombre $\sigma \in M^{\mathbb{Q}_1}$ y una condición $p \in G_1$ tales que

$$p \Vdash (\sigma \in \mathcal{C} \setminus \check{\mathcal{C}}_0 \wedge \phi^{L[\check{s},\sigma]}(\check{s}, \sigma)).$$

Puesto que $(\mathcal{P}\mathbb{Q}_1)^M$ es numerable$^{M[G]}$, podemos considerar una enumeración $\{D_n\}_{n\in\omega} \in M[G]$ de los subconjuntos densos de $\mathbb{Q}_1$. Ahora construimos en $M[G]$ una familia $\{p_t\}_{t\in 2^{<\omega}}$ de condiciones en $\mathbb{Q}_1$ que extienden a p y de manera que $t_1 \subset t_2 \rightarrow p_{t_2} \leq p_{t_1}$. Para ello tomamos $p_\varnothing \leq p$ tal que $p_\varnothing \in D_0$. Supuesto definido $p_t \leq p$, existe $n_t \in \omega$ tal que p_t no decide $\sigma(\check{n}_t)$, es decir, tal que

$$\neg p_t \Vdash \sigma(\check{n}_t) = 0 \land \neg p_t \Vdash \sigma(\check{n}_t) = 1,$$

pues en caso contrario $p_t \Vdash \sigma = \check{x} \in \check{\mathcal{C}}_0$, donde

$$\check{x} = \{(n, i) \in \omega \times 2 \mid p_t \Vdash \sigma(\check{n}) = \check{i}\} \in \mathcal{C}_0.$$

Por consiguiente, existen condiciones $p_{t\frown 0}$ y $p_{t\frown 1}$ que extienden a p_t (y que podemos tomar en $D_{\ell(t)}$) tales que

$$p_{t\frown i} \Vdash \sigma(\check{n}_t) = \check{i}.$$

Para cada $z \in \mathcal{C}^{M[G]}$, definimos

$$G_z = \{p \in \mathbb{P}_{\nu+1} \mid \bigvee t \in 2^{<\omega}(t \subset z \land p_t \leq p)\}.$$

Así $G_z \in M[G]$ es un filtro en $\mathbb{Q}_1$ y $p_{z|_n} \in G_z \cap D_n$, luego se trata de un filtro $\mathbb{Q}_1$-genérico sobre M. Como $p \in G_z$, tenemos que $\sigma_{G_z} \in \mathcal{C}^{M[G_z]} \subset \mathcal{C}^{M[G]}$ y $\phi^{M[x]}(s, \sigma_{G_z})$, lo cual equivale a que $\sigma_{G_z} \in X$.

Por consiguiente, podemos definir $f : \mathcal{C}^{M[G]} \longrightarrow X$ mediante $f(z) = \sigma_{G_z}$. Basta probar que f es inyectiva y continua, pero esto es claro: si $z_1 \neq z_2$, entonces existe un $t \in 2^{<\omega}$ de modo que $t \subset z_1 \cup z_2$, $t^\frown 0 \subset z_1$ $t^\frown 1 \subset z_2$ (o viceversa). Por lo tanto, $t^\frown 0 \in G_{z_1}$ y, en consecuencia, $\sigma_{z_1}(n_t) = 0$, mientras que $\sigma_{z_2}(n_t) = 1$, es decir, $f(z_1) \neq f(z_2)$.

La continuidad en cada $z_0 \in \mathcal{C}^{M[G]}$ se debe a que, para cada $n \in \omega$, llamando $h = \sigma_{G_{z_0}}|_n$, existe $q \in G_{z_0}$ tal que $q \Vdash \sigma|_{\check{n}} = \check{h}$, luego existe un $t \in 2^{<\omega}$, $t \subset z_0$ tal que $p_t \leq q$, y entonces $z_0 \in B_t \subset f^{-1}[B_h]$, ya que si $z \in B_t$, entonces $p_t \in G_z$, luego $q \in B_z$, luego $f(z)|_n = h$. ∎

El teorema siguiente es ahora inmediato:

Teorema 9.27 (Solovay) *Las teorías siguientes son equiconsistentes:*

a) ZFC + *"existe un cardinal inaccesible".*

b) ZFC + *"en* $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ *se cumple que todo subconjunto de todo espacio polaco no numerable es universalmente medible, tiene la propiedad de Baire y, si es no numerable, contiene un subconjunto perfecto".*

c) Lo mismo que b) pero con $L(\mathcal{N})$ *en lugar de* $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$.

d) ZFC + *"todo conjunto proyectivo en todo espacio polaco no numerable es universalmente medible, tiene la propiedad de Baire y, si es no numerable, contiene un subconjunto perfecto".*

e) ZF + ED + $V = L(\mathcal{N})$ + *"todo subconjunto de todo espacio polaco no numerable es universalmente medible, tiene la propiedad de Baire y, si es no numerable, contiene un subconjunto perfecto".*

Demostración: Que b) – e) implican la consistencia de a) o, en otras palabras, que la hipótesis sobre la existencia de un cardinal inaccesible en M es necesaria[5] para la construcción de un modelo con las características indicadas, es consecuencia tanto de [TD 6.8] (más 3.36) como de [TD 6.18].

Trabajando en a) podemos construir el modelo de Solovay $M[G]$, en el que hemos probado que todos los subconjuntos de $\mathcal{C}$ que están en $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ tienen las tres propiedades (cambiando "universalmente medible" por m-medible). Ahora bien, por [TD 6.32] esto es cierto también relativizado a $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$, que es un modelo de ZF + ED y, razonando en ZF + ED y teniendo en cuenta que dos espacios polacos no numerables son Borel-isomorfos, así como que el isomorfismo se puede elegir para que transforme cualquier medida de Borel en cualquier medida de Borel, es claro que el hecho de que $\mathcal{C}$ cumpla las tres propiedades (la primera para la medida m) implica que cualquier espacio polaco no numerable las cumple para cualquier medida de Borel, luego tenemos que $M[G]$ es un modelo de b).

La consistencia de c) se deduce de la de b) teniendo en cuenta la inclusión $L(\mathcal{N}) \subset \mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ y [TD 6.32], o bien se razona a partir de a) exactamente igual que hemos hecho en b).

Hemos probado que $M[G]$ cumple d) para los subconjuntos proyectivos de $\mathcal{C}$ y la medida m, pues todos ellos están en $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$, y a su vez esto implica que se cumple d) para los subconjuntos proyectivos de cualquier espacio polaco no numerable, por la existencia de isomorfismos de Borel.

La consistencia de e) se sigue inmediatamente de la de c) sin más que tener en cuenta que $L(\mathcal{N})$ es un modelo de ZF + ED + $V = L(\mathcal{N})$. ■

Notas

- En realidad hemos demostrado la consistencia de una teoría ligeramente más general que d): si entendemos que un espacio polaco X está en $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ cuando lo está como espacio topológico, es decir, cuando el par $(X, \mathcal{T}) \in \mathrm{HD}(\Omega^\omega)$, donde $\mathcal{T}$ es la topología de X (y esto les sucede claramente a todos los espacios que estamos manejando, $\mathcal{N}$, $\mathcal{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}$, etc.) entonces es consistente con ZFC que todo subconjunto en $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ de todo espacio polaco no numerable X en $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ tenga las tres propiedades consideradas en el teorema anterior. En efecto, razonando en b), dado $X \in \mathrm{HD}(\Omega^\omega)$, existe un $f \in \mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ tal que $f : \mathcal{C} \longrightarrow X$ es un isomorfismo de Borel$^{\mathrm{HD}(\Omega^\omega)}$, pero la σ-álgebra de Borel de X en $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ es la misma que en V (porque contiene a todos los abiertos de X), lo que implica que f es un isomorfismo de Borel, que biyecta los subconjuntos de X en $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ con los de $\mathcal{C}$, luego todos ellos tienen las tres propiedades del teorema.

[5]Sin embargo, Shelah ha demostrado que la consistencia de que todo subconjunto de un espacio polaco tenga la propiedad de Baire es equivalente a la consistencia de ZFC, sin necesidad de cardinales inaccesibles.

- De acuerdo con las observaciones hechas al principio de la sección, en los apartados b), c), d) del teorema de Solovay podemos añadir que $2^{\aleph_0}$ es cualquier cardinal de cofinalidad no numerable.

- Teniendo en cuenta el teorema [TC B.10] (o [TC B.23]) en el modelo de Solovay N se cumple (o, más en general, a partir de d) se puede demostrar) que $\aleph_1 \not\leq 2^{\aleph_0}$, de modo que los únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que admiten un buen orden son los numerables. Por otro lado, mientras que con AE puede probarse que todo espacio polaco tiene exactamente $2^{\aleph_0}$ conjuntos de Borel, a partir de d) se demuestra que $|\mathcal{B}| > 2^{\aleph_0}$. En efecto, la desigualdad $2^{\aleph_0} \leq |\mathcal{B}|$ es elemental, pues los conjuntos con un punto son una familia de $2^{\aleph_0}$ conjuntos de Borel, pero en las condiciones de d) no puede darse la igualdad ya que, según acabamos de observar, se cumple que $\aleph_1 \not\leq 2^{\aleph_0}$, mientras que [TD 1.57] implica que $\aleph_1 \leq |\mathcal{B}|$. Así pues, si es consistente la existencia de un cardinal inaccesible, también es consistente

$$\mathrm{ZF} + \mathrm{ED} + V = L(\mathcal{N}) + \aleph_1 \not\leq 2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} < |\mathcal{B}|.$$

  Notemos también que los códigos de Borel definen una aplicación suprayectiva $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{B}$. Con AE esto implica que $|\mathcal{B}| \leq 2^{\aleph_0}$, pero ahora vemos que sin AE no es así necesariamente. ■

Así pues, tenemos que es consistente (con ZFC) que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ definible por sucesiones de ordinales sea medible Lebesgue. En particular es consistente que ninguna fórmula (metamatemática) sin parámetros defina un conjunto no medible Lebesgue. Por supuesto, también sabemos que si $V = L$ podemos definir "explícitamente" un conjunto $\boldsymbol{\Delta}^1_2$ no medible Lebesgue, con lo que también es consistente que haya conjuntos "definibles" no medibles. El teorema [TC B.12] implica ahora que lo mismo vale para la existencia de Bases de Hamel (pues se comprueba sin dificultad que una base de Hamel que pertenezca a $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ es una base de Hamel en $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$).

9.4 Uniones de conjuntos de Borel

Los teoremas [TD 2.26] y [TD 6.22] prueban la consistencia de que los únicos conjuntos que pueden expresarse como unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel son los conjuntos $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$. Por otro lado, si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ es trivial que todo subconjunto de cualquier espacio polaco no numerable es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel. No obstante, este caso es demasiado trivial. En esta sección demostramos que, en el modelo de Solovay construido en la sección precedente (donde $2^{\aleph_0}$ puede tomar cualquier valor prefijado de cofinalidad no numerable) se cumple igualmente que todo conjunto proyectivo es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel. Más en general:

Teorema 9.28 *En $M[G]$ se cumple que todo conjunto $X \in \mathrm{HD}(\Omega^\omega)$, $X \subset \mathcal{N}$ es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel.*

Demostración: Sea $X \in N = \mathrm{HD}(\Omega^\omega)^{M[G]}$, $X \subset \mathcal{N}$, sea $s \in S$ de modo que se cumpla el teorema 9.24. Factorizando $M[G]$ como en el teorema 9.26 podemos suponer que $s \in M = L[s]^M$. Como $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$, podemos descomponer $M[G] = M[H_1][H_2]$. Vamos a probar lo siguiente:

$(*)$ *Para todo $x \in X$, existe un $c \in \mathrm{CB}^{M[H_1]}$ tal que $x \in B_c^{M[G]} \subset X$.*

Admitiendo esto de momento, podemos concluir que X es unión de conjuntos de Borel con códigos en $\mathcal{N}^{M[H_1]}$. Ahora bien, sabemos que $M[H_1]$ cumple la hipótesis del continuo, luego $|\mathcal{N}|^{M[H_1]} = \aleph_1^{M[H_1]} \leq \aleph_1^{M[G]}$, luego el cardinal de $\mathrm{CB}^{M[H_1]}$ en $M[G]$ es a lo sumo $\aleph_1^{M[G]}$, luego X es unión de (a lo sumo) $\aleph_1$ conjuntos de Borel y el teorema queda probado.

Aplicamos a x el teorema 9.22, según el cual $\mathbb{P} = \mathbb{Q}_1 \times \mathbb{Q}_2$, donde

$$\mathbb{Q}_1 = \{p \in \mathbb{P}_1 \mid \mathcal{D}p \subset (\nu + 1) \times \omega\} \times \mathrm{Fn}(A, 2, \aleph_0),$$

para cierto cardinal^M $\nu < \kappa$ y cierto $A \subset \mu$ con cardinal^M $\leq \nu$, de modo que $x \in M[\mathbb{Q}_1 \cap G]$. Sabemos además que $\mathbb{Q}_1$ tiene un subconjunto denso isomorfo a $\mathrm{Col}(\nu)$. Por ello, a partir de aquí llamaremos $\mathbb{Q}_1 = \mathrm{Col}(\nu)$, con lo que ahora tenemos una inmersión completa $i : \mathbb{Q}_1 \longrightarrow \mathbb{P}$ (tal que $i \in M$). En estos términos, $x \in M[i^{-1}[G]] \subset M[G]$, pues $M[i^{-1}[G]]$ es la misma extensión que hasta ahora llamábamos $M[\mathbb{Q}_1 \cap G]$.

Sea ahora $G_1 \in M[G]$ un filtro $\mathbb{Q}_1$-genérico sobre M arbitrario. (Un ejemplo sería $G_1 = i^{-1}[G]$, pero necesitamos considerar uno arbitrario.) El filtro G_1 determina una función genérica $f_{G_1} : \omega \longrightarrow \nu$ tal que $M[G_1] = M[f_{G_1}] \subset M[G]$. Podemos aplicar a f_{G_1} el teorema 9.22, de modo que existe un filtro G_2 $\mathbb{P}$-genérico sobre $M[G_1]$ tal que $M[G] = M[G_1][G_2]$.

En el caso particular en que $G_1 = i^{-1}[G]$, por 9.24 tenemos $\phi(s, x)^{M[x]}$, luego también $(\phi(s, x)^{L[s,x]})^{M[G_1]}$, y, si $x = \sigma_{G_1}$ existe $p_0 \in i^{-1}[G]$ tal que

$$p_0 \Vdash \sigma \in \mathcal{N} \wedge \phi^{L[\check{s},\sigma]}(\check{s}, \sigma). \tag{9.2}$$

Así, si $G_1 \in M[G]$ es cualquier filtro $\mathbb{Q}_1$-genérico sobre M tal que $p_0 \in G_1$, se cumple $\sigma_{G_1} \in \mathcal{N}$ y $\phi^{M[\sigma_{G_1}]}(s, \sigma_{G_1})$, luego, por 9.24, $\sigma_{G_1} \in X$. Definimos

$$T = \{\sigma_{G_1} \mid p_0 \in G_1 \wedge G_1 \text{ es un filtro } \mathbb{Q}_1\text{-genérico sobre } L[s]\}^{M[G]}.$$

Así tenemos que $x \in T \subset X$. Para concluir $(*)$ basta probar que, en $M[G]$, el conjunto T se descompone en unión de conjuntos de Borel con código en $M[\mathbb{P}_1 \cap G]$. De hecho, probaremos que se descompone en unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel con dicha condición. Sea $Q \in M$ el conjunto de los pares (p, w) tales que:

a) $p \in \mathbb{Q}_1$, $w : \ell(p) \longrightarrow \omega$,

b) p es compatible con p_0,

c) para todo $k < \ell(p)$ y todo $l < \omega$, si $p \Vdash \sigma(\check{k}) = \check{l}$ entonces $w(k) = l$.

Es claro que si (p, w), (p', w') son pares que cumplen a), $p' \leq p$, $w \subset w'$ y $(p', w') \in Q$, entonces $(p, w) \in Q$.

Veamos ahora que

$$T = \{t \in \mathcal{N} \mid \bigvee G_1 \in M[G](G_1 \text{ es un filtro } \mathbb{Q}_1\text{-genérico sobre } M \\ \wedge \bigwedge n \in \omega\ (f_{G_1}|_n, t|_n) \in Q)\}. \tag{9.3}$$

Para probarlo llamamos T' al término derecho de la igualdad anterior. Si $t \in T$, entonces $t = \sigma_{G_1}$, para un cierto filtro genérico G_1 tal que $p_0 \in G_1$. Hemos de probar que, si $n \in \omega$, se cumple que $(f_{G_1}|_n, t|_n) \in Q$. Obviamente se cumple la propiedad a) de la definición de Q y, como $p_0, f_{G_1}|_n \in G_1$, también se cumple la propiedad b). Para probar c) tomamos $k < n$ y suponemos que $f_{G_1}|_n \Vdash \sigma(\check{k}) = \check{l}$. Entonces, $t(k) = \sigma_{G_1}(k) = l$, luego $t|_n(k) = l$. Con esto tenemos probado que $T \subset T'$.

Tomemos ahora $t \in T'$ y sea $G_1 \in M[G]$ un filtro genérico según la definición de T'. Hemos de probar que $p_0 \in G_1$ y $t = \sigma_{G_1}$. Sea $n = \ell(p_0)$. Como $(f_{G_1}|_n, t|_n) \in Q$, por la propiedad b) tenemos que $f_{G_1}|_n$ es compatible con p_0, luego ha de ser $p_0 = f_{G_1}|_n \in G_1$.

Para probar que $t = \sigma_{G_1}$, supongamos que, por el contrario, existen $k, l \in \omega$ tales que $\sigma_{G_1}(k) = l$ pero $t(k) \neq l$.

El conjunto de las condiciones $p \in \mathbb{Q}_1$ tales que $\ell(p) > k$ y $p \Vdash \sigma(\check{k}) = \check{l}$ o $p \Vdash \sigma(\check{k}) \neq \check{l}$ es denso en $\mathbb{Q}_1$, luego una de ellas, que será de la forma $f_{G_1}|_n$, está en G_1 y, necesariamente, $f_{G_1}|_n \Vdash \sigma(\check{k}) = \check{l}$. Como $(f_{G_1}|_n, t|_n) \in Q$, por la propiedad c), $t(k) = l$, contradicción.

Definimos inductivamente en $M[G]$ conjuntos $F_\gamma \subset \mathbb{Q}_1 \times \mathcal{N}^{M[G]}$ mediante:

a) $(p, t) \in F_0 \leftrightarrow (p, t|_{\ell(p)}) \notin Q$.

b) Para $\gamma > 0$, $(p, t) \in F_\gamma$ si y sólo si existe $D \in M$ denso en $\mathbb{Q}_1$ tal que para todo $p' \in D$ tal que $p' \leq p$ existe un $\beta < \gamma$ tal que $(p', t) \in F_\beta$.

Observemos que $\beta < \gamma \rightarrow F_\beta \subset F_\gamma$. En efecto, si $\beta = 0$ y $(p, t) \in F_0$, tomamos $D = \mathbb{Q}_1$ y así, para toda extensión p' de p se cumple que $(p', t) \in F_0$, pues $(p', t|_{\ell(p')}) \notin Q$ o, de lo contrario, tendríamos que $(p, t|_{\ell(p)}) \in Q$. Para $\beta > 0$ es obvio.

Veamos que si $t \in \mathcal{N}^{M[G]}$, entonces

$$t \in T \leftrightarrow \bigwedge \gamma \in \Omega^M\ (\mathbb{1}, t) \notin F_\gamma. \tag{9.4}$$

Supongamos que $t \in T$ y sea $G_1 \in M[G]$ según (9.3). Supongamos, por reducción al absurdo, que existe un γ tal que $(\mathbb{1}, t) \in F_\gamma$. Como $\mathbb{1} \in G_1$, podemos tomar el menor ordinal $\gamma \in \Omega^M$ tal que existe un $p \in G_1$ tal que $(p, t) \in F_\gamma$. Sea $n = \ell(p)$, de modo que $p = f_{G_1}|_n$. Por (9.3) tenemos que $(p, t|_n) \in Q$, luego $(p, t) \notin F_0$, luego $\gamma > 0$. Por consiguiente, existe un $D \in M$ denso en $\mathbb{Q}_1$ según la parte b) de la definición de F_γ. Existe entonces un $p' \in G_1 \cap D$, que podemos tomar $p' \leq p$, luego existe un $\beta < \gamma$ tal que $(p', t) \in F_\beta$, en contradicción con la minimalidad de γ.

Antes de probar el recíproco veamos que si una condición $p \in \mathbb{Q}_1$ cumple que $\bigwedge \gamma \in \Omega^M\ (p,t) \notin F_\gamma$, entonces para todo conjunto $D \in M$ denso en $\mathbb{Q}_1$ existe una condición $p' \in D$, $p' \leq p$ y $\bigwedge \gamma \in \Omega^M\ (p',t) \notin F_\gamma$.

En efecto, dado $\gamma > 0$, existe un $p'_\gamma \leq p$, $p'_\gamma \in D$ tal que $\bigwedge \beta < \gamma\ (p'_\gamma, t) \notin F_\beta$. Como $D \in M$, existe un $p' \in D$ tal que $p' = p'_\gamma$ para un conjunto de ordinales γ no acotado en Ω^M. Entonces $(p',t) \notin F_\beta$ para todo $\beta < \Omega^M$.

Supongamos ahora que $\bigwedge \gamma \in \Omega^M\ (\mathbb{1}, t) \notin F_\gamma$ y veamos que $t \in T$. Para ello construiremos un filtro G_1 según 9.3. Como $|\mathbb{Q}_1|^M < \kappa$ y κ es fuertemente inaccesible^M, tenemos que $|\mathcal{P}\mathbb{Q}_1|^M < \kappa$, luego $(\mathcal{P}\mathbb{Q}_1)^M$ es numerable$^{M[G]}$, luego podemos tomar una enumeración $\{D_n\}_{n<\omega} \in M[G]$ de los subconjuntos densos de $\mathbb{Q}_1$ en M. Definimos ahora una sucesión $\{q_n\}_{n\in\omega} \in M[G]$ de elementos de $\mathbb{Q}_1$. Para ello tomamos $q_0 = \mathbb{1}$, con lo que, por hipótesis, $\bigwedge \gamma \in \Omega^M\ (q_0, t) \notin F_\gamma$. Supongamos definido q_n de modo que $\bigwedge \gamma \in \Omega^M\ (q_n, t) \notin F_\gamma$. Según acabamos de probar, existe un $q_{n+1} \leq q_n$, $q_{n+1} \in D_n$ y $\bigwedge \gamma \in \Omega^M\ (q_{n+1}, t) \notin F_\gamma$.

La sucesión construida de este modo genera un filtro $G_1 \in M[G]$, concretamente, $G_1 = \{q \in \mathbb{Q}_1 \mid \bigvee n \in \omega\ q_n \leq q\}$, que obviamente es $\mathbb{Q}_1$-genérico sobre M.

Falta probar que $\bigwedge n \in \omega\ (f_{G_1}|_n, t|_n) \in Q$. Como $f_{G_1}|_n \in G_1$, existe un m tal que $q_m \leq f_{G_1}|_n$ (con lo que $r = \ell(q_m) \geq n$). Si $(f_{G_1}|_n, t|_n) \notin Q$, entonces $(q_m, t|_r) \notin Q$, luego $(q_m, t) \in F_0$, en contradicción con la construcción de q_m. Esto prueba que $t \in T$.

Veamos ahora que si $\gamma \in \Omega^{M[G]}$ cumple

$$\bigwedge p \in \mathbb{Q}_1((p,t) \in F_\gamma \to \bigvee \beta < \gamma\ (p,t) \in F_\beta), \tag{9.5}$$

entonces

$$\bigwedge \delta < \Omega^M \bigwedge p \in \mathbb{Q}_1((p,t) \in F_\delta \to \bigvee \beta < \gamma\ (p,t) \in F_\beta).$$

En efecto, hay que probar la conclusión para $\delta > \gamma$, pues para $\delta < \gamma$ es trivial y para $\delta = \gamma$ es la hipótesis. Razonamos por inducción sobre δ, de modo que la hipótesis de inducción es que, para todo $\eta < \delta$

$$\bigwedge p \in \mathbb{Q}_1((p,t) \in F_\eta \to \bigvee \beta < \gamma\ (p,t) \in F_\beta).$$

Suponemos ahora que $(p,t) \in F_\delta$, con $\delta > \gamma$. Por definición de F_δ existe $D \in M$ denso en $\mathbb{Q}_1$ tal que para toda extensión $p' \in D$ de p existe un $\beta < \delta$ tal que $(p',t) \in F_\beta$, pero, por hipótesis de inducción, también existe un $\beta < \gamma$ tal que $(p',t) \in F_\beta$ y, por definición de F_γ, esto significa que $(p,t) \in F_\gamma$, luego, por (9.5) existe un $\beta < \gamma$ tal que $(p,t) \in F_\beta$.

Ahora podemos probar que para todo $t \in \mathcal{N}^{M[G]}$ existe un $\gamma < \mu$ tal que

$$\bigwedge p \in \mathbb{Q}_1(\bigvee \delta < \Omega^M\ (p,t) \in F_\delta \to \bigvee \delta < \gamma\ (p,t) \in F_\delta). \tag{9.6}$$

Aplicamos a t el teorema 9.22, según el cual existe un ordinal $\nu' < \mu$ (que podemos tomar $\nu' > \nu$, el ordinal con el que construimos $\mathbb{Q}_1$) de modo que $t \in M' = M[i'^{-1}[G]]$, donde $i' : \mathbb{Q}'_1 \longrightarrow \mathbb{P}$ es la inmersión completa análoga a i (y $\mathbb{Q}'_1 = \mathrm{Col}(\nu')$).

Tenemos que ν' es numerable en M', luego ν también, mientras que μ es inaccesible$^{M'}$, luego $\nu < \gamma = \aleph_1^{M'} < \mu$, y $\mathbb{Q}_1$ es numerable$^{M'}$. Ahora basta probar que γ cumple (9.5). Suponemos, pues, que $(p,t) \in F_\gamma$. Entonces existe $D \in M$ denso en $\mathbb{Q}_1$ tal que si $p' \in D$, $p' \leq p$, existe un $\beta < \gamma$ tal que $(p',t) \in F_\beta$. Sea $\beta_{p'} < \gamma$ el mínimo ordinal tal que $(p',t) \in F_{\beta_{p'}}$.

Ahora observamos que $Y = \{\beta_{p'} \mid p' \in D \land p \leq p'\} \in M'$, porque $t \in M'$ y la fórmula "$(p,t) \in F_\gamma$" es absoluta para modelos transitivos. Como Y es numerable$^{M'}$ y $\gamma = \aleph_1^{M'}$, se cumple que Y tiene una cota superior $\delta < \gamma$. Así $(p,t) \in F_\delta$ por definición, como había que probar.

Con esto llegamos a la caracterización definitiva del conjunto T: si $t \in \mathcal{N}^{M[G]}$, se cumple que $t \in T$ si y sólo si

$$\bigvee \gamma < \mu \bigwedge p \in \mathbb{Q}_1((p,t) \in F_\gamma \to \bigvee \delta < \gamma\ (p,t) \in F_\delta) \land \bigwedge \delta < \gamma\ (\mathbb{1},t) \notin F_\delta$$

Supongamos en primer lugar que se cumple esta condición (para un cierto $\gamma < \mu$) y demostraremos que $t \in T$ mediante (9.4). En efecto, si existe $\delta < \Omega^M$ tal que $(\mathbb{1},t) \in F_\delta$, como γ cumple (9.5), podemos tomar $\delta < \gamma$, pero esto contradice la segunda parte de la condición.

Recíprocamente, si $t \in T$, tomamos $\gamma < \mu$ que cumpla (9.6), lo cual, junto a (9.4), nos da la condición.

Ahora podemos definir

$$B_\gamma = \{t \in \mathcal{N}^{M[G]} \mid \bigwedge p \in \mathbb{Q}_1((p,t) \in F_\gamma \to \bigvee \delta < \gamma\ (p,t) \in F_\delta)$$
$$\land \bigwedge \delta < \gamma\ (\mathbb{1},t) \notin F_\delta\},$$

de modo que $\{B_\gamma\}_{\gamma<\mu} \in M[G]$, y acabamos de probar que $T = \bigcup\limits_{\gamma<\mu} B_\gamma$. Como $x \in T$, la afirmación $(*)$ quedará probada si demostramos que cada B_γ es un conjunto de Borel con código en $M[H_1]$.

Empezamos demostrando que esto es cierto para los conjuntos

$$C_\gamma(p) = \{t \in \mathcal{N}^{M[G]} \mid (p,t) \in F_\gamma\},$$

donde $p \in \mathbb{Q}_1$ y $\gamma < \mu$. Más precisamente, vamos a construir en $M[H_1]$ aplicaciones $c_\gamma : \mathbb{Q}_1 \longrightarrow \mathrm{CB}^{M[H_1]}$ de modo que $c_\gamma(p)$ sea un código de Borel para $C_\gamma(p)$.

En primer lugar observamos que si $I_p = \{h \in \omega^{\ell(p)} \mid (p,h) \notin Q\}$, entonces

$$C_0(p) = \bigcup_{h \in I_p} B_h^{M[G]}.$$

Como $\{I_p\}_{p \in \mathbb{Q}_1} \in M$, es fácil definir la aplicación $c_0 \in M \subset M[H_1]$. Supongamos construida la sucesión $\{c_\beta\}_{\beta<\gamma} \in M[H_1]$. Entonces, de la definición de F_γ se sigue que

$$C_\gamma(p) = \bigcup_D \bigcap_{p'} \bigcup_{\beta<\gamma} C_\beta(p'),$$

donde D recorre los subconjuntos densos de $\mathbb{Q}_1$ en M (que, desde el punto de vista de $M[H_1]$ son los subconjuntos densos de $\mathbb{Q}_1$ en $L[s]$) y p' recorre las extensiones de p en D. Teniendo en cuenta que $(\mathcal{P}\mathbb{Q}_1)^{M[H_1]}$, D y γ son numerables$^{M[H_1]}$, a partir de esta expresión, definir códigos de Borel $c_\gamma(p)$ en $M[H_1]$ es una simple rutina. Por último:

$$B_\gamma = \bigcap_{p\in\mathbb{Q}_1} ((\mathcal{N}^{M[G]} \setminus C_\gamma(p)) \cup \bigcap_{\beta<\gamma} C_\beta(p)) \cap \bigcap_{\beta<\gamma} (\mathcal{N}^{M[G]} \setminus C_\beta(\mathbb{1})).$$

Teniendo en cuenta nuevamente la numerabilidad$^{M[H_1]}$ de $(\mathcal{P}\mathbb{Q}_1)^{M[H_1]}$ y γ, también es fácil definir en $M[H_1]$ códigos de Borel para los conjuntos B_γ. ■

Más en general, hemos demostrado lo siguiente:

Teorema 9.29 (Lévy-Solovay) *Si es consistente* ZFC *más la existencia de un cardinal inaccesible, también lo es* ZFC *más cualquier determinación posible de* $2^{\aleph_0}$ *(es decir, de cofinalidad no numerable) más la sentencia "todo subconjunto proyectivo de todo espacio polaco no numerable es unión de* $\aleph_1$ *conjuntos de Borel".*

La primera nota tras el teorema 9.27 se aplica también a este caso: el teorema es válido para subconjuntos en $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$ de espacios polacos en $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$.

Si $2^{\aleph_0} > \aleph_2$ ningún subconjunto de cardinal $\aleph_2$ en un espacio polaco puede expresarse como unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel, pues esto le obligaría a tener cardinal $\leq \aleph_1$ o $2^{\aleph_0}$. Suponiendo únicamente que $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ tenemos igualmente la existencia de conjuntos que no pueden expresarse como unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel, a saber, los conjuntos de Bernstein, ya que sólo contienen conjuntos de Borel numerables (o de lo contrario contendrían conjuntos perfectos) y, por lo tanto, si se pudieran expresar como unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel, tendrían cardinal $\aleph_1$, cuando, por definición, tienen cardinal $2^{\aleph_0}$. Ahora bien, para demostrar la existencia de subconjuntos de un espacio polaco de cardinal $\aleph_1$ o la existencia de subconjuntos de Bernstein es necesario AE. Vamos a probar que, sin el axioma de elección, es consistente que todo subconjunto de un espacio polaco no numerable se descomponga en unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel.

Teorema 9.30 *En* N *se cumple que todo subconjunto de* $\mathcal{N}$ *es unión de a lo sumo* $\aleph_1$ *conjuntos de Borel.*

DEMOSTRACIÓN: Observemos en primer lugar que $\aleph_1^N = \aleph_1^{M[G]} = \kappa$. Para ello basta observar que si $\alpha < \kappa$ entonces α es numerable$^{M[G]}$, y un buen orden en ω de ordinal α puede codificarse por un elemento de $\mathcal{N}$, luego está en N, luego α es numerable^N.

En la prueba del teorema 9.28 hemos visto que todo subconjunto X de $\mathcal{N}$ en N es unión de una familia $\mathcal{F}$ de a lo sumo $\aleph_1$ conjuntos de Borel. Vamos a probar que $\mathcal{F} \in N$ y que $\mathcal{F}$ admite un buen orden en N. Observemos que esto implica que $(|\mathcal{F}| \leq \aleph_1)^N$. En efecto, como $\mathcal{F}$ admite un buen orden en N, existe una biyección $f : \xi \longrightarrow \mathcal{F}$ tal que $f \in N$, donde ξ es un cardinal^N, luego también es un cardinal^M, luego es numerable$^{M[G]}$ si $\xi < \kappa$ o bien es un cardinal$^{M[G]}$ en caso contrario. Por otra parte, $(|\xi| \leq \aleph_1)^{M[G]}$, luego $\xi \leq \kappa$ en cualquier caso, y así $|\mathcal{F}|^N = \xi \leq \kappa = \aleph_1^N$. Como los elementos de $\mathcal{F}$ siguen siendo conjuntos de Borel^N, concluimos que X es unión de a lo sumo $\aleph_1$ conjuntos de Borel en N.

Para probar que $\mathcal{F} \in N$ basta observar que si X es definible a partir de la sucesión $s \in (\Omega^\omega)^{M[G]}$, entonces lo mismo le sucede a $\mathcal{F}$ (notemos que, como $\mathcal{F} \subset N$, si es definible a partir de una sucesión de ordinales, es hereditariamente definible, luego está en N). Más concretamente, analizando la demostración del teorema 9.28 podemos concluir que $\mathcal{F}$ tiene una definición en $M[G]$ de esta forma:

$$\bigwedge y(y = \mathcal{F} \leftrightarrow \bigwedge B(B \in y \leftrightarrow \bigvee \nu\sigma p_0\gamma \in L[s]\ \Phi(B, \nu, \sigma, p_0, \gamma, s)))^{M[G]}, \qquad (9.7)$$

donde Φ es la fórmula que describe la construcción del conjunto que hemos llamado B_γ, si bien depende de todos los parámetros indicados. Notemos que (aunque no habría problema en hacerlo) no necesitamos incluir a κ y μ entre los parámetros porque $\kappa = \aleph_1^{M[G]}$ y $\mu = (2^{\aleph_0})^{M[G]}$. Lo que sí es crucial es que entre los parámetros no necesitamos incluir a G. Podría parecer lo contrario al analizar la elección del nombre σ y la condición p_0, pero basta pedir que σ y p_0 cumplan $\sigma \in L[s]^{\mathbb{Q}_1}$ y (9.2). (El filtro G sólo interviene en la demostración de que todo $x \in X$ pertenecerá a uno de los conjuntos B construidos a partir de los parámetros indicados, pero no en la definición de los conjuntos B.)

Con esto podemos concluir que $\mathcal{F} \in N$, y sólo nos falta demostrar que admite un buen orden en N. Para ello observamos que la fórmula Φ determina unívocamente un conjunto de Borel B para cada elección de los parámetros ν, σ, p_0, γ que cumplan los requisitos que ella misma impone. Pero, como los cuatro parámetros están en $L[s]$, podemos considerar el orden lexicográfico que el orden constructible $\trianglelefteq_s$ induce sobre las cuádruplas de parámetros, de modo que cada conjunto B tiene asociada una cuádrupla mínima de parámetros, y podemos ordenar bien los elementos de $\mathcal{F}$ estableciendo que $B \preceq_s B'$ si y sólo si la cuádrupla mínima que define a B es menor o igual que la que define a B'. Esto es un buen orden en $M[G]$ definido únicamente a partir de s, luego está en $\mathrm{D}(\Omega^\omega)^{M[G]}$ y, obviamente, en $N = \mathrm{HD}(\Omega^\omega)^{M[G]}$. ■

Nota Observemos que el teorema anterior es válido igualmente si sustituimos $N = \mathrm{HD}(\Omega^\omega)^{M[G]}$ por $N' = L(\mathcal{N})^{M[G]}$. Para ello observamos en primer lugar que si partimos de un conjunto $X \in N'$ el teorema [PC 6.26] nos permite tomar $s \in \mathcal{N}$, de modo que $L[s]^{M[G]} \subset N'$. En segundo lugar, un análisis más detallado de la demostración de 9.28 muestra que la fórmula Φ es absoluta para $N' - M[G]$. Esencialmente, se trata de observar que (9.2) y las definiciones de Q y $\{F_\gamma\}_\gamma$ son absolutas porque $M = L[s]^{M[G]} \subset N'$, y de aquí se sigue que también lo es la definición de B_γ (es decir, Φ).

Esto implica que $\mathcal{F} \in N'$ y que (9.7) se cumpla relativizada a N' en lugar de a $M[G]$. A su vez, esto permite definir un buen orden en $\mathcal{F}$ dentro de N' con el mismo criterio explicado en la demostración del teorema anterior, de donde se sigue a su vez (por el mismo argumento) que $(|\mathcal{F}| = \aleph_1)^{N'}$.

En [TD 7.52] probamos que AD implica que todo subconjunto de $\mathcal{N}$ es unión de $\aleph_1$ conjuntos de Borel, luego podemos concluir que ni N ni N' cumplen AD. ■

Extendiendo la conclusión de forma obvia a espacios polacos arbitrarios a través de los isomorfismos de Borel, tenemos lo siguiente:

Teorema 9.31 (Lévy-Solovay) *Si* ZFC + *"Existe un cardinal inaccesible" es consistente, también lo son las teorías indicadas en los apartados b), c), e) del teorema* 9.27 *añadiendo en cada una de ellas que* $\aleph_1 \not\leq 2^{\aleph_0}$ *y "todo subconjunto de todo espacio polaco es unión de a lo sumo* $\aleph_1$ *conjuntos de Borel".*

Observemos que la generalización descrita en la primera nota tras el teorema 9.27 (para espacios polacos en $\mathrm{HD}(\Omega^\omega)$) es válida también en este caso.

Notemos que la relación $\aleph_1 \not\leq 2^{\aleph_0}$ equivale a que los únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ bien ordenables son los numerables. Esto tiene una consecuencia curiosa:

Teorema 9.32 *Si* $\aleph_1 \not\leq 2^{\aleph_0}$*, es posible descomponer* $\mathcal{P}\omega = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$*, donde los conjuntos* A_i *son no vacíos y disjuntos dos a dos, de modo que el cardinal de* I *es estrictmente mayor que* $2^{\aleph_0}$.

Demostración: Puesto que ω es equipotente a $\omega\times\omega$ (sin necesidad de AE), basta probar el resultado para $\mathcal{P}(\omega\times\omega)$. En este conjunto consideramos la relación de equivalencia dada por $R\sim S$ si y sólo si $R=S$ o bien R y S son dos buenos órdenes en ω con el mismo tipo de orden. Llamamos C al conjunto cociente y basta probar que su cardinal es estrictamente mayor que $2^{\aleph_0}$. En efecto, podemos definir $\mathcal{P}\omega \longrightarrow C$ inyectiva mediante $A\mapsto [\{0\}\times A] = \{\{0\}\times A\}$, pues claramente $\{0\}\times A$ no es una relación de orden. Esto prueba que el cardinal de C es mayor o igual que el de $\mathcal{P}\omega$, pero no puede darse la igualdad, pues también tenemos la aplicación inyectiva $\omega_1 \longrightarrow C$ que a cada ordinal $\alpha<\omega_1$ le asigna la clase de los buenos órdenes en ω de ordinal α. Como $2^{\aleph_0}$ no es mayor o igual que $\aleph_1$ y el cardinal de C sí que lo es, no puede darse la igualdad. ■

9.5 Existencia de funcionales lineales

Hemos visto que el modelo de Solovay cumple la propiedad

(PB) *Todo subconjunto de* $\mathbb{R}$ *tiene la propiedad de Baire.*

De hecho, sabemos que es equivalente a que todo subespacio de todo espacio polaco cumpla la propiedad de Baire. Vamos a extraer consecuencias de PB que se cumplirán en particular en el modelo de Solovay, pero también, por ejemplo, en cualquier modelo del axioma de determinación AD.

Teorema 9.33 (PB) *Si* $f: X\longrightarrow Y$ *es una aplicación lineal entre espacios de Banach e* Y *es separable, entonces* f *es continua.*

Demostración: Supongamos en primer lugar que X también es separable, de modo que X e Y son espacios polacos.

Por [T 6.47] sabemos que si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación medible Baire entre espacios polacos, existe $F \subset X$ de primera categoría tal que $f|_{X\setminus F}$ es continua. Sea $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en X convergente a 0 y consideremos el conjunto $A = F \cup \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} (-x_n + F)$, que es de primera categoría, luego podemos tomar $z \in X \setminus A$. Así, $z \in X \setminus F$ y para todo $n \in \omega$ se cumple que $z + x_n \in X \setminus F$.

Tenemos que $\lim\limits_n (z + x_n) = z$ y, como f es continua en $X \setminus F$, también $\lim\limits_n f(z) + f(x_n) = f(z)$, luego $\lim\limits_n f(x_n) = 0$. Esto prueba que f es continua en 0, luego es continua.

Consideremos ahora el caso en que X no es necesariamente separable. Tomamos igualmente una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ que tienda a 0 en X y llamamos X_0 a la clausura del subespacio generado por $\{x_n \mid n \in \omega\}$. Se trata de un espacio de Banach separable (un conjunto denso numerable lo forman las combinaciones lineales con coeficientes racionales de los x_n), luego, por la parte ya probada, $f|_{X_0}$ es continua, luego $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ converge a 0, y esto prueba la continuidad de f (en 0). ■

En particular, si X es un espacio de Banach, su dual algebraico X^* coincide con su dual topológico X'.

Por ejemplo, como ℓ^2 es un espacio de Hilbert, su dual topológico es canónicamente isomorfo a sí mismo, luego tenemos un ejemplo de espacio vectorial de dimensión infinita sobre $\mathbb{R}$ que es isomorfo a su dual algebraico. Esto es imposible con el axioma de elección, pues la dimensión del espacio dual de un espacio vectorial de dimensión infinita es siempre mayor que la dimensión del espacio [TC A.12].

Notemos que, en este contexto, cuando decimos que ℓ^2 tiene dimensión infinita, sólo podemos entenderlo como que no es de dimensión finita, porque en realidad no tiene dimensión, ya que no tiene bases. Si tuviera una base, sería fácil construir ejemplos de funcionales no continuos.

Otra consecuencia relevante de PB es la siguiente:

Teorema 9.34 (PB) *Toda medida finitamente aditivas en $\mathcal{P}\omega$ que se anule en los puntos es nula.*

Demostración: Supongamos que $\mu : \mathcal{P}\omega \longrightarrow [0, +\infty[$ es una medida finitamente aditiva no nula que se anula en los puntos. Dividiéndola entre $\mu(\omega)$, podemos suponer que $\mu(\omega) = 1$. Consideramos el cubo de Cantor $\mathcal{C} = {}^{\omega}2$ y definimos $\nu : \mathcal{C} \longrightarrow [0, +\infty[$ mediante $\nu(\chi_A) = \mu(A)$. Basta probar que

$$X = \{x \in \mathcal{C} \mid \nu(x) = 0\}$$

no tiene la propiedad de Baire. Como μ se anula en los conjuntos finitos, tenemos que $\nu(x)$ no se altera si modificamos x en un número finito de componentes.

Esto significa que X es un conjunto final, en el sentido de [TC B.3]. Si tiene la propiedad de Baire, el teorema [TC B.4] nos da que X o bien $\mathcal{C} \setminus X$ es de primera categoría.

Supongamos en primer lugar que $Y = \mathcal{C} \setminus X$ es de primera categoría. Así

$$Y = \{x \in \mathcal{C} \mid \nu(x) > 0\}.$$

Si llamamos $x' = 1 - x$, es decir, la sucesión que resulta de intercambiar los ceros y los unos de x, tenemos que $\nu(x) + \nu(x') = 1$, luego

$$Y' = \{x' \mid x \in Y\} = \{x \in \mathcal{C} \mid \nu(x) < 1\}.$$

Pero $x \mapsto x'$ es un homeomorfismo de $\mathcal{C}$ en sí mismo, luego Y' también es de primera categoría, y $\mathcal{C} = Y \cup Y'$, contradicción. Así pues, tiene que ser X de primera categoría. Vamos a ver que igualmente llegamos a una contradicción.

Pongamos que $X = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} C_n$, donde cada C_n es diseminado, es decir, su clausura tiene interior vacío. Entonces existen abiertos densos $U_n \subset \mathcal{C} \setminus C_n$. Vamos a construir recurrentemente una sucesión de aplicaciones $F_n : {}^n2 \longrightarrow {}^{m_n}2$ de modo que la sucesión $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ sea estrictamente creciente y cada F_n extienda a las precedentes. Partimos de $m_0 = 0$ y $F_0 : {}^02 \longrightarrow {}^02$ dada por $F_0(\varnothing) = \varnothing$.

Supuesta definida F_n, enumeramos ${}^{n+1}2 = \{c_i\}_{i<2^{n+1}}$ y definimos recurrentemente sucesiones finitas $\tilde{c}_i$ cuyas longitudes $\ell(\tilde{c}_i) > m_n$ formen una sucesión estrictamente creciente. Supongamos definida $\tilde{c}_{i-1}$. Para construir $\tilde{c}_i$ partimos de $F_n(c_i|_n) \in {}^{m_n}2$. La extendemos con ceros hasta formar una sucesión $s \in {}^{\ell(\tilde{c}_{i-1})}2$, a continuación añadimos un 1 y luego usamos que U_n es un abierto denso para extender $s^\frown 1$ hasta una sucesión $\tilde{c}_i$ con la propiedad de que

$$\{x \in \mathcal{C} \mid x|_{\ell(\tilde{c}_i)} = \tilde{c}_i\} \subset U_n \subset \mathcal{C} \setminus C_n.$$

Más detalladamente, el abierto $\{x \in \mathcal{C} \mid x|_{\ell(s)+1} = s^\frown 1\}$ contiene un elemento $d \in U_n$ y, como U_n es abierto, existe un $k > \ell(s)$ tal que $\tilde{c}_i = d|_k$ cumple lo requerido.

Una vez construida la sucesión $\{\tilde{c}_i\}_{i<2^{n+1}}$, prolongamos todos sus miembros con ceros hasta que todos tengan la misma longitud m_{n+1} y definimos $F_{n+1}(c_i) = \tilde{c}_i$.

Así tenemos garantizado que $F_n(c_i|_n) \subset F_{n+1}(c_i)$ y además si $c_i \neq c_j$, se cumple que $F_{n+1}(c_i) \neq F_{n+1}(c_j)$. Más aún, lo que se cumple es que el intervalo $m_n \leq j < m_{n+1}$ está dividido en 2^{n+1} subintervalos disjuntos de modo que cada $F_n(c_i)$ sólo toma valores no nulos en uno de dichos subintervalos (y al menos toma el valor 1 en el primer término del subintervalo que le corresponde).

Definimos ahora $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ mediante $F(x) = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} F_n(x|_n)$. Por construcción F es inyectiva, pues si $x \neq y$, entonces existe un n tal que $x|_n \neq y|_n$, y entonces $F_n(x|_n) \neq F_n(y|_n)$, luego $F(x) \neq F(y)$.

Más aún, por construcción, para todo $j > m_n$, se cumple que $F(x)(j)$ y $F(y)(j)$ no son ambos iguales a 1, pues las sucesiones $F_n(x|_n)$ y $F_n(y|_n)$ se van prolongando de modo que cada extensión sucesiva añade nuevos unos en bloques disjuntos entre sí. A su vez, esto se interpreta como que si $F(x) = \chi_A$, $F(y) = \chi_B$, entonces $A \cap B$ es finito.

También por construcción si $x|_n = c_i$, se cumple $F(x)|_{\ell(\tilde{c}_i)} = F_{n+1}(c_i) = \tilde{c}_i$, luego $F(x) \in \mathcal{C} \setminus C_n$.

En otros términos, si llamamos $A = F[\mathcal{C}]$, tenemos que $A \cap C_n = \varnothing$ para todo n, luego $A \cap X = \varnothing$ y, por otra parte, A no es numerable, luego existe un k tal que $\{x \in A \mid \nu(x) > 1/k\}$ es infinito. Tomamos $x_1, \ldots, x_k$ en este conjunto, es decir, tales que $\nu(x_i) > 1/k$.

Así, si $x_i = \chi_{A_i}$, tenemos que los conjuntos A_i cumplen $\mu(A_i) > 1/k$ (lo que implica en particular que son infinitos) y si $i \neq j$, entonces $A_i \cap A_j$ es finito. Por lo tanto, si a cada conjunto A_i le quitamos la unión de los demás, obtenemos conjuntos de la misma medida disjuntos dos a dos, pero esto es imposible, pues entonces $\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_k) > 1$, cuando $\mu(\omega) = 1$. ■

Tras el teorema [T A.63] se prueba que, si identificamos $(\ell^\infty)' = M(\omega)$, la inmersión canónica $i : \ell^1 \longrightarrow M(\omega)$ en su bidual tiene por imagen a las medidas signadas (numerablemente aditivas). Uniendo esto al teorema anterior, podemos probar que el dual de ℓ^∞ es ℓ^1.

Teorema 9.35 (PB) *La inmersión canónica $i : \ell^1 \longrightarrow (\ell^\infty)'$ es biyectiva.*

Demostración: Por la observación precedente, basta probar que toda medida signada finitamente aditiva en $\mathcal{P}\omega$ es, de hecho, una medida signada numerablemente aditiva. Por [T A.61] toda medida signada finitamente aditiva se descompone en diferencia de dos medidas finitamente aditivas, luego basta probar que toda medida finitamente aditiva μ en $\mathcal{P}\omega$ es numerablemente aditiva. En caso contrario existen conjuntos $\{A_n\}_{n=0}^\infty$ en $\mathcal{P}\omega$ disjuntos dos a dos tales que

$$\sum_{n=0}^\infty \mu(A_n) < \mu(\bigcup_{n=0}^\infty A_n)$$

(notemos que $\sum\limits_{n=0}^k \mu(A_n) = \mu(\bigcup\limits_{n=0}^k A_n) \leq \mu(\bigcup\limits_{n=0}^\infty A_n)$, luego siempre se cumple que $\sum\limits_{n=0}^\infty \mu(A_n) \leq \mu(\bigcup\limits_{n=0}^\infty A_n)$). Sea $A = \bigcup\limits_{n=0}^\infty A_n$.

Definamos una nueva medida finitamente aditiva ν mediante

$$\nu(X) = \mu(X \cap A) - \sum_{n \in X} \mu(X \cap A_n) \geq 0.$$

Notemos que $\nu(\omega) > 0$, por lo que no es la medida nula, pero los puntos tienen medida nula, en contra del teorema anterior. ■

Más aún, tenemos un ejemplo de espacio vectorial no nulo cuyo dual algebraico es nulo:

Teorema 9.36 *El dual algebraico de ℓ^∞/c_0 es nulo.*

DEMOSTRACIÓN: Si existe un funcional lineal $\ell^\infty/c_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ no nulo, al componerlo con la proyección natural en el cociente obtenemos un funcional lineal $f : \ell^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ que se anula sobre c_0 y que es continuo por la observación tras el teorema 9.33. Por el teorema anterior está inducido por un $x \in \ell^1$, es decir, $f(y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n y_n$. Ahora bien, la sucesión e_n que es nula salvo por un 1 en la posición n-sima está en c_0, luego $x_n = f(e_n) = 0$, luego $x = 0$, luego $f = 0$, contradicción. ■

Esto significa que no es posible definir explícitamente ningún funcional lineal $f : \ell^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ que se anule en c_0. La existencia de tales funcionales depende esencialmente del axioma de elección.

En particular vemos que PB implica la negación del teorema de Hanh-Banach, o, dicho al revés, que el teorema de Hahn-Banach implica la existencia de un subconjunto de $\mathbb{R}$ sin la propiedad de Baire.

Capítulo X

El teorema de los ultrafiltros

Vamos a probar algunos resultados de consistencia sobre el teorema de los ultrafiltros (TU) [TC 7.10] o a su equivalente, el teorema de los ideales primos [TC 7.9]. Otras equivalencias son las dadas en el teorema [TC 10.8]. Ahora ya sabemos que no puede demostrarse sin el axioma de elección, pues implica, por ejemplo, que todo conjunto puede ser totalmente ordenado [TC 10.14] y hemos visto (teorema 8.29) que esto no es necesariamente cierto sin AE.

El resultado principal que vamos a obtener es que TU no implica AE, porque TU es verdadero en el *primer modelo de Cohen,* que no es sino el modelo considerado en el teorema 8.27 (mientras que el *segundo modelo de Cohen* es el del teorema 8.29). Este resultado no es trivial en absoluto, y requiere que estudiemos mucho más a fondo la estructura de dicho modelo.

10.1 El primer modelo de Cohen

Según acabamos de indicar, el primer modelo de Cohen es el modelo considerado en el teorema 8.27, el más elemental de los modelos simétricos que prueban la independencia del axioma de elección. Lo recordamos a continuación junto con algunos hechos adicionales.

Las condiciones El conjunto de condiciones del primer modelo de Cohen es, como ya sabemos, $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega \times \omega, 2, \aleph_0)$. En teoría podríamos considerar equivalentemente $\mathrm{Fn}(\omega, 2, \aleph_0)$, pero es más cómodo tomar $\omega \times \omega$ como dominio de las funciones parciales para construir infinitos conjuntos genéricos.

Necesitaremos trabajar también con la compleción $\mathbb{B}$ de $\mathbb{P}$. Identificando las condiciones de $\mathbb{P}$ con sus imágenes en $\mathbb{B}$ podemos suponer que $\mathbb{P}$ es un subconjunto denso de $\mathbb{B}$.

Veamos algunos hechos elementales:

- A través de esta identificación, si p, $q \in \mathbb{P}$ son condiciones compatibles, se cumple que $p \wedge q = p \cup q$.

En efecto, $p \cup q \leq p$ y $p \cup q \leq q$, luego $p \cup q \leq p \wedge q$ y, si no se diera la desigualdad opuesta, existiría $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p \wedge q$ y $r \perp (p \cup q)$, pero entonces $p \subset r$ y $q \subset r$, luego $p \cup q \subset r$ y $r \leq p \cup q$, contradicción.[1]

- Que $\mathbb{P}$ sea denso en $\mathbb{B}$ se traduce en que cada $b \in \mathbb{B}$ cumple

$$b = \bigvee\{p \in \mathbb{P} \mid p \leq b\}.$$

En efecto, una desigualdad es obvia y, si no se da la contraria, entonces

$$\bigvee\{p \in \mathbb{P} \mid p \leq b\} \wedge b' \neq \mathbb{O},$$

pero esto es absurdo, porque equivale a que $\bigvee\{p \wedge b' \mid p \in \mathbb{P} \wedge p \leq b\} \neq \mathbb{O}$, cuando cada $p \wedge b' = \mathbb{O}$, luego el supremo es $\mathbb{O}$.

- En particular, $\mathbb{B} = \{\bigvee X \mid X \subset \mathbb{P}\}$.

Si $e \subset \omega$, definimos $\mathbb{P}_e = \mathrm{Fn}(e \times \omega, 2, \aleph_0) \subset \mathbb{P}$. Es inmediato comprobar que la inclusión $\mathbb{P}_e \longrightarrow \mathbb{P}$ es una inmersión completa. Concretamente, una reducción de una condición $p \in \mathbb{P}$ a $\mathbb{P}_e$ es la condición

$$p : e = p \cap (e \times \omega \times 2).$$

Si llamamos $\mathbb{B}_e$ a la compleción de $\mathbb{P}_e$, según [TC 7.49], la inclusión $\mathbb{P}_e \longrightarrow \mathbb{P}$ se extiende a un monomorfismo completo $\mathbb{B}_e \longrightarrow \mathbb{B}$, que nos permite identificar a $\mathbb{B}_e$ con una subálgebra completa de $\mathbb{B}$. Concretamente

$$\mathbb{B}_e = \{\bigvee X \mid X \subset \mathbb{P}_e\},$$

es decir, $\mathbb{B}_e$ está formada por los elementos de $\mathbb{B}$ que son supremos de subconjuntos de $\mathbb{P}_e$.

Teorema 10.1 *Para cada $b \in \mathbb{B}$ no nulo, la condición*

$$b : e = \bigvee\{p : e \mid p \in \mathbb{P} \wedge p \leq b\} \in \mathbb{B}_e.$$

es la mayor reducción de b a $\mathbb{B}_e$.

Demostración: Observemos en primer lugar que esta definición coincide sobre la que ya teníamos sobre elementos de $\mathbb{P}$. En efecto, si llamamos de momento $(p : e)^1 = p \cap (e \times \omega \times 2)$ y $(p : e)^2$ a la condición definida en el enunciado, por una parte, como $p \leq p$, tenemos que $(p : e)^1 \leq (p : e)^2$ y, si $q \leq p$, entonces $(q : e)^1 \leq (p : e)^1$, luego tomando el supremo en q resulta que $(p : e)^2 \leq (p : e)^1$.

[1]En cambio, no es cierto en general que $p \vee q = p \cap q$. Basta considerar las condiciones $p = \{(0,0,0),(0,1,0)\}$, $q = \{(0,0,0),(0,2,0)\}$ y $r = \{(0,0,0),(0,1,1),(0,2,1)\}$. Se cumple que $r \leq p \cap q$, pero $r \wedge p = r \wedge q = \mathbb{O}$, luego $r \wedge (p \vee q) = \mathbb{O}$.

Ahora observamos que si $b \neq \mathbb{O}$ existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \leq b$, luego $p : e \leq b : e$, luego $b : e \neq \mathbb{O}$.

Que $b : e$ es una reducción significa que si $c \in \mathbb{B}_e$ no nulo cumple $c \leq b : e$, entonces $\neg c \perp b$. Vamos a probar, de hecho, que si $c \perp b$ entonces $c \perp b : e$.

En efecto, supongamos $c \perp b$, donde $c = \bigvee X$, con $X \subset \mathbb{P}_e$. Sea $p \in X$ y sea $q \in \mathbb{P}$ tal que $q \leq b$. Entonces $p \perp q$ y, como $p \in \mathbb{P}_e$, necesariamente $p \perp q : e$. Por consiguiente,

$$p \wedge b : e = \bigvee \{p \wedge q : e \mid q \in \mathbb{P} \wedge q \leq b\} = \mathbb{O}.$$

Y a su vez,

$$c \wedge b : e = \bigvee \{p \wedge b : e \mid p \in X\} = \mathbb{O}.$$

Supongamos ahora que $c \in \mathbb{B}_e$ es una reducción de b a $\mathbb{B}_e$. Sea $c = \bigvee X$, con $X \subset \mathbb{P}_e$. Basta probar que si $x \in X$, entonces $x \leq b : e$. En caso contrario, como x, $b : e \in \mathbb{B}_e$, también $x \wedge (b : e)' \in \mathbb{B}_e$ y es no nulo, luego existe $p \in \mathbb{P}_e$ tal que $p \leq x$ y $p \perp b : e$, pero entonces $p \leq x \leq c$ y, como c es una reducción de b, se cumple que $\neg p \perp b$, luego existe $q \in \mathbb{P}$ tal que $q \leq p$, $q \leq b$, pero, como $p \in \mathbb{P}_e$, tenemos que $q : e \leq p : e = p$, y también $q : e \leq b : e$, contradicción. ■

Como consecuencia:

Teorema 10.2 *Si $e \subset \omega$ y $b \in \mathbb{B}$, entonces $b \leq b : e$, y si $b \in \mathbb{B}_e$ entonces $b = b : e$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $p \in \mathbb{P}$ cumple $p \leq b$ entonces $p \leq p : e \leq b : e$, luego $b \leq b : e$. Si $b \in \mathbb{B}_e$ pero no se cumple $b : e \leq b$, existe un $p \in \mathbb{P}_e$ tal que $p \leq b : e$ y $p \perp b$, pero esto contradice que $b : e$ es una reducción de b a $\mathbb{B}_e$. ■

En particular vemos que $\mathbb{B}_e = \{b : e \mid b \in \mathbb{B}\}$.

El grupo de simetrías Fijamos ahora $H = \Sigma_\omega$, el grupo de todas las permutaciones de ω, e identificamos cada $f \in H$ con el automorfismo de $\mathbb{P}$ dado por

$$f(p) = \{(f(i), n, r) \mid (i, n, r) \in p\},$$

el cual a su vez se extiende a un único automorfismo de $\mathbb{B}$. Para cada $e \subset \omega$, definimos su estabilizador como el subgrupo

$$\mathrm{Est}(e) = \{f \in \Sigma_\omega \mid \bigwedge i \in e\ f(i) = i\}.$$

El automorfismo de $\mathbb{B}$ inducido por $f \in \Sigma_\omega$ induce a su vez una biyección $f : V^{\mathbb{B}} \longrightarrow V^{\mathbb{B}}$ que nos permite definir el grupo de simetrías de $\tau \in V^{\mathbb{B}}$ como

$$\mathrm{Sim}(\tau) = \{f \in \Sigma_\omega \mid f(\tau) = \tau\}.$$

Consideramos el filtro $\mathcal{F}$ formado por todos los subgrupos de Σ_ω que contienen al estabilizador de un conjunto finito $e \subset \omega$.

Un nombre $\tau \in V^{\mathbb{B}}$ es simétrico si $\mathrm{Sim}(\tau) \in \mathcal{F}$, es decir, si existe $e \subset \omega$ finito tal que $\mathrm{Est}(e) \subset \mathrm{Sim}(\tau)$, y en tal caso diremos que e es un *soporte* de τ.

La clase $SV^{\mathbb{B}}$ de los nombres hereditariamente simétricos está formada por los nombres τ que son simétricos y $\mathcal{D}\tau \subset SV^{\mathbb{B}}$.

El teorema siguiente es elemental, pero no es trivial en absoluto:

Teorema 10.3 *Sean e_1, $e_2 \subset \omega$ finitos, sea $e = e_1 \cap e_2$ y sea $f \in \mathrm{Est}(e)$. Entonces f se descompone como $f = f_1 \circ \cdots \circ f_n$ con cada $f_i \in \mathrm{Est}(e_1) \cup \mathrm{Est}(e_2)$.*

DEMOSTRACIÓN: Vamos a probar que existe $g_k : \omega \longrightarrow \omega$ que es composición de funciones en las condiciones del enunciado y que coincide con f en al menos k elementos de $e_1 \cup e_2$ (para $k \leq |e_1 \cup e_2|$).

En efecto, tomamos como g_0 la identidad en ω. Supuesta definida g_k y suponiendo que $k < |e_1 \cup e_2|$, sea $A = \{n \in e_1 \cup e_2 \mid f(n) = g_k(n)\}$. Notemos que $e \subset A$.

Si $|A| \geq k+1$ basta tomar $g_{k+1} = g_k$. En caso contrario sea $x \in (e_1 \cup e_2) \setminus A$ y sea $y \in \omega$ tal que $g_k(y) = f(x)$. Claramente $y \neq x$, y a su vez esto implica que $y \notin A$, pues en tal caso tendríamos que $f(y) = g_k(y) = f(x)$, luego $x = y \in A$. Sea $z \in \omega \setminus (e_1 \cup e_2)$.

Definimos $g_{k+1} = (x, z) \circ (z, y) \circ g$, donde (x, z) representa la biyección que intercambia x con z y (z, y) la que intercambia z con y. Claramente, cada una de ellas fija a e_1 o a e_2, según a cuál de los dos conjuntos no pertenezca y (notemos que $y \notin e \subset A$). Entonces, $g_{k+1}(x) = g(y) = f(x)$ y $g_{k+1}|_A = g|_A = f|_A$, luego g_{k+1} cumple lo pedido.

De este modo obtenemos una biyección $g : \omega \longrightarrow \omega$ que es composición de un número finito de funciones de $\mathrm{Est}(e_1) \cup \mathrm{Est}(e_2)$ y tal que $f|_{e_1 \cup e_2} = g|_{e_1 \cup e_2}$. Entonces $h = f \circ g^{-1} \in \mathrm{Est}(e_1 \cup e_2)$, luego $f = h \circ g$ tiene la forma requerida por el enunciado. ■

Como consecuencia obtenemos:

Teorema 10.4 *Todo $\tau \in SV^{\mathbb{B}}$ tiene un soporte mínimo que está contenido en cualquier otro de sus soportes.*

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar observamos que si e_1 y e_2 son soportes de τ, entonces $e_1 \cap e_2$ también lo es. En efecto, por el teorema anterior, toda $f \in \mathrm{Est}(e_1 \cap e_2)$ puede expresarse como composición de un número finito de permutaciones $f_i \in \mathrm{Est}(e_1) \cup \mathrm{Est}(e_2)$, lo que implica claramente que $f(\tau) = \tau$.

Por lo tanto, si e es un soporte de τ de cardinal mínimo, tiene que estar contenido en cualquier otro soporte e', ya que $e \cap e' \subset e$ es también un soporte, luego $e = e \cap e' \subset e'$. ■

Definición 10.5 Llamaremos *soporte* de un nombre $\tau \in SV^{\mathbb{B}}$ a su soporte mínimo, y lo representaremos por $\mathrm{sop}\,\tau$.

Teorema 10.6 *Si* $\tau \in SV^{\mathbb{B}}$ *y* f, $g \in \Sigma_\omega$, *se cumple:*

a) $\operatorname{sop} f(\tau) = f[\operatorname{sop} \tau]$.

b) Si $f|_{\operatorname{sop}\tau} = g|_{\operatorname{sop}\tau}$, *entonces* $f(\tau) = g(\tau)$.

DEMOSTRACIÓN: a) Si llamamos $e = \operatorname{sop}\tau$, para cada

$$g \in \operatorname{Est}(f[e]) = \operatorname{Est}(e)^f$$

se cumple que $g^{f^{-1}} \in \operatorname{Est}(e) \subset \operatorname{Sim}(\tau)$, luego $(f \circ g \circ f^{-1})(\tau) = \tau$, es decir, $f^{-1}(g(f(\tau))) = \tau$, luego $g(f(\tau)) = f(\tau)$, luego $g \in \operatorname{Sim}(f(\tau))$. Esto prueba que $f[e]$ es un soporte de $f(\tau)$, luego $\operatorname{sop} f(\tau) \subset f[\operatorname{sop}\tau]$.

En particular, esto vale para f^{-1} y $f(\tau)$, con lo que tenemos la inclusión $\operatorname{sop}\tau \subset f^{-1}[\operatorname{sop} f(\tau)]$, de donde $f[\operatorname{sop}\tau] \subset \operatorname{sop} f(\tau)$ y tenemos la igualdad.

b) Basta observar que $f \circ g^{-1} \in \operatorname{Est}(e)$, luego $g^{-1}(f(\tau)) = \tau$, con lo que $f(\tau) = g(\tau)$. ■

Diremos que e es un *soporte* de una condición $p \in \mathbb{P}$ si $p \in \mathbb{P}_e$. En este caso es obvio que cada condición p tiene un soporte mínimo,

$$\operatorname{sop} p = \{i \in \omega \mid \bigvee nj \in \omega\ (i, n, j) \in p\}.$$

La extensión simétrica A partir de este punto relativizamos todo lo expuesto en los apartados precedentes a un modelo transitivo numerable M de ZFC + $V = L$. Se cumple que $\mathbb{P}$ es absoluto, pero a partir de ahora $\mathbb{B}$ será $\mathbb{B}^M$, es decir, la compleción de $\mathbb{P}$ en M. Definimos

$$\sigma_i = \{(\check{n}, p) \mid p \in \mathbb{P} \wedge (i, n, 1) \in p\} \in SM^{\mathbb{P}},$$

$$\sigma = \{(\sigma_n, \mathbb{1}) \mid n \in \omega\} \in SM^{\mathbb{P}}.$$

Notemos que si $f \in \Sigma_\omega$ se cumple que $f(\sigma_i) = \sigma_{f(i)}$, por lo que $\operatorname{sop}\sigma_i = \{i\}$, mientras que $\operatorname{sop}\sigma = \varnothing$.

Así, fijado un filtro genérico G, el primer modelo de Cohen es la extensión simétrica $N = SM[G]$, que contiene a la función genérica $f_G : \omega \times \omega \longrightarrow 2$ y a los conjuntos genéricos

$$s_i = \sigma_{iG} = \{n \in \omega \mid f_G(i, n) = 1\},$$

así como al conjunto formado por todos ellos:

$$A = \sigma_G = \{s_i \mid i \in \omega\}.$$

Podemos pensar que cada condición $p \in \mathbb{P}$ contiene información posible sobre algunos de los conjuntos genéricos s_i. Concretamente, si $p \in \mathbb{P}_e$, entonces p sólo aporta información sobre los conjuntos s_i con $i \in e$.

En el teorema 8.27 hemos visto que alguien que "viva" en N puede ver el conjunto $A \subset \mathcal{P}\omega$ (y, por lo tanto, todos sus elementos), pero no puede ver la enumeración $\{s_i\}_{i\in\omega}$, ni ninguna otra. El conjunto A se puede "ver" pero "no se puede contar".

Una situación similar es la siguiente: alguien que "viva" en N o en $M[G]$ puede "ver" el conjunto $SM^{\mathbb{B}}$ (aunque para él será la clase $SL^{\mathbb{B}}$), pero sólo quien "vive" en $M[G]$ puede ver el filtro genérico G (dicho filtro no está en N, pues si estuviera permitiría definir la sucesión $\{s_i\}_{i\in\omega}$).

Por lo tanto, dado un nombre $\tau \in SM^{\mathbb{B}}$, alguien que "viva" en $M[G]$ puede determinar el conjunto τ_G a que hace referencia, mientras que, en principio, alguien que "viva" en N "ve" los nombres, y puede reconocer que sean hereditariamente simétricos, pero no sabe qué conjunto nombra cada uno. De hecho, la sucesión $\{\sigma_i\}_{i\in\omega}$ está en $M \subset N$, de modo que si en N pudiera determinarse cuál es el conjunto nombrado por cada nombre, el conjunto A sería numerable en N.

Pese a todo esto, vamos a ver que, con ciertas restricciones, es posible calcular en N el valor de un nombre con soporte e a partir de la sucesión finita de conjuntos genéricos $\{s_i\}_{i\in e} \in N$.

Definición 10.7 Una *asignación* es una aplicación inyectiva $t : e \longrightarrow A$, donde $e \subset \omega$ es finito. Llamaremos $\mathrm{As} \in N$ al conjunto de todas las asignaciones.

Definimos las asignaciones con dominios en conjuntos de números naturales por comodidad, pero la idea es que cada asignación t determina una posible interpretación en A de un número finito de nombres σ_i. Así, las interpretaciones "verdaderas" son las que a cada σ_i les asignan como interpretación s_i (o, en los términos en que hemos definido en la práctica las asignaciones, las de la forma $t(i) = s_i$). Sin embargo, de momento necesitamos tratar por igual con asignaciones "verdaderas" y "falsas" por razones de simetría.

Notemos que cada aplicación $\pi : e \longrightarrow \omega$ inyectiva determina una asignación, la dada por $t(i) = s_{\pi i}$, y toda asignación es de esta forma, para una π unívocamente determinada. Definimos

$$\tau_\pi = \{(\mathrm{p.o.}(\check{\imath}, \sigma_{\pi i}), \mathbb{1}) \mid i \in e\} \in SM^{\mathbb{P}}.$$

A los nombres de esta forma los llamaremos *nombres canónicos de asignaciones.* Es claro que $\operatorname{sop} \tau_\pi = \pi[e]$. También es claro que $(\tau_\pi)_G$ es la asignación determinada por π.

Dado $\alpha \in \Omega^M$, consideramos el conjunto

$$D_\alpha = \{(\rho, t) \in (SM^{\mathbb{B}} \cap V_\alpha) \times \mathrm{As} \mid \operatorname{sop} \rho \subset \mathcal{D}t\} \in N,$$

es decir, el conjunto de los pares (ρ, t) formados por un nombre de rango $< \alpha$ y una asignación cuyo dominio contenga el soporte del nombre.

Si $(\rho, t) \in D_\alpha$ y $t : e \longrightarrow A$ viene dada por $t(i) = s_{\pi i}$, consideramos cualquier $f \in \Sigma_\omega^M$ tal que $f|_e = \pi$. Entonces, por el teorema 10.6 b), el nombre $f(\rho)$

sólo depende de π, luego de t, luego podemos definir $\mathrm{Val}_\alpha(\rho, t) = f(\rho)_G$, y así tenemos una aplicación $\mathrm{Val}_\alpha : D_\alpha \longrightarrow N$.

Teorema 10.8 *Para todo ordinal $\alpha \in \Omega^M$, la función $\mathrm{Val}_\alpha : D_\alpha \longrightarrow N$ está en N y, si α es suficientemente grande, se cumple:*

a) $\mathrm{Val}_\alpha(\sigma_i, t) = t(i)$.

b) $\mathrm{Val}_\alpha(\sigma, t) = A$.

c) Si t y t' coinciden en $\operatorname{sop}\rho$, *entonces* $\mathrm{Val}_\alpha(\rho, t) = \mathrm{Val}_\alpha(\rho, t')$.

d) Si $s : e \longrightarrow A$ es la asignación dada por $s(i) = s_i$ y $\rho \in SM^{\mathbb{B}}$ tiene rango $< \alpha$ y soporte contenido en e, entonces $\mathrm{Val}_\alpha(\rho, s) = \rho_G$.

e) En particular, si $\operatorname{sop}\rho = \varnothing$, *se cumple que* $\mathrm{Val}_\alpha(\rho, t) = \rho_G$.

f) Más concretamente, si $x \in M$ entonces $\mathrm{Val}_\alpha(\check{x}, t) = x$.

DEMOSTRACIÓN: Para probar que la función está en N le encontramos un nombre canónico:

$$\upsilon_\alpha = \{(\text{p.o.}(\text{p.o.}(\check{\rho}, \tau_\pi), f(\rho)), \mathbb{1}) \mid \rho \in SV^{\mathbb{B}} \cap V_\alpha \land$$
$$\bigvee e(e \subset \omega \text{ finito} \land \operatorname{sop}\rho \subset e \land f \in \Sigma_\omega \land \pi = f|_e)\}^M.$$

Obviamente $\upsilon \subset SM^{\mathbb{B}}$, pero también es simétrico (con soporte $\varnothing$). En efecto, (razonando en M) si $g \in \Sigma_\omega$, entonces

$$(g(\text{p.o.}(\text{p.o.}(\check{\rho}, \tau_\pi), f(\rho))), g(\mathbb{1})) = (\text{p.o.}(\text{p.o.}(\check{\rho}, g(\tau_\pi)), g(f(\rho))), \mathbb{1}),$$

y

$$g(\tau_\pi) = \{(\text{p.o.}(\check{\imath}, g(\sigma_{\pi i})), \mathbb{1}) \mid i \in e\} = \{(\text{p.o.}(\check{\imath}, \sigma_{g(\pi i)}), \mathbb{1}) \mid i \in e\} = \tau_{\pi\circ g},$$

luego

$$g(\text{p.o.}(\text{p.o.}(\check{\rho}, \tau_\pi), f(\rho)), \mathbb{1}) = (\text{p.o.}(\text{p.o.}(\check{\rho}, \tau_{\pi\circ g}), (f \circ g)(\rho)), \mathbb{1}) \in \upsilon_\alpha,$$

luego $g(\upsilon_\alpha) \subset \upsilon_\alpha$, y aplicando esto a g^{-1} obtenemos la inclusión opuesta. Por consiguiente, $\upsilon_\alpha \in SM^{\mathbb{B}}$. Además

$$(\upsilon_\alpha)_G = \{(\rho, (\tau_\pi)_G, f(\rho)_G) \mid \rho \in SM^{\mathbb{B}} \cap \alpha \land$$
$$\bigvee e(e \subset \omega \text{ finito} \land \operatorname{sop}\rho \subset e \land f \in \Sigma_\omega^M \land \pi = f|_e)\} = \mathrm{Val}_\alpha.$$

El resto del enunciado no ofrece dificultad. ■

También es fácil ver que si $\alpha \leq \beta$ entonces Val_β extiende a Val_α. De hecho, el ordinal α sólo se introduce para que Val_α sea un conjunto y podamos asignarle un nombre, pero no interviene a la hora de determinar quién es $\mathrm{Val}_\alpha(\rho, t)$. Por lo tanto, podemos escribir simplemente $\mathrm{Val}(\rho, t)$, entendiendo que se trata de $\mathrm{Val}_\alpha(\rho, t)$ para α suficientemente grande.

La idea es que $\mathrm{Val}(\rho, t)$ es el conjunto que nombraría ρ si el nombre canónico σ_i nombrara a $t(i)$, de modo que, cuando le damos la asignación "correcta" s, entonces $\mathrm{Val}(\rho, s)$ es realmente el conjunto nombrado por ρ.

De este modo, desde N se pueden calcular los valores de los nombres a partir de las asignaciones s, pero hay que tener presente que, aunque cada una de ellas está en N, no son definibles en N, de modo que, si definimos s^n como la asignación "verdadera" de dominio n, no es cierto que la sucesión $\{s^n\}_{n\in\omega}$ esté en N. Por lo tanto, el cálculo de valores de nombres en N presenta ciertas restricciones esenciales de finitud.

Notemos también que no hemos demostrado que las sucesiones Val_α sean definibles en N, por lo que no podemos hablar de una fórmula metamatemática "Val" que determine una clase en N que extienda a todas las funciones Val_α. Dicha fórmula puede definirse en $M[G]$, pero ahí puede hacerse de forma mucho más directa y simple. No obstante, la función Val sí que es definible a efectos del cálculo de valores booleanos de fórmulas:

Si $\mathrm{rang}(\rho) < \alpha$ y τ es un nombre canónico de una asignación, se cumple que

$$\eta_G = \mathrm{Val}(\rho, \tau_G) \leftrightarrow \eta_G = (\upsilon_\alpha)_G((\check{\rho}_G, \tau_G)),$$

luego si definimos

$$\|\eta = \mathrm{Val}(\rho, \tau)\|_S \equiv \|\eta = \upsilon_\alpha(\check{\rho}, \tau)\|_S$$

se cumple

$$\|\eta = \mathrm{Val}(\rho, \tau)\|_S \in G \leftrightarrow \eta_G = \mathrm{Val}(\rho, \tau_G),$$

por lo que el teorema fundamental vale para fórmulas ϕ que contengan como subfórmulas atómicas subfórmulas de tipo $x = \mathrm{Val}(y, z)$ (en la prueba del teorema 8.20 por inducción sobre la longitud de ϕ podemos tomar la equivalencia precedente como un paso del argumento inductivo).

Notemos que si una expresión $\|\phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\|_S$ contiene subfórmulas de tipo $\eta = \mathrm{Val}(\rho, \tau)$, en realidad $\|\phi\|_S$ contiene un parámetro υ_α que no explicitamos, pero teniendo en cuenta que υ_α tiene soporte vacío, su presencia no afecta a la hora de aplicar resultados como que

$$f(\|\phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\|_S) = \|\phi(f(\tau_1), \ldots, f(\tau_n))\|_S,$$

o como el teorema siguiente, en el que hay que considerar los soportes de todos los nombres involucrados en ϕ. Más concretamente, el teorema afirma que para determinar si N cumple una determinada afirmación sólo necesitamos considerar condiciones que aporten información sobre los conjuntos genéricos correspondientes al soporte de los nombres involucrados:

Teorema 10.9 *Si $e \subset \omega$ finito es un soporte para $\tau_1, \ldots, \tau_n \in SM^{\mathbb{B}}$ y $p \in \mathbb{P}$ cumple $p \Vdash_S \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, entonces $p : e \Vdash_S \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$.*

DEMOSTRACIÓN: En caso contrario, existiría un filtro genérico G tal que $p : e \in G$ pero en la extensión simétrica correspondiente se cumpliría $\neg\phi$, luego existiría un $q \leq p : e$ tal que $q \Vdash_S \neg\phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$. Sean $e_1 = \operatorname{sop} p$, $e_2 = \operatorname{sop} q$. Entonces existe $f \in \operatorname{Est}(e)$ tal que $e_1 \cap f[e_2] \subset e$. Así, $\neg p \perp f(q)$ y tenemos que $f(q) \Vdash_S \neg\phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, puesto que $f \in \operatorname{Est}(e)$, pero entonces una extensión común de p y $f(q)$ debería forzar ϕ y $\neg\phi$, contradicción. ■

Nota En las condiciones del teorema anterior se deduce inmediatamente que $\|\phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\|_S \in \mathbb{B}_e$. En particular, si todos los nombres involucrados tienen soporte vacío, entonces $\|\phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\|_S = \mathbb{0}, \mathbb{1}$. ■

Demostramos ahora un resultado nada trivial, que muestra que podemos reducir todavía más el soporte de un nombre si estamos dispuestos a cambiarlo por otro equivalente:

Teorema 10.10 *Sean τ_1, $\tau_2 \in SM^{\mathbb{B}}$, sea $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \Vdash_S \tau_1 = \tau_2$. Entonces existe $\tau \in SM^{\mathbb{B}}$ con soporte contenido en $\operatorname{sop} \tau_1 \cap \operatorname{sop} \tau_2$ tal que $p \Vdash_S \tau_1 = \tau$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $e_1 = \operatorname{sop} \tau_1$ y $e_2 = \operatorname{sop} \tau_2$. Sea $e = e_1 \cap e_2$. Por el teorema 10.9 podemos cambiar p por $p : (e_1 \cup e_2)$ y suponer que $\operatorname{sop} p \subset e_1 \cup e_2$.

En el conjunto $SM^{\mathbb{B}} \cap V_{\operatorname{rang} \tau_1}$ consideramos la relación de equivalencia

$$\rho_1 \sim \rho_2 \leftrightarrow \bigvee f \in \operatorname{Est}(e)\ \rho_1 = f(\rho_2).$$

Por el teorema 10.6, en cada clase de equivalencia podemos elegir siempre un ρ^* cuyo soporte $e^* = \operatorname{sop} \rho^*$ cumpla $e^* \cap (e_1 \cup e_2) \subset e$. Vamos a comprobar que, para cualquier otro elemento de la clase, que será de la forma $\rho = f(\rho^*)$, con $f \in \operatorname{Est}(e)$, el valor

$$\tau(\rho) = f((p \wedge \|\rho^* \in \tau_1\|_S) : (e^* \cup e))$$

es independiente de la elección de ρ^* o de f. Esto significa que si $f'(\rho') = f(\rho^*)$, con la condición de que $e' = \operatorname{sop} \rho'$ y $e^* = \operatorname{sop} \rho^*$ cumplan ambos que

$$e' \cap (e_1 \cup e_2) \subset e, \qquad e^* \cap (e_1 \cup e_2) \subset e,$$

entonces

$$f'((p \wedge \|\rho' \in \tau\|_S) : (e' \cup e)) = f((p \wedge \|\rho^* \in \tau\|_S) : (e^* \cup e)).$$

Equivalentemente, considerando $g = f' \circ f^{-1}$, basta probar que si $g \in \operatorname{Est}(e)$ cumple $\rho^* = g(\rho')$, entonces

$$g((p \wedge \|\rho' \in \tau_1\|_S) : (e' \cup e)) = (p \wedge \|\rho^* \in \tau_1\|_S) : (e^* \cup e).$$

Tenemos que $g[e'] = e^*$ y, como g fija a los elementos de e, se cumple que $g[e' \setminus e] = e^* \setminus e$, por lo que claramente podemos construir g^* de manera que $g^*|_{e' \cup e} = g|_{e' \cup e}$ y $g^* \in \operatorname{Est}(e_1 \cup e_2)$.

La primera condición hace que $g^*(\rho') = g(\rho') = \rho^*$ y

$$g^*((p \wedge \|\rho' \in \tau_1\|_S) : (e' \cup e)) = g((p \wedge \|\rho' \in \tau_1\|_S) : (e' \cup e)),$$

pues g^* y g coinciden sobre los elementos de $\mathbb{B}_{e' \cup e}$, porque éstos son supremos de elementos de $\mathbb{P}_{e' \cup e}$, sobre los que g y g^* actúan igual. Esto significa que podemos sustituir g por g^* y suponer sin pérdida de generalidad que $g \in \mathrm{Est}(e_1 \cup e_2)$. Entonces $g(\tau_1) = \tau_1$, $g(p) = p$ y

$$\begin{aligned} g((p \wedge \|\rho' \in \tau_1\|_S) : (e' \cup e)) &= g((p \wedge \|\rho' \in \tau_1\|_S)) : g[e' \cup e] \\ &= (p \wedge \|\rho^* \in \tau_1\|) : (e^* \cup e). \end{aligned}$$

La primera igualdad se cumple porque g es un isomorfismo en $\mathbb{B}$ que restringido a $\mathbb{P}$ cumple $g(p : (e \cup e')) = g(p) : g[e \cup e']$.

En definitiva, tenemos bien definida una aplicación τ sobre $SM^{\mathbb{B}} \cap V_{\mathrm{rang}\,\tau_1}$, tal que si $\rho \in \mathcal{D}\tau$ y $\rho = f(\rho^*)$ con $f \in \mathrm{Est}(e)$ y $\mathrm{sop}(\rho^*) \cap (e_1 \cup e_2) \subset e$, entonces, para todo $g \in \mathrm{Est}(e)$, se cumple que

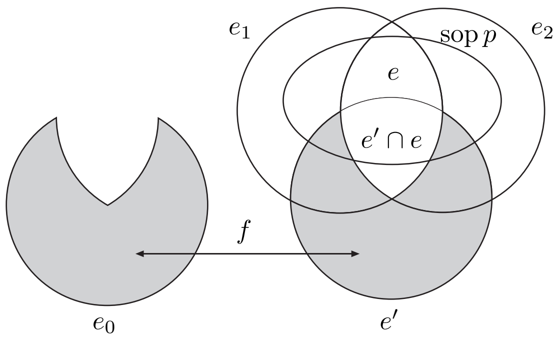
$$\tau(g(\rho)) = \tau((f \circ g)(\rho^*)) = g(f((p \wedge \|\rho^* \in \tau_1\|_S) : (e^* \cup e))) = g(\tau(\rho)).$$

Por lo tanto, $g(\tau) = \tau$, luego $\tau \in SM^{\mathbb{B}}$ y $\mathrm{sop}\,\tau \subset e$.

Falta probar que $p \Vdash_S \tau_1 = \tau$. Para ello basta ver que si un nombre $\rho \in SM^{\mathbb{B}}$ cumple $\mathrm{rang}\,\rho < \mathrm{rang}\,\tau_1$ entonces[2]

$$p \wedge \|\rho \in \tau_1\|_S = p \wedge \tau(\rho).$$

Sea $e' = \mathrm{sop}\,\rho$ y tomemos $e_0 \subset \omega$ equipotente con $e' \setminus e$ y disjunto con $e_1 \cup e_2 \cup e'$, sea $e^* = e_0 \cup (e' \cap e)$ y sea $f \in \mathrm{Est}(e \cup ((e_1 \cup e_2) \setminus e'))$ una permutación que intercambie los elementos de e_0 con los de $e' \setminus e$ (de modo que $f^{-1} = f$ y $f[e^*] = e'$). Sea $\rho^* = f(\rho)$ (con lo que también $\rho = f(\rho^*)$). Así $f[e'] \cap (e_1 \cup e_2) \subset e$ y, por definición, $\tau(\rho) = f((p \wedge \|\rho^* \in \tau_1\|_S) : (e^* \cup e))$.



[2]Aceptando esto, sea G un filtro genérico tal que $p \in G$. Entonces si $x \in \tau_{1G}$ es porque $x = \rho_G$, con $\rho \in \mathcal{D}\tau_1$ y $\|\rho \in \tau_1\|_S \in G$, luego $\tau(\rho) \in G$, luego $x = \rho_G \in \tau_G$. El recíproco se prueba igualmente, luego $\tau_{1G} = \tau_G$.

Lo que hemos de probar es que

$$p \wedge \|\rho \in \tau_1\|_S = p \wedge ((f(p) \wedge \|\rho \in f(\tau_1)\|_S) : (e' \cup e)).$$

Para probar la desigualdad $\leq$, tomamos $t \in \mathbb{P}$ tal que $t \leq p \wedge \|\rho \in \tau_1\|_S$, y basta probar que t extiende también al miembro derecho de la igualdad anterior.

Como $t \leq p$, se cumple que $t \Vdash_S \rho \in \tau_2$, luego por 10.9

$$t : (e' \cup e_2) \Vdash_S \rho \in \tau_2,$$

luego $(p \cup (t : (e' \cup e_2))) \Vdash_S \rho \in \tau_1$, y de nuevo por 10.9 pasamos a

$$(p \cup (t : (e' \cup e_2))) : (e' \cup e_1) \Vdash_S \rho \in \tau_1,$$

de donde

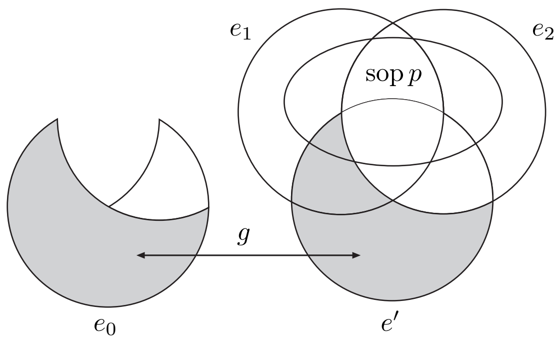
$$p \cup (t : ((e' \cup e_2) \cap (e' \cup e_1))) \Vdash_S \rho \in \tau_1,$$

pues esta condición extiende a la anterior, y esto es lo mismo que

$$q = p \cup (t : (e' \cup e)) \Vdash_S \rho \in \tau_1.$$

Observemos que $\operatorname{sop}(q \setminus p) \subset e' \cup e$, y esto hace que $\neg f(p) \perp q$.

Podemos tomar $g \in \operatorname{Est}(e_2)$ tal que $g|_{e_1} = f|_{e_1}$. Entonces $g(\tau_1) = f(\tau_1)$, $g(\tau_2) = \tau_2$ y $g(p) \subset f(p) \cup p$.



Como $p \Vdash_S \tau_1 = \tau_2$ se cumple que $g(p) \Vdash_S g(\tau_1) = \tau_2$, luego

$$f(p) \cup p \Vdash_S (\tau_1 = \tau_2 \wedge g(\tau_1) = \tau_2)$$

y, a su vez, $f(p) \cup p \Vdash_S f(\tau_1) = \tau_1$. Definimos

$$r = q \cup f(p) \leq p \cup f(p) \Vdash_S \tau_1 = f(\tau_1),$$

y como $r \leq q \Vdash_S \rho \in \tau_1$, también $r \Vdash_S \rho \in f(\tau_1)$. Por 10.9, de hecho

$$r : (e' \cup f[e_1]) \Vdash_S \rho \in f(\tau_1),$$

y así $r' = f(p) \cup r : (e' \cup f[e_1]) \leq f(p) \wedge \|\rho \in f(\tau_1)\|_S$. Por último:

$$t \leq p \cup t : (e' \cup e) = p \cup r' : (e' \cup e) \leq p \wedge (f(p) \wedge \|\rho \in f(\tau_1)\|_S) : (e' \cup e),$$

pues, teniendo en cuenta que $e' \cup e \subset e' \cup f[e_1]$, por una parte

$$t : (e' \cup e) \leq q : (e' \cup e) \leq r : (e' \cup e) \leq r' : (e' \cup e)$$

y recíprocamente:

$$r' : (e' \cup e) = r : (e' \cup e) = (q \cup f(p)) : (e' \cup e) \subset p \cup t : (e' \cup e).$$

Esto termina la prueba de la desigualdad

$$p \wedge \|\rho \in \tau_1\|_S \leq p \wedge ((f(p) \wedge \|\rho \in f(\tau_1)\|_S) : (e' \cup e)).$$

Para probar la desigualdad opuesta basta tomar una condición $t \in \mathbb{P}$ tal que $t \leq f(p) \wedge \|\rho \in f(\tau_1)\|_S$ y demostrar que $p \wedge t : (e' \cup e) \leq \|\rho \in \tau_1\|_S$.

Tenemos que $t \Vdash_S \rho \in f(\tau_1)$ y, como $t \leq f(p) \Vdash_S f(\tau_1) = f(\tau_2)$, también $t \Vdash_S \rho \in f(\tau_2)$. Por 10.9 esto implica que $t : (e' \cup f[e_2]) \Vdash_S \rho \in f(\tau_2)$, luego $f(p) \cup t : (e' \cup f[e_2]) \Vdash_S \rho \in f(\tau_1)$. Aplicando de nuevo 10.9

$$(f(p) \cup t : (e' \cup f[e_2])) : (e' \cup f[e_1]) \Vdash_S \rho \in f(\tau_1),$$

de donde

$$f(p) \cup (t : (e' \cup e)) \Vdash_S \rho \in f(\tau_1).$$

Si no se cumpliera que $p \wedge t : (e' \cup e) \leq \|\rho \in \tau_1\|_S$, existiría $\bar{t} \in \mathbb{P}$ tal que

$$\bar{t} \leq p \wedge t : (e' \cup e), \qquad \bar{t} \Vdash_S \rho \notin f(\tau_1).$$

Ahora, partiendo de $\bar{t} \leq p$ y $\bar{t} \Vdash_S \rho \notin f(\tau_1)$, aplicamos exactamente el mismo razonamiento que hemos empleado en la prueba de la desigualdad opuesta cambiando sistemáticamente $\|\rho \in -\|_S$ por $\|\rho \notin -\|_S$, y la conclusión es que

$$r = p \cup f(p) \cup \bar{t} : (e' \cup e) \Vdash_S \rho \notin f(\tau_1),$$

pero $r \leq f(p) \cup t : (e' \cup e) \Vdash_S \rho \in f(\tau_1)$, contradicción. ■

Esto nos permite definir el soporte de un conjunto de N. Ahora bien, como la numeración de los nombres $\{\sigma_i\}_{i\in\omega}$ está en M, pero la enumeración de los conjuntos genéricos $\{s_i\}_{i\in\omega}$ no está en N, para que se pueda hablar de soportes desde N necesitamos definirlos como subconjuntos de A y no de ω:

Definición 10.11 Si $x \in N$, diremos que $E \subset A$ finito es un *soporte* de x existe $e \subset \omega$ finito tal que $E = \{s_i \mid i \in e\}$ y $x = \tau_G$, para un cierto $\tau \in SM^{\mathbb{B}}$ tal que $\operatorname{sop} \tau \subset e$.

Del teorema anterior se sigue que la intersección de dos soportes de un conjunto x es también un soporte de x. En efecto, si E_1 y E_2 son soportes de x, esto significa que $x = \tau_{1G} = \tau_{2G}$, con $\operatorname{sop}\tau_j \subset e_j$ y $E_j = \{s_i \mid i \in e_j\}$, para $j = 1, 2$.

Entonces existe un $p \in G$ tal que $p \Vdash_S \tau_1 = \tau_2$, luego por el teorema anterior existe un $\tau \in SM^{\mathbb{B}}$ tal que $p \Vdash_S \tau_1 = \tau$ y $\operatorname{sop}\tau \subset e_1 \cap e_2$, pero entonces $x = \tau_G$, luego $E_1 \cap E_2$ es un soporte de x.

Por lo tanto, para cada $x \in N$, podemos definir su *soporte* $\operatorname{sop} x$ como el menor soporte de x.

Si observamos la construcción de τ en la prueba del teorema anterior vemos que si x admite un nombre τ_1 de rango menor que un límite λ, entonces τ tiene también rango menor que λ. Esto se traduce en que si $x \in N$ admite un soporte determinado por un nombre de rango menor que λ, entonces su soporte mínimo está determinado por un nombre de rango menor que λ, por lo que no es necesario considerar nombres de rangos mayores para encontrarlo.

Teorema 10.12 *Si $X \in N$, la aplicación $\operatorname{sop}_X : X \longrightarrow \mathcal{P}^f A$ que a cada $x \in X$ le asigna su soporte está en N.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $e \subset \omega$ finito, sea $\tilde{E} = \{(\sigma_i, \mathbb{1}) \mid i \in e\} \in SM^{\mathbb{P}}$. Sea $\lambda < \Omega^M$ un ordinal límite tal que todo elemento de X admita un nombre de rango menor que λ. Sea

$$\delta^\lambda = \{(\text{p.o.}(\rho, \tilde{E}), \mathbb{1}) \mid \rho \in SV^{\mathbb{B}} \cap V_\lambda \wedge e \in \mathcal{P}^f\omega \wedge \operatorname{sop}\rho \subset e\}^M.$$

Si $f \in \Sigma_\omega^M$, vemos que

$$(f(\text{p.o.}(\rho, \tilde{E})), f(\mathbb{1})) = (\text{p.o.}(f(\rho), \tilde{f}[e]), \mathbb{1}) \in \delta^\lambda,$$

luego $f(\delta) \subset \delta^\lambda$, y razonando con f^{-1} obtenemos la igualdad, luego $\delta^\lambda \in SM^{\mathbb{B}}$ (y tiene soporte vacío). Además $\delta_G^\lambda \cap (X \times \mathcal{P}^f A) \in N$ es la relación

$$\{(x, E) \in X \times \mathcal{P}^f A \mid E \text{ es un soporte de } x\}.$$

Como esta relación está en N, es claro que a partir de ella podemos definir la función del enunciado. ■

Nota Observemos que, dado cualquier $\tau \in SM^{\mathbb{B}}$, tomando $\lambda > \operatorname{rang}\tau$, se cumple que

$$\rho_G \in \operatorname{sop}\tau_G \leftrightarrow \bigwedge E \in \mathcal{P}^f A((\tau_G, E) \in \delta_G^\lambda \rightarrow \rho_G \in E)),$$

por lo que podemos definir

$$\|\rho \in \operatorname{sop}\tau\|_S \equiv \|\bigwedge E \in \mathcal{P}^f \sigma((\tau, E) \in \delta^\lambda \rightarrow \rho \in E))\|_S,$$

que es independiente de la elección de λ, y se cumple que

$$\|\rho \in \operatorname{sop}\tau\|_S \in G \leftrightarrow \rho_G \in \operatorname{sop}\tau_G.$$

A su vez, esto se traduce que el teorema fundamental sigue siendo válido para fórmulas que incluyan subfórmulas atómicas de tipo $\rho \in \operatorname{sop}\tau$. Como en el caso de $\mathrm{Val}(\rho, \tau)$, las expresiones $\|\phi\|_S$ para fórmulas que contienen subfórmulas atómicas de este tipo contienen un parámetro δ^λ que no hacemos explícito, pero como estos nombres tienen soporte vacío no son relevantes a la hora de aplicar automorfismos. ■

Conviene asignar nombres canónicos a los subconjuntos de A:

Definición 10.13 Si $e \subset \omega$ es finito, definimos

$$\tilde{e} = \{(\sigma_i, \mathbb{1}) \mid i \in e\} \in SM^{\mathbb{P}},$$

de modo que $\tilde{e}_G = \{s_i \mid i \in e\} \in N$.

Aunque nos proponemos demostrar que N cumple el teorema de los ultrafiltros, con lo que tenemos probado hasta aquí podemos demostrar un resultado más débil que, no obstante, ilustra el interés de los conceptos que hemos introducido:

Teorema 10.14 *En N todo conjunto puede ser totalmente ordenado.*

DEMOSTRACIÓN: Recordemos [TC 5.92] que $\mathcal{P}\omega$ puede ser totalmente ordenado, luego $A \subset \mathcal{P}\omega$ también (por un orden definible explícitamente en N).

Sea $X \in N$ y fijemos un ordinal límite λ tal que todo elemento de X tenga un nombre de rango menor que λ. Por el teorema anterior sabemos que la aplicación $\operatorname{sop} : X \longrightarrow \mathcal{P}^f A$ está en N. Dado $x \in X$, consideramos

$$\operatorname{sop} x = E^x = \{t_0^x, \ldots, t_{n-1}^x\},$$

donde la enumeración puede tomarse en N y podemos elegirla concretamente como la única que es creciente respecto al orden de A. Con esto tenemos definida una asignación t^x, de modo que la aplicación $x \mapsto t^x$ está en N.

Ahora observamos que existe un $\rho \in SM^{\mathbb{B}} \cap V_\lambda$ tal que $\mathrm{Val}_\lambda(\rho, t^x) = x$.

En efecto, sea $\pi : n \longrightarrow \omega$ la aplicación que determina t^x, es decir, tal que $t_i^x = s_{\pi i}$. Por definición de soporte de un conjunto, $e = \pi[n]$ es el soporte de un nombre de x, es decir, que $x = \rho_{0G}$, con $\rho_0 \in SM^{\mathbb{B}} \cap V_\lambda$ y $\operatorname{sop}\rho_0 = e$.

Sea $f \in \Sigma_\omega^M$ tal que $f|_n = \pi$ y sea $\rho = f^{-1}(\rho_0)$. Entonces

$$\mathrm{Val}_\lambda(\rho, t^x) = f(f^{-1}(\rho_0))_G = \rho_{0G} = x.$$

Notemos que π no puede calcularse en N a partir de x, pero no importa. Lo cierto es que existe un $\rho \in SM^{\mathbb{B}}$ tal que $\mathrm{Val}_\lambda(\rho, t^x) = x$ y teniendo en cuenta que $SM^{\mathbb{B}} \subset M = L^N$, en N podemos definir la aplicación $F : X \longrightarrow L$ que a cada $x \in X$ le asigna el menor nombre ρ (respecto al orden constructible) tal que $\mathrm{Val}_\lambda(\rho, t^x) = x$.

Por último, la aplicación $S : X \longrightarrow \mathcal{P}A \times L$ dada por $S(x) = (\operatorname{sop} x, F(x))$ es inyectiva, pues a partir de $\operatorname{sop} x$ se determina t^x y a partir de t^x y $F(x)$ se determina x.

Como $\mathcal{P}A$ y L pueden ser totalmente ordenados en N, el orden lexicográfico determina a través de S un orden total en X. ■

Así pues, a partir de que todo conjunto puede ser totalmente ordenado no puede probarse que todo conjunto puede ser bien ordenado.

Terminamos esta sección con algunos resultados adicionales que vamos a necesitar.

Definición 10.15 Si $E \subset A$ es finito, definimos $N_E = \{x \in N \mid \operatorname{sop} x \subset E\}$. Este conjunto es una clase en $M[G]$ (es decir, es definible mediante una fórmula relativizada a $M[G]$) y es localmente definible en N, en el sentido de que si $X \in N$ entonces

$$X_E = N_E \cap X = \{x \in X \mid \operatorname{sop}_X(x) \subset E\} \in N.$$

Más aún, según hemos visto en la prueba del teorema anterior, en N podemos definir una aplicación inyectiva $S|_{X_E} : X_E \longrightarrow \mathcal{P}E \times L$. Es fácil ver que, de hecho, la prueba se puede modificar ligeramente para obtener una aplicación inyectiva $X_E \longrightarrow L$ o, alternativamente, podemos obtenerla a partir de $S|_{X_E}$ biyectando $\mathcal{P}E$ con su cardinal (finito). En cualquier caso, la conclusión es que X_E es bien ordenable en N.

Teorema 10.16 *Si $E \subset A$ es finito, entonces $\mathcal{P}^f N_E \subset N_E$.*

Demostración: Sea $E = \{s_i \mid i \in e\}$ y tomemos $x \subset N_E$ finito. Cada $u \in x$ es de la forma $(\tau_u)_G$, para cierto $\tau_u \in SM^{\mathbb{B}}$ tal que $\operatorname{sop} \tau_u \subset e$. Entonces $x = \tau_G$, donde $\tau = \{(\tau_u, \mathbb{1}) \mid u \in x\} \in SM^{\mathbb{B}}$ y $\operatorname{sop} \tau \subset e$. (Notemos que $\tau \in M$ porque x es finito.) Por lo tanto $x \in N_E$. ■

Más aún, todo conjunto definible a partir de parámetros en N_E está en N_E:

Teorema 10.17 *Si $E \subset A$ es finito, $x_1, \ldots, x_n \in N_E$ y $x \in N$ cumple*

$$\bigwedge y \in N(\phi^N(y, x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow y = x),$$

entonces $y \in N_E$.

Demostración: Pongamos que $E = \{s_i \mid i \in e\}$, con $e \subset \omega$, de modo que $x_k = \tau_{kG}$ con $\tau_k \in SM^{\mathbb{B}}$ y $\operatorname{sop}(\tau_k) \subset e$. Sea $\operatorname{sop} x = E' = \{s_i \mid i \in e'\}$ y sea $x = \tau_G$, donde $\operatorname{sop} \tau = e'$. Entonces existe un $p \in \mathbb{P}$ tal que

$$p \Vdash_S \overset{1}{\bigvee} x\, \phi(x, \tau_1, \ldots, \tau_n) \land \phi(\tau, \tau_1, \ldots, \tau_n) \land \operatorname{sop} \tau = \tilde{e}',$$

y podemos tomarlo de hecho tal que $p \in \mathbb{P}_{e \cup e'}$. Sea ahora $f \in \operatorname{Est}(e)$ tal que $f[e'] \cap e' \subset e$. Entonces

$$f(p) \Vdash_S \overset{1}{\bigvee} x\, \phi(x, \tau_1, \ldots, \tau_n) \land \phi(f(\tau), \tau_1, \ldots, \tau_n) \land \operatorname{sop} f(\tau) = \widetilde{f[e']},$$

pero claramente $f(p)$ es compatible con p, luego podemos tomar $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p \wedge r \leq f(p)$. Entonces

$$r \Vdash_S \overset{1}{\bigvee} x\, \phi(x) \wedge \phi(\tau) \wedge \phi(f(\tau)),$$

luego $r \Vdash_S \tau = f(\tau) \wedge \operatorname{sop} \tau = \tilde{e}' \wedge \operatorname{sop} f(\tau) = \widetilde{f[e']}$, luego $r \Vdash_S \tilde{e}' = \widetilde{f[e']}$, pero esto sólo es posible si $e' = f[e']$, con lo que $e' \subset e$ y $E' \subset E$, luego $x \in N_E$. ■

En particular, X_E puede definirse en N a partir de X, E y de la relación "E es un soporte de x", que tiene soporte vacío, luego si $X \in N_E$, entonces $X_E \in N_E$.

10.2 TU no implica AE

Pasamos ya a demostrar que el modelo N que hemos estudiado en la sección precedente cumple el teorema de los ideales primos (luego también el teorema de los ultrafiltros, que es equivalente). Necesitamos un resultado previo.

Para cada $q \in \omega^{<\omega}$ sea $A_q = \{s \in A \mid \chi_s|_{\ell(q)} = q\} \in N$. Notemos que $A_q \neq \varnothing$, pues el conjunto

$$D = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee i \in \omega\ \{i\} \times q \subset p\} \in M$$

es denso en $\mathbb{P}$, luego corta al filtro genérico G. Como cada q admite infinitas prolongaciones, de hecho A_q es infinito.

Observemos también que $\operatorname{sop} A_q = \varnothing$, pues $A_q = (\tau_q)_G$, donde

$$\tau_q = \{(\sigma_i, p) \mid i \in \omega \wedge p \in \mathbb{P} \wedge \{i\} \times q \subset p\} \in SM^{\mathbb{P}}$$

tiene soporte vacío.

Teorema 10.18 *Sean $E \subset A$ un conjunto finito, sean $x_1, \ldots, x_n \in N_E$, sea $m \in \omega$, sea $\{a_k\}_{k<m}$ una sucesión de elementos de $A \setminus E$ distintos dos a dos de modo que se cumpla una fórmula*

$$\phi^N(x_1, \ldots, x_n, \{a_k\}_{k<m}).$$

Entonces existe una sucesión $\{q_k\}_{k<m}$ de elementos de $\omega^{<\omega}$ tales que los conjuntos A_{q_k} son disjuntos dos a dos y disjuntos de E, $a_k \in A_{q_k}$ y si una sucesión $\{b_k\}_{k<m}$ cumple $b_k \in A_{q_k}$, entonces también $\phi^N(x_1, \ldots, x_n, \{b_k\}_{k<m})$.

Demostración: Sea $E = \{s_i \mid i \in e\}$, con $e \subset \omega$, sea $s : e \longrightarrow E$ la asignación dada por $s(i) = s_i$, sea τ su nombre canónico, de modo que $\operatorname{sop} \tau = e$, sea ρ_i un nombre de soporte contenido en e tal que $\rho_{iG} = x_i$ y, por consiguiente, $x_i = \operatorname{Val}(\rho_i, s)$, sea $\{i_k\}_{k<m}$ tal que $a_k = s_{i_k}$, sea

$$\pi = \{(\text{p.o.}(\check{k}, \sigma_{i_k}), \mathbb{1}) \mid k < m\} \in SM^{\mathbb{B}},$$

de modo que $\pi_G = \{a_k\}_{k<m}$, y sea $p \in G$ tal que

$$p \Vdash_S \phi(\mathrm{Val}(\rho_1, \tau), \ldots, \mathrm{Val}(\rho_n, \tau), \pi).$$

Tomemos $K \in \omega$ tal que los $\chi_{a_k}|_K$ y los $\chi_{s_i}|_K$ con $i \in e$ sean distintos dos a dos y $\mathcal{D}p \subset \omega \times K$. Veamos que tomando $q_k = \chi_{a_k}|_K$ se cumple lo pedido.

Ciertamente los conjuntos A_{q_i} son disjuntos dos a dos y disjuntos de E. Tomemos $b_k \in A_{q_k}$, digamos que $b_k = s_{j_k}$. Como $s_{j_k}|_K = s_{i_k}|_K \neq s_{i_{k'}}|_K$, para todo $k' \neq k$, vemos que $j_k \neq i_{k'}$, luego los conjuntos $\{i_k, j_k\}$ son disjuntos dos a dos y disjuntos de e, y podemos definir $h \in \mathrm{Est}(e)$ tal que $h(i_k) = j_k$, $h(j_k) = i_k$ y $h(u) = u$ para todo $u \in \omega$ distinto de un i_k o un j_k.

Esto implica que $h(p) \in G$. En efecto, tenemos que

$$h(p) = \{(h(u), n, r) \mid (u, n, r) \in p\}.$$

Sea $(u, n, r) \in p$. Si $u = i_k$, entonces $n < K$ y

$$f_G(h(u), n) = f_G(j_k, n) = s_{j_k}|_K(n) = s_{i_k}|_K(n) = f_G(u, n) = r,$$

e igualmente si $u = j_k$, y trivialmente si u es distinto de todos los i_k y j_k. Por lo tanto $h(p) \subset f_G$ y esto implica que $h(p) \in G$. Como

$$h(p) \Vdash_S \phi(\mathrm{Val}(\rho_1, \tau), \ldots, \mathrm{Val}(\rho_n, \tau), h(\pi)),$$

y claramente $h(\pi) = \{(\mathrm{p.o.}(\check{k}, \sigma_{j_k}), \mathbb{1}) \mid k < m\}$, con lo que $h(\pi)_G = \{b_k\}_{k<m}$, luego concluimos que se cumple $\phi^N(x_1, \ldots, x_n, \{b_k\}_{k<m})$. ■

En definitiva, si unos conjuntos genéricos a_k cumplen una determinada propiedad, podemos reemplazarlos por otros conjuntos genéricos cualesquiera que no alteren $\chi_{a_k}|_K$ para K suficientemente grande y se sigue cumpliendo la misma propiedad.

Teorema 10.19 *N cumple el teorema de los ideales primos.*

Demostración: Sea $\mathbb{C} = (C, \wedge, \vee, ') \in N$ un álgebra de Boole. Sea $E \subset A$ finito tal que $\mathrm{sop}\,\mathbb{C} \subset E$, es decir, tal que $\mathbb{C} \in N_E$. Entonces por 10.17 tenemos también que C, $\wedge$, $\vee$, $'$, $\mathbb{0}$, $\mathbb{1} \in N_E$. A partir de aquí seguiremos el convenio usual de no distinguir entre $\mathbb{C}$ y C.

Tomemos ahora un ordinal límite $\mu < \Omega^M$ suficientemente grande como para que $(\mathcal{P}\mathbb{C})^N \in X = V_\mu^N$. De nuevo por 10.17 tenemos que $(\mathcal{P}\mathbb{C})^N \in X_N$.

Sea $S = \{I \in X_E \mid I \text{ es un ideal de } \mathbb{C}\} \in N$. Obviamente $\{\mathbb{0}\} \in S \neq \varnothing$. Como X_E puede ser bien ordenado en N, tenemos que S tiene una función de elección en N, y esto basta para demostrar que S tiene un elemento maximal.

En efecto, razonando en N, podemos definir por recurrencia $F(0) = \{\mathbb{0}\}$ y, supuesto definido $F(\delta) \in S$, definimos $F(\delta + 1)$ como el mínimo elemento de S que contiene estrictamente a $F(\delta)$ si existe tal ideal y $F(\delta + 1) = F(\delta)$ en caso contrario. Finalmente $F(\lambda) = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} F(\delta)$.

La última parte requiere comprobar que $F(\lambda) \in S$. Ciertamente es un ideal de $\mathbb{B}$, porque es una unión de una cadena de ideales. También es obvio que $F(\lambda) \in V_\mu$. Por último basta observar que $F(\lambda)$ es el único conjunto $x \in N$ que cumple una definición $\phi^N(x, X_E, \lambda)$. (La fórmula afirma que existe una función $F : \lambda + 1 \longrightarrow X$ tal que $F(\lambda) = x \wedge F(0) = \{\mathbb{O}\}$, etc.). Entonces 10.17 nos da que $F(\lambda) \in X_E$, luego $F(\lambda) \in S$.

Como no podemos acabar con una función $F : \Omega \longrightarrow S$ inyectiva, la sucesión tiene que estabilizarse, y el ideal en que lo haga será maximal en S.

A partir de aquí fijamos un ideal I de $\mathbb{C}$ maximal en S, es decir, maximal entre los ideales de $\mathbb{C}$ con soporte contenido en E. Vamos a probar que I es un ideal primo de $\mathbb{C}$. En caso contrario existe $x \in \mathbb{C}$ tal que $x \notin I$ y $x' \notin I$.

Sea $E' \subset A$ finito tal que $\operatorname{sop} x \subset E'$. Podemos suponer que $E \subset E'$. No puede darse la igualdad, pues en tal caso el ideal generado por $I \cup \{x\}$ estaría en S y contradiría la maximalidad de I.

Sea $E = \{s_i \mid i \in e\}$ y sea $E' = E \cup \{s_i \mid i \in e'\}$, donde $e \cap e' = \varnothing$. Sean $s : e \longrightarrow E$ y $s' : e' \longrightarrow E' \setminus E$ las asignaciones dadas por $s(i) = s_i$ y sea $x = \tau_G$, con $\operatorname{sop} \tau \subset e \cup e'$, de modo que $x = \operatorname{Val}(\tau, s \cup s')$. Sea $d : A^{e'} \longrightarrow N$ la aplicación dada por $d(t) = \operatorname{Val}(\tau, s \cup t)$. Así $d(s') = x$, con lo que

$$d(s') \in \mathbb{C} \wedge d(s') \notin I \wedge d(s')' \notin I.$$

Observemos que en esta fórmula (cambiando d por su definición), todos los parámetros que intervienen (aparte de s') están en N_E, pues son τ ($= \check{\tau}_G$, que tiene soporte $\varnothing$), s, I y $\mathbb{C}$ (y las operaciones de $\mathbb{C}$). Componiendo s' con una enumeración de e' podemos aplicar el teorema 10.18, que nos da una aplicación $q^0 : e' \longrightarrow \omega^{<\omega}$ de modo que los conjuntos $\{A_{q_i^0}\}_{i \in e'}$ son disjuntos dos a dos y disjuntos de E, además $s'_i \in A_{q_i^0}$ y si $t \in \prod\limits_{i \in e'} A_{q_i^0}$, entonces

$$d(t) \in \mathbb{C} \setminus I \wedge d(t)' \in \mathbb{C} \setminus I.$$

Definimos $S_i^0 = \{q_i^0\}$, para $i \in e'$. Éste es el primer paso de la construcción de una sucesión de sucesiones finitas $\{S_i^m\}_{i \in e'}$, para $m < \omega$, de modo que se cumplan las propiedades siguientes:

a) S_i^m es un subconjunto finito de $\omega^{<\omega}$ formado por elementos incompatibles entre sí, es decir, tales que los conjuntos A_q con $q \in S_i^m$ son disjuntos dos a dos.

b) Cada elemento de S_i^{m+1} extiende a un elemento de S_i^m y todo elemento de S_i^m tiene al menos una extensión a S_i^{m+1}. Equivalentemente, para cada $q \in S_i^{m+1}$, el conjunto A_q está contenido en un A_r, para un $r \in S_i^m$ y cada A_r contiene un A_q.

c) Si $r \in \prod_{i\in e'} S_i^m$ y $F \subset A$ es un conjunto finito que contiene exactamente un elemento de cada elemento de $\bigcup_{i\in e'} \{A_q \mid q \in S_i^{m+1}\}$, entonces[3]

$$\bigwedge\{d(t) \mid t \in \prod_{i\in e'} (A_{r_i} \cap F)\} \in I, \qquad \bigwedge\{d(t)' \mid t \in \prod_{i\in e'} (A_{r_i} \cap F)\} \in I.$$

Observemos que $\{S_i^0\}_{i\in e'}$ cumple la propiedad a), que es la única que no involucra términos de la sucesión correspondientes a valores $m > 0$. Supongamos definidas las sucesiones $\{S_i^m\}_{i\in e'}$ para $m \leq n$ de modo que se cumplan las propiedades anteriores. En particular, todos los A_q con $q \in S_i^m$ están contenidos en $A_{q_i^0}$. Por lo tanto, si $r \in \prod_{i\in e'} S_i^n$, entonces $\prod_{i\in e'} A_{r_i} \subset \prod_{i\in e'} A_{q_i^0}$. Por lo tanto:

$$\bigwedge r \in \prod_{i\in e'} S_i^n \bigwedge t \in \prod_{i\in e'} A_{r_i}\ (d(t) \in \mathbb{C} \setminus I \wedge d(t)' \in \mathbb{C} \setminus I).$$

Sea J el ideal (no necesariamente propio) generado por

$$C = I \cup \{d(t) \mid t \in \prod_{i\in e'} A_{r_i}\},$$

es decir,

$$J = \{b \in \mathbb{C} \mid \bigvee Y \in \mathcal{P}^f C\ b \leq \bigvee Y\}.$$

Observemos que $J \in N_E$, pues cada $A_{r_i} \in N_E$ (porque tiene soporte vacío), luego $\{A_{r_i}\}_{i\in e'} \in N_E$ (aplicando varias veces 10.16), luego $C \in N_E$ (pues se define a partir de I, $\mathbb{C}$, τ, $s \in N_E$ y de $\{A_{r_i}\}_{i\in e'}$ (y las operaciones de $\mathbb{C}$), luego $J \in N_E$ (pues se define a partir de $\mathbb{C}$ y C (y las operaciones de $\mathbb{C}$).

Por lo tanto, $J \in X_E$ y contiene estrictamente a I, luego no puede ser un ideal (propio) de $\mathbb{C}$, ya que entonces sería $J \in S$ en contradicción con la maximalidad de I. Concluimos, pues, que $J = \mathbb{C}$.

Consecuentemente, existe $F_1''(r) \subset \prod_{i\in e'} A_{r_i}$ finito y $u \in I$ tales que

$$\mathbb{1} = u \vee \bigvee_{t\in F_1''(r)} d(t),$$

de donde $\bigwedge_{t\in F_1''(r)} d(t)' = u \wedge \bigwedge_{t\in F_1''(r)} d(t)' \in I$. Razonando análogamente con el ideal generado por

$$C' = I \cup \{d(t)' \mid t \in \prod_{i\in e'} A_{r_i}\}$$

obtenemos un conjunto finito $F_2''(r) \subset \prod_{i\in e'} A_{r_i}$ tal que $\bigwedge_{t\in F_2''(r)} d(t) \in I$. Sea $F_j'(r) = \bigcup_{t\in F_j''(r)} \mathcal{R}t \subset A$, para $j = 1, 2$ y sea

$$F' = \bigcup\{F_1'(r) \cup F_2'(r) \mid r \in \prod_{i\in e'} S_i^n\} \subset \bigcup_{i\in e'} \bigcup_{q\in S_i^n} A_q.$$

[3]Observemos que $A_{r_i} \cap F = \bigcup_{q\in S_i^{m+1}} (A_q \cap F)$, donde cada $A_q \cap F$ tiene un único elemento.

Así, para $j = 1, 2$, $F_j''(r) \subset \prod\limits_{i\in e'} (A_{r_i} \cap F')$. Consecuentemente,

$$\bigwedge r \in \prod_{i\in e'} S_i^n \, (\bigwedge\{d(t)' \mid t \in \prod_{i\in e'} (A_{r_i} \cap F')\} \in I \wedge \bigwedge\{d(t) \mid t \in \prod_{i\in e'} (A_{r_i} \cap F')\} \in I).$$

Esta propiedad de F' se conserva si le añadimos elementos, luego podemos suponer que F' contiene al menos un elemento de cada A_q, con $q \in S_i^n$, $i \in e'$. Todos los parámetros que aparecen en la fórmula anterior (salvo F') están en N_E (el único que no había aparecido antes es $\prod\limits_{i\in e'} S_i^n \in M \subset N_E$). Por lo tanto, podemos aplicar el teorema 10.18 a una enumeración de F' para concluir que existe una sucesión $\{q_k\}_{k<l}$ de elementos de $\omega^{<\omega}$ de modo que los conjuntos A_{q_k} son disjuntos dos a dos y F' consta exactamente de un elemento de cada uno de ellos, y si $F \subset A$ contiene exactamente un elemento de cada A_{q_k}, entonces

$$\bigwedge r \in \prod_{i\in e'} S_i^n \, (\bigwedge\{d(t)' \mid t \in \prod_{i\in e'} (A_{r_i} \cap F)\} \in I \wedge \bigwedge\{d(t) \mid t \in \prod_{i\in e'} (A_{r_i} \cap F)\} \in I).$$

Más aún cada $s \in F'$ está en un único A_q con $q \in S_i^n$, para cierto i, y en la prueba de 10.18 se ve que podemos tomar el correspondiente q_k de longitud arbitrariamente grande, de modo que $q \subset q_k$ o, lo que es lo mismo, $A_{q_k} \subset A_q$. Definimos

$$S_i^{n+1} = \{q_k \mid k < l \wedge \bigvee q \in S_i^n \; q \subset q_k\}.$$

Así, por construcción, $\bigcup\limits_{i\in e'} S_i^{n+1} = \{q_k \mid k < l\}$, cada $q' \in S_i^{n+1}$ extiende a un $q \in S_i^n$ y cada q tiene al menos una extensión q'. Con esto tenemos asegurado que $\{S_i^{n+1}\}_{i\in e'}$ cumple las propiedades a), b), c).

En la construcción de $\{S_i^{n+1}\}_{i\in e'}$ hemos hecho algunas elecciones (finitas) arbitrarias, por lo que en principio no tenemos garantizado que la sucesión completa $\{\{S_i^m\}_{i\in e'}\}_{m\in\omega}$ esté en N. Ahora, bien, hemos probado, por inducción, que para cada n existe una sucesión finita $\{\{S_i^m\}_{i\in e'}\}_{m\leq n}$ que cumple las propiedades a), b), c), y como cada $\{S_i^m\}_{i\in e'} \in M = L^N$ (porque M es cerrado para subconjuntos finitos), podemos redefinir la sucesión completa partiendo de la sucesión $\{S_i^0\}_{i<e'}$ que hemos fijado y tomando como $\{S_i^{n+1}\}_{i\in e'}$ la menor sucesión respecto del orden constructible que hace que se cumplan las propiedades a), b), c) para $n+1$ supuesto que se cumplan para n. Así sí que podemos concluir que la construcción puede realizarse en N.

Ahora definimos $T_i = \bigcup\limits_{m\in\omega} S_i^m$, que claramente es un árbol con la inclusión, tiene altura ω, su nivel m-simo es S_i^m, tiene un único tallo q_i^0 y cada nodo de altura m tiene al menos otro nodo por encima.

En este punto tenemos que interrumpir la prueba para enunciar un resultado auxiliar que demostraremos en la sección 10.4:

Definición 10.20 Si T es un ω-árbol (un árbol de altura ω con niveles finitos), diremos que un conjunto $A \subset T$ *domina* a otro conjunto $B \subset T$ si todo elemento de B está por debajo de un elemento de A.

Representaremos $T|_n = \{x \in T \mid \operatorname{alt} x \leq n\}$.

Si $m \in \omega$, diremos que A es *m-dominante* si existe un $x \in T$ de altura m tal que A domina el conjunto $\{y \in \operatorname{Niv}_{m+1}(T) \mid x \leq y\}$.

Si $\{T_i\}_{i<k}$ es una familia de ω-árboles, un *producto m-dominante* es un conjunto de la forma $\prod\limits_{i<k} D_i$, donde cada D_i es m-dominante en T_i.

Teorema 10.21 (Halpern-Läuchli) *Si $\{T_i\}_{i<k}$ es una familia de ω-árboles sin nodos maximales, existe un $n \in \omega$ tal que si*

$$\prod_{i<k} T_i|_n = Q_1 \cup Q_2, \qquad Q_1 \cap Q_2 = \varnothing,$$

entonces uno de los conjuntos Q_1 o Q_2 contiene un producto m-dominante, para un $m < n$.

Continuación de la demostración de 10.19: Sea $n \in \omega$ según el teorema anterior aplicado a los árboles $\{T_i\}_{i\in e'}$. Sea H una función de elección sobre

$$W = \bigcup_{i\in e'} \bigcup_{m\leq n} \{A_q \mid q \in S_i^n\}.$$

Sea $y_i = \{H(A_q) \mid q \in \bigcup\limits_{m\leq n} S_i^n\} \subset A$, sea $P = \prod\limits_{i\in e} y_i$. Vamos a probar que si $z \subset P$ entonces

$$\bigwedge_{t\in z} d(t) \in I \quad \text{o} \quad \bigwedge_{t\in P\setminus z} d(t)' \in I.$$

Admitiendo esto, la conclusión es ya sencilla, pues

$$\mathbb{1} = \bigwedge_{t\in P} (d(t) \vee d(t)') = \bigvee_{f\in 2^P} \bigwedge_{t\in P} d(t)^{(f(t))},$$

donde, para cada $b \in \mathbb{B}$, representamos $b^{(1)} = b$ y $b^{(0)} = b'$. Definimos

$$z_f = \{t \in P \mid f(z) = 1\},$$

y así llegamos a una contradicción:

$$\mathbb{1} = \bigvee_{f\in 2^P} \big(\bigwedge_{t\in z_f} d(t) \wedge \bigwedge_{t\in P\setminus z_f} d(t)'\big) \in I.$$

Fijamos, pues $z \subset P$ y definimos

$$Q_1 = \{g \in \prod_{i\in e'} T_i|_n \mid \{H(A_{g_i})\}_{i\in e'} \in z\}, \qquad Q_2 = \prod_{i\in e'} T_i|_n \setminus Q_1.$$

Por el teorema de Halpern-Läuchli o bien Q_1 o bien Q_2 contiene un producto m-dominante, $V = \prod\limits_{i\in e'} D_i$ para cierto $m < n$. Esto significa que existe $r_i \in S_i^m$ tal que para todo $q \in S_i^{m+1}$ que extienda a r_i existe un $q' \in D_i$ que extiende a q.

Definimos $f : \bigcup\limits_{i\in e'} S_i^{m+1} \longrightarrow A$ del modo siguiente: si $q \in S_i^{m+1}$ extiende a r_i, entonces $f(q) = H(A_{q'})$, donde $q' \in D_i$ es el elemento que extiende a q. En caso contrario $f(q)$ es cualquier elemento de A_q. Notemos que en ambos casos $f(q) \in A_q$.

Sea $F = \{f(q) \mid q \in \bigcup\limits_{i\in e'} S_i^{m+1}\}$. Así F contiene exactamente un elemento de cada elemento de $\bigcup\limits_{i\in e'} \{A_q \mid q \in S_i^{m+1}\}$, luego por la propiedad c) tenemos que

$$\bigwedge\{d(t) \mid t \in \prod_{i\in e'} (A_{r_i} \cap F)\} \in I, \qquad \bigwedge\{d(t)' \mid t \in \prod_{i\in e'} (A_{r_i} \cap F)\} \in I.$$

A partir de aquí tenemos que distinguir dos casos, según si V está contenido en Q_1 o en Q_2. Supongamos primero que $V \subset Q_1$. Basta demostrar que $\prod\limits_{i\in e'} (A_{r_i} \cap F) \subset z$, pues entonces $\bigwedge\limits_{t\in z} d(t) \in I$.

En efecto, si $t \in \prod\limits_{i\in e'} (A_{r_i} \cap F)$, entonces $t_i \in A_{r_i} \cap F$, luego $t_i = f(q_i)$, para cierto $q_i \in \bigcup\limits_{j\in e'} S_j^{m+1}$. Pero entonces $t_i \in A_{q_i}$ y, como $r_i \in S_i^m$, tiene que ser $r_i \subset q_i$, luego, de hecho, $q_i \in S_i^{m+1}$. Como q_i extiende a r_i, por definición de f resulta que $t_i = H(A_{q_i'})$, donde $q_i' \in D_i$ extiende a q_i. Tenemos así una sucesión $q' \in \prod\limits_{i\in e'} D_i = V \subset Q_1$, luego $t = \{H(A_{q_i'})\}_{i\in e'} \in z$.

Si $V \subset Q_2$ llamamos $z' = P \setminus z$ y demostramos que $\prod\limits_{i\in e'} (A_{r_i} \cap F) \subset z'$, con lo que concluimos que $\bigwedge\limits_{t\in P\setminus z} d(t)' \in I$. El razonamiento es idéntico, salvo que ahora llegamos a que $q' \in Q_2$, luego $t \notin z$, y de hecho, $t \in P \setminus z$. ■

Así pues, si ZF es consistente, a partir de TU no puede probarse ninguna de las formas del axioma de elección que fallan en el primer modelo de Cohen, como que $\mathcal{P}\omega$ puede ser bien ordenado, que todo conjunto infinito tiene un subconjunto numerable, etc.

10.3 Formas débiles de TU

Sabemos que el teorema de los ultrafiltros no puede demostrarse sin AE, pues implica, por ejemplo, que todo conjunto puede ser totalmente ordenado, o el axioma de elección para familias de conjuntos finitos. Sin embargo, cabría la posibilidad de que se pudiera demostrar sin AE la existencia de ultrafiltros en conjuntos sencillos, como ω. Obviamente todo conjunto no vacío X tiene ultrafiltros principales, es decir, ultrafiltros de la forma

$$U_x = \{A \in \mathcal{P}X \mid x \in A\},$$

pero, vamos a ver que sin AE no puede probarse que ω tenga ultrafiltros no principales.

Consideramos $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega \times \omega, 2, \omega)$ y, para cada $X \subset \omega \times \omega$, definimos $\pi_X \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ mediante

$$\pi_X(p)(m,n) = \begin{cases} p(m,n) & \text{si } (m,n) \notin X, \\ 1 - p(m,n) & \text{si } (m,n) \in X. \end{cases}$$

Se cumple entonces que $H = \{\pi_X \mid X \in \mathcal{P}(\omega \times \omega)\}$ es un subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P})$, pues $\pi_\varnothing$ es la identidad, $\pi_X^{-1} = \pi_X$ y $\pi_X \circ \pi_Y = \pi_{X \triangle Y}$.

Para cada $e \subset \omega$, definimos $\mathrm{Est}(e) = \{\pi_X \mid X \in \mathcal{P}\omega \wedge X \cap (e \times \omega) = \varnothing\}$, que es un subgrupo de H.

Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de los subgrupos K de H tales que existe $e \subset \omega$ finito de manera que $\mathrm{Est}(e) \subset K \subset H$. Es fácil ver que se trata de un filtro normal de subgrupos de H.

A partir de aquí relativizamos las definiciones anteriores a un modelo transitivo numerable M de ZFC, consideramos un filtro genérico G y la extensión simétrica $N = SM[G]$.

Teorema 10.22 *En el modelo N que acabamos de describir, $\mathcal{P}\omega$ no tiene ultrafiltros no principales.*

Demostración: Supongamos que $U \in N$ es un $(\text{ultrafiltro no principal})^N$ en ω. Sea $U = \tau_G$, con $\tau \in SM^{\mathbb{P}}$ y sea $p \in G$ tal que

$$p \Vdash_S \tau \text{ es un ultrafiltro no principal en } \omega.$$

Sea $e \subset \omega$ finito tal que $\mathrm{Est}(e) \subset \mathrm{Sim}(\tau)$. Sea $i \in \omega \setminus e$ y sea

$$\sigma_i = \{(\check{n}, p) \mid p \in \mathbb{P} \mid (i, n, 1) \in p\} \in SM^{\mathbb{P}}.$$

Así, $s_i = \sigma_{iG} \in N$ y $s_i \subset \omega$, luego o bien $s_i \in U$, o bien $\omega \setminus s_i \in U$.

Si se da el primer caso, existe un $q \in G$ tal que $q \Vdash_S \sigma_i \in \tau$. Sea $m_0 \in \omega$ tal que, para cada $m \geq m_0$, se cumple $(i, m) \notin \mathcal{D}q$ y sea

$$X = \{(i, m) \mid m \in \omega \wedge m \geq m_0\}.$$

Así $\pi_X(q) = q$ y $\pi_X \in \mathrm{Est}(e)$, luego $\pi_X(\tau) = \tau$. Por lo tanto,

$$q \Vdash_S \pi_X(\sigma_i) \in \tau,$$

luego $\pi_X(\sigma_i)_G \in U$, pero es claro que $\pi_X(\sigma_i)_G = \omega \setminus s_i$, con lo que tenemos una contradicción.

Lo mismo sucede si se da el segundo caso: tomamos una condición $q \in G$ tal que $q \Vdash_S \omega \setminus \sigma_i \in \tau$, elegimos m_0 y X del mismo modo, con lo que llegamos a que $q \Vdash_S \omega \setminus \pi_X(\sigma_i) \in \tau$, y así $\omega \setminus (\omega \setminus s_i) \in U$, es decir, $s_i \in U$, contradicción.

■

Sabemos [TC 10.8] que las dos afirmaciones siguientes son formas equivalentes de TU:

a) Toda álgebra de Boole tiene un ultrafiltro.

b) Todo filtro en un conjunto puede extenderse a un ultrafiltro.

Es obvio que b) no puede cambiarse por "todo conjunto (no vacío) tiene un ultrafiltro", pues ya hemos observado que la existencia de ultrafiltros (principales) en un conjunto (no vacío) es un teorema de ZF. Sin embargo, cabría pensar si TU es equivalente en ZF a que todo conjunto infinito tiene un ultrafiltro no principal. La respuesta es nuevamente negativa.

Para probarlo consideramos una variación mínima del modelo construido en el teorema 8.28, consistente en partir de $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(2 \times \omega_1 \times \omega_1 \times \omega, 2, \aleph_1)^M$.

Con las modificaciones obvias, tenemos conjuntos $a_{\alpha,\beta}$, $b_{\alpha,\beta} \in M[G]$, donde ahora $\alpha < \omega_1^M$, que a su vez definen conjuntos a_α, $b_\alpha \in \mathcal{PP}\omega$, $P_\alpha = \{a_\alpha, b_\alpha\}$ y $P = \{P_\alpha \mid \alpha < \omega_1^M\}$, todos los cuales tienen nombres canónicos en $M^{\mathbb{P}}$.

Definimos el grupo $H \subset (\Sigma_{2\times\omega_1\times\omega_1})^M$ de mismo modo, sin más que cambiar ω por ω_1^M, pero consideramos el filtro $\mathcal{F}$ de soportes numerables, es decir, un subgrupo K de H está en $\mathcal{F}$ si y sólo si existe $E \subset 2 \times \omega_1^M \times \omega_1^M$ numerable^M tal que $\mathrm{Est}_H(E) \subset K \subset H$.

Es fácil ver que $\mathcal{F}$ sigue siendo un filtro normal de subgrupos de H, por lo que podemos considerar la extensión genérica $N = SM[G]$. Todos los nombres canónicos de los conjuntos que estamos considerando son hereditariamente simétricos, por lo que, en particular, $P \in N$.

Teorema 10.23 *El modelo N que acabamos de describir cumple que todo conjunto infinito tiene un ultrafiltro no principal, pero no cumple el teorema de los ultrafiltros.*

DEMOSTRACIÓN: Por 5.17 sabemos que $\aleph_1^{M[G]} = \aleph_1^M$, de donde se sigue que también $\aleph_1^N = \aleph_1^M$. El argumento de 8.28 nos da ahora que existe $f \in N$ tal que $(f : \omega_1 \longrightarrow P \text{ biyectiva})^N$, y una mínima variante del argumento empleado allí prueba que P no tiene una función de elección. Por lo tanto, N no cumple TU, pues sabemos que TU implica el axioma de elección para familias de conjuntos finitos ([TC 10.15]).

Consideremos ahora un conjunto infinito $X \in N$. Entonces $X \in M[G]$ es infinito, luego (usando AE) tiene un subconjunto $Y \subset X$ numerable$^{M[G]}$. Sea $f : \omega \longrightarrow Y$ biyectiva, $f \in M[G]$. Para cada $i \in \omega$, existe $\sigma_i \in SM^{\mathbb{P}}$ tal que $f(i) = \sigma_{iG}$. Usando el axioma de elección en $M[G]$ podemos exigir que $\{\sigma_i\}_{i\in\omega} \in M[G]$. Ahora bien, por 5.8 tenemos que $\{\sigma_i\}_{i\in\omega} \in M$. Ahora usamos el axioma de elección en M, que nos da $\{E_i\}_{i\in\omega} \in M$ de modo que cada $E_i \subset 2 \times \omega_1^M \times \omega_1^M$ es numerable^M y $\mathrm{Est}_H(E_i) \subset \mathrm{Sim}_H(\sigma_i)$.

Sea $E = \bigcup\limits_{i\in\omega} E_i$, que sigue siendo numerable^M y, si llamamos

$$\sigma = \{(\mathrm{p.o.}(\check{\imath}, \sigma_i), \mathbb{1}) \mid i \in \omega\},$$

se cumple que $\mathrm{Est}_H(E) \subset \mathrm{Sim}_H(\sigma)$, luego $\sigma \in SM^{\mathbb{P}}$ y $f = \sigma_G \in N$. En definitiva, existe $f : \omega \longrightarrow X$ inyectiva, $f \in N$.

Ahora, si $A \in (\mathcal{P}X)^N$, tenemos que $f^{-1}[A] \in (\mathcal{P}\omega)^N$, luego es numerable en $M[G]$, luego por 5.8 se cumple que $f^{-1}[A] \in (\mathcal{P}\omega)^M$.

Finalmente consideramos (un ultrafiltro no principal en $\omega)^M$ $U \in M$ y observamos que

$$U^* = \{A \in \mathcal{P}X \mid f^{-1}[A] \in U\}^N \in N$$

es un ultrafiltro no principal en X. Notemos que U^* es un ultrafiltro porque $f^{-1}[A]$ y $f^{-1}[X \setminus A] = \omega \setminus f^{-1}[A]$ están ambos en $(\mathcal{P}\omega)^M$ y U es un ultrafiltro^M y U^* no es principal porque no puede ser que $\{x\} \in U^*$, ya que, como f es inyectiva, $|f^{-1}[\{x\}]| \leq 1$, luego $f^{-1}[\{x\}] \notin U$, porque U no es principal. ■

Es fácil probar que el modelo del teorema anterior cumple el principio de elecciones dependientes (ED), luego ahora sabemos que, si bien implica el axioma de elección numerable, no garantiza la existencia de funciones de elección sobre conjuntos de $\aleph_1$ pares desordenados.

10.4 Apéndice: El teorema de Halpern-Läuchli

Para completar la demostración del teorema 10.19 nos falta probar 10.21. De hecho demostraremos (en ZF) un resultado más general. Empezamos ampliando la definición 10.20.

Nota En toda esta sección "árbol" significará ω-árbol con una única raíz y sin elementos maximales, es decir, árbol de altura ω con niveles finitos, con un único nodo de altura 0 y en el que todo nodo tiene al menos un nodo por encima. ■

Definición 10.24 Recordemos que si T es un árbol, un conjunto $A \subset T$ *domina* a otro conjunto $B \subset T$ si todo elemento de B está por debajo de un elemento de A.

Diremos que A es (h, k)-*denso* si existe un nodo $x \in T$ de altura h tal que A domina al conjunto de todos los nodos de altura $h + k$ que extienden a x. Escribiremos "k-denso" en lugar de $(0, k)$-denso. (Notemos que A es k-denso si y sólo si domina al nivel k-ésimo de T).

Si $\{T_i\}_{i<d}$ es una familia de árboles en las condiciones anteriores, un producto (h, k)-dominante[4] es un conjunto de la forma $\prod\limits_{i<d} D_i$, donde cada D_i es (h, k)-denso en T_i. Diremos "k-dominante" en lugar de $(0, k)$-dominante.

Teorema 10.25 (Halpern-Läuchli) *Sea $\{T_i\}_{i<d}$ una familia de ω-árboles con una única raíz y sin nodos maximales y sea $Q \subset \prod\limits_{i<d} T_i$. Entonces se da uno de estos dos casos:*

a) Q contiene un producto k-dominante para cada $k \in \omega$.

b) Existe un $h \in \omega$ tal que, para todo $k \in \omega$, el conjunto $\prod\limits_{i<d} T_i \setminus Q$ contiene un producto (h, k)-dominante.

[4]Notemos que los conjuntos m-dominantes definidos en 10.20 son los $(m, 1)$-dominantes en este sentido.

Veamos en primer lugar que de aquí se deduce 10.21:

Demostración de 10.20: Más en general, vamos a probar que el teorema es cierto para particiones $\{Q_j\}_{j<q}$ de $\prod_{i<d} T_i|_n$ (de modo que 10.20 es el caso $q = 2$). Observamos que el teorema es trivial para $q = 1$. A continuación suponemos que es cierto para particiones de q y lo probamos para $q + 1$.

Si no se cumple para $q + 1$, llamamos $\mathcal{T}$ el conjunto de todas las sucesiones $Q = \{Q_j\}_{j<q+1}$ de conjuntos disjuntos dos a dos tales que existe un $n \in \omega$ de modo que

$$\prod_{i<d} T_i|_n = \bigcup_{j<q+1} Q_j$$

y Q no cumple la conclusión del teorema, es decir, ningún Q_j contiene un producto $(m, 1)$-dominante, con $m < n$.

Al suponer que no se cumple el teorema estamos diciendo que para cada $n \in \omega$ existe una partición en $\mathcal{T}$ de $\prod_{i<d} T_i|_n$ en las condiciones indicadas.

Definimos en $\mathcal{T}$ la relación de orden según la cual $Q' \leq Q$ si y sólo si Q' es una partición de $\prod_{i<d} T_i|_m$, Q es una partición de $\prod_{i<d} T_i|_n$, $m \leq n$ y $Q'_j = Q_j \cap \prod_{i<d} T_i|_m$ para cada $i < q + 1$.

Es inmediato que si $Q \in \mathcal{T}$ es una partición de $\prod_{i<d} T_i|_n$ y $m < n$, la partición Q' dada por $Q'_j = Q_j \cap \prod_{i<d} T_i|_m$ también está en $\mathcal{T}$, pues si un elemento de Q' contuviera un producto $(m, 1)$-dominante, lo mismo le sucedería al elemento correspondiente de Q. Además, estas particiones Q' son las únicas que tiene por debajo.

Concluimos que $\mathcal{T}$ es un árbol y que sus elementos de altura n son precisamente las particiones de $\prod_{i<d} T_i|_n$ (que incumplen el teorema). La hipótesis de que el teorema falla para $q + 1$ se traduce ahora en que $\mathcal{T}$ tiene altura ω, y obviamente sus niveles son finitos, pues sólo hay un número finito de particiones de cada $\prod_{i<d} T_i|_n$. El teorema de König [TC 9.6] resulta que $\mathcal{T}$ tiene un camino C.

Definimos una partición $Q = \{Q_j\}_{j<q+1}$ de $\prod_{i<d} T_i$ tomando $Q_j = \bigcup_{Q' \in C} Q'_j$.

Aplicamos a $Q_1 \cup \cdots \cup Q_q$ el teorema anterior, con lo que se da uno de estos dos casos:

a) Para cada $k \in \omega$ la unión $Q_1 \cup \cdots \cup Q_q$ contiene un producto k-dominante.

b) Existe un $h \in \omega$ tal que Q_{q+1} contiene un producto $(h, 1)$-dominante.

Pero el caso b) no puede darse, pues si llamamos $\prod_{i<d} D_i$ al producto $(h, 1)$-dominante, como los niveles de cada T_i son finitos, podemos suponer que cada D_i es finito (pues sólo necesitamos un conjunto finito de nodos para dominar a un conjunto finito de nodos), luego podemos tomar un $n \in \omega$ tal que cada $D_i \subset T_i|_n$, pero entonces la partición $\{Q_j \cap \prod_{i<d} T_i|_n\}_{j<q+1}$ cumple el teorema

(pues su última componente contiene un producto $(h, 1)$-dominante), cuando por otro lado se trata de un elemento del camino C, luego está en $\mathcal{T}$ y no debería cumplirlo.

Por lo tanto se cumple a). Ahora aplicamos la hipótesis de inducción, según la cual existe un $k \in \omega$ tal que toda partición en q conjuntos de $\prod\limits_{i<d} T_i|_k$ contiene un producto $(h, 1)$-dominante, para cierto $h < k$.

Por a) aplicado a este k, tenemos que $Q_1 \cup \cdots \cup Q_q$ contiene un producto k-dominante $\prod\limits_{i<d} D_i$. Entonces D_i es k-denso en T_i, luego domina a $T_i|_k$. Sea $f_i : T_i|_k \longrightarrow D_i$ tal que $\bigwedge x \in T_i|_k \; x \leq f_i(x)$. Para $0 \leq j \leq q$ definimos

$$Q'_j = \{x \in \prod_{i<d} T_i|_k \mid \{f_i(x_i)\}_{i<d} \in Q_i\}.$$

Claramente $Q' = \{Q'_j\}_{j<q}$ es una partición de $\prod\limits_{i<d} T_i|_k$, luego, por la elección de k, existe un $j < q$ tal que Q'_j contiene un producto $(h, 1)$-dominante $\prod\limits_{i<d} D'_i$, para cierto $h < k$, pero es claro entonces que $\prod\limits_{i<d} f_i[D'_i] \subset Q_i$ es un producto $(h, 1)$-dominante, y a partir de aquí llegamos a la misma contradicción que en el caso b). ■

A partir de aquí desarrollamos los conceptos necesarios para demostrar 10.25.

Definición 10.26 Si T es un árbol, $x \in T$, $n \in \omega$ y $B \subset T$, definimos

$$x(T) = \{y \in T \mid y \geq x\}, \qquad n(T, B) = \{x(T) \cap B \mid x \in \mathrm{Niv}_n(T)\}.$$

Notemos que si B es $h+k$-denso en T y $a \in n(T, b)$, para un $n \leq h$, entonces a es (h, k)-denso en T.

Fijado $d \in \omega$, llamaremos *signos* a los elementos de $X_d = d \times 4$, si bien usaremos una notación especial para representarlos:

$$\exists A_i \equiv (i, 0), \quad \forall x_i \equiv (i, 1), \quad \forall a_i \equiv (i, 2), \quad \exists x_i \equiv (i, 3).$$

Llamaremos *fórmulas* a las sucesiones $W \in X_d^{\leq 2d}$ que cumplan las condiciones siguientes:

a) Para cada i, en W aparece a lo sumo uno de los dos los signos $\forall x_i$ y $\exists x_i$, y en tal caso sólo aparece una vez.

b) Para cada i, en W aparece a lo sumo uno de los dos los signos $\forall a_i$ y $\exists A_i$, y en tal caso sólo aparece una vez.

c) Si W contiene a $\forall a_i$, entonces contiene a $\exists x_i$ en una posición posterior.

d) Si W contiene a $\exists A_i$, entonces contiene a $\forall x_i$ en una posición posterior.

Equivalentemente, las fórmulas son las sucesiones de signos que se pueden construir empezando por un $\exists x_i$ o un $\forall x_i$ y añadiendo signos por la izquierda, con la condición de que sólo podemos añadir un $\exists x_i$ o un $\forall x_i$ si no hemos incluido ya uno de ellos, sólo podemos añadir un $\forall a_i$ si previamente hemos incluido $\exists x_i$ (pero no otro $\forall a_i$) y sólo podemos añadir un $\exists A_i$ si previamente hemos incluido $\forall x_i$ (pero no otro $\exists A_i$).

Representaremos por F_d el conjunto de todas las fórmulas, y por S_d el conjunto de todas las *sentencias,* que definimos como las fórmulas de longitud $2d$.

Observemos que, para cada i, en cada sentencia tiene que aparecer necesariamente un $\forall x_i$ o un $\exists x_i$, así como un $\forall a_i$ o bien un $\exists A_i$.

Por ejemplo, S_1 consta únicamente de las sentencias $\exists A_0 \forall x_0$ y $\forall a_0 \exists x_0$, mientras que S_2 consta de 24 sentencias, entre las que se encuentran

$$\exists A_0 \forall x_0 \exists A_1 \forall x_1, \quad \forall a_1 \exists A_0 \forall x_0 \exists x_1, \quad \text{etc.}$$

Ahora vamos a asignar un significado a cada fórmula. Para ello fijamos una familia de árboles $\{T_i\}_{i<d}$, un conjunto $Q \subset \prod\limits_{i<d} T_i$ (de acuerdo con las hipótesis de 10.25), así como una sucesión de números naturales $n = \{n_i\}_{i<d}$ y una sucesión $B = \{B_i\}_{i<d}$, con $B_i \subset T_i$.

Vamos a definir una aplicación $I : F_d \times \prod\limits_{i<d} \mathcal{P}T_i \times \prod\limits_{i<d} T_i \longrightarrow 2$, aunque usaremos la notación:

$$\models W[n, B, Y, y] \equiv F(W, Y, y) = 1.$$

Definiremos I por recursión sobre la relación bien fundada

$$(W, Y, y) \prec (W', Y', y') \leftrightarrow \ell(W) < \ell(W').$$

En la práctica, esto significa que podemos definir $\models W[n, B, Y, y]$ supuesto que ya está definido para fórmulas de longitud menor.

Representaremos por Y_i^A el elemento de $\prod\limits_{i<d} \mathcal{P}T_i$ que coincide con Y salvo que $Y_i = A$, e igualmente y_i^x será el elemento de $\prod\limits_{i<d} T_i$ que coincide con y salvo que $y_i = x$.

En primer lugar, establecemos que

$$\models \varnothing[n, B, Y, y] \leftrightarrow y \in Q.$$

Para sucesiones no vacías, distinguimos casos según cuál sea su primer signo:

a) $\models \exists x_i W[n, B, Y, y] \leftrightarrow \bigvee x \in Y_i \ \models W[n, B, Y, y_i^x]$.

b) $\models \forall x_i W[n, B, Y, y] \leftrightarrow \bigwedge x \in Y_i \ \models W[n, B, Y, y_i^x]$.

c) $\models \exists A_i W[n, B, Y, y] \leftrightarrow \bigvee A(A \subset B_i \land A$ es n_i-denso en T_i $\land \ \models W[n, B, Y_i^A, y])$.

d) $\models \forall a_i W[n, B, Y, y] \leftrightarrow \bigwedge a \in n_i(T_i, B_i) \ \models W[n, B, Y_i^a, y]$.

Ejemplo Para $d = 2$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&\vDash (\exists A_0 \forall a_1 \exists x_1 \forall x_0)[n, B, Y_0, Y_1, y_0, y_1] \leftrightarrow \bigvee A_0 (A_0 \subset B_0 \wedge A_0 \text{ es } n_0\text{-denso en } T_0 \\
&\wedge \vDash (\forall a_1 \exists x_1 \forall x_0)[n, B, A_0, Y_1, y_0, y_1]) \leftrightarrow \\
&\bigvee A_0 (A_0 \subset B_0 \wedge A_0 \text{ es } n_0\text{-denso en } T_0 \wedge \\
&\bigwedge a_1 \in n_1(T_1, B_1) \ \vDash (\exists x_1 \forall x_0)[n, B, A_0, a_1, y_0, y_1]) \leftrightarrow \\
&\bigvee A_0 (A_0 \subset B_0 \wedge A_0 \text{ es } n_0\text{-denso en } T_0 \wedge \\
&\bigwedge a_1 \in n_1(T_1, B_1) \bigvee x_1 \in a_1 \ \vDash (\forall x_0)[n, B, A_0, a_1, y_0, x_1]) \leftrightarrow \\
&\bigvee A_0 (A_0 \subset B_0 \wedge A_0 \text{ es } n_0\text{-denso en } T_0 \wedge \\
&\bigwedge a_1 \in n_1(T_1, B_1) \bigvee x_1 \in a_1 \bigwedge x_0 \in A_0 \ \vDash \varnothing[n, B, A_0, a_1, x_0, x_1]) \leftrightarrow \\
&\bigvee A_0 (A_0 \subset B_0 \wedge A_0 \text{ es } n_0\text{-denso en } T_0 \wedge \\
&\bigwedge a_1 \in n_1(T_1, B_1) \bigvee x_1 \in a_1 \bigwedge x_0 \in A_0 (x_0, x_1) \in Q).
\end{aligned}$$

■

Observamos que $\vDash (\exists A_0 \forall a_1 \exists x_1 \forall x_0)[n, B, Y, y]$ no depende de (Y, y), y es claro que esto no es casual. El teorema siguiente muestra la situación general:

Teorema 10.27 *Sea $W \in F_d$ y sean n, n', B, B', Y, Y', y, y' según la definición anterior, y supongamos además que*

a) $Y_i = Y_i'$ para cada índice i tal que ni $\forall a_i$ ni $\exists A_i$ está en W pero $\forall x_i$ o $\exists x_i$ está en W,

b) $y_i = y_i'$ para cada i tal que ni $\forall x_i$ ni $\exists x_i$ están en W,

c) $n_i = n_i'$ y $B_i = B_i'$ para cada i tal que $\forall a_i$ o $\exists A_i$ está en W.

Entonces $\vDash W[n, B, Y, y)] \leftrightarrow \vDash W[n', B', Y', y']$. En particular, si W es una sentencia, la fórmula $\vDash W[n, B, Y, y]$ es independiente de Y, y.

Demostración: Razonamos por inducción sobre la longitud de W. Para $W = \varnothing$ la hipótesis es $y = y'$, y la conclusión es inmediata. Ahora basta suponerlo cierto para W y probarlo para $\exists x_i W$, $\forall x_i W$, $\exists A_i W$, $\forall a_i W$ (suponiendo además que estas cadenas sean realmente fórmulas).

En el caso $\exists x_i W$, tenemos que W no puede contener ni $\exists A_i$ ni $\forall a_i$, luego tenemos que $Y_i = Y_i'$. Entonces

$$\vDash \exists x_i W[n, B, Y, y] \leftrightarrow \bigvee x \in Y_i \ \vDash W[n, B, Y, y_i^x] \leftrightarrow$$
$$\bigvee x \in Y_i' \ \vDash W[n', B', Y', {y'}_i^x] \leftrightarrow \ \vDash \exists x_i W[n', B', Y', y'],$$

donde hemos aplicado la hipótesis de inducción. En efecto:

a) Si $\forall a_j$ y $\exists A_j$ no están en W, tampoco están en $\exists x_i W$, y si $\forall x_j$ o $\exists x_j$ está en W, también está en $\exists x_i W$, luego se cumple que $Y_j = Y_j'$.

b) Si $\forall x_j$ y $\exists x_j$ no están en W, o bien $j \neq i$ y tampoco están en $\exists x_i W$, con lo que $y_j = y'_j$, luego $(y_i^x)_j = ({y'}_i^x)_j$, o bien $j = i$, y la conclusión es trivial.

c) Si $\forall a_j$ o $\exists A_j$ está en W, también está en $\exists x_i W$, luego $n_j = n'_j$ y $B_j = B'_j$.

El argumento para $\forall x_i W$ es idéntico, y los otros dos casos son incluso más simples. ■

Definición 10.28 Si $W \in S_d$, $n \in {}^d\omega$ y $B = \{B_i\}_{i<d} \in \prod\limits_{i<d} \mathcal{P}T_i$, escribiremos

$$\vDash W[n, B] \equiv \bigvee Y \in \prod_{i<d} \mathcal{P}T_i \bigvee y \in \prod_{i<d} T_i \ \vDash W[n, B, Y, y],$$

y acabamos de ver que la elección del par (Y, y) es irrelevante.

Si $p \in \omega$, escribiremos

$$\Phi(W, n, p) \equiv \bigwedge B \in \prod_{i<d} \mathcal{P}T_i (\bigwedge i < d \ B_i \text{ es } p\text{-denso en } T_i \to \vDash W[n, B]).$$

Por último:

$$\vDash W \equiv \bigwedge n \in {}^d\omega \bigvee p \in \omega \ \Phi(W, n, p).$$

Ahora vamos a construir un cálculo deductivo correcto respecto de la semántica que acabamos de introducir.

Definimos "ser una consecuencia inmediata" como la relación $\vdash_d$ en S_d respecto a la que dos sentencias están relacionadas si y sólo si cumplen uno de los casos siguientes, en los que U, V representan cadenas de signos y α, β representan A_i, a_i o x_i:

Regla 1

$$U\exists\alpha\exists\beta V \vdash_d U\exists\beta\exists\alpha V,$$
$$U\forall\alpha\forall\beta V \vdash_d U\forall\beta\forall\alpha V,$$
$$U\exists\alpha\forall\beta V \vdash_d U\forall\beta\exists\alpha V,$$

donde en la tercera se entiende que los dos miembros son realmente sentencias, es decir, que al invertir los signos no se violan las reglas de precedencia que definen las fórmulas.

Regla 2

$$U\forall a_i\exists x_i V \vdash_d U\exists A_i\forall x_i V,$$
$$U\exists A_i\forall x_i V \vdash_d U\forall a_i\exists x_i V.$$

Regla 3 Si $\sigma : d \longrightarrow d$ es biyectiva y $0 \leq r < d - 1$,

$$(\forall a_{\sigma i})_0^r (\exists A_{\sigma i})_{r+1}^{d-1} V \vdash_d (\exists A_{\sigma i})_{r+1}^{d-1} (\forall a_{\sigma i})_0^r V,$$

donde $(\forall a_{\sigma i})_1^r$ es una abreviatura por $\forall a_{\sigma 1} \cdots \forall a_{\sigma r}$, y análogamente en los otros casos.

Un ejemplo concreto de la regla 3 es el siguiente:

$$\forall a_1 \forall a_2 \exists A_0 \exists A_3 \exists x_2 \forall x_0 \forall x_3 \exists x_1 \vdash_4 \exists A_0 \exists A_3 \forall a_1 \forall a_2 \exists x_2 \forall x_0 \forall x_3 \exists x_1$$

Más en general, escribiremos $W \vdash_d W'$ si existe una sucesión finita de sentencias de L_d que empieza por W, termina por W' y cada sentencia es consecuencia inmediata de la sentencia anterior. Si no hay posibilidad de confusión suprimiremos el subíndice d.

Este cálculo deductivo es correcto en el sentido siguiente:

Teorema 10.29 *Si W, $W' \in S_d$ y $W \vdash W'$, entonces $\vDash W$ implica $\vDash W'$.*

Demostración: Claramente, basta probar el teorema para el caso en que W' es consecuencia inmediata de W. Veamos primero el caso en que W' resulta de aplicar a W la regla 2. Consideremos concretamente el primer caso de esta regla.

Fijamos un $n \in {}^d\omega$. Por hipótesis existe un $p \in \omega$ tal que $\Phi(U\forall a_i \exists x_i V, n, p)$. Basta probar que se cumple $\Phi(U\exists A_i \forall x_i V, n, p)$. Para ello tomamos una familia de conjuntos B_i, cada uno de los cuales sea p-denso en T_i. Sabemos que se cumple $\vDash U\forall a_i \exists x_i V[n, B]$ y tenemos que probar $\vDash U\exists A_i \forall x_i V[n, B]$.

A su vez, basta probar que para todo $Y \in \prod\limits_{i<d} \mathcal{P}T_i$ y todo $y \in \prod\limits_{i<d} T_i$ se cumple que

$$\vDash U\forall a_i \exists x_i V[n, B, Y, y] \rightarrow \vDash U\exists A_i \forall x_i V[n, B, Y, y]$$

para toda cadena de signos U. El único caso no trivial es $U = \varnothing$, luego, en definitiva, tenemos que probar que

$$\vDash \forall a_i \exists x_i V[n, B, Y, y] \rightarrow \vDash \exists A_i \forall x_i V[n, B, Y, y].$$

La hipótesis es que

$$\bigwedge a \in n_i(T_i, B_i) \bigvee x \in a \ \vDash V[n, B, Y_i^a, y_i^x]$$

y tenemos que probar que

$$\bigvee A(A \subset B_i \land A \text{ es } n_i\text{-denso en } T_i \land \bigwedge x \in A \ \vDash V[n, B, Y_i^A, y_i^x]).$$

Definimos

$$A = \{x \in B_i \mid \bigvee a \in n_i(T_i, B_i)\ (x \in a \land \vDash V[n, B, Y_i^a, y_i^x]\}.$$

Una simple inducción prueba que si en V no aparecen x_i, a_i, A_i, la relación $\vDash V[n, B, Y, y]$ no depende del valor de Y_i, por lo que de hecho tenemos que

$$A = \{x \in B_i \mid \bigvee a \in n_i(T_i, B_i)\ (x \in a \land \vDash V[n, B, Y_i^A, y_i^x]\}.$$

En particular $\bigwedge x \in A \ \vDash V[n, B, Y_i^A, y_i^x]$, y sólo falta probar que A es n_i-denso en T_i, pero esto se cumple, pues para todo $u \in \mathrm{Niv}_{n_i}(T_i)$, se cumple que $a = u(T_i) \cap B_i \in n_i(T_i, B_i)$, luego existe un $x \in a \cap A$ y $u \leq x \in A$.

Para probar la corrección del segundo caso de la regla 2 razonamos del mismo modo hasta llegar a que, partiendo de

$$\bigvee A(A \subset B_i \land A \text{ es } n_i\text{-denso en } B_i \land \bigwedge x \in A \vDash V[n, B, Y_i^A, y_i^x]),$$

hemos de probar

$$\bigwedge a \in n_i(T_i, B_i) \bigvee x \in a \vDash V[n, B, Y_i^a, y_i^x].$$

Ahora bien, fijado $A \subset B_i$ según la hipótesis, si $a \in n_i(T_i, B_i)$, esto significa que $a = u(T) \cap B_i$, para cierto $u \in \mathrm{Niv}_{n_i}(T_i)$. Como A es n_i-denso, existe un $x \in A \subset B_i$ tal que $u \leq x$, pero entonces $x \in a$ y además $\vDash V[n, B, Y_i^A, y_i^x]$, pero, tal y como hemos observado en el caso anterior, esto equivale a $\vDash V[n, B, Y_i^a, y_i^x]$, porque en V no aparecen x_i, a_i, A_i.

Dejamos al lector la comprobación de la corrección de la regla 1, pues el planteamiento de la prueba es idéntico al de la regla 2 y en la parte final sólo hay que apelar a hechos lógicos obvios, como que dos cuantificadores del mismo tipo se pueden intercambiar y que un cuantificador universal siempre se puede pasar de detrás a delante de un cuantificador existencial.

Veamos la corrección de la regla 3. Reordenando la sucesión de árboles $\{T_i\}_{i<d}$ (así como las sucesiones n y B) el problema se reduce al caso en que σ es la identidad.

Llamemos $W = (\forall a_i)_0^r (\exists A_i)_{r+1}^{d-1} V$ y $W' = (\exists A_i)_{r+1}^{d-1} (\forall a_i)_0^r V$. Suponemos $\vDash W$, es decir, que

$$\bigwedge n \in {}^d\omega \bigvee p \in \omega\, \Phi(W, n, p).$$

Sea $p : {}^d\omega \longrightarrow \omega$ una función tal que

$$\bigwedge n \in {}^d\omega\, \Phi(W, n, p(n)).$$

Notemos que si $p < p'$, entonces todo conjunto p'-denso es p-denso o, al revés, si una propiedad vale para todo conjunto p-denso, entonces vale para todo conjunto p'-denso. Esto hace que $\Phi(W, n, p) \to \Phi(W, n, p')$, luego podemos cambiar cada $p(n)$ por un número mayor sin que deje de cumplirse la propiedad requerida. En particular podemos exigir que $\bigwedge n \in {}^d\omega \bigwedge i < d\ n_i < p(n)$.

Ahora fijamos $n \in {}^d\omega$ y tenemos que encontrar un $p \in \omega$ tal que $\Phi(W', n, p)$.

Definimos $G : \omega \longrightarrow \omega$ mediante

$$G(0) = \max\{n_i \mid i < d\}, \quad G(j+1) = p(k), \text{ donde } k_i = \begin{cases} n_i & \text{si } i \leq r, \\ G(j) & \text{si } r < i < d. \end{cases}$$

Sea $m = |\prod_{i=0}^{r} n_i(T_i, T_i)|$ y sea $p_j = G(m - j)$, para $0 \leq j \leq m$. Vamos a probar que p_0 cumple lo requerido.

Observemos que, como $r < d - 1$, $G(j+1) = p(k) > k_{d-1} = G(j)$, luego $p_{j+1} < p_j$, por lo que todo conjunto p_j-denso es también p_{j+1}-denso. Además, $p_j \geq n_i$, para todo i y todo j.

Fijamos una sucesión B tal que cada B_i sea p_0-denso en T_i. Tenemos que probar $\vDash W'[n, B]$. Por lo que acabamos de observar, B_i es p_j-denso en T_i para todo $0 \leq j \leq m$.

Observemos que V contiene o bien a $\forall x_i$ o bien a $\exists x_i$ para cada $i < d$, y no contiene ni a $\forall a_i$ ni a $\exists A_i$. El teorema 10.27 nos da entonces que $\vDash V[n, B, Y, y]$ no depende ni de n, ni de B, ni de y, por lo que podemos escribir simplemente $\vDash V[Y]$. Así, $\vDash W'[n, B]$ significa que existe $A \in \prod_{r<i<d} \mathcal{P}B_i$ de modo que cada A_i es n_i-denso en T_i y

$$\bigwedge a \in \prod_{i \leq r} n_i(T_i, B_i) \vDash V[a^\frown A].$$

Observemos que $|\prod_{i \leq r} n_i(T_i, B_i)| = m$, pues $p_0 > n_i$, luego B_i es n_i-denso en T_i, lo que implica que si $x, y \in n_i$ cumplen $x \neq y$, entonces $x(T_i, B_i) \neq y(T_i, B_i)$, luego $|n_i(T_i, B_i)| = |\mathrm{Niv}_{n_i}(T_i)| = |n_i(T_i, T_i)|$. Por lo tanto, basta probar, por inducción sobre $j \leq m$:

> Para todo $J \subset \prod_{i \leq r} n_i(T_i, B_i)$ con $|J| = j$, existe $A \in \prod_{r<i<d} \mathcal{P}B_i$ tal que A_i es p_j-denso en T_i y para todo $a \in J$ se cumple $\vDash V[a^\frown A]$.

En efecto: Para $j = 0$ no hay nada que probar. Si se cumple para J y $J' = J \cup \{b\}$, por hipótesis de inducción existe A que cumple el resultado para J y j. Sea $k = (n_0, \ldots, n_r, p_{j+1}, \ldots, p_{j+1})$, de modo que $\Phi(W, k, p(k))$, que es lo mismo que $\Phi(W, k, p_j)$. Consideramos ahora

$$B' = \begin{cases} B_i & \text{si } i \leq r, \\ A_i & \text{si } r < i < d, \end{cases}$$

de modo que B'_i es p_j-denso en T_i, luego, por definición de Φ, tenemos que $\vDash W[k, B']$. A su vez esto implica que existen conjuntos $A'_i \subset A_i$ de modo que A'_i es p_{j+1}-denso en T_i y $\vDash V[b^\frown A']$.

Ahora, una simple inducción similar a la empleada en la prueba de 10.27 (aunque más simple) muestra que, para todo $a \in J$, como $\vDash V[a^\frown A]$ y $A'_i \subset A_i$, también se cumple $\vDash V[a^\frown A']$. (La idea es que cada A_i sólo interviene en la forma $\bigwedge x \in A_i$, y si todo $x \in A_i$ cumple una propiedad, lo mismo vale para todo $x \in A'_i$.) Por lo tanto, $\vDash V[a^\frown A']$ se cumple para todo $a \in J'$, como había que probar. ■

El último resultado previo que necesitamos es el siguiente:

Teorema 10.30 $\forall a_0 \cdots \forall a_{d-1} \exists x_0 \cdots \exists x_{d-1} \vdash \exists A_0 \cdots \exists A_{d-1} \forall x_0 \cdots \forall x_{d-1}$.

Demostración: Veamos algunos resultados auxiliares:

a) $\forall a_{d-1} (\exists A_i)_0^{d-2} (\forall x_i)_0^{d-2} \exists x_{d-1} \vdash \exists A_{d-1} (\forall a_i)_0^{d-2} (\exists x_i)_0^{d-2} \forall x_{d-1}$.

En efecto:

$\forall a_{d-1}(\exists A_i)_0^{d-2}\,(\forall x_i)_0^{d-2}\,\exists x_{d-1}$	
$(\exists A_i)_0^{d-2}\,\forall a_{d-1}\,(\forall x_i)_0^{d-2}\,\exists x_{d-1}$	Regla 3
$(\exists A_i \forall x_i)_0^{d-2} \forall a_{d-1} \exists x_{d-1}$	Regla 1 (varias veces)
$(\forall a_i \exists x_i)_0^{d-2} \exists A_{d-1} \forall x_{d-1}$	Regla 2 (varias veces)
$(\forall a_i)_0^{d-2} \exists A_{d-1} (\exists x_i)_0^{d-2} \forall x_{d-1}$	Regla 1 (varias veces)
$\exists A_{d-1} (\forall a_i)_0^{d-2} (\exists x_i)_0^{d-2} \forall x_{d-1}$	Regla 3

b) Si $UV \in S_d$, en U no aparecen ni $\forall x_i$ ni $\exists x_i$ para ningún i y U' es una reordenación de U, entonces $UV \vdash U'V$.

Podemos suponer que U contiene cuantificadores de los dos tipos, pues en caso contrario basta aplicar oportunamente la regla 1. Así pues, existe un $r < d-1$ y una permutación σ de modo que:

UV	
$(\forall a_{\sigma i})_0^r (\exists A_{\sigma i})_{r+1}^{d-1} V$	Regla 1 (varias veces)
$(\exists A_{\sigma i})_{r+1}^{d-1} (\forall a_{\sigma i})_0^r V$	Regla 3
$U'V$	Regla 1 (varias veces)

c) Si $W \vdash_{d-1} W'$, entonces

$$\forall a_{d-1} W \vdash_d \forall a_{d-1} W' \exists x_{d-1} \quad \text{y} \quad \exists A_{d-1} W \vdash \exists A_{d-1} W' \forall x_{d-1}.$$

En efecto, si W' se sigue de W por la regla 1 o la regla 2, la regla correspondiente demuestra también las dos conclusiones.

Si W' se sigue de W por la regla 3, entonces $W = W_1W_2$, donde en W_1 sólo aparecen signos de la forma $\forall a_i$, $\exists A_i$ y en W_2 sólo aparecen $\forall x_i$ y $\exists x_i$ y basta aplicar el apartado b) con $U = \forall a_{d-1} W_1$ y $V = W_2 \exists x_{d-1}$ en un caso y $U = \exists A_{d-1} W_1$, $V = W_2 \forall x_{d-1}$ en el otro.

En general, esto prueba que al anteponer $\forall a_{d-1}$ y posponer $\exists x_{d-1}$ a cada sentencia de una deducción de W' a partir de W obtenemos una sucesión de sentencias de S_d que puede prolongarse a una deducción, e igualmente si anteponemos $\exists A_{d-1}$ y posponemos $\forall x_{d-1}$.

Ahora obtenemos la conclusión por inducción sobre d. Si $d = 1$ lo que hay que probar es un caso particular de la regla 2. Si vale para $d-1$, entonces

$$\begin{array}{ll}
(\forall a_i)_0^{d-1}(\exists x_i)_0^{d-1} & \\
\forall a_{d-1}(\forall a_i)_0^{d-2}(\exists x_i)_0^{d-2}\exists x_{d-1} & \text{Regla 1 (varias veces)} \\
\forall a_{d-1}(\exists A_i)_0^{d-2}(\forall x_i)_0^{d-2}\exists x_{d-1} & \text{Hipótesis de inducción y c)} \\
\exists A_{d-1}(\forall a_i)_0^{d-2}(\exists x_i)_0^{d-2}\forall x_{d-1} & \text{a)} \\
\exists A_{d-1}(\exists A_i)_0^{d-2}(\forall x_i)_0^{d-2}\forall x_{d-1} & \text{Hipótesis de inducción y c)} \\
(\exists A_i)_0^{d-1}(\forall x_i)_0^{d-1} & \text{Regla 1.}
\end{array}$$

■

Demostración de 10.25: Fijados los árboles T_i y el conjunto Q que determinan la relación $\vDash$, consideramos las sentencias

$$W_0 = (\forall a_i)_0^{d-1}(\exists x_i)_0^{d-1}, \qquad W_1 = (\exists A_i)_0^{d-1}(\forall x_i)_0^{d-1}.$$

Distinguimos dos casos:

a) Si $\vDash W_0$, entonces también $\vDash W_1$. Vamos a comprobar que se cumple el caso a) del enunciado. En efecto, dado $k \in \omega$ tomamos $n \in {}^d\omega$ dado por $n_i = k$, y sabemos que existe un $p \in \omega$ tal que $\Phi(W_2, n, p)$. Fijamos $B_i = T_i$, obviamente p-denso en T_i, con lo que $\vDash W_2(n, B)$ y esto significa que existen conjuntos $A_i \subset T_i$ de modo que A_i es k-denso en T_i y $\bigwedge x \in \prod\limits_{i<d} A_i \; x \in Q$, es decir, que Q contiene al producto k-dominante $\prod\limits_{i<d} A_i$.

b) Si no $\vDash W_0$, vamos a probar el caso b) del enunciado. En principio tenemos que existe un $n \in {}^d\omega$ tal que para todo $p \in \omega$ no se cumple $\Phi(W_0, n, p)$. Tomamos $h = \text{máx}\{n_i \mid i < d\}$ y, fijado $k \in \omega$, consideramos $p = h + k$, con lo que existen conjuntos B_i, cada uno de los cuales es p-denso en T_i, pero no $\vDash W_0[n, B]$. Esto significa que existen conjuntos $a_i \in n_i(T_i, B_i)$ tales que para todo $x \in \prod\limits_{i<d} a_i$ se cumple que $x \notin Q$, es decir, que $\prod\limits_{i<d} a_i \subset \prod\limits_{i<d} T_i \setminus Q$.

Sólo falta observar que cada a_i es (h, k)-denso en T_i, pues en principio existe un $x \in T_i$ de altura $n_i \leq h$ tal que $a = x(T_i) \cap B_i$, luego podemos tomar un $x' \in T_i$ de altura h tal que $x \leq x'$, y entonces a_i domina a todas las extensiones de x' de altura $h + k = p$, pues si y es una de ellas existe un $b \in B_i$ tal que $y \leq b$, luego $b \in x(T_i) \cap B_i = a_i$. ■

Capítulo XI

Extensiones propias

En el capítulo VII hemos demostrado la consistencia del axioma de Martin mediante una iteración con soportes finitos. Sin embargo, muchas pruebas de consistencia requieren considerar soportes numerables. Una de las razones que obligan a descartar los soportes finitos es que estas iteraciones añaden necesariamente subconjuntos de ω. Para entender por qué, vamos a considerar una iteración arbitraria $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\kappa}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\kappa})$ con soportes finitos, donde κ es un cardinal no numerable, y vamos a exigir únicamente una condición trivial, y es que existan dos sucesiones $\{\sigma_\delta\}_{\delta<\kappa}$, $\{\tau_\delta\}_{\delta<\kappa}$ tales que σ_δ, $\tau_\delta \in \hat{\pi}_\delta$ y $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \sigma_\delta \perp \tau_\delta$, es decir, que cada c.p.o. de la iteración tenga al menos dos condiciones incompatibles.

Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, supongamos en M una iteración en las condiciones descritas y sea G un filtro $\mathbb{P}_\kappa$-genérico sobre M. Para cada $\alpha < \kappa$ consideramos $f \in {}^\omega 2$ dada por

$$f(n) = 1 \leftrightarrow \bigvee p \in G_{\alpha+\omega}\ p(n) = \sigma_{\alpha+n+1}.$$

Claramente $f \in M[G_{\alpha+\omega}]$. Vamos a probar que $f \notin M[G_\alpha]$. Por el teorema 7.32 tenemos que $M[G_{\alpha+\omega}]$ puede obtenerse a partir de $M[G_\alpha]$ mediante una iteración con soportes finitos $(\{\mathbb{P}'_\delta\}_{\delta\leq\omega}, \{\pi'_\delta\}_{\delta<\omega})$, que claramente seguirá cumpliendo la condición de no trivialidad que hemos impuesto. Así pues, no perdemos generalidad si suponemos que $\alpha = 0$.

Supongamos que $f \in M$ y sea

$$D = \{p \in \mathbb{P}_\omega \mid \bigvee n \in \omega (f(n) = 1 \land p(n) = \tau_n)\} \in M.$$

Vamos a probar que D es denso en $\mathbb{P}_\omega$. Para ello probamos en primer lugar que f toma el valor 1 infinitas veces. En efecto, dado $m \in \omega$, consideramos el conjunto

$$E_m = \{p \in \mathbb{P}_\omega \mid \bigvee n > m\ p(n) = \sigma_n\} \in M.$$

Claramente es denso, pues si $q \in \mathbb{P}_\omega$ cumple $\operatorname{sop} q \subset k$, basta tomar $n > k$ y $n > m$ y q puede extenderse a una condición q' que coincida con q salvo que $q(n) = \sigma_n$. Entonces $q' \leq q$ y $q' \in E_m$. Esto implica que existe $p \in G_\omega \cap E_m$, lo que a su vez se traduce en que existe un $n > m$ tal que $f(n) = 1$.

Ahora pasamos a probar la densidad de D. Dada una condición $p \in \mathbb{P}_\omega$, tomamos un $n \in \omega$ tal que $f(n) = 1$ y $\operatorname{sop} p \subset n$. Nuevamente, p puede extenderse a una condición $p' \leq p$ tal que $p'(n) = \tau_n$, con lo que $p' \in D$.

Por consiguiente, existe un $p \in D \cap G_\omega$, luego existe un $n \in \omega$ tal que $f(n) = 1$ y $p(n) = \tau_n$. Ahora bien, por otra parte, por definición de f, existe $q \in G_\omega$ tal que $q(n) = \sigma_n$. Ahora usamos que si $\mathbb{Q}_n = (\pi_n)_{G_n}$ y $H_n = \{p(n)_{G_n} \mid p \in G_{n+1}\}$, entonces H_n es un filtro $\mathbb{Q}_n$-genérico sobre $M[G_n]$, y tenemos una contradicción, pues $(\sigma_n)_{G_n}$, $(\tau_n)_{G_n} \in H_n$, pero ambas condiciones son incompatibles.

Así pues, volviendo al contexto general, resulta que $M[G_\kappa]$ contiene al menos κ subconjuntos de ω que no están en M. Hay que tener en cuenta que κ podría no ser un cardinal en $M[G_\kappa]$, pero, por ejemplo, ahora podemos afirmar que en una iteración de κ c.p.o.s con la c.c.n. y soportes finitos se cumple necesariamente $2^{\aleph_0} \geq \kappa$. En particular, si queremos obtener un modelo de ZFC en el que no haya árboles de Suslin destruyéndolos uno a uno, necesitamos como mínimo $\aleph_2$ pasos, luego si queremos que en el modelo resultante se cumpla la hipótesis del continuo, o bien renunciamos a la c.c.n. y nos las arreglamos para colapsar $\aleph_2$ durante el proceso, o bien renunciamos a los soportes finitos.

En el capítulo siguiente probaremos la consistencia de ZFC + HS + $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ mediante una iteración de longitud $\aleph_2$ con soportes numerables (que no colapsa ningún cardinal). Aquí nos dedicaremos a presentar la teoría de Shelah sobre extensiones propias, que no es sino una amplia gama de potentes resultados sobre iteraciones con soportes numerables. Básicamente se trata de definir varias propiedades que se conservan por iteraciones con soportes numerables $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \alpha}, \{\pi_\delta\}_{\delta < \alpha})$ (en el sentido de que si cada π_δ las posee entonces cada $\mathbb{P}_\delta$ las posee también) y que implican propiedades deseadas para los c.p.o.s $\mathbb{P}_\delta$, como condiciones de cadena, conservación de cardinales, etc. La más básica de todas ellas es la de ser un c.p.o. "propio", que es la que estudiamos en primer lugar.

El lector puede, si lo desea, compaginar la lectura de este capítulo y el siguiente, analizando los ejemplos que se presentan allí a medida que estudia las propiedades que introducimos aquí.

11.1 Preórdenes propios

En lo sucesivo vamos a usar que, tal y como se explica en el apéndice A, podemos considerar extensiones genéricas de modelos transitivos numerables de ZF$-$AP, de modo que la relación $\Vdash$ es definible en tales modelos. Más aún, también se explica allí que la relación $p \Vdash \phi$ puede definirse para fórmulas matemáticas $\phi \in \operatorname{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$, de modo que "$p \Vdash \phi$" es (metamatemáticamente) un término del que podemos probar que $(p \Vdash \phi) \in \operatorname{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$.

Recordemos que $H(\kappa)$ representa el conjunto de todos los conjuntos cuya clausura transitiva tiene cardinal menor que κ, y que si κ es un cardinal no numerable entonces $H(\kappa)$ es un modelo de ZFC$-$AP. Vamos a mostrar que es posible hablar de extensiones genéricas de submodelos elementales de $H(\kappa)$ que nos llevarán al concepto de c.p.o. propio.

Observemos en primer lugar que si M es un modelo transitivo numerable de ZFC, κ es un cardinal regular no numerable^M y $\mathbb{P} \in H(\kappa)^M$ un c.p.o., entonces todos los subconjuntos densos en $\mathbb{P}$ que están en M están de hecho en $H(\kappa)^M$, por lo que un filtro G es $\mathbb{P}$-genérico sobre M si y sólo si es $\mathbb{P}$-genérico sobre $H(\kappa)^M$. Por consiguiente, podemos considerar tanto la extensión $M[G]$ como la extensión $H(\kappa)^M[G] \subset M[G]$. El teorema siguiente nos precisa la relación entre ambas:

Teorema 11.1 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea κ un cardinal regular no numerable^M y sea $\mathbb{P} \in H(\kappa)^M$ un c.p.o. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M (luego sobre $H(\kappa)^M$). Entonces*

$$H(\kappa)^M[G] = H(\kappa)^{M[G]}, \qquad H(\kappa)^{M[G]} \cap M = H(\kappa)^M.$$

Demostración: Observemos en primer lugar que $|\mathbb{P}| < \kappa$, luego $\mathbb{P}$ tiene la c.c.κ en M, luego κ es un cardinal regular no numerable en $M[G]$.

Claramente $H(\kappa)^M \subset H(\kappa)^{M[G]}$, luego en particular $\mathbb{P} \in H(\kappa)^{M[G]}$ y, como $G \subset \mathbb{P}$, también $G \in H(\kappa)^{M[G]}$, luego concluimos que $H(\kappa)^M[G] \subset H(\kappa)^{M[G]}$.

Recíprocamente, si existiera $x \in H(\kappa)^{M[G]} \setminus H(\kappa)^M[G]$, podríamos tomarlo $\in$-minimal, de modo que $x \subset H(\kappa)^M[G]$. Sea $\mu = |x| < \kappa$, sea $f : \mu \longrightarrow x$ biyectiva, $f \in M[G]$, sea $g \in M[G]$ tal que $g : \mu \longrightarrow H(\kappa)^M \cap M^{\mathbb{P}}$ y para todo $\alpha \in \mu$ se cumple $f(\alpha) = g(\alpha)_G$.

Por el teorema 5.5 existe $\tilde{g} \in M$ tal que $\tilde{g} : \mu \longrightarrow \mathcal{P}(H(\kappa)^M \cap M^{\mathbb{P}})$ de modo que, para todo $\alpha \in \mu$, se cumple $g(\alpha) \in \tilde{g}(\alpha)$ y $|\tilde{g}(\alpha)|^M < \kappa$. Sea $A = \bigcup\limits_{\alpha<\mu} \tilde{g}(\alpha)$. Así $A \in M$ es un conjunto de $\mathbb{P}$-nombres $A \subset H(\kappa)^M$ y $|A|^M < \kappa$.

Ahora tomamos $x = \xi_G$, con $\xi \in M^{\mathbb{P}}$ y definimos

$$\sigma = \{(\tau, p) \in A \times \mathbb{P} \mid p \Vdash \tau \in \xi\} \in H(\kappa)^M \cap M^{\mathbb{P}}.$$

Claramente $\sigma_G \subset x$ y, si $u \in x$, entonces $u = g(\alpha)_G$, para cierto $\alpha < \mu$, y $\tau = g(\alpha) \in G(\alpha) \subset A$. Por otra parte existe un $p \in G$ tal que $p \Vdash \tau \in \xi$, luego $(\tau, p) \in \sigma$ y $u = \tau_G \in \sigma_G$, luego $x = \sigma_G \in H(\kappa)^M[G]$, contradicción.

Claramente $H(\kappa)^M \subset H(\kappa)^{M[G]} \cap M$. Si $x \in H(\kappa)^M[G] \cap M$, llamemos $\mu = |\mathrm{ct}\, x|^{M[G]} < \kappa$ y sea $g : \mu \longrightarrow \mathrm{ct}\, x$ biyectiva. De nuevo por 5.5 existe $\tilde{g} : \mu \longrightarrow \mathcal{P}x$ tal que $\bigwedge \alpha \in \mu\ g(\alpha) \in \tilde{g}(\alpha)$ y $\bigwedge \alpha \in \mu\ |\tilde{g}(\alpha)|^M < \kappa$. El conjunto $A = \bigcup\limits_{\alpha<\mu} \tilde{g}(\alpha) \in M$ cumple $|A|^M < \kappa$ y $\mathrm{ct}\, x \subset A$, luego $x \in H(\kappa)^M$. ■

Para trabajar con estas extensiones conviene observar que se cumple la variante siguiente del teorema 4.49:

Teorema 11.2 *Sea $\phi(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ una fórmula cuyas variables libres estén entre las indicadas. Sea $\mathbb{P}$ un c.p.o., $p \in \mathbb{P}$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in V^{\mathbb{P}}$ y κ un cardinal regular no numerable. Entonces*

$$p \Vdash \bigvee x \in H(\check{\kappa})\, \phi(x, \sigma_1, \ldots, \sigma_n) \leftrightarrow \bigvee \sigma \in V^{\mathbb{P}} \cap H(\kappa)\ p \Vdash \phi(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

DEMOSTRACIÓN: Una implicación es trivial, teniendo en cuenta que siempre se cumple la desigualdad $\operatorname{rang}(\sigma_G) < \operatorname{rang}\sigma$. Para la otra sirve la misma prueba de 4.49 con esta única modificación: en la definición del conjunto A cambiamos $\bigvee \sigma \in M^{\mathbb{P}}$ por $\bigvee \sigma \in H(\kappa)^M$, con lo que obtenemos $\{\sigma_q\}_{q\in A}$ en $H(\kappa)^M$, y así el nombre σ construido en 4.48 (allí se llama π) cumple $\sigma \in H(\kappa)^M$. La prueba vale igualmente sin más que comprobar que, cuando se aplica el teorema 4.47 h) a la hipótesis $p \Vdash \bigvee x \in H(\check{\kappa})\,\phi(x)$, el nombre π puede tomarse en $H(\kappa)^M$. Esto se debe a que, por el teorema anterior, dado un filtro genérico G, todo $x \in H(\kappa)^{M[G]}$ es de la forma π_G con $\pi \in H(\kappa)^M$. ■

Ahora vamos a ver que podemos definir "extensiones genéricas" de submodelos elementales de los modelos $H(\kappa)$, no necesariamente transitivos. El hecho básico al respecto es el teorema siguiente:

Teorema 11.3 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea κ un cardinal regular no numerable^M, sea $N \prec H(\kappa)^M$, sea $\mathbb{P} \in N$ un c.p.o. y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Llamamos*

$$N[G] = \{\tau_G \mid \tau \in M^{\mathbb{P}} \cap N\}.$$

Entonces $N \subset N[G] \prec H(\kappa)^{M[G]}$.

DEMOSTRACIÓN: Si $x \in N \subset H(\kappa)^M$, entonces $\check{x}$ es definible en $H(\kappa)^M$, luego $\check{x} \in N$, luego $x = \check{x}_G \in N[G]$. Además en el teorema anterior hemos visto que $N[G] \subset H(\kappa)^M[G] \subset H(\kappa)^{M[G]}$.

Para probar que $N[G]$ es un submodelo elemental, por [TC 11.22], basta fijar una fórmula $\phi(x, x_1, \ldots, x_n)$ y $x_1, \ldots, x_n \in N[G]$ y demostrar que

$$\bigvee x \in H(\kappa)^{M[G]}\ H(\kappa)^{M[G]} \vDash \phi[x, x_1, \ldots, x_n] \rightarrow$$

$$\bigvee x \in N[G]\ H(\kappa)^{M[G]} \vDash \phi[x, x_1, \ldots, x_n].$$

Sea $x_i = \tau_{iG}$, con $\tau_i \in N$. Trivialmente

$$(\mathbb{1} \Vdash \bigvee y(y \in H(\check{\kappa}) \wedge H(\check{\kappa}) \vDash \bigvee x\phi[\tau_1, \ldots, \tau_n] \rightarrow H(\check{\kappa}) \vDash \phi[y, \tau_1, \ldots, \tau_n])^M.$$

Por el teorema 11.2 existe $\sigma \in M^{\mathbb{P}} \cap H(\kappa)^M$ tal que

$$(\mathbb{1} \Vdash \sigma \in H(\check{\kappa}) \wedge H(\check{\kappa}) \vDash \bigvee x\phi[\tau_1, \ldots, \tau_n] \rightarrow H(\check{\kappa}) \vDash \phi[\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n])^M.$$

Entonces

$$H(\kappa)^M \vDash (\ \mathbb{1} \Vdash \bigvee x\phi[\tau_1, \ldots, \tau_n] \rightarrow \phi[\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n]). \qquad (*)$$

En efecto, si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $H(\kappa)^M$, también lo es sobre M y se cumple que

$$(H(\kappa) \vDash \bigvee x\phi[\tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG}] \rightarrow H(\kappa) \vDash \phi[\sigma_G, \tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG}])^{M[G]},$$

que equivale a

$$H(\kappa)^{M[G]} \vDash (\bigvee x \phi[\tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG}] \to \phi[\sigma_G, \tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG}]),$$

o también a

$$H(\kappa)^M[G] \vDash (\bigvee x \phi[\tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG}] \to \phi[\sigma_G, \tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG}]),$$

y por la versión A.8 del teorema fundamental esto implica $(*)$, y por consiguiente

$$\bigvee \sigma \in H(\kappa)^M (H(\kappa)^M \vDash \sigma \in V^{[\mathbb{P}]} \wedge (\mathbb{1} \Vdash \bigvee x \phi[\tau_1, \ldots, \tau_n] \to \phi[\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n]).$$

Como $N \prec H(\kappa)^M$, podemos tomar $\sigma \in N$ que cumple lo mismo, es decir,

$$\sigma \in M^{\mathbb{P}} \cap N \wedge H(\kappa)^M \vDash (\mathbb{1} \Vdash \bigvee x \phi[\tau_1, \ldots, \tau_n] \to \phi[\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n]),$$

o también, invirtiendo el razonamiento por el que hemos llegado a $(*)$,

$$\sigma \in M^{\mathbb{P}} \cap N \wedge \mathbb{1} \Vdash H(\check{\kappa}) \vDash \bigvee x \phi[\tau_1, \ldots, \tau_n] \to H(\check{\kappa}) \vDash \phi[\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n]).$$

Y de nuevo por A.8, si

$$\bigvee x \in H(\kappa)^{M[G]} \; H(\kappa)^{M[G]} \vDash \phi(x, x_1, \ldots, x_n),$$

también $H(\kappa)^{M[G]} \vDash \phi(\sigma_G, x_1, \ldots, x_n)$, con $\sigma_G \in N[G]$. ■

Observaciones Los modelos $N[G]$ no son propiamente extensiones genéricas, pues ni siquiera son necesariamente modelos transitivos. Esto último se puede remediar considerando el colapso transitivo $\pi : N[G] \longrightarrow C$. Llamemos $\bar{N} = \pi[N] \subset C$, $\bar{\mathbb{P}} = \pi(\mathbb{P}) \in C$ y $\bar{G} = \pi(G) \in C$. Observemos que $\pi|_N : N \longrightarrow \bar{N}$ es el colapso transitivo de N. Como π es un isomorfismo de modelos, resulta que $\bar{\mathbb{P}}$ es un c.p.o.^{C} y, como "ser un c.p.o." es absoluto para modelos transitivos, resulta que $\bar{\mathbb{P}}$ es un c.p.o. Similarmente, $\bar{G}$ es un filtro en $\bar{\mathbb{P}}$.

Todo elemento de C es de la forma $\pi(\tau_G) = \pi(\tau)_{\bar{G}}$, donde τ es un $\mathbb{P}$-nombre en N, luego un $\mathbb{P}$-nombre^N, luego $\pi(\tau)$ es un $\bar{\mathbb{P}}$-nombre$^{\bar{N}}$, luego $\pi(\tau) \in \bar{N}^{\bar{\mathbb{P}}}$. Recíprocamente, todo elemento de $\bar{N}^{\bar{P}}$ es de la forma $\pi(\tau)$, con $\tau \in V^{\mathbb{P}} \cap N$. Por lo tanto

$$C = \bar{N}[\bar{G}] = \{\tau_{\bar{G}} \mid \tau \in \bar{N}^{\bar{P}}\}.$$

En conclusión, el colapso transitivo de un modelo $N[G]$ es de la forma $\bar{N}[\bar{G}]$, donde $\bar{G}$ es un filtro en $\bar{\mathbb{P}}$, pero no es necesariamente cierto que sea un filtro $\bar{\mathbb{P}}$-genérico sobre $\bar{N}$. ■

Definición 11.4 Sea N un modelo numerable de ZFC−AP, sea $\pi : N \longrightarrow \bar{N}$ su colapso transitivo, sea $\mathbb{P} \in N$ un c.p.o. y sea $\bar{\mathbb{P}} = \phi(\mathbb{P})$. Diremos que un filtro G en $\mathbb{P}$ es $(N, \mathbb{P})$-*genérico* si $\bar{G} = \pi[G \cap N]$ es un filtro $\bar{\mathbb{P}}$-genérico sobre $\bar{N}$.

Si suponemos, más concretamente, que $N \prec H(\kappa)$, para cierto cardinal regular no numerable κ, entonces un subconjunto denso de $\bar{\mathbb{P}}$ que esté en $\bar{N}$ es de la forma $\bar{D} = \phi(D)$, donde $D \in N$ es denso en $\mathbb{P}$, por lo que la genericidad de G equivale a que $\bar{D} \cap \bar{G} \neq \varnothing$ para todo posible D, o también a que $D \cap G \cap N \neq \varnothing$, es decir, no basta con que G corte a todo conjunto denso $D \in N$, sino que es necesario que la intersección de D con G pueda atestiguarse en N. Vamos a dar condiciones necesarias y suficientes para que esto suceda.

Definición 11.5 Si $\mathbb{P}$ es un c.p.o. y $D \subset \mathbb{P}$, diremos que D es *predenso* (bajo $p \in \mathbb{P}$) si todo $q \in \mathbb{P}$ $(q \leq p)$ es compatible con un elemento de D. Diremos que D es *abierto* si contiene a todas las extensiones de sus elementos.

Teorema 11.6 *Bajo las hipótesis del teorema anterior, las condiciones siguientes son equivalentes:*

a) G *es* $(N, \mathbb{P})$*-genérico.*

b) $G \cap N$ *corta a todo* $D \in N$ *que sea predenso (resp. denso, abierto denso) en* $\mathbb{P}$*.*

c) $N[G] \cap \Omega = N \cap \Omega$*.*

d) $N[G] \cap M = N$*.*

Demostración: Claramente $b_p) \Rightarrow b_d) \Rightarrow b_a)$, donde los subíndices indican la versión para predensos, densos y abiertos densos, respectivamente. Vamos a ver que $b_a) \Rightarrow d) \Rightarrow c) \Rightarrow b_p)$, con lo que tendremos las equivalencias entre todas ellas, y ya hemos visto que $a) \Leftrightarrow b_d)$.

$b_p) \Rightarrow d)$ Tomemos $x \in N[G] \cap M$. Entonces $x = \tau_G$, con $\tau \in M^{\mathbb{P}} \cap N$. Sea

$$D = \{p \in \mathbb{P} \mid p \Vdash \tau \notin \check{V} \lor \bigvee y\ p \Vdash \tau = \check{y}\}^M.$$

Claramente D es abierto denso en $\mathbb{P}$. Observemos ahora que

$$(p \Vdash \tau \notin \check{V})^M \leftrightarrow (p \Vdash \tau \notin \check{V})^{H(\kappa)^M}.$$

En efecto, como los filtros $\mathbb{P}$-genéricos sobre M son los mismos que los $\mathbb{P}$-genéricos sobre $H(\kappa)^M$, lo que hay que probar es que si H es uno de ellos y $p \in H$, entonces $\tau_H \notin M \leftrightarrow \tau_H \notin H(\kappa)^M$, y esto es cierto por el teorema 11.1, pues $\tau_H \in H(\kappa)^M[H]$.

Similarmente, si $(p \Vdash \tau = \check{y})^M$, para un $y \in M$, el teorema 11.1 implica que $y \in H(\kappa)^M$, y entonces

$$(p \Vdash \tau = \check{y})^M \leftrightarrow (p \Vdash \tau = \check{y})^{H(\kappa)^M}.$$

Esto implica que D es definible en $H(\kappa)^M$, y entonces el hecho de que N sea un submodelo elemental implica que $D \in N$. Por lo tanto a) (en su versión débil, para conjuntos densos) nos da que existe $p \in D \cap N \cap G$. Como $x = \tau_G \in M$, no puede ser que $p \Vdash \tau \notin \check{M}$, luego $(\bigvee y\ p \Vdash \tau = \check{y})^M$, y hemos visto que esto equivale a $(\bigvee y\, p \Vdash \tau = \check{y})^{H(\kappa)^M}$, y como $N \prec H(\kappa)$, de hecho $(\bigvee y\, p \Vdash \tau = \check{y})^N$, luego hay un $y \in N$ tal que $p \Vdash \tau = \check{y}$, pero entonces $y = \check{y}_G = \tau_G = x$, luego $x \in N$.

d) $\Rightarrow$ c) es obvio.

c) $\Rightarrow$ b_p) Sea $D \in N$ un conjunto predenso en $\mathbb{P}$, sea $\mu = |D|$. Como $D \in H(\kappa)$, existe $f \in H(\kappa)$ tal que $f : \mu \longrightarrow D$ biyectiva, luego existe una $f \in N$ que cumple lo mismo.

Consideramos una anticadena maximal $A \subset \mathbb{P}$ de condiciones $r \in \mathbb{P}$ tales que existe un $\alpha_r < \mu$ de modo que $r \Vdash \check{\alpha}_r = \text{mín}\{\alpha < \check{\mu} \mid \check{f}(\alpha) \in \Gamma\}$. Notemos que existen condiciones que cumplen esto porque D corta a todo filtro genérico. Sea $\tau = \{(\check{\delta}, r) \mid r \in A \wedge \delta \in \alpha_r\} \in H(\kappa)$. Se cumple entonces que

$$(\mathbb{1} \Vdash \tau = \text{mín}\{\alpha < \check{\mu} \mid \check{f}(\alpha) \in \Gamma\})^M.$$

En efecto, si H es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, existe un $r \in A \cap H$, con lo que $\alpha_r = \text{mín}\{\alpha < \mu \mid f(\alpha) \in H\}$ y, por otra parte, $\tau_H = \{\delta \mid \delta \in \alpha_r\} = \alpha_r$.

Más aún, esto se cumple en $H(\kappa)$, y como $N \prec H(\kappa)$, existe $\tau \in N$ (no necesariamente el que hemos construido) tal que $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ y

$$\mathbb{1} \Vdash \tau = \text{mín}\{\alpha < \check{\mu} \mid \check{f}(\alpha) \in \Gamma\}.$$

Entonces $\tau_G \in N[G] \cap \Omega = N \cap \Omega$ y $f(\tau_G) \in D \cap G$, pero como f y τ_G están en $N \prec H(\kappa)^M$, también $f(\tau_G) \in N$, luego $D \cap N \cap G \neq \varnothing$. ■

No todos los filtros genéricos cumplen estas condiciones. Introducimos ahora una condición suficiente para que esto suceda:

Definición 11.7 Sea κ un cardinal no numerable, sea $N \prec H(\kappa)$ y sea $\mathbb{P} \in N$ un c.p.o. Diremos que una condición $q \in \mathbb{P}$ es $(N, \mathbb{P})$-*genérica* si para todo $D \in N$ predenso en $\mathbb{P}$ se cumple que $D \cap N$ es predenso bajo q.

Equivalentemente, en las condiciones de los teoremas anteriores, q es $(N, \mathbb{P})$-genérica si y sólo si todo filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M que cumpla $q \in G$ es $(N, \mathbb{P})$-genérico.

En efecto, si q es $(N, \mathbb{P})$-genérica, $q \in G$ y $D \in N$ es predenso en $\mathbb{P}$, entonces $D \cap N$ es predenso bajo q, luego por 4.6 se cumple que $D \cap N \cap G \neq \varnothing$. Recíprocamente, si todo filtro genérico tal que $q \in G$ es $(N, \mathbb{P})$-genérico y $D \in N$ es predenso, si $D \cap N$ no fuera predenso bajo q existiría un $p \leq q$ incompatible con $D \cap N$. Tomamos un filtro genérico G tal que $p \in G$ y entonces a) nos da un $r \in D \cap N \cap G$, con lo que $\neg r \perp p$, contradicción.

Nota Como consecuencia de la observación precedente, dado que el apartado a) del teorema es equivalente para conjuntos predensos o abiertos densos (luego también para densos), concluimos que, en las condiciones de la definición, q es $(N, \mathbb{P})$-genérica si y sólo si para todo $D \in N$ abierto denso (o meramente denso) se cumple que $D \cap N$ es predenso bajo q. ■

Veamos otras equivalencias:

Teorema 11.8 *Sea κ un cardinal regular no numerable, sea $N \prec H(\kappa)$, sea $\mathbb{P} \in N$ un c.p.o. y sea $q \in \mathbb{P}$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) q *es* $(N, \mathbb{P})$*-genérica.*

b) Si un conjunto $D \in N$ *es predenso (resp. abierto denso) en* $\mathbb{P}$ *entonces* $q \Vdash \check{D} \cap \check{N} \cap \Gamma \neq \varnothing$.

c) $q \Vdash \check{N}[\Gamma] \cap \check{V} = \check{N}$.

d) $q \Vdash \check{N}[\Gamma] \cap \Omega = \check{N} \cap \Omega$.

Demostración: Basta probar el teorema relativizado a un modelo transitivo numerable M. Ya hemos visto que a) equivale a que todos los filtros $\mathbb{P}$-genéricos sobre M que cumplen $q \in G$ satisfacen las condiciones del teorema anterior, y es claro que cada una de las condiciones a), b), c) del teorema anterior (para filtros que contienen a q) equivale a la condición b), c), d), respectivamente, del teorema que nos ocupa. ■

De este modo, una condición suficiente para que, al colapsar un modelo de la forma $N[G]$, el filtro $\bar{G}$ sea $\bar{\mathbb{P}}$-genérico sobre $\bar{N}$ es que G contenga una condición $(N, \mathbb{P})$-genérica. Esto nos lleva al concepto central de este capítulo:

Definición 11.9 Diremos que un c.p.o. $\mathbb{P}$ es *propio* si para todo cardinal regular $\kappa > 2^{|\mathbb{P}|}$, para todo submodelo elemental numerable $N \prec H(\kappa)$ tal que $\mathbb{P} \in N$ y para toda condición $p \in \mathbb{P} \cap N$ existe una condición $q \leq p$ que es $(N, \mathbb{P})$-genérica.

Teorema 11.10 *Todos los c.p.o.s con la c.c.n. o $\aleph_1$-cerrados son propios.*

Demostración: Si $\mathbb{P}$ cumple la c.c.n., $\kappa > 2^{|\mathbb{P}|}$ regular y $\mathbb{P} \in N \prec H(\kappa)$, basta observar que $\mathbb{1} \Vdash \check{N}[\Gamma] \cap \Omega = \check{N} \cap \Omega$, pues esto implica que toda condición $q \in \mathbb{P}$ es $(N, \mathbb{P})$-genérica. A su vez, basta probar la relativización de este hecho a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Fijamos un filtro genérico G y tomamos un $\alpha \in N[G] \cap \Omega$, de modo que $\alpha = \tau_G$ con $\tau \in N^{\mathbb{P}}$. Entonces $\alpha \in M[G] \cap \Omega = M \cap \Omega$, luego $\alpha \in M$. Más aún, por el teorema 11.1 sabemos que $\alpha \in H(\kappa)^M[G] \cap M = H(\kappa)^M$.

Sea $A \in M$ una anticadena maximal de condiciones $p \in \mathbb{P}$ que cumplan $(\bigvee \alpha \in H(\kappa)\ p \Vdash \tau = \check{\alpha})^M$. Como $\mathbb{P}$ cumple la c.c.n.^{M} tenemos que A es numerable^M, luego $A \in H(\kappa)^M$ y como sus propiedades son definibles en $H(\kappa)^M$ podemos tomar $A \in N$. Más aún, como existe $f \in H(\kappa)$ tal que $f : \omega \longrightarrow A$ biyectiva, podemos tomar $f \in N$ y, como $\omega \subset N$, concluimos que $A \subset N$.

Para cada $p \in A$ sea $\alpha_p \in H(\kappa)^M$ el único ordinal que cumple $p \Vdash \tau = \check{\alpha}_p$. El mismo razonamiento anterior nos da que $B = \{\alpha_p \mid p \in A\} \subset N$, y es claro que $\mathbb{1} \Vdash \tau \in \check{B}$, luego en particular $\mathbb{1} \Vdash \tau \in \check{N}$, luego, para el filtro genérico que habíamos considerado, se cumple que $\alpha = \tau_G \in N$, como había que probar.

Supongamos ahora que $\mathbb{P}$ es $\aleph_1$-cerrado y fijemos igualmente $\kappa > 2^{|\mathbb{P}|}$ regular y $\mathbb{P} \in N \prec H(\kappa)$ con N numerable y $p \in \mathbb{P} \cap N$. Sea $\{D_n\}_{n \in \omega}$ una enumeración (tal vez con repeticiones) de los subconjuntos predensos de $\mathbb{P}$ que están en N.

Vamos a definir una sucesión decreciente de condiciones en $\mathbb{P} \cap N$. Tomamos $q_0 = p$ y, supuesto definido $q_n \in \mathbb{P} \cap N$, como D_n es predenso en $\mathbb{P}$, se cumple que $\bigvee r \in D_n \bigvee s \in \mathbb{P}(s \leq q_n \wedge s \leq r)$, pero esto mismo es cierto relativizado a $H(\kappa)$, luego también relativizado a N, luego existe $r \in D_n \cap N$ y existe un $q_{n+1} \in \mathbb{P} \cap N$ de modo que $q_{n+1} \leq q_n$ y $q_{n+1} \leq r$.

Como $\mathbb{P}$ es $\aleph_1$-cerrado, existe un $q \in \mathbb{P}$ que extiende a todos los q_n, luego en particular extiende a un elemento de cada $D_n \cap N$. Sucede entonces que $q \leq p$ es $(N, \mathbb{P})$-genérico, pues $D_n \cap N$ es predenso bajo q, ya que existe $r \in D_n \cap N$ tal que $q \leq r$, luego toda extensión de q es compatible con un elemento de $D_n \cap N$. ■

Una propiedad común a los c.p.o.s con la c.c.n. y los $\aleph_1$-cerrados es que conservan el cardinal $\aleph_1$. Esto es válido en general para los c.p.o.s propios:

Teorema 11.11 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC *y sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. propio^M. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces todo conjunto numerable de ordinales en $M[G]$ está contenido en un conjunto numerable de ordinales en M. En particular $\aleph_1^M = \aleph_1^{M[G]}$.*

Demostración: Sea $B = \sigma_G \in M[G]$ un conjunto numerable$^{M[G]}$ de ordinales. Sea $f : \omega \longrightarrow B$ suprayectiva tal que $f = \tau_G \in M[G]$. Consideremos un ordinal $\beta \in M$ tal que $B \subset \beta$. Si B no está contenido en ningún conjunto numerable^M, entonces existe $p \in G$ tal que

$$p \Vdash \tau : \omega \longrightarrow \sigma \text{ suprayectiva} \wedge \sigma \subset \check{\beta} \wedge \bigwedge g \in \check{M}(g : \omega \longrightarrow \Omega \rightarrow \sigma \not\subset g[\omega]).$$

Para cada $n \in \omega$, sea $\tau_n = \{(\check{\alpha}, q) \in \beta \times \mathbb{P} \mid q \leq p \wedge q \Vdash \check{\alpha} \in \tau(\check{n})\}$. Claramente $p \Vdash \tau_n = \tau(\check{n})$.

Fijamos $(\kappa > 2^{|\mathbb{P}|})^M$ tal que $\mathbb{P} \in H(\kappa)^M$ (luego también $\{\tau_n\}_{n\in\omega} \in H(\kappa)^M$) y sea $N \prec H(\kappa)^M$ numerable^M que contenga a p y a $\{\tau_n\}_{n\in\omega}$, con lo que también contiene a cada τ_n. Sea $q \leq p$ una condición $(N, \mathbb{P})$-genérica y pasemos a considerar un filtro genérico G tal que $q \in G$. Entonces cada $x \in \sigma_G$ es de la forma $\tau_G(n) = \tau_{nG} \in N[G] \cap \Omega = N \cap \Omega$, que es un conjunto de ordinales numerable^M que contiene a σ_G, cuando p fuerza que no existe tal conjunto.

Esto implica que $\mathbb{P}$ no colapsa a $\aleph_1$, pues si $\aleph_1^M$ fuera numerable$^{M[G]}$ debería estar contenido en un conjunto numerable^M, lo cual es absurdo. ■

11.2 Preórdenes α-propios

La definición que hemos dado de c.p.o. propio no garantiza que si dos c.p.o.s son isomorfos, uno sea propio si y sólo si lo es el otro, porque depende de las propiedades de modelos que contengan a $\mathbb{P}$ (de hecho a $(\mathbb{P}, \leq, \mathbb{1})$) y eso a su vez depende en principio de la naturaleza conjuntista de $\mathbb{P}$, y no sólo de su estructura de orden. En esta sección presentamos algunas caracterizaciones que no involucran modelos elementales, entre ellas una que es “intrínseca”, en el sentido de que sólo involucra al c.p.o. y a sus subconjuntos. En realidad conviene considerar una definición que incluye a la de c.p.o. propio como caso particular:

Definición 11.12 Sea $\alpha > 0$ un ordinal numerable y κ un cardinal no numerable. Una *torre* de longitud α en $H(\kappa)$ es una sucesión $N = \{N_\delta\}_{\delta<\alpha}$ de submodelos elementales numerables de $H(\kappa)$ tal que:

a) Para todo ordinal límite $\lambda < \alpha$ se cumple $N_\lambda = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} N_\delta$.

b) Para todo $\beta < \beta + 1 < \alpha$ se cumple que $N_\beta \subset N_{\beta+1}$ y $\{N_\delta\}_{\delta\leq\beta} \in N_{\beta+1}$.

Un c.p.o. $\mathbb{P}$ es *α-propio* si para todo cardinal regular κ suficientemente grande y toda torre $N = \{N_\delta\}_{\delta<\alpha}$ en $H(\kappa)$ tal que $\mathbb{P} \in N_0$ y toda condición $p \in \mathbb{P} \cap N_0$, existe una condición $q \leq p$ que es $(N_\delta, \mathbb{P})$-genérica para todo $\delta < \alpha$ (y diremos entonces que q es $(N, \mathbb{P})$-genérica).

Es claro que los c.p.o.s propios son los 1-propios en este sentido. Más aún, si $\beta < \alpha$, toda torre de longitud β puede extenderse a otra de longitud α, de donde se sigue que todo c.p.o. α-propio es β-propio.

Ejercicio: Todo c.p.o. α-propio es $\alpha + 1$-propio.

De la prueba de 11.10 se sigue trivialmente que todo c.p.o. con la c.c.n. es α-propio para todo $\alpha < \omega_1$, pues allí se ve que toda condición es $(N_\delta, \mathbb{P})$-genérica. También es fácil probar que todo c.p.o. $\aleph_1$-cerrado es α-propio, usando dicho teorema para construir una sucesión decreciente $\{p_\delta\}_{\delta<\alpha}$ de condiciones tales que p_δ es $(N_\delta, \mathbb{P})$-genérica.

Para caracterizar intrínsecamente los c.p.o.s α-propios necesitamos la generalización de los conceptos de conjunto cerrado no acotado y estacionario que presentamos en el apéndice B. El teorema siguiente los relaciona con la definición de c.p.o. α-propio:

Teorema 11.13 *Si κ es un cardinal regular no numerable, $X \subset H(\kappa)$ es numerable y $\alpha > 0$ es un ordinal numerable, el conjunto de las torres $\{N_\delta\}_{\delta<\alpha}$ de longitud α en $H(\kappa)$ está en $\mathcal{D}^\alpha H(\kappa)$.*

Demostración: Fijemos una familia (numerable) de funciones de Skolem para el modelo $H(\kappa)$ y sea $S : [H(\kappa)]^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{P}^1 H(\kappa)$ la función que a cada x le asigna las imágenes por todas las funciones de Skolem de todas las combinaciones posibles de argumentos en x. De este modo, todo $N \subset H(\kappa)$ cerrado para S cumple $N \prec H(\kappa)$. Definimos $F \in \mathcal{F}^\alpha(H(\kappa)$ mediante

$$F(\{a_\delta\}_{\delta<\beta}, x) = S(x) \cup \{\{a_\delta\}_{\delta<\beta}\}.$$

De este modo, si $\{N_\delta\}_{\delta<\alpha} \in G(F)$, se cumple que cada $N_\delta \prec H(\kappa)$ y

$$\{N_\delta\}_{\delta\leq\beta} \in F(\{N_\delta\}_{\delta<\beta+1}, \varnothing) \subset N_{\beta+1},$$

lo cual, junto con la propia definición de $\mathcal{P}^\alpha H(\kappa)$, prueba que $\{N_\delta\}_{\delta<\alpha}$ es una torre en $H(\kappa)$. Así pues, el conjunto de todas las torres contiene a $G(F)$ y, por consiguiente, está en $\mathcal{D}^\alpha H(\kappa)$. ■

Dado un c.p.o. $\mathbb{P}$, definimos $A = \mathbb{P} \cup \mathcal{P}\mathbb{P}$, que es un conjunto no numerable. Definimos $T^\alpha(\mathbb{P})$ como el conjunto de las sucesiones $a \in \mathcal{P}^\alpha A$ tales que para todo $p_0 \in a_0 \cap \mathbb{P}$ existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \leq p_0$ y para todo $\beta < \alpha$ y todo $D \in a_\beta \cap \mathcal{P}\mathbb{P}$ denso en $\mathbb{P}$ se cumple que $D \cap a_\beta$ es predenso bajo p.

Teorema 11.14 *Para todo c.p.o. $\mathbb{P}$ y todo ordinal numerable $\alpha > 0$, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) $\mathbb{P}$ es α-propio.

b) Para todo cardinal regular κ suficientemente grande, el conjunto de las torres $N = \{N_\delta\}_{\delta<\alpha}$ en $H(\kappa)$ tales que $\mathbb{P} \in N_0$ y para toda $p \in \mathbb{P} \cap N_0$, existe una condición $(N, \mathbb{P})$-genérica $q \leq p$ está en $\mathcal{D}^\alpha H(\kappa)$.

c) Existe un cardinal regular $\kappa > 2^{|\mathbb{P}|}$ tal que $\mathbb{P} \in H(\kappa)$ y el conjunto de las torres $N = \{N_\delta\}_{\delta<\alpha}$ en $H(\kappa)$ tales que $\mathbb{P} \in N_0$ y para toda $p \in \mathbb{P} \cap N_0$, existe una condición $(N, \mathbb{P})$-genérica $q \leq p$ está en $\mathcal{D}^\alpha H(\kappa)$.

d) Para todo cardinal μ no numerable y todo E estacionario en $\mathcal{P}^\alpha\mu$, se cumple que $\mathbb{1} \Vdash \check{\mu}$ es no numerable y $\check{E}$ es estacionario en $\mathcal{P}^{\check{\alpha}}\check{\mu}$.

e) Lo mismo que d), pero para $\mu = 2^{|\mathbb{P}|}$.

f) $T^\alpha(\mathbb{P}) \in \mathcal{D}^\alpha A$, donde $A = \mathbb{P} \cup \mathcal{P}\mathbb{P}$.

DEMOSTRACIÓN: Claramente a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c). Veamos simultáneamente que b) $\Rightarrow$ d) y que c) $\Rightarrow$ e). Basta probar ambas implicaciones relativizadas a un modelo transitivo numerable M arbitrario de ZFC. Fijamos, pues, en M un cardinal μ no numerable que puede ser arbitrario o concretamente $\mu = 2^{|\mathbb{P}|}$, y tomamos E estacionario en $\mathcal{P}^\alpha\mu$.

Observamos ahora que la conclusión del teorema 11.11 es válida tanto bajo la hipótesis de b) como la de c). En efecto, en la prueba de 11.11 elegimos arbitrariamente un cardinal $\kappa > 2^{|\mathbb{P}|}$ tal que $\mathbb{P} \in H(\kappa)$, luego bajo la hipótesis c) podemos tomar el dado por dicha hipótesis.

Por el teorema anterior (manteniendo la notación de la prueba de 11.11), el conjunto de las α-torres tales que cumplen $p, \{\tau_n\}_{n\in\omega} \in N_0$ está en $\mathcal{D}^\alpha H(\kappa)$, porque es la intersección del conjunto de todas las α-torres con el conjunto $\{a \in \mathcal{P}^\alpha H(\kappa) \mid \{p, \{\tau_n\}_{n\in\omega}\} \subset a_0\} \in \mathcal{D}^\alpha H(\kappa)$, luego podemos tomar una que además cumpla lo indicado en b) o c). Esto nos permite tomar una condición $q \leq p$ que sea, en particular, $(N_0, \mathbb{P})$-genérica, y a partir de ahí la prueba de 11.11 continúa sin cambio alguno, considerando N_0 en el papel de N.

Por lo tanto, $\mathbb{P}$ no colapsa a $\aleph_1$ y concluimos que $\mathbb{1} \Vdash \check{\mu}$ es no numerable. Supongamos, por reducción al absurdo, que existe un filtro genérico G tal que

E no es estacionario en $(\mathcal{P}^\alpha\mu)^{M[G]}$. Eso significa que existe $F \in \mathcal{F}^\alpha(\mu)^{M[G]}$ tal que $G(F)^{M[G]} \cap E = \varnothing$. Pongamos que $F = \tau_G$ y sea $p \in \mathbb{P}$ tal que

$$p \Vdash \tau \in \mathcal{F}^{\check{\alpha}}(\check{\mu}) \land G(\tau) \cap \check{E} = \varnothing.$$

Bajo la hipótesis b) tomamos un cardinal regular^M κ suficientemente grande como para que $\mathbb{P}$, p, τ, $\mu \in H(\kappa)^M$. Bajo la hipótesis c) el cardinal κ está fijado y cumple claramente que $\mathbb{P}$, p, $\mu \in H(\kappa)^M$, y como, por el teorema 11.1, se cumple que $F \in H(\kappa)^{M[G]} = H(\kappa)^M[G]$, también podemos suponer que $\tau \in H(\kappa)^M$.

Por los teoremas 11.13 y B.15 (relativizados a M) el conjunto de las sucesiones de la forma $\{\mu \cap N_\delta\}_{\delta<\alpha}$, donde $\{N_\delta\}_{\delta<\alpha}$ es una torre en $H(\kappa)$ con $\mathbb{P}$, p, τ, $\mu \in N_0$, está en $\mathcal{D}^\alpha\mu$, y también lo está la intersección de este conjunto con el indicado en la hipótesis b) o c), luego existe una torre N que cumple la hipótesis de genericidad y además $a = \{\mu \cap N_\delta\}_{\delta<\alpha} \in E$.

Por consiguiente, existe una condición $(N, \mathbb{P})$-genérica $q \leq p$. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $q \in G$. Entonces $F = \tau_G \in \mathcal{F}^\alpha(\mu)^{M[G]}$, pero $G(F)^{M[G]} \cap E = \varnothing$. Vamos a probar que $a \in G(F)^{M[G]}$ y tendremos una contradicción.

Fijamos $\beta < \alpha$ que no sea un limite. Pongamos que $\beta = \gamma + 1$ (el caso $\beta = 0$ es más fácil). Sabemos que $\mu, \{N_\delta\}_{\delta\leq\gamma} \in N_\beta$, luego $\{\mu \cap N_\delta\}_{\delta<\beta} \in N_\beta$, y si $x \subset \mu \cap N_\beta$ es finito, entonces $x \in N_\beta$. Como $F \in N_\beta[G]$, se cumple que $F(\{a_\delta\}_{\delta<\beta}, x) \in N_\beta[G]$. También sabemos que $F(\{a_\delta\}_{\delta<\beta}, x) \subset \mu$ es numerable$^{M[G]}$, luego $N_\beta[G] \prec H(\kappa)^{M[G]}$ implica que $F(\{a_\delta\}_{\delta<\beta}, x) \subset N_\beta[G]$, luego en total

$$F(\{a_\delta\}_{\delta<\beta}, x) \subset N_\beta[G] \cap \mu \subset N_\beta[G] \cap M \cap \mu = N_\beta \cap \mu = a_\beta.$$

Esto prueba que $a \in G(F) \cap E$.

Obviamente d) $\Rightarrow$ e). Veamos que e) $\Rightarrow$ f). Demostraremos la relativización de la implicación a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Observemos que $|A|^M = \mu$. Supongamos que en M se cumple que $T^\alpha(\mathbb{P}) \notin \mathcal{D}^\alpha A$, con lo que $E = \mathcal{P}^\alpha A \setminus T^\alpha(\mathbb{P})$ es estacionario.

Si $a \in E$, existe $p_0 \in a_0 \cap \mathbb{P}$ tal que para todo $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \leq p_0$ existe un $\beta < \alpha$ y un $D \in a_\beta \cap \mathcal{P}\mathbb{P}$ denso en $\mathbb{P}$ tal que $a_\beta \cap D$ no es predenso bajo p. Tenemos, pues una función $g : E \longrightarrow A$ dada por $g(a) = p_0 \in a_0$. Por el teorema B.14 existe $E_0 \subset E$ estacionario tal que todo $a \in E$ incumple su pertenencia a $T^\alpha(\mathbb{P})$ con la misma condición p_0, es decir, para todo $a \in E$:

$$\bigwedge p \leq p_0 \bigvee \beta < \alpha \bigvee D \in a_\beta (D \text{ es denso en } \mathbb{P} \land a_\beta \cap D \text{ no es predenso bajo } p).$$

Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $p_0 \in \mathbb{P}$. Es fácil ver que la hipótesis de que $\mathbb{P}$ conserva los subconjuntos estacionarios de $\mathcal{P}^\alpha\mu$ y el hecho de que $|A| = \mu$ se traduce en que también conserva los subconjuntos estacionarios de $\mathcal{P}^\alpha A$, de modo que E es estacionario$^{M[G]}$.

Ahora razonamos en $M[G]$ y fijamos una función $F \in \mathcal{F}^\alpha(A)^{M[G]}$ tal que si D es denso en $\mathbb{P}$

$$F(\{a_\delta\}_{\delta<\beta}, \{D\}) = \{q\} \qquad \text{con } q \in D \cap G.$$

Podemos tomar $a \in E \cap G(F)$. Esto significa que si $D \in a_\beta$ es denso en $\mathbb{P}$, entonces $F(\{a_\delta\}_{\delta<\beta}, \{D\}) \subset a_\beta$, luego $a_\beta \cap D \cap G \neq \varnothing$. Sea $p \leq p_0$ una condición que fuerce esto, es decir, tal que

$$p \Vdash \bigwedge \beta < \check{\alpha} \bigwedge D \in a_\beta (D \text{ es denso en } \check{\mathbb{P}} \to a_\beta \cap D \cap \Gamma \neq \varnothing).$$

Por la elección de E (razonando en M) tenemos que existen $\beta < \alpha$ y $D \in a_\beta$ de modo que D es denso en $\mathbb{P}$ y $a_\beta \cap D$ no es predenso bajo p, luego existe una condición $q \leq p$ tal que $q \perp (a_\beta \cap D)$. Tomamos entonces un filtro genérico G tal que $q \in G$. Por la elección de p sucede que existe $r \in a_\beta \cap D \cap G$, pero entonces q es compatible con r y tenemos una contradicción.

Veamos finalmente que f) $\Rightarrow$ a). Por reducción al absurdo, supongamos que existe un $\alpha > 0$ numerable tal que $T^\alpha(\mathbb{P}) \in \mathcal{D}^\alpha A$ pero $\mathbb{P}$ no es α-propio. Llamamos α al menor ordinal que cumple esto. Entonces existe un cardinal regular $\kappa > 2^{|\mathbb{P}|}$ y una torre $\{N_\delta\}_{\delta<\alpha}$ en $H(\kappa)$ tal que $\mathbb{P} \in N_0$ que no cumplen la definición de c.p.o. α-propio.

Como $\mathbb{P} \in N_0$ y $A = \mathbb{P} \cup \mathcal{P}\mathbb{P} \in H(\kappa)$, también $A \in N_0$, y como α se define a partir de $\mathbb{P}$, resulta que $\alpha \in N_0$, luego a su vez $\mathcal{P}^\alpha A$, $T_\alpha(\mathbb{P}) \in N_0$. Como $\{N_\delta\}_{\delta<\beta+1} \in N_{\beta+1}$, también $\{N_\delta \cap A\}_{\delta<\beta+1} \in N_{\beta+1}$.

Por hipótesis existe $F \in \mathcal{F}^\alpha A$ tal que $G(F) \subset T^\alpha(\mathbb{P})$, y podemos tomar $F \in N_0$. Entonces, si $x \in [N_{\beta+1}^{<\omega}$, tenemos que $F(\{N_\delta \cap A\}_{\delta<\beta+1}, x) \in N_{\beta+1}$ y, al ser numerable, $F(\{N_\delta \cap A\}_{\delta<\beta+1}, x) \subset N_{\beta+1}$. Lo mismo vale claramente para 0 en lugar de $\beta + 1$, luego $\{N_\delta \cap A\}_{\delta<\alpha} \in G(F) \subset T^\alpha(\mathbb{P})$.

De este modo, por definición de $T^\alpha(\mathbb{P})$, si $p_0 \in N_0 \cap \mathbb{P} \subset (N_0 \cap A) \cap \mathbb{P}$, existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \leq p_0$ y para todo $\beta < \alpha$ y todo $D \in (N_\beta \cap A) \cap \mathcal{P}\mathbb{P}$ denso en $\mathbb{P}$ se cumple que $D \cap A \cap N_\beta$ es predenso bajo p. Observamos que la propiedad de p equivale a que si $D \in N_\beta$ es denso en $\mathbb{P}$ entonces $D \cap N_\beta$ es predenso bajo p, lo cual equivale a decir que p es $(N_\beta, \mathbb{P})$-genérico (véase la nota posterior a 11.7). Por lo tanto, la torre $\{N_\delta\}_{\delta<\alpha}$ sí que cumple la definición de c.p.o. α-propio, en contra de lo supuesto. ■

Observaciones

a) La propiedad f) del teorema anterior depende únicamente de la estructura de orden de $\mathbb{P}$, luego ahora podemos afirmar que si dos c.p.o.s son semejantes y uno de ellos es α-propio el otro también lo es.

b) En particular tenemos que un c.p.o. es propio si y sólo si conserva los subconjuntos estacionarios de $\mathcal{P}_{\aleph_1}\mu$, para todo cardinal no numerable μ o, equivalentemente, para $\mu = 2^{|\mathbb{P}|}$ (y en particular conserva la no numerabilidad de μ).

c) Similarmente, para que un c.p.o. sea propio basta con que cumpla la definición 11.9 para un conjunto c.n.a. en $\mathcal{P}_{\aleph_1}H(\kappa)$ de submodelos elementales $N \prec H(\kappa)$.

d) Si, dado un cardinal regular no numerable κ fijamos un buen orden $\trianglelefteq$ en $H(\kappa)$, podemos considerar a $H(\kappa)$ como modelo del lenguaje formal que resulta de añadir al lenguaje de la teoría de conjuntos un relator binario que se interpreta como $\trianglelefteq$, y es claro que el teorema 11.13 vale con la misma prueba si consideramos torres de submodelos elementales de $(H(\kappa), \in, \trianglelefteq)$. Combinando esto con el teorema anterior, es inmediato que la definición de c.p.o. α-propio es equivalente a la que resulta de restringir las torres a torres de submodelos elementales de $(H(\kappa), \in, \trianglelefteq)$, para un buen orden $\trianglelefteq$ prefijado arbitrariamente. De hecho, el mismo argumento nos permite incorporar cualquier otra relación, función o constante a $H(\kappa)$.

e) En particular, la definición de c.p.o. propio puede restringirse sin pérdida de generalidad a submodelos elementales de $(H(\kappa), \in, \trianglelefteq)$. El interés de este hecho (y del caso general de la observación precedente) es que así podemos garantizar que objetos definidos en $H(\kappa)$ en términos del buen orden $\trianglelefteq$ están realmente en los submodelos elementales considerados (si todos los parámetros de la definición están en ellos). ■

11.3 Iteración de extensiones propias

Como hemos explicado al principio del capítulo, la característica común a todas las propiedades que estudiamos aquí es que se conservan por iteraciones con soportes numerables. Dedicamos esta sección a probar que esto es válido para la propiedad de ser α-propio.

Observemos que si M es un modelo transitivo numerable de ZFC, $\mathbb{P} \in M$ es un c.p.o. y $\pi \in M$ es un nombre para un c.p.o.^{M}, entonces podemos definir nombres canónicos

$$\Gamma_1 = \{(\check{p}, (p, \sigma)) \mid (p, \sigma) \in \mathbb{P} * \pi\}, \quad \Gamma_2 = \{(\sigma, (p, \sigma)) \mid (p, \sigma) \in \mathbb{P} * \pi\}$$

de modo que si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y H es un filtro π_G-genérico sobre $M[G]$ entonces $(\Gamma_1)_{G*H} = G$ y $(\Gamma_2)_{G*H} = H$.

Observemos ahora que las extensiones que estamos considerando de submodelos elementales no necesariamente transitivos se comportan bien respecto de productos generalizados de c.p.o.s:

Teorema 11.15 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea κ un cardinal regular no numerable^M, sea $N \prec H(\kappa)^M$, sea $\mathbb{P} \in N$ un c.p.o. y sea $\pi \in N$ un $\mathbb{P}$-nombre para un c.p.o.^{M}. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y sea H un filtro π_G-genérico sobre $M[G]$. Entonces $N[G * H] = N[G][H]$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $u \in N[G][H]$, entonces $u = (\sigma_G)_H$, con $\sigma \in N$. Como $M[G][H] = M[G * H]$, es obvio que $\mathbb{1} \Vdash \bigvee x\, x = (\check{\sigma}_{\Gamma_1})_{\Gamma_2}$ (aquí hay que entender que τ_H se define trivialmente cuando τ no es un π_G-nombre). Más aún, como $\sigma \in H(\kappa)^M$, de hecho $\mathbb{1} \Vdash \bigvee x \in H(\check{\kappa})\ x = (\check{\sigma}_{\Gamma_1})_{\Gamma_2}$, luego por 11.2 existe

$\tau \in H(\kappa)^M$ tal que $\mathbb{1} \Vdash \tau = (\check{\sigma}_{\Gamma_1})_{\Gamma_2}$. Como $\check{\sigma}$, Γ_1, $\Gamma_2 \in N$, podemos tomar $\tau \in N$, y entonces $u = (\sigma_G)_H = \tau_{G*H} \in N[G*H]$.

Para probar la inclusión opuesta observamos que para todo $\sigma \in M^{\mathbb{P}*\pi}$ existe $\bar{\sigma} \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $\mathbb{1} \Vdash \sigma = (\bar{\sigma}_{\Gamma_1})_{\Gamma_2}$. Definimos $\bar{\sigma}$ por recursión sobre el rango:

$$\bar{\sigma} = \{(\text{p.o.}(\bar{\tau}, \rho), p) \mid (\tau, (p, \rho)) \in \sigma\},$$

y claramente cumple lo pedido.

Por lo tanto, si $u \in N[G*H]$, tenemos que $u = \sigma_{G*H}$, con $\sigma \in N$, pero entonces $\bar{\sigma} \in N$, y $u = (\bar{\sigma}_G)_H \in N[G][H]$. ■

Las condiciones genéricas respecto de un producto generalizado tienen una caracterización natural:

Teorema 11.16 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y π un $\mathbb{P}$-nombre para un c.p.o.^{M}. Sea κ un cardinal regular^M suficientemente grande y $N \prec H(\kappa)^M$ numerable^M tal que $\mathbb{P}$, $\pi \in N$. Entonces $(p, \sigma) \in \mathbb{P} * \pi$ es $(N, \mathbb{P} * \pi)$-genérica si y sólo si p es $(N, \mathbb{P})$-genérica y*

$$p \Vdash \check{\sigma} \text{ es } (\check{N}[\Gamma], \pi)\text{-genérica.}$$

DEMOSTRACIÓN: Usamos la caracterización 11.8 d). Si p es $(N, \mathbb{P})$-genérica y $p \Vdash \check{\sigma}$ es $(\check{N}[\Gamma], \pi)$-genérica y $G*H$ es un filtro genérico tal que $(p, \sigma) \in G*H$, entonces $p \in G$, luego $N[G] \cap \Omega = N \cap \Omega$, y por otra parte $\sigma_G \in H$, luego $N[G][H] \cap \Omega = N[G] \cap \Omega$. Por el teorema anterior

$$N[G*H] \cap \Omega = N[G][H] \cap \Omega = N[G] \cap \Omega = N \cap \Omega,$$

luego $(p, \sigma) \Vdash \check{N}[\Gamma] \cap \Omega = \check{N} \cap \Omega$, y esto implica que la condición (p, σ) es $(N, \mathbb{P} * \pi)$-genérica.

Recíprocamente, si (p, σ) es $(N, \mathbb{P} * \pi)$-genérica y G es un filtro genérico tal que $p \in G$, tomamos cualquier filtro genérico H que contenga a σ_G y entonces

$$N \cap \Omega \subset N[G] \cap \Omega \subset N[G][H] \cap \Omega = N[G*H] \cap \Omega = N \cap \Omega,$$

luego $p \Vdash \check{N} \cap \Omega = \check{N}[\Gamma] \cap \Omega$, luego p es $(N, \mathbb{P})$-genérica. Este mismo argumento prueba también que $p \Vdash \check{\sigma}$ es $(\check{N}[\Gamma], \pi)$-genérica. ■

Veamos a continuación que si $\mathbb{P}$ es propio y $\mathbb{1} \Vdash \pi$ es propio entonces el producto $\mathbb{P} * \pi$ es propio. Para extender el resultado a iteraciones de longitud arbitraria necesitamos probar algo más general:

Teorema 11.17 *Sea $\mathbb{P}$ un c.p.o. propio y π un nombre para un c.p.o. tal que $\mathbb{1} \Vdash \pi$ es propio. Sea $\mathbb{R} = \mathbb{P} * \pi$, sea $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{P}$ la proyección dada por $\phi(p, \sigma) = p$ y sea $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ la inmersión completa dada por $i(p) = (p, \mathbb{1})$. Sea κ un cardinal regular no numerable y $N \prec H(\kappa)$ numerable tal que $\mathbb{R} \in N$. Sea $p \in \mathbb{P}$ una condición $(N, \mathbb{P})$-genérica y sea $\sigma \in V^{\mathbb{P}}$ tal que*

$$p \Vdash \sigma \in \check{N} \cap \check{\mathbb{R}} \wedge \check{\phi}(\sigma) \in \Gamma.$$

Entonces existe $\tau \in \hat{\pi}$ tal que (p, τ) es $(N, \mathbb{R})$-genérica y $(p, \tau) \Vdash i(\sigma) \in \Gamma$.

(Notemos que Γ representa primero al $\mathbb{P}$-nombre canónico del filtro genérico y luego a $\mathbb{R}$-nombre canónico del filtro genérico.)

Demostración: Basta probar la relativización del teorema a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $p \in G$. Entonces $\sigma_G \in N \cap \mathbb{R}$ es de la forma $\sigma_G = (q, \tau_0)$, con $q \in G$ y $\tau_0 \in \hat{\pi}$. A su vez $\tau_{0G} \in \pi_G$. Como π_G es propio, existe una condición $r \leq \tau_{0G}$ que es $(N[G], \pi_G)$-genérica. Con esto hemos probado que

$$p \Vdash \bigvee rq\tau_0 (r \in \pi \wedge \sigma = (q, \tau_0) \wedge r \leq \tau_{0\Gamma} \wedge r \text{ es } (\check{N}[\Gamma], \pi)\text{-genérica}).$$

Por 4.49 existe $\tau \in \hat{\pi}$ tal que

$$p \Vdash \bigvee q\tau_0 (\tau \in \pi \wedge \sigma = (q, \tau_0) \wedge q \in \Gamma \wedge \tau \leq \tau_{0\Gamma} \wedge \tau \text{ es } (\check{N}[\Gamma], \pi)\text{-genérica}).$$

En particular (p, τ) es $(N, \mathbb{R})$-genérica por el teorema anterior.

Falta probar que $(p, \tau) \Vdash i(\sigma) \in \Gamma$. En efecto, si $G * H$ es un filtro genérico tal que $(p, \tau) \in G * H$, entonces $p \in G$, luego $\sigma_G = (q, \tau_0)$ con $q \in G$, $\tau_G \leq \tau_{0G}$. Como $\tau_G \in H$, también $\tau_{0G} \in H$, luego $i(\sigma)_{G*H} = \sigma_G \in G * H$. ■

Para deducir aquí que los productos generalizados de c.p.o.s propios son propios conviene suponer que además son separativos (recordemos a este respecto el teorema 7.16). Esto no supone ninguna pérdida de generalidad, pues todo c.p.o. puede sumergirse densamente en un c.p.o. separativo (en un álgebra de Boole completa, por ejemplo).

Concretamente, la propiedad básica que nos va a interesar es que si $\mathbb{P}$ es separativo y p, $q \in \mathbb{P}$ cumplen $p \Vdash \check{q} \in \Gamma$, entonces $p \leq q$.

En efecto, en caso contrario existe $p' \leq p$, $p' \perp q$, y si G es un filtro genérico tal que $p' \in G$, entonces también $q \in G$, contradicción.

Teniendo esto en cuenta ya es fácil probar:

Teorema 11.18 *Sea $\mathbb{P}$ un c.p.o. propio y separativo y sea π un nombre para un c.p.o. tal que $\mathbb{1} \Vdash \pi$ es propio y separativo. Entonces $\mathbb{P} * \pi$ es propio y separativo.*

Demostración: Por 7.16 sabemos que $\mathbb{P} * \pi$ es separativo. Fijemos un cardinal κ suficientemente grande, y un submodelo elemental $N \prec H(\kappa)$ numerable tal que $\mathbb{R} = \mathbb{P} * \pi \in N$. Si $r = (p, \tau) \in \mathbb{R} \cap N$, como $\mathbb{P}$ es propio existe una condición $p' \leq p$ que es $(N, \mathbb{P})$-genérica. Obviamente (manteniendo la notación del teorema anterior) tenemos que $p' \Vdash \check{r} \in \check{N} \cap \check{\mathbb{R}} \wedge \check{\phi}(\check{r}) \in \Gamma$, luego existe $\tau \in \hat{\pi}$ tal que la condición $(p', \tau) \in \mathbb{R}$ es $(N, \mathbb{R})$-genérica y $(p', \tau) \Vdash \check{r} \in \Gamma$. Como $\mathbb{R}$ es separativo, esto último implica que $(p', \tau) \leq r$. ■

Ahora vamos a generalizar este hecho a iteraciones de longitud arbitraria. Para ello necesitamos previamente un resultado sobre iteraciones de c.p.o.s separativos:

Teorema 11.19 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC−AP *y en M sea $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\gamma}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\gamma})$ una iteración de preórdenes separativos. Sean $\delta < \epsilon \leq \gamma$, sea $D \in M$ un conjunto denso en $\mathbb{P}_\epsilon$, sea G un filtro $\mathbb{P}_\delta$-genérico sobre M y sea $q \in \mathbb{P}_\epsilon$ tal que $q|_\delta \in G$. Entonces existe $d \in D$, $d \leq q$ tal que $d|_\delta \in G$.*

Demostración: En caso contrario, en $M[G]$ se cumple que

$$\bigwedge d \in D(d \leq q \rightarrow d|_\delta \notin G),$$

luego podemos tomar $p \in \mathbb{P}_\delta$ tal que $p \Vdash \check{q}|_{\check{\delta}} \in \Gamma \wedge \bigwedge d \in \check{D}(d \leq \check{q} \rightarrow d|_{\check{\delta}} \notin \Gamma)$. Como $p \Vdash \check{q}|_{\check{\delta}} \in \Gamma$ y $\mathbb{P}_\delta$ es separativo, la observación previa al teorema implica que $p \leq q|_\delta$. Definimos $q' \in \mathbb{P}_\epsilon$ mediante

$$q'(\alpha) = \begin{cases} p(\alpha) & \text{si } \alpha < \delta, \\ q(\alpha) & \text{si } \delta \leq \alpha < \epsilon, \end{cases}$$

entonces ciertamente $q' \in \mathbb{P}_\epsilon$ (en los ordinales límite se cumple cualquiera de las restricciones posibles sobre el soporte que estamos considerando, que sea finito, numerable o arbitrario, dado que p y q las cumplen) y es fácil ver que $q' \leq q$, y claramente $q'|_\delta = p$.

Ahora usamos que D es denso para tomar $d \in D$ tal que $d \leq q'$. En particular $d \leq q$ y $d|_\delta \leq q'|_\delta = p$, luego si G es un filtro $\mathbb{P}_\delta$-genérico sobre M tal que $d|_\delta \in G$, tenemos una contradicción, pues $p \in G$ y entonces debería ser $d|_\delta \notin G$. ■

El teorema principal es el siguiente:

Teorema 11.20 *Sea $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\gamma}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\gamma})$ una iteración de preórdenes con soportes numerables tal que, para cada $\delta < \gamma$, $\mathbb{P}_\delta$ sea propio y separativo*[1] *y $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi_\delta$ es propio y separativo, sea κ un cardinal suficientemente grande y $N \prec H(\kappa)$ numerable tal que γ, $\mathbb{P}_\gamma \in N$. Sea $\gamma_0 \in \gamma \cap N$ y $q_0 \in \mathbb{P}_{\gamma_0}$ una condición $(N, \mathbb{P}_{\gamma_0})$-genérica. Entonces, si $\sigma_0 \in V^{\mathbb{P}_{\gamma_0}}$ cumple que*

$$q_0 \Vdash \sigma_0 \in \check{\mathbb{P}}_\gamma \cap \check{N} \wedge \sigma_0|_{\check{\gamma}_0} \in \Gamma,$$

existe una condición $(N, \mathbb{P}_\gamma)$-genérica q tal que $q|_{\gamma_0} = q_0$ y $q \Vdash i_{\gamma_0\gamma}(\sigma_0) \in \Gamma$.

Demostración: Razonamos por inducción sobre γ. Si $\gamma = 0$ no hay nada que probar. Supongamos que $\gamma = \delta + 1$. Si $\gamma_0 < \delta$, tenemos que

$$q_0 \Vdash \sigma_0|_{\check{\delta}} \in \check{\mathbb{P}}_\delta \cap \check{N} \wedge \sigma_0|_{\check{\delta}}|_{\check{\gamma}_0} \in \Gamma,$$

luego por hipótesis de inducción existe una condición $(N, \mathbb{P}_\delta)$-genérica q_1 de manera que $q_1|_{\gamma_0} = q_0$ y $q_1 \Vdash i_{\gamma_0\delta}(\sigma_0)|_{\check{\delta}} \in \Gamma$.

Puesto que $q_1 \leq i_{\gamma_0\delta}(q_0)$, se cumple que $q_1 \Vdash i_{\gamma_0\delta}(\sigma_0) \in \check{\mathbb{P}}_\gamma \cap \check{N}$, luego podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\delta = \gamma_0$. En tal caso, puesto que, $\mathbb{P}_\gamma \cong \mathbb{P}_{\gamma_0} * \pi_{\gamma_0}$, basta aplicar el teorema 11.17.

[1]Una vez probado el teorema 11.21 la hipótesis de que $\mathbb{P}_\delta$ sea propio y separativo puede eliminarse.

Supongamos ahora que γ es un ordinal límite, que puede ser no numerable, pero en cualquier caso $\gamma \cap N$ es un conjunto numerable de ordinales. Como γ es un ordinal límite^N, es claro que $\gamma \cap N$ no está acotado, luego podemos tomar una sucesión cofinal creciente $\{\gamma_n\}_{n\in\omega}$ tal que $\gamma_n \in \gamma \cap N$ y no acotada en $\gamma \cap N$. Además podemos suponer que γ_0 es el ordinal dado en el enunciado. Sea $\{D_n\}_{n\in\omega}$ una enumeración de los subconjuntos densos de $\mathbb{P}_\gamma$ pertenecientes a N. Vamos a definir recurrentemente condiciones $q_n \in \mathbb{P}_{\gamma_n}$ y nombres $\sigma_n \in V^{\mathbb{P}_{\gamma_n}}$ tales que:

a) $q_0 \in \mathbb{P}_{\gamma_0}$ es la condición dada en el enunciado, q_n es $(N, \mathbb{P}_{\gamma_n})$-genérica y $q_{n+1}|_{\gamma_n} = q_n$.

b) σ_0 es el nombre dado en el enunciado y, para $n > 0$,

$$q_n \Vdash \sigma_n \in \check{N} \cap \check{D}_{n-1} \wedge \sigma_n|_{\check{\gamma}_n} \in \Gamma \wedge \sigma_n \leq i_{\gamma_{n-1}\gamma_n}(\sigma_{n-1}).$$

Admitamos que hemos construido estas sucesiones y sea $\bar{q} = \bigcup\limits_{n<\omega} q_n \in \mathbb{P}_{\bar{\gamma}}$, donde $\bar{\gamma} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \gamma_n$ (y aquí usamos que $\mathbb{P}_{\bar{\gamma}}$ tiene soportes numerables) y sea $q = i_{\bar{\gamma},\gamma}(\bar{q})$. Sea $\sigma'_n = i_{\gamma_n\gamma}(\sigma_n)$.

Podemos relativizar toda la demostración a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Veamos que si $m < n$ entonces

$$q \Vdash \sigma'_n \in \check{\mathbb{P}}_\gamma \cap \check{N} \cap \check{D}_{n-1} \wedge \sigma'_n \leq \sigma'_m.$$

Para ello tomamos un filtro genérico G tal que $q \in G$ y observamos que $q \leq i_{\gamma_n\gamma}(q_n)$, luego $q_n \in G_{\gamma_n}$, luego $\sigma'_{nG} = \sigma_{nG_{\gamma_n}} \in \mathbb{P}_\gamma \cap N \cap D_{n-1}$. Además

$$\sigma'_{nG} = (\sigma_n)_{G_{\gamma_n}} \leq i_{\gamma_{n-1}\gamma_n}(\sigma_{n-1})_{G_{\gamma_n}} = (\sigma_{n-1})_{G_{\gamma_{n-1}}} = \sigma'_{n-1G}.$$

De aquí se sigue obviamente que $\sigma'_n \leq \sigma'_m$.

Veamos ahora que $q \Vdash \sigma'_n \in \Gamma$. Sea $q' \leq q$ y tomemos un filtro G tal que $q' \in G$. Entonces $q \in G$ y como antes $q_n \in G_{\gamma_n}$, luego $p = \sigma'_{nG} \in \mathbb{P}_\gamma \cap N$ y tomamos una condición $q'' \in G$, $q'' \leq q'$, tal que $q'' \Vdash \sigma'_n = \check{p}$. Ahora pasamos a un filtro G tal que $q'' \in G$. Nuevamente $q_n \in G_{\gamma_m}$ para todo m, luego $\sigma'_{mG}|_{\gamma_m} = \sigma_{mG_{\gamma_m}} \in G_{\gamma_m}$. Así, si $m > n$, tenemos que $\sigma'_{mG} \leq \sigma'_{nG}$, luego $\sigma'_{mG}|_{\gamma_m} \leq \sigma'_{nG}|_{\gamma_m}$, luego $\sigma'_{nG}|_{\gamma_m} \in G_{\gamma_m}$. Equivalentemente, $p|_{\gamma_m} \in G_{\gamma_m}$, para todo $m > n$.

Si llamamos $p'_m = i_{\gamma_m\gamma}(p|_{\gamma_m})$, tenemos que $p'_m \in G$, luego hemos probado que $q'' \Vdash \check{p}'_m \in \Gamma$, para todo m. Como $\mathbb{P}_\gamma$ es separativo, $q'' \leq p'_m = i_{\gamma_m\gamma}(p|_{\gamma_m})$. A su vez, de aquí concluimos que $q'' \leq i_{\bar{\gamma}\gamma}(p|_{\bar{\gamma}}) = p$, puesto que, como $p \in N$, se cumple que $\operatorname{sop} p \subset \gamma \cap N \subset \bar{\gamma}$. Por lo tanto $p \in G$ y esto prueba que $q'' \Vdash \sigma'_n \in \Gamma$. Con esto tenemos que el conjunto de condiciones que fuerzan $\sigma'_n \in \Gamma$ es denso bajo q, luego $q \Vdash \sigma'_n \in \Gamma$. En definitiva,

$$q \Vdash \sigma'_n \in \check{N} \cap \check{D}_{n-1} \cap \Gamma,$$

y el teorema 11.8 implica que q es una condición $(N, \mathbb{P}_\gamma)$-genérica. Obviamente cumple $q|_{\gamma_0} = q_0$ y hemos visto que $q \Vdash \sigma'_0 \in \Gamma$, como requiere el enunciado.

Sólo falta construir las sucesiones $\{q_n\}_n$ y $\{\sigma_n\}_n$ en las condiciones indicadas.

Partimos de la condición q_0 y el nombre σ_0 dados en el enunciado, que claramente cumplen lo requerido. Supongamos definidos q_n y σ_n. Tomemos un filtro $\mathbb{P}_{\gamma_n}$-genérico G tal que $q_n \in G$. Entonces $p_n = \sigma_{nG} \in \mathbb{P}_\gamma \cap N$ cumple que $p_n|_{\gamma_n} \in G$. Se cumple entonces que existe una condición $p_{n+1} \in D_n \cap N$ tal que $p_{n+1} \leq p_n$ y $p_{n+1}|_{\gamma_n} \in G$. En efecto, basta aplicar el teorema 11.19 al colapso transitivo $\bar{N}$ y al filtro colapsado $\bar{G}$, que $\bar{P}$-genérico sobre $\bar{N}$ porque la condición $q_n \in G$ es $(N, \mathbb{P}_{\gamma_n})$-genérica. De este modo, hemos probado que

$$q_n \Vdash \bigvee p \in \check{D}_n \cap \check{N}(p \leq \sigma_n \wedge p|_{\check{\gamma}_n} \in \Gamma),$$

luego existe $\sigma^*_{n+1} \in M^{\mathbb{P}_{\gamma_n}}$ tal que

$$q_n \Vdash (\sigma^*_{n+1} \in \check{D}_n \cap \check{N} \wedge \sigma^*_{n+1} \leq \sigma_n \wedge \sigma^*_{n+1}|_{\check{\gamma}_n} \in \Gamma).$$

Ahora aplicamos la hipótesis de inducción tomando como γ_0 el ordinal γ_n y como γ el ordinal γ_{n+1} (que es menor que γ, luego podemos aplicarle ciertamente la hipótesis de inducción). Más concretamente, la "traducción" es:

γ_0	γ	q_0	σ_0
γ_n	γ_{n+1}	q_n	$\sigma^*_{n+1}\vert_{\check{\gamma}_n}$

y la conclusión es que existe $q_{n+1} \in \mathbb{P}_{\gamma_{n+1}}$ que es $(N, \mathbb{P}_{\gamma_n})$-genérica, $q_{n+1}|_{\gamma_n} = q_n$ y, llamando $\sigma_{n+1} = i_{\gamma_n\gamma_{n+1}}(\sigma^*_{n+1})$, se cumple que

$$q_{n+1} \Vdash \sigma_{n+1} \in \Gamma.$$

De hecho entonces, como $q_{n+1} \leq i_{\gamma_n\gamma_{n+1}}(q_n)$, es claro que q_{n+1} y σ_{n+1} cumplen todo lo requerido. ■

Ahora ya podemos probar:

Teorema 11.21 *Sea* $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\gamma}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\gamma})$ *una iteración de preórdenes con soportes numerables tal que, para cada* $\delta < \gamma$, $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi_\delta$ *es propio y separativo. Entonces* $\mathbb{P}_\delta$ *es propio y separativo, para todo* $\delta \leq \gamma$.

DEMOSTRACIÓN: Veamos por inducción sobre δ que $\mathbb{P}_\delta$ es propio y separativo (la separatividad la tenemos por 7.28):

Como $\mathbb{P}_0 = \{\mathbb{1}\}$, el resultado es trivial en este caso. Si es válido para δ, el teorema 11.18 nos da el resultado para $\delta + 1$. Supongamos ahora que vale para todo $\delta < \lambda \leq \gamma$. Equivalentemente, podemos suponer que $\gamma = \lambda$, de modo que estamos en las condiciones del teorema anterior. Fijamos, como allí, un cardinal κ, un submodelo elemental $N \prec H(\kappa)$ tal que γ, $\mathbb{P}_\gamma \in N$ y una condición $p \in \mathbb{P}_\gamma \cap N$. Tomamos $\gamma_0 = 0$, de modo que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_0} \Vdash \check{p} \in \check{\mathbb{P}}_\gamma \cap \check{N} \wedge \check{p}|_0 \in \Gamma.$$

Por el teorema anterior existe una condición $(N, \mathbb{P}_\gamma)$-genérica q tal que $q \Vdash \check{p} \in \Gamma$, que por la separatividad equivale a $q \leq p$. ■

Seguidamente generalizamos este resultado al caso de c.p.o.s α-propios. La prueba del teorema siguiente es una modificación trivial de la del teorema 11.17:

Teorema 11.22 *Sea $\alpha > 0$ un ordinal numerable, sea $\mathbb{P}$ un c.p.o. α-propio y π un nombre para un c.p.o. tal que $\mathbb{1} \Vdash \pi$ es $\check{\alpha}$-propio. Sea $\mathbb{R} = \mathbb{P} * \pi$, sea $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{P}$ la proyección dada por $\phi(p, \sigma) = p$ y sea $i : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ la inmersión completa dada por $i(p) = (p, \mathbb{1})$. Sea κ un cardinal regular no numerable y $N = \{N_\delta\}_{\delta<\alpha}$ una torre en $H(\kappa)$ tal que $\mathbb{R} \in N_0$. Sea $p \in \mathbb{P}$ una condición $(N, \mathbb{P})$-genérica y sea $\sigma \in V^{\mathbb{P}}$ tal que*

$$p \Vdash \sigma \in \check{N}_0 \cap \check{\mathbb{R}} \wedge \check{\phi}(\sigma) \in \Gamma.$$

Entonces existe $\tau \in \hat{\pi}$ tal que (p, τ) es $(N, \mathbb{R})$-genérica y $(p, \tau) \Vdash i(\sigma) \in \Gamma$.

A su vez, la prueba de 11.18 se adapta ahora trivialmente para obtener:

Teorema 11.23 *Sea $\alpha > 0$, sea P un c.p.o. α-propio y separativo y sea π un nombre para un c.p.o. tal que $\mathbb{1} \Vdash \pi$ es $\check{\alpha}$-propio y separativo. Entonces $\mathbb{P} * \pi$ es α-propio y separativo.*

En cambio, la generalización de 11.20 no es inmediata:

Teorema 11.24 *Sea $\alpha > 0$ un ordinal numerable y $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\gamma}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\gamma})$ una iteración de preórdenes con soportes numerables tal que, para cada $\delta < \gamma$, $\mathbb{P}_\delta$ sea α-propio y separativo y $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi_\delta$ es $\check{\alpha}$-propio y separativo, sea κ un cardinal regular suficientemente grande y $N = \{N_\delta\}_{\delta\leq\alpha}$ una torre de longitud $\alpha + 1$ en $H(\kappa)$ tal que α, γ, $\mathbb{P}_\gamma \in N_0$, sea $\gamma_0 \in \gamma \cap N_0$ y $q_0 \in \mathbb{P}_{\gamma_0}$ una condición $(N, \mathbb{P}_{\gamma_0})$-genérica. Entonces, si $\sigma_0 \in V^{\mathbb{P}_{\gamma_0}}$ cumple que*

$$q_0 \Vdash \sigma_0 \in \check{\mathbb{P}}_\gamma \cap \check{N}_0 \wedge \sigma_0|_{\check{\gamma}_0} \in \Gamma,$$

existe una condición $(N, \mathbb{P}_\gamma)$-genérica q tal que $q|_{\gamma_0} = q_0$ y $q \Vdash i_{\gamma_0\gamma}(\sigma_0) \in \Gamma$.

Demostración: Basta probar el teorema relativizado a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Razonamos por inducción sobre α. Para $\alpha = 1$ ya lo tenemos probado.

Supongamos que $\alpha = \beta + 1$. Sea G un filtro $\mathbb{P}_{\gamma_0}$-genérico sobre M tal que $q_0 \in G$ y sea $p_0 = \sigma_{0G} \in \mathbb{P}_\gamma \cap N_0$, que cumple $p_0|_{\gamma_0} \in G$. Por lo tanto, existe $q_0' \in G$ tal que $q_0' \leq q_0$ y $q_0' \leq p_0|_{\gamma_0}$. Notemos que q_0' también es $(N, \mathbb{P}_{\gamma_0})$-genérica.

Ahora aplicamos la hipótesis de inducción a β, con la torre $\{N_\delta\}_{\delta\leq\beta}$, la condición q_0' y el nombre $\check{p}_0$. Obtenemos así una condición $(N_\delta, \mathbb{P}_\gamma)$-genérica para todo $\delta < \alpha$, tal que $q'|_{\gamma_0} = q_0'$ y $q' \Vdash \check{p}_0 \in \Gamma$, es decir, $q' \leq p_0$.

En particular tenemos que q' es $(N_\delta, \mathbb{P}_\gamma)$-genérica para todo $\delta < \alpha$, $q'|_{\gamma_0} \in G$ y $q' \leq p_0$. Como $N_\alpha[G] \prec H(\kappa)[G]$ y todos los parámetros están en $N_\alpha[G]$, podemos tomar un $q' \in N_\alpha[G]$ que cumpla estos hechos. Más aún, entonces $q' \in M \cap N_\alpha[G] = N_\alpha$, ya que $q_0 \in G$ es $(N_\alpha, \mathbb{P}_{\gamma_0})$-genérica (teorema 11.8). Con esto hemos probado que

$$q_0 \Vdash \bigvee q' (q' \in \check{N}_\alpha \cap \check{\mathbb{P}}_\gamma \wedge q' \text{ es } (\check{N}', \check{\mathbb{P}}_\gamma)\text{-genérica} \wedge q'|_{\check{\gamma}_0} \in \Gamma \wedge q' \leq \sigma_0),$$

donde $N' = \{N_\delta\}_{\delta\leq\beta}$, luego por 4.49 existe $\sigma'_0 \in M^{\mathbb{P}_{\gamma_0}}$ tal que

$$q_0 \Vdash (\sigma'_0 \in \check{N}_\alpha \cap \check{\mathbb{P}}_\gamma \wedge \sigma'_0 \text{ es } (\check{N}', \check{\mathbb{P}}_\gamma)\text{-genérica} \wedge \sigma'_0|_{\check{\gamma}_0} \in \Gamma \wedge \sigma'_0 \leq \sigma_0).$$

A su vez ahora podemos aplicar el teorema 11.20, que nos da una condición $(N_\alpha, \mathbb{P}_\gamma)$-genérica q tal que $q|_{\gamma_0} = q_0$ y $q \Vdash i_{\gamma_0\gamma}(\sigma'_0) \in \Gamma$, luego también se cumple que $q \Vdash i_{\gamma_0\gamma}(\sigma_0) \in \Gamma$ y de hecho q es $(N, \mathbb{P}_\gamma)$-genérica, pues si G es un filtro $\mathbb{P}_\gamma$-genérico tal que $q \in G$, entonces $\sigma_{0G_{\gamma_0}} \in G$ y es $(N_\delta, \mathbb{P}_\gamma)$-genérica, para todo $\delta \leq \beta$, luego $N_\delta[G] \cap M = N_\delta$, por el teorema 11.8, y este mismo teorema implica entonces que q es $(N_\delta, \mathbb{P}_\gamma)$-genérica. Como también es $(N_\alpha, \mathbb{P}_\gamma)$-genérica, concluimos que es $(N, \mathbb{P}_\gamma)$-genérica.

Ahora suponemos que α es un ordinal límite, y podemos tomar una sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\omega} \in N_0$ cofinal creciente en α. A su vez razonamos por inducción sobre γ. Si $\gamma = 0$ no hay nada que probar. Supongamos que $\gamma = \delta + 1$. Entonces, si $\gamma_0 < \delta$, tenemos que

$$q_0 \Vdash \sigma_0|_{\check{\delta}} \in \check{\mathbb{P}}_\delta \cap \check{N}_0 \wedge \sigma_0|_{\check{\delta}}|_{\check{\gamma}_0} \in \Gamma,$$

luego por hipótesis de inducción existe una condición $(N, \mathbb{P}_\delta)$-genérica q_1 tal que $q_1|_{\gamma_0} = q_0$ y $q_1 \Vdash i_{\gamma_0\gamma'}(\sigma_0)|_{\check{\delta}} \in \Gamma$.

Puesto que $q_1 \leq i_{\gamma_0\delta}(q_0)$, por otra parte $q_1 \Vdash i_{\gamma_0\delta}(\sigma_0) \in \check{\mathbb{P}}_{\check{\gamma}} \cap \check{N}$, luego podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\delta = \gamma_0$, y en tal caso basta aplicar el teorema anterior.

Supongamos por último que γ es un ordinal límite. Vamos a definir una sucesión $\{\gamma_n\}_{n<\omega}$ de ordinales menores que γ, para lo cual distinguimos dos casos: si $\operatorname{cf}\gamma = \aleph_0$ entonces tomamos una sucesión cofinal creciente en γ tal que $\{\gamma_n\}_{n\in\omega} \in N_0$ y γ_0 sea el dado en el enunciado. Si $\operatorname{cf}\gamma > \aleph_0$ entonces tomamos $\gamma_n = \sup(\gamma \cap N_{\alpha_{n-1}}) < \gamma$. Notemos que en ambos casos $\gamma_n \in N_{\alpha_n}$ y la sucesión es estrictamente creciente.

Vamos a definir recurrentemente una sucesión de condiciones $\{q_n\}_{n\in\omega}$ tal que $q_n \in \mathbb{P}_{\gamma_n}$ y una sucesión $\{\sigma_n\}_{n\in\omega}$ tal que $\sigma_n \in M^{\mathbb{P}_{\gamma_n}}$ y de modo que:

a) q_0 es la condición dada en el enunciado y si $n > 0$ la condición q_n es $(N^n, \mathbb{P}_{\gamma_n})$-genérica, donde $N^n = \{N_\delta\}_{\alpha_n<\delta\leq\alpha}$ y $q_{n+1}|_{\gamma_n} = q_n$.

b) σ_0 es el nombre dado en el enunciado y si $n > 0$ entonces

$$q_n \Vdash \sigma_n \in \check{\mathbb{P}}_\gamma \cap \check{N}_{\alpha_n+1} \wedge \sigma_n|_{\check{\gamma}_n} \in \Gamma \wedge \sigma_n \leq i_{\gamma_{n-1}\gamma_n}(\sigma_{n-1}) \wedge$$

$$\sigma_n \text{ es } (\check{N}^{*n}, \check{\mathbb{P}}_\gamma)\text{-genérica},$$

donde $N^{*n} = \{N_\delta\}_{\delta\leq\alpha_n}$.

Supongamos que tenemos una sucesión en estas condiciones. Entonces podemos tomar $\bar{q} = \bigcup\limits_{n\in\omega} q_n \in \mathbb{P}_{\bar{\gamma}}$, donde $\bar{\gamma} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \gamma_n$ (y aquí usamos que la iteración tiene soportes numerables), sea $q = i_{\bar{\gamma},\gamma}(\bar{q}) \in \mathbb{P}_\gamma$ y sea $\sigma'_n = i_{\gamma_n\gamma}(\sigma_n)$. Entonces $q \Vdash \sigma'_n \in \Gamma$. En efecto:

Sea $q' \leq q$ y tomemos un filtro G tal que $q' \in G$. Entonces $q_n \in G_{\gamma_n}$, luego $p = \sigma'_{nG} \in \mathbb{P}_\gamma \cap N_{\alpha_n+1}$. Tomamos una condición $q'' \in G$, $q'' \leq q'$, tal que $q'' \Vdash \sigma'_n = \check{p}$. Ahora pasamos a un filtro G tal que $q'' \in G$.

Entonces $q_n \in G_{\gamma_m}$ para todo m, luego $\sigma'_{mG}|_{\gamma_m} = \sigma_{mG_{\gamma_m}} \in G_{\gamma_m}$. Así, si $m > n$, tenemos que $\sigma'_{mG} \leq \sigma'_{nG}$, luego $\sigma'_{mG}|_{\gamma_m} \leq \sigma'_{nG}|_{\gamma_m}$, luego $\sigma'_{nG}|_{\gamma_m} \in G_{\gamma_m}$. Equivalentemente, $p|_{\gamma_m} \in G_{\gamma_m}$, para todo $m > n$.

Si llamamos $p'_m = i_{\gamma_m\gamma}(p|_{\gamma_m})$, tenemos que $p'_m \in G$, luego hemos probado que $q'' \Vdash \check{p}'_m \in \Gamma$, para todo m. Como $\mathbb{P}_\gamma$ es separativo, $q'' \leq p'_m = i_{\gamma_m\gamma}(p|_{\gamma_m})$. A su vez, de aquí concluimos que $q'' \leq i_{\bar{\gamma}\gamma}(p|_{\bar{\gamma}}) = p$, ya que, como $p \in N_{\alpha_n+1}$, se cumple que $\operatorname{sop} p \subset \gamma \cap N_{\alpha_n+1} \subset \gamma_{n+2} \subset \bar{\gamma}$. Por lo tanto $p \in G$ y esto prueba que $q'' \Vdash \sigma'_n \in \Gamma$. Con esto tenemos que el conjunto de condiciones que fuerzan $\sigma'_n \in \Gamma$ es denso bajo q, luego $q \Vdash \sigma'_n \in \Gamma$.

Como $q \Vdash \sigma'_n$ es $(\check{N}^{*n}, \check{\mathbb{P}}_\gamma)$-genérica, de hecho q es $(N^{*n}, \mathbb{P}_\gamma)$-genérica para todo n, pues, dada una condición $p \in \mathbb{P}_\gamma \cap N_0$, podemos tomar un filtro genérico G tal que $p \in G$, y entonces $\sigma'_{nG} \in G$ es $(N^{*n}, \mathbb{P}_\gamma)$-genérica, y existe una condición $p' \in G$ tal que $p' \leq p$ y $p' \leq \sigma'_{nG}$, y esto último implica que p' también es $(N^{*n}, \mathbb{P}_\gamma)$-genérica.

Pero esto es tanto como decir que es $\mathbb{P}_\gamma$-genérica para la torre $\{N_\delta\}_{\delta<\alpha}$, pero esto es lo mismo que ser $(N, \mathbb{P}_\gamma)$-genérica, porque α es un ordinal límite y todo $D \in N_\alpha$ predenso en $\mathbb{P}_\gamma$ está de hecho en un N_δ, con $\delta < \alpha$, luego $D \cap N_\delta$ es predenso bajo q, luego $D \cap N_\alpha$ también.

Por lo tanto, la condición q cumple lo requerido, de modo que basta probar que existen las sucesiones indicadas.

Partimos de q_0 y σ_0, que son los dados en el enunciado. Supongamos construidos q_n y σ_n de modo que cumplan las condiciones indicadas.

Fijemos un filtro $\mathbb{P}_{\gamma_n}$-genérico G tal que $q_n \in G$. Sea $p = \sigma_{nG} \in \mathbb{P}_\gamma \cap N_{\alpha_n+1}$, de modo que $p|_{\gamma_n} \in G$. Podemos tomar una condición $q'_n \in G$ tal que $q'_n \leq q_n$ y $q'_n \Vdash \sigma_n = \check{p}$. Ahora podemos aplicar la hipótesis de inducción a α_{n+1}. Concretamente, aplicamos el enunciado a:

α	γ_0	γ	q_0	σ_0	N
α_{n+1}	γ_n	γ	q'_n	σ_n	$\{N_\delta\}_{\alpha_n<\delta\leq\alpha_{n+1}}$

De este modo obtenemos una condición $(\{N_\delta\}_{\alpha_n<\delta\leq\alpha_{n+1}}, \mathbb{P}_\gamma)$-genérica q^*_n tal que $q^*_n|_{\gamma_n} = q'_n$ y $q^*_n \Vdash i_{\gamma_n\gamma}(\sigma_n) \in \Gamma$. Esto último equivale a que $q^*_n \leq p$.

Ahora usamos que $N_{\alpha_{n+1}+1}[G] \prec H(\kappa)^M[G]$ para tomar $q^* \in N_{\alpha_{n+1}+1}$ tal que q^* es $(\{N_\delta\}_{\alpha_n<\delta\leq\alpha_{n+1}}, \mathbb{P}_\gamma)$-genérica, $q^*|_{\gamma_n} \in G$, $q^* \leq p$. En principio la tomamos en $N_{\alpha_{n+1}+1}[G]$, pero entonces $q^* \in N_{\alpha_{n+1}+1}[G] \cap M = N_{\alpha_{n+1}+1}$, porque $q_n \in G$ es $(N_{\alpha_{n+1}+1}, \mathbb{P}_{\gamma_n})$-genérica.

Con esto hemos probado que

$$q_n \Vdash \bigvee q^* \in \check{\mathbb{P}}_\gamma \cap \check{N}_{\alpha_{n+1}+1}(q^* \text{ es } (\{\check{N}_\delta\}_{\check{\alpha}_n<\delta\leq\check{\alpha}_{n+1}}, \check{\mathbb{P}}_\gamma)\text{-genérica}$$
$$\wedge\, q^*|_{\check{\gamma}_n} \in \Gamma \wedge q^* \leq \sigma_n).$$

Por lo tanto podemos tomar un $\sigma^*_{n+1} \in M^{\mathbb{P}_{\gamma_n}}$ tal que

$$q_n \Vdash (\sigma^*_{n+1} \in \check{\mathbb{P}}_\gamma \cap \check{N}_{\alpha_{n+1}+1} \land \sigma^*_{n+1} \text{ es } (\{\check{N}_\delta\}_{\check{\alpha}_n < \delta \leq \check{\alpha}_{n+1}}, \check{\mathbb{P}}_\gamma)\text{-genérica}$$
$$\land\, \sigma^*_{n+1}|_{\check{\gamma}_n} \in \Gamma \land \sigma^*_{n+1} \leq \sigma_n).$$

Notemos que como $q_n \Vdash \sigma_n$ es $(\check{N}^{*n}, \check{\mathbb{P}}_\gamma)$-genérica, lo mismo vale para σ^*_{n+1}, luego de hecho $q_n \Vdash \sigma^*_{n+1}$ es $(\check{N}^{*n+1}, \check{\mathbb{P}}_\gamma)$-genérica.

Ahora aplicamos la hipótesis de inducción para α y γ_{n+1}. Concretamente, aplicamos el enunciado a:

α	γ_0	γ	q_0	σ_0	N
α	γ_n	γ_{n+1}	q_n	$\sigma^*_{n+1}\|_{\check{\gamma}_{n+1}}$	N^{n+1}

Concluimos que existe una condición $(N^{n+1}, \mathbb{P}_{\gamma_{n+1}})$-genérica q_{n+1} de manera que $q|_{\gamma_n} = q_n$ y $q_{n+1} \Vdash i_{\gamma_n\gamma_{n+1}}(\sigma^*_{n+1}|_{\gamma_{n+1}}) \in \Gamma$. Finalmente basta llamar $\sigma_{n+1} = i_{\gamma_n\gamma_{n+1}}(\sigma^*_{n+1})$, y así, como $q_{n+1} \leq i_{\gamma_n\gamma_{n+1}}(q_n)$, es claro que cumple todo lo requerido. ■

Ahora la prueba de 11.21 se adapta trivialmente para concluir:

Teorema 11.25 *Sea $\alpha > 0$ un ordinal numerable y $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \gamma}, \{\pi_\delta\}_{\delta < \gamma})$ una iteración de preórdenes con soportes numerables tal que, para cada $\delta < \gamma$, $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi_\delta$ es $\check{\alpha}$-propio y separativo. Entonces $\mathbb{P}_\delta$ es α-propio y separativo, para todo $\delta \leq \gamma$.*

Veamos ahora que el teorema 7.32 vale también para iteraciones con soportes numerables si suponemos que los c.p.o.s de la iteración son propios:

Teorema 11.26 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC *y, en M, sea $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \gamma}, \{\pi_\delta\}_{\delta < \gamma})$ una iteración de longitud $\gamma = \alpha + \beta$ con soportes numerables tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi_\delta$ es propio y separativo, y sea G_α un filtro $\mathbb{P}_\alpha$-genérico sobre M. Entonces en $M[G_\alpha]$ existe una iteración de c.p.o.s $(\{\mathbb{P}'_\delta\}_{\delta \leq \beta}, \{\pi'_\delta\}_{\delta < \beta})$ con soportes numerables y una familia de inmersiones densas $j_{\alpha\delta} : \mathbb{P}_{\alpha+\delta}/G_\alpha \longrightarrow \mathbb{P}'_\delta$ tales que si G'_δ es un filtro $\mathbb{P}'_\delta$-genérico sobre $M[G_\alpha]$ y $G_{\alpha+\delta} = j^{-1}_{\alpha\delta}[G'_\delta]$, entonces $(\pi'_\delta)_{G'_\delta} = (\pi_{\alpha+\delta})_{G_{\alpha+\delta}}$.*

Demostración: Toda la prueba de 7.32 vale literalmente en este contexto salvo el caso límite de la construcción recurrente, que es el único punto en el que se usa que la iteración tiene soportes finitos. Así pues, suponemos que tenemos la iteración $(\{\mathbb{P}'_\delta\}_{\delta \leq \lambda}, \{\pi'_\delta\}_{\delta < \lambda})$ y definimos $j_{\alpha\lambda} : \mathbb{P}_{\alpha+\lambda}/G_\alpha \longrightarrow \mathbb{P}'_\lambda$ mediante $j_{\alpha\lambda}(p)(\delta) = j_{\alpha,\delta+1}(p|_{\alpha+\delta+1})(\delta)$. El problema es demostrar que $j_{\alpha\lambda}$ así definida es también una inmersión densa, sabiendo que lo son las $j_{\alpha\delta}$, para $\delta < \lambda$.

Por 11.21 sabemos también que $\mathbb{P}_\alpha$ es propio. Si $\operatorname{cf} \lambda > \aleph_0$ la demostración para el caso de soportes finitos de adapta trivialmente, pero ahora daremos un argumento válido para todo λ. En primer lugar demostraremos que la imagen de $j_{\alpha\lambda}$ es densa en $\mathbb{P}'_\lambda$.

En $M[G_\alpha]$ tenemos las inmersiones densas $j_{\alpha\delta}$ que a cada $\mathbb{P}'_\delta$-nombre le asignan un $\mathbb{P}_{\alpha+\delta}/G_\alpha$-nombre (que en particular es un $\mathbb{P}_{\alpha+\delta}$-nombre) según el teorema 4.34. A partir de ella podemos construir una aplicación $F_\delta : \hat{\pi}'_\delta \longrightarrow \hat{\pi}_{\alpha+\delta}$ con la propiedad de que si G'_δ es un filtro $\mathbb{P}'_\delta$-genérico sobre $M[G_\alpha]$ y $G_{\alpha+\delta} = j_{\alpha\delta}^{-1}[G'_\delta]$, entonces $F_\delta(\sigma)_{G_{\alpha+\delta}} = \sigma_{G'_\delta}$.

Más aún, todos los objetos que hemos construido en $M[G_\alpha]$ (la iteración, las inmersiones, la sucesión de aplicaciones "traductoras" $\{F_\delta\}_{\delta<\lambda}$ han sido definidos a partir exclusivamente de la iteración en M y del filtro genérico G_α, luego todos los objetos construidos tienen un nombre en $M^{\mathbb{P}_\alpha}$, es decir, podemos definir sucesiones de nombres $\{\Pi_\delta\}_{\delta\leq\lambda}$, $\{\rho_\delta\}_{\delta<\lambda}$, $\{\iota_\delta\}_{\delta<\lambda}$ y $\{\phi_\delta\}_{\delta<\lambda}$ (que a su vez permiten definir nombres para las sucesiones correspondientes, por ejemplo, $\Pi = \{(\text{p.o.}(\check{\delta}, \Pi_\delta), \mathbb{1}) \mid \delta < \lambda\}$, etc.) de modo que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha}$ fuerce a que $(\{\Pi_\delta\}_{\delta\leq\lambda}, \{\rho_\delta\}_{\delta<\lambda})$ es la iteración que hemos definido, que $\iota_\delta : \mathbb{P}_{\alpha+\delta}/\Gamma \longrightarrow \Pi_\delta$ es la inmersión densa que hemos definido (para $\delta < \lambda$) y que $\Phi_\delta : \check{\hat{\rho}}_\delta \longrightarrow \check{\hat{\pi}}_{\alpha+\delta}$ es la aplicación "traductora".

Tomemos ahora $p' \in \mathbb{P}'_\lambda$ y sea $p' = \sigma_{G_\alpha}$ de modo que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash \sigma \in \Pi_\lambda$. Como $\operatorname{sop} p' \subset \lambda$ es numerable, el teorema 11.11 nos da que existe $F_0 \in M$ numerable^M tal que $\operatorname{sop} p' \subset F_0 \cap \lambda$. Sea $F = \{\alpha + \delta \mid \delta \in F_0 \cap \lambda\}$. Así $F \in M$ y $\operatorname{sop} p' \subset \{\delta \in \lambda \mid \alpha + \delta \in F\}$.

Ahora definimos $p \in \mathbb{P}_{\alpha+\lambda}$ estableciendo que $p(\gamma) = \mathbb{1}_{\pi_\gamma}$ si $\gamma \notin F$ y, en el caso en que $\gamma \in F$, podemos expresar $\gamma = \alpha + \delta$ y definimos $p(\gamma) \in \hat{\pi}_\gamma$ tal que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\gamma} \Vdash p(\gamma) = i_{\alpha\gamma}(\Phi)_{\check{\delta}}(i_{\alpha\gamma}(\sigma)(\check{\delta}))_\Gamma.$$

Esto tiene sentido, pues si G_γ es un filtro $\mathbb{P}_\gamma$-genérico sobre M, entonces

$$(i_{\alpha\gamma}(\Phi)_{\check{\delta}}(i_{\alpha\gamma}(\sigma)(\check{\delta}))_\Gamma)_{G_\gamma} = (i_{\alpha\gamma}(\Phi)_{\check{\delta}}(i_{\alpha\gamma}(\sigma)(\check{\delta}))_{G_\gamma})_{G_\gamma} = F_\delta(p'(\delta))_{G_\gamma} \in \pi_\gamma.$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\gamma} \Vdash i_{\alpha\gamma}(\Phi)_{\check{\delta}}(i_{\alpha\gamma}(\sigma)(\check{\delta}))_\Gamma \in \pi_\gamma$$

y existe un nombre $p(\gamma) \in \hat{\pi}_\gamma$ que cumple lo pedido.

Claramente $\operatorname{sop} p \subset F$ es numerable^M, luego $p \in \mathbb{P}_{\alpha+\lambda}$. Además $p|_\alpha = \mathbb{1}$, luego $p \in \mathbb{P}_{\alpha+\lambda}/G_\alpha$. Ahora tenemos que probar que $j_{\alpha\lambda}(p) \leq p'$. Para ello probamos inductivamente que para todo $\delta < \lambda$ se cumple $j_{\alpha\lambda}(p)|_\delta \leq p'|_\delta$.

Esto vale trivialmente para $\delta = 0$. Si vale para δ, entonces hay que comprobar que

$$j_{\alpha\lambda}(p)|_\delta \Vdash j_{\alpha\lambda}(p)(\delta) \leq p'(\delta).$$

En realidad probaremos que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}'_\delta} \Vdash j_{\alpha\lambda}(p)(\delta) = p'(\delta)$. Si $\gamma = \alpha + \delta \notin F$, el resultado es trivial, pues ambos miembros de la igualdad valen $\mathbb{1}_{\pi'_\delta}$. Suponemos, pues que $\gamma \in F$ y sea G'_δ un filtro $\mathbb{P}'_\delta$-genérico sobre $M[G_\alpha]$. Entonces $G_\gamma = j_{\alpha\delta}^{-1}[G'_\delta]$ es un filtro $\mathbb{P}_\gamma/G_\alpha$-genérico sobre $M[G_\alpha]$, luego también un filtro $\mathbb{P}_\gamma$-genérico sobre M que se restringe a G_α. Según la construcción de $j_{\alpha\lambda}(p)(\delta)$ dada en la prueba de 7.32, tenemos que

$$j_{\alpha\lambda}(p)(\delta)_{G'_\delta} = (j_{\alpha,\delta+1}(p|_{\gamma+1})(\delta))_{G'_\delta} = \overline{p(\gamma)}_{G'_\delta}$$

$$= p(\gamma)_{G_\gamma} = F_\delta(p'(\delta))_{G_\gamma} = p'(\delta)_{G'_\delta}.$$

Esto implica que $j_{\alpha\lambda}(p)|_{\delta+1} \leq p'|_{\delta+1}$. Es caso de ordinales límite es trivial.

Con esto tenemos probado que $j_{\alpha\lambda}$ tiene imagen densa. Falta probar que es una inmersión. Es inmediato que $p \leq q \to j_{\alpha\lambda}(p) \leq j_{\alpha\lambda}(q)$. Falta probar que $p \perp q \to j_{\alpha\lambda}(p) \perp j_{\alpha\lambda}(q)$, pues el argumento dado en 7.32 usaba la finitud de los soportes.

Supongamos que $j_{\alpha\lambda}(p)$ y $j_{\alpha\lambda}(q)$ son compatibles. Entonces, por la densidad que hemos probado, existe una condición $r \in \mathbb{P}_{\alpha+\lambda}/G_\alpha$ tal que $j_{\alpha\lambda}(r) \leq j_{\alpha\lambda}(p)$ y $j_{\alpha\lambda}(r) \leq j_{\alpha\lambda}(q)$. Sea G un filtro $\mathbb{P}_{\alpha+\lambda}/G_\alpha$-genérico sobre $M[G_\alpha]$ tal que $r \in G$. Entonces G es también un filtro $\mathbb{P}_{\alpha+\lambda}$-genérico sobre M. Para cada $\delta < \lambda$ tenemos que $G_{\alpha+\delta}$ es $\mathbb{P}_{\alpha+\delta}/G_\alpha$-genérico sobre $M[G_\alpha]$, luego podemos considerar el filtro $G'_\delta = \hat{\jmath}(G_{\alpha+\delta})$ en $\mathbb{P}'_\delta$ dado por 4.32. Entonces, como $r|_{\alpha+\delta} \in G_{\alpha+\delta}$, también $j_{\alpha\delta}(r|_{\alpha+\delta}) = j_{\alpha\lambda}(r)|_\delta \in G'_\delta$, luego también $j_{\alpha\lambda}(p)|_\delta = j_{\alpha\delta}(p|_{\alpha+\delta}) \in G'_\delta$ y, como $G_{\alpha+\delta} = j_{\alpha\delta}^{-1}[G'_\delta]$, obtenemos que $p|_{\alpha+\delta} \in G_{\alpha+\delta}$, para todo $\delta < \lambda$, luego el teorema 7.26 nos da que $p \in G$, e igualmente $q \in G$, luego $\neg p \perp q$.

Con esto queda probado que $j_{\alpha\lambda}$ es una inmersión, y ya hemos visto que es densa. ■

Nota En las condiciones del teorema anterior es claro que, en $M[G_\alpha]$, se cumple que $\mathbb{1}_\delta \Vdash \pi'_\delta$ es propio y separativo, luego el teorema 11.21 nos da que cada $\mathbb{P}'_\delta$ es propio y separativo. En particular, teniendo en cuenta 7.29, si G es un filtro $\mathbb{P}_\gamma$-genérico sobre M, entonces $M[G]$ es una extensión genérica de $M[G_\alpha]$ a partir de $\mathbb{P}'_\beta$, que es un c.p.o. propio. ■

11.4 Conservación de $\mathcal{P}\omega$

Ya sabemos que si $\mathbb{P}$ es un c.p.o. propio entonces $\mathbb{1} \Vdash \aleph_1 = \check{\aleph}_1$, es decir, $\aleph_1$ se conserva en toda extensión genérica propia. Ahora vamos a estudiar dar una condición necesaria y suficiente para que un c.p.o. propio conserve $\mathcal{P}\omega$, es decir, que cumpla $\mathbb{1} \Vdash \mathcal{P}\omega = \check{\mathcal{P}\omega}$ o, lo que es lo mismo, que las extensiones propias de un modelo M tengan los mismos subconjuntos de ω que M. Conviene observar algunas equivalencias de esta propiedad:

Teorema 11.27 *Sea M un modelo transitivo de* ZFC*, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) $(\mathcal{P}\omega)^{M[G]} = (\mathcal{P}\omega)^M$.

b) Si $A \in M[G]$ y $A \subset B \in M$ con B numerable^M entonces $A \in M$.

c) $H(\aleph_1)^{M[G]} = H(\aleph_1)^M$.

DEMOSTRACIÓN: a) $\Rightarrow$ *b*) Sea $f : \omega \longrightarrow B$ biyectiva tal que $f \in M$. Entonces $f^{-1}[A] \in (\mathcal{P}\omega)^{M[G]} = (\mathcal{P}\omega)^M$, luego $f^{-1}[A] \in M$, luego $A \in M$.

b) $\Rightarrow$ c) Claramente $H(\aleph_1)^M \subset H(\aleph_1)^{M[G]}$, pues si $x \in M$ tiene clausura transitiva numerable^M, lo mismo vale en $M[G]$. La inclusión opuesta la demostramos por $\in$-inducción. Tomamos $x \in H(\aleph_1)^{M[G]}$ y podemos suponer que $\operatorname{ct} x \subset M$. Sea $f : \omega \longrightarrow \operatorname{ct} x \cup \{x\}$ biyectiva, con $f \in M[G]$. Sea $R \subset \omega \times \omega$ tal que $f : (\omega, R) \longrightarrow (\operatorname{ct} x \cup \{x\}, \in)$ sea un isomorfismo. Por b) tenemos que $R \in M$, luego $\operatorname{ct} x \cup \{x\} \in M$ (por ser el colapso transitivo de (ω, R)), luego $x \in M$.

c) $\Rightarrow$ a) es trivial. ■

Definición 11.28 Sea κ un cardinal regular no numerable, sea $N \prec H(\kappa)$ un submodelo elemental numerable y sea $\mathbb{P} \in N$ un c.p.o. diremos que una condición $p \in \mathbb{P}$ es *completamente* $(N, \mathbb{P})$*-genérica* si el filtro $G_p = \{q \in \mathbb{P} \mid p \leq q\}$ es $(N, \mathbb{P})$-genérico, es decir, si, llamando $\phi : N \longrightarrow \bar{N}$ al colapso transitivo de N y $\bar{\mathbb{P}} = \phi(\mathbb{P})$, se cumple que $\bar{G}_p = \phi[G_p \cap N]$ es un filtro $\bar{\mathbb{P}}$-genérico sobre $\bar{N}$.

Recordemos que una caracterización más elemental es que si $D \in N$ es predenso (o denso, o abierto denso) entonces $G_p \cap N \cap D \neq \varnothing$.

Equivalentemente, para que p sea completamente $(N, \mathbb{P})$-genérica basta con que exista un filtro $(N, \mathbb{P})$-genérico G acotado inferiormente por p, pues esto equivale a que $G \subset G_p$, con lo que $\bar{G} \subset \bar{G}_p$, y entonces $\bar{G}_p$ cumple las condiciones del teorema 4.9, luego[2] $\bar{G}_p$ es un filtro $\bar{\mathbb{P}}$-genérico sobre $\bar{N}$ y p es completamente $(N, \mathbb{P})$-genérica. Más aún, $\bar{G}_p = \bar{G}$, por el teorema 4.7.

Por otra parte, si p es completamente $(N, \mathbb{P})$-genérica en particular es $(N, \mathbb{P})$-genérica, pues (relativizando todo lo anterior a un modelo transitivo M de ZFC), si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $p \in G$, entonces $G_p \subset G$, y, como todo $D \in N$ denso en $\mathbb{P}$ corta a $G_p \cap N$, también corta a $G \cap N$, luego G es $(N, \mathbb{P})$-genérico.

Observemos también que si $q \leq p$ y p es completamente $(N, \mathbb{P})$-genérica entonces q también lo es. De hecho, $G_p \subset G_q$, luego $\bar{G}_p \subset \bar{G}_q$ y concluimos que $\bar{G}_q$ es también $\bar{\mathbb{P}}$-genérico. Más aún, como antes concluimos que $\bar{G}_p = \bar{G}_q$.

Diremos que un c.p.o. $\mathbb{P}$ es *completamente propio* si satisface la definición 11.9 de c.p.o. propio con condiciones completamente $(N, \mathbb{P})$-genéricas en lugar de meramente $(N, \mathbb{P})$-genéricas.

Puesto que toda condición completamente $(N, \mathbb{P})$-genérica es $(N, \mathbb{P})$-genérica, es obvio que todo c.p.o. completamente propio es propio.

Teorema 11.29 *Un c.p.o. propio y separativo es completamente propio si y sólo si*[3] *conserva* $\mathcal{P}\omega$.

[2] El punto crucial es que dos condiciones de $G_p \cap N$ son compatibles, luego son compatibles en N, aunque no podamos asegurar en principio que tienen una extensión en $G_p \cap N$, luego las condiciones de $\bar{G}_p$ son compatibles dos a dos.

[3] Conviene observar que la prueba de que los c.p.o.s completamente propios conservan $\mathcal{P}\omega$ no requiere la hipótesis de separatividad

Demostración: Basta probar la relativización del teorema a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Sea $\mathbb{P} \in M$ completamente propio y supongamos que existe un filtro genérico G y un $x \in (\mathcal{P}\omega)^{M[G]} \setminus (\mathcal{P}\omega)^M$. Pongamos que $x = \sigma_G$ y sea $p \in G$ tal que $p \Vdash \sigma \subset \omega \land \sigma \notin \check{M}$.

Fijemos un cardinal κ suficientemente grande para que se aplique la definición de c.p.o. completamente propio y de modo que $\mathbb{P}$, $\sigma \in H(\kappa)^M$ y sea $N \prec H(\kappa)^M$ un submodelo elemental numerable^M tal que $\mathbb{P}$, p, $\sigma \in N$. Por hipótesis existe $q \leq p$ completamente $(N, \mathbb{P})$-genérica.

Para cada $n \in \omega$, es claro que

$$D_n = \{d \in \mathbb{P} \mid d \Vdash \check{n} \in \sigma \lor d \Vdash \check{n} \notin \sigma\} \in N$$

es abierto denso en $\mathbb{P}$, luego existe $d \in D_n \cap N \cap G_q$, y entonces $q \leq d$, luego $q \in D_n$, para todo $n \in \omega$. Así, si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $q \in G$, resulta que

$$\sigma_G = \{n \in \omega \mid q \Vdash \check{n} \in \sigma\} \in M,$$

contradicción.

Para probar la implicación opuesta tomamos, siempre en M, un cardinal regular κ suficientemente grande tal que $\mathbb{P} \in H(\kappa)^M$, sea $N \prec H(\kappa)^M$ tal que $\mathbb{P} \in N$ y sea $p \in \mathbb{P} \cap N$. Por hipótesis podemos tomar una condición $p_0 \leq p$ que sea $(N, \mathbb{P})$-genérica. Tomemos ahora un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $p_0 \in G$. Entonces $G \cap N \in M[G]$ y está contenido en N, que es numerable^M, luego por 11.27 tenemos que $X = G \cap N \in M$.

Podemos tomar $q \in G$ tal que $q \leq p_0 \leq p$ y $q \Vdash \Gamma \cap \check{N} = \check{X}$. Ahora usamos que $\mathbb{P}$ es separativo para concluir que si $x \in X$, entonces $q \Vdash \check{x} \in \Gamma$, luego $q \leq x$, luego $G \cap N = X \subset G_q \cap N$, luego $\bar{G} \subset \bar{G}_q$, pero $\bar{G}$ es un filtro $\bar{\mathbb{P}}$-genérico sobre $\bar{N}$ porque $p_0 \in G$, luego $\bar{G}_q$ también lo es (por 4.9), luego q es completamente $(N, \mathbb{P})$-genérica. ■

Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC y, en M, sea κ un cardinal regular no numerable, sea $N \prec H(\kappa)^M$ numerable, sea $\mathbb{P} \in H(\kappa)^M$ y sea $p \in \mathbb{P}$ una condición completamente $(N, \mathbb{P})$-genérica. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $p \in G$. Entonces $G_p \subset G$ y $\bar{G}_p = \bar{G}$. Esto implica que el colapso transitivo $\phi : N \longrightarrow \bar{N}$ se extiende a $\phi : N[G] \longrightarrow N^*$, donde llamamos $N^* = \bar{N}[\bar{G}] = \bar{N}[G_p]$. Además

$$\phi(G) = \phi[G \cap N[G]] = \phi[G \cap N] = \bar{G}_p,$$

pues si $\phi(p) \in \phi[G \cap N[G]]$ entonces $\phi(p) \in \phi(\mathbb{P}) \in \bar{N}$, luego $\phi(p) \in \bar{N}$, luego $p \in N$. Notemos además que $N^* \in M$ es independiente de G. Usando el teorema 4.49 podemos obtener un nombre $\varphi \in M^{\mathbb{P}}$ tal que

$$p \Vdash \varphi : \check{N}[\Gamma] \longrightarrow \check{N}^* \text{ isomorfismo.}$$

Por el teorema de reflexión esto es cierto aun sin relativizar a un modelo M.

Teorema 11.30 *En las condiciones anteriores, supongamos además que $\pi \in N$ es un $\mathbb{P}$-nombre para un c.p.o. y sea $\sigma \in \hat{\pi}$. Entonces (p, σ) es completamente $\mathbb{P} * \pi$-genérica sobre N si y sólo si:*

a) p es completamente $\mathbb{P}$-genérica sobre N, con lo que podemos considerar $\bar{\mathbb{Q}} = \phi(\pi)_{\bar{G}_p} \in N^*$.

b) Existe un filtro $\bar{\mathbb{Q}}$-genérico $\bar{H}$ sobre N^* tal que $p \Vdash \sigma$ es una cota inferior de $\varphi^{-1}[\check{\bar{H}}]$.

En tal caso, $\bar{G}_{(p,\sigma)} = \bar{G}_p * \bar{H}$.

Demostración: Basta probar la relativización del teorema a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Supongamos que se cumplen a) y b). Entonces $\bar{G}_p$ es un filtro $\bar{\mathbb{P}}$-genérico sobre N (por a) y $\bar{G}_p * \bar{H}$ es un filtro $\bar{\mathbb{P}} * \bar{\pi}$ genérico sobre N, luego basta probar que $\bar{G}_{(p,\sigma)} = \bar{G}_p * \bar{H}$ para concluir que (p, σ) es completamente $(\mathbb{P} * \pi)$-genérica. De hecho basta probar que $\bar{G}_p * \bar{H} \subset \bar{G}_{(p,\sigma)}$, pues 4.9 y la maximalidad de los filtros genéricos implica entonces la igualdad.

Tomemos $(\bar{q}, \bar{\tau}) \in \bar{G}_p * \bar{H}$, de modo que $\bar{q} = \phi(q)$, $\bar{\tau} = \phi(\tau)$, con $q \in G_p \cap N$ y $\tau \in N^{\mathbb{P}}$, luego en particular $p \leq q$. Fijemos un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $p \in G$. Entonces tenemos la función colapsante $\phi : N[G] \longrightarrow N^*$. Además $\mathbb{Q} = \pi_G \in N[G]$, $\bar{\mathbb{Q}} \in N^*$, $\phi(\mathbb{Q}) = \bar{\mathbb{Q}}$ y $\bar{H}$ es un filtro $\bar{\mathbb{Q}}$-genérico sobre N^*.

Por otra parte tenemos que $\phi(\tau_G) = \bar{\tau}_{\bar{G}_p} \in \bar{H}$ y por b) σ_G es una cota inferior de $\phi^{-1}[\bar{H}]$, luego $\sigma_G \leq \tau_G$. Con esto hemos probado que $p \Vdash \sigma \leq \tau$, luego $(p, \sigma) \leq (q, \tau)$, luego $(q, \tau) \in G_{(p,\sigma)} \cap N$, luego $(\bar{q}, \bar{\tau}) \in \bar{G}_{(p,\sigma)}$.

Ahora supongamos que (p, σ) es completamente $\mathbb{P} * \pi$-genérica. Entonces $\bar{G}_{(p,\sigma)}$ es un filtro $\bar{\mathbb{P}} * \bar{\pi}$-genérico sobre $\bar{N}$, luego $\bar{G}_{(p,\sigma)} = \bar{G}_0 * \bar{H}$, donde $\bar{G}_0$ es un filtro $\bar{\mathbb{P}}$-genérico sobre $\bar{N}$ y $\bar{H}$ es $\bar{\mathbb{Q}}$-genérico sobre $\bar{N}[\bar{G}_0]$, donde $\bar{\mathbb{Q}} = \bar{\pi}_{\bar{G}_0}$. Vamos a probar que $\bar{G}_0 = \bar{G}_p$. De hecho basta probar que $\bar{G}_0 \subset \bar{G}_p$.

Sea $\bar{q} \in G_0$. Entonces $(\bar{q}, \mathbb{1}) \in \bar{G}_0 * \bar{H} = \bar{G}_{(p,\sigma)}$, luego $(\bar{q}, \mathbb{1}) = \phi(q, \mathbb{1})$, con $(q, \mathbb{1}) \in G_{(p,\sigma)} \cap N$, luego $\bar{q} = \phi(q)$, con $p \leq q$, luego $\bar{q} \in \bar{G}_p$.

Esto prueba que $\bar{G}_p$ es $\bar{\mathbb{P}}$-genérico sobre $\bar{N}$, luego p es completamente $\mathbb{P}$-genérica y tenemos a). Para probar b) fijamos un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $p \in G$. Entonces $G_p \subset G$, de donde $\bar{G}_p = \bar{G}$. Si $\tau_{\bar{G}} \in \phi^{-1}[\bar{H}]$, entonces $\bar{\tau}_{\bar{G}_p} = \phi(\tau_G) \in H$, luego $(\mathbb{1}, \bar{\tau}) \in \bar{G}_p * \bar{H} = \bar{G}_{(p,\sigma)}$, luego $(\mathbb{1}, \tau) \in G_{(p,\sigma)} \cap N$, luego $(p, \sigma) \leq (\mathbb{1}, \tau)$, luego $p \Vdash \sigma \leq \tau$, luego $\sigma_G \leq \tau_G$, luego σ_G es una cota inferior de $\phi^{-1}[H]$, y esto prueba b). ■

En general, la propiedad de ser completamente propio no se conserva al iterar extensiones, por lo que necesitamos introducir una propiedad más fuerte.

Definición 11.31 Un *sistema de completitud* es una función $\mathbb{D}(N, \mathbb{P}, p_0)$ definida cuando:

a) N es un modelo transitivo numerable de ZFC$-$AP,

b) $\mathbb{P} \in N$ es un c.p.o.,

c) $p_0 \in \mathbb{P}$.

de manera que $\mathbb{D}(N, \mathbb{P}, p_0)$ es una familia no vacía de subconjuntos no vacíos del conjunto $\mathrm{Gen}(N, \mathbb{P}, p_0)$ formado por los filtros $\mathbb{P}$-genéricos sobre N que contienen a p_0.

Notemos que todo conjunto transitivo numerable está en $H(\aleph_1)$, luego el dominio de $\mathbb{D}$ es un conjunto.

Si N es un modelo numerable (no necesariamente transitivo) de ZFC$-$AP, $\mathbb{P} \in N$ es un c.p.o. y $p_0 \in \mathbb{P} \cap N$, podemos considerar el colapso transitivo $\phi : N \longrightarrow \bar{N}$, $\bar{\mathbb{P}} = \phi(\mathbb{P})$ y $\bar{p}_0 = \phi(p)$. Si G es un filtro $\bar{\mathbb{P}}$-genérico sobre $\bar{N}$ tal que $\bar{p}_0 \in G$, entonces $p_0 \in \phi^{-1}[G] \subset N$, que no es necesariamente un filtro en $\mathbb{P}$, pero genera un filtro

$$G^* = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee q \in \phi^{-1}[G]\ q \leq p\}.$$

Claramente $G^* \cap N = \phi^{-1}[G]$, luego $\phi[G \cap N] = G$. Por lo tanto, G^* es un filtro $(N, \mathbb{P})$-genérico y $p_0 \in G^*$. Puesto que está definido $\mathbb{D}(\bar{N}, \bar{\mathbb{P}}, \bar{p}_0)$, para cada $X \in \mathbb{D}(\bar{N}, \bar{\mathbb{P}}, \bar{p}_0)$ podemos definir $X^* = \{G^* \mid G \in X\}$ y

$$\mathbb{D}(N, \mathbb{P}, p_0) = \{X^* \mid X \in \mathbb{D}(\bar{N}, \bar{\mathbb{P}}, \bar{p}_0)\}.$$

Así $\mathbb{D}(N, \mathbb{P}, p_0)$ es un conjunto no vacío de conjuntos no vacíos de filtros $(N, \mathbb{P})$-genéricos que contienen a p_0, y si el modelo N es transitivo, $\mathbb{D}(N, \mathbb{P}, p_0)$ es el mismo dado directamente por la función $\mathbb{D}$.

Diremos que un c.p.o. $\mathbb{P}$ es $\mathbb{D}$-*completo* (respecto a un sistema de completitud prefijado $\mathbb{D}$) si para todo cardinal regular κ suficientemente grande y todo submodelo elemental numerable $N \prec H(\kappa)$ tal que $\mathbb{P} \in N$ y para toda condición $p_0 \in \mathbb{P} \cap N$ existe un $X \in \mathbb{D}(N, \mathbb{P}, p_0)$ tal que todo filtro $G \in X$ está acotado inferiormente en $\mathbb{P}$.

Notemos que una cota inferior de G será una condición completamente $(N, \mathbb{P})$-genérica que extiende a p_0, luego $\mathbb{P}$ es completamente propio y, en particular, propio.

Diremos que un sistema de completitud $\mathbb{D}$ es *numerablemente completo* si toda familia numerable de elementos de $\mathbb{D}(N, \mathbb{P}, p_0)$ tiene intersección no vacía.

Sea ahora $\mathbb{P}$ un c.p.o., π un nombre para un c.p.o. y sea $\Delta \in V^{\mathbb{P}}$ tal que

$$\mathbb{1} \Vdash \Delta \in \check{V} \text{ es un sistema de completitud numerablemente completo} \land$$
$$\pi \text{ es completo respecto a } \Delta.$$

Sea κ un cardinal regular no numerable y sean $N_0 \prec N_1 \prec H(\kappa)$ submodelos elementales numerables tales que $N_0 \in N_1$ y $\mathbb{P}$, π, $\Delta \in N_0$. Sea además G_0 un filtro $(N_0, \mathbb{P})$-genérico tal que $G_0 \cap N_0 \in N_1$. Sea $p_0 = (a, \sigma) \in (\mathbb{P} * \pi) \cap N_0$ con $a \in G_0$. Vamos a definir un filtro $(N_0, \mathbb{P} * \pi)$-genérico

$$G = \mathbb{E}(N_0, N_1, \mathbb{P} * \pi, G_0, p_0)$$

que contiene a p_0.

Para ello fijamos el colapso transitivo $\phi : N_0 \longrightarrow \bar{N}_0$, así como $\bar{\mathbb{P}} = \phi(\mathbb{P})$, $\bar{\pi} = \phi(\pi)$, $\bar{\sigma} = \phi(\sigma)$, $\bar{\Delta} = \phi(\Delta)$ y consideramos $\bar{G}_0 = \phi[G_0 \cap M_0]$, que es un filtro $\bar{\mathbb{P}}$-genérico sobre $\bar{N}_0$. Entonces $\bar{\mathbb{Q}} = \bar{\pi}_{\bar{G}_0} \in \bar{N}_0[\bar{G}_0]$ es un c.p.o., $\bar{q} = \bar{\sigma}_{\bar{G}_0} \in \bar{\mathbb{Q}}$ y $\bar{\mathbb{D}} = \bar{\Delta}_{\bar{G}_0} \in \bar{N}_0$ es un sistema de completitud numerablemente completo en $\bar{N}_0[\bar{G}_0]$ respecto al cual $\bar{\mathbb{Q}}$ es $\bar{\mathbb{D}}$-completo.

Observemos que $\bar{\mathbb{D}} = \phi(\mathbb{D})$, donde $\mathbb{D} \in N_0$ es un sistema de completitud numerablemente completo. Como $G_0 \cap N_0 \in N_1$, también $\bar{G}_0 \in N_1$, y a su vez $\bar{\mathbb{Q}}$, $\bar{q}$, $\bar{\sigma} \in N_1$, luego $\mathbb{D}(\bar{N}_0, \bar{\mathbb{Q}}, \bar{q}) \in N_1$. Como $N_1 \cap \mathbb{D}(\bar{N}_0, \bar{\mathbb{Q}}, \bar{q})$ es numerable, la completitud numerable de $\mathbb{D}$ implica que existe $\bar{G}_1 \in \bigcap(N_1 \cap \mathbb{D}(\bar{N}_0, \bar{\mathbb{Q}}, \bar{q}))$. En particular $\bar{G}_1$ es un filtro $\bar{\mathbb{Q}}$-genérico sobre $\bar{N}_0$ y $\bar{q} \in \bar{G}_1$. Podemos definir entonces $\bar{G} = \bar{G}_0 * \bar{G}_1$, que es un filtro $\bar{\mathbb{P}} * \bar{\mathbb{Q}}$-genérico sobre $\bar{N}_0$, con lo que $G = \bar{G}^*$ es un filtro $(N_0, \mathbb{P} * \pi)$-genérico que contiene a p_0.

Nota Podemos definir una fórmula $\psi(N_0, N_1, \mathbb{P} * \pi, G_0, p_0)$ tal que

$$G = \mathbb{E}(N_0, N_1, \mathbb{P} * \pi, G_0, p_0) \leftrightarrow H(\kappa) \vDash \psi[N_0, N_1, \mathbb{P} * \pi, G_0, p_0],$$

aunque esto requiere algunas observaciones: En primer lugar, no es posible expresar en $H(\kappa)$ que $N_1 \prec H(\kappa)$, pero para que la construcción de G sea posible basta con que la definición de submodelo elemental se cumpla para un número finito de fórmulas, y esto sí que es expresable en $H(\kappa)$. Por otro lado, la elección de $\bar{G}_1$ requiere una función de elección. Podemos suponer que N_1 es en realidad un par $(N_1, \leq)$, donde $\leq$ es un buen orden en N_1 y G_1 se elige mediante dicho buen orden. ■

Teorema 11.32 *Sea $\mathbb{P}$ un c.p.o. completamente propio y sean π, $\Delta \in V^{\mathbb{P}}$ tales que*

$$\mathbb{1} \Vdash \Delta \in \check{V} \text{ es un sistema de completitud numerablemente completo} \wedge$$
$$\pi \text{ es un c.p.o. completo respecto a } \Delta.$$

Sea κ un cardinal regular no numerable y sean $N_0 \prec M_1 \prec H(\kappa)$ submodelos elementales numerables tales que $N_0 \in N_1$ y $\mathbb{P}$, π, $\Delta \in N_0$. Sea $q_0 \in \mathbb{P}$ una condición $(N_1, \mathbb{P})$-genérica y completamente $(N_0, \mathbb{P})$-genérica y sea $G_0 = G_{q_0}$. Sea $p_0 \in (\mathbb{P} * \pi) \cap N_0$ tal que $p_0 = (a, \sigma)$ con $a \in G_0$. Entonces existe $\tau \in \hat{\pi}$ tal que $(q_0, \tau) \leq p_0$ es completamente $(N_0, \mathbb{P} * \pi)$-genérica. Más concretamente, (q_0, τ) acota inferiormente a $\mathbb{E}(N_0, N_1, \mathbb{P} * \pi, G_0, p_0)$.

Demostración: Trabajamos en un modelo transitivo numerable M de ZFC. Veamos primero que $G_0 \cap N_0 \in N_1$. Llamemos $R \subset \mathbb{P}$ al conjunto de todas las condiciones completamente $(N_0, \mathbb{P})$-genéricas. Es claro que $R \in N_1$ y, por hipótesis, $q_0 \in R$. Que $\mathbb{P}$ sea completamente propio equivale por definición a que R sea denso en $\mathbb{P}$ y, como q_0 es $(N_1, \mathbb{P})$-genérica, $N_1 \cap R$ es predenso bajo q_0, luego q_0 es compatible con un $r \in N_1 \cap R$. Ahora bien, si $r' \leq r$ y $r' \leq q_0$ es completamente $(N_0, \mathbb{P})$-genérica, tenemos que $\bar{G}_{q_0} = \bar{G}_{r'} = \bar{G}_r \in N_1$, luego también $G_0 \cap N_0 \in N_1$, pues es la antiimagen de $\bar{G}_0$ por la función colapsante $\phi : N_0 \longrightarrow \bar{N}_0$, que está en N_1.

Por lo tanto, como G_0 es un filtro $(N_0, \mathbb{P})$-genérico, está definido el filtro $\mathbb{E}(N_0, N_1, \mathbb{P} * \pi, G_0, p_0)$. Recordemos su definición:

Llamamos $N_0^* = \bar{N}_0[\bar{G}_0]$, $\bar{\mathbb{Q}} = \bar{\pi}_{\bar{G}_0}$, $\bar{q} = \bar{\sigma}_{\bar{G}_0} \in \bar{\mathbb{Q}}$, $\bar{\mathbb{D}} = \bar{\Delta}_{\bar{G}_0} \in \bar{N}_0$ y $\mathbb{D} = \phi^{-1}(\bar{\mathbb{D}}) \in N_0$. Ahora elegimos $\bar{G}_1 \in \bigcap(N_1 \cap \mathbb{D}(\bar{N}_0, \bar{\mathbb{Q}}, \bar{q}))$, formamos $\bar{G} = \bar{G}_0 * \bar{G}_1$ y finalmente pasamos a $G = \bar{G}^*$ (el filtro generado por $\phi^{-1}[\bar{G}]$).

Fijemos ahora un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $q_0 \in H$, de modo que $\bar{H} = \bar{G}_0$, por lo que $\bar{\mathbb{Q}}$, $\bar{q}$, etc. siguen siendo los mismos. Según hemos visto antes del teorema 11.30, el colapso transitivo se extiende a $\phi : N_0[H] \longrightarrow N_0^*$.

Basta probar que $\phi^{-1}[\bar{G}_1]$ está acotado inferiormente en $\mathbb{Q} = \phi^{-1}(\bar{\mathbb{Q}})$. En tal caso, existe un $\tau \in \hat{\pi}$ tal que $q_0 \Vdash \tau$ es una cota inferior de $\varphi^{-1}[\check{\bar{G}}_1]$, luego el teorema 11.30 nos da que $\bar{G}_{(q_0,\tau)} = \bar{G}$, luego (q_0, τ) es completamente $(N_0, \mathbb{P}*\pi)$-genérica y (q_0, τ) acota inferiormente a G. Además, como $\bar{q} \in \bar{G}_1$, se cumple que $q_0 \Vdash \tau \leq \sigma$, luego $(q_0, \tau) \leq p_0$.

Notemos que $\mathbb{Q} = \pi_H$ cumple $\phi(\mathbb{Q}) = \bar{\pi}_{\bar{H}} = \bar{\mathbb{Q}}$, luego es el mismo que ya teníamos definido. Igualmente $\mathbb{D} = \Delta_H$ es el mismo que ya teníamos definido, y por hipótesis $\mathbb{Q}$ es $\mathbb{D}$-completo. Como $q = \sigma_H \in \mathbb{Q} \cap N_0$, existe un conjunto $X \in \mathbb{D}(N_0, \mathbb{Q}, q)$ tal que todos sus filtros están acotados inferiormente en $\mathbb{Q}$. Como $N_1[H] \prec H(\kappa)[H]$, podemos tomar $X \in N_1[H]$, pero como $\mathbb{D} \in M$, también $X \in M$, luego $X \in M \cap N_1[H] = N_1$ por 11.8, ya que q_0 es $(N_1, \mathbb{P})$-genérica, luego H es $(N_1, \mathbb{P})$-genérico.

Observemos ahora que, por la definición de la extensión de $\mathbb{D}$ a modelos no transitivos, $X = X_0^*$, donde $X_0 \in \mathbb{D}(\bar{N}, \bar{\mathbb{P}}, \bar{q}) \cap N_1$, pues

$$X_0 = \{\phi[K \cap N_0] \mid K \in X\} \in N_1,$$

luego $\bar{G}_1 \in X_0$, luego $\bar{G}_1^* \in X$, luego $\bar{G}_1^*$ y, en particular, $\phi^{-1}[\bar{G}_1]$ está acotado inferiormente en $\mathbb{Q}$. ■

Para generalizar este resultado a extensiones iteradas infinitas necesitamos generalizar la definición de $\mathbb{E}$:

Consideremos una iteración de preórdenes separativos $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \gamma}, \{\pi_\delta\}_{\delta < \gamma})$ con soportes numerables, de modo que, para cada $\delta < \gamma$,

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \bigvee \mathbb{D} \in \check{V}(\mathbb{D} \text{ es un sistema de completitud numerablemente completo}$$
$$\wedge\ \pi_\delta \text{ es } \mathbb{D}\text{-completo}).$$

Fijemos un cardinal no numerable κ suficientemente grande. Vamos a definir una función $\mathbb{E}(N_0, N, \mathbb{P}_\gamma, G_0, p_0)$, definida para los argumentos siguientes:

a) $N_0 \prec H(\kappa)$ numerable, γ, $\mathbb{P}_\gamma \in N_0$, $p_0 \in \mathbb{P}_\gamma \cap N_0$.

b) $N = \{N_\delta\}_{\delta \leq \alpha}$ es una torre en $H(\kappa)$ tal que N_0 es el anterior.

c) Existe $\gamma_0 \in N_0 \cap \gamma$ tal que G_0 es un filtro $(N_0, \mathbb{P}_{\gamma_0})$-genérico, $p_0|_{\gamma_0} \in G_0$ y $G_0 \in N_1$.

d) α es el ordinal de $N_0 \cap [\gamma_0, \gamma[$.

En estas condiciones, $\mathbb{E}(N_0, N, \mathbb{P}_\gamma, G_0, p_0)$ será un filtro $(N_0, \mathbb{P}_\gamma)$-genérico G_γ tal que $p_0 \in G_\gamma$ y las restricciones a γ_0 de las condiciones de G_γ están en G_0.

Definimos $\mathbb{E}$ por recursión sobre $\alpha < \omega_1$. Notemos que la condición d) (junto con que $\gamma_0 < \gamma$) implica que $\alpha > 0$. Supongamos en primer lugar que $\alpha = \alpha^* + 1$. Entonces la condición d) implica que $\gamma = \gamma^* + 1$. Consideremos primero el caso $\alpha = 1$, que equivale a $\gamma^* = \gamma_0$. Entonces tenemos únicamente dos submodelos N_0 y N_1 y, como $\mathbb{P}_\gamma \cong \mathbb{P}_{\gamma_0} * \pi_{\gamma_0}$, basta tomar

$$G_\gamma = \mathbb{E}(N_0, N_1, \mathbb{P}_{\gamma_0} * \pi_{\gamma_0}, G_0, p_0).$$

Supongamos ahora que $\gamma_0 < \gamma^*$ y sea $N^{\alpha^*} = \{N_\delta\}_{\delta \leq \alpha^*}$. Entonces tenemos definido $G_{\gamma^*} = \mathbb{E}(N_0, N^{\alpha^*}, \mathbb{P}_{\gamma^*}, G_0, p_0|_{\gamma^*})$, que es un filtro $(N_0, \mathbb{P}_{\gamma^*})$-genérico que extiende a G_0 y contiene a $p|_{\gamma^*}$. Más aún, podemos suponer que se cumple $G_{\gamma^*} \in N_\alpha$. En efecto, en principio podemos definir G_γ trivialmente en el caso en que $G_{\gamma^*} \notin N_\alpha$, pero el resultado final será una fórmula $G_\gamma = \mathbb{E}(N_0, N, \mathbb{P}_\gamma, G_0, p_0)$ que puede relativizarse a $H(\kappa)$ (en virtud de las mismas observaciones que hemos hecho sobre la definición de $\mathbb{E}$ para $\alpha = 1$), y entonces podemos usar que $N_\alpha \prec H(\kappa)$ (junto con el hecho de que N_α contiene todos los parámetros de la definición de G_{γ^*}) para concluir que $G_{\gamma^*} \in N_\alpha$, por lo que G_γ cumplirá realmente este caso de la definición.

Definimos entonces

$$G_\gamma = \mathbb{E}(N_0, N_\alpha, \mathbb{P}_{\gamma^*} * \pi_{\gamma^*}, G_{\gamma^*}, p_0).$$

Es fácil ver que cumple todo lo requerido.

Supongamos, por último, que α es un ordinal límite y sea[4] $\{\alpha_n\}_{n<\omega} \in N_0$ una sucesión cofinal creciente en α con $\alpha_0 = 0$. Llamemos $\{\gamma_n\}_{n\in\omega} \in N_0$ a la sucesión creciente dada por $\gamma_n = \gamma_0 + \alpha_n$. Notemos que, como $\alpha_n \in N_0$ es numerable, de hecho, $\alpha_n \subset N_0$, de donde $N_0 \cap [\gamma_0, \gamma_n[\ = [\gamma_0, \gamma_n[$ y así α_n es el ordinal de $N_0 \cap [\gamma_0, \gamma_n[$. En particular $\gamma_n \leq \gamma_{n+1} \leq \gamma$. Sea $\{D_n\}_{n\in\omega}$ una enumeración de todos los conjuntos densos en $\mathbb{P}_\gamma$ que están en N_0.

Vamos a definir recurrentemente dos sucesiones $\{p_n\}_{n\in\omega}$ y $\{G_n\}_{n\in\omega}$ de modo que $p_n \in \mathbb{P}_\gamma \cap N_0$ y $G_n \in N_{\alpha_n+1}$ es un filtro $(N_0, \mathbb{P}_{\gamma_n})$-genérico tal que:

a) G_0 y p_0 son los dados, y $p_n|_{\gamma_n} \in G_n$.

b) $p_{n+1} \leq p_n$ y $p_{n+1} \in D_n$.

Supuestos definidos p_n y G_n, por el teorema 11.19 aplicado al colapso transitivo de N_0 existe $p_{n+1} \in D_n \cap N_0$ tal que $p_{n+1} \leq p_n$ y $p_{n+1}|_{\gamma_n} \in G_n$. Entonces podemos definir la torre N^n cuyo primer término es N_0 y los siguientes son los N_δ con $\alpha_n + 1 \leq \delta \leq \alpha_{n+1}$ y a partir de ella

$$G_{n+1} = \mathbb{E}(N_0, N^n, \mathbb{P}_{\gamma_{n+1}}, G_n, p_{n+1}|_{\gamma_{n+1}}).$$

[4]Suponemos que N_0 es en realidad un par $(N_0, \leq)$, donde $\leq$ es un buen orden, y $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ se elige mediante dicho buen orden.

Ahora basta definir G_γ como el filtro generado por las condiciones p_n. Obviamente es $(N_0, \mathbb{P}_\gamma)$-genérico, contiene a p_0 y extiende a G_0, pues por construcción cada G_{n+1} extiende a G_n, luego todos extienden a G_0. Por lo tanto, si $p \in G_\gamma$ existe un n tal que $p_{n+1} \leq p$, luego $p_{n+1}|_{\gamma_n} \leq p|_{\gamma_n} \in G_n$, luego $p|_{\gamma_0} \in G_0$.

Teorema 11.33 *Sea $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\gamma}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\gamma})$ una iteración de preórdenes con soportes numerables tal que, para cada $\delta < \gamma$:*

a) $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi_\delta$ es $\check{\alpha}$-propio y separativo, para todo $\alpha < \omega_1$,

b) $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \bigvee \mathbb{D} \in \check{V}(\mathbb{D}$ es un sistema de completitud numerablemente completo $\land\ \pi_\delta$ es $\mathbb{D}$-completo),

c) $\mathbb{P}_\delta$ es completamente propio.

Sea κ un cardinal regular suficientemente grande y $N = \{N_\delta\}_{\delta\leq\alpha}$ una torre de longitud $\alpha + 1$ en $H(\kappa)$ tal que $\mathbb{P}_\gamma \in N_0$, sea $p_0 \in \mathbb{P}_\gamma \cap N_0$ y $\gamma_0 \in \gamma \cap N_0$, de modo que α es el ordinal de $N_0 \cap [\gamma_0, \gamma[$. Entonces:

Para cada condición $q_0 \in \mathbb{P}_{\gamma_0}$ completamente $(N_0, \mathbb{P}_{\gamma_0})$-genérica y $(N, \mathbb{P}_{\gamma_0})$-genérica tal que $q_0 \leq p_0|_{\gamma_0}$, existe una condición completamente $(N_0, \mathbb{P}_\gamma)$-genérica q tal que $q|_{\gamma_0} = q_0$, $q \leq p_0$. De hecho, q acota inferiormente al filtro $\mathbb{E}(N_0, N, \mathbb{P}_\gamma, G_0, p_0)$, donde $G_0 = G_{q_0}$.

Demostración: Como q_0 es $(N_1, \mathbb{P}_{\gamma_0})$-genérica, el mismo argumento empleado al principio de la prueba del teorema 11.32 demuestra que $G_0 \cap N_0 \in N_1$. Probamos el teorema por inducción sobre $\alpha > 0$ (el ordinal de $N_0 \cap [\gamma_0, \gamma[$). Suponemos en primer lugar que $\alpha = \alpha^* + 1$, lo que a su vez implica que $\gamma = \gamma^* + 1$. Más aún, supongamos de momento que $\alpha^* > 0$, con lo que $\gamma_0 < \gamma^*$.

Sea $X \subset \mathbb{P}_{\gamma_0}$ una anticadena maximal entre las que cumplen las propiedades siguientes:

a) todo $r \in X$ acota inferiormente a $G_0 \cap N_0$,

b) todo $r \in X$ es $(N|_\alpha, \mathbb{P}_{\gamma_0})$-genérico.

Podemos exigir que $X \in N_\alpha$, y es predenso bajo q_0, pues toda $t \leq q_0$ cumple las dos condiciones anteriores, luego es compatible con un elemento de X. Para cada $r_0 \in X$, podemos aplicar la hipótesis de inducción a la iteración $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\gamma^*}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\gamma^*})$ y la torre $N|_\alpha$, con $p_0|_{\gamma^*}$ y $q_0 = r_0$. (Notemos que tenemos $p_0|_{\gamma_0} \in G_0 \cap N_0$, luego $r_0 \leq p_0|_{\gamma_0}$.) La conclusión es que existe $r_1 \in \mathbb{P}_{\gamma^*}$ tal que $r_1|_{\gamma_0} = r_0$, $r_0 \leq p_0|_{\gamma^*}$ y r_1 acota inferiormente al filtro $G_{\gamma^*} = \mathbb{E}(N_0, N|_\alpha, \mathbb{P}_{\gamma^*}, G_0, p_0|_{\gamma^*})$. Como todos los parámetros están en N_α, se cumple que $G_{\gamma^*} \in N_\alpha$, luego si $r_0 \in X \cap N_\alpha$ podemos elegir $r_1 \in N_\alpha$.

Aplicamos ahora el teorema 4.48 (generalizado a V en lugar de M por el teorema de reflexión), que nos da un $\sigma_0 \in V^{\mathbb{P}_{\gamma_0}}$ tal que cada $r_0 \in X$ cumple $r_0 \Vdash \sigma_0 = \check{r}_1$. De aquí se sigue que

$$q_0 \Vdash \sigma_0 \in \check{\mathbb{P}}_{\gamma^*} \cap \check{N}_\alpha \land \sigma_0|_{\check{\gamma}_0} \in \Gamma.$$

En efecto, el conjunto

$$D = \{s \in \mathbb{P}_{\gamma_0} \mid s \in X \vee \bigwedge r \in X\ s \perp r\} \in N_\alpha$$

es claramente predenso en $\mathbb{P}_{\gamma_0}$ y, relativizando todo lo anterior a un modelo transitivo numerable M de ZFC, tenemos que si G es un filtro $\mathbb{P}_{\gamma_0}$-genérico sobre M tal que $q_0 \in G$, entonces existe $r_0 \in D \cap N_\alpha \cap G$, por el teorema 11.6, ya que G es $(N_\alpha, \mathbb{P}_{\gamma_0})$-genérico porque q_0 es $(N_\alpha, \mathbb{P}_{\gamma_0})$-genérica, luego existe $s \in G$ tal que $s \leq q_0$, $s \leq r_0$, luego s es compatible con un elemento de X, luego r_0 también, luego $r_0 \in X$ por definición de D. En definitiva, $r_0 \in X \cap N_\alpha \cap G$, luego $\sigma_{0G} = r_1 \in \mathbb{P}_{\gamma^*} \cap N_\alpha$. Además, $\sigma_{0G}|_{\gamma_0} = r_1|_{\gamma_0} = r_0 \in G$.

Con esto estamos en las hipótesis del teorema 11.20, luego podemos concluir que existe una condición $(N_\alpha, \mathbb{P}_{\gamma^*})$-genérica q_1 de manera que $q_1|_{\gamma_0} = q_0$ y $q_1 \Vdash i_{\gamma_0\gamma^*}(\sigma_0) \in \Gamma$.

Además q_1 acota inferiormente a G_{γ^*}, pues si $t \in G_{\gamma^*}$, tomamos un filtro $\mathbb{P}_{\gamma^*}$-genérico sobre M con $q_1 \in G$, y entonces $G' = i^{-1}_{\gamma_0\gamma^*}[G]$ es $\mathbb{P}_{\gamma_0}$-genérico sobre M con $q_0 \in G'$, luego hemos visto que existe un $r_0 \in X \cap N_\alpha \cap G$, de modo que $i_{\gamma_0\gamma^*}(\sigma_0)_G = \sigma_{0G'} = r_1 \leq t$ y $i_{\gamma_0\gamma^*}(\sigma_0)_G \in G$, luego $t \in G$, luego concluimos que $q_1 \Vdash \check{t} \in \Gamma$, luego $q_1 \leq t$.

Hasta aquí habíamos supuesto que $\alpha^* > 0$. Ahora observamos que en el caso en que $\alpha^* = 0$ y, por lo tanto, $\gamma^* = \gamma_0$, lo que hemos obtenido se cumple trivialmente tomando $G_{\gamma^*} = G_0$, $\sigma_0 = \check{q}_0$ y $q_1 = q_0$. Por lo tanto, a partir de aquí la prueba vale tanto si $\alpha^* = 0$ como si no.

Ahora basta aplicar el teorema 11.32 a los objetos siguientes:

$\mathbb{P}$	π	N_0	N_1	q_0	a
$\mathbb{P}_{\gamma^*}$	π_{γ^*}	N_0	N_α	q_1	$p_0|_{\gamma^*}$

El resultado es que existe una condición completamente $(N_0, \mathbb{P}_\gamma)$-genérica q tal que $q \leq p_0$, $q|_{\gamma^*} = q_1$ (luego $q|_{\gamma_0} = q_0$) que acota inferiormente al filtro $\mathbb{E}(N_0, N_\alpha, \mathbb{P}_\gamma, G_{q_1}, p_0)$. Ahora basta probar que este filtro coincide con $\mathbb{E}(N_0, N, \mathbb{P}_\gamma, G_0, p_0)$. Éste es por construcción $\mathbb{E}(N_0, N_\alpha, \mathbb{P}_\gamma, G_{\gamma^*}, p_0)$, pero tenemos que $G_{\gamma^*} \subset G_{q_1}$ y, como ambos son $(N_0, \mathbb{P}_{\gamma^*})$-genéricos, se cumple que $N_0 \cap G_{\gamma^*} = N_0 \cap G_{q_0}$ y la definición de $\mathbb{E}$ sólo depende de esta intersección.

Ahora suponemos que α es un ordinal límite y seguimos la definición del filtro $G_\gamma = \mathbb{E}(N_0, N, \mathbb{P}_\gamma, G_0, p_0)$, que depende de una sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\omega} \in N_0$ cofinal creciente en α, que a su vez determina las sucesiones $\{\gamma_n\}_{n\in\omega}$, $\{p_n\}_{n\in\omega}$ y $\{G_n\}_{n\in\omega}$, de modo que G_γ es el filtro generado por las condiciones p_n.

Ahora vamos a definir una sucesión $\{q_n\}_{n\in\omega}$ de modo que se cumpla lo siguiente:

a) q_n acota inferiormente a G_n,

b) $q_n \leq p_n|_{\gamma_n}$,

c) $q_{n+1}|_{\gamma_n} = q_n$,

d) q_n es $(\{N_\delta\}_{\alpha_n+1\leq\delta\leq\alpha}, \mathbb{P}_{\gamma_n})$-genérica.

Notemos que la primera condición implica que la condición q_n es completamente $(N_0, \mathbb{P}_{\gamma_n})$-genérica.

Partimos del q_0 dado por el enunciado, que cumple todo lo requerido. Supongamos definido q_n. Sea $X \subset \mathbb{P}_{\gamma_n}$ una anticadena maximal entre las que cumplen las propiedades siguientes:

a) Si $r \in X$ entonces r acota inferiormente a $G_n \cap N_0$,

b) Toda $r \in X$ es $(\{N_\delta\}_{\alpha_n+1 \leq \delta \leq \alpha_{n+1}}, \mathbb{P}_{\gamma_n})$-genérica.

Podemos elegir $X \in N_{\alpha_{n+1}+1}$ y es claramente predenso bajo q_n. Para cada $r_0 \in X$ podemos aplicar la hipótesis de inducción a $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \gamma_{n+1}}, \{\pi_\delta\}_{\delta < \gamma_{n+1}})$ y la torre que empieza por N_0 y sigue con $\{N_\delta\}_{\alpha_n+1 \leq \delta \leq \alpha_{n+1}}$. Tomamos $p_{n+1}|_{\gamma_{n+1}}$ en lugar de p_0, γ_n en lugar de γ_0 y r_0 en lugar de q_0.

Observemos que $p_{n+1}|_{\gamma_{n+1}} \in G_{n+1}$, luego $p_{n+1}|_{\gamma_n} \in G_n \cap N_0$ (por construcción de $\mathbb{E}$), luego $r_0 \leq p_{n+1}|_{\gamma_n}$. La conclusión es que existe una condición completamente $(N_0, \mathbb{P}_{\gamma_{n+1}})$-genérica r_1 tal que $r_1|_{\gamma_n} = r_0$ y que acota inferiormente a G_{n+1}. Además, si $r_0 \in X \cap N_{\alpha_{n+1}+1}$ podemos tomar $r_1 \in N_{\alpha_{n+1}+1}$.

Notemos que estamos imitando el argumento de la primera parte de la prueba. Como allí, ahora podemos obtener un nombre $\sigma_0 \in V^{\mathbb{P}_{\gamma_n}}$ tal que cada $r_0 \in X$ cumple $r_0 \Vdash \sigma_0 = \check{r}_1$. A su vez, esto implica que

$$q_n \Vdash \sigma_0 \in \check{\mathbb{P}}_{\gamma_n} \cap \check{N}_{\alpha_{n+1}+1} \land \sigma_0|_{\check{\gamma}_n} \in \Gamma \land \sigma_0 \text{ acota a } \check{G}_{n+1}.$$

Ahora podemos aplicar el teorema 11.24 con la torre $\{N_\delta\}_{\alpha_{n+1}+1 \leq \delta \leq \alpha}$, lo que nos da una condición q_{n+1} que cumple las condiciones c) y d) y además $q_{n+1} \Vdash i_{\gamma_n \gamma_{n+1}}(\sigma_0) \in \Gamma$. Esto implica que q_{n+1} acota a G_{n+1} (pues si $p \in G_{n+1}$ entonces $q_{n+1} \Vdash \check{p} \in \Gamma$), con lo que tenemos a), que trivialmente implica b).

Finalmente definimos $q^* = \bigcup\limits_n q_n$ y $q = i_{\gamma^*\gamma}(q^*) \in \mathbb{P}_\gamma$, donde $\gamma^* = \sup\limits_n \gamma_n$. Así $q|_{\gamma_0} = q_0$ y, como $q_n \leq p_n|_{\gamma_n} \leq p_m|_{\gamma_n}$, para $m \leq n$, resulta que $q^* \leq p_m|_{\gamma^*}$, para todo $m \in \omega$.

Ahora observamos que $p_m \in N_0$, luego $\operatorname{sop} p_m \in N_0$ y, como es numerable, de hecho $\operatorname{sop} p_m \subset N_0$. Si $\beta \in \operatorname{sop} p_m \cap [\gamma_0, \gamma[$, entonces es de la forma $\beta = \gamma_0 + \delta$, con $\delta < \alpha$, luego existe un n tal que $\delta < \alpha_n$, luego $\beta < \gamma_n$, luego $\operatorname{sop} p_m \subset \gamma^*$, luego $q \leq p_m$, y en particular $q \leq p_0$ como requiere el enunciado.

Pero además, como $q \leq q_m$ para todo $m \in \omega$ y G_γ es el filtro generado por las condiciones p_m, concluimos que q acota inferiormente a G_γ, luego q es una condición completamente $(N_0, \mathbb{P}_\gamma)$-genérica. ■

Ahora ya podemos dar condiciones suficientes para que una iteración con soportes numerables conserve $\mathcal{P}\omega$:

Teorema 11.34 *Sea $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \gamma}, \{\pi_\delta\}_{\delta < \gamma})$ una iteración de preórdenes con soportes numerables tal que, para cada $\delta < \gamma$,*

a) $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi_\delta$ es $\check{\alpha}$-propio, para todo $\alpha < \omega_1$

b) $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \bigvee \mathbb{D} \in \check{V}(\mathbb{D}$ *es un sistema de completitud numerablemente completo* $\land\ \pi_\delta$ *es* $\mathbb{D}$*-completo).*

c) $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi_\delta$ *es separativo, para todo* $\delta < \gamma$*.*

Entonces $\mathbb{P}_\gamma$ *es completamente propio y separativo. En particular conserva* $\mathcal{P}\omega$*.*

Demostración: Por 11.25 sabemos que todos los $\mathbb{P}_\delta$ son α-propios, para todo $\alpha < \omega_1$. Vamos a probar que todos ellos son completamente propios. Razonando por inducción sobre γ podemos suponer que $\mathbb{P}_\delta$ es completamente propio para todo $\delta < \gamma$. Por 7.28 sabemos que $\mathbb{P}_\gamma$ es separativo.

Para probar que es completamente propio tomamos un cardinal regular κ suficientemente grande, un submodelo elemental numerable $N_0 \prec H(\kappa)$ tal que $\mathbb{P}_\gamma \in N$ y una condición $p_0 \in \mathbb{P}_\gamma \cap N_0$. Tomamos $\gamma_0 \in \gamma \cap N_0$ y llamamos α al ordinal de $N_0 \cap [\gamma_0, \gamma[$. Claramente podemos construir una torre N de submodelos elementales de $H(\kappa)$ de longitud $\alpha + 1$ cuyo primer término sea el N_0 dado.

Puesto que $\mathbb{P}_{\gamma_0}$ es α-propio la condición $p_0|_{\gamma_0}$ tiene una extensión $(N, \mathbb{P}_{\gamma_0})$-genérica, y como es completamente propio ésta tiene a su vez una extensión q_0 que es completamente $(N_0, \mathbb{P}_{\gamma_0})$-genérica (y seguirá siendo $(N, \mathbb{P}_{\gamma_0})$-genérica). Por el teorema anterior p_0 tiene una extensión completamente genérica, como había que probar. ■

11.5 C.p.o.s propios sobre isomorfismos

Los c.p.o.s propios conservan $\aleph_1$, luego para conservar todos los cardinales basta con que cumplan la condición de cadena $\aleph_2$. Sin embargo, ésta no se conserva en general por iteraciones con soportes numerables, así que vamos a introducir una propiedad más fuerte que sí se conserva.

Definición 11.35 Sean $\aleph_2 \leq \mu < \kappa$ cardinales regulares, sea $\trianglelefteq$ un buen orden en $H(\kappa)$ y sean N_0, $N_1 \prec (H(\kappa), \in, \trianglelefteq)$ submodelos elementales numerables (respecto del lenguaje que resulta de añadir al lenguaje de ZFC un relator binario que se interpreta como $\trianglelefteq$) tales que $\mu \in N_0 \cap N_1$. Diremos que N_0 y N_1 están en *situación normal* respecto a μ si:

a) Los conjuntos $A = N_0 \cap N_1 \cap \mu$, $B = (N_0 \setminus N_1) \cap \mu$ y $C = (N_1 \setminus N_0) \cap \mu$ cumplen $A < B < C$, en el sentido de que todo elemento de A es menor que todo elemento de B y todo elemento de B es menor que todo elemento de C.

b) Existe un isomorfismo de modelos $h : N_0 \longrightarrow N_1$ que se restringe a la identidad en $N_0 \cap N_1$ (en particular en A).

En estas condiciones, si $\mathbb{P} \in N_0 \cap N_1$ es un c.p.o., diremos que una condición $q \in \mathbb{P}$ es $(N_0, N_1, \mathbb{P})$-*genérica* si:

a) q es $(N_0, \mathbb{P})$-genérica y $(N_1, \mathbb{P})$-genérica.[5]

b) $q \Vdash \bigwedge r \in \check{N}_0 \cap \check{\mathbb{P}}\,(r \in \Gamma \leftrightarrow \check{h}(r) \in \Gamma)$.

En lo que sigue sobrentenderemos que $H(\kappa)$ se considera como modelo del lenguaje que resulta de añadir un relator binario al lenguaje de ZFC que se interpreta como un buen orden $\trianglelefteq$ prefijado, y cuando escribamos $N \prec H(\kappa)$ se entenderá que N es un submodelo elemental respecto de este lenguaje. Observemos que la propiedad b) tiene una interpretación natural:

Teorema 11.36 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC*, consideremos $\aleph_2^M \leq \mu < \kappa$ cardinales regulares^M y sean N_0, $N_1 \prec H(\kappa)^M$ en situación normal respecto a μ, con isomorfismo $h : N_0 \longrightarrow N_1$. Sea $\mathbb{P} \in N_0 \cap N_1$ un c.p.o., sea q una condición $(N_0, N_1, \mathbb{P})$-genérica y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $q \in G$. Entonces existe $\bar{h} \in M[G]$ tal que $\bar{h} : N_0[G] \longrightarrow N_1[G]$ es un isomorfismo que extiende a h y $\bar{h}(G) = G$.*

DEMOSTRACIÓN: Todo $x \in N_0[G]$ es de la forma $x = \sigma_G$, con $\sigma \in N_0^{\mathbb{P}}$. Supongamos que $\sigma_G = \tau_G$, para otro $\tau \in N_0^{\mathbb{P}}$. Entonces existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \Vdash \sigma = \tau$. Podemos tomarlo $r \in N_0$. Por otra parte sabemos que en $M[G]$ se cumple que $\bigwedge r \in N_0 \cap \mathbb{P}(r \in G \leftrightarrow h(r) \in G)$, luego $h(r) \in G$, y claramente $h(r) \Vdash h(\sigma) = h(\tau)$, luego concluimos que $h(\sigma)_G = h(\tau)_G$.

Esto nos permite definir $\bar{h} : N_0[G] \longrightarrow N_1[G]$ mediante $\bar{h}(\sigma_G) = h(\sigma)_G$, y es fácil ver que es un isomorfismo cuyo inverso es $\overline{h^{-1}}$. Además, como $h(\Gamma) = \Gamma$, es claro que $\bar{h}(G) = G$. También es claro que $\bar{h} \in M[G]$. ■

Ahora ya podemos introducir la propiedad que vamos a estudiar en esta sección:

Definición 11.37 Si $\mu \geq \aleph_2$ es un cardinal regular, diremos que un c.p.o. $\mathbb{P}$ es *μ-propio sobre isomorfismos* si para todo cardinal regular κ suficientemente grande, cuando N_0, $N_1 \prec H(\kappa)$ son submodelos elementales numerables en situación normal,[6] $x, \mathbb{P} \in N_0 \cap N_1$ y $p \in N_0 \cap \mathbb{P}$, existe una condición $(N_0, N_1, \mathbb{P})$-genérica $q \leq p$.

Observemos que todo c.p.o. μ-propio sobre isomorfismos es propio. En efecto, si $\mathbb{P}$ cumple la definición de μ-propio sobre isomorfismos, por el teorema 11.14 (con $\alpha = 1$) basta probar que $\mathbb{P}$ cumple la definición de c.p.o. propio para submodelos elementales $N \prec (H(\kappa), \in, \trianglelefteq)$ tales que $\mu, \mathbb{P} \in N$, pues el conjunto de tales submodelos está en $\mathcal{D}H(\kappa)$, y para ello basta aplicar la definición de c.p.o. μ-propio sobre isomorfismos con $N_0 = N_1 = N$ y h igual a la identidad

Veamos la relación con las condiciones de cadena:

[5] Notemos que la condición b) implica que si q es $(N_0, \mathbb{P})$-genérica, entonces es automáticamente $(N_1, \mathbb{P})$-genérica, pues, relativizando a un modelo transitivo M y tomando un filtro genérico tal que $q \in G$, para todo $D \in N_1$ predenso en $\mathbb{P}$ se cumple que $h^{-1}(D) \in N_0$ es predenso en $\mathbb{P}$, luego existe $r \in h^{-1}(D) \cap N_0 \cap G$, luego, por b), $h(r) \in D \cap N_1 \cap G$, y esto implica que q es $(N_1, \mathbb{P})$-genérica.

[6] Respecto de cualquier buen orden prefijado en $H(\kappa)$.

Teorema 11.38 *Sea μ un cardinal regular tal que $\nu^{\aleph_0} < \mu$ para todo $\nu < \mu$. Entonces todo c.p.o. separativo y μ-propio sobre isomorfismos cumple la c.c. μ.*

Demostración: Sea $\mathbb{P}$ un c.p.o. μ-propio sobre isomorfismos y supongamos que $\{p_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ es una anticadena en $\mathbb{P}$. Fijemos un cardinal regular κ tal que $\mathbb{P} \in H(\kappa)$ y tomemos submodelos elementales numerables $N_\alpha \prec H(\kappa)$ tales que μ, $p_\alpha \in N_\alpha$.

Observemos que $\aleph_1$ y μ cumplen las hipótesis del lema de los sistemas Δ (teorema [TC 5.12]), luego la familia $\{N_\alpha \mid \alpha < \mu\}$ contiene un sistema Δ de cardinal μ. Equivalentemente, pasando a una subfamilia, podemos suponer que existe un K tal que[7] $N_\alpha \cap N_\beta = K$ para todo α, $\beta < \mu$. El mismo argumento aplicado a la familia $\{N_\alpha \cap \mu\}_{\alpha<\mu}$, y pasando nuevamente a una subfamilia si es preciso, podemos suponer que existe un A tal que $N_\alpha \cap N_\beta \cap \mu = A$, para todo α, $\beta < \mu$.

Consideremos ahora un lenguaje formal $\mathcal{L}$ que resulte de añadir al lenguaje de la teoría de conjuntos una constante para cada elemento de K y una constante adicional c, y consideremos a cada N_α como modelo de $\mathcal{L}$ interpretando c como p_α y las demás constantes como los elementos de K correspondientes. Es claro que un conjunto numerable fijo se puede dotar de a lo sumo $2^{\aleph_0}$ estructuras de modelo de $\mathcal{L}$, luego existen a lo sumo $2^{\aleph_0} < \mu$ clases de isomorfía de modelos numerables de $\mathcal{L}$. Por lo tanto, restringiendo aún más la familia podemos suponer que todos los modelos N_α son isomorfos como modelos de $\mathcal{L}$, es decir, que existen isomorfismos de modelos $h_{\alpha\beta} : N_\alpha \longrightarrow N_\beta$ que restringidos a K son la identidad y $h_{\alpha\beta}(p_\alpha) = p_\beta$.

Sea $\gamma < \mu$ una cota superior de A. Si el conjunto $\{\alpha < \mu \mid N_\alpha \cap (\gamma \setminus A) \neq \varnothing\}$ tuviera cardinal μ, podríamos encontrar un elemento de $\gamma \setminus A$ que estaría en N_α para μ valores distintos de α, en particular para dos de ellos, en contra de que A es la raíz del sistema Δ. Por lo tanto, restringiendo la familia podemos suponer que todos los elementos de $N_\alpha \setminus A$ son mayores que γ, en particular mayores que todos los elementos de A. En particular, si llamamos $B = N_0 \cap \mu$, tenemos que $A < B$.

Razonando análogamente con una cota de B obtenemos que, para cierto valor de $\alpha > 0$ (y reordenando podemos suponer $\alpha = 1$, se cumple que si llamamos $C = N_1 \cap \mu$, entonces $A < B < C$. Por lo tanto, N_0 y N_1 están en situación normal con un isomorfismo $h = h_{01}$ que además cumple $h(p_0) = p_1$.

Ahora usamos que $\mathbb{P}$ es μ-propio sobre isomorfismos, lo que nos da una condición $(N_0, N_1, \mathbb{P})$-genérica $q \leq p_0$. Como $q \Vdash \check{p}_0 \in \Gamma$, también $q \Vdash \check{h}(\check{p}_0) \in \Gamma$, luego $q \Vdash \check{p}_1 \in \Gamma$ y, como $\mathbb{P}$ es separativo, resulta que $q \leq p_1$, en contradicción con que $p_0 \perp p_1$. ■

En general, no todo c.p.o. con la c.c.μ es μ-propio sobre isomorfismos, pero si lo son los c.p.o.s que cumplen una propiedad más fuerte:

[7]Notemos que si el cardinal de $\{N_\alpha \mid \alpha < \mu\}$ fuera menor que μ, podríamos tomar una subfamilia con todos los N_α iguales, que cumpliría trivialmente la misma conclusión.

Teorema 11.39 *Si $\mu \geq \aleph_2$ es un cardinal regular y $\mathbb{P}$ es un c.p.o. propio tal que $|\mathbb{P}| < \mu$, entonces $\mathbb{P}$ es μ-propio sobre isomorfismos.*

Demostración: Sea $\kappa > \mu$ un cardinal regular suficientemente grande (para que cumpla con $\mathbb{P}$ la definición de c.p.o. propio) tal que $\mathbb{P} \in H(\kappa)$. Consideramos dos submodelos elementales numerables N_0, $N_1 \preceq H(\kappa)$ en situación normal de modo que $\mathbb{P} \in N_0 \cap N_1$ y una condición $p \in N_0 \cap \mathbb{P}$.

Sea $\xi = |\mathbb{P}| \in N_0 \cap N_1$ y sea $g : \xi \longrightarrow \mathbb{P}$ la menor biyección respecto al orden prefijado $\trianglelefteq$. El hecho de que podamos determinar g mediante $\trianglelefteq$ se traduce en que $g \in N_0 \cap N_1$. Como $\xi \in N_0 \cap N_1 \cap \mu$ tenemos que $N_0 \cap \xi = N_1 \cap \xi$. Por lo tanto, aplicando g, resulta que $N_0 \cap \mathbb{P} = N_1 \cap \mathbb{P} \subset N_0 \cap N_1$ y el isomorfismo h es la identidad en $N_0 \cap \mathbb{P}$. Por lo tanto, si $q \leq p$ es cualquier condición $(N_0, \mathbb{P})$-genérica, sucede que es también $(N_0, N_1, \mathbb{P})$-genérica, pues cumple trivialmente la condición b), luego también es $(N_1, \mathbb{P})$-genérica. ■

La prueba del teorema anterior ilustra el interés de considerar un buen orden en $H(\kappa)$: nos permite asegurar que una elección arbitraria a partir de parámetros que están en los dos modelos N_0 y N_1 puede tomarse de modo que esté también en los dos modelos.

El teorema 11.38 implica en particular que todo c.p.o. $\aleph_2$-propio sobre isomorfismos cumple la c.c. $\aleph_2$. Veamos que podemos afirmar un poco más:

Teorema 11.40 *Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ y $\mathbb{P}$ es un c.p.o. $\aleph_2$-propio sobre isomorfismos, entonces $\mathbb{1} \Vdash 2^{\aleph_0} = \aleph_1$.*

Demostración: Relativizamos la prueba a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Si el resultado es falso, existen un $p \in \mathbb{P}$ y un $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ tales que $p \Vdash \sigma : \omega_2 \longrightarrow \mathcal{P}\omega$ inyectiva. Sea $\kappa > \aleph_2$ suficientemente grande tal que $\mathbb{P} \in H(\kappa)$. Para cada $\alpha < \omega_2$ sea $N_\alpha \prec H(\kappa)$ numerable tal que α, $\mathbb{P}$, $\sigma \in N_\alpha$.

Como $\aleph_1$ y $\aleph_2$ cumplen las hipótesis del lema de los sistemas Δ (teorema 5.12), existe $I \subset \omega_2$ de cardinal $\aleph_2$ tal que la subfamilia $\{N_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es un sistema Δ de raíz K. Razonando igualmente con $\{N_\alpha \cap \omega_2\}_{\alpha \in I}$ y restringiendo I si es preciso, podemos suponer que esta familia también es un sistema Δ, de raíz A.

Consideramos a cada N_α como modelo del lenguaje formal que resulta de añadirle al lenguaje de ZFC un relator diádico que se interpreta como el buen orden que presuponemos en $H(\kappa)$, una constante que se interpreta como α y un conjunto numerable de constantes que se interpretan como los elementos de K. Como a lo sumo hay $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ clases de isomorfía de modelos numerables de dicho lenguaje (basta considerar modelos con universo ω), restringiendo aún más el conjunto I podemos suponer que todos los modelos $\{N_\alpha\}_{\alpha \in I}$ son isomorfos, con isomorfismos $h_{\alpha\beta} : N_\alpha \longrightarrow N_\beta$ que se restringen a la identidad en la intersección $K = N_\alpha \cap N_\beta$ y que cumplen que $h_{\alpha\beta}(\alpha) = \beta$.

El mismo argumento empleado en la prueba del 11.38 nos permite seleccionar $\alpha < \beta < \omega_2$ de modo que $h_{\alpha\beta} : N_\alpha \longrightarrow N_\beta$ cumpla todos los requisitos de la definición de situación normal. Por simplificar, pasamos a llamar N_0 y N_1 a estos dos modelos, de modo que están en situación normal respecto de ω_2 y el isomorfismo $h : N_0 \longrightarrow N_1$ cumple $h(\alpha) = \beta > \alpha$.

Por hipótesis podemos tomar una condición $(N_0, N_1, \mathbb{P})$-genérica $q \leq p$. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $q \in G$. Entonces, en $M[G]$ podemos considerar $f = \sigma_G \in N_0[G] \cap N_1[G]$, de modo que $f : \omega_2 \longrightarrow \mathcal{P}\omega$ inyectiva, pero también tenemos que h se extiende a un isomorfismo $h : N_0[G] \longrightarrow N_1[G]$ que deja invariante a G, por lo que $h(f) = h(\sigma_G) = h(\sigma)_G = \sigma_G = f$.

Observemos que h es la identidad en $N_0[G] \cap \mathcal{P}\omega$, pues si $a \in N_0[G] \cap \mathcal{P}\omega$ y $n \in a$, entonces $n = h(n) \in h(a)$, mientras que si $n \in \omega \setminus a$, entonces $n = h(n) \notin h(a)$, luego $a = h(a)$. Por consiguiente, $f(\alpha) = h(f(\alpha)) = h(f)(h(\alpha)) = f(\beta)$, en contradicción con la inyectividad de f. ■

Veamos ahora que la propiedad de ser μ-propio sobre isomorfismos, a diferencia de las condiciones de cadena, se conserva por iteraciones con soportes numerables. Empezamos generalizando el teorema 11.16:

Teorema 11.41 *Sea $\mathbb{P}$ un c.p.o. y π un nombre para un c.p.o. Sea $\mathbb{R} = \mathbb{P} * \pi$, sean $\aleph_2 \leq \mu < \kappa$ cardinales regulares, sean N_0, $N_1 \prec H(\kappa)$ en situación normal respecto a μ de modo que $\mathbb{R} \in N_0 \cap N_1$. Entonces una condición $(p, \sigma) \in \mathbb{R}$ es $(N_0, N_1, \mathbb{R})$-genérica si y sólo si:*

a) p es $(N_0, N_1, \mathbb{P})$-genérica y

b) $p \Vdash \sigma$ es $(\check{N}_0[\Gamma], \check{N}_1[\Gamma], \pi)$-genérica.

Demostración: Basta probar la relativización del teorema a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Llamemos $h : N_0 \longrightarrow N_1$ al isomorfismo que prueba que N_0 y N_1 están en situación normal. Observemos que si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $p \in G$, entonces el teorema 11.36 nos da un isomorfismo $\bar{h} : N_0[G] \longrightarrow N_1[G]$ que extiende a h y tal que $\bar{h}(G) = G$. Además por 11.3 tenemos que $N_0[G]$, $N_1[G] \prec H(\kappa)^{M[G]}$. Si p es $(N_0, \mathbb{P})$-genérica y $(N_1, \mathbb{P})$, genérica, entonces el filtro G es $(N_0, \mathbb{P})$-genérico y (N_1, G)-genérico, luego las extensiones $N_0[G]$ y $N_1[G]$ se colapsan a extensiones genéricas de los colapsos de N_0 y N_1, respectivamente. Usando que las extensiones genéricas no añaden ordinales concluimos inmediatamente que $N_0[G]$ y $N_1[G]$ están en situación normal respecto de μ, lo cual da sentido a la propiedad b) supuesto que se cumple a).

Supongamos ahora que se cumplen a) y b). Por 11.16 tenemos que (p, σ) es $(N_0, \mathbb{R})$-genérica y $(N_1, \mathbb{R})$-genérica. Ahora tomamos un filtro $\mathbb{R}$-genérico sobre M que contenga a (p, σ), que será de la forma $G * H$, donde G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $p \in G$ y H es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[G]$, donde $\mathbb{Q} = \pi_G$, tal que $\sigma_G \in H$. Por b) tenemos que la condición σ_G es $(N_0[G], N_1[G], \mathbb{Q})$-genérica y por

Ahora tomamos $(r, \tau) \in \mathbb{R} \cap N_0$. Si $(r, \tau) \in G * H$ entonces $r \in G$, luego por a) tenemos que $h(r) \in G$. Por otra parte $\tau_G \in H$, luego por b) tenemos que $\bar{h}(\tau_G) = h(\tau)_G \in H$, luego $h(r, \tau) \in G * H$, e igualmente se prueba la inclusión opuesta, luego (p, σ) es $(N_0, N_1, \mathbb{R})$-genérica.

Supongamos ahora que (p,σ) es $(N_0,N_1,\mathbb{R})$-genérica. Entonces, por 11.16 tenemos que p es $(N_0,\mathbb{P})$-genérica y $(N_1,\mathbb{P})$-genérica y que

$$p \Vdash \sigma \text{ es } (\check{N}_0[\Gamma],\pi)\text{-genérica y } (\check{N}_1[\Gamma],\pi)\text{-genérica.}$$

Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $p\in G$ y sea $r\in N_0\cap\mathbb{P}\cap G$. Sea $\mathbb{Q}=\pi_G$ y sea H un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[G]$ tal que $\sigma_G\in H$. Entonces tenemos que $(r,\mathbb{1}_\pi)\in N_0\cap\mathbb{R}\cap(G*H)$, luego por la hipótesis sobre (p,σ), que está en $G*H$, resulta que $(h(r),\mathbb{1}_\pi)\in G*H$, luego $h(r)\in G$, e igualmente se prueba la implicación contraria, de modo que se cumple a).

Para probar b) tomamos un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $p\in G$, con lo que sabemos que σ_G es $(N_0[G],\mathbb{Q})$-genérica y $(N_1[G],\mathbb{Q})$-genérica, donde $\mathbb{Q}=\pi_G$. Consideramos la extensión $\bar{h}:N_0[G]\longrightarrow N_1[G]$, con la que ambos modelos están en situación normal respecto de μ. Ahora fijamos un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[G]$ tal que $\sigma_G\in H$, y tomamos $\tau_G\in N_0[G]\cap\mathbb{Q}\cap H$. No perdemos generalidad si suponemos que $\tau\in\hat{\pi}\cap N_0$, de modo que $(\mathbb{1},\tau)\in N_0\cap\mathbb{R}\cap(G*H)$, luego por hipótesis, como $(p,\sigma)\in G*H$, resulta que $h(\mathbb{1},\tau)\in G*H$, luego $\bar{h}(\tau_G)=h(\tau)_G\in H$. Igualmente se prueba la implicación contraria, luego se cumple b). ■

La prueba del teorema siguiente es idéntica a la de 11.17 usando el teorema anterior en lugar de 11.16:

Teorema 11.42 *Sea $\mathbb{P}$ un c.p.o. μ-propio sobre isomorfismos para cierto cardinal μ y sea π un nombre para un c.p.o. tal que $\mathbb{1}\Vdash\pi$ es $\check{\mu}$-propio sobre isomorfismos. Sea $\mathbb{R}=\mathbb{P}*\pi$, sea $\phi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{P}$ la proyección dada por $\phi(p,\sigma)=p$ y sea $i:\mathbb{P}\longrightarrow\mathbb{R}$ la inmersión completa dada por $i(p)=(p,\mathbb{1})$. Sea $\kappa>\mu$ un cardinal regular suficientemente grande y sean N_0, $N_1\prec H(\kappa)$ submodelos elementales numerables en situación normal respecto de μ de modo que $\mathbb{R}\in N_0\cap N_1$. Supongamos que $p\in\mathbb{P}$ es $(N_0,N_1,\mathbb{P})$-genérica y sea $\sigma\in V^{\mathbb{P}}$ tal que*

$$p\Vdash\sigma\in\check{N}_0\cap\check{\mathbb{R}}\wedge\phi(\sigma)\in\Gamma.$$

Entonces existe $\tau\in\hat{\pi}$ tal que (p,τ) es $(N_0,N_1,\mathbb{R})$-genérico y $(p,\tau)\Vdash i(\sigma)\in\Gamma$.

Igualmente, la prueba de 11.18 se adapta trivialmente para probar:

Teorema 11.43 *Sea $\mathbb{P}$ un c.p.o. separativo μ-propio sobre isomorfismos y sea π un nombre para un c.p.o. tal que $\mathbb{1}\Vdash\pi$ es separativo y $\check{\mu}$-propio para isomorfismos. Entonces $\mathbb{P}*\pi$ es separativo y $\check{\mu}$-propio para isomorfismos.*

Pasamos ahora al resultado análogo a 11.20:

Teorema 11.44 *Sea $\mu\geq\aleph_2$ un cardinal regular y $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\gamma},\{\pi_\delta\}_{\delta<\gamma})$ una iteración de preórdenes con soportes numerables de longitud $\gamma<\mu$ de modo que, para cada $\delta<\gamma$, $\mathbb{P}_\delta$ sea separativo y μ-propio sobre isomorfismos*[8] *y $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta}\Vdash\pi_\delta$*

[8]Una vez probado el teorema 11.45 la hipótesis de que $\mathbb{P}_\delta$ sea separativo y μ-propio sobre isomorfismos puede eliminarse.

es separativo y $\breve{\mu}$-propio sobre isomorfismos, sea κ un cardinal suficientemente grande y N_0, $N_1 \prec H(\kappa)$ numerables en situación normal respecto de μ y tales que γ, $\mathbb{P}_\gamma \in N_0 \cap N_1$. Sea $\gamma_0 \in \gamma \cap N_0$ y $q_0 \in \mathbb{P}_{\gamma_0}$ una condición $(N_0, N_1, \mathbb{P}_{\gamma_0})$-genérica. Entonces, si $\sigma_0 \in V^{\mathbb{P}_{\gamma_0}}$ cumple que

$$q_0 \Vdash \sigma_0 \in \check{\mathbb{P}}_\gamma \cap \check{N}_0 \wedge \sigma_0|_{\check{\gamma}_0} \in \Gamma,$$

existe una condición $(N_0, N_1, \mathbb{P}_\gamma)$-genérica q tal que $q|_{\gamma_0} = q_0$ y $q \Vdash i_{\gamma_0\gamma}(\sigma_0) \in \Gamma$.

Demostración: Por brevedad vamos a indicar únicamente las variantes no triviales respecto de la demostración de 11.20. Como pauta general, basta sustituir N por N_0 y "$(N, \mathbb{P})$-genérica" por "$(N_0, N_1, \mathbb{P})$-genérica".

Razonamos igualmente por inducción sobre γ. El caso $\gamma = 0$ es trivial y el caso $\gamma = \delta + 1$ se adapta trivialmente (notemos que se cumple que $\delta \in N_0 \cap N_1$, y esto permite aplicar la hipótesis de inducción). En el caso $\delta = \gamma_0$ usamos el teorema 11.42.

En el caso en que γ es un ordinal límite empezamos observando que, por la definición de situación normal, se cumple

$$\gamma \cap N_0 = \gamma \cap N_1 = \gamma \cap N_0 \cap N_1,$$

pues $\gamma \in \mu \cap N_0 \cap N_1$ es menor que cualquier ordinal de $\mu \cap (N_0 \setminus N_1)$ o de $\mu \cap (N_1 \setminus N_0)$. Esta observación nos permite tomar la sucesión $\{\gamma_n\}_{n\in\omega}$ tal que $\gamma_n \in \gamma \cap N_0 \cap N_1$. Esto es necesario para poder aplicar la hipótesis de inducción a los γ_n.

Tomamos igualmente una enumeración $\{D_n\}_{n\in\omega}$ de los subconjuntos densos de $\mathbb{P}_\gamma$ pertenecientes a N_0 y construimos las sucesiones $\{q_n\}_{n\in\omega}$ y $\{\sigma_n\}_{n\in\omega}$ en las mismas condiciones (con N_0 en lugar de N).

El mismo argumento prueba que la condición q es $(N_0, \mathbb{P}_\gamma)$-genérica. Para probar que es $(N_0, N_1, \mathbb{P}_\gamma)$-genérica basta probar la condición b) de la definición (y eso ya implica que q es $(N_1, \mathbb{P}_\gamma)$-genérica). Para ello (trabajando en un modelo numerable M) tenemos que probar que

$$q \Vdash \bigwedge r \in \check{N}_0 \cap \check{\mathbb{P}}_\gamma (r \in \Gamma \leftrightarrow \check{h}(r) \in \Gamma).$$

Probamos la implicación $\rightarrow$, pues la otra es análoga. En caso contrario existe un filtro genérico tal que $q \in G$, pero existe $r \in N_0 \cap \mathbb{P}_\gamma \cap G$ tal que $h(r) \notin G$. Sea $q' \leq q$ tal que $q' \Vdash \check{r} \in \Gamma \wedge \check{h}(\check{r}) \notin \Gamma$ y cambiemos G por otro filtro que cumpla $q' \in G$.

Entonces $r \in N_0 \cap \mathbb{P}_\gamma \cap G$, luego $r|_{\gamma_n} \in N_0 \cap \mathbb{P}_{\gamma_n} \cap G_{\gamma_n}$ y, puesto que $q_n \in G_{\gamma_n}$ es $(N_0, N_1, \mathbb{P}_{\gamma_n})$-genérica, se cumple que $h(r)|_{\gamma_n} \in G_{\gamma_n}$. Si llamamos $r_n^* = i_{\gamma_n\gamma}(h(r)|_{\gamma_n})$, tenemos que $r_n^* \in G$, luego $q' \Vdash \check{r}_n^* \in \Gamma$, luego $q' \leq r_n^*$, y esto implica que $q' \leq i_{\bar{\gamma}\gamma}(h(r)|_{\bar{\gamma}})$. Ahora bien, como $h(r) \in N_1$, tenemos que $\operatorname{sop} h(r) \subset N_1 \cap \gamma \subset \bar{\gamma}$, luego $i_{\bar{\gamma}\gamma}(h(r)|_{\bar{\gamma}}) = h(r)$ y resulta que $q' \leq h(r)$, luego $h(r) \in G$, contradicción.

El resto de las comprobaciones y la construcción de las dos sucesiones requeridas resultan de adaptar trivialmente los argumentos de 11.20. ■

Ahora la primera parte de la prueba de 11.21 se adapta trivialmente para concluir:

Teorema 11.45 *Sea $\mu \geq \aleph_2$ un cardinal regular y $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\gamma}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\gamma})$ una iteración de preórdenes con soportes numerables de longitud $\gamma < \mu$ de modo que, para cada $\delta < \gamma$, se cumple que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi_\delta$ es separativo y $\check{\mu}$-propio sobre isomorfismos, entonces cada $\mathbb{P}_\delta$ es separativo y μ-propio sobre isomorfismos.*

Por último, para concluir que $\mathbb{P}_\gamma$ cumple la c.c. μ no es necesario exigir $\gamma < \mu$:

Teorema 11.46 *Sea $\mu \geq \aleph_2$ un cardinal regular tal que $\nu^{\aleph_0} < \mu$ para cada $\nu < \mu$ y $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\gamma}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\gamma})$ una iteración de preórdenes con soportes numerables tal que, para cada $\delta < \gamma$, se cumple que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi_\delta$ es separativo y $\check{\mu}$-propio sobre isomorfismos, entonces $\mathbb{P}_\gamma$ cumple la c.c. μ.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{p_\epsilon\}_{\epsilon<\mu}$ una familia de condiciones de $\mathbb{P}_\gamma$. El conjunto $E = \{\lambda < \mu \mid \operatorname{cf} \lambda > \aleph_0\}$ es estacionario en μ y la función $f : E \longrightarrow \mu$ dada por $f(\lambda) = \sup(\lambda \cap \operatorname{sop} p_\lambda)$ cumple $f(\lambda) < \lambda$.

Por el teorema de Fodor [TC 6.15] existe $E_0 \subset E$ estacionario en μ tal que $f|_{E_0}$ toma un valor constante $\gamma_0 < \mu$. Restringiendo la familia dada, podemos suponer que $\operatorname{sop} p_\epsilon \subset \gamma_0$, para todo $\epsilon < \mu$.

Si $\{\operatorname{sop} p_\epsilon \mid \epsilon < \mu\}$ tiene cardinal $< \mu$, entonces restringiendo aún más la familia podemos suponer que todos los soportes son iguales, y en caso contrario podemos aplicar el lema de los sistemas Δ (teorema 5.12) y exigir que la familia de soportes sea cuasidisjunta de raíz $r \subset \gamma_0$ (cosa que también sucede en el primer caso). Por el teorema anterior $\mathbb{P}_{\gamma_0}$ es separativo y μ-propio sobre isomorfismos, y por 11.38 cumple la c.c. μ, luego existen $\epsilon < \epsilon' < \mu$ tales que $\neg p_\epsilon|_{\gamma_0} \perp p_{\epsilon'}|_{\gamma_0}$ y por 7.23 f) esto implica que $\neg p_\epsilon \perp p_{\epsilon'}$. ■

11.6 Acotación de ${}^\omega\omega$.

Estudiamos ahora una propiedad más débil que la conservación de $\mathcal{P}\omega$.

Definición 11.47 Si $f, g \in {}^\omega\omega$, diremos que g *acota* a f, y lo representaremos por $f \leq g$, si $\bigwedge n \in \omega\ f(n) \leq g(n)$ (y análogamente $f < g$ significará que $\bigwedge n \in \omega\ f(n) < g(n)$). Similarmente, diremos que g *acota finalmente* a f, y lo representaremos por $f \leq^* g$, si $\bigvee k \in \omega \bigwedge n \geq k\ f(n) \leq g(n)$ (y análogamente se define $f <^* g$).

Una observación elemental es que si $F \subset {}^\omega\omega$ es numerable, entonces existe $g \in {}^\omega\omega$ que acota finalmente a todos los elementos de F. En efecto, basta enumerar $F = \{f_n \mid n \in \omega\}$ y definir $g(n) = \max\limits_{k\leq n} f_k(n)$.

Diremos que un c.p.o. $\mathbb{P}$ *acota* a ${}^\omega\omega$ si

$$\mathbb{1} \Vdash \bigwedge f \in {}^\omega\omega \bigvee g \in {}^\omega\omega \cap \check{V}\ f <^* g.$$

Equivalentemente, si $\mathbb{P}$ está en un modelo transitivo numerable M de ZFC y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, se cumple que $\mathbb{P}$ acota a ${}^\omega\omega$ si y sólo si toda $f \in ({}^\omega\omega)^{M[G]}$ está acotada por una $g \in ({}^\omega\omega)^M$. Notemos que en la definición es equivalente exigir $f <^* g$, $f \leq^* g$, $f < g$ o $f \leq g$.

Como en otros casos, el resultado principal que queremos obtener es que la propiedad de ser un c.p.o. propio que acota ${}^\omega\omega$ se conserva por iteraciones con soportes numerables. Necesitamos algunos conceptos auxiliares:

Si $\mathbb{P}$ es un c.p.o. y $\phi \in V^{\mathbb{P}}$ cumple que $\mathbb{1} \Vdash \phi \in {}^\omega\omega$, diremos que una sucesión decreciente $\{p_n\}_{n\in\omega}$ de condiciones *interpreta* ϕ como una función $f \in {}^\omega\omega$ si $\bigwedge n \in \omega\ p_n \Vdash \phi|_{\check{n}} = \check{f}|_{\check{n}}$.

Notemos que ϕ tiene a lo sumo una interpretación respecto de una sucesión $\{p_n\}_{n\in\omega}$, pues si f y g son dos interpretaciones distintas de ϕ, existirá un $n \in \omega$ tal que $f(n) \neq g(n)$, pero $p_{n+1} \Vdash \check{f}(\check{n}) = \check{g}(\check{n})$, lo cual es imposible. Por lo tanto podemos escribir $f = \mathrm{int}(\{p_n\}_{n\in\omega}, \phi)$.

Si una sucesión $\{p_n\}_{n\in\omega}$ interpreta un nombre ϕ, diremos que *respeta* una función $g \in {}^\omega\omega$ si $\mathrm{int}(\{p_n\}_{n\in\omega}, \phi) < g$.

Teorema 11.48 *Sea $\mathbb{P}$ un c.p.o. que acote ${}^\omega\omega$, sea $\phi \in V^{\mathbb{P}}$ tal que $\mathbb{1} \Vdash \phi \in {}^\omega\omega$, sea κ un cardinal regular, sea $N \prec H(\kappa)$ numerable tal que $\mathbb{P}$, $\phi \in N$ y supongamos que $g \in {}^\omega\omega$ acota finalmente a ${}^\omega\omega \cap N$ y que $\{p_n\}_{n\in\omega} \in N$ es una sucesión decreciente de condiciones que interpreta ϕ y respeta g. Entonces existen $p \in \mathbb{P} \cap N$ y $h \in N$, $h < g$ tales que $p \Vdash \phi \leq \check{h}$, con lo que $p \Vdash \phi < \check{g}$.*

DEMOSTRACIÓN: Trabajamos en N. Sea $f = \mathrm{int}(\{p_n\}_{n\in\omega}, \phi)$. Notemos que $f \in N$ y estamos suponiendo que $f < g$. Para cada $n \in \omega$, elegimos $p'_n \in \mathbb{P} \cap N$, $p'_n \leq p_n$ tal que

a) Existe $h_n \in {}^\omega\omega \cap N$ tal que $p'_n \Vdash \phi \leq \check{h}_n$,

b) $h_n|_n = f|_n$.

Notemos que a) es posible porque $\mathbb{P}$ acota a ${}^\omega\omega$ y b) es posible porque $p_n \Vdash \phi|_{\check{n}} = \check{f}|_{\check{n}}$. La elección puede realizarse en N, de modo que se cumple $\{p'_n\}_{n\in\omega}$, $\{h_n\}_{n\in\omega} \in N$. Ahora definimos $u \in {}^\omega\omega$ mediante $u(n) = \max\limits_{i\leq n} h_i(n)$.

Caramente $u \in N$, luego $u <^* g$, digamos que $\bigwedge n \geq l\ u(n) < g(n)$. De aquí podemos deducir que $h_l < g$. En efecto, si $i < l$, entonces $h_l(i) = f(i) < g(i)$, mientras que si $i \geq l$ entonces $h_l(i) \leq u(i) < g(i)$.

Finalmente observamos que $p = p'_l$ y $h = h_l$ cumplen lo requerido. ∎

A partir de aquí consideramos una iteración $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\gamma}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\gamma})$ en un modelo transitivo numerable M de ZFC, fijamos ordinales $\alpha \leq \beta < \gamma$ y llamamos G_α a un filtro $\mathbb{P}_\alpha$-genérico sobre M. En $M[G_\alpha]$ consideramos los c.p.o.s $\mathbb{P}_\beta/G_\alpha$ y $\mathbb{P}_\gamma/G_\alpha$, donde, según vimos al final de la sección 7.2,

$$\mathbb{P}_\gamma/G_\alpha = \{p \in \mathbb{P}_\gamma \mid p|_\alpha \in G_\alpha\}.$$

Consideremos $\phi \in M^{\mathbb{P}_\gamma}$ tal que $\mathbb{1} \Vdash \phi \in {}^\omega\omega$. A partir de él podemos formar el nombre $\bar{\phi}$ que se corresponde con ϕ a través de la inmersión densa $i : \mathbb{P}_\gamma \longrightarrow \mathbb{P}_\alpha * (\mathbb{P}_\gamma/\Gamma_\alpha)$ dada por 7.29, y a su vez el $\mathbb{P}_\alpha$-nombre $\phi^\gamma_{\Gamma_\alpha} = \bar{\phi}^*$ dado por 7.11. Llamaremos $\phi^\gamma_{G_\alpha} = (\phi^\gamma_{\Gamma_\alpha})_{G_\alpha} \in M^{\mathbb{P}_\gamma/G_\alpha}$. De este modo, si G_γ es cualquier filtro $\mathbb{P}_\gamma/G_\alpha$-genérico sobre $M[G_\alpha]$ (luego $\mathbb{P}_\gamma$-genérico sobre M), entonces $(\phi^\gamma_{G_\alpha})_{G_\gamma} = \phi_{G_\gamma}$. En particular, $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\gamma/G_\alpha} \Vdash \phi^\gamma_{G_\alpha} \in {}^\omega\omega$.

Sea G_β un filtro $\mathbb{P}_\beta/G_\alpha$-genérico sobre $M[G_\alpha]$ (con lo que $i^{-1}_{\alpha\beta}[G_\beta] = G_\alpha$) y sea $r = \{r_n\}_{n\in\omega} \in M[G_\alpha]$ una sucesión decreciente en $\mathbb{P}_\gamma/G_\alpha$ que interprete a $\phi^\gamma_{G_\alpha}$. Vamos a definir recurrentemente una sucesión decreciente $s(r) = \{s_n\}_{n\in\omega} \in M[G_\beta]$ de condiciones de $\mathbb{P}_\gamma/G_\beta$ que interprete a $\phi^\gamma_{G_\beta}$. Concretamente:

a) Si $r_n|_\beta \in G_\beta$ tomamos $s_n = r_n$,

b) Si $r_n|_\beta \notin G_\beta$ entonces definimos s_n como una extensión de s_{n-1} en $\mathbb{P}_\gamma/G_\beta$ que determine el valor de $\phi^\gamma_{G_\beta}|_{\check{n}}$.

La condición b) significa que existe un $t_n \in {}^n\omega$ tal que $s_n \Vdash \phi^\gamma_{G_\beta}|_{\check{n}} = \check{t}_n$. Notemos que si se da la condición a) para un n, se da también para todos los anteriores. En particular, si todos los $r_n|_\beta \in G_\beta$, entonces $\{s_n\}_{n\in\omega} = \{r_n\}_{n\in\omega}$.

Como la construcción se hace en $M[G_\beta]$, tenemos que $\{t_n\}_{n\in\omega} \in M[G_\beta]$ y como $s_{n+1} \leq s_n$, $s_{n+1} \Vdash \check{t}_{n+1}|_{\check{n}} = \check{t}_n$, luego $t_{n+1}|_n = t_n$, luego podemos definir $f = \bigcup\limits_{n\in\omega} t_n \in ({}^\omega\omega)^{M[G_\beta]}$ de modo que $\{s_n\}_{n\in\omega}$ interpreta $\phi^\gamma_{G_\beta}$ como f.

Las elecciones que requiere el apartado b) pueden hacerse respecto de un buen orden prefijado R de $\mathbb{P}_\gamma$ en M, con lo que podemos definir un nombre $\delta_\beta(r,\phi) \in M[G_\alpha]^{\mathbb{P}_\beta/G_\alpha}$ de modo que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta/G_\alpha}$ fuerce que $\delta_\beta(r,\phi)$ es la sucesión definida a partir de r, ϕ, Γ y $\check{R}$.

Teorema 11.49 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC *y en M sea $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\gamma}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\gamma})$ una iteración de preórdenes. Sean $\alpha \leq \beta < \gamma$ tales que $\mathbb{P}_\beta$ acote a ${}^\omega\omega$, sea G_α un filtro $\mathbb{P}_\alpha$-genérico sobre M y sea $\phi \in M^{\mathbb{P}_\gamma}$ tal que $\mathbb{1} \Vdash \phi \in {}^\omega\omega$. Supongamos que en $M[G_\alpha]$ se cumple:*

a) $p \in \mathbb{P}_\gamma/G_\alpha$ y $\{r_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión decreciente de condiciones bajo p de $\mathbb{P}_\gamma/G_\alpha$ que interpreta a $\phi^\gamma_{G_\alpha}$.

b) κ es un cardinal regular y $N \prec H(\kappa)$ es un modelo numerable que cumple $\mathbb{P}_\gamma/G_\alpha$, β, ϕ, $\{r_n\}_{n\in\omega}$, $p \in N$.

c) $g \in {}^\omega\omega$ acota finalmente a ${}^\omega\omega \cap N$ y $\{r_n\}_{n\in\omega}$ respeta a g.

Entonces existe $s \in N \cap (\mathbb{P}_\beta/G_\alpha)$, $s \leq p|_\beta$ tal que $s \Vdash \delta_\beta(r,\phi)$ respeta a $\check{g}$ y extiende a $\check{p}$.

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $\delta = \delta_\beta(r,\phi) \in M^{\mathbb{P}_\beta/G_\alpha}$. Tomemos un nombre $\psi \in M^{\mathbb{P}_\beta/G_\alpha}$ tal que[9] $\mathbb{1} \Vdash \psi = \operatorname{int}(\delta, (\phi^\gamma_{\Gamma_\beta})^\beta_{G_\alpha})$. En particular $\mathbb{1} \Vdash \psi \in {}^\omega\omega$.

Sea $p_n = r_n|_\beta \in \mathbb{P}_\beta/G_\alpha$. Vamos a ver que podemos aplicar el teorema anterior en $M[G_\alpha]$ a $\mathbb{P}_\beta/G_\alpha$ con la sucesión $\{p_n\}_{n\in\omega} \in N$, el nombre ψ y la función g.

Observemos en primer lugar que $\mathbb{P}_\beta/G_\alpha$ acota a ${}^\omega\omega$, pues si G_β es un filtro $\mathbb{P}_\beta/G_\alpha$-genérico sobre $M[G_\alpha]$, entonces también es $\mathbb{P}_\beta$-genérico sobre M, y $M[G_\alpha][G_\beta] = M[G_\beta]$, luego todo $f \in {}^\omega\omega \cap M[G_\alpha][G_\beta]$ está acotado por un $g \in {}^\omega\omega \cap M \subset {}^\omega\omega \cap M[G_\alpha]$.

Veamos ahora que $\{p_n\}_{n\in\omega}$ interpreta ψ. Concretamente, vamos a ver que lo interpreta como $f = \operatorname{int}(r, \phi^\gamma_{G_\alpha}) \in M[G_\alpha]$. Para ello fijamos un filtro $\mathbb{P}_\beta/G_\alpha$-genérico sobre $M[G_\alpha]$ tal que $p_n \in G_\beta$ y llamamos $h = \psi_{G_\beta}$.

En $M[G_\beta]$ tenemos que $r_n|_\beta = p_n \in G_\beta$, luego $r_n \in \mathbb{P}_\gamma/G_\beta$ y, por definición, $(\delta_{G_\beta})_n = r_n$. Por tanto en $M[G_\beta]$ se cumple que $r_n \Vdash \phi^\gamma_{G_\beta}|_{\check{n}} = \check{h}|_{\check{n}}$.

Por otra parte, si G_γ es un filtro $\mathbb{P}_\gamma/G_\beta$-genérico sobre $M[G_\beta]$ que cumpla $r_n \in G_\gamma$, sabemos que también es $\mathbb{P}_\gamma$-genérico sobre M y $\mathbb{P}_\gamma/G_\alpha$-genérico sobre $M[G_\alpha]$, así como que $M[G_\beta][G_\gamma] = M[G_\beta] = M[G_\alpha][G_\gamma]$. Por definición de f tenemos que $(\phi^\gamma_{G_\beta})_{G_\gamma}|_n = \phi_{G_\gamma}|_n = (\phi^\gamma_{G_\alpha})_{G_\gamma}|_n = f|_n$, luego concluimos que en $M[G_\beta]$ se cumple que $r_n \Vdash \phi^\gamma_{G_\beta}|_{\check{n}} = \check{f}|_{\check{n}}$. Esto implica que $h|_n = f|_n$.

Por consiguiente, en $M[G_\alpha]$ se cumple que $p_n \Vdash \psi|_{\check{n}} = \check{f}|_{\check{n}}$, como había que probar.

La hipótesis de que $\{r_n\}_{n\in\omega}$ respeta a g significa que $f < g$, luego $\{p_n\}_{n\in\omega}$, que interpreta a ψ como f, también respeta a g. Con esto tenemos comprobadas todas las hipótesis del teorema anterior, que nos da que existe una condición $s \in (\mathbb{P}_\beta/G_\alpha) \cap N$ tal que $s \Vdash \psi < \check{g}$, pero esto significa que $s \Vdash \delta_\beta(r,\phi)$ respeta a $\check{g}$.

Más aún, en la prueba del teorema anterior se ve[10] que $s \leq p_0 = r_0|_\beta \leq p|_\beta$, luego $s \Vdash \delta_0 = \check{r}_0 \leq \check{p}$, luego s fuerza que toda la sucesión $\delta_\beta(r,\phi)$ extiende a p.

■

Teorema 11.50 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC *y en M sea $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\gamma}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\gamma})$ una iteración con soportes numerables de preórdenes propios y separativos. Sean $\alpha < \beta < \gamma$ tales que $\mathbb{P}_\alpha$ y $\mathbb{P}_\beta$ acoten a ${}^\omega\omega$. Supongamos que en M se cumple:*

[9]Notemos que $\phi \in M^{\mathbb{P}_\gamma}$, luego $\phi^\gamma_{\Gamma_\beta} \in M^{\mathbb{P}_\beta}$, luego $(\phi^\gamma_{\Gamma_\beta})^\beta_{G_\alpha} \in M[G_\alpha]^{\mathbb{P}_\beta/G_\alpha}$ y tiene la propiedad de que si G_β es $\mathbb{P}_\beta/G_\alpha$-genérico sobre $M[G_\alpha]$, entonces

$$((\phi^\gamma_{\Gamma_\beta})^\beta_{G_\alpha})_{G_\beta} = (\phi^\gamma_{\Gamma_\beta})_{G_\beta} = \phi^\gamma_{G_\beta} \in M[G_\beta]^{\mathbb{P}_\gamma/G_\beta},$$

que es el nombre al que interpreta δ_{G_β}.

[10]Con la notación de la prueba es $p'_l \leq p_l \leq p_0$.

a) $\phi \in M^{\mathbb{P}_\gamma}$ *cumple* $\mathbb{1} \Vdash \phi \in {}^\omega\omega$.

b) κ *es un cardinal regular y* $N \prec H(\kappa)$ *cumple* α, β, γ, $\mathbb{P}_\gamma$, $\phi \in N$.

c) $q_0 \in \mathbb{P}_\alpha$ *es una condición* $(N, \mathbb{P}_\alpha)$*-genérica.*

d) $g \in {}^\omega\omega$ *acota finalmente a* ${}^\omega\omega \cap N$.

e) $\pi \in M^{\mathbb{P}_\alpha}$ *cumple que* $q_0 \Vdash \pi \in \check{N} \cap (\mathbb{P}_\gamma/\Gamma_\alpha)$.

f) q_0 *fuerza que en* $\check{N}[\Gamma]$ *existe una sucesión decreciente de condiciones de* $\mathbb{P}_\gamma/\Gamma_\alpha$ *bajo* π *que interpreta a* $\phi^\gamma_{\Gamma_\alpha}$ *y respeta a* $\check{g}$.

Entonces existe una condición $(N, \mathbb{P}_\beta)$*-genérica* q_1 *tal que:*

a) $q_1|_\alpha = q_0$.

b) $q_1 \Vdash i_{\alpha\beta}(\pi) \in \mathbb{P}_\gamma/\Gamma_\beta$.

c) q_1 *fuerza que en* $\check{N}[\Gamma]$ *existe una sucesión decreciente de condiciones de* $\mathbb{P}_\gamma/\Gamma_\beta$ *bajo* $i_{\alpha\beta}(\pi)$ *que interpreta a* $\phi^\gamma_{\Gamma_\beta}$ *y respeta a* $\check{g}$.

Demostración: Sea G_α un filtro $\mathbb{P}_\alpha$-genérico sobre M tal que $q_0 \in G_\alpha$. Por la hipótesis c) tenemos que G_α es un filtro $(N, \mathbb{P}_\alpha)$-genérico, luego podemos considerar $N[G_\alpha] \prec H(\kappa)^{M[G_\alpha]}$ (podemos suponer κ suficientemente grande para que siga siendo un cardinal regular en $M[G_\alpha]$). Vamos a comprobar que podemos aplicar el teorema anterior al modelo $N[G_\alpha]$. Ciertamente cumple las hipótesis a) y b) tomando como $r = \{r_n\}_{n\in\omega}$ la sucesión dada por la hipótesis f) del enunciado. Además llamamos $p = \pi_{G_\alpha} \in N \cap (\mathbb{P}_\gamma/G_\alpha)$, que está por encima de todos los r_n.

Como $\mathbb{P}_\alpha$ acota a ${}^\omega\omega$ (y esto se cumple también en N), todo elemento de ${}^\omega\omega \cap N[G_\alpha]$ está finalmente acotado por un elemento de ${}^\omega\omega \cap N$ y, en particular, por g. (Aquí hay que tener en cuenta que el colapso transitivo de $N[G_\alpha]$ es una extensión genérica del colapso transitivo de N.) Esto completa la comprobación de que se cumplen las hipótesis del teorema anterior.

Concluimos que existe una condición $s \in N[G_\alpha] \cap (\mathbb{P}_\beta/G_\alpha)$ tal que $s \leq p|_\beta$ y s fuerza que la sucesión $\delta_\beta(r, \phi)$ respeta a $\check{g}$ y extiende a $\check{p}$.

Observemos que en realidad $s \in N$, pues podemos tomar una biyección $f : |\mathbb{P}_\beta| \longrightarrow \mathbb{P}_\beta$ tal que $f \in N$, con lo que existe un $\delta \in N[G_\alpha]$ tal que $f(\delta) = s$ y, como N y $N[G_\alpha]$ tienen los mismos ordinales, de hecho $\delta \in N$ y $s = f(\delta) \in N$.

Pongamos que $s = \sigma_{0G_\alpha}$, donde q_0 fuerza que σ_0 tiene las propiedades anteriores, es decir, que $\sigma_0 \in \check{N} \cap \mathbb{P}_\beta/\Gamma_\alpha \wedge \sigma \leq \pi|_{\check{\beta}}$ y que existe una sucesión r en las condiciones de la hipótesis f) de modo que además[11]

$$\sigma_0 \Vdash \delta_{\check{\beta}}(r, \check{\phi}) \text{ respeta a } \check{\check{g}} \text{ y extiende a } \check{\pi}.$$

[11]En $\check{\check{g}}$ hay que entender que $\check{g} \in M^{\mathbb{P}_\alpha}$ y el siguiente $\check{}$ (al igual que el de $\check{\phi}$) representa al nombre canónico respecto de $\mathbb{P}_\beta/\Gamma_\alpha$.

Ahora aplicamos el teorema 11.20 (tomando como γ de 11.20 el ordinal que aquí llamamos β y $\gamma_0 = \alpha$). Obtenemos entonces una condición $(N, \mathbb{P}_\beta)$-genérica q_1 tal que $q_1|_\alpha = q_0$ y $q_1 \Vdash i_{\alpha\beta}(\sigma_0) \in \Gamma$. Vamos a probar que q_1 cumple lo requerido. Para ello fijamos un filtro $\mathbb{P}_\beta$-genérico sobre M tal que $q_1 \in G_\beta$ y llamamos $G_\alpha = i^{-1}_{\alpha\beta}[G_\beta]$, de modo que $q_0 \in G_\alpha$, luego $q_1 \in \mathbb{P}_\beta/G_\alpha$ y G_β es también $\mathbb{P}_\beta/G_\alpha$-genérico sobre $M[G_\alpha]$.

Llamamos $p = \pi_{G_\alpha} \in N \cap \mathbb{P}_\gamma/G_\alpha$ y $s = \sigma_{0G_\alpha} \in N \cap (\mathbb{P}_\beta/G_\alpha)$ (más aún, $s = i_{\alpha\beta}(\sigma_0)_{G_\beta} \in G_\beta$) de modo que se siguen cumpliendo todos los hechos que teníamos antes: $s \leq p|_\beta$ (luego $p|_\beta \in G_\beta$, luego $p \in \mathbb{P}_\gamma/G_\beta$, y con esto ya tenemos que $q_1 \Vdash i_{\alpha\beta}(\pi) \in \mathbb{P}_\gamma/\Gamma_\beta$, como había que probar), existe una sucesión $r = \{r_n\}_{n\in\omega}$ en $N[G_\alpha] \cap (\mathbb{P}_\gamma/G_\alpha)$ que extiende a p, interpreta a $\phi^\gamma_{G_\alpha}$ y respeta a g, y además la sucesión $\{s_n\}_{n\in\omega} \in \mathbb{P}_\gamma/G_\beta$ construida a partir de $\{r_n\}_{n\in\omega}$ y ϕ también extiende a p, interpreta a $\phi^\gamma_{G_\beta}$ (por construcción) y respeta a g. ■

Ahora ya podemos probar la conservación de la acotación de ${}^\omega\omega$:

Teorema 11.51 *Si $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\gamma}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\gamma})$ una iteración con soportes numerables de preórdenes propios y separativos que acotan ${}^\omega\omega$, entonces cada $\mathbb{P}_\delta$ acota ${}^\omega\omega$.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar la relativización del teorema a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Razonamos por inducción sobre δ. Para $\delta = 0$ es trivial. Si $\mathbb{P}_\delta$ acota ${}^\omega\omega$ es claro que lo mismo vale para $\mathbb{P}_{\delta+1} \cong \mathbb{P}_\delta * \pi_\delta$, pues si $G * H$ es un filtro $\mathbb{P}_\delta * \pi_\delta$-genérico sobre M tenemos que $M[G*H] = M[G][H]$ y sabemos que tanto $\mathbb{P}_\delta$ (por hipótesis de inducción) como $(\pi_\delta)_G$ (por hipótesis) acotan ${}^\omega\omega$, luego todo $f \in {}^\omega\omega \cap M[G*H]$ está acotado por una función en $M[G]$ que a su vez está acotada por una función en M.

Consideremos, pues, el caso de un ordinal límite. No perdemos generalidad si suponemos que es el propio γ. Fijamos $\phi \in M^{\mathbb{P}_\gamma}$ tal que $\mathbb{1} \Vdash \phi \in {}^\omega\omega$ y una condición $p_0 \in \mathbb{P}_\gamma$, y hemos de encontrar $g \in {}^\omega\omega \cap M$ y $p \leq p_0$ de modo que $p \Vdash \phi < \check{g}$. (Así, el conjunto de las condiciones p que cumplen esto para cierta g es denso y corta a todo filtro genérico.)

Fijemos un cardinal regular^M κ suficientemente grande y sea $N \prec H(\kappa)^M$ numerable tal que γ, $\mathbb{P}_\gamma$, ϕ, $p_0 \in N$. Sea $\{\gamma_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión cofinal creciente en $\gamma^* = N \cap \gamma$. Podemos suponer que $\gamma_0 = 0$. Sea $r = \{r_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión decreciente de condiciones de $\mathbb{P}_\gamma$ tal que $r_0 = p_0$ y que interprete a ϕ como una cierta $f^* \in {}^\omega\omega \cap M$. Podemos exigir que r, $f^* \in N$. Sea $g \in {}^\omega\omega \cap M$ una función que acote finalmente a ${}^\omega\omega \cap N$ y tal que $f^* < g$. Basta encontrar $q \leq p_0$ tal que $p \Vdash \phi < \check{g}$.

Para ello vamos a construir recurrentemente sucesiones $\{q_n\}_{n\in\omega}$ y $\{\pi_n\}_{n\in\omega}$ de modo que $q_n \in \mathbb{P}_{\gamma_n}$, $\pi_n \in M^{\mathbb{P}_{\gamma_n}}$ y se cumplan las propiedades siguientes:

a) $q_0 = \mathbb{1}$, q_n es $(N, \mathbb{P}_{\gamma_n})$-genérica y $q_{n+1}|_{\gamma_n} = q_n$.

b) $\pi_0 = \check{p}_0$ y $q_n \Vdash \pi_n \in \check{N} \cap (\check{\mathbb{P}}_\gamma/\Gamma_{\gamma_n}) \wedge \pi_n \leq i_{\gamma_{n-1}\gamma_n}(\pi_{n-1})$.

c) $q_n \Vdash \pi_n$ determina a $\phi^\gamma_{\Gamma_{\gamma_n}}|_{\check{n}}$ y $\pi_n \Vdash \phi^\gamma_{\Gamma_{\gamma_n}}|_{\check{n}} < \check{g}|_{\check{n}}$.

d) q_n fuerza que en $\check{N}[\Gamma]$ existe una sucesión decreciente de condiciones de $\mathbb{P}_\gamma/\Gamma_{\gamma_n}$ bajo π_n que interpreta $\phi^\gamma_{\Gamma_{\gamma_n}}$ y respeta $\check{g}$.

Admitiendo que existan estas sucesiones, basta tomar $q^* = \bigcup\limits_{n\in\omega} q_n \in \mathbb{P}_{\gamma^*}$ y $q = i_{\gamma^*\gamma}(q^*) \in \mathbb{P}_\gamma$. En efecto, si G es un filtro $\mathbb{P}_\gamma$-genérico sobre M tal que $q \in G$, entonces $q_n = q|_{\gamma_n} \in G_{\gamma_n}$ y podemos considerar $p_n = (\pi_n)_{G_{\gamma_n}} \in \mathbb{P}_\gamma$, que forman una sucesión decreciente (en la que p_0 es la condición de la que hemos partido). Además, $p_n|_{\gamma_n} \in G_{\gamma_n}$, luego, de hecho, $p_n|_{\gamma_m} \in G_{\gamma_m}$ para todo $m \geq n$, ya que $p_m|_{\gamma_m} \leq p_n|_{\gamma_m}$, luego $p_n|_{\gamma^*} \in G_{\gamma^*}$, por 7.26 y, como $\operatorname{sop} p_n \subset \gamma^*$, porque $p_n \in N$, de hecho $p_n \in G$. En particular esto prueba que $q \Vdash \check{p}_0 \in \Gamma$, luego $q \leq p_0$. La propiedad c) nos da que existe $s_n \in {}^n\omega$ tal que $p_n \Vdash \phi^\gamma_{G_{\gamma_n}}|_{\check{n}} = \check{s}_n$ y $s_n < g|_n$, lo que a su vez se traduce en que $\phi_G|_n = s_n < g|_n$, luego $\phi_G < g$.

Pasamos a construir las sucesiones requeridas. En primer lugar, teniendo en cuenta que $\gamma_0 = 0$, es claro que $q_0 = \mathbb{1}$ y $\pi_0 = \check{p}_0$ cumplen trivialmente todo lo necesario. La sucesión que cumple d) es la sucesión r que habíamos tomado.

Supongamos definidos q_n y π_n. Consideremos un filtro $\mathbb{P}_{\gamma_n}$-genérico sobre M tal que $q_n \in G_{\gamma_n}$. En particular G_{γ_n} es $(N, \mathbb{P}_{\gamma_n})$-genérico. Entonces, por la propiedad d), en $N[G_{\gamma_n}]$ existe una sucesión decreciente $r = \{r_n\}_{n\in\omega}$ de condiciones de $\mathbb{P}_\gamma/G_{\gamma_n}$ por debajo de $p_n = (\pi_n)_{G_{\gamma_n}}$ que interpreta a $\phi^\gamma_{G_{\gamma_n}}$ y respeta a g. Definimos $p_{n+1} = r_{n+1}$, que determina a $\phi^\gamma_{G_{\gamma_n}}|_{n+1}$, es decir, existe un $v \in {}^{n+1}\omega$ tal que $p_{n+1} \Vdash \phi^\gamma_{G_{\gamma_n}}|_{\check{n}+1} = \check{v}$ y $v < g|_{n+1}$. Sea $\pi^*_{n+1} \in M^{\mathbb{P}_{\gamma_n}}$ tal que $p_{n+1} = (\pi^*_{n+1})_{G_{n+1}}$. Podemos exigir que q_0 fuerce que π^*_{n+1} es el término $\check{n}+1$ de una sucesión r que cumpla la condición d). En particular, tenemos que $q_0 \Vdash \pi^*_{n+1} \in \check{N} \cap (\mathbb{P}_\gamma/\Gamma_{\gamma_n})$. Llamamos $\pi_{n+1} = i_{\gamma_n\gamma_{n+1}}(\pi^*_{n+1})$.

Finalmente aplicamos el teorema anterior a:

α	β	γ	q_0	π
γ_n	γ_{n+1}	γ	q_n	π^*_{n+1}

Observemos que la condición f) del teorema anterior se cumple con la sucesión que resulta de eliminar los primeros términos a la sucesión dada por la condición d). Concluimos que existe una condición $(N, \mathbb{P}_{\gamma_n+1})$-genérica q_{n+1} que cumple $q_{n+1}|_{\gamma_n} = q_n$ así como que $q_{n+1} \Vdash \pi_{n+1} \in \mathbb{P}_\gamma/\Gamma_{\gamma_{n+1}}$ y la propiedad d) para $n+1$. Tenemos, por lo tanto, que se cumple también a) y, en cuanto a b) y c), se comprueban inmediatamente tomando un filtro $\mathbb{P}_{\gamma_{n+1}}$-genérico usando que q_n y π^*_{n+1} cumplen las propiedades análogas. ■

Capítulo XII

Aplicaciones de las extensiones propias

En el capítulo anterior hemos explicado que la construcción que hemos visto en el capítulo VII de un modelo transitivo de ZFC + HS no puede modificarse ligeramente para obtener un modelo en el que además se cumpla la hipótesis del continuo, sino que, al ser necesaria una iteración de c.p.o.s con la c.c.n. de longitud al menos ω_2 (para garantizar que colapsamos todo árbol de Suslin que pueda ir surgiendo durante la iteración), es necesario que en el modelo resultante se viole la hipótesis del continuo, al menos si tomamos soportes finitos.

El hecho de que la hipótesis del continuo "se resista" a conservarse en un modelo de HS podría llevarnos a sospechar si no será que $2^{\aleph_0} = \aleph_1 \rightarrow \neg\text{HS}$. En [TC 9.14] hemos visto que $\Diamond \rightarrow \neg\text{HS}$, y en [TC 6.36] demostramos $\Diamond \rightarrow 2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Podría ocurrir que en realidad bastara $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ para probar $\neg$HS. Incluso, a la vista de [TC 6.37], que afirma que $\Diamond_{\kappa^+} \leftrightarrow 2^\kappa = \kappa^+$ siempre que $\kappa > \aleph_0$, podría sospecharse que lo mismo vale para $\kappa = \aleph_0$, es decir, que $\Diamond \leftrightarrow 2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Sin embargo, sucede que no es así. Jensen demostró que la hipótesis de Suslin es consistente con la hipótesis del continuo generalizada. Para ello realizó una construcción muy complicada cuyo "esqueleto" era una iteración con soportes numerables. El modelo obtenido por Jensen es, en particular, un modelo de $2^{\aleph_0} = \aleph_1 + \neg\Diamond + \text{HS}$. Por lo tanto, la hipótesis del continuo no implica por sí sola ni $\Diamond$ ni $\neg$HS. Aquí vamos a probar este hecho con una simplificación drástica del argumento de Jensen gracias a los resultados de Shelah sobre extensiones propias que hemos presentado en el capítulo anterior. Nos ocupamos de ello en la sección 12.3, pero antes exponemos otras pruebas técnicamente más sencillas.

El lector que quiera compaginar el estudio de estos ejemplos con el de la teoría del capítulo anterior deberá tener en cuenta que la sección 12.1 sólo requiere las secciones 11.1 e 11.3 hasta el teorema 11.21, mientras que la sección 12.2 sólo requiere además el teorema 11.26 (que no depende de los anteriores), así como la sección 11.6.

12.1 Existencia de $\aleph_2$-árboles de Aronszajn

En [TC 9.10] demostramos en ZFC que existen $\aleph_1$-árboles de Aronszajn, y en [TC 9.12] demostramos que si $2^{<\kappa} = \kappa$ entonces existe un κ^+-árbol de Aronszajn. En particular, esto demuestra la existencia de un $\aleph_2$-árbol de Aronszajn a partir de la hipótesis del continuo, $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Cabe preguntarse si, no obstante, no será posible demostrar igualmente en ZFC la existencia de $\aleph_2$-árboles de Aronszajn, sin necesidad de la hipótesis del continuo. A este respecto tenemos el teorema [CG 2.8], según el cual si no existen $\aleph_2$-árboles de Aronszajn entonces $\aleph_2$ es débilmente compacto^L. Esto sigue dejando abierta la posibilidad de que la existencia de $\aleph_2$-árboles de Aronszajn sea demostrable en ZFC, pero nos dice que si queremos probar que no es así, no bastará suponer que ZFC es consistente, sino que tendremos que suponer, como mínimo, la consistencia de ZFC más la existencia de un cardinal débilmente compacto. Esto es justo lo que vamos a demostrar en esta sección:

Teorema 12.1 *Si* ZFC *más la existencia de un cardinal débilmente compacto es consistente, también lo es* ZFC + $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ + *no existen $\aleph_2$-árboles de Aronszajn.*

Demostramos primero un resultado auxiliar:

Teorema 12.2 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC + $2^{\aleph_0} > \aleph_1$, *sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. $\aleph_1$-cerrado^M y sea $T \in M$ un $\aleph_2$-árbol de Aronszajn^M. Entonces*

$$\mathbb{1} \Vdash \check{T} \text{ no tiene caminos.}^1$$

DEMOSTRACIÓN: En caso contrario existen $p_0 \in \mathbb{P}$ y $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ tales que

$$p_0 \Vdash \sigma \text{ es un camino en } \check{T}.$$

Vamos a definir dos funciones $F : 2^{<\omega} \longrightarrow \bigcup\limits_{\delta<\alpha} \mathrm{Niv}_\delta(T)$, para cierto $\alpha < \omega_2$, y $S : 2^{<\omega} \longrightarrow \mathbb{P}$ tales que:

a) $F(\varnothing)$ es la raíz de T y $S(\varnothing) = p_0$.

b) $\bigwedge x \in 2^{<\omega}\ S(x) \Vdash F(x) \in \sigma$.

c) $\bigwedge xy \in 2^{<\omega}(x \subsetneq y \to (S(y) \leq S(x) \land F(x) < F(y)))$.

d) $\bigwedge xy \in 2^{<\omega}\ F(x^\frown 0) \perp F(x^\frown 1)$.

Definimos F y G por recursión sobre la longitud de x. La condición a) determina ambas funciones para $x = \varnothing$. Supongamos que $F(x)$ y $S(x)$ están definidos y veamos cómo definir ambas funciones sobre $x^\frown 0, x^\frown 1$.

Consideremos el conjunto

$$C = \{t \in T \mid F(x) \leq t \land \bigvee p \in \mathbb{P}(p \leq S(x) \land p \Vdash \check{t} \in \sigma)\} \in M.$$

[1]Notemos que T puede tener cardinal $\aleph_1$ en las extensiones genéricas de M, luego no podemos decir que $\mathbb{1}$ fuerza que T sigue siendo un $\aleph_2$-árbol de Aronszajn.

Como $S(x) \leq p_0$, es claro que C contiene elementos de altura $< \omega_2^M$ arbitrariamente grande. Si sus elementos fueran comparables dos a dos, determinaría una rama en T, luego C contiene dos elementos incompatibles. Elegimos cualquier par de ellos y los tomamos como $F(x^\frown 0)$ y $F(x^\frown 1)$. A su vez, tomamos como $S(x^\frown 0)$ y $S(x^\frown 1)$ las condiciones dadas por la definición de C.

Esto completa la definición de ambas funciones. Como la imagen de F es numerable^M, las alturas de sus elementos están acotadas por un $\alpha < \omega_2^M$, tal y como se exige.

Como $\mathbb{P}$ es $\aleph_1$-completo^M, para cada $x \in {}^\omega 2$, existe un $p_x \in \mathbb{P}$ de manera que $\bigwedge n \in \omega\ p_x \leq F(x|_n)$. En particular $p_x \leq p_0$, luego existe un $q_x \leq p_x$ y un $t_x \in \mathrm{Niv}_\alpha(T)$ de modo que $q_x \Vdash \check{t}_x \in \sigma$.

Si $x, y \in {}^\omega 2$ son distintos, consideramos el mínimo $n \in \omega$ tal que $x|_n \neq y|_n$. Entonces $F(x|_n) \perp F(y|_n)$.

Como $q_x \leq p_x \leq S(x|_n)$, tenemos que $q_x \Vdash F(x|_n) \in \sigma$, y es claro entonces que $F(x|_n) \leq t_x$ (porque la altura de $F(x|_n)$ es menor que α, que es la altura de t_x). Igualmente $F(y|_n) \leq t_y$, luego $t_x \neq t_y$. Así pues $\mathrm{Niv}_\alpha(T)$ contiene al menos $(2^{\aleph_0})^M > \aleph_1^M$, en contradicción con que T es un $\aleph_2$-árbol^M. ■

Para demostrar 12.1 partimos de un modelo transitivo numerable M de ZFC en el que exista un cardinal débilmente compacto κ, y vamos a definir recurrentemente una iteración de c.p.o.s $(\{\mathbb{P}_\alpha\}_{\alpha \leq \kappa}, \{\pi_\alpha\}_{\alpha < \kappa})$ con soportes numerables.

Supuesto definido $(\{\mathbb{P}_\alpha\}_{\alpha \leq \beta}, \{\pi_\alpha\}_{\alpha < \beta})$, distinguimos dos casos, según que $\beta = 2\gamma$ o $\beta = 2\gamma + 1$.

Si $\beta = 2\gamma$ definimos π_β de modo que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \pi_\beta = \mathrm{Fn}(\omega_1, \omega_2, \aleph_1)$. Como este c.p.o. es $\aleph_1$-cerrado, se cumple que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \pi_\beta$ es propio (11.10).

Si $\beta = 2\gamma + 1$, consideramos el siguiente razonamiento general en ZFC:

Existen muchos árboles de cardinal $\aleph_1$ y altura ω_1 sin caminos (por ejemplo, basta tomar árboles formados por una raíz seguida de ramas disjuntas de cada altura posible $< \omega_1$). Cada uno de ellos será isomorfo a uno cuyo conjunto de nodos sea ω_1 con un orden adecuado, que a su vez será isomorfo a otro cuyo conjunto soporte sea $\omega_1 \times \{i\}$ donde i varía en un conjunto I (a lo sumo de cardinal $2^{\aleph_1}$). Podemos considerar $\omega_1 \times I$ como un árbol de altura ω_1 sin caminos con a lo sumo $2^{\aleph_1}$ raíces.

Si llamamos A a este árbol, podemos considerar el conjunto $\mathbb{Q}_0$ de todas las aplicaciones $p : a \subset A \longrightarrow \omega$ con a finito tales que $\bigwedge st \in a\ (s < t \rightarrow p(s) \neq p(t))$, que es un c.p.o. con el orden dado por la inversa de la inclusión.

Este c.p.o. aparece en la demostración del teorema [TC 9.28], allí construido sobre un árbol de Aronszajn, pero sucede que en la prueba de que el c.p.o. cumple la c.c.n. se usa que A tiene altura ω_1 y no tiene caminos, pero no que sea un $\aleph_1$-árbol, es decir, no se usa en ningún momento que sus niveles sean numerables. Por lo tanto, dicho argumento prueba que $\mathbb{Q}_0$ cumple la c.c.n.

Observemos que $\mathbb{Q}_0$ es un c.p.o. concreto, definible en ZFC sin parámetros, por lo que podemos definir π_β de modo que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \pi_\beta = \mathbb{Q}_0.$$

En particular, por la c.c.n., también se cumple que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \pi_\beta$ es propio (de nuevo por 11.10).

Con esto tenemos definida la iteración y, por 11.21, se cumple que todos los $\mathbb{P}_\alpha$ (en particular $\mathbb{P}_\kappa$) son c.p.o.s propios (todos los c.p.o.s considerados son trivialmente separativos). Fijamos un filtro $\mathbb{P}_\kappa$-genérico sobre M y formamos la extensión genérica $M[G]$.

El teorema 11.11 nos da que $\aleph_1^M$ sigue siendo $\aleph_1$ en $M[G]$ y en todas las extensiones intermedias $M[G_\alpha]$.

Sea ahora $\mu \leq \kappa$ un cardinal inaccesible^M. Observemos que si $\beta < \mu$ entonces $(\{\mathbb{P}_\alpha\}_{\alpha\leq\beta}, \{\pi_\alpha\}_{\alpha<\beta}) \in V_\mu^M$. En efecto, si esto se cumple para β, en particular $|\mathbb{P}_\beta|^M < \mu$, y $\mathbb{P}_\beta$ conserva cardinales y cofinalidades $\geq (|\mathbb{P}_\beta|^+)^M$, luego si G_β es un filtro $\mathbb{P}_\beta$-genérico sobre M, tenemos que μ sigue siendo inaccesible en $M[G_\beta]$. Según 11.1 tenemos que $V_\mu^{M[G]} = V_\mu^M[G]$, y claramente $(\pi_\beta)_G \in V_\mu^{M[G]}$ (tanto si β es par o impar). Esto hace que si en la elección de los nombres π_β exigimos tomarlos siempre de rango mínimo, se cumple que $\pi_\beta \in V_\mu^M$. Es claro entonces que también $\hat{\pi}_\beta \in V_\mu^M$, luego $\mathbb{P}_{\beta+1} \in V_\mu^M$. El caso límite es trivial, es decir, si se cumple la hipótesis para todo $\beta < \lambda < \mu$, entonces se cumple para λ.

En particular, si $\beta < \mu$ entonces $|\mathbb{P}_\beta|^M < \mu$. De aquí se sigue que $\mathbb{P}_\mu$ cumple la c.c. μ.

En efecto, razonando en M, si $A \subset \mathbb{P}_\mu$ tiene cardinal μ, podemos aplicar el lema de los sistemas Δ (teorema 5.12) a la familia de los soportes de las condiciones de A de modo que, cambiando A por un subconjunto, podemos suponer que dichos soportes son cuasidisjuntos de raíz $r \subset \mu$ numerable. Fijamos $\beta < \mu$ tal que $r \subset \beta$. Entonces $\{p|_\beta \mid p \in A\} \subset \mathbb{P}_\beta$ tiene cardinal $< \mu$, luego existen $p, p' \in A$ tales que $p|_\beta = p'|_\beta$, luego, por 7.23 f), tenemos que $\neg p \perp p'$.

En particular μ es un cardinal regular en $M[G_\mu]$ y, como $\aleph_1^M$ también se conserva, concluimos que $(\mu \geq \aleph_2)^{M[G_\mu]}$.

Por otra parte, $|\mathbb{P}_\mu|^M = \mu$, luego el número de buenos nombres en M para subconjuntos de $\check{\omega}$ es a lo sumo $(\mu^{<\mu})^{\aleph_0} = \mu$, luego $(2^{\aleph_0} \leq \mu)^{M[G_\mu]}$. Veamos que, de hecho, $(2^{\aleph_0} = \mu)^{M[G_\mu]}$.

Para ello basta probar que si $\gamma < \mu$ entonces $M[G_{2\gamma+2}] \setminus M[G_{2\gamma+1}]$ contiene un elemento de $\mathcal{P}\omega$. (En M podemos definir la sucesión $\{C_\beta\}_{\beta<\mu}$, donde C_β es el conjunto de buenos $\mathbb{P}_\beta$-nombres para subconjuntos de $\check{\omega}$, y entonces en $M[G]$ podemos asociar a cada $\gamma < \mu$ un subconjunto de ω que tiene un nombre en $C_{2\gamma+2}$, pero no en $C_{2\gamma+1}$, y la aplicación es inyectiva.)

Llamemos $N = M[G_{2\gamma+1}]$ y $\mathbb{Q} = (\pi_{2\gamma+1})_{G_{2\gamma+1}}$, que es el c.p.o. que especializa el árbol $A \in N$ que hemos indicado en la definición de la iteración. Así

$M[G_{2\gamma+2}] = N[H]$, donde H es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre N. Éste determina una función $F : A \longrightarrow \omega$ tal que $\bigwedge st \in A(s < t \to F(s) \neq F(t))$ o, lo que es lo mismo, si $F(s) = F(t)$, entonces $s \perp t$.

Sea $\mathbb{R} = \mathrm{Fn}(\omega, 2, \omega)$ y fijemos una sucesión $\{s_n\}_{n\in\omega} \in N$ creciente en el árbol A. Sea $K \in N[H]$ el conjunto de las condiciones $p \in \mathbb{R}$ tales que, para todo $i \in \mathcal{D}p$, se cumple

$$p(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } F(s_n) \text{ es par,} \\ 1 & \text{si } F(s_n) \text{ es impar.} \end{cases}$$

Basta probar que K es un filtro $\mathbb{R}$-genérico sobre N, pues entonces tenemos las inclusiones $N \subset N[K] \subset N[H]$ y $N[K]$ contiene un subconjunto de ω que no está en N.

Para ello fijamos $D \in N$ denso en $\mathbb{R}$ y probamos que $D \cap K \neq \varnothing$. Para cada $p \in \mathbb{Q}$ sea $p^* \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{D}p^* = \{i \in \omega \mid s_i \in \mathcal{D}p\}$ y

$$p^*(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } p(s_n) \text{ es par,} \\ 1 & \text{si } p(s_n) \text{ es impar.} \end{cases}$$

Sea $\overline{D} = \{p \in \mathbb{Q} \mid p^* \in D\} \in N$. Basta probar que $\overline{D}$ es denso en $\mathbb{Q}$, pues entonces existe $p \in \overline{D} \cap H$, y esto implica que $p^* \in D \cap K$.

Fijamos $q \in \mathbb{Q}$, de modo que $q^* \in \mathbb{R}$, luego existe un $r \in D$ tal que $r \leq q^*$. Sea n una cota superior estricta de la imagen de q. Sea

$$p = q \cup \{(s_i, 2n + 2i + r(i)) \mid i \in \mathcal{D}r \land s_i \notin \mathcal{D}q\}.$$

Claramente $p \in \mathbb{Q}$, $p \leq q$ y $p^* = r \in D$, luego $p \in \overline{D}$.

Seguidamente demostramos que $(\mu = \aleph_2)^{M[G_\mu]}$. Ya tenemos probada una desigualdad. Supongamos que $\aleph_2^{M[G_\mu]} = \nu < \mu$. Sea $F : \nu \times \omega_1 \longrightarrow \nu$ (donde llamamos $\omega_1 = \omega_1^M = \omega_1^{M[G_\mu]}$) tal que $F \in M[G_\mu]$ y si $0 < \alpha < \nu$, se cumple que $\{F(\alpha, \beta) \mid \beta < \omega_1\} = \alpha$. Sea $F = \sigma_{G_\mu}$ y sea $p_0 \in G_\mu$ una condición que fuerce que σ cumple la propiedad que define a F.

Para cada $\alpha < \nu$ y $\beta < \omega_1$, sea $C_{\alpha,\beta} \in M$ una anticadena maximal en el conjunto de condiciones $p \in \mathbb{P}_\mu$ tales que $\bigvee \delta < \nu \; p \Vdash \sigma(\check{\alpha}, \check{\beta}) = \check{\delta}$. Hemos visto que $\mathbb{P}_\mu$ cumple la c.c. μ, luego $|C_{\alpha,\beta}| < \mu$. Sea $C = \bigcup\{C_{\alpha,\beta} \mid \alpha < \nu, \beta < \omega_1\}$. Como μ es regular, también $|C| < \mu$. Como las condiciones de $\mathbb{P}_\mu$ tienen soporte numerable, existe un $\gamma < \mu$ tal que $C \cup \{p_0\} \subset \mathbb{P}_{2\gamma}$. Entonces $F \in M[G_{2\gamma}]$, pues

$$F(\alpha, \beta) = \delta \leftrightarrow \bigvee q \in C_{\alpha,\beta} \cap G_{2\gamma} \; q \Vdash \sigma(\check{\alpha}, \check{\beta}) = \check{\delta}.$$

Por lo tanto $(\nu \leq \aleph_2)^{M[G_{2\gamma}]}$ y, como $(\nu = \aleph_2)^{M[G]}$, de hecho $(\nu = \aleph_2)^{M[G_{2\gamma}]}$. Ahora bien, $M[G_{2\gamma+1}] = M[G_{2\gamma}][H]$, donde H es un filtro genérico en el c.p.o. $\mathrm{Fn}(\omega_1, \omega_2, \aleph_1)^{M[G_{2\gamma}]}$, es decir, en $\mathrm{Fn}(\omega_1, \nu, \omega_1)^{M[G_{2\gamma}]}$, luego $(\nu < \aleph_2)^{M[G_{2\gamma+1}]}$, luego $(\nu < \aleph_2)^{M[G]}$, contradicción.

Por lo tanto $(2^{\aleph_0} = \aleph_2)^{M[G_\mu]}$ (y en particular esto vale para $\mu = \kappa$).

Supongamos ahora que en $M[G]$ hay $\aleph_2$-árboles de Aronszajn. Entonces podemos tomar uno de la forma (κ, R), donde $R \subset \kappa \times \kappa$ es una relación de orden estricto. Llamamos $F : \kappa \longrightarrow \kappa$ a la función que asigna a cada ordinal su altura en el árbol determinado por R. Entonces:

$$\bigwedge \alpha\beta\gamma \in \kappa(\alpha\, R\, \beta \wedge \beta\, R\, \gamma \rightarrow \alpha\, R\, \gamma) \wedge \bigwedge \alpha\beta \in \kappa(\alpha\, R\, \beta \rightarrow F(\alpha) < F(\beta))$$

$$\wedge \bigwedge \alpha\gamma \in \kappa(\gamma < F(\beta) \rightarrow \bigvee \alpha \in \kappa(\alpha\, R\, \beta \wedge F(\alpha) = \gamma))$$

$$\wedge \bigwedge \gamma \in \kappa \bigvee \delta \in \kappa \bigwedge \alpha \in \kappa(F(\alpha) = \gamma \rightarrow \alpha \leq \delta) \wedge$$

$$\bigwedge B \in M[G](B \subset \kappa \rightarrow (\bigvee \alpha\beta \in B(\alpha \neq \beta \wedge \neg \alpha\, R\, \beta \wedge \neg \beta\, R\, \alpha) \vee \bigvee \delta \in \kappa\ B \subset \delta)).$$

Notemos que las dos primeras líneas expresan que R define un árbol sobre κ, la tercera que sus niveles tienen cardinal $< \kappa$ y la cuarta que no tiene cadenas de cardinal κ (en $M[G]$). En suma, estas propiedades expresan que (κ, R) es un κ-árbol de Aronszajn en $M[G]$. Tomemos $R = \sigma_G$, $F = \tau_G$ y $p_0 \in \mathbb{P}_\kappa$ tales que

$$p_0 \Vdash \sigma \subset \check{\kappa} \times \check{\kappa} \wedge \tau : \check{\kappa} \longrightarrow \check{\kappa} \wedge \bigwedge \alpha\beta\gamma \in \check{\kappa}(\alpha\, \sigma\, \beta \wedge \beta\, \sigma\, \gamma \rightarrow \alpha\, \sigma\, \gamma)$$

$$\wedge \bigwedge \alpha\beta \in \check{\kappa}(\alpha\, \sigma\, \beta \rightarrow \tau(\alpha) < \tau(\beta)) \wedge \tag{12.1}$$

$$\bigwedge \alpha\gamma \in \check{\kappa}(\gamma < \tau(\beta) \rightarrow \bigvee \alpha \in \check{\kappa}(\alpha\, \sigma\, \beta \wedge \tau(\alpha) = \gamma)) \wedge$$

$$\bigwedge \gamma \in \check{\kappa} \bigvee \delta \in \check{\kappa} \bigwedge \alpha \in \check{\kappa}(\tau(\alpha) = \gamma \rightarrow \alpha \leq \delta).$$

Suponemos también que

$$p_0 \Vdash \bigwedge B(B \subset \check{\kappa} \rightarrow (\bigvee \alpha\beta \in B(\alpha \neq \beta \wedge \neg \alpha\, \sigma\, \beta \wedge \neg \beta\, \sigma\, \alpha) \vee \bigvee \delta \in \check{\kappa}\ B \subset \delta)),$$

pero vamos a expresar esta condición de otro modo:

Para todo buen nombre $\rho \in M^{\mathbb{P}_\kappa}$ para un subconjunto de $\check{\kappa}$ se cumple que

$$p_0 \Vdash (\bigvee \alpha\beta \in \rho(\alpha \neq \beta \wedge \neg \alpha\, \sigma\, \beta \wedge \neg \beta\, \sigma\, \alpha) \vee \bigvee \delta \in \check{\kappa}\ \rho \subset \delta). \tag{12.2}$$

Además podemos suponer que σ y τ son buenos nombres para subconjuntos de $\check{\kappa} \times \check{\kappa}$, es decir, que

$$\sigma = \bigcup_{\alpha,\beta \in \kappa} \{\text{p.o.}(\check{\alpha}, \check{\beta})\} \times C^\sigma_{\alpha\beta}, \quad \tau = \bigcup_{\alpha,\beta \in \kappa} \{\text{p.o.}(\check{\alpha}, \check{\beta})\} \times C^\tau_{\alpha\beta},$$

donde $C^\sigma_{\alpha\beta}$, $C^\tau_{\alpha\beta}$ son anticadenas en $\mathbb{P}_\kappa \subset V_\kappa$. En particular $\sigma, \tau \subset V_\kappa \times V_\kappa$, luego podemos considerar a $\mathcal{M}_\kappa = (V_\kappa, \in, \sigma, \tau, \{p_0\})$ como modelo del lenguaje formal $\mathcal{L}^*$ que resulta de añadir al lenguaje de ZFC dos relatores diádicos y un relator monádico.

Más en general, como $|C^\sigma_{\alpha\beta}| < \kappa$ y $|C^\tau_{\alpha\beta}| < \kappa$ (porque $\mathbb{P}_\kappa$ cumple la c.c. κ), tenemos que $C^\sigma_{\alpha\beta}, C^\tau_{\alpha\beta} \subset \mathbb{P}_\lambda$, para cierto $\lambda < \kappa$, luego el conjunto

$$C = \{\lambda < \kappa \mid \bigwedge \alpha\beta < \lambda\ (C^\sigma_{\alpha\beta} \subset \mathbb{P}_\lambda \wedge C^\tau_{\alpha\beta} \subset \mathbb{P}_\lambda)\}$$

es c.n.a. en κ, y si $\mu \in C \cup \{\kappa\}$ es un cardinal inaccesible tal que $p_0 \in \mathbb{P}_\mu$, entonces $\sigma \cap V_\mu$, $\tau \cap V_\mu$ son buenos $\mathbb{P}_\mu$-nombres para subconjuntos de $\check{\mu} \times \check{\mu}$, y podemos considerar el modelo $\mathcal{M}_\mu = (V_\mu, \in, \sigma \cap V_\mu, \tau \cap V_\mu, \{p_0\})$.

Ahora observamos que (12.1) cambiando κ por μ (y σ, τ por $\sigma \cap V_\mu$, $\tau \cap V_\mu$) es equivalente a una fórmula de tipo $\mathcal{M}_\mu \vDash \phi$, donde ϕ es una sentencia de $\mathcal{L}^*$.

En efecto, en primer lugar observamos que $\mathbb{P}_\mu$ (o, mejor dicho, la pertenencia a $\mathbb{P}_\mu$) es definible en V_μ, al igual que la pertenencia a $\check{\mu}$. Un poco más delicado es observar que $p \Vdash_{\mathbb{P}_\kappa} \phi$ es expresable en $\mathcal{M}_\mu$, no para toda fórmula ϕ, pero sí para la fórmula que aparece en (12.1), en la que todas las variables ligadas están acotadas por σ, τ o $\check{\kappa}$.

Más precisamente, vamos a razonar que si $\phi(k, s, t, x_1, \ldots, x_n)$ es una fórmula de tipo Δ_0 del lenguaje de ZFC (en la que las variables k, s, t sólo aparecen en subfórmulas de tipo $x \in k$, $(x, y) \in s$, $(x, y) \in t$), $\rho_1, \ldots, \rho_n \in V_\mu$ y $p \in \mathbb{P}_\mu$, entonces existe una fórmula $\bar{\phi}(p, x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{L}^*$ tal que

$$p \Vdash \phi(\check{\kappa}, \sigma, \tau, \rho_1, \ldots, \rho_n) \leftrightarrow \mathcal{M}_\mu \Vdash \bar{\phi}[p, \rho_1, \ldots, \rho_n].$$

En efecto, sabemos que la fórmula $p \Vdash \rho_1 = \rho_2$ es absoluta para modelos transitivos de ZFC, luego

$$p \Vdash \rho_1 = \rho_2 \leftrightarrow V_\mu \vDash [p] \vDash [\rho_1] = [\rho_2].$$

Lo mismo vale para $p \Vdash \rho_1 \in \rho_2$, pero si consideramos concretamente la caracterización dada por A.2, vemos que también las fórmulas $p \Vdash \rho_1 \in \sigma$, $p \Vdash \rho_1 \in \tau$, $p \Vdash \rho_1 \in \check{\kappa}$ pueden expresarse en la forma $\mathcal{M}_\mu \vDash \phi[p, \rho_1]$.

Esto prueba la afirmación cuando ϕ es una fórmula atómica. Las caracterizaciones 4.47 d), f) prueban que si la afirmación es cierta para ϕ, ψ, también lo es para $\neg\phi$ y $\phi \wedge \psi$, de donde también lo es para $\phi \rightarrow \psi$.

Por último consideramos 4.47 i), que nos da la equivalencia:

$$p \Vdash \bigvee x \in \rho\, \phi(x, \check{\kappa}, \sigma, \tau, \rho_1, \ldots, \rho_n) \leftrightarrow \bigvee q \in \mathbb{P}_\mu \bigvee \pi \in \mathcal{D}\rho (q \leq p \wedge q \Vdash \phi(\pi, \ldots)).$$

Es claro que esto implica que si ϕ cumple la afirmación, también la cumple $\bigvee x \in \rho\, \phi$, tanto si $\rho = \rho_i$ como si $\rho = \check{\kappa}, \sigma, \tau$.

Por consiguiente, concluimos que (12.1) (con μ en lugar de κ) es equivalente a una fórmula de tipo $\mathcal{M}_\mu \vDash \phi$, para cierta sentencia ϕ de $\mathcal{L}^*$. (No necesitamos dejar p_0 como variable libre gracias al relator de $\mathcal{L}^*$ que se interpreta precisamente como "ser p_0".)

A su vez, (12.2) (siempre con μ en lugar de κ y entendiendo que ρ es un buen $\mathbb{P}_\mu$-nombre para un subconjunto de μ) es equivalente a una fórmula de tipo $\mathcal{M}_\mu \vDash \phi[\rho]$, donde $\phi(X)$ es una fórmula cuya variable libre X es de segundo orden, es decir, que tiene que interpretarse en $\mathcal{M}_\mu$ como un subconjunto de V_μ.

Observemos que la fórmula "ρ es un buen $\mathbb{P}_\mu$-nombre para un subconjunto de $\check{\mu}$" también es expresable en la forma $\mathcal{M}_\mu \Vdash \phi[\rho]$, donde $\phi(X)$ es una fórmula con su variable libre X de segundo orden. Por lo tanto, (12.2) con el cuantificador $\bigwedge\rho$ incluido equivale a una fórmula de tipo

$$\mathcal{M}_\mu \Vdash \bigwedge X\, \phi(X),$$

para cierta fórmula $\phi(X)$ con una variable de segundo orden, y lo mismo vale entonces para la conjunción de (12.1) y (12.2).

En definitiva, existe una sentencia ψ de tipo Π_1^1 tal que la conjunción de (12.1) y (12.2) para μ equivale a

$$(V_\mu, \in, \sigma \cap V_\mu, \tau \cap V_\mu, \{p_0\}) \vDash \psi.$$

Por la hipótesis de reducción al absurdo de la que hemos partido, tenemos que $(V_\kappa, \in, \sigma, \tau, \{p_0\}) \vDash \psi$, y ahora usamos que κ, al ser débilmente compacto, es Π_1^1-indescriptible, por [CG 2.13]. El teorema [CG 2.12] nos da que existe un conjunto estacionario $E \subset \kappa$ formado por cardinales inaccesibles tales que si $\mu \in E$ (y $p_0 \in \mathbb{P}_\mu$) entonces $(V_\mu, \in, \sigma \cap V_\mu, \tau \cap V_\mu, \{p_0\}) \vDash \psi$. Más concretamente, podemos tomar $\mu \in C \cap E$, de modo que podemos afirmar que (12.1) y (12.2) se cumplen en V_μ con $\sigma_0 = \sigma \cap V_\mu$ y $\tau_0 = \tau \cap V_\mu$.

Más aún, el conjunto de los $\mu < \kappa$ tales que $\mathcal{M}_\mu \prec \mathcal{M}_\kappa$ (como modelos de $\mathcal{L}^*$ considerado como lenguaje de primer orden) es también c.n.a. en κ, luego también podemos suponer que $\mathcal{M}_\mu \prec \mathcal{M}_\kappa$.

Por consiguiente, si $R_0 = \sigma_{0G_\mu} = R \cap (\mu \times \mu)$, tenemos que (μ, R_0) es un μ-árbol de Aronszajn en $M[G_\mu]$ y que la función $F_0 = \tau_{G_\mu} = F \cap (\mu \times \mu)$ asigna a cada ordinal su altura en el árbol.

Veamos que $\mu = \bigcup\limits_{\gamma<\mu} \mathrm{Niv}_\gamma(\kappa, R)$.

Ciertamente, todo $\alpha < \mu$ tiene altura $F(\alpha) = F_0(\alpha) < \mu$ en (κ, R). Recíprocamente, si $\gamma < \mu$, existe un $\delta \in \mu$ tal que $\bigwedge\alpha \in \mu(F_0(\alpha) = \gamma \to \alpha \leq \delta)$, luego existe $p \in G_\mu$ tal que

$$p \Vdash \bigwedge\alpha \in \check{\mu}(\tau_0(\alpha) = \check{\gamma} \to \alpha \leq \check{\delta}).$$

Hemos visto que esto puede expresarse en la forma $\mathcal{M}_\mu \vDash \phi[p, \gamma, \delta]$ y, como $\mathcal{M}_\mu \prec \mathcal{M}_\kappa$, también tenemos que

$$p \Vdash \bigwedge\alpha \in \check{\kappa}(\tau(\alpha) = \check{\gamma} \to \alpha \leq \check{\delta}).$$

y como $p \in G_\mu \subset G$, concluimos que $\bigwedge\alpha < \kappa(F(\alpha) = \gamma \to \alpha \leq \delta)$, es decir, todos los $\alpha < \kappa$ de altura γ cumplen $\alpha \leq \delta < \mu$.

En resumen, hemos supuesto que $A \in M[G]$ es un κ-árbol de Aronszajn en $M[G]$ (con $A \subset \kappa$) y hemos encontrado un cardinal inaccesible^M $\mu < \kappa$ tal que $A_0 = \bigcup\limits_{\gamma<\mu} \mathrm{Niv}_\gamma(A)$ es un μ-árbol de Aronszajn en $M[G_\mu]$.

A partir de aquí ya es fácil llegar a una contradicción. En primer lugar $M[G_{\mu+1}] = M[G_\mu][H]$, donde H es un filtro $\mathrm{Fn}(\omega_1, \mu, \omega_1)$-genérico sobre $M[G_\mu]$, por lo que $(|\mu| = \aleph_1)^{M[G_{\mu+1}]}$. De hecho, $(\mathrm{cf}\, \mu = \omega_1)^{M[G_{\mu+1}]}$, ya que si $f : \omega \longrightarrow \mu$

fuera cofinal, con $f \in M[G_{\mu+1}]$, como $\mathrm{Fn}(\omega_1, \mu, \omega_1)$ es ω_1-cerrado tendríamos que $f \in M[G_\mu]$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, existe $a \in M[G_{\mu+1}]$ tal que $a \subset \mu$ no acotado con ordinal ω_1^M.

Por el teorema 12.2 sabemos que A_0 no tiene caminos en $M[G_{\mu+1}]$. Sea A' el conjunto de los elementos de $A_0 = \mu$ cuya altura está en a. Así A' es un árbol en $M[G_{\mu+1}]$ de altura $\aleph_1$ que no tiene caminos, pues un camino en A' determina obviamente un camino en A_0.

Sea ahora $\mathbb{Q} = (\pi_{\mu+1})_{G_{\mu+1}}$, de modo que $M[G_{\mu+2}] = M[G_{\mu+1}][H']$, donde H' es un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[G_{\mu+1}]$.

El c.p.o. $\mathbb{Q}$ está construido a partir de un árbol A_1 que contiene un subárbol isomorfo a A' (porque contiene subárboles isomorfos a todos los árboles de cardinal $\aleph_1$ y altura ω_1 en $M[G_{\mu+1}]$) y en $M[G_{\mu+2}]$ existe $h : A_1 \longrightarrow \omega$ tal que $\bigwedge st \in A_1(s < t \to h(s) \neq h(t))$. Si restringimos esta función al subárbol isomorfo a A' y la transportamos a través del isomorfismo obtenemos otra función $h : A' \longrightarrow \omega$ que cumple lo mismo.

Para terminar razonamos en $M[G]$. Aquí tenemos un κ-árbol de Aronszajn A y A' es un árbol contenido en $A_\mu = \bigcup\limits_{\gamma<\mu} \mathrm{Niv}_\gamma(A)$ (no un subárbol) cuyas ramas son todas numerables, porque $h \in M[G]$ es inyectiva sobre cada rama. Esto implica a su vez que las ramas de A_μ tienen altura $< \mu$, pues una rama en A_μ de altura μ da lugar a una rama en A' con elementos de todas las alturas de a, luego de altura ω_1 en A'. Pero esto es absurdo, pues cualquier elemento de A de altura μ deja por debajo a una rama en A_μ de altura μ. ■

12.2 Un modelo sin p-puntos

Recordemos que en [T 8.49] hemos probado la consistencia de que existan p-puntos en ω^* (en particular, es una consecuencia de la hipótesis del continuo). Veamos ahora que es posible construir un modelo en el que no los haya (en el que necesariamente tiene que fallar la hipótesis del continuo).

Definición 12.3 Si $X \subset \omega$ es un conjunto infinito, llamaremos f_X a la única semejanza $f_X : \omega \longrightarrow X$. Si F es un filtro en ω que no contenga conjuntos finitos, definimos $\overline{F} = \{f_X \mid X \in F\}$, donde $\leq^*$ es la relación definida en 11.47.

Diremos que el filtro F *no está acotado* si el conjunto $\overline{F}$ no está (finalmente) acotado, en el sentido de que no existe ninguna $g \in {}^\omega\omega$ tal que $\bigwedge f \in \overline{F}\ f \leq^* g$.

Veamos algunas caracterizaciones:

Teorema 12.4 *Sea F un filtro en ω que no contenga conjuntos finitos. Entonces, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) F no está acotado.

b) Para toda función (estrictamente creciente) $g \in {}^\omega\omega$ existe un $X \in F$ tal que $|X \cap g(k)| \leq k$ para infinitos valores de k.

c) Para toda función $h : \omega \longrightarrow \omega$ creciente y suprayectiva, existe un $X \in F$ tal que $|X \cap k| \leq h(k)$ para infinitos valores de k.

Demostración: Observemos en primer lugar que en la definición de filtro no acotado podemos exigir que g sea estrictamente creciente, pues dada cualquier función $g \in {}^\omega\omega$, podemos construir $g^* \in {}^\omega\omega$ estrictamente creciente tal que $g <^* g^*$. En efecto, basta definir $g^*(n)$ como el menor natural mayor que $g(n)$ y que todos los elementos de $g^*[n]$. De este modo, si g acota $\overline{F}$, también lo hace g^*.

a) $\Rightarrow$ b) Dada g, tiene que existir un $X \in F$ tal que $\neg f_X \leq^* g$, lo que significa que $g(k) < f_X(k)$ para infinitos valores de k, y implica claramente a que $|X \cap g(k)| \leq k$ (pues todo elemento de $X \cap g(k)$ es menor que el $k+1$-ésimo elemento de X, luego a lo sumo hay k elementos en la intersección).

b) $\Rightarrow$ a) Dada g (que podemos suponer creciente), tomamos $g^*(k) = g(k)+1$, que también es creciente, luego existe un $X \in F$ tal que $|X \cap g^*(k)| \leq k$ para infinitos valores de k, pero esto equivale a que $g(k) < g^*(k) \leq f_X(k)$, pues si fuera $f_X(k) < g^*(k)$ entonces en $X \cap g^*(k)$ habría al menos $k+1$ elementos.

b) $\Rightarrow$ c) Sea h creciente y suprayectiva y sea $g \in {}^\omega\omega$ la función dada por $g(n) = \min g^{-1}[\{n\}]$. Claramente es estrictamente creciente, luego existe $X \in F$ tal que $|X \cap g(k)| \leq k$ para infinitos valores de k. Cada uno de ellos será de la forma $k = h(g(k))$, de modo que $|X \cap g(k)| \leq h(g(k))$, que es lo mismo que $|X \cap k'| \leq h(k')$, para infinitos valores de $k' = g(k)$.

c) $\Rightarrow$ b) Si g es estrictamente creciente, definimos h mediante

$$h(n) = g^{-1}(\text{máx}(g[\omega] \cap (n+1))),$$

que claramente es creciente y suprayectiva. Sea $X \in F$ tal que $|X \cap k| \leq h(k)$ para infinitos valores de k. Para cada uno de ellos, $g(h(k)) \leq k$, luego también se cumple que $|X \cap g(h(k))| \leq h(k)$, luego $|X \cap g(k')| \leq k'$ para los infinitos $k' = h(k)$. ■

Veamos otra caracterización un poco más sofisticada:

Teorema 12.5 *Un filtro F en ω que no contenga conjuntos finitos es no acotado si y sólo si para toda sucesión estrictamente creciente de numeros naturales $\{n_k\}_{k\in\omega}$ existe un $X \in F$ tal que $X \cap [n_k, n_{k+1}[= \varnothing$ para infinitos valores de k.*

Demostración: Si F no está acotado, dada una sucesión $\{n_k\}_{k\in\omega}$, definimos $g \in {}^\omega\omega$ mediante $g(i) = n_{2i}$. Entonces existe un $X \in F$ tal que $\neg f_X \leq^* g$, es decir, para todo $m \in \omega$ existe un $i > m$ tal que $g(i) < f_X(i)$. Esto significa que $|X \cap g(i)| \leq i$, es decir, que $|X \cap n_{2i}| \leq i$. Si X cortara a cada intervalo $[n_k, x_{k+1}[$, para $k = m, \ldots, 2i-1$, entonces $|X \cap n_{2i}| \geq 2i - m > i$, luego existe un $k \geq m$ tal que $X \cap [n_k, n_{k+1}[= \varnothing$.

Si F cumple esta condición, tomamos $g \in {}^\omega\omega$ y vamos a probar que no acota a $\overline{F}$. Sea $g' \in {}^\omega\omega$ dada por $g'(k) = g(k) + k + 1$. Entonces la sucesión dada por $n_0 = 0$ y $n_{k+1} = g'(n_k)$ es estrictamente creciente. Por lo tanto, existe $X \in F$ que cumple la condición del enunciado.

Dado $n \in \omega$, podemos tomar $k \in \omega$ tal que $n_k \geq n$ y $X \cap [n_k, n_{k+1}[= \varnothing$. Entonces $X \cap n_{k+1} = X \cap n_k$, luego

$$|X \cap g'(n_k)| = |X \cap n_{k+1}| = |X \cap n_k| \leq n_k,$$

luego $f_X(n_k) \geq g'(n_k) > g(n_k)$, luego g no acota a f_X. ■

Como consecuencia:

Teorema 12.6 *Todo ultrafiltro libre en ω es no acotado.*

Demostración: Sea U un ultra filtro libre. Vamos a probar que no está acotado usando la caracterización del teorema anterior. Tomamos una sucesión estrictamente creciente $\{n_k\}_{k\in\omega}$ y definimos $X = \bigcup\limits_{k\in\omega} [x_{2k}, x_{2k+1}[$. Entonces $X \in U$ o bien $\omega \setminus X \in U$, y en ambos casos X es disjunto de infinitos intervalos determinados por la sucesión dada. ■

Definición 12.7 Sea F un filtro en ω y sea F' su ideal dual. Definimos $\mathbb{P}_F$ como el conjunto de todas las aplicaciones $p : D \subset \omega \longrightarrow 2$ tales que $D \in F'$. Consideraremos a $\mathbb{P}_F$ como c.p.o. con el orden dado por la inversa de la inclusión. Obviamente tiene máximo $\mathbb{1} = \varnothing$. También es claro que es separativo.

Teorema 12.8 *Sea F un filtro no acotado en ω, sea $\mathbb{P} = \mathbb{P}_F$, sean $n \in \omega$, $p \in \mathbb{P}$ y $\sigma_0, \ldots, \sigma_m \in V^{\mathbb{P}}$ tales que $\mathbb{1} \Vdash \sigma_i \in \omega$, para $i = 0, \ldots, m$. Entonces existe $q \leq p$ y $H \subset \omega$ finito tal que $q|_{\omega\setminus n} \Vdash \sigma_i \in H$, para todo $i \leq m$.*

Demostración: Sea $\{s_i\}_{i<2^n}$ una enumeración de ${}^n2$. Podemos definir sucesiones $\{q_j\}_{j<2^n}$ y $\{d_j\}_{j<2^n}$ de condiciones y subconjuntos finitos de ω, respectivamente, de modo que $q_0 \leq p|_{\omega\setminus n}$ y además

a) $\mathcal{D}q_j \cap n = \varnothing$,

b) $s_j \cup q_j \Vdash \sigma_i \in \check{s}_j$, para $i = 0, \ldots, m$,

c) $q_{j+1} \leq q_j$.

En efecto, como $s_0 \cup p|_{\omega\setminus n} \Vdash \sigma_i \in \omega$, existe $q^* \leq s_0 \cup p|_{\omega\setminus n}$ y $d_0 \subset \omega$ finito de modo que $q^* \Vdash \sigma_i \subset \check{d}_0$, para todo $i \leq m$, y definimos $q_0 = q^* \setminus s_0$. Supuesto definido q_j, razonamos igualmente a partir de que $s_{j+1} \cup q_j \Vdash \sigma_i \in \omega$. Basta tomar $H = \bigcup\limits_{j<2^n} s_j$ y $q = q_{2^n} \cup p|_n$.

En efecto, si relativizamos la construcción a un modelo transitivo numerable M de ZFC y tomamos un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $q|_{\omega\setminus n} = q_{2^n} \in G$, como el conjunto de las condiciones definidas en n es denso en $\mathbb{P}$, existe un $j < 2^n$ tal que $s_j \cup q_{2^n} \in G$, con lo que $s_j \cup q_j \in G$, luego $(\sigma_i)_G \in s_j \subset H_j$ para todo $i \leq m$. ■

Observación El teorema anterior vale igualmente (con la misma prueba) si cambiamos ω por Ω. ■

Definición 12.9 Un *p-filtro* es un filtro F en ω que no contiene subconjuntos finitos y, para toda familia $\{A_n\}_{n\in\omega}$ de elementos de F existe $A \in F$ tal que cada $A \setminus A_n$ es finito. De este modo, un p-punto es un p-filtro que además es un ultrafiltro.

Teorema 12.10 *Si F es un p-filtro no acotado en ω, entonces $\mathbb{P}_F$ acota a ${}^\omega\omega$.*

Demostración: Basta probar la relativización del teorema a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Llamemos $\mathbb{P} = \mathbb{P}_F$, sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y sea $f \in ({}^\omega\omega)^{M[G]}$. Entonces $f = \tau_G$, con $\tau \in M^{\mathbb{P}}$, y podemos suponer que

$$\mathbb{1} \Vdash \tau : \omega \longrightarrow \omega.$$

Sea $B = ({}^\omega\omega)^M$. Si f no estuviera acotada por B podríamos tomar una condición $p \in \mathbb{P}$ tal que

$$p \Vdash \bigwedge h \in \check{B}\ \tau \not\leq^* h.$$

A partir de aquí razonamos en M. Usando el teorema anterior podemos construir una sucesión decreciente de condiciones $\{q_n\}_{n\in\omega}$ y una sucesión $\{H_n\}_{n\in\omega}$ de subconjuntos finitos de ω de modo que $q_0 \leq p$ y $q_n|_{\omega\setminus n} \Vdash \tau(\check{\imath}) \in \check{H}_n$, para $i = 0, \ldots, n$. Llamemos $X_n = \mathcal{D}q_n|_{\omega\setminus n} \in F'$. Como F es un p-filtro, existe un $A \in F$ tal que cada $A \setminus (\omega \setminus X_n) = A \cap X_n$ es finito. Sea $g \in {}^\omega\omega$ tal que $A \cap X_n \subset [n, g(n)]$, con lo que

$$X = \bigcup_{n\in\omega} (X_n \setminus g(n)) = \bigcup_{n\in\omega} (X_n \setminus [n, g(n)]) \subset \omega \setminus A,$$

luego $X \in F'$. Definamos $n_0 = 0$ y $n_{i+1} = g(n_i) + 1$. Tenemos así una sucesión estrictamente creciente y, como F no está acotado, el teorema 12.5 nos da un $Y_0 \in F'$ tal que infinitos intervalos $[n_k, g(n_k)]$ están contenidos en Y_0, luego, pasando a una subsucesión, podemos suponer que

$$Y = \bigcup_{k\in\omega} [n_k, g(n_k)] \subset Y_0,$$

luego $Y \in F'$. Definimos entonces $q = \bigcup_{k\in\omega} q_{n_k}|_{\omega\setminus n_k}$. Se cumple que $q \in \mathbb{P}$, pues su dominio es

$$\bigcup_{k\in\omega} X_{n_k} = \bigcup_{k\in\omega} ((X_{n_k} \setminus g(n_k)) \cup [n_k, g(n_k)]) \subset X \cup Y \in F'.$$

Además, como cada $q_{n_k} \leq p$, es claro que $q \cup p \in \mathbb{P}$. Por último definimos $h(k) = \max H_{n_k}$, de modo que $h \in B$, pero si tomamos un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $q \cup p \in G$, tenemos una contradicción, ya que p fuerza que $f = \tau_G$ no puede estar acotada por B, pero q fuerza que h acota a f. En efecto, para todo $k \in \omega$, tenemos que $q \leq q_{n_k}|_{\omega\setminus n_k}$, luego $q \Vdash \tau(\check{k}) \in H_{n_k}$, luego $f(k) \leq h(k)$. ■

Teorema 12.11 *Si F es un p-filtro no acotado, entonces $\mathbb{P}_F$ es propio.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar la relativización del teorema a un modelo transitivo numerable M de ZFC. En M, sea κ un cardinal regular suficientemente grande y sea $N \prec H(\kappa)$ tal que $\mathbb{P} \in N$. Esto implica que $F \in N$. Sea $p \in \mathbb{P} \cap N$. Vamos a encontrarle una extensión $(N, \mathbb{P})$-genérica.

Sea $\{\sigma_n\}_{n\in\omega} \in M$ una enumeración de todos los $\mathbb{P}$-nombres $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ tales que $\sigma \in N$ y $\mathbb{1} \Vdash \sigma \in \Omega$. Por la versión para Ω del teorema 12.8 podemos construir una sucesión decreciente de condiciones $\{q_n\}_{n\in\omega}$ y una sucesión $\{H_n\}_{n\in\omega}$ de subconjuntos finitos de Ω de modo que $q_0 \leq p$ y $q_n|_{\omega\setminus n} \Vdash \sigma_i \in \check{H}_n$, para $i \leq n$. Más aún, podemos exigir que cada q_n y cada[2] H_n esté en N (no podemos decir lo mismo de las sucesiones completas $\{q_n\}_{n\in\omega}$, $\{H_n\}_{n\in\omega}$ porque su construcción depende de la sucesión $\{\sigma_n\}_{n\in\omega}$, que no está en N).

A partir de aquí calcamos la prueba del teorema anterior para construir una sucesión $\{n_k\}_{k\in\omega}$ tal que $q = p \cup \bigcup\limits_{k\in\omega} q_{n_k}|_{\omega\setminus n_k} \in \mathbb{P}$. Basta probar que q es $(N, \mathbb{P})$-genérica.

Para ello basta probar a su vez que si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $q \in G$, entonces $N[G] \cap \Omega = N \cap \Omega$. En efecto, si $\alpha \in N[G] \cap \Omega$, es claro que existe un $k \in \omega$ tal que $\alpha = (\sigma_k)_G$. Entonces, como $q \leq q_{n_k}|_{\omega\setminus n_k}$, tenemos que $q \Vdash \sigma_k \in \check{H}_{n_k}$, luego $\alpha \in H_{n_k} \subset N$. ■

Teorema 12.12 *Si F es un p-filtro no acotado, existe otro p-filtro no acotado F^* tal que $\mathbb{P}_F^\omega \cong \mathbb{P}_{F^*}$, donde consideramos a $\mathbb{P}_F^\omega$ como c.p.o. con el orden definido componente a componente.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ biyectiva. Para cada $X \subset \omega \times \omega$ y $n \in \omega$, definimos

$$X_{(n)} = \{m \in \omega \mid f(n, m) \in X\}.$$

Sea $F^* = \{X \in \mathcal{P}\omega \mid \bigwedge n \in \omega\ X_{(n)} \in F\}$. Definimos $\pi : \mathbb{P}_F^\omega \longrightarrow \mathbb{P}_{F^*}$ de modo que $\mathcal{D}\pi(p) = \{f(n, m) \mid m \in \mathcal{D}p_n\}$ y $\pi(p)(f(m, n)) = p_n(m)$. Claramente π es una semejanza. Sólo tenemos que probar que F^* es un p-filtro no acotado.

Para ver que es un p-filtro tomamos una familia $\{A_n\}_{n\in\omega}$ de elementos de F^*, de modo que los conjuntos $(A_n)_{(k)}$ están todos en F, luego existe un $Y \in F$ tal que $Y \setminus (A_n)_{(k)}$ es finito, para todo k y todo n. Sea

$$Y_k = Y \cap \bigcap_{n\leq k} (A_n)_{(k)} \in F$$

y definamos $A = \{f(k, m) \mid m \in Y_k\}$. De este modo $A_{(k)} = Y_k \in F$, luego se cumple que $A \in F^*$. Veamos que $A \setminus A_n$ es finito, para todo n. En efecto:

$$A \setminus A_n \subset \{f(k, m) \mid m \in Y_k \setminus (A_n)_{(k)}\} \subset \bigcup_{k\leq n} \{f(k, m) \mid m \in Y_k \setminus (A_n)_{(k)}\},$$

[2]Notemos que en la prueba de 12.8 se ve que los elementos de cada H_n son interpretaciones posibles de los nombres σ_i, por lo que son ordinales de $H(\kappa)$, lo que implica que $H_n \in H(\kappa)$.

porque si $k > n$ entonces $Y_k \subset (A_n)_{(k)}$, y claramente la última unión es finita.

Veamos ahora que F^* no está acotado. Para ello vamos a exigir que f biyecte cada $n \times n$ con n^2. Emplearemos la caracterización dada por 12.4 c). Fijamos $h : \omega \longrightarrow \omega$ creciente y suprayectiva. Podemos tomar $h^* : \omega \longrightarrow \omega$ creciente y suprayectiva tal que $\bigwedge k \in \omega\ h^*(k)^2 \leq h(k^2)$. En efecto, definimos $h^*(0) = 0$ y, en general

$$h^*(n+1) = \begin{cases} h^*(n) & \text{si } h((n+1)^2) < (h^*(n)+1)^2, \\ h^*(n)+1 & \text{si } (h^*(n)+1)^2 \leq h((n+1)^2). \end{cases}$$

Como F no está acotado, existe $Y \in F$ tal que $|Y \cap k| \leq h^*(k)$ para infinitos valores de k. Definimos

$$X = \{f(n,m) \mid m \in Y \setminus f_Y(n)\} \in F^*.$$

Basta probar que $|X \cap k| \leq h^*(k)^2 \leq h(k)$ para infinitos valores de k. De hecho, vamos a probar que esto se cumple siempre que $|Y \cap k| \leq h^*(k)$. En efecto, en tal caso $(Y \setminus f_Y(n)) \cap k = \varnothing$ para todo $n \geq h^*(k)$, luego

$$X \cap k^2 = \{f(n,m) \mid n < k \wedge m \in (Y \setminus f_Y(n)) \cap k\}$$

$$= \bigcup_{n<h^*(k)} \{f(n,m) \mid m \in (Y \setminus f_Y(n)) \cap k\},$$

luego, como $|(Y \setminus f_Y(n)) \cap k| \leq |Y \cap k| \leq h^*(k)$, concluimos que

$$|X \cap k^2| \leq h^*(k)^2 \leq h(k^2).$$

■

Teorema 12.13 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC, *sea F un p-filtro no acotado^M, sea G un filtro $\mathbb{P}_F^\omega$-genérico sobre M, sea $\mathbb{P} \in M[G]$ un c.p.o. que acote a ${}^\omega\omega$ y sea H un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $M[G]$. Entonces en $M[G][H]$ no hay p-puntos que contengan a F.*

Demostración: Supongamos que $P \in M[G][H]$ es un p-punto tal que $F \subset P$. Sea $\xi_n \in M^{\mathbb{P}_F^\omega}$ dado por

$$\xi_n = \{(\text{p.o.}(\check{m}, \check{\imath}), p) \mid p \in \mathbb{P}_F^\omega \wedge (m,i) \in p_n\}.$$

Los argumentos de densidad habituales prueban que $x_n = (\xi_n)_G \in ({}^\omega 2)^{M[G]}$. Más aún, es obvio que $\{x_n\}_{n\in\omega} \in M[G]$. Para cada n, tenemos que uno de los dos conjuntos siguientes está en P:

$$\{m \in \omega \mid x_n(m) = 0\}, \qquad \{m \in \omega \mid x_n(m) = 1\}.$$

Por lo tanto, podemos definir $\epsilon \in ({}^\omega 2)^{M[G][H]}$ de modo que, para cada n, se cumpla que

$$\{m \in \omega \mid x_n(m) = \epsilon(n)\} \in P.$$

Supongamos en primer lugar que ϵ no es finalmente constante, con lo que podemos definir $f \in ({}^\omega\omega)^{M[G][H]}$ mediante

$$f(k) = \min\{i \in \omega \mid \bigvee j \in \omega(k < j < i \wedge \epsilon(k) = \epsilon(j))\}.$$

Como los dos c.p.o.s que estamos considerando acotan a ${}^\omega\omega$, existe $f^* \in ({}^\omega\omega)^M$ tal que $\bigwedge k \in \omega\, f(k) \leq f^*(k)$. Ahora definimos en M la sucesión dada por $k_0 = 0$ y $k_{n+1} = f^*(k_n)$. Notemos que es estrictamente creciente, pues se cumple que $k < f(k) \leq f^*(k)$. Además, si $k_n < j < f(k_n)$ cumple que $\epsilon(k_n) = \epsilon(j)$, según la definición de f, entonces también $k_n < f(k_n) \leq f^*(k_n) = k_{n+1}$, luego en definitiva tenemos que

$$\bigwedge n \in \omega \bigvee j \in \omega(k_n < j < k_{n+1} \wedge \epsilon(k_n) = \epsilon(j)).$$

Si ϵ es finalmente constante, digamos a partir de k_0, entonces definimos $k_{n+1} = k_n + 2$, e igualmente se cumple la propiedad anterior. Definimos

$$A_n = \{m \in \omega \mid \bigvee j \in \omega(k_n < j < k_{n+1} \wedge x_{k_n}(m) = x_j(m))\} \in M[G].$$

Vamos a probar que $A_n \in P$. En efecto, para cada $k_n < j < k_{n+1}$ tenemos que

$$\{m \in \omega \mid x_{k_n}(m) = x_j(m)\} \subset A_n,$$

y por la construcción de la sucesión $\{k_n\}_{n\in\omega}$ existe un j tal que $\epsilon(k_n) = \epsilon(j)$, y por definición de ϵ

$$\{m \in \omega \mid x_{k_n}(m) = \epsilon(m)\}, \quad \{m \in \omega \mid x_j(m) = \epsilon(m)\} \in P,$$

luego la intersección también está en P:

$$\{m \in \omega \mid x_{k_n}(m) = x_j(m) = \epsilon(m)\} \subset \{m \in \omega \mid x_{k_n}(m) = x_j(m)\} \in P,$$

luego $A_n \in P$. Como P es un p-punto, existe $X \in P$ tal que $X \setminus A_n$ es finito, para todo n. En otras palabras, existe $g \in ({}^\omega\omega)^{M[G][H]}$ tal que $X \subset A_n \cup g(n)$. Más aún, usando de nuevo que los c.p.o.s acotan a ${}^\omega\omega$ podemos suponer que $g \in ({}^\omega\omega)^M$. Entonces $X \subset \bigcap\limits_{n\in\omega} (A_n \cup g(n)) \in P$. En particular

$$\neg \bigvee Y \in F' \bigcap_{n\in\omega} (A_n \cup g(n)) \subset Y,$$

donde F' es el ideal dual de F, ya que si existiera tal Y estaría en P', y la intersección también.

Recordemos que cada x_n tiene un nombre canónico $\xi_n \in M^{\mathbb{P}_F^\omega}$. Más aún, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega}$ tiene por nombre canónico a

$$\xi = \{(\text{p.o.}(\check{n}, \xi_n), \mathbb{1}) \mid n \in \omega\} \in M^{\mathbb{P}_F^\omega}.$$

Consideramos ahora $\sigma_n \in M^{\mathbb{P}_F^\omega}$ tal que

$$\mathbb{1} \Vdash \sigma_n = \{m \in \omega \mid \bigvee j \in \omega(\check{k}_n < j < \check{k}_{n+1} \wedge \xi_{\kappa_n}(m) = \xi_j(m))\}.$$

Así $(\sigma_n)_G = A_n$. Vamos a probar que

$$\mathbb{1} \Vdash \bigvee Y \in \check{F}' \bigcap_{n\in\omega} (\sigma_n \cup \check{g}(n)) \subset Y.$$

con lo que tendremos una contradicción. Basta probar que el conjunto de las condiciones que fuerzan dicha sentencia es denso en $\mathbb{P}_F^\omega$. Fijamos una condición $p \in \mathbb{P}_F^\omega$ y vamos a encontrar una extensión que cumpla lo requerido. Tenemos que $p = \{p_j\}_{j\in\omega}$, y cada p_j tiene su dominio en F'. Sea

$$Y_n = \bigcup_{k_n \leq j < k_{n+1}} \mathcal{D}p_j \in F'.$$

Como F es un p-filtro, existe un $Y \in F'$ tal que $Y_n \setminus Y$ es finito, para todo n, luego existe $h \in {}^\omega\omega$ tal que $\bigwedge n \in \omega\ Y_n \setminus h(n) \subset Y$. Podemos tomar h estrictamente creciente y tal que $\bigwedge n \in \omega\ g(n) \leq h(n)$. Más aún, cambiando Y por un conjunto mayor podemos suponer que $h(0) \subset Y$.

Definimos como sigue una condición $q = \{q_j\}_{j\in\omega} \in \mathbb{P}_F^\omega$: Si $j < k_0$, tomamos $q_j = p_j$. En caso contrario existe un único n tal que $k_n \leq j < k_{n+1}$ y definimos q_j de modo que $\mathcal{D}q_j = \mathcal{D}p_j \cup \{m \in \omega \mid h(n) \leq m < h(n+1)\}$ y

$$q_j(m) = \begin{cases} p_j(m) & \text{si } m \in \mathcal{D}p_j, \\ \ \ 1 & \text{si } m \notin \mathcal{D}p_j \land j = k_n, \\ \ \ 0 & \text{si } m \notin \mathcal{D}p_j \land j > k_n. \end{cases}$$

Es inmediato que $q \in \mathbb{P}_F^\omega$, así como que $\bigwedge j \in \omega\ p_j \subset q_j$, luego $q \leq p$. Sólo falta ver que si G es un filtro $\mathbb{P}_F^\omega$-genérico sobre M tal que $q \in G$ entonces

$$\bigcap_{n\in\omega} (A_n \cup g(n)) \subset Y.$$

Tomamos, pues, $m \in \bigcap\limits_{n\in\omega} (A_n \cup g(n))$. Si $m < h(0)$, basta tener en cuenta que $h(0) \subset Y$. En caso contrario existe un único $n \in \omega$ tal que $h(n) \leq m < h(n+1)$. Basta probar que $m \in Y_n$, pues entonces $m \in Y_n \setminus h(n) \subset Y$. En caso contrario, por definición de Y_n, para cada $k_n \leq j < k_{n+1}$ se cumple que $m \notin \mathcal{D}p_j$ y para $j \neq k_n$ se cumple que $q_{k_n}(m) = 1 \neq 0 = q_j(m)$, por definición de q. Como $q \in G$, esto implica que $x_{k_n}(m) \neq x_j(m)$, luego $m \notin A_n$, por definición de A_n. Por otra parte, como $g(n) \leq h(n)$, tenemos que $m \notin g(n)$, luego llegamos a que $m \notin A_n \cup g(n)$, en contradicción con la elección de m. ■

Teorema 12.14 *Si M es un modelo transitivo numerable de* ZFC *en el que se cumple $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ y $2^{\aleph_1} = \aleph_2$, entonces existe una extensión genérica de M con los mismos cardinales, las mismas cofinalidades y la misma función del continuo, salvo que $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, en la que no existen p-puntos.*

Demostración: Vamos a construir en M una iteración $\{\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\omega_2}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\omega_2}\}$ con soportes numerables junto con una sucesión $\{\phi_\delta\}_{\delta<\omega_2}$de modo que, para cada $\delta < \omega_2$, se cumpla que $\phi_\delta \in M^{\mathbb{P}_\delta}$ y

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \phi_\delta \text{ es un } p\text{-filtro no acotado} \land \pi_\delta = \mathbb{P}_{\phi_\delta}^\omega.$$

Veamos que, en estas condiciones, para cada $\delta < \omega_2$ se cumple

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash 2^{\aleph_0} = \aleph_1 \land |\pi_\delta| = \aleph_1.$$

En efecto, si es cierto apara todo $\delta < \gamma < \omega_2$, entonces por el teorema 11.39 tenemos que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi_\delta$ es $\aleph_2$-propio sobre isomorfismos, luego por 11.45 también lo es $\mathbb{P}_\gamma$, luego por 11.40 tenemos que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\gamma} \Vdash 2^{\aleph_0} = \aleph_1$, y es claro entonces que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\gamma} \Vdash |\pi_\gamma| = \aleph_1$ (pues si se cumple la hipótesis del continuo el cardinal de un c.p.o. $\mathbb{P}_F^\omega$ es claramente $\aleph_1$).

Más aún, por 11.46, para todo $\delta \leq \omega_2$ tenemos que $\mathbb{P}_\delta$ cumple la c.c. $\aleph_2$. Como también es propio, concluimos que conserva cardinales y cofinalidades.

Vamos a ver que en estas circunstancias (razonando en M), para cada $\delta < \omega_2$, existe un conjunto $\bar{\pi}_\delta \subset \hat{\pi}_\delta$ tal que $|\bar{\pi}_\delta| \leq \omega_1$ y para todo $\sigma \in \hat{\pi}_\delta$ existe un $\bar{\sigma} \in \bar{\pi}_\delta$ tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \sigma = \bar{\sigma}$. Podemos suponer además que $\mathbb{1}_{\pi_\delta} \in \bar{\pi}_\delta$.

En efecto, si G_δ es un filtro $\mathbb{P}_\delta$-genérico sobre M, tenemos que en $M[G_\delta]$ se cumple que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, luego $|(\pi_\delta)_{G_\delta}| = \aleph_1$, luego

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \bigvee f\, f : \omega_1 \longrightarrow \pi_\delta \text{ suprayectiva} \land f(0) = \mathbb{1}_{\pi_\delta},$$

luego podemos tomar un nombre σ_δ tal que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \sigma_\delta : \omega_1 \longrightarrow \pi_\delta \text{ suprayectiva} \land \sigma_\delta(0) = \mathbb{1}_{\pi_\delta}.$$

Para cada $\alpha < \omega_1$, tenemos que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \bigvee x \in \pi_\delta\; x = \sigma_\delta(\check{\alpha})$, luego existe un $\xi_\alpha \in \hat{\pi}_\delta$ tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \xi_\delta = \phi_\delta(\check{\alpha})$. Concretamente, podemos elegir $\xi_0 = \mathbb{1}_{\pi_\delta}$. Ahora basta tomar $\bar{\pi}_\delta = \{\xi_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$.

Observamos ahora que el subconjunto $\overline{\mathbb{P}}_\delta \subset \mathbb{P}_\delta$ formado por $p \in \mathbb{P}_\delta$ tales que $\bigwedge \epsilon < \delta\; p(\epsilon) \in \bar{\pi}_\epsilon$ es denso en $\mathbb{P}_\delta$. En efecto, dada cualquier condición $p \in \mathbb{P}_\delta$, podemos formar otra condición $\bar{p}$ de modo que $\bigwedge \epsilon < \delta\; \mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \bar{p}(\epsilon) = p(\epsilon)$, y es claro entonces que, ciertamente, $\bar{p} \in \mathbb{P}_\delta$ (y entonces de hecho $\bar{p} \in \overline{\mathbb{P}}_\delta$) y $\bar{p} \leq p \land p \leq \bar{p}$.

Además, para $\delta < \omega_2$, se cumple que $|\overline{\mathbb{P}}_\delta| \leq \aleph_1$. En efecto, para $\overline{\mathbb{P}}_0 = \{\mathbb{1}\}$ es trivial. Si vale para δ, entonces $|\overline{\mathbb{P}}_{\delta+1}| = |\overline{\mathbb{P}}_\delta \times \bar{\pi}_\delta| \leq \aleph_1$, y si vale para todo $\delta < \lambda < \omega_2$, entonces λ tiene a lo sumo $\aleph_1^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = \aleph_1$ subconjuntos numerables. Para cada uno de ellos, digamos s, (un posible soporte de una condición), $\bigcup\limits_{\delta \in s} \bar{\pi}_\delta$ tiene cardinal $\aleph_1$, luego hay a lo sumo $\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1$ condiciones en $\overline{\mathbb{P}}_\lambda$ con soporte s, luego hay a lo sumo $\aleph_1 \cdot \aleph_1 = \aleph_1$ condiciones en $\overline{\mathbb{P}}_\lambda$.

Un cálculo similar nos da que $|\overline{\mathbb{P}}_{\omega_2}| = \aleph_2$. A su vez, para $\delta \leq \omega_2$, si $\nu \geq \aleph_0$ es un cardinal (siempre en M), el teorema 5.20 nos da que el número de buenos $\overline{\mathbb{P}}_\delta$-nombres para subconjuntos de $\check{\nu}$ es a lo sumo

$$|\overline{\mathbb{P}}_\delta|^{<\aleph_2 \nu} \leq |\overline{\mathbb{P}}_\delta|^{\aleph_1 \nu} \leq (2^{\aleph_1})^{\aleph_1 \nu} = \begin{cases} 2^\nu & \text{si } \nu \geq \aleph_1, \\ \aleph_2 & \text{si } \nu = \aleph_0. \end{cases}$$

y el teorema 5.22 nos da entonces que, en una extensión genérica $M[G]$ de M (respecto de $\overline{\mathbb{P}}_\delta$), se cumplirá que $(2^\nu)^{M[G]} \leq (2^\nu)^M$ para $\nu \geq \aleph_1$, y la otra desigualdad es trivial. Obviamente, lo mismo vale para extensiones respecto de $\mathbb{P}_\delta$, pues son las mismas, y por lo tanto la función del continuo se conserva en todos los pasos de la iteración, salvo que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\omega_2}} \Vdash 2^{\aleph_0} \leq \aleph_2.$$

Cuando hayamos probado que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\omega_2}} \Vdash \text{no existen } p\text{-puntos}$$

podremos concluir que, necesariamente, $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_{\omega_2}} \Vdash 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} = \aleph_2$.

Antes de definir la iteración veamos qué podemos decir en el caso en que exista un filtro $\mathbb{P}_{\omega_2}$-genérico sobre M tal que exista un p-punto $P \in M[G]$.

En todo lo que sigue, ω_2 representará a $\omega_2^M = \omega_2^{M[G]}$, e igualmente con otros cardinales.

Para cada $\alpha < \omega_2$, sea $F_\alpha = P \cap M[G_\alpha]$, donde, naturalmente, $G_\alpha = i_\alpha^{-1}[G]$. Tenemos que $F_\alpha \in M[G]$, pero no necesariamente $F_\alpha \in M[G_\alpha]$.

Claramente F_α es un filtro en el álgebra $(\mathcal{P}\omega)^{M[G_\alpha]}$. Diremos que es un *$p$-filtro no acotado respecto de $\beta \leq \alpha$* si

- Si $\{X_n\}_{n\in\omega} \in M[G_\beta]$ es una familia de elementos de F_β, existe $X \in F_\alpha$ tal que $X \setminus X_n$ es finito, para todo n.
- Para cada $g \in {}^\omega\omega \cap M[G_\beta]$ existe un $X \in F_\alpha$ tal que $g \leq^* f_X$.

Veamos ahora que, para cada $\beta < \omega_2$, existe un $\beta < J(\beta) < \omega_2$ tal que $F_{J(\beta)}$ es un p-filtro no acotado respecto de β.

En efecto, dada $\{X_n\}_{n\in\omega} \in M[G_\beta]$, sabemos que existe $X \in P$ tal que $X \setminus X_n$ es finito, para todo n. En particular $X \in M[G]$, y el teorema 7.25 nos da que existe un $\beta' < \omega_2$ tal que $X \in M[G_{\beta'}]$.

Como $M[G_\beta]$ cumple la hipótesis del continuo, hay $\aleph_1$ sucesiones posibles $\{X_n\}_{n\in\omega} \in M[G_\beta]$, a cada una de las cuales le asignamos un ordinal β' tal que existe un $X \in M[G_{\beta'}]$ que cumpla lo requerido (la asignación se hace en $M[G]$). El conjunto de los β' está acotado en ω_2 por un cierto $\alpha_0 < \omega_2$, y para este α_0 (o cualquier ordinal mayor) se cumple que F_{α_0} es un p-filtro respecto de β.

Similarmente, dada $g \in {}^\omega\omega \cap M[G_\beta]$, existe $X \in F$ tal que $g \leq^* f_X$, y como antes podemos encontrar un $\beta' < \omega_2$ tal que $X \in M[G_{\beta'}]$. Igualmente, el número de aplicaciones g posibles es $\aleph_1$, luego podemos encontrar un $\alpha_1 < \omega_2$ que acote a todos los β' posibles, y $J(\beta) = \max\{\beta+1, \alpha_0, \alpha_1\}$ cumple claramente lo requerido.

Veamos ahora que existe un $\alpha < \omega_2$ tal que F_α es un p-filtro no acotado respecto de α.

En efecto, basta definir recurrentemente una sucesión $\{\alpha_\delta\}_{\delta\leq\omega_1}$ mediante $\alpha_0 = 0$, $\alpha_{\delta+1} = J(\alpha_\delta)$ y $\alpha_\lambda = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} \alpha_\delta$. Entonces $\alpha = \alpha_{\omega_1}$ cumple lo pedido. Notemos que $\operatorname{cf}\alpha = \aleph_1$.

En efecto, si $\{X_n\}_{n\in\omega} \in M[G_\alpha]$ es una familia en F_α, cada $X_n \in M[G]$, consideramos una biyección $f : \omega\times\omega \longrightarrow \omega$ tal que $f \in M$ y definimos el conjunto $C = \bigcup\limits_{n\in\omega} f[\{n\}\times X_n] \in M[G]$. Por 7.25 existe un $\beta < \alpha$ tal que $C \in M[G_\beta]$, lo que a su vez implica que $\{X_n\}_{n\in\omega} \in M[G_\beta]$. A su vez existe un $\delta < \omega_1$ tal que $\beta < \alpha_\delta$, luego $J(\beta) < J(\alpha_\delta) = \alpha_{\delta+1} < \alpha$. Por lo tanto, existe un $X \in M[G_{J(\beta)}] \subset M[G_\alpha]$ tal que $X\setminus A_n$ es finito, para todo n. Esto prueba que F_α es un p-filtro respecto de α, y la prueba de que no está acotado respecto de α es similar.

Ahora aplicamos 7.25 a $X = F_\alpha$, $S = (\mathcal{P}\omega)^{M[G_\alpha]}$. Esto es posible, pues $|S| = \aleph_1 < \operatorname{cf}\omega_2$. La conclusión es que existe un $\epsilon < \omega_2$, que podemos tomar $> \alpha$, de modo que $F_\alpha \in M[G_\epsilon]$. Llamamos $F^*_\alpha \in M[G_\epsilon]$ al filtro generado por F_α en $(\mathcal{P}\omega)^{M[G_\epsilon]}$, es decir,

$$F^*_\alpha = \{X \in (\mathcal{P}\omega)^{M[G_\epsilon]} \mid \bigvee Y \in F_\alpha\ Y \subset X\} \subset P.$$

Ahora probamos un hecho general que no depende de la hipótesis de reducción al absurdo que hemos supuesto:

> *Si $\alpha \leq \epsilon < \omega_2$ y $F \in M[G_\epsilon]$ es un p-filtro en $(\mathcal{P}\omega)^{M[G_\alpha]}$ no acotado respecto de α, entones el filtro F^* generado por F en $(\mathcal{P}\omega)^{M[G_\epsilon]}$ es un p-filtro no acotado en $M[G_\epsilon]$.*

En efecto, por el teorema 11.26 sabemos que $M[G_\epsilon]$ es una extensión genérica de $M[G_\alpha]$ por un c.p.o. propio $\mathbb{Q}$ que acota a ${}^\omega\omega$ (véase la nota posterior al teorema, que se aplica igualmente a la propiedad de acotar a ${}^\omega\omega$ teniendo en cuenta 11.51).

Veamos que F^* no está acotado. Para ello supongamos que existe una función $g \in ({}^\omega\omega)^{M[G_\epsilon]}$ tal que para todo $X \in F^*$ se cumple que $f_X <^* g$. Como $\mathbb{Q}$ acota a ${}^\omega\omega$, existe $g' \in ({}^\omega\omega)^{M[G_\alpha]}$ tal que $\bigwedge n \in \omega\ g(n) \leq g'(n)$. En particular, $\bigwedge X \in F_\alpha\ f_X <^* g'$, en contradicción con que F es un p-filtro no acotado respecto de α.

Para probar que F^* es un p-filtro tomamos una familia numerable $\{Z_n\}_{n\in\omega}$ de elementos de F^*. Como F^* es el filtro generado por F, podemos formar (en $M[G_\epsilon]$) una familia $\{Y_n\}_{n\in\omega}$ de conjuntos de F tales que $\bigwedge n \in \omega\ Y_n \subset Z_n$.

Sea $f \in M[G_\alpha]$ tal que $(f : \omega_1 \longrightarrow \mathcal{P}\omega \text{ biyectiva})^{M[G_\alpha]}$. Entonces el conjunto $C = f^{-1}[\{Y_n \mid n \in \omega\}]$ está en $M[G_\epsilon]$ y es numerable. Como $\mathbb{Q}$ es propio, el teorema 11.11 nos da que existe $C' \in M[G_\alpha]$ numerable tal que $C \subset C'$. Entonces $A = f[C'] \cap F$ es una familia numerable (en $M[G_\alpha]$) de elementos de F que contiene a $\{Y_n\}_{n\in\omega}$. Como F es un p-filtro existe $X \in F \subset F^*$ tal que cada $X \setminus U$ es finito para todo $U \in A$. En particular, cada $X \setminus Y_n$ es finito, y lo mismo vale para $X \setminus Z_n$.

En particular, volviendo a nuestra hipótesis de reducción al absurdo, en el supuesto de que existe un p-punto $P \in M[G]$ hemos probado que existe un $\epsilon < \omega_2$ tal que existe un $F \in M[G_\epsilon]$ que es un p-filtro no acotado y $F \subset P$.

Ahora ya podemos construir la iteración. Para ello consideramos una función $f : \omega_2 \longrightarrow \omega_2 \times \omega_2$ suprayectiva, $f \in M$, tal que

$$\bigwedge \alpha\beta\gamma \in \omega_2 (f(\alpha) = (\beta, \gamma) \to \beta \leq \alpha).$$

(Véase la prueba de 7.35.) Además de $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta \leq \omega_2}, \{\pi_\delta\}_{\delta < \omega_2})$ y $\{\phi_\delta\}_{\delta < \omega_2}$, vamos a construir una sucesión $\{\Phi_\delta\}_{\delta < \omega_2}$ tal que $\Phi_\delta \in M^{\mathbb{P}_\delta}$ y

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \Phi_\delta : \omega_2 \longrightarrow \{F \mid F \text{ es un } p\text{-filtro no acotado}\} \text{ suprayectiva.}$$

Tomamos $\mathbb{P}_0 = \{\varnothing\}$ y, supuesta construida la iteración $(\{\mathbb{P}_\beta\}_{\beta \leq \alpha}, \{\pi_\beta\}_{\beta < \alpha})$ junto con las sucesiones $\{\phi_\beta\}_{\beta < \alpha}$ y $\{\Phi_\beta\}_{\beta < \alpha}$ en las condiciones indicadas, sabemos que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash 2^{\aleph_0} = \aleph_1 \wedge 2^{\aleph_1} = \aleph_2$, de donde se sigue inmediatamente que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha}$ fuerza que hay como máximo $\aleph_2$ p-filtros no acotados. Esto nos permite escoger una función Φ_α en las condiciones requeridas.

Ahora calculamos $f(\alpha) = (\beta, \gamma)$ y, como $\beta \leq \alpha$, está definido Φ_β y

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash \bigvee x \; x = \langle i_{\beta\alpha}(\Phi_\beta)(\check{\gamma}) \rangle ,$$

donde $\langle\ \rangle$ representa al filtro generado en $\mathcal{P}\omega$. A su vez, existe un $\phi_\alpha \in M^{\mathbb{P}_\alpha}$ tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash \phi_\alpha = \langle i_{\beta\alpha}(\Phi_\beta)(\check{\gamma}) \rangle$.

Si G_α es un filtro $\mathbb{P}_\alpha$-genérico sobre M tenemos que $(\Phi_\beta)_{G_\beta}(\gamma)$ es un p-filtro no acotado en $M[G_\beta]$, y hemos probado que el filtro que genera en $(\mathcal{P}\omega)^{M[G_\alpha]}$, es decir, $(\phi_\alpha)_{G_\alpha}$ es también un p-filtro no acotado. Así pues, $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash \phi_\alpha$ es un p-filtro no acotado. A su vez, existe $\pi_\alpha \in M^{\mathbb{P}_\alpha}$ tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash \pi_\alpha = \mathbb{P}^\omega_{\phi_\alpha}$.

Con esto queda definida la iteración $(\{\mathbb{P}_\beta\}_{\beta \leq \alpha+1}, \{\pi_\beta\}_{\beta < \alpha+1})$ junto con las sucesiones $\{\phi_\beta\}_{\beta < \alpha+1}$ y $\{\Phi_\beta\}_{\beta < \alpha+1}$. Para ordinales límite la iteración está completamente determinada por la propia definición de iteración (con soportes numerables).

Ahora volvemos a la reducción al absurdo: en el supuesto de que existe un p-punto $P \in M[G]$ hemos encontrado un $\epsilon < \omega_2$ tal que existe un p-filtro no acotado $F \in M[G_\epsilon]$ contenido en P. Entonces tiene que existir un $\gamma < \omega_2$ tal que $F = (\Phi_\epsilon)_{G_\epsilon}(\gamma)$, y a su vez existe un $\epsilon \leq \alpha < \omega_2$ tal que $f(\alpha) = (\epsilon, \gamma)$.

Entonces $F^* = (\phi_\alpha)_{G_\alpha} \subset P$ es el filtro generado por F en $(\mathcal{P}\omega)^{M[G_\alpha]}$, que también es un p-filtro no acotado, y por construcción $(\pi_\alpha)_{G_\alpha} = \mathbb{P}^\omega_{F^*}$.

Así pues el teorema 7.24 nos da que $M[G_{\alpha+1}] = M[G_\alpha][H]$, para cierto filtro $\mathbb{P}^\omega_{F^*}$-genérico H sobre $M[G_\alpha]$ y el teorema 11.26 (véase la observación posterior) nos da que $M[G] = M[G_{\alpha+1}][H']$, para cierto filtro $\mathbb{Q}$-genérico H' sobre $M[G_{\alpha+1}]$ respecto de cierto c.p.o. $\mathbb{Q}$ propio y que acota a ${}^\omega\omega$. En total tenemos que $M[G] = M[G_\alpha][H][H']$, y podemos aplicar el teorema 12.13, que nos asegura que en $M[G]$ no hay p-puntos que extiendan a F^*, cuando por otra parte P cumple esto. Esta contradicción prueba que en $M[G]$ no hay p-puntos. ■

12.3 Especialización de árboles de Aronszajn

Dado un árbol de Aronszajn T, vamos a definir un c.p.o. $\mathbb{P}_T$ de manera que $\mathbb{1} \Vdash \check{T}$ es especial. Después, mediante una iteración de estos c.p.o.s, obtendremos un modelo en el que todo árbol de Aronszajn es especial. En [TC 9.28] hemos visto que AM($\aleph_1$) implica este hecho, pero el modelo que obtendremos aquí cumplirá además la hipótesis del continuo, con lo que tendremos una prueba de que HC no implica ni $\diamondsuit$ ni HS.

Antes de entrar en materia demostraremos un resultado técnico que vamos a necesitar más adelante sobre árboles de Aronszajn. Conviene introducir alguna notación:

Si T es un árbol de altura ω_1 y $n \in \omega$ es no nulo, llamaremos

$$T^n = \bigcup_{\alpha<\omega_1} (\mathrm{Niv}_\alpha\, T)^n$$

al conjunto de n-tuplas de elementos de T de la misma altura. Se trata de un árbol con la relación dada por $x \leq x'$ si y sólo si $x_i \leq x'_i$ para todo $i \in n$.

Si $x \in T$ tiene altura α y $\gamma < \alpha$, representaremos por $x|_\gamma$ al único elemento de altura γ menor que x. En particular, si $x \in T^n$, tenemos que $x|_\gamma = (x_0|_\gamma, \ldots, x_{n-1}|_\gamma)$. Si $B \subset T^n$ y $\gamma < \omega_1$, representamos $B_\gamma = B \cap \mathrm{Niv}_\gamma\, T$. Si $B \subset \mathrm{Niv}_\gamma\, T$ y $\beta < \gamma$, entonces $B|_\beta = \{x|_\beta \mid x \in B\}$.

Teorema 12.15 *Sea T un árbol de Aronszajn, sea $n \in \omega$ no nulo, sea $\alpha_0 < \omega_1$, sea $B \subset T^n$ un conjunto no numerable formado por elementos de altura $\geq \alpha$ y tal que si $x \in \mathrm{Niv}_\gamma\, T^n$ con $\alpha \leq \gamma < \omega_1$ y $x \leq x' \in B$, también $x \in B$. Entonces existe $\alpha \leq \beta < \omega_1$ y $B' \subset B$ no numerable tal que:*

a) Si $\beta \leq \gamma_0 < \gamma_1 < \omega_1$, entonces $B'_{\gamma_0} = B'_{\gamma_1}|_{\gamma_0}$.

b) Si $\beta \leq \gamma < \omega_1$, entonces B'_γ es disperso, es decir, para todo subconjunto finito $t \subset \mathrm{Niv}_\gamma\, T$, existe $x \in B'_\gamma$ tal que $\mathcal{R}x \cap t = \varnothing$.

Demostración: Dividimos la prueba en varios pasos:

- *Podemos suponer que cada $x \in B$ admite extensiones de cualquier altura numerable.*

  En efecto, llamamos B^* al conjunto de los elementos de B que admiten extensiones de cualquier altura numerable. Si $\alpha \leq \gamma < \omega_1$ entonces $B^*_\gamma \neq \varnothing$, pues en caso contrario algún B_γ no contendría elementos con extensiones de cualquier altura numerable, pero eso es imposible, ya que todo elemento de B de altura mayor que γ se restringe a un elemento de B_γ (por hipótesis) y B_γ es numerable. Así pues B^* no es numerable, y basta probar que B^* contiene un subconjunto B' en las condiciones requeridas.

- *Si $\alpha \leq \gamma < \omega_1$, $x \in B_\gamma$ e $i < n$, para cada $p < \omega$ no nulo existen $\gamma \leq \gamma' < \omega_1$ y $x_0, \ldots, x_{p-1} \in B_{\gamma'}$ tales que $x \leq x_j$ (para todo j) y los x_{ji} son distintos dos a dos.*

En efecto, en caso contrario sea p el máximo número natural para el que esto se cumple (trivialmente vale para $p = 1$). Sean $x_0, \ldots, x_{p-1}$ según el enunciado. Si z, z' son extensiones de x_0 de altura $\gamma'' \geq \gamma'$, necesariamente $z_i = z'_i$, pues, de lo contrario, extendiendo cada x_i, con $i > 0$ a un x'_i de altura γ'' tendríamos $p+1$ extensiones de x con las componentes i-ésimas distintas dos a dos. Así pues, las componentes i-ésimas de las extensiones de x_0 forman una cadena no numerable en T, en contradicción con que es un árbol de Aronszajn.

- *Si $\alpha \leq \gamma < \omega_1$ y $x \in B_\gamma$, existen $\gamma \leq \gamma' < \omega_1$ y z, $z' \in B_{\gamma'}$ tales que $x \leq z$, $x \leq z'$ y $\mathcal{R}z$, $\mathcal{R}z'$ son disjuntos.*

  En efecto, veamos por inducción sobre $k \leq n$ que podemos construir pares de extensiones z_k, z'_k de x de una misma altura tales que $z_k[k] \cap z'_k[n] = \varnothing$. Entonces basta tomar z_n y z'_n.

  Tomamos $z_0 = z'_0 = x$. Si tenemos definidas z_k y z'_k, con $k < n$, por el punto anterior podemos tomar extensiones $w_0, \ldots, w_n$ de z_k de la misma altura con las k-ésimas componentes distintas dos a dos. Sea v' una extensión de z'_k de la misma altura. Entonces, existe un j tal que $w_{jk} \notin v'[n]$ y basta tomar $z_{k+1} = w_j$, $z'_{k+1} = v'$.

- *Existe $\alpha \leq \beta < \omega_1$ tal que B_β contiene infinitos elementos disjuntos dos a dos.*

  Partimos de cualquier $z_0 \in B_\alpha$, lo extendemos a z_1, z'_1 disjuntos según el punto anterior. A su vez extendemos z_1 a z_2 y z'_2 disjuntos, y así sucesivamente. Llamamos β al supremo de las alturas de los z_n y extendemos todos los z'_n hasta la altura β. Dichas extensiones serán disjuntas dos a dos.

- Fijada una familia infinita $B^* \subset B_\beta$ de elementos disjuntos dos a dos, definimos B' como el conjunto de todas las extensiones en B de los elementos de B^*. Claramente cumple lo pedido. ■

Pasamos ya a ocuparnos del problema de definir un c.p.o. $\mathbb{P}_T$ que especialice a un árbol de Aronszajn dado T. La forma natural de hacerlo sería tomar como condiciones las funciones f tales que existe un $\alpha < \omega_1$ tal que $f : \bigcup\limits_{\delta<\alpha+1} \mathrm{Niv}_\delta\, T \longrightarrow \mathbb{Q}$ estrictamente creciente. De este modo, si relativizamos toda la construcción a un modelo transitivo numerable M de ZFC y tomamos un filtro genérico G, la función $f_G = \bigcup\limits_{f \in G} f$ cumple que $f : T \longrightarrow \mathbb{Q}$ estrictamente creciente.

Ahora bien, esto no significa que T sea un árbol de Aronszajn especial en $M[G]$, porque $\aleph_1$ se colapsa, luego T ya no es ni siquiera un $\aleph_1$-árbol en $M[G]$.

En efecto, basta tener en cuenta que si $n \in \omega$ el conjunto D_n formado por las condiciones definidas hasta $\mathrm{Niv}_\alpha(T)$ tales que $\bigwedge s \in \mathrm{Niv}_\alpha(T)\ f(s) \geq n$ es denso, con lo que en $M[G]$ podemos tomar un $\alpha_n < \omega_1^M$ tal que

$$\bigwedge s \in \mathrm{Niv}_{\alpha_n} T\ f_G(s) \geq n.$$

Si fuera $\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$, existiría un $\alpha < \omega_1^{M[G]}$ tal que $\bigwedge n \in \omega\ \alpha_n \leq \alpha$, y entonces un $s \in \mathrm{Niv}_{\alpha+1}T$ cumpliría $\bigwedge n \in \omega\ f(s) \geq n$, lo cual es absurdo.

Esto nos obliga a imponer más condiciones en la definición de $\mathbb{P}_T$, y vamos a hacerlo de modo que sea propio. En todo lo que sigue T será un árbol de Aronszajn arbitrario, pero fijo.

Definición 12.16 Una *aproximación* es una función

$$f : \bigcup_{\delta<\alpha+1} \mathrm{Niv}_\delta\, T \longrightarrow \mathbb{Q}$$

estrictamente creciente, donde $\alpha < \omega_1$ está unívocamente determinado por f, por lo que lo representaremos por α_f y lo llamaremos *altura* de f.

Si $\gamma \geq \alpha_f$, diremos que una función finita $h : d \subset \mathrm{Niv}_\gamma\, T \longrightarrow \mathbb{Q}$ *acota* a f si $\bigwedge x \in d\ f(x|_\alpha) < h(x)$, donde $x|_\alpha$ representa al elemento de $\mathrm{Niv}_\alpha\, T$ situado bajo x.

Diremos que H es un *requisito* de altura $\gamma < \omega_1$ si existe un $n = n(H)$ tal que H es un conjunto de funciones $h : d \subset \mathrm{Niv}_\gamma T \longrightarrow \mathbb{Q}$ con $|d| = n$.

Una aproximación f de altura α *cumple* un requisito H de altura α si para todo $t \subset \mathrm{Niv}_\alpha\, T$ finito existe un $h \in H$ que acota a f y $t \cap \mathcal{D}h = \varnothing$.

Una *promesa* Γ es una sucesión $\{\Gamma_\gamma\}_{\beta\leq\gamma<\omega_1}$ (donde β está unívocamente determinado por Γ, así que lo representaremos por $\beta(\Gamma)$) tal que

a) Cada Γ_γ es un conjunto numerable (no vacío) de requisitos de altura γ.

b) Cada $H \in \Gamma_\gamma$ es *disperso,* es decir, para cada $t \subset \mathrm{Niv}_\gamma\, T$ finito existe $h \in H$ tal que $t \cap \mathcal{D}h = \varnothing$.

c) Si $\beta \leq \gamma < \delta < \omega_1$, para cada $h \in H \in \Gamma_\delta$, la aplicación $\mathcal{D}h \longrightarrow \mathrm{Niv}_\gamma\, T$ dada por $s \mapsto s|_\gamma$ es inyectiva, con lo que podemos definir $h|_\gamma(s|_\gamma) = h(s)$, y se cumple que $\Gamma_\gamma = \{H|_\gamma \mid H \in \Gamma_\delta\}$, donde $H|_\gamma = \{h|_\gamma \mid h \in H\}$.

Diremos que una aproximación f *cumple* una promesa Γ si $\beta(\Gamma) \leq \alpha_f$ y f cumple cada requisito $H \in \Gamma_{\alpha_f}$.

Definimos $\mathbb{P} = \mathbb{P}_T$ como el conjunto de todos los pares (f, Γ) tales que f es una aproximación, Γ es una promesa y f cumple Γ.

Si $p = (f, \Gamma) \in \mathbb{P}$, escribiremos $f_p = f$, $\Gamma_p = \Gamma$, $\alpha_p = \alpha_{f_p}$, $\beta_{\bar{p}} = \beta(\Gamma_p)$.

Consideramos en $\mathbb{P}$ el preorden dado por $q \leq p$ si y sólo si $f_p \subset f_q$ y para todo $\alpha_q \leq \gamma < \omega_1$ se cumple que $\Gamma_{p\gamma} \subset \Gamma_{q\gamma}$.

En principio, $\mathbb{P}$ no tiene máximo elemento, pero podemos añadirle un nuevo conjunto $\mathbb{1}$ y extender el preorden de modo que éste pase a ser el máximo de $\mathbb{P}$.

Observemos que existen condiciones no triviales. Por ejemplo, basta tomar un ordinal α tal que $\mathrm{Niv}_\alpha T$ sea infinito, elegir una aproximación f de altura α que esté acotada por un cierto $r \in \mathbb{Q}$ y, para cada $\alpha \leq \gamma < \omega_1$, definir el compromiso $H_\gamma = \{\{(s, r)\} \mid s \in \mathrm{Niv}_\gamma T\}$ y finalmente tomar $\Gamma_\gamma = \{H_\gamma\}$.

Nota Si $p = (f, \Gamma) \in \mathbb{P}$ es una condición de altura α y g es una aproximación de altura α tal que $\bigwedge s \in \mathcal{D}f\ g(s) \leq f(s)$, entonces obviamente g cumple la promesa Γ.

Si $p_1 \leq p_0 < \mathbb{1}$ y llamamos $\alpha_i = \alpha_{p_i}$, $f_i = f_{p_i}$ y $j : \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbb{Q}^+$ es una función estrictamente creciente tal que $\bigwedge r \in \mathbb{Q}^+\ j(r) \leq r$, para cada $x \in \operatorname{Niv}_\alpha T$, con $\alpha_0 < \alpha \leq \alpha_1$, definimos

$$g(x) = f_0(x|_{\alpha_0}) + j(f_1(x) - f_0(x|_{\alpha_0})),$$

y si $x \in \bigcup_{\delta \leq \alpha_0} \operatorname{Niv}_{\alpha_0} T$ definimos $g(x) = f_0(x)$. Entonces, en virtud de la observación precedente, la condición (g, Γ_{p_1}) es también una extensión de p_0 de altura α_1. ■

Necesitamos algunos resultados sobre extensión de condiciones. El fundamental es el siguiente:

Teorema 12.17 *Si $p \in \mathbb{P}$ y $\alpha_p < \alpha < \omega_1$, existe $q \in \mathbb{P}$ tal que $q \leq p$, $\alpha_q = \alpha$ y $\Gamma_q = \Gamma_p$. Más aún, si $h : d \subset \operatorname{Niv}_\alpha T \longrightarrow \mathbb{Q}$ es una función finita que acota a p, podemos exigir que también acote a q.*

DEMOSTRACIÓN: La segunda parte se sigue fácilmente de la primera. En efecto, si tenemos una extensión q, podemos modificarla como sigue. Fijamos $\delta \in \mathbb{Q}^+$ tal que $\bigwedge x \in \mathcal{D}h\ h(x) > f_p(x|_{\alpha_p}) + \delta$, tomamos $j : \mathbb{Q}^+ \longrightarrow]0, \delta[$ estrictamente creciente tal que $\bigwedge r \in \mathbb{Q}^+\ j(r) < r$. Ahora basta tomar la modificación q^* de q definida en la nota precedente. Así, si $x \in \operatorname{Niv}_\alpha T$, tenemos que

$$f_{q^*}(x) = f_p(x|_{\alpha_p}) + j(f_q(x) - f_p(x|_{\alpha_p})) < f_p(x|_{\alpha_p}) + \delta < h(x),$$

luego h acota a q^*.

Para probar la primera parte razonamos por inducción sobre α. Si $\alpha = \alpha^* + 1$, por hipótesis de inducción podemos extender p a una condición de altura α^*, por lo que no perdemos generalidad si suponemos que $\alpha = \alpha_p + 1$. Se trata entonces de extender f_p hasta $\operatorname{Niv}_{\alpha_p+1} T$ de modo que cumpla los requisitos de $\Gamma_{p,\alpha}$. Sabemos que, para cada $H \in \Gamma_{p,\alpha}$, se cumple que $H|_{\alpha_p} \in \Gamma_{p,\alpha_p}$, luego es satisfecho por f_p.

Existe una sucesión $\{h_m\}_{m\in\omega}$ de funciones finitas con dominios disjuntos dos a dos que acotan a f_p y que contiene infinitos elementos de cada $H \in \Gamma_{p,\alpha_p}$. En efecto, tomamos una enumeración $\{H_k\}_{k\in\omega}$ de $\Gamma_{p,\alpha}$ y fijamos una enumeración $\{k_m\}_{m\in\omega}$ de ω en la que cada número natural aparezca infinitas veces.

Supuestas construidas $h_0, \ldots, h_{m-1}$, como f_p cumple el requisito $H_{k_m}|_{\alpha_p}$, podemos tomar $h_m \in H_{k_m}$ tal que $h_m|_{\alpha_p}$ acote a f_p y tenga dominio disjunto de $\bigcup_{i<m} \mathcal{D}h_i|_{\alpha_p}$, luego el dominio de h_m también será disjunto de $\bigcup_{i<m} \mathcal{D}h_i$.

Para cada $x \in \mathcal{D}h_m$ definimos

$$f_q(x) = \frac{f_p(x|_{\alpha_p}) + h_m(x)}{2},$$

mientras que si $x \in \operatorname{Niv}_\alpha T \setminus \bigcup\limits_{n<\omega} \mathcal{D}h_m$, definimos $f_q(x) = f_p(x|_{\alpha_p}) + 1$.

Así, la extensión f_q de f_p definida de este modo es estrictamente creciente y cumple claramente la promesa Γ_p, pues dado $H \in \Gamma_{p,\alpha}$ y $t \subset \operatorname{Niv}_\alpha T$ finito, existe un $m < \omega$ tal que $H = H_{k_m}$ y el dominio de h_m es disjunto de t. Entonces $h_m \in H$ acota a f_q.

Supongamos ahora que α es un ordinal límite y sea $\{\alpha_m\}_{m<\omega}$ una sucesión cofinal creciente en α con $\alpha_0 = \alpha_p$. Vamos a definir una cadena de extensiones $\{p_m\}_{m<\omega}$, todas con la misma promesa Γ_p, de modo que $p_0 = p$ y la altura de p_m es α_m, así como una sucesión de funciones finitas $h_m : d_m \subset \operatorname{Niv}_\alpha T \longrightarrow \mathbb{Q}$ cada una de las cuales acota a la correspondiente f_{p_m}.

Como antes, tomamos una enumeración $\{H_k\}_{k<\omega}$ de $\Gamma_{p,\alpha}$ y fijamos una enumeración $\{k_m\}_{m\in\omega}$ de ω en la que cada número natural aparezca infinitas veces. Sea además $\{x_m\}_{m<\omega}$ una enumeración de $\operatorname{Niv}_\alpha T$.

Supuesta definida p_m, como cumple el requisito $H_{k_m}|_{\alpha_m}$, podemos tomar una función $h \in H_{k_m}$ cuyo dominio sea disjunto del dominio de h_{m-1} (entendiendo que esto se cumple trivialmente si $m = 0$) y que acote a f_{p_m}. Claramente podemos modificar h para obtener otra función h' con el mismo dominio, que siga acotando a f_{p_m} y tal que $\bigwedge x \in \mathcal{D}h' \; h'(x) < h(x)$.

Definimos $h_m = h_{m-1} \cup h'$, que claramente acota a f_{p_m}, y si $x_m \notin \mathcal{D}h_m$, lo añadimos asignándole una imagen tal que $h_m(x_m) > f_{p_m}(x_m|_{\alpha_m})$. De este modo h_m sigue acotando a f_{p_m} y, por la hipótesis de inducción, existe $p_{m+1} \in \mathbb{P}$ que extiende a p_m con altura α_{m+1}, con la misma promesa y acotada por h_m.

Esta construcción garantiza que $h^* = \bigcup\limits_{m\in\omega} h_m : \operatorname{Niv}_\alpha T \longrightarrow \mathbb{Q}$ y que, para cada $k < \omega$ y cada $m \geq k$, se cumple que $x_k \in \mathcal{D}h_m$, luego

$$f_{p_m}(x_k|_{\alpha_m}) < h_m(x_k) = h^*(x_k).$$

Esto hace que $f_q = \bigcup\limits_{m\in\omega} f_{p_m} \cup h^*$ sea una aproximación, y además cumple cada requisito de $\Gamma_{p,\alpha}$, pues, dado cualquier conjunto finito $t \subset \operatorname{Niv}_\alpha T$ y $H \in \Gamma_{p,\alpha}$, existe un $m < \omega$ tal que $H = H_{k_m}$, $t \subset \mathcal{D}h_{m-1}$, y entonces, por la construcción, existe un $h \in H$ tal que $h' \subset h_m \subset h^*$ (con lo que h acota a f_q) y cuyo dominio es disjunto de t. Por lo tanto, $q = (f_q, \Gamma_p) \in \mathbb{P}$ y $\alpha_q = \alpha$. ■

A su vez, como consecuencia demostramos un resultado de adición de requisitos a la promesa de una condición:

Teorema 12.18 *Sea $p \in \mathbb{P}$ una condición, sea $\alpha = \alpha_p$ y sea Δ una promesa tal que $\alpha < \beta = \beta(\Delta)$. Si existe una aplicación finita $g : d \subset \operatorname{Niv}_\alpha T \longrightarrow \mathbb{Q}$ que acota f_p y*

$$\bigwedge \gamma \in \omega_1 \setminus \beta \bigwedge H \in \Delta_\gamma \bigwedge h \in H \; h|_\alpha = g,$$

entonces existe $q \in \mathbb{P}$ tal que $q \leq p$, $\alpha_q = \beta$ y $\bigwedge \gamma \in \omega_1 \setminus \beta \; \Delta_\gamma \subset \Gamma_{q,\gamma}$.

Demostración: Fijemos un $\delta \in \mathbb{Q}^+$ tal que $\bigwedge x \in \mathcal{D}g \; g(x) > f_p(x) + \delta$. Por el teorema anterior existe $q' \in \mathbb{P}$ tal que $q' \leq p$ y $\alpha_{q'} = \beta$. Fijamos una aplicación $j : \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \,]0, \delta[$ estrictamente creciente y tal que $\bigwedge r \in \mathbb{Q}^+ \; j(r) < r$.

Entonces, según hemos observado en la nota tras la definición 12.16, la extensión f^* de f_p de altura β determinada por

$$f^*(x) = f_p(x|_\alpha) + j(f_{q'}(x) - f_p(x|_\alpha)).$$

cumple que $(f^*, \Gamma_p) \in \mathbb{P}$ es una extensión de p. Además, si $h \in H \in \Delta_\beta$ y $x \in \mathcal{D}h$, tenemos que $h|_\alpha = g$, luego

$$f^*(x) < f_p(x|_\alpha) + \delta < g(x|_\alpha) = h|_\alpha(x|_\alpha) = h(x)$$

luego f^* cumple el requisito H. Como también cumple los requisitos de $\Gamma_{p,\beta}$, podemos formar una condición q dada por $f_q = f^*$ y la promesa Γ_q determinada por $\Gamma_{q,\gamma} = \Gamma_{p,\gamma} \cup \Delta_\gamma$ para $\beta \leq \gamma < \omega_1$. Es inmediato que $q \leq p$. ■

Para demostrar que $\mathbb{P}$ es propio nos apoyaremos en el resultado siguiente, en cuya prueba se pone de manifiesto el papel que representan las promesas:

Teorema 12.19 *Sea κ un cardinal regular no numerable, sea $N \prec H(\kappa)$ numerable tal que T, $\mathbb{P} \in N$, sea $p \in N \cap \mathbb{P}$, $\alpha = \omega_1 \cap N$ y $h : d \subset \operatorname{Niv}_\alpha T \longrightarrow \mathbb{Q}$ una función finita que acote a f_p. Sea $D \in N$ un abierto denso en $\mathbb{P}$. Entonces existe $r \in D \cap N$ tal que $r \leq p$ y f_r está acotada por h.*

Demostración: Vamos a probar algo ligeramente más general. Supongamos que d es un conjunto finito de ramas de altura α en T y vamos a fijar una enumeración $d = \{d_i\}_{i<n}$. Cuando decimos que h acota a f_p queremos decir que si $d_i|_{\alpha_p}$ es el elemento de altura α_p en la rama d_i, entonces $f_p(d_i|_{\alpha_p})) < h(d_i)$. El enunciado se obtiene como caso particular cuando aplicamos esta versión a las ramas $\{u \in T \mid u < s\}$, para cada $s \in d$.

Supongamos que no existe tal r. Podemos suponer que los $d_i|_{\alpha_p}$ son distintos dos a dos, pues en caso contrario podemos tomar un ordinal $\alpha' < \alpha_p$ tal que los $d_i|_{\alpha'}$ sean distintos dos a dos y cambiar p por una extensión de p de altura α' (que podemos tomar en N). Si dicha extensión pudiera extenderse hasta un r en las condiciones del enunciado, también podría extenderse p.

Llamemos $g_0 = h|_{\alpha_p}$. Diremos que una función finita $g : d_g \subset \operatorname{Niv}_\gamma T \longrightarrow \mathbb{Q}$ es *mala* si $\alpha_p \leq \gamma < \omega_1$, $|d_g| = n$, existe $g|_{\alpha_p} = g_0$ (es decir, las restricciones de los elementos de d_g son distintas dos a dos) y ninguna condición $r \in D$, $r \leq p$, $\alpha_r \leq \gamma$ está acotada por g.

En particular, si $\alpha_p \leq \gamma < \alpha$, se cumple que $h|_\gamma$ es mala^N, pues si existiera $r \in D \cap N$ con $r \leq p$, $\alpha_r \leq \gamma$ y acotada por $h|_\gamma$, entonces también lo estaría por h y cumpliría el teorema.

Esto implica que en N y, por lo tanto, en $H(\kappa)$, existe una cantidad no numerable de funciones malas. En efecto, si el conjunto de las aplicaciones malas fuera numerable, existiría una cota $\gamma \in N$ de sus alturas, $\gamma < \omega_1$, y entonces $\alpha_p \leq \gamma < \alpha$, con lo que $h|_\gamma$ no sería mala^N, contradicción.

Observemos también que si $g : d_g \subset \operatorname{Niv}_\gamma T \longrightarrow \mathbb{Q}$ es mala y $\alpha_p \leq \gamma' < \gamma$, entonces $g|_{\gamma'}$ también es mala.

Llamamos $B \subset T^n$ al conjunto de los dominios de las funciones malas (vistos como n-tuplas). Así $B_\gamma \neq \varnothing$ para todo $\alpha_p \leq \gamma < \omega_1$ (luego es no numerable) y tiene la propiedad de que si $x \in B$ y $x' \in \operatorname{Niv}_\gamma T$ con $\alpha_p \leq \gamma < \omega_1$ cumple $x' \leq x$ entonces $x' \in B_\gamma$.

Podemos aplicar el teorema 12.15, que nos da un conjunto $B^0 \subset B$ y un ordinal $\alpha_p \leq \beta < \omega_1$ tales que si $\beta \leq \gamma < \gamma' < \omega_1$ entonces $B^0_\gamma = B^0_{\gamma'}|_\gamma$ y B^0_β es disperso (todo conjunto finito en $\operatorname{Niv}_\beta T$ es disjunto de un elemento de B^0_β). Más aún, como $B \in N$ y la propiedad con la que hemos escogido B_0 está definida en términos de parámetros en N, podemos exigir que $B_0 \in N$.

Para cada $\beta \leq \gamma < \omega_1$, definimos el requisito

$$H_\gamma = \{g \mid g \text{ es mala} \land \mathcal{D}g \in B^0_\gamma\}.$$

Claramente $\Delta_\gamma = \{H_\gamma\}$ define una promesa, y todas las funciones de cada H_γ extienden a g_0, que acota a f_p. Por el teorema anterior existe $q \in \mathbb{P}$ de altura β tal que $q \leq p$ y $\bigwedge \gamma \in \omega_1 \setminus \beta\ H_\gamma \in \Gamma_{q,\gamma}$. Se cumple que $\Delta \in N$, lo que a su vez implica que podemos tomar $q \in N$.

Finalmente tomamos $r \in D$ tal que $r \leq q$. Claramente podemos exigir que $r \in N$. Como f_r satisface Γ_{q,α_r}, en particular satisface H_{α_r}, luego existe $g \in H_{\alpha_r}$ que acota a f_r, en contradicción con que g tiene que ser mala. ■

Teorema 12.20 *Existe un sistema de completitud numerablemente completo* $\mathbb{D}$ *tal que* $\mathbb{P}$ *es* $\mathbb{D}$*-completo.*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos un cardinal regular κ suficientemente grande, sea $N \prec H(\kappa)$ un submodelo elemental numerable de manera que $\mathbb{P} \in N$ y sea $p_0 \in \mathbb{P} \cap N$. Sea $\phi : N \longrightarrow \bar{N}$ el colapso transitivo de N, sea $\bar{\mathbb{P}} = \phi(\mathbb{P})$ y $\bar{p}_0 = \phi(p_0)$. Sea $\alpha = \omega_1 \cap N$, de modo que $\phi(\alpha) = \omega_1^{\bar{N}}$.

Observemos que $T \in N$, pues puede reconstruirse a partir de $\mathbb{P}$, y si $\delta < \alpha$, entonces $\operatorname{Niv}_\delta T \in N$ y, al ser numerable, $\operatorname{Niv}_\delta T \subset N$. Es claro entonces que ϕ se restringe a un isomorfismo

$$\phi : T_\alpha = \bigcup_{\delta<\alpha} \operatorname{Niv}_\delta T \longrightarrow \bar{T} = \phi(T).$$

Así $\bar{T}$ es un árbol de Aronszajn$^{\bar{N}}$ y $\bar{\mathbb{P}}$ es (en $\bar{N}$) el c.p.o. asociado a $\bar{T}$. Observemos que $\bar{T}$ tiene altura α, por lo que no existe $\operatorname{Niv}_\alpha \bar{T}$. Sin embargo, vamos a ver que podemos traspasar a $\bar{N}$ mediante ϕ toda la información relevante sobre $\operatorname{Niv}_\alpha T$.

Para ello observamos que cada $s \in \operatorname{Niv}_\alpha T$ determina una rama

$$R_s = \{s|_\delta \mid \delta < \alpha\}$$

cofinal en T_α, que a su vez determina una rama $\bar{s} = \phi[R_s] \subset \bar{N}$ cofinal en $\bar{T}$. No puede suceder que $\bar{s} \in \bar{N}$, porque entonces $\bar{T}$ no sería un árbol de Aronszajn en $\bar{N}$. Podemos pensar en $\bar{s}$ como la “mejor traducción posible” de s a $\bar{N}$. Si $\delta < \alpha$, llamaremos $\bar{s}|_\delta = \phi(s|_\delta)$, que es el elemento de altura δ en la rama $\bar{s}$.

Sea $\{s_n\}_{n\in\omega}$ una enumeración de $\mathrm{Niv}_\alpha T$ y sea $\{\bar{s}_n\}_{n\in\omega}$ dada por $\bar{s}_n = \overline{s_n}$.

Si $p \in \mathbb{P} \cap N$, $H \in \Gamma_{p,\alpha}$ y $h \in H$, entonces $h : d \longrightarrow \mathbb{Q}$, donde $d \subset \mathrm{Niv}_\alpha T$ es finito. Definimos $\bar{h} : \bar{d} \longrightarrow \mathbb{Q}$, donde $\bar{d} = \{n \in \omega \mid s_n \in d\}$ y $\bar{h}(n) = h(s_n)$. Así $\bar{h}$ “codifica” h. Definimos $\bar{H} = \{\bar{h} \mid h \in H\}$ y $\bar{\Gamma}_{\bar{p}} = \{\bar{H} \mid H \in \Gamma_{p,\alpha}\}$.

Claramente se cumplen las propiedades siguientes, a las que nos referiremos con $(*)$:

- $\bar{s} = \{\bar{s}_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de caminos (ramas cofinales) en $\bar{T}$.
- $\bar{\Gamma}$ es una función definida en $\bar{\mathbb{P}}$ que asocia a cada $\bar{p} \in \bar{\mathbb{P}}$ un conjunto numerable $\bar{\Gamma}_{\bar{p}}$ de “requisitos” $\bar{H}$, entendidos como conjuntos de funciones $\bar{h} : \bar{d} \subset \omega \longrightarrow \mathbb{Q}$, con $\bar{d}$ finito.
- Los dominios de las funciones de $\bar{H}$ forman un conjunto disperso, en el sentido de que para todo conjunto finito $t \subset \omega$ existe $\bar{h} \in \bar{H}$ tal que $t \cap \mathcal{D}\bar{h} = \varnothing$.
- Si $\beta_{\bar{q}} \leq \delta < \alpha$, entonces $\Gamma_{\bar{p},\delta} = \{\bar{H}|_\delta \mid \bar{H} \in \bar{\Gamma}_{\bar{p}}\}$, donde
$$\bar{H}|_\delta = \{\bar{h}_\delta \mid \bar{h} \in \bar{H}\},$$
donde a su vez, si $\mathcal{D}\bar{h} = \{n_1, \ldots, n_k\}$, entonces $\mathcal{D}\bar{h}_\delta = \{\bar{s}_{n_1}|_\delta, \ldots, \bar{s}_{n_k}|_\delta\}$, con todos los $\bar{s}_{n_i}$ distintos dos a dos, y $\bar{h}_\delta(\bar{s}_{n_i}|_\delta) = \bar{h}(n_i)$.
- Si $\bar{p} \leq \bar{p}'$, entonces $\bar{\Gamma}_{\bar{p}'} \subset \bar{\Gamma}_{\bar{p}}$.

También contamos con que $\bar{N}$, $\bar{\mathbb{P}}$ y $\bar{T}$ cumplen la traducción a través de ϕ del teorema anterior (no de su enunciado, sino del hecho más general que hemos probado, precisamente para poder aplicarlo aquí), es decir:

> $(**)$ *Si $\bar{p} \in \bar{\mathbb{P}}$, $\bar{D} \in \bar{N}$ es denso en $\bar{\mathbb{P}}$ y $\bar{h} : \bar{d} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es una aplicación definida en un conjunto finito $\bar{d}$ de caminos en $\bar{T}$ (que necesariamente no están en $\bar{N}$) que acota a $f_{\bar{p}}$ (en el sentido de que, para todo $\bar{s} \in \bar{d}$, se cumple que $f_{\bar{p}}(\bar{s}|_{\alpha_{\bar{p}}}) < \bar{h}(\bar{s})$), entonces existe $\bar{r} \in \bar{D}$ tal que $\bar{r} \leq \bar{p}$ y $f_{\bar{r}}$ está acotada por $\bar{h}$.*

Más aún, en la prueba del teorema se ve que podemos tomar $\bar{r}$ de altura arbitrariamente grande (menor que α). Concretamente, esto se debe a que en la parte final de la prueba podemos elegir $\beta \in N$ arbitrariamente grande.

En esta situación tenemos que definir $\mathbb{D}(\bar{N}, \bar{\mathbb{P}}, \bar{p}_0)$ de modo que la definición valga para cualquier modelo transitivo numerable $\bar{N}$ de ZFC−AP, cualquier c.p.o. $\bar{\mathbb{P}} \in \bar{N}$ y cualquier $\bar{p}_0 \in \bar{\mathbb{P}}$, y proporcione una familia no vacía de conjuntos no vacíos de filtros $\bar{\mathbb{P}}$-genéricos sobre $\bar{N}$ que contienen a $\bar{p}_0$, de tal manera que, en el caso particular en que $\bar{N}$, $\bar{\mathbb{P}}$ y $\bar{p}_0$ sean los que hemos descrito, entonces las antiimágenes por ϕ de los filtros de alguno de los elementos de $\mathbb{D}(\bar{N}, \bar{\mathbb{P}}, \bar{p}_0)$ estén acotadas inferiormente en $\mathbb{P}$. Además toda intersección numerable de elementos de $\mathbb{D}(\bar{N}, \bar{\mathbb{P}}, \bar{p}_0)$ debe ser no vacía.

Para definir $\mathbb{D}(\bar{N}, \bar{\mathbb{P}}, \bar{p}_0)$ distinguimos dos casos:

a) $\bar{\mathbb{P}}$ es (en $\bar{N}$) el c.p.o. asociado a un árbol de Aronszajn$^{\bar{N}}$ $\bar{T}$, se cumple la propiedad $(**)$ y existe al menos un par $(\bar{s}, \bar{\Gamma})$ que cumple $(*)$.

b) Cualquier otro caso.

En el caso b) definimos $\mathbb{D}(\bar{N}, \bar{\mathbb{P}}, \bar{p}_0)$ como el conjunto cuyo único elemento es el conjunto de todos los filtros $\bar{\mathbb{P}}$-genéricos sobre $\bar{N}$ que contienen a $\bar{p}_0$. A partir de aquí nos centramos en el caso a). Para cada par $(\bar{s}, \bar{\Gamma})$ que cumpla $(*)$ vamos a definir un conjunto $X_{\bar{s},\bar{\Gamma}}$ de filtros $\bar{\mathbb{P}}$-genéricos sobre $\bar{N}$ que contienen a $\bar{p}_0$, y así definiremos $\mathbb{D}(\bar{N}, \bar{\mathbb{P}}, \bar{p}_0)$ como el conjunto de todos los conjuntos $X_{\bar{s},\bar{\Gamma}}$.

De este modo, en el caso en que $\bar{N}$ sea el colapso de un modelo N en las condiciones iniciales de la prueba, entre los elementos de $\mathbb{D}(\bar{N}, \bar{\mathbb{P}}, \bar{p}_0)$ figurará en particular el construido a partir de la auténtica sucesión $\bar{s}$ que codifica a través de la función colapsante ϕ el nivel α-ésimo de $\mathbb{P}$ y la auténtica función $\bar{\Gamma}$ que codifica las promesas $\bar{\Gamma}_{p,\alpha}$, y será dicho conjunto el que probará la $\mathbb{D}$-completitud de $\mathbb{P}$, es decir, el que cumplirá que las antiimágenes por ϕ de sus filtros estarán acotadas inferiormente en $\mathbb{P}$.

Fijamos una sucesión $\{\alpha_m\}_{m\in\omega}$ cofinal creciente en α con $\alpha_0 = \alpha_{\bar{p}_0}$ y una enumeración $\{\bar{D}_m\}_{m\in\omega}$ de todos los abiertos densos en $\bar{\mathbb{P}}$ que están en $\bar{N}$. Fijamos una biyección $\bar{\jmath} : \omega \longrightarrow \omega^3$ y definimos $j : \omega \longrightarrow \omega^2$ mediante

$$j(m) = \begin{cases} (n, k) & \text{si } \bar{\jmath}(m) = (n, k, i) \land n \leq m, \\ (0, 0) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De este modo $j(m) = (n, k) \to n \leq m$ y cada para (n, k) aparece infinitas veces en la sucesión $\{j(m)\}_{m\in\omega}$. Vamos a definir una sucesión decreciente de condiciones $\{\bar{p}_m\}_{m\in\omega}$ en $\bar{\mathbb{P}}$ de alturas $\alpha'_m \geq \alpha_m$, una sucesión $\{\bar{h}_m\}_{m\in\omega}$ de funciones finitas $\bar{h}_m : \bar{d}_m \subset \omega \longrightarrow \mathbb{Q}$, así como enumeraciones $\{\bar{H}^m_k\}_{k\in\omega}$ de los conjuntos $\bar{\Gamma}_{\bar{p}_m}$.

Partimos del $\bar{p}_0$ dado y fijamos una enumeración $\{\bar{H}^0_k\}_{k\in\omega}$ de $\bar{\Gamma}_{\bar{p}_0}$. Supongamos definidos $\bar{p}_0, \ldots, \bar{p}_m$ (con las enumeraciones correspondientes de los $\bar{\Gamma}_{\bar{p}_i}$) y $\bar{h}_0, \ldots, \bar{h}_{m-1}$. Calculamos $j(m) = (n, k)$. Como $n \leq m$, está definido el requisito $\bar{H}^n_k \in \bar{\Gamma}_{\bar{p}_n} \subset \bar{\Gamma}_{\bar{p}_m}$ y $\bar{p}_m$ cumple el requisito $\bar{H}^n_k|_{\alpha'_m}$, luego podemos tomar $\bar{h} \in \bar{H}^n_k$ con dominio disjunto del dominio de $\bar{h}_{m-1}$ tal que $\bar{h}_{\alpha'_m}$ acote a $f_{\bar{p}_m}$.

Así, si $k \in \bar{d}$, se cumple que $f_{\bar{p}_m}(s_k|_{\alpha'_m}) < \bar{h}(k)$. Podemos modificar $\bar{h}$ hasta una función $\bar{h}'$ con el mismo dominio pero que cumpla $\bigwedge k \in \mathcal{D}\bar{h}'\ \bar{h}'(k) < \bar{h}(k)$. Definimos $\bar{h}_m = \bar{h}_{m-1} \cup \bar{h}'$ y, si $m \notin \mathcal{D}\bar{h}_m$, extendemos $\bar{h}_m$ para que contenga a m de modo que $\bar{h}_m$ siga acotando a $f_{\bar{p}_m}$.

Ahora usamos la propiedad $(**)$ para obtener $\bar{p}_{m+1} \in \bar{D}_m$ acotada por $\bar{h}_m$ tal que $\bar{p}_{m+1} \leq \bar{p}_m$. Además, según hemos observado tras $(**)$, podemos tomar $\bar{p}_{m+1}$ de altura arbitrariamente grande, de modo que podemos exigir que

$\alpha'_{m+1} = \alpha_{p_{m+1}} \geq \alpha_{m+1}$. Ahora podemos fijar la enumeración $\{\bar{H}_k^{m+1}\}_{k\in\omega}$ de $\bar{\Gamma}_{\bar{p}_{m+1}}$ y continuar la construcción.

Ahora definimos $X_{\bar{s},\bar{\Gamma}}$ como el conjunto de todos los filtros $\bar{\mathbb{P}}$-genéricos sobre $\bar{N}$ generados por una sucesión decreciente de condiciones $\{\bar{p}_n\}_{n\in\omega}$ de alturas cofinales en α que empieza en el $\bar{p}_0$ dado y tal que exista una función $\bar{h}^* : \omega \longrightarrow \mathbb{Q}$ que cumpla las propiedades siguientes:

a) $\bigwedge km \in \omega\ f_{\bar{p}_m}(\bar{s}_k|_{\alpha'_m}) < \bar{h}^*(k)$,

b) Si $\bar{H} \in \bigcup\limits_{m\in\omega} \bar{\Gamma}_{\bar{p}_m}$ y $\bar{t} \subset \omega$ es finito, existe $\bar{h} \in \bar{H}$ tal que $\mathcal{D}\bar{h} \cap \bar{t} = \varnothing$ y $\bigwedge k \in \mathcal{D}\bar{h}\ \bar{h}^*(k) < \bar{h}(k)$.

Observamos que $X_{\bar{s},\bar{\Gamma}} \neq \varnothing$, pues el filtro generado por la sucesión $\{\bar{p}_m\}_{m\in\omega}$ que hemos construido es obviamente $\mathbb{P}$-genérico sobre $\bar{N}$, y además cumple estas propiedades con $\bar{h}^* = \bigcup\limits_{m\in\omega} \bar{h}_m : \omega \longrightarrow \mathbb{Q}$. En efecto:

a) Para cada $k \in \omega$ y cada $m \geq k$, se cumple que $k \in \mathcal{D}\bar{h}_m$, luego

$$f_{\bar{p}_m}(s_k|_{\alpha'_m}) < \bar{h}_m(k) = \bar{h}^*(k).$$

Y si $m < k$ entonces igualmente $f_{\bar{p}_m}(s_k|_{\alpha'_m}) = f_{\bar{p}_k}(s_k|_{\alpha'_m}) < f_{\bar{p}_k}(s_k|_{\alpha'_k}) < \bar{h}^*(k)$.

b) Si $\bar{H} \in \bigcup\limits_{m\in\omega} \bar{\Gamma}_{\bar{p}_m}$, existen n, $k \in \omega$ tales que $\bar{H} = \bar{H}_k^n$ y existen infinitos valores de m tales que $j(m) = (n, k)$. Para alguno de estos m se cumplirá que $\bar{t} \subset \mathcal{D}\bar{h}_{m-1}$, con lo que, por construcción, existe un $\bar{h} \in \bar{H} = \bar{H}_k^n$ tal que $\bar{h}' \subset \bar{h}_m \subset h^*$ (luego $\bigwedge k \in \mathcal{D}\bar{h}\ \bar{h}^*(k) < \bar{h}(k)$) y su dominio es disjunto con $\bar{t}$.

Esto termina la definición de $\mathbb{D}(\bar{N}, \bar{\mathbb{P}}, \bar{p}_0)$. Ahora observamos que, en las condiciones del inicio de la demostración, donde hemos partido de una terna $(N, \mathbb{P}, p_0)$ y la hemos colapsado a $(\bar{N}, \bar{\mathbb{P}}, \bar{p}_0)$, si tomamos concretamente el $X_{\bar{s},\bar{\Gamma}}$ determinado por el par $(\bar{s}, \bar{\Gamma})$ que hemos construido, si $\bar{G}$ es el filtro generado por una sucesión $\{\bar{p}_m\}_{m\in\omega}$ en las condiciones indicadas, entonces el filtro G en $\mathbb{P}$ generado por $\phi^{-1}[\bar{G}]$ está, de hecho, generado por la sucesión $\{p_m\}_{m\in\omega}$ en $\mathbb{P} \cap N$ formada por las antiimágenes por ϕ de las condiciones $\bar{p}_m$.

Se trata de una sucesión decreciente de condiciones de alturas cofinales en α, por lo que si llamamos $h^* : \mathrm{Niv}_\alpha T \longrightarrow \mathbb{Q}$ a la función dada por $h^*(s_n) = \bar{h}^*(n)$, la propiedad a) se traduce en que $\bigwedge m \in \omega\ f_{\bar{p}_m}(s_k|_{\alpha'_m}) < h^*(s_k)$, por lo que $f_q = \bigcup\limits_{m\in\omega} f_{p_m} \cup h^*$ es una aproximación de altura α. Para cada $\alpha \leq \gamma < \omega_1$, podemos definir

$$\Gamma_{q,\gamma} = \bigcup_{m\in\omega} \Gamma_{p_m,\gamma},$$

Es claro entonces que Γ_q es una promesa, y la propiedad b) se traduce en que f_q la cumple, pues si $H \in \Gamma_{q,\alpha}$ y $t \subset \mathrm{Niv}_\alpha T$ finito, existe un $m \in \omega$ tal que $H \in \Gamma_{p_m,\alpha}$, luego $\bar{H} \in \bar{\Gamma}_{\bar{p}_m}$. Además podemos definir $\bar{t} = \{k \in \omega \mid s_k \in t\}$, con lo que por b) existe un $\bar{h} \in \bar{H}$ con dominio disjunto con $\bar{t}$ tal que $\bar{h}^* < \bar{h}$, luego $h \in H$ acota a h^*, luego a f_q.

Por consiguiente (f_q, Γ_q) es una condición $q \in \mathbb{P}$ que claramente cumple $q \leq p_m$, para todo $m \in \omega$, luego q acota inferiormente a G.

Esto prueba que $\mathbb{P}$ es $\mathbb{D}$-completo. Para terminar sólo falta ver que $\mathbb{D}$ es numerablemente cerrado. La propiedad se cumple trivialmente para ternas $(\bar{N}, \bar{\mathbb{P}}, \bar{p}_0)$ en el caso trivial de la definición de $\mathbb{D}$. En el caso no trivial tenemos que considerar una familia numerable de pares $\{(\bar{s}^k, \bar{\Gamma}^k)\}_{k\in\omega}$ y demostrar que existe un filtro en $\bigcap\limits_{k\in\omega} X_{(\bar{s}^k, \bar{\Gamma}^k)}$.

Para ello fijamos una biyección $\pi : \omega \longrightarrow \omega \times \omega$, definimos $\bar{s}_n = \bar{s}^{\pi_1(n)}_{\pi_2(n)}$, con lo que $\{\bar{s}_n\}_{n\in\omega}$ incluye los caminos de todas las sucesiones $\bar{s}^k$. Si $\bar{h} \in \bar{H} \in \bar{\Gamma}^k_{\bar{p}}$, definimos $\bar{h}'_k$ como la función definida sobre $\bar{d}'_k = \{\pi^{-1}(k, m) \mid m \in \mathcal{D}\bar{h}\}$ de modo que $\bar{h}'_k(n) = \bar{h}(\pi_2(n))$. Así definimos $\bar{H}'_k = \{\bar{h}'_k \mid \bar{h} \in \bar{H}\}$ y

$$\bar{\Gamma}'^k_{\bar{p}} = \{\bar{H}'_k \mid \bar{H} \in \bar{\Gamma}^k_{\bar{p}}\}, \qquad \bar{\Gamma}_{\bar{p}} = \bigcup_{k\in\omega} \bar{\Gamma}'^k_{\bar{p}}.$$

Es fácil comprobar que $(\bar{s}, \bar{\Gamma})$ así definidos cumplen $(**)$, por lo que determinan un conjunto $X_{(\bar{s},\bar{\Gamma})}$. Vamos a probar que está contenido en $\bigcap\limits_{k\in\omega} X_{(\bar{s}^k,\bar{\Gamma}^k)}$.

En efecto, si $\{\bar{p}_m\}_{m\in\omega}$ es una sucesión que genera un elemento de $X_{(\bar{s},\bar{\Gamma})}$ (es decir, que cumple a) y b) para una cierta función $\bar{h}^* : \omega \longrightarrow \mathbb{Q}$), fijamos un $k \in \omega$ y definimos la función $\bar{h}^*_k : \omega \longrightarrow \mathbb{Q}$ mediante $\bar{h}^*_k(n) = \bar{h}^*(\pi^{-1}(k, n))$. Así, si $n, m \in \omega$, se cumple que

$$f_{\bar{p}_m}(\bar{s}^k_n|_{\alpha'_m}) = f_{\bar{p}_m}(\bar{s}_{\pi^{-1}(k,n)}|_{\alpha'_m}) < \bar{h}^*(\pi^{-1}(k, n)) = \bar{h}^*_k(n),$$

luego $\{\bar{p}_m\}_{m\in\omega}$ y $\bar{h}^*_k$ cumplen la propiedad a) para $(\bar{s}^k, \bar{\Gamma}^k)$.

Similarmente, si $\bar{H} \in \bigcup\limits_{m\in\omega} \bar{\Gamma}^k_{\bar{p}_m}$ y $\bar{t} \subset \omega$ es finito, entonces $\bar{H}'_k \in \bigcup\limits_{m\in\omega} \bar{\Gamma}_{\bar{p}_m}$, y podemos considerar $\bar{t}' = \{\pi(k, n) \mid n \in \bar{t}\}$, con lo que existe $\bar{h}'_k \in \bar{H}'_k$ cuyo dominio es disjunto de $\bar{t}'$ y $\bigwedge n \in \mathcal{D}\bar{h}'_k\ \bar{h}^*(n) < \bar{h}'_k(n)$, pero entonces $\bar{h} \in \bar{H}$ tiene dominio disjunto con $\bar{t}$ y

$$\bigwedge n \in \mathcal{D}\bar{h}\ \bar{h}^*(\pi^{-1}(k, n)) < \bar{h}'_k(\pi^{-1}(k, n)),$$

que a su vez equivale a que $\bigwedge n \in \mathcal{D}\bar{h}\ \bar{h}^*_k(n) < \bar{h}(n)$. Esto prueba que $\{\bar{p}_m\}_{m\in\omega}$ y $\bar{h}^*_k$ cumplen también la propiedad b) para $(\bar{s}^k, \bar{\Gamma}^k)$, luego el filtro generado por la sucesión está en $X_{(\bar{s}^k,\bar{\Gamma}^k)}$. ■

Observaciones Vamos a necesitar algunas consecuencias de la demostración del teorema anterior:

- El c.p.o. $\mathbb{P}$ no es separativo, pero si llamamos $\hat{\mathbb{P}}$ al c.p.o. separativo construido en la prueba de [TC 7.50] a partir de $\mathbb{P}$, sucede que el teorema anterior vale igualmente para $\hat{\mathbb{P}}$.

Observemos en primer lugar que $\hat{\mathbb{P}}$ determina a $\mathbb{P}$ como conjunto, el cual determina a T como árbol, el cual determina a $\mathbb{P}$ como c.p.o., por lo que $\hat{\mathbb{P}}$ determina a $\mathbb{P}$. Esto nos permite modificar la definición de $\mathbb{D}$ distinguiendo un tercer caso, a saber, que $\bar{\mathbb{P}}$ sea de la forma $\hat{\bar{\mathbb{P}}}'$, para un (único) c.p.o. $\bar{\mathbb{P}}'$ asociado a un (único) árbol de Aronszajn T. En tal caso, para cada $\bar{p}_0 \in \bar{\mathbb{P}}$ elegimos un $\bar{p}_0' \in \bar{p}_0$ y definimos

$$\mathbb{D}(\bar{N}, \bar{\mathbb{P}}, \bar{p}_0) = \{\hat{X} \mid X \in \mathbb{D}(\bar{N}, \bar{\mathbb{P}}', \bar{p}_0')\},$$

donde a su vez $\hat{X}$ está formado por los filtros en $\bar{\mathbb{P}}$ generados por las imágenes de los filtros de X. Es claro que $\mathbb{D}$ sigue siendo un sistema de completitud numerablemente completo, y se cumple que $\hat{\mathbb{P}}$ es también $\mathbb{D}$-completo (y separativo).

En efecto, si $\hat{\mathbb{P}} \in N$, $\hat{p}_0 \in \hat{\mathbb{P}} \cap N$ según la definición de $\mathbb{D}$-completitud y $(\bar{N}, \bar{\mathbb{P}}, \bar{p}_0)$ resulta de colapsar $(N, \hat{\mathbb{P}}, \hat{p}_0)$, tenemos que también $\mathbb{P} \in N$, luego podemos considerar su colapso transitivo $\bar{\mathbb{P}}'$, de modo que $\bar{\mathbb{P}} = \hat{\bar{\mathbb{P}}}'$ (y podemos elegir $p_0 \in \mathbb{P}$ de modo que su colapso sea la condición $\bar{p}_0' \in \bar{p}_0$ elegida para la definición de $\mathbb{D}$). Por el teorema anterior $\mathbb{D}(\bar{N}, \bar{\mathbb{P}}', \bar{p}_0')$ contiene un conjunto X tal que las antiimágenes de sus filtros están acotadas inferiormente en $\mathbb{P}$, y es claro entonces que las antiimágenes de los filtros de $\hat{X}$ también están acotadas en $\hat{\mathbb{P}}$ (por la imagen de la cota).

- Sea M un modelo transitivo numerable de ZFC, sea $M[G]$ una extensión genérica de M respecto de un c.p.o. que conserva $\mathcal{P}\omega$, sea $T \in M[G]$ un árbol de Aronszajn$^{M[G]}$ y sea $\mathbb{P} \in M[G]$ el c.p.o. asociado. Entonces, el sistema de completitud $\mathbb{D} \in M[G]$ construido en $M[G]$ según el teorema anterior (y la modificación que hemos definido en la observación precedente) coincide con el definido en M, es decir, $\mathbb{D}^M = \mathbb{D}^{M[G]}$.

En efecto, si $\bar{N} \in M[G]$ es un modelo transitivo numerable de ZFC$-$AP, entonces $\bar{N} \in H(\aleph_1)^{M[G]} = H(\aleph_1)^M \subset M$, luego el dominio de $\mathbb{D}$ está en M. Dada una terna $(\bar{N}, \bar{\mathbb{P}}, \bar{p}_0)$ en dicho dominio que se encuentre en el caso trivial, es claro que todo filtro $\bar{\mathbb{P}}$-genérico sobre $\bar{N}$ que esté en $M[G]$ está de hecho en M (pues $\bar{\mathbb{P}}$ es numerable^M), de donde se sigue que $\mathbb{D}(\bar{N}, \bar{\mathbb{P}}, \bar{p}_0)^{M[G]} = \mathbb{D}(\bar{N}, \bar{\mathbb{P}}, \bar{p}_0)^M$. En el caso no trivial en que $\bar{\mathbb{P}}$ es el c.p.o. asociado a un árbol de Aronszajn, la situación es similar: una comprobación rutinaria muestra que todo par $(\bar{s}, \bar{\Gamma}) \in M[G]$ que define un conjunto $X_{(\bar{s}, \bar{\Gamma})}$ está de hecho en M y la definición de $X_{(\bar{s}, \bar{\Gamma})}$ es absoluta para $M - M[G]$, con lo que igualmente llegamos a que $\mathbb{D}(\bar{N}, \bar{\mathbb{P}}, \bar{p}_0)^{M[G]} = \mathbb{D}(\bar{N}, \bar{\mathbb{P}}, \bar{p}_0)^M$.

Por último, si $\bar{\mathbb{P}} = \hat{\bar{\mathbb{P}}}'$, para un cierto c.p.o. $\bar{\mathbb{P}}'$ asociado a un árbol de Aronszajn, llegamos a la misma conclusión sin más precaución que tomar en M la función con la que elegimos el representante de cada $\bar{p}_0 \in \bar{\mathbb{P}}$.

Las dos observaciones precedentes nos permitirán más adelante aplicar el teorema 11.34 a iteraciones de (c.p.o.s separativos determinados por) c.p.o.s asociados a árboles de Aronszajn. ■

En particular el teorema anterior implica que el c.p.o. $\mathbb{P}$ asociado a un árbol de Aronszajn T es propio.

Un buen ejercicio para el lector sería particularizar la demostración del teorema anterior para probar esto directamente, pues para ello no es necesario considerar colapsos transitivos ni trabajar con pares arbitrarios $(\bar{s}, \bar{\Gamma})$, sino que podemos trabajar directamente con una enumeración $\{s_n\}_{n\in\omega}$ de $\operatorname{Niv}_\alpha T$ y con las promesas de los elementos de $\mathbb{P}$.

Más concretamente, dada cualquier condición $p_0 \in \mathbb{P} \cap N$, podemos definir una sucesión decreciente $\{p_m\}_{m\in\omega}$ de condiciones en $\mathbb{P} \cap N$ junto con funciones $\{h_m\}_{m\in\omega}$ definidas en subconjuntos finitos de $\operatorname{Niv}_\alpha T$ que a su vez definan una función $h^* : \operatorname{Niv}_\alpha T \longrightarrow \mathbb{Q}$ tal que $f_q = \bigcup\limits_{m\in\omega} f_{p_m} \cup h^*$ sea una aproximación que, con la promesa dada por $\Gamma_{q,\gamma} = \bigcup\limits_{m\in\omega} \Gamma_{p_m,\gamma}$ (para $\alpha \leq \gamma < \omega_1$), forme una condición completamente $(N, \mathbb{P})$-genérica $q \leq p_0$.

Y ahora observamos que si fijamos una función finita $\hat{h} : d \subset \operatorname{Niv}_\alpha T \longrightarrow \mathbb{Q}$ que acote a f_{p_0}, podemos formar otra función $\hat{h}'$ con el mismo dominio que siga acotando a f_{p_0} y que sea estrictamente menor que $\hat{h}$, y entonces podemos incorporar $\hat{h}'$ a la definición de h_0 y acabar con que $\hat{h}' \subset h^* \subset f_q$, de modo que f_q está acotada por $\hat{h}$. Usaremos esta observación en la prueba del teorema siguiente:

Teorema 12.21 $\mathbb{P}$ *es α-propio, para todo ordinal numerable α no nulo.*

Demostración: Razonamos por inducción sobre α. Más concretamente, vamos a probar que si $\{N_\delta\}_{\delta<\alpha}$ es una torre de submodelos elementales de un $H(\kappa)$ tal que $\mathbb{P} \in N_0$ (luego también $T \in N_0$), $p \in \mathbb{P} \cap N_0$, $\alpha^* = \bigcup\limits_{\delta<\alpha} (N_\delta \cap \omega_1)$ y $h : d \subset \operatorname{Niv}_{\alpha^*} T \longrightarrow \mathbb{Q}$ acota a f_p, entonces existe una condición $q \leq p$ de altura α^* que es $(N_\delta, \mathbb{P})$-genérica para todo $\delta < \alpha$ y tal que f_q está acotada por h. Teniendo en cuenta la observación precedente al teorema, esto es justo lo que tenemos probado para $\alpha = 1$.

Si se cumple para α es fácil ver que también se cumple para $\alpha + 1$. En efecto, ahora tenemos una torre $\{N_\delta\}_{\delta<\alpha+1}$. Si α es un ordinal límite, entonces es trivial, pues, ante todo, $\alpha^* = (\alpha + 1)^*$, ya que N_α es la unión de los modelos anteriores, y por hipótesis de inducción existe una condición $q \leq p$ de altura α^* que es $(N_\delta, \mathbb{P})$-genérica para todo $\delta < \alpha$ y de modo que f_q está acotada por h. Pero entonces q es trivialmente $(N_\alpha, \mathbb{P})$-genérica, pues todo conjunto predenso en $\mathbb{P}$ que esté en N_α está en un N_δ anterior.

Si $\alpha = \beta + 1$ entonces $\alpha^* < (\alpha + 1)^*$ y podemos definir una función h' sobre las restricciones a $\operatorname{Niv}_{\alpha^*} T$ de los elementos del dominio de h haciendo que sobre cada uno de ellos tome el menor valor que toma h sobre sus extensiones. Es claro que h' también acota a f_p, luego por hipótesis de inducción existe una condición $q_0 \leq p$ de altura α^* que es $(N_\delta, \mathbb{P})$-genérica para todo $\delta \leq \beta$ y acotada por h'.

Ahora usamos que $\{N_\delta\}_{\delta\leq\beta} \in N_\alpha$, $\alpha^* = N_\beta \cap \omega_1 \in N_\alpha$ (pues es el menor ordinal numerable que no está en N_β, y es definible en $H(\kappa)$ a partir de $N_\beta \in N_\alpha$, luego está en N_α) y p, $h' \in N_\alpha$ (porque $T_{\alpha^*} \in N_\alpha$, luego $T_{\alpha^*} \subset N_\alpha$ por ser numerable, luego $h' \in N_\alpha$ por ser finita). Esto implica que la condición q_0 puede tomarse en N_α (y sigue estando acotada por h', luego también por h). Por último, como $\mathbb{P}$ es propio, existe $q \leq q_0$ de altura $N_\alpha \cap \omega_1 = (\alpha+1)^*$ que es $(N_\alpha, \mathbb{P})$-genérica de altura $(\alpha+1)^*$ y acotada por h. Obviamente, como extiende a q_0, es $(N_\delta, \mathbb{P})$-genérica para todo $\delta < \alpha + 1$.

Sea ahora un ordinal límite λ, de modo que $\lambda^* = N_\lambda \cap \omega_1$, y supongamos que $\mathbb{P}$ es α-propio para todo $\alpha < \lambda$. Tenemos una torre $\{N_\delta\}_{\delta<\lambda}$. El razonamiento es esencialmente idéntico al del caso $\alpha = 1$:

Fijamos una sucesión $\{\alpha_m\}_{m\in\omega}$ cofinal creciente en α con $\alpha_0 = 0$ y una enumeración $\{x_m\}_{m<\omega}$ de $\mathrm{Niv}_{\alpha^*} T$. Fijamos también una función $j : \omega \longrightarrow \omega^2$ en las mismas condiciones que antes, es decir, $j(m) = (n, k) \rightarrow n \leq m$ y cada para (n, k) aparece infinitas veces en la sucesión $\{j(m)\}_{m\in\omega}$.

Vamos a definir una sucesión decreciente de condiciones $\{p_m\}_{m\in\omega}$, donde $p_m \in N_{\alpha_m+1}$ tiene altura $(\alpha_m+1)^*$, y es $(N_\delta, \mathbb{P})$-genérica para todo $\delta \leq \alpha_m$, así como una sucesión creciente de funciones $\{h_m\}_{m\in\omega}$ definidas en subconjuntos finitos de $\mathrm{Niv}_{\alpha^*} T$ tales que h_m acota a f_{p_m}, y enumeraciones $\{H_k^m\}_{k\in\omega}$ de los conjuntos Γ_{p_m,α^*}.

Observemos que $(\alpha_0 + 1)^* = 1^* = N_0 \cap \omega_1$. Sea h' la función definida sobre las restricciones a $\mathrm{Niv}_{1^*} T$ de los elementos de $\mathcal{D}h$, a los cuales les asigna el menor valor que toma h sobre sus extensiones.

Por el caso $\alpha = 1$ ya probado, existe una condición $(N_0, \mathbb{P})$-genérica $p_0 \leq p$ de altura $(\alpha_0+1)^* = N_0 \cap \omega_1$ y acotada por h'. Como p, $\mathbb{P}$, N_0, 1^*, $h' \in N_1 \prec H(\kappa)$, podemos exigir que $p_0 \in N_1$. Fijamos una enumeración $\{H_k^0\}_{k\in\omega}$ de Γ_{p_0,α^*}.

Supongamos ahora definidas $p_0, \ldots, p_m$ y $h_0, \ldots, h_{m-1}$ (entendiendo que, en el caso $m = 0$, la función h_{m-1} es una función con el mismo dominio que h pero estrictamente menor y que acote igualmente a p_0). Calculamos $j(m) = (n, k)$. Como $n \leq m$, está definido el requisito $H_k^n \in \Gamma_{p_n,\alpha^*} \subset \Gamma_{p_m,\alpha^*}$ y p_m cumple $H_k^n|_{(\alpha_m+1)^*}$, luego podemos tomar $h' \in H_k^n$ con dominio disjunto del dominio de h_{m-1} y que acote a f_{p_m}. La modificamos hasta una función h'' con el mismo dominio pero de modo que cumpla $\bigwedge x \in \mathcal{D}h''\ h''(x) < h'(x)$. Definimos $h_m = h_{m-1} \cup h''$ y, si $x_m \notin \mathcal{D}h_m$, extendemos h_m para que contenga a x_m de modo que h_m siga acotando a f_{p_m}.

Ahora aplicamos la hipótesis de inducción a la torre $\{N_\delta\}_{\alpha_m+1\leq\delta\leq\alpha_{m+1}}$, a $p_m \in N_{\alpha_m+1}$ y a la función h'_m definida sobre las restricciones a $\mathrm{Niv}_{(\alpha_{m+1}+1)^*} T$ de los elementos de $\mathcal{D}h_m$ que asigna a cada uno de ellos el menor valor que h_m toma sobre sus extensiones. Obtenemos una condición $p_{m+1} \leq p_m$ de altura $(\alpha_{m+1}+1)^*$ acotada por h'_m (luego por h_m) y que es $(N_\delta, \mathbb{P})$-genérica para todo $\alpha_m + 1 \leq \delta \leq \alpha_{m+1}$ (y de hecho para todo $\delta \leq \alpha_{m+1}$, porque extiende a p_m). Como todos los parámetros de estas condiciones están en $N_{\alpha_{m+1}+1}$, podemos tomar $p_{m+1} \in N_{\alpha_{m+1}+1}$. Ahora podemos fijar la enumeración $\{H_k^{m+1}\}_{k\in\omega}$ de $\Gamma_{p_{m+1},\alpha^*}$ y continuar la construcción.

Obtenemos así una función $h^* = \bigcup\limits_{m\in\omega} h_m : \mathrm{Niv}_\alpha T \longrightarrow \mathbb{Q}$ tal que, para cada

$x_k \in \mathrm{Niv}_\alpha T$ y cada $m \geq k$ se cumple que $x_k \in \mathcal{D}h_m$, luego

$$f_{p_m}(x_k|_{(\alpha_m+1)^*}) < h_m(x_k) = h^*(x_k).$$

Esto hace que $f_q = \bigcup\limits_{m\in\omega} f_{p_m} \cup h^*$ sea una aproximación acotada por h. Para cada $\alpha^* \leq \gamma < \omega_1$ definimos

$$\Gamma_{q,\gamma} = \bigcup_{m\in\omega} \Gamma_{p_m,\gamma}.$$

Es claro entonces que Γ_q es una promesa, y f_q la cumple, pues si $H \in \Gamma_{q,\alpha^*}$, existen n, $k \in \omega$ tales que $H = H_k^n$ y existen infinitos valores de m tales que $j(m) = (n, k)$. Fijado $t \subset \mathrm{Niv}_{\alpha^*} T$ finito, para alguno de estos m se cumplirá que $t \subset \mathcal{D}h_{m-1}$, con lo que por construcción existe un $h' \in H = H_k^n$ tal que $h'' \subset h_m \subset h^*$ (con lo que h' acota a f_q) y cuyo dominio es disjunto de t.

Por lo tanto, $q = (f_q, \Gamma_q) \in \mathbb{P}$ tiene altura α^* y extiende a todas las condiciones p_m, luego es $(N_\delta, \mathbb{P})$-genérica para todo $\delta < \alpha$, y f_q está acotada por h. ■

En particular, como $\mathbb{P}$ es propio, el teorema 11.11 nos da que conserva $\aleph_1$, y esto es lo único que nos faltaba para poder demostrar que cumple su finalidad:

Teorema 12.22 $\mathbb{1} \Vdash \check{T}$ *es un árbol de Aronszajn especial.*

Demostración: Basta probar la relativización del teorema a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Fijamos un filtro genérico G y observamos que, como $\aleph_1^{M[G]} = \aleph_1^M$, se cumple que T sigue siendo un $\aleph_1$-árbol en $M[G]$.

Para cada $\alpha < \omega_1^M$, el conjunto $D_\alpha = \{p \in \mathbb{P} \mid \alpha_p \geq \alpha\}$ es denso en $\mathbb{P}$ por el teorema 12.17, luego $G \cap D_\alpha \neq \varnothing$. Esto implica que

$$f_G = \bigcup_{p\in G} f_p : T \longrightarrow \mathbb{Q}$$

es una función estrictamente creciente en $M[G]$. En particular f es inyectiva sobre las cadenas de T, luego T no tiene cadenas no numerables en $M[G]$, es decir, que sigue siendo un árbol de Aronszajn, obviamente especial. ■

Ahora sólo nos falta demostrar que $\mathbb{P}$ es $\aleph_2$-propio sobre isomorfismos. La prueba sería una ligera variante de la prueba de que $\mathbb{P}$ es propio si no fuera porque ésta la hemos obtenido como caso particular de 12.20, por lo que tenemos que particularizar este teorema a lo realmente necesario para demostrar que $\mathbb{P}$ es propio y luego generalizar la prueba para concluir que es $\aleph_2$-propio sobre isomorfismos.

Teorema 12.23 $\mathbb{P}$ *es $\aleph_2$-propio sobre isomorfismos.*

Demostración: Tomemos un cardinal regular κ suficientemente grande, sean N_0, $N_1 \prec H(\kappa)$ submodelos elementales numerables en situación normal respecto de $\aleph_2$ con isomorfismo $I : N_0 \longrightarrow N_1$ de modo que $\mathbb{P} \in N_0 \cap N_1$ y sea $p_0 \in \mathbb{P} \cap N_0$.

Observemos que $T \in N_0 \cap N_1$, porque puede reconstruirse a partir de $\mathbb{P}$. Llamemos $\alpha = \omega_1 \cap N_0 = \omega_1 \cap N_1$. La igualdad se debe a la definición de situación normal pues, como $\omega_1 \in N_0 \cap N_1$, si un $\delta \in \omega_1 \cap N_0$ no estuviera en N_1 entonces sería $\omega_1 < \delta$.

Observemos que si $\delta < \alpha$ entonces $\mathrm{Niv}_\delta T \in N_0 \cap N_1$, luego $\mathrm{Niv}_\delta T \subset N_0 \cap N_1$, porque es numerable, luego el isomorfismo I deja invariantes los elementos de T de altura menor que α. Como también $\mathbb{Q} \subset N_0 \cap N_1$, resulta que I también deja invariantes a las aproximaciones de altura menor que α, y a los requisitos de altura menor que α. Concluimos que si $r \in \mathbb{P} \cap N_0$, entonces $f_{I(r)} = f_r$ y, para cada $\delta < \alpha$, $\Gamma_{I(r),\delta} = \Gamma_{r,\delta}$, donde usamos que son conjuntos numerables.

Fijamos una sucesión $\{\alpha_m\}_{m\in\omega}$ cofinal creciente en α con $\alpha_0 = \alpha_{p_0}$, una enumeración $\{x_m\}_{m\in\omega}$ de $\mathrm{Niv}_\alpha T$ y una enumeración $\{D_m\}_{m\in\omega}$ de todos los abiertos densos en $\mathbb{P}$ que están en N_0. Fijamos una biyección $\bar{\jmath} : \omega \longrightarrow \omega^3$ y definimos $j : \omega \longrightarrow \omega^2$ mediante

$$j(m) = \begin{cases} (n,k) & \text{si } \bar{\jmath}(m) = (n,k,i) \wedge n \leq m, \\ (0,0) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De este modo $j(m) = (n,k) \rightarrow n \leq m$ y cada para (n,k) aparece infinitas veces en la sucesión $\{j(m)\}_{m\in\omega}$. Vamos a definir una sucesión decreciente de condiciones $\{p_m\}_{m\in\omega}$ en $\mathbb{P} \cap N_0$ de alturas $\alpha'_m \geq \alpha_m$, una sucesión $\{h_m\}_{m\in\omega}$ de funciones finitas $h_m : d_m \subset \mathrm{Niv}_\alpha T \longrightarrow \mathbb{Q}$, así como enumeraciones $\{H^m_k\}_{k\in\omega}$ de los conjuntos $\Gamma_{p_m,\alpha} \cup \Gamma_{I(p_m),\alpha}$.

Partimos del p_0 dado y fijamos una enumeración $\{H^0_k\}_{k\in\omega}$ de $\Gamma_{p_0,\alpha} \cup \Gamma_{I(p_0),\alpha}$. Supongamos definidos $p_0, \ldots, p_m$ (con las enumeraciones correspondientes de los $\Gamma_{p_i,\alpha}$) y $h_0, \ldots, h_{m-1}$. Calculamos $j(m) = (n,k)$. Como $n \leq m$, está definido el requisito $H^n_k \in \Gamma_{p_n,\alpha} \cup \Gamma_{I(p_n),\alpha} \subset \Gamma_{p_m,\alpha} \cup \Gamma_{I(p_m),\alpha}$ y la p_m cumple $H^n_k|_{\alpha'_m}$, pues, en el caso de que $H^n_k \in \Gamma_{I(p_n),\alpha}$, tenemos que $H^n_k|_{\alpha'_m} \in \Gamma_{I(p_m),\alpha'_m} = \Gamma_{p_m,\alpha'_m}$. Por lo tanto, podemos tomar $h \in H^n_k$ con dominio disjunto del dominio de h_{m-1} que acote a f_{p_m}. Podemos modificarla hasta una función h' con el mismo dominio pero que cumpla $\bigwedge x \in \mathcal{D}h'\ h'(x) < h(x)$. Definimos $h_m = h_{m-1} \cup h$ y, si $x_m \notin \mathcal{D}h_m$ extendemos h_m para que esté definida sobre x_m y siga acotando a f_{p_m}.

Ahora usamos el teorema 12.19 para obtener $p_{m+1} \in D_m \cap N_0$ acotada por h_m tal que $p_{m+1} \leq p_m$. En la prueba del teorema se ve que podemos tomar p_{m+1} de altura arbitrariamente grande (menor que α). Por lo tanto, podemos suponer que $\alpha'_{p_{m+1}} = \alpha_{p_{m+1}} \geq \alpha_{m+1}$. Ahora podemos fijar la enumeración $\{H^{m+1}_k\}_{k\in\omega}$ de $\Gamma_{p_{m+1},\alpha} \cup \Gamma_{I(p_{m+1}),\alpha}$ y continuar la construcción.

Obtenemos así una función $h^* = \bigcup\limits_{m\in\omega} h_m : \mathrm{Niv}_\alpha T \longrightarrow \mathbb{Q}$ tal que, para cada $x_k \in \mathrm{Niv}_\alpha T$ y cada $m \geq k$ se cumple que $x_k \in \mathcal{D}h_m$, luego

$$f_{p_m}(x_k|_{\alpha'_m}) < h_m(x_k) = h^*(x_k).$$

Esto hace que $f_q = \bigcup_{m\in\omega} f_{p_m} \cup h^*$ sea una aproximación. Para cada $\alpha \leq \gamma < \omega_1$ definimos

$$\Gamma_{q,\gamma} = \bigcup_{m\in\omega} (\Gamma_{p_m,\gamma} \cup \Gamma_{I(p_m),\gamma}).$$

Es claro entonces que Γ_q es una promesa y f_q la cumple, pues si $H \in \Gamma_{q,\alpha}$, existen n, $k \in \omega$ tales que $H = H_k^n$ y existen infinitos valores de m tales que $j(m) = (n, k)$. Fijado $t \subset \mathrm{Niv}_\alpha T$ finito, para alguno de estos m se cumplirá que $t \subset \mathcal{D}h_{m-1}$, con lo que por construcción existe un $h \in H = H_k^n$ tal que $h' \subset h_m \subset h^*$ (con lo que h acota a f_q) y cuyo dominio es disjunto de t.

Por construcción tenemos que $q \leq p_m$ y $q \leq I(p_m)$, para todo $m \in \omega$. En efecto, por una parte, f_q extiende a cada $f_{p_m} = f_{I(p_m)}$ y, por otra parte, si $\alpha \leq \gamma < \omega_1$, trivialmente $\Gamma_{p_m,\gamma} \subset \Gamma_q$ y $\Gamma_{I(p_m),\gamma} \subset \Gamma_q$.

Sea G^* el filtro en $\mathbb{P}$ generado por la sucesión $\{p_m\}_{m\in\omega}$. Claramente es $(N_0, \mathbb{P})$-genérico, pues si $D \in N_0$ es abierto denso en $\mathbb{P}$, existe un $m \in \omega$ tal que $D = D_m$, y entonces tenemos que $p_m \in G^* \cap D \cap N_0$. Como G^* está acotado inferiormente por q, concluimos que q es completamente $(N_0, \mathbb{P})$-genérica y en particular $(N_0, \mathbb{P})$-genérica. Para probar que es $(N_0, N_1, \mathbb{P})$-genérica relativizamos la prueba a un modelo transitivo numerable M de ZFC y tomamos un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $q \in G$. Tenemos que probar que $\bigwedge r \in N_0 \cap \mathbb{P}(r \in G \leftrightarrow I(r) \in G)$.

Observemos que $G^* \subset G$ y que $G \cap N_0 = G^* \cap N_0$, pues si consideramos el colapso transitivo $\phi : N_0 \longrightarrow \bar{N}_0$, entonces $\bar{G}^* \subset \bar{G}$ son dos filtros $\bar{\mathbb{P}}$-genéricos sobre $\bar{N}_0$, luego son iguales. Así pues, $r \in N_0 \cap G$ si y sólo si existe un $m \in \omega$ tal que $p_m \leq r$, luego $q \leq I(p_m) \leq I(r)$, luego $I(r) \in G$. Igualmente se prueba la implicación opuesta. ∎

Nota Si llamamos $\hat{\mathbb{P}}$ al c.p.o. separativo construido a partir de $\mathbb{P}$ en la prueba del teorema [TC 7.50], se cumple que también es $\aleph_2$-propio sobre isomorfismos. En efecto, si $\hat{\mathbb{P}} \in N_0 \cap N_1$, para dos submodelos elementales numerables de un $H(\kappa)$ en situación normal respecto de $\aleph_2$ y $\bar{p}_0 \in \hat{\mathbb{P}} \cap N_0$, entonces $T \in N_0 \cap N_1$, pues T puede reconstruirse a partir de $\hat{\mathbb{P}}$, luego también $\mathbb{P} \in N_0 \cap N_1$, y podemos tomar $p_0 \in \bar{p}_0 \cap N_0$. Por el teorema anterior existe una condición $(N_0, N_1, \mathbb{P})$-genérica $q \leq p_0$, y basta probar que su clase $\bar{q} \in \hat{\mathbb{P}}$ es $(N_0, N_1, \hat{\mathbb{P}})$-genérica, pues ciertamente $\bar{q} \leq \bar{p}_0$.

La comprobación es trivial. Por ejemplo, $q \Vdash \check{N}_0[\Gamma] \cap \check{V} = \check{N}_0$, luego lo mismo vale para $\bar{q}$, y esto significa que $\bar{q}$ es $(N_0, \hat{\mathbb{P}})$-genérico (e igualmente resulta ser $(N_1, \hat{\mathbb{P}})$-genérico). Por otra parte tenemos que

$$q \Vdash \bigwedge r \in \check{N}_0 \cap \check{\mathbb{P}}\, (r \in \Gamma \leftrightarrow \check{h}(r) \in \Gamma),$$

donde $h : N_0 \longrightarrow N_1$ es el isomorfismo que cumple la definición de situación normal. Para probar el hecho análogo para $\bar{q}$ relativizamos la prueba a un modelo transitivo numerable M de ZFC y tomamos un filtro $\hat{\mathbb{P}}$-genérico sobre M tal que $\bar{q} \in \hat{G}$. Entonces, llamando $i : \mathbb{P} \longrightarrow \hat{\mathbb{P}}$ a la inmersión suprayectiva natural, se cumple que $G = i^{-1}[\hat{G}]$ es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $q \in G$, luego $\bigwedge r \in N_0 \cap \mathbb{P}\,(r \in G \leftrightarrow h(r) \in G)$. Si $\bar{r} \in \overline{N_0 \cap \hat{\mathbb{P}}}$, entonces $\bar{r} \in \hat{G}$ si y sólo si $r \in G$, si y sólo si $h(r) \in G$, si y sólo si $h(\bar{r}) = \overline{h(r)} \in \hat{G}$, luego, ciertamente

$$\bigwedge r \in N_0 \cap \hat{\mathbb{P}}\,(r \in \hat{G} \leftrightarrow h(r) \in \hat{G}).$$

■

Definición 12.24 A partir de aquí, si T es un árbol de Aronszajn, llamaremos $\mathbb{P}_T$ al c.p.o. $\hat{\mathbb{P}}$ que acabamos de considerar en la nota precedente. Tenemos demostrado lo siguiente:

a) $\mathbb{P}_T$ es un c.p.o. separativo y α-propio (para todo ordinal $\alpha < \omega_1$).

b) $\mathbb{P}_T$ es $\mathbb{D}$-completo, para un cierto sistema de completitud numerablemente completo $\mathbb{D}$ y, más aún, si tomamos $\mathbb{P}_T$ en una extensión genérica $M[G]$ de un modelo transitivo numerable M de ZFC respecto de un c.p.o. que conserva $\mathcal{P}\omega$, entonces $\mathbb{D} \in M$.

c) $\mathbb{P}_T$ es $\aleph_2$-propio sobre isomorfismos.

d) $\mathbb{1} \Vdash \check{T}$ es un árbol de Aronszajn especial.

Además, es fácil ver que $|\mathbb{P}_T| \leq 2^{\aleph_1}$. En efecto, basta acotar el c.p.o. $\mathbb{P}$ asociado a T, pues al pasar a $\hat{\mathbb{P}}$ el cardinal resultante será menor o igual. Observamos que el número de aproximaciones

$$f : \bigcup_{\delta<\alpha+1} \mathrm{Niv}_\delta\, T \longrightarrow \mathbb{Q}$$

es a lo sumo $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ y, como $\alpha < \omega_1$, al variar α obtenemos a lo sumo $\aleph_1 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. A su vez, el número de aplicaciones finitas $h : d \subset \mathrm{Niv}_\gamma\, T \longrightarrow \mathbb{Q}$ es $\aleph_0$, luego el número de requisitos de altura γ es a lo sumo $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, luego si Γ es una promesa, las posibilidades para Γ_γ son a lo sumo $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ y las posibilidades para Γ son a lo sumo $(2^{\aleph_0})^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1}$, luego a lo sumo hay $2^{\aleph_0}2^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1}$ condiciones en $\mathbb{P}$.

Estos son todos los ingredientes que necesitamos para adaptar la prueba de la consistencia del axioma de Martin para construir una iteración que especialice todos los árboles de Aronszajn conservando la hipótesis del continuo:

Teorema 12.25 *Sea M un modelo transitivo numerable de* ZFC *en la que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Entonces existe una extensión genérica N de M que tiene los mismos cardinales y cofinalidades, la misma función del continuo y en la que todo árbol de Aronszajn es especial.*

Demostración: Llamemos $\kappa = (2^{\aleph_1})^M$. En todo lo que sigue ω_1 representará en realidad a ω_1^M. Vamos a definir una iteración $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\kappa}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\kappa})$ con soportes numerables y una sucesión $\{\sigma_\delta\}_{\delta<\kappa}$ de modo que $\sigma_\delta \in M^{\mathbb{P}_\delta}$ y, si llamamos $\tau_\delta = \mathrm{p.o.}(\breve{\omega}_1, \sigma_\delta)$, entonces

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \tau_\delta \text{ es un árbol de Aronszajn} \land \pi_\delta \text{ es el c.p.o. que especializa a } \tau_\delta.$$

Así, los resultados de este capítulo y el precedente (véase 11.34) implican que cada $\mathbb{P}_\delta$ es propio (luego conserva $\aleph_1$) y conserva $\mathcal{P}\omega$ (luego $\mathbb{1}_\delta \Vdash 2^{\aleph_0} = \aleph_1$), así como que tiene la c.c. $\aleph_2$ (por 11.46), luego conserva cardinales y cofinalidades (por 5.6).

Vamos a ver que en estas circunstancias (razonando en M), para cada $\delta < \kappa$, existe un conjunto $\bar{\pi}_\delta \subset \hat{\pi}_\delta$ tal que $|\bar{\pi}_\delta| \leq \kappa$ y para todo $\sigma \in \hat{\pi}_\delta$ existe un $\bar{\sigma} \in \bar{\pi}_\delta$ tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \sigma = \bar{\sigma}$. Podemos suponer además que $\mathbb{1}_{\pi_\delta} \in \bar{\pi}_\delta$.

Admitiendo esto, el subconjunto $\overline{\mathbb{P}}_\delta \subset \mathbb{P}_\delta$ formado por $p \in \mathbb{P}_\delta$ tales que $\bigwedge \epsilon < \delta\ p(\epsilon) \in \bar{\pi}_\epsilon$ es denso en $\mathbb{P}_\delta$. En efecto, dada cualquier condición $p \in \mathbb{P}_\delta$, podemos formar otra condición $\bar{p}$ de modo que $\bigwedge \epsilon < \delta\ \mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \bar{p}(\epsilon) = p(\epsilon)$, y es claro entonces que, ciertamente, $\bar{p} \in \mathbb{P}_\delta$ (y entonces de hecho $\bar{p} \in \overline{\mathbb{P}}_\delta$) y $\bar{p} \leq p \wedge p \leq \bar{p}$.

Además, se cumple que $|\overline{\mathbb{P}}_\delta| \leq \kappa$. En efecto, para $\overline{\mathbb{P}}_0 = \{\mathbb{1}\}$ es trivial. Si vale para δ, entonces $|\overline{\mathbb{P}}_{\delta+1}| = |\overline{\mathbb{P}}_\delta \times \bar{\pi}_\delta| \leq \kappa$, y si vale para todo $\delta < \lambda \leq \kappa$, entonces λ tiene $\kappa^{\aleph_0} = (2^{\aleph_1})^{\aleph_0} = \kappa$ subconjuntos numerables. Para cada uno de ellos, digamos s, (un posible soporte de una condición), $\bigcup\limits_{\delta \in s} \bar{\pi}_\delta$ tiene cardinal κ, luego hay a lo sumo $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$ condiciones en $\overline{\mathbb{P}}_\lambda$ con soporte s, luego hay a lo sumo $\kappa \cdot \kappa = \kappa$ condiciones en $\overline{\mathbb{P}}_\lambda$.

A su vez, si $\nu \geq \aleph_1$ es un cardinal (siempre en M), el teorema 5.20 nos da que el número de buenos $\overline{\mathbb{P}}_\delta$-nombres para subconjuntos de $\check{\nu}$ es a lo sumo

$$|\overline{\mathbb{P}}_\delta|^{<\aleph_2 \nu} \leq |\overline{\mathbb{P}}_\delta|^{\aleph_1 \nu} \leq (2^{\aleph_1})^\nu = 2^\nu,$$

y el teorema 5.22 nos da entonces que, en una extensión genérica $M[G]$ de M (respecto de $\overline{\mathbb{P}}_\delta$, se cumplirá que $(2^\nu)^{M[G]} \leq (2^\nu)^M$, y la otra desigualdad es trivial. Obviamente, lo mismo vale para extensiones respecto de $\mathbb{P}_\delta$, pues son las mismas, y por lo tanto la función del continuo se conserva en todos los pasos de la iteración.

Probamos inductivamente la existencia de los conjuntos $\bar{\pi}_\delta$. Para ello suponemos que ya los hemos obtenido para ordinales $\epsilon < \delta$, lo cual implica, según hemos visto, que $\mathbb{P}_\delta$ conserva la función del continuo. En particular, si G_δ es un filtro $\mathbb{P}_\delta$-genérico sobre M, tenemos que en $M[G_\delta]$ se cumple que $2^{\aleph_1} = \kappa$, luego $|(\pi_\delta)_{G_\delta}| \leq \kappa$, luego

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \bigvee f\ f : \check{\kappa} \longrightarrow \pi_\delta \text{ suprayectiva} \wedge f(0) = \mathbb{1}_{\pi_\delta},$$

luego podemos tomar un nombre ϕ_δ tal que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \phi_\delta : \check{\kappa} \longrightarrow \pi_\delta \text{ suprayectiva} \wedge \phi_\delta(0) = \mathbb{1}_{\pi_\delta}.$$

Para cada $\alpha \in \kappa$, tenemos que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \bigvee x \in \pi_\delta\ x = \phi_\delta(\check{\alpha})$, luego existe un $\xi_\alpha \in \hat{\pi}_\delta$ tal que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \xi_\delta = \phi_\delta(\check{\alpha})$. Concretamente, podemos elegir $\xi_0 = \mathbb{1}_{\pi_\delta}$. Ahora basta tomar $\bar{\pi}_\delta = \{\xi_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$.

Con esto tenemos probado que cualquier iteración de c.p.o.s en las condiciones descritas conserva la función del continuo en todos sus niveles. Más aún, se cumple que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\kappa} \Vdash i_{\delta\kappa}(\tau_\delta) \text{ es un árbol de Aronszajn especial.}$$

En efecto, si G es un filtro $\mathbb{P}_\kappa$-genérico sobre M, en principio sabemos que $T = \tau_{\delta\, G_\delta}$ es un árbol de Aronszajn en $M[G_\delta]$ y que $\mathbb{Q}_\delta = \pi_{\delta,\, G_\delta}$ es el c.p.o. que lo especializa, por lo que T es un árbol de Aronszajn especial en $M[G_{\delta+1}]$, y esto sigue siendo trivialmente cierto en $M[G]$ (teniendo en cuenta que $\aleph_1$ se conserva).

Así pues, lo único que tenemos que cuidar es definir adecuadamente la iteración para que todo árbol de Aronszajn en $M[G]$ sea isomorfo a uno de los árboles $i_{\delta\kappa}(\tau_\delta)_G$. Pero vamos a simplificar un poco este objetivo. Sea $T \in M[G]$ un árbol de Aronszajn. Entonces $(|T| = \aleph_1)^{M[G]}$, luego podemos construir un árbol isomorfo de la forma $(\omega_1, R) \in M[G]$, para cierta relación $R \subset \omega_1 \times \omega_1$. Obviamente, T será especial si y sólo si lo es (ω_1, R), luego podemos restringirnos a considerar árboles de esta forma. Fijamos una biyección $f : \omega_1 \times \omega_1 \longrightarrow \omega_1$ tal que $f \in M$ y consideramos $R^* = f[R] \in M[G]$. Entonces $R^* = \rho_G$, donde $\rho \in M^{\mathbb{P}_\kappa}$ es un buen nombre para un subconjunto de $\check{\omega}_1$, que será de la forma $\rho = \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} \{\check{\alpha}\} \times A_\alpha$, donde cada A_α es una anticadena en $\mathbb{P}_\kappa$. Como $\mathbb{P}_\kappa$ cumple la c.c. $\aleph_2$, tenemos que $|A_\alpha| \leq \aleph_1$, luego $\bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} \bigcup\limits_{p\in A_\alpha} \operatorname{sop} p$ tiene cardinal $\leq \aleph_1$, pero $\operatorname{cf} \kappa = \operatorname{cf} 2^{\aleph_1} > \aleph_1$, luego existe un $\alpha < \kappa$ tal que $\rho = i_{\alpha\kappa}(\rho')$, para cierto $\rho' \in M^{\mathbb{P}_\alpha}$, luego $R^* = \rho'_{G_\alpha} \in M[G_\alpha]$, luego $(\omega_1, R) \in M[G_\alpha]$.

Concluimos que, para que todo árbol de Aronszajn en $M[G]$ sea especial basta con que todo árbol de Aronszajn de la forma $(\omega_1, R) \in M[G_\alpha]$ es especial, para todo $\alpha < \kappa$.

Finalmente construimos la iteración. Para ello consideramos una función $f : \kappa \longrightarrow \kappa \times \kappa$ suprayectiva, $f \in M$, tal que

$$\bigwedge \alpha\beta\gamma \in \kappa (f(\alpha) = (\beta, \gamma) \rightarrow \beta \leq \alpha).$$

(Véase la prueba de 7.35.) Además de $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq\kappa}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\kappa})$ y $\{\sigma_\delta\}_{\delta<\kappa}$, vamos a construir una sucesión $\{\{\leq^\delta_\epsilon\}_{\epsilon<\kappa}\}_{\delta<\kappa}$ de modo que $\{\leq^\delta_\epsilon\}_{\epsilon<\kappa}$ sea una enumeración de todos los buenos $\mathbb{P}_\delta$-nombres de subconjuntos de $\omega_1 \check{\times} \omega_1$. Observemos que hemos probado que hay a lo sumo κ, y obviamente tiene que darse la igualdad, pero en cualquier caso podríamos admitir repeticiones.

Tomamos $\mathbb{P}_0 = \{\varnothing\}$ y elegimos una enumeración $\{\leq^0_\epsilon\}_{\epsilon<\kappa}$ de todos los buenos $\mathbb{P}_0$-nombres para subconjuntos de $\omega_1 \check{\times} \omega_1$.

Supongamos construida la iteración $(\{\mathbb{P}_\beta\}_{\beta\leq\alpha}, \{\pi_\beta\}_{\beta<\alpha})$, junto con las sucesiones $\{\sigma_\beta\}_{\beta<\alpha}$ y $\{\{\leq^\beta_\epsilon\}_{\epsilon<\kappa}\}_{\beta\leq\alpha}$, para un $\alpha < \kappa$. Calculamos entonces el par $f(\alpha) = (\beta, \gamma)$ y, como $\beta \leq \alpha$, está definido $\leq^\beta_\gamma$. Claramente podemos tomar $\sigma_\alpha \in M^{\mathbb{P}_\alpha}$ de modo que

$$\mathbb{1} \Vdash (\omega_1, \sigma_\alpha) \text{ es un árbol de Aronszajn } \wedge$$

$$((\omega_1, i^\alpha_\beta(\leq^\beta_\gamma)) \text{ es un árbol de Aronszajn} \rightarrow \sigma_\alpha = i^\alpha_\beta(\leq^\beta_\gamma)).$$

A su vez, podemos tomar $\pi_\alpha \in M^{\mathbb{P}_\alpha}$ tal que

$$\mathbb{1} \Vdash \pi_\alpha \text{ es el c.p.o. que especializa a } (\omega_1, \sigma_\alpha).$$

Con esto queda definida la iteración $(\{\mathbb{P}_\beta\}_{\beta\leq\alpha+1}, \{\pi_\beta\}_{\beta<\alpha+1})$ junto con la sucesión $\{\sigma_\beta\}_{\beta<\alpha+1}$, y podemos elegir una enumeración $\{\leq^{\alpha+1}_\epsilon\}_{\epsilon<\kappa}$ de todos los buenos $\mathbb{P}_{\alpha+1}$-nombres para subconjuntos de $\omega_1 \check{\times} \omega_1$.

Para ordinales límite la iteración está completamente determinada por la propia definición de iteración (con soportes numerables). Sólo falta probar que la iteración cumple lo requerido, es decir, tomamos un filtro $\mathbb{P}_\kappa$-genérico G, un $\beta < \kappa$ y un árbol de Aronszajn $(\omega_1, R) \in M[G_\beta]$. Entonces $R = (\leq^\beta_\gamma)_{G_\beta}$, para cierto γ. Consideramos un $\alpha < \kappa$ que cumpla $f(\alpha) = (\beta, \gamma)$, con lo que

$$\mathbb{1} \Vdash (\omega_1, i^\alpha_\beta(\leq^\beta_\gamma)) \text{ es un árbol de Aronszajn,}$$

luego $\mathbb{1} \Vdash \sigma_\alpha = i^\alpha_\beta(\leq^\beta_\gamma)$, luego $(\tau_\alpha)_{G_\alpha} = (\omega_1, R)$, luego, según hemos visto, (ω_1, R) es especial en $M[G_{\alpha+1}]$ y también en $M[G]$. ■

Así pues, que todo árbol de Aronszajn sea especial, y en particular la hipótesis de Suslin, es consistente con $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ y con cualquier determinación del resto de la función del continuo que podamos conseguir en un modelo. En particular tenemos la consistencia de ZFC + HCG + HS, y por lo tanto podemos concluir que $2^{\aleph_0} = \aleph_1 \not\rightarrow \Diamond$.

Capítulo XIII

El axioma de los preórdenes propios

El axioma de Martin afirma que para toda familia $\mathcal{D}$ de menos de $2^{\aleph_0}$ conjuntos densos en un c.p.o. $\mathbb{P}$ con la c.c.n. existe un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathcal{D}$. La exigencia de que el c.p.o. cumpla la c.c.n. no se puede suprimir sin más, pero cabe plantearse la posibilidad de relajarla a otra condición más débil sin que el axioma así generalizado deje de ser consistente con ZFC. Sucede que existen varias generalizaciones de AM en este sentido cuya consistencia sólo puede ser probada suponiendo la de algunos cardinales grandes. Aquí estudiaremos una de ellas.

13.1 La consistencia de APP

Según 11.10, todo c.p.o. con la c.c.n. es propio, luego una posible generalización de AM se obtiene reemplazando "c.c.n." por "propio". En realidad, lo máximo que podemos aspirar en esta línea es a probar la consistencia del axioma siguiente:

Axioma de los preórdenes propios (APP) *Para cada c.p.o. propio $\mathbb{P}$ y toda familia $\mathcal{D}$ de a lo sumo $\aleph_1$ subconjuntos densos en $\mathbb{P}$, existe un filtro $\mathbb{P}$–genérico sobre $\mathcal{D}$ (es decir, un filtro en $\mathbb{P}$ que corta a todos los elementos de $\mathcal{D}$).*

Notemos que ahora no consideramos familias de menos de $2^{\aleph_0}$ conjuntos densos, como en AM, sino únicamente de $\aleph_1$ conjuntos densos. La razón es que APP para familias de $\aleph_2$ conjuntos densos es obviamente contradictorio. Basta considerar $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega_1, \omega_2, \aleph_1)$, que es un c.p.o. $\aleph_1$-cerrado, luego propio, por el teorema 11.10, pero si toda familia de $\aleph_2$ conjuntos densos en $\mathbb{P}$ tuviera un filtro genérico podríamos construir una $f : \omega_1 \longrightarrow \omega_2$ suprayectiva.

Así pues, sería más justo decir que APP extiende a $\mathrm{AM}(\aleph_1)$ y no a todo AM, pero en realidad sí que es una generalización de AM porque vamos a demostrar que $\mathrm{APP} \rightarrow 2^{\aleph_0} = \aleph_2$. De momento, lo que es inmediato es que $\mathrm{APP} \rightarrow \mathrm{AM}(\aleph_1)$, luego en particular, $\mathrm{APP} \rightarrow 2^{\aleph_0} \geq \aleph_2$.

En primer lugar vamos a demostrar la consistencia de APP a partir de la consistencia de que exista un cardinal supercompacto. Se desconoce si es posible probar la consistencia de APP a partir de un cardinal más débil.

Teorema 13.1 *Si M es un modelo transitivo numerable de* ZFC *en el que existe un cardinal supercompacto, entonces existe una extensión genérica de M en la que se cumple* APP.

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : \kappa \longrightarrow V_\kappa^M$ una función en las condiciones del teorema [CG 10.18]. Consideramos la iteración de c.p.o.s $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta<\kappa}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\kappa})$ con soportes numerables determinada como sigue: Si $f(\delta) = \pi$, con $\pi \in M^{\mathbb{P}_\delta}$ y

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi \text{ es un c.p.o. propio y separativo}$$

entonces $\pi_\delta = \pi$, y en caso contrario π_δ es un $\mathbb{P}_\delta$-nombre para un c.p.o. trivial.

El teorema 11.21 nos da que $\mathbb{P}_\kappa$ es propio y 11.46 implica que cumple la c.c. κ. En efecto, dado $\delta < \kappa$, es claro que $\mathbb{P}_\delta$, $\pi_\delta \in V_\kappa^M$, luego existe un cardinal μ inaccesible^M tal que $\mathbb{P}_\delta$, $\pi_\delta \in V_\mu^M$, y entonces, si G es $\mathbb{P}_\delta$-genérico sobre M, se cumple que $(\pi_\delta)_G \in V_\mu^{M[G]}$ (por [CG 10.16]), y μ sigue siendo inaccesible $M[G]$, luego $|(\pi_\delta)_G|^{M[G]} < \mu < \kappa$, luego por 11.39 tenemos que $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \pi_\delta$ es $\check{\kappa}$-propio sobre isomorfismos, luego 11.46 es aplicable.

Sea G un filtro $\mathbb{P}_\kappa$-genérico sobre M. Por 11.11 tenemos que $\aleph_1^M = \aleph_1^{M[G]}$ y por la c.c. κ sabemos también que κ es un cardinal en $M[G]$.

Veamos que en $M[G]$ se cumple el APP. Basta probar que es cierto para c.p.o.s propios y separativos, pues todo c.p.o. propio puede sumergirse densamente en otro que sea propio y separativo (un álgebra de Boole completa, por ejemplo). Sea, pues, $\mathbb{Q} \in M[G]$ un c.p.o. propio y separativo. Podemos expresarlo en la forma $\mathbb{Q} = \pi_G$, donde $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\kappa} \Vdash \pi$ es propio y separativo.

Tomemos un cardinal regular^M ν tal que $\pi \in H_\nu$ y sea $\mu > 2^{2^\nu}$. Por el teorema [CG 10.18] existe una medida normal U en $\mathcal{P}^{<\kappa}\mu$ tal que $j_U(f)(\kappa) = \pi$, donde $j_U : M \longrightarrow N = \mathrm{Ult}_U(M)$ es la inmersión natural en la ultrapotencia. Tenemos además que $N^\mu \cap M \subset N$.

Como la iteración $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta<\kappa}, \{\pi_\delta\}_{\delta<\kappa})$ está contenida en V_κ y j_U fija a V_κ, tenemos que su imagen por j_U es una sucesión cuyos primeros términos son los mismos, es decir, $j(\mathbb{P})_\delta = j(\mathbb{P}_\delta)$. Esto vale también para $\mathbb{P}_\kappa$ porque, al igual que $j(\mathbb{P})_\kappa$, es el límite de los c.p.o.s anteriores con soportes numerables. En definitiva, podemos llamar $(\{\mathbb{P}_\delta\}_{\delta\leq j_U(\kappa)}, \{\pi_\delta\}_{\delta<j_U(\kappa)})$ a la imagen por j_U de la iteración que hemos construido, que es una iteración de c.p.o.s en N que cumple la misma definición (con $j_U(f)$ en el lugar de f). En particular $\mathbb{P}_\kappa \in N$.

Veamos ahora que $(\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\kappa} \Vdash \pi \text{ es propio y separativo})^N$.

Si G es un filtro $\mathbb{P}_\kappa$-genérico sobre N, entonces lo es sobre M, pues M y N tienen los mismos subconjuntos de $\mathbb{P}_\kappa$. Por el teorema [CG 10.20] se cumple que $N[G]^\mu \cap M[G] \subset N[G]$.

Sabemos que $\mathbb{Q} = \pi_G$ es propio y separativo en $M[G]$ y tenemos que probar que lo mismo vale en $N[G]$. Ser separativo es absoluto, luego sólo hay que asegurar que $\mathbb{Q}$ es propio. Para ello nos fijamos en la caracterización 11.14 c), según la cual para que $\mathbb{Q}$ sea propio en $N[G]$ basta con que $\xi = ((2^{|\mathbb{Q}|})^+)^{N[G]}$ cumpla que para todo $N \prec H(\xi)^{N[G]}$ numerable tal que $\mathbb{Q} \in N$ y todo $p \in \mathbb{Q} \cap N$ exista una condición $q \leq p$ que sea $(N, \mathbb{Q})$-genérica, y sabemos que esto se cumple con $M[G]$ en lugar de $N[G]$. Ahora basta observar que, como $\xi < \mu$, se cumple $\xi = ((2^{|\mathbb{Q}|})^+)^{M[G]}$ y $H(\xi)^{N[G]} = H(\xi)^{M[G]}$, y que todo lo demás es absoluto.

A partir de aquí G vuelve a ser el filtro genérico tomado al principio. Como $j_U(f)(\kappa) = \pi$ y $(\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\kappa} \Vdash \pi \text{ es propio y separativo})^N$, la definición de la iteración (relativizada ahora a N) nos da que $\pi_\kappa = \pi$. El teorema 11.26 (junto con 7.29) nos permite factorizar la iteración en N:

$$\mathbb{P}_{j(\kappa)} \cong \mathbb{P}_{\kappa+1} * \rho \cong \mathbb{P}_\kappa * \pi * \rho,$$

para cierto nombre ρ. Sea H un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[G]$, que en particular será $\mathbb{Q}$-genérico sobre $N[G]$. En $N[G][H] \subset M[G][H]$ podemos considerar el c.p.o. $\mathbb{R} = \rho_{G*H}$. Sea K un filtro $\mathbb{R}$-genérico sobre $M[G][H]$, luego también sobre $N[G][H]$. Por consiguiente $G*H*K$ es un filtro $j_U(\mathbb{P}_\kappa)$-genérico sobre N y $j_U[G] \subset G*H*K$, pues los soportes de $\mathbb{P}_\kappa$ son numerables, luego todo $p \in \mathbb{P}_\kappa$ es de la forma $i_{\alpha\kappa}(p_\alpha)$, para un cierto $\alpha < \kappa$, luego $j_U(p) = i_{\alpha\, j(\kappa)}(p_\alpha) = i_{\kappa\, j(\kappa)}(p)$, luego si $p \in G$ se cumple que $j(p) \in G * H * K$.

El teorema [CG 10.12] nos da entonces que j_U se extiende a una inmersión elemental

$$j : M[G] \longrightarrow N[G * H * K].$$

Observemos que $j[H] \in N[G * H * K]$. En efecto,

$$j[H] = \{j_U(\sigma)_{G*H*K} \mid \sigma \in \mathcal{D}\pi \wedge \bigvee p \in G\ (\sigma, p) \in \pi\},$$

y basta ver que $j_U|_{\mathcal{D}\pi} \in N$. Pero claramente $j_U|_{\mathcal{D}\pi} \subset N$, $j_U|_{\mathcal{D}\pi} \in M$ (porque j_U es definible en M) y su cardinal en M es menor que μ, luego basta tener en cuenta que $N^\mu \cap M \subset N$. Es claro que $j[H]$ genera un filtro H' en $j(\mathbb{Q})$, que obviamente cumple $H' \in N[G * H * K]$.

Consideremos ahora cualquier familia $\mathcal{D} = \{D_\alpha\}_{\alpha<\beta} \in M[G]$, con $\beta < \kappa$, de subconjuntos densos en $\mathbb{Q}$. Como H es $\mathbb{Q}$-genérico sobre $M[G]$, tenemos que corta a todos los conjuntos D_α, luego el filtro H' corta a todos los elementos de $j(\{D_\alpha\}_{\alpha<\beta}) = \{j(D_\alpha)\}_{\alpha<\beta}$ (y aquí es esencial que $\beta < \kappa$ por lo que $j(\beta) = \beta$ y no aparecen términos nuevos). Así pues, en $N[G * H * K]$ existe un filtro $j(\mathbb{Q})$-genérico sobre $j(\mathcal{D})$. Como j es una inmersión elemental, en $M[G]$ existe un filtro $\mathbb{Q}$-genérico sobre $\mathcal{D}$. ■

Observaciones En la prueba del teorema anterior hemos visto que $M[G]$ cumple APP para familias de menos de κ conjuntos densos. Como no puede cumplirse para familias arbitrarias de $\aleph_2$ conjuntos densos, ha de ser $\kappa = \aleph_2^{M[G]}$, por lo que todos los cardinales comprendidos estrictamente entre $\aleph_1$ y el supercompacto κ se colapsan en $M[G]$. Es fácil razonar también que en $M[G]$ se cumple $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, pero, como ya hemos adelantado, esto es en realidad una consecuencia de APP. ■

13.2 El principio de reflexión de aplicaciones

En lugar de probar directamente que APP $\rightarrow 2^{\aleph_0} = \aleph_2$ vamos a probar una cadena de principios demostrables a partir de APP, pues todos ellos tendrán interés en sí mismos. Para introducir el primero de ellos necesitamos algunos conceptos previos:

Definición 13.2 Sea X un conjunto no numerable, y $\mathcal{P}_{\aleph_1} X$ el conjunto de sus subconjuntos numerables, considerado como espacio topológico con la *topología de Ellentuck*, que es la que tiene por base a los conjuntos de la forma

$$[x, N] = \{Y \in \mathcal{P}_{\aleph_1} X \mid x \subset Y \subset N\}, \qquad N \in \mathcal{P}_{\aleph_1} X, \quad x \in \mathcal{P}_{\aleph_0} N.$$

(notemos que $[x, N] \cap [x', N'] = [x \cup x', N \cap N']$).

Los cerrados para esta topología son precisamente los cerrados en el sentido usual definido en [PC B.1]. En efecto, si $C \subset \mathcal{P}_{\aleph_1} X$ es cerrado para la topología y $\{x_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión creciente de elementos de C, vamos a probar que $a = \bigcup\limits_{n\in\omega} x_n \in \overline{C} = C$. Para ello tomamos un entorno básico $a \in [x, N]$, y observamos que existe un n tal que $x \subset x_n \subset N$, luego $x_n \in [x, N] \cap C \neq \varnothing$.

Recíprocamente, si C es cerrado en el sentido de B.1 y $a \in \overline{C}$, podemos expresar $a = \bigcup\limits_n x_n$ como unión creciente de conjuntos finitos, y así $a \in [x_n, a]$, luego existe $y_n \in [x_n, a] \cap C$, luego $a \subset \bigcup\limits_n y_n \subset a$, luego $a = \bigcup\limits_n y_n \in C$.

Definición 13.3 Si κ es un cardinal regular no numerable, llamaremos $\mathcal{E}_\kappa$ al conjunto de los submodelos elementales numerables de $H(\kappa)$, que es c.n.a. en $\mathcal{P}_{\aleph_1} H(\kappa)$.

Sea X un conjunto no numerable, sea κ un cardinal regular y sea $M \in \mathcal{E}_\kappa$. Un conjunto $\Sigma \subset \mathcal{P}_{\aleph_1} X$ es *M-estacionario* si para todo $C \in M$ c.n.a. en $\mathcal{P}_{\aleph_1} X$, se cumple que $C \cap \Sigma \cap M \neq \varnothing$.

Una aplicación $\Sigma : C \longrightarrow \mathcal{P}_{\aleph_1} X$ es *estacionaria abierta* si X es un conjunto no numerable, κ es un cardinal regular tal que $\mathcal{P}_{\aleph_1} X \in H(\kappa)$, $C \subset \mathcal{E}_\kappa$ es c.n.a. en $\mathcal{P}_{\aleph_1} H(\kappa)$ y para todo $M \in C$ se cumple que $\Sigma(M)$ es abierto y M-estacionario.

Ahora ya podemos definir:

Principio de reflexión de aplicaciones (PRA) *Si $\Sigma : C \longrightarrow \mathcal{P}_{\aleph_1}X$ es una aplicación estacionaria abierta, existe una sucesión $\{N_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ en C tal que si $\alpha < \beta < \omega_1$ entonces $N_\alpha \in N_\beta$ y si $\lambda < \omega_1$ es un ordinal límite, entonces $N_\lambda = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} N_\delta$ y existe un $\delta < \lambda$ tal que si $\epsilon < \lambda$ y $\delta \in N_\epsilon$, se cumple $N_\epsilon \cap X \in \Sigma(N_\lambda)$.*

Observaciones Aunque los modelos no sean transitivos, la relación $N_\alpha \in N_\beta$ implica que $N_\alpha \subset N_\beta$, debido a que N_α es numerable. En efecto, existe una aplicación $f : \omega \longrightarrow N_\alpha$ biyectiva, que podemos tomar $f \in H(\kappa)$, luego también $f \in N_\beta$, y entonces $N_\alpha = f[\omega] \subset N_\beta$.

Notemos también que si $\nu_\alpha = N_\alpha \cap \omega_1$, la sucesión $\{\nu_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ es normal, luego, si $\delta < \lambda$ están en las condiciones de PRA, para todo $\delta < \epsilon < \lambda$ se cumple que $\delta < \epsilon \leq \nu_\epsilon$, luego $\delta \in N_\epsilon$, y cambiando δ por $\delta + 1$ tenemos en particular que si $\delta \leq \epsilon < \lambda$ entonces $N_\epsilon \cap X \in \Sigma(N_\lambda)$. ■

Vemos que PRA es un principio un tanto técnico, pero que tiene la ventaja de que involucra conceptos relativamente "elementales", de modo que una prueba de consistencia a partir de PRA puede ser seguida incluso por alguien que no tenga conocimientos sobre extensiones genéricas en general o sobre extensiones propias en particular. Empezamos probando la consistencia de PRA:

Teorema 13.4 APP $\rightarrow$ PRA.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\Sigma : C \longrightarrow \mathcal{P}_{\aleph_1}X$ en las condiciones del PRA y sea $\mathbb{P}$ el conjunto de las aplicaciones $p : \gamma + 1 \longrightarrow C$ tales que $\gamma < \omega_1$, si $\alpha < \beta \leq \gamma$ se cumple $p(\alpha) \in p(\beta)$ y si $\lambda \leq \alpha$ entonces $p(\lambda) = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} p(\delta)$ y existe un $\delta < \lambda$ tal que si $\epsilon < \lambda$ y $\delta \in p(\epsilon)$, se cumple $p(\epsilon) \cap X \in \Sigma(p(\lambda))$.

Consideramos a $\mathbb{P}$ como c.p.o. con la relación inversa de la inclusión (podemos convenir en que además $\varnothing \in \mathbb{P}$, y así $\mathbb{P}$ tiene un máximo elemento). Vamos a probar que $\mathbb{P}$ es propio, pero antes veamos que, admitiendo esto, podemos concluir la prueba.

Para cada $x \in H(\kappa)$, el conjunto $D_x = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee \alpha \in \mathcal{D}p \; x \in p(\alpha)\}$ es denso en $\mathbb{P}$, pues dada cualquier condición $p : \gamma + 1 \longrightarrow C$, el conjunto de los $N \in \mathcal{E}_\kappa$ tales que $\mathcal{P}_{\aleph_1}X, p(\gamma), x \in N$ es c.n.a. en $\mathcal{P}_{\aleph_1}X$, luego podemos extender p hasta $\gamma + 2$ de modo que $p(\gamma + 1)$ sea un N en estas condiciones, y es claro entonces que la extensión está en D_x.

Si $\gamma < \omega_1$, también es denso el conjunto $D^\gamma = \{p \in \mathbb{P} \mid \gamma \in \mathcal{D}p\}$. Para probarlo relativizamos el argumento a un modelo transitivo numerable M de ZFC, tomamos un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y llamamos $f = \bigcup G$, que es una función $f : \eta \longrightarrow C$. Tenemos que probar que $\gamma \in \eta$. En caso contrario $A = \bigcup\limits_{\delta<\eta} f(\delta)$ es un conjunto numerable$^{M[G]}$ y, para todo $x \in X$, como $G \cap D_x \neq \varnothing$ se cumple que $x \in A$, es decir, que $X \subset A$, pero esto es imposible porque, al ser propio, $\mathbb{P}$ conserva $\aleph_1$, y X es no numerable$^{M[G]}$.

Ahora APP nos da un filtro G en $\mathbb{P}$ que corta a todos los conjuntos D^α, para $\alpha < \omega_1$, y $\bigcup G$ es una sucesión en las condiciones requeridas por PRA.

Veamos, pues, que $\mathbb{P}$ es propio. Siguiendo la definición 11.9, tomamos un cardinal regular $\mu > 2^{|\mathbb{P}|}$ y $N \prec H(\mu)$ numerable tal que $\mathbb{P} \in N$. Ahora bien, por 11.14 podemos suponer que μ es tan grande como queramos y tomar N en un c.n.a. en $H(\mu)$. Concretamente, podemos suponer que N contiene a todos los conjuntos relevantes: $\mathbb{P}$, $\mathcal{P}\mathbb{P}$, C, X, $H(\kappa)$, e incluso a un $H(\xi)$ que contenga a estos conjuntos. Tomamos $p \in \mathbb{P} \cap N$ y tenemos que probar que tiene una extensión $(N, \mathbb{P})$-genérica.

Notemos que si $p : \gamma + 1 \longrightarrow C$, como $p \in N$ y es numerable, se cumple que $p \subset M$. Esto implica a su vez que $p : \gamma + 1 \longrightarrow C \cap N$.

Sea $\{D_n\}_{n<\omega}$ una enumeración de los subconjuntos densos en $\mathbb{P}$ que están en N. Podemos formar una sucesión decreciente $\{p_n\}_{n\in\omega}$ de condiciones en $\mathbb{P} \cap N$ tales que $p_n \in D_n$ y $p_0 \leq p$. En efecto, tenemos que existe $p_0 \in D_0$ tal que $p_0 \leq p$ y, como D_0 y p están en N, podemos tomar $p_0 \in N$. Igualmente se construyen los términos siguientes de la sucesión. Llamamos $p_\omega = \bigcup\limits_{n\in\omega} p_n$, que será una función $p_\omega : \lambda \longrightarrow C \cap N$.

Usando que $p_n(\delta) \in N$ es numerable, concluimos que $p_n(\delta) \subset N$, luego $\bigcup\limits_{\delta<\lambda} p_\omega(\delta) \subset N \cap H(\kappa)$. Pero también se cumple la inclusión opuesta, pues si $x \in N \cap H(\kappa)$, el conjunto denso D_x que hemos considerado antes está en N, luego es uno de los D_n, luego existe un δ tal que $x \in p_n(\delta) = p_\omega(\delta)$. Así pues,

$$\bigcup_{\delta<\lambda} p_\omega(\delta) = N \cap H(\kappa).$$

En particular, como cada $p_\omega(\delta) \in C$ y éste es cerrado, resulta que $N \cap H(\kappa) \in C$ (podemos expresar $\lambda = \bigcup\limits_{n\in\omega} \delta_n$ creciente, y la sucesión $\{p_\omega(\delta_n)\}_{n\in\omega}$ es creciente respecto de la inclusión).

Vamos a probar que si $\epsilon \in \lambda \setminus (\gamma + 1)$, entonces $p(\epsilon) \cap X \in \Sigma(N \cap H(\kappa))$. Admitiendo esto, es inmediato que $p' = p_\omega \cup \{(\lambda, N \cap H(\kappa))\} \in \mathbb{P}$, y claramente p' es una condición $(N, \mathbb{P})$-genérica que extiende a p, pues esto significa que para todo $D \in N$ denso en $\mathbb{P}$ (es decir, para todo D_n) se cumple que $D_n \cap N$ es predenso bajo p', es decir, que toda extensión de p' es compatible con un elemento de $D_n \cap N$, lo cual es trivial porque $p_n \in D_n \cap N$ y $p' \leq p_n$.

En realidad lo que vamos a probar es que la sucesión $\{p_n\}_{n\in\omega}$ se puede escoger de modo que se cumpla lo requerido, para lo cual basta ver que si $p \in \mathbb{P} \cap N$ y $D \in N$ es denso en $\mathbb{P}$, existe un $p^* \in D \cap N$ tal que $p^* \leq p$ y para todo $\epsilon \in \mathcal{D}p^* \setminus \mathcal{D}p$ se cumple $p^*(\epsilon) \in \Sigma(N \cap H(\kappa))$.

Sea C^* el conjunto de los submodelos $N^* \prec H(\xi)$ numerables que cumplen $\mathbb{P}$, p, $D \in N^*$. Claramente es c.n.a. en $\mathcal{P}_{\aleph_1} H(\xi)$, y por B.11 el conjunto de las intersecciones $N^* \cap X$ contiene un c.n.a. C^{**} en $\mathcal{P}_{\aleph_1} X$. Como todos los parámetros están en N, podemos tomarlo $C^{**} \in N$. Como $C^{**} \subset H(\kappa)$ y $|C^{**}| \leq |\mathcal{P}_{\aleph_1} X| < \kappa$, de hecho $C^{**} \in N \cap H(\kappa)$.

Ahora usamos que $\Sigma(N\cap H(\kappa))$ es $N\cap H(\kappa)$-estacionario, por lo que podemos tomar un N^* en las condiciones indicadas tal que $N^*\cap X \in \Sigma(N\cap H(\kappa))$. Como este conjunto es abierto, existe un conjunto finito a tal que

$$N^* \cap X \subset [a, N^* \cap X] \subset \Sigma(N \cap H(\kappa)).$$

Pongamos que $p : \gamma + 1 \longrightarrow C$. El conjunto de todos los $P \prec H(\kappa)$ numerables tales que $a\cup\{p(\gamma)\} \subset P$ es c.n.a. en $\mathcal{P}_{\aleph_1} H(\kappa)$, luego podemos tomar $P \in C$ en estas condiciones. Más aún, como todos los parámetros de las condiciones están en N, podemos tomar $P \in C\cap N$. Entonces $p' = p\cup\{(\gamma+1, P)\} \in \mathbb{P}\cap N$, luego existe un $p^* \in D \cap N$ tal que $p^* \leq p' \leq p$. Ahora observamos que si $\epsilon \in \mathcal{D}p^* \setminus \mathcal{D}p$, entonces $a \subset P = p^*(\gamma + 1) \subset p^*(\epsilon) \subset N \cap X$, luego $p^*(\epsilon) \in [a, N \cap X] \subset \Sigma(N \cap H(\kappa))$. ■

Vamos a deducir a su vez de PRA otro principio general, para el cual necesitamos nuevas definiciones:

Fijemos una sucesión $\{C_\lambda\}_{\lambda<\omega_1}$, donde λ recorre los ordinales límite menores que ω_1, tal que C_λ sea un subconjunto cofinal en λ de ordinal ω.

Si M es un conjunto numerable de ordinales sin máximo, $\lambda < \omega_1$ es su ordinal y $\phi_M : M \longrightarrow \lambda$ es la semejanza, llamaremos $C_M = \phi_M^{-1}[C_\lambda]$, que es un subconjunto cofinal en M de ordinal ω. Notemos que C_λ en este sentido es el conjunto correspondiente de la sucesión $\{C_\lambda\}_{\lambda<\omega_1}$.

Si $N \subset M$ son conjuntos numerables de ordinales, M no tiene máximo y $\sup N < \sup M$, definimos

$$w(N, M) = |\sup N \cap C_M|,$$

que es claramente un número natural. Observemos que si $N_1 \subset N_2 \subset M$ con $\sup N_2 < \sup M$, entonces $w(N_1, M) \leq w(N_2, M)$. Consideramos ahora la fórmula siguiente[1]:

> ($\boldsymbol{v}_{\mathbf{AE}}$) *Para todo $A \subset \omega_1$ existen un ordinal límite $\omega_1 \leq \eta < \omega_2$ y una sucesión creciente para la inclusión $\{N_\delta\}_{\delta<\omega_1}$ que es c.n.a. en $\mathcal{P}_{\aleph_1}\eta$ tales que para todo $\lambda < \omega_1$ existe $\delta < \lambda$ tal que si $\delta < \epsilon < \lambda$ entonces*
>
> $$N_\lambda \cap \omega_1 \in A \leftrightarrow w(N_\epsilon \cap \omega_1, N_\lambda \cap \omega_1) < w(N_\epsilon, N_\lambda).$$

Teorema 13.5 PRA $\rightarrow v_{\mathrm{AE}}$.

Demostración: La implicación se deduce fácilmente del hecho siguiente: si $\kappa = (2^{\aleph_1})^+$ y $M \in \mathcal{E}_\kappa$, los conjuntos siguientes son abiertos y M-estacionarios:

$$\Sigma_<(M) = \{N \in \mathcal{P}_{\aleph_1}\omega_2 \mid \sup(N \cap \omega_1) < \sup(M \cap \omega_1) \land \sup N < \sup M$$
$$\land\, w(N \cap \omega_1, M \cap \omega_1) < w(N, M \cap \omega_2)\},$$

[1]Las iniciales AE hacen referencia al axioma de elección, por motivos que veremos más adelante.

$$\Sigma_{\geq}(M) = \{N \in \mathcal{P}_{\aleph_1}\omega_2 \mid \sup(N \cap \omega_1) < \sup(M \cap \omega_1) \land \sup N < \sup M$$
$$\land\ w(N \cap \omega_1, M \cap \omega_1) \geq w(N, M \cap \omega_2)\}.$$

En efecto, si admitimos esto, fijado $A \subset \omega_1$, podemos definir $C = \mathcal{E}_\kappa$ y, para cada $M \in C$,

$$\Sigma_A(M) = \begin{cases} \Sigma_<(M) & \text{si } M \cap \omega_1 \in A, \\ \Sigma_\geq(M) & \text{si } M \cap \omega_1 \notin A. \end{cases}$$

Tenemos que Σ_A es estacionaria abierta, luego podemos tomar $\{N_\alpha^*\}_{\alpha<\omega_1}$ en las condiciones de PRA. Sea $\nu_\alpha = N_\alpha^* \cap \omega_1$, sea $N_\alpha = N_\alpha^* \cap \omega_2$ y $\eta = \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} N_\alpha$.

Claramente $\nu_\alpha \in \omega_1$ y si $\alpha < \beta < \omega_1$, como $N_\alpha^* \in N_\beta^*$, se cumple que $\nu_\alpha < \nu_\beta$, y claramente entonces, la sucesión $\{\nu_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ es normal en ω_1. En particular no está acotada, luego $\omega_1 \subset N^* = \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} N_\alpha^* \prec H(\kappa)$, y también $\omega_1 \in N^*$.

Esto implica a su vez que todo elemento de N^* de cardinal $\aleph_1$ está contenido en N^*, y de aquí deducimos que η es un ordinal, pues si $\delta \in \eta \subset N^*$, entonces $\delta \subset N^*$, luego $\delta \subset \eta$. También es claro que se trata de un ordinal límite no numerable, que $N_\alpha \in \mathcal{P}_{\aleph_1}\eta$, y que $\{N_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ es c.n.a. en $N_\alpha \in \mathcal{P}_{\aleph_1}\eta$.

Por último, si $\lambda < \omega_1$, sabemos que existe un $\delta < \lambda$ tal que si $\delta \leq \epsilon < \lambda$, luego

$$N_\epsilon \in \Sigma_A(N_\lambda^*) = \begin{cases} \Sigma_<(N_\lambda^*) & \text{si } \nu_\lambda \in A, \\ \Sigma_\geq(N_\lambda^*) & \text{si } \nu_\lambda \notin A. \end{cases}$$

Por lo tanto (teniendo en cuenta que $\nu_\epsilon < \nu_\lambda$ y $\sup N_\epsilon < \sup N_\lambda$),

$$N_\lambda \cap \omega_1 = \nu_\lambda \in A \leftrightarrow N_\epsilon \in \Sigma_<(N_\lambda^*) \leftrightarrow w(\nu_\epsilon, \nu_\lambda) < w(N_\epsilon, N_\lambda),$$

como exige la definición de v_{AE}.

Pasamos, pues, a estudiar los conjuntos $\Sigma_<(M)$ y $\Sigma_\geq(M)$. Para probar que $\Sigma_<(M)$ es M-estacionario tomamos $C^* \in M$ c.n.a. en $\mathcal{P}_{\aleph_1}\omega_2$. Claramente

$$\omega_2 = \bigcup_{\gamma<\omega_1} \{\alpha \in \omega_2 \mid \bigvee N \in C^*(\alpha < \sup N \land N \cap \omega_1 = \gamma\},$$

luego existe un $\gamma < \omega_1$ tal que $\{\sup N \mid N \in C^* \land N \cap \omega_1 = \gamma\}$ no está acotado en ω_2. Como $M \prec H(\kappa)$, existe $\gamma \in M \cap \omega_1$ tal que

$$\{\sup N \mid N \in C^* \cap M \land N \cap \omega_1 = \gamma\}$$

no está acotado en $M \cap \omega_2$. Sea $n = w(\gamma, M \cap \omega_1)$ y sea $\beta \in M \cap \omega_2$ tal que $w(M \cap \beta, M \cap \omega_2) > n$. Por la elección de γ, podemos tomar $N \in C^* \cap M$ tal que $N \cap \omega_1 = \gamma$ y $\sup N > \beta$. Entonces $N \in C^* \cap \Sigma_<(M) \cap M$, pues

$$w(N \cap \omega_1, M \cap \omega_1) = n < w(M \cap \beta, M \cap \omega_2) \leq w(N, M \cap \omega_2).$$

Veamos ahora que $\Sigma_\geq(M)$ también es M-estacionario. Para ello tomamos $C^* \in M$ c.n.a. en $\mathcal{P}_{\aleph_1}\omega_2$ y consideremos $N \prec H(\kappa)$ tal que $\omega_1 \cup \{C^*\} \in N$ y

$|N| = \aleph_1$. Podemos exigir $N \in M$, y así $\sup(N \cap \omega_2) \in M$ y por consiguiente $\sup(N \cap M \cap \omega_2) < \sup(M \cap \omega_2)$, luego podemos calcular

$$n = w(N \cap M \cap \omega_2, M \cap \omega_2).$$

Si $P \in C^* \cap M \cap N$ se cumple que $w(P, M \cap \omega_2) \leq n$, puesto que claramente $\sup P \in M \cap N \cap \omega_2$, luego $\sup P \leq \sup(N \cap M \cap \omega_2)$.

Por otra parte, el conjunto $\{\sup(P \cap \omega_1) \mid P \in C^* \cap M \cap N\}$ no está acotado en $M \cap \omega_1$, pues si $\alpha \in M \cap \omega_1$, también $\alpha \in \omega_1 \subset N$ y como C^* es c.n.a. en ω_2, existe un $P \in C^*$ tal que $\alpha \in P$, pero como $C^* \in M \cap N$ y $\alpha \in M \cap N$, podemos tomar un $P \in N$ que cumpla lo mismo, y como $N \in M$, podemos exigir además que $P \in M$. Esto nos permite tomar $P \in C^* \cap M \cap N$ tal que $w(P \cap \omega_1, M \cap \omega_1) \geq n$. Claramente entonces $P \in C^* \cap \Sigma_{\geq}(M) \cap M$.

Sólo falta probar que los conjuntos son abiertos. Para ello tomamos un $N \in \Sigma_{<}(M)$ y consideramos el mínimo $\alpha \in N$ tal que $\alpha > \max(N \cap C_{M \cap \omega_1})$, salvo si $N \cap \omega_1$ tiene máximo elemento y está en $C_{M \cap \omega_1}$, en cuyo caso no existe tal mínimo y tomamos $\alpha = \max(N \cap \omega_1)$.

Similarmente, consideramos el mínimo $\beta \in N$ tal que $\beta > \max(N \cap C_{M \cap \omega_2})$, salvo que N tenga un máximo elemento y esté en $C_{M \cap \omega_2}$, en cuyo caso tomamos $\beta = \max N$. Es fácil ver entonces que, si $P = \sup(N \cap \omega_1) \cap C_{M \cap \omega_1}$, entonces

$$\sup \alpha \cap C_{M \cap \omega_1} = \begin{cases} P \setminus \{\alpha\} & \text{si } \alpha \in C_{M \cap \omega_1} \text{ y es un límite o } 0, \\ P \setminus \{\alpha, \alpha'\} & \text{si } \alpha = \alpha' + 1 \in C_{M \cap \omega_1}, \\ P & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

En cualquier caso, $w(\alpha, M \cap \omega_1) = w(N \cap \omega_1, M \cap \omega_1) - n_\alpha$, donde el número $n_\alpha \in \{0, 1, 2\}$ depende únicamente de α y de M. Similarmente podemos concluir que $w(\beta, M \cap \omega_2) = w(N, M \cap \omega_2) - n'_\beta$. De aquí se desprende a su vez que $[\{\alpha, \beta\}, N] \subset \Sigma_{<}(M)$, pues si $\alpha, \beta \in N' \subset N$, entonces

$$\sup(N' \cap \omega_1) \leq \sup(N \cap \omega_1) < \sup(M \cap \omega_1), \quad \sup N' \leq \sup N < \sup(M \cap \omega_2)$$

$$w(N' \cap \omega_1, M \cap \omega_1) = w(\alpha, M \cap \omega_1) + n_\alpha = w(N \cap \omega_1, M \cap \omega_1)$$
$$< w(N \cap \omega_2, M \cap \omega_2) = w(\beta, M \cap \omega_2) + n'_\beta = w(N' \cap \omega_2, M \cap \omega_2).$$

El mismo razonamiento vale para $\Sigma_{\geq}(M)$ sin más que cambiar la desigualdad en la última línea. ■

Teorema 13.6 $v_{\mathrm{AE}} \to 2^{\aleph_1} = \aleph_2$.

Demostración: Fijamos una sucesión $\{C_\lambda\}_{\lambda<\omega_1}$ en las condiciones que exige v_{AE} y para cada $A \in \mathcal{P}\omega_1$ llamemos $\eta_A < \omega_2$ al mínimo ordinal que cumple v_{AE} para A. Llamemos NE al ideal de $\mathcal{P}\omega_1$ formado por los conjuntos no estacionarios y vamos a probar que

$$\eta_A = \eta_B \leftrightarrow A \triangle B \in \mathrm{NE}.$$

Esto implica que $A \mapsto \eta_A$ induce una aplicación inyectiva $\mathcal{P}\omega_1/\mathrm{NE} \longrightarrow \omega_2$, por lo que $2^{\aleph_1} = |\mathcal{P}\omega_1/\mathrm{NE}| \leq \aleph_2$. La primera igualdad se debe al teorema de Solovay [TC 6.17], según el cual ω_1 puede descomponerse en unión de $\aleph_1$ conjuntos estacionarios disjuntos, luego las uniones de subconjuntos de dicha familia forman $2^{\aleph_1}$ elementos distintos del álgebra cociente.

Si $A \triangle B \in \mathrm{NE}$, sea C un c.n.a. en ω_1 tal que $C \cap (A \triangle B) = \varnothing$, sea $\{N_\delta\}_{\delta<\omega_1}$ una sucesión que cumpla v_{AE} con A y η_A y sea

$$C' = \{\lambda < \omega_1 \mid N_\lambda \cap \omega_1 = \lambda\} \cap C.$$

Es fácil ver que C' es c.n.a. en ω_1, luego podemos enumerarlos con una sucesión normal $\{\gamma_\delta\}_{\delta<\omega_1}$. Consideramos ahora la sucesión $\{N_{\gamma_\delta}\}_{\delta<\omega_1}$.

Dado $\lambda < \omega_1$, sea $\delta_0 < \gamma_\lambda$ según v_{AE} y sea $\delta < \lambda$ tal que $\delta_0 < \gamma_\delta < \gamma_\lambda$. Así, si $\delta < \epsilon < \lambda$, se cumple que $\delta_0 < \gamma_\epsilon < \gamma_\lambda$, luego

$$\gamma_\epsilon = N_{\gamma_\epsilon} \cap \omega_1 \in A \leftrightarrow w(N_{\gamma_\epsilon} \cap \omega_1, N_{\gamma_\lambda} \cap \omega_1) < w(N_{\gamma_\epsilon}, N_{\gamma_\lambda}).$$

Ahora bien, como $\gamma_\epsilon \in C$, sucede que $\gamma_\epsilon \in A \leftrightarrow \gamma_\epsilon \in B$, luego concluimos que $\{N_{\gamma_\delta}\}_{\delta<\omega_1}$ cumple v_{AE} para B, pero con η_A, lo cual implica que $\eta_B \leq \eta_A$, porque η_B es, por definición, el mínimo posible. Por simetría, de hecho $\eta_A = \eta_B$.

Supongamos ahora que $\eta_A = \eta_B$, sea $\{N_\delta\}_{\delta<\omega_1}$ una sucesión que cumpla v_{AE} para A y sea $\{N'_\delta\}_{\delta<\omega_1}$ otra que lo cumpla para B. Sea $C_0 = \{\delta < \omega_1 \mid N_\delta = N'_\delta\}$ y veamos que C es c.n.a. en ω_1. Trivialmente es cerrado y, dado $\alpha_0 < \omega_1$, podemos tomar $\alpha'_0 > \alpha$ tal que $N_{\alpha_0} \subset N'_{\alpha'_0}$, y a su vez $\alpha_1 > \alpha'_0$ tal que $N'_{\alpha'_0} \subset N_{\alpha_1}$, y así sucesivamente, de modo que el supremo λ de la sucesión

$$\alpha_0 < \alpha'_0 < \alpha_1 < \alpha'_1 < \alpha_2 < \alpha'_2 < \cdots$$

cumple $N_\lambda = \bigcup\limits_{n\in\omega} N_{\alpha_n} = \bigcup\limits_{n\in\omega} N_{\alpha'_n} = N'_\lambda$, luego $\alpha_0 < \lambda \in C_0$.

Similarmente, es fácil ver que $C_1 = \{\lambda \in C_0 \mid N_\lambda \cap \omega_1 = \lambda\}$ es c.n.a. en ω_1 y a su vez que lo es $C = \{\lambda \in C_1 \mid C_1 \cap \lambda \text{ no está acotado en } \lambda\}$.

Ahora basta probar que $C \cap (A \triangle B) = \varnothing$. Ahora bien, dado $\lambda \in C$, sabemos que existe un $\delta < \lambda$ tal que si $\delta < \epsilon < \lambda$,

$$\lambda = N_\lambda \cap \omega_1 \in A \leftrightarrow w(N_\epsilon \cap \omega_1, N_\lambda \cap \omega_1) < w(N_\epsilon, N_\lambda),$$

$$\lambda = N'_\lambda \cap \omega_1 \in B \leftrightarrow w(N'_\epsilon \cap \omega_1, N'_\lambda \cap \omega_1) < w(N'_\epsilon, N'_\lambda).$$

Como podemos tomar $\epsilon \in C_1 \cap \lambda$, tenemos que $N_\epsilon = N'_\epsilon$ y $N_\lambda = N'_\lambda$, luego $\lambda \in A \leftrightarrow \lambda \in B$, luego $\lambda \notin A \triangle B$. ■

Observemos que en realidad hemos probado algo más fuerte: consideremos el modelo $L(\mathcal{P}\omega_1)$, que es un modelo de ZF que, en general, no tiene por qué cumplir el axioma de elección. La sucesión $\{C_\lambda\}_{\lambda<\omega_1}$ queda determinada por $\bigcup\limits_{\lambda<\omega_1} \{\lambda\} \times C_\lambda \subset \omega_1 \times \omega_1$, que a su vez se codifica fácilmente mediante un subconjunto de ω_1, por lo que $\{C_\lambda\}_{\lambda<\omega_1} \in L(\mathcal{P}\omega_1)$. Si suponemos v_{AE}, dado

$A \subset \omega_1$, podemos tomar un buen orden $R \subset \omega_1 \times \omega_1$ de ordinal η_A, con lo que la semejanza $f : \omega_1 \longrightarrow \eta_A$ está en $L(\mathcal{P}\omega_1)$ y a través de ella podemos codificar la sucesión $\{N_\delta\}_{\delta<\omega_1}$ mediante $\bigcup\limits_{\delta<\omega_1} (\{\delta\} \times f^{-1}[N_\delta]) \subset \omega \times \omega_1$, con lo que también $\{N_\delta\}_{\delta<\omega_1} \in L(\mathcal{P}\omega_1)$ y es claro entonces que $L(\mathcal{P}\omega_1)$ cumple v_{AE}. Pero es claro que la construcción de la inyección $\mathcal{P}\omega_1/\mathrm{NE} \longrightarrow \omega_2$ no requiere el axioma de elección, luego concluimos que en $L(\mathcal{P}\omega_1)$ se cumple que $\mathcal{P}\omega_1/\mathrm{NE}$ admite un buen orden.

Similarmente, si $\{E_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ es una familia de conjuntos estacionarios disjuntos dos a dos, podemos codificarla mediante un subconjunto de ω_1 y así $\{E_\alpha\}_{\alpha<\omega_1} \in L(\mathcal{P}\omega_1)$. Esto nos permite construir una inyección $\mathcal{P}\omega_1 \longrightarrow \mathcal{P}\omega_1/\mathrm{NE}$ en $L(\mathcal{P}\omega_1)$, luego $\mathcal{P}\omega_1$ admite un buen orden en $L(\mathcal{P}\omega_1)$. En definitiva:

Teorema 13.7 $v_{\mathrm{AE}} \rightarrow L(\mathcal{P}\omega_1) \vDash \mathrm{AE}$.

Recapitulando, tenemos que APP $\rightarrow$ PRA $\rightarrow v_{\mathrm{AE}} \rightarrow 2^{\aleph_1} = \aleph_2$. Como también APP $\rightarrow \mathrm{AM}(\aleph_1) \rightarrow 2^{\aleph_0} \geq \aleph_2$, concluimos que APP $\rightarrow 2^{\aleph_0} = \aleph_2$ y, por consiguiente, APP $\rightarrow$ AM $+\ 2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

Notemos que el modelo construido en la prueba del teorema 13.1 cumple la hipótesis de los cardinales singulares. En efecto, en el modelo de partida M se cumple la HCS sobre κ, porque κ es compacto, y es fácil ver que la función del continuo sobre κ no se ve alterada en $M[G]$, pero $\kappa = \aleph_2^{M[G]}$, luego en $M[G]$ se cumple la HCS. Esto no es casual, sino que vamos a probar a continuación que APP (de hecho PRA) implica la HCS. Necesitamos un resultado previo:

Definición 13.8 Si κ es un cardinal infinito, una *matriz recubridora* de κ^+ es una sucesión $\mathcal{C} = \{K(n,\beta)\}_{(n,\beta)\in\omega\times\kappa^+}$ tal que:

a) $K(n,\beta) \subset \beta$ es cerrado para la topología de orden.

b) $|K(n,\beta)| < \kappa$.

c) Si $n < m$ entonces $K(n,\beta) \subset K(m,\beta)$.

d) $\beta = \bigcup\limits_{n<\omega} K(n,\beta)$.

e) Si $\alpha < \beta$ y $n \in \omega$ existe un m tal que $K(n,\alpha) \subset K(m,\beta)$.

Teorema 13.9 *Si κ es un cardinal singular de cofinalidad numerable, entonces existe una matriz recubridora para κ^+.*

Demostración: Sea $\{\kappa_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión creciente cofinal en κ de cardinales regulares. Para cada $\beta < \kappa^+$ sea $\phi_\beta : \kappa \longrightarrow \beta$ suprayectiva. Vamos a definir sucesiones $\{K(n,\beta)\}_{n\in\omega}$ por recurrencia sobre β de modo que se cumplan las propiedades requeridas cambiando b) por la condición más fuerte $|K(n,\beta)| \leq \kappa_n$. Para $\beta = 0$ tomamos $K(n,\beta) = \varnothing$ y, para $\beta > 0$ definimos

$$K(n,\beta) = \overline{\phi_\beta[\kappa_n] \cup \bigcup\{K(n,\alpha) \mid \alpha \in \phi_\beta[\kappa_n]\}} \cap \beta,$$

donde la clausura se toma respecto de la topología de orden. La propiedad a) se cumple trivialmente. Para la propiedad b) observamos que el conjunto bajo la clausura tiene claramente cardinal $\leq \kappa_n$, y esto se conserva al tomar la clausura, pues, en general, si X es un conjunto de ordinales y $\phi : X \longrightarrow \eta$ es la semejanza en su ordinal, es fácil ver que la aplicación $\psi : \overline{X} \setminus X \longrightarrow \eta + 1$ dada por $\psi(\alpha) = \sup \phi[\{\delta \in X \mid \delta < \alpha\}]$ es inyectiva. Las propiedades c) y d) también son claras y, para e), tomamos m tal que $\alpha \in \phi_\beta[\kappa_m]$ y entonces $K(n, \alpha) \subset K(m, \alpha) \subset K(m, \beta)$. ■

Teorema 13.10 PRA $\to$ HCS.

Demostración: Suponemos PRA. Tenemos que probar que si κ es un cardinal (límite) tal que $2^{\operatorname{cf}\kappa} < \kappa$, entonces $\kappa^{\operatorname{cf}\kappa} = \kappa^+$. Supongamos que no es cierto y sea κ el mínimo cardinal que no lo cumple. Por el teorema de Silver [TC 6.18], tenemos que $\operatorname{cf}\kappa = \aleph_0$, por lo que κ es el mínimo cardinal de cofinalidad numerable tal que $\kappa^{\aleph_0} > \kappa^+$. Observemos que si $\aleph_1 < \mu < \kappa$, entonces

$$\mu^{\aleph_0} = \begin{cases} \mu & \text{si } \operatorname{cf}\mu > \aleph_0, \\ \mu^+ & \text{si } \operatorname{cf}\mu = \aleph_0. \end{cases}$$

En efecto, en caso contrario sea $\mu < \kappa$ el mínimo cardinal que no cumple esto. No puede ser $\mu = \aleph_2$, pues $\aleph_2^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = \aleph_2$. Si $\mu = \nu^+ > \aleph_2$, entonces, por la minimalidad de μ, se cumple $\mu^{\aleph_0} = \mu\, \nu^{\aleph_0} = \mu$. Si μ es un cardinal límite y $\operatorname{cf}\mu > \aleph_0$, entonces $\mu^{\aleph_0} = \sum\limits_{\nu<\mu} \nu^{\aleph_0} = \mu$, por hipótesis de inducción. Por último, si $\operatorname{cf}\mu = \aleph_0$, entonces $\mu^{\aleph_0} = \mu^+$ por la minimalidad de κ.

En particular, $(*)$ si $\mu < \kappa$, entonces $\mu^{\aleph_0} < \kappa$.

Fijamos una matriz recubridora $\mathcal{C} = \{K(n, \beta)\}_{(n,\beta)\in\omega\times\kappa^+}$ de κ^+. Por $(*)$ se cumple que $|\mathcal{P}_{\aleph_1} K(n, \beta)| < \kappa$. Fijemos también una sucesión $\{C_\lambda\}_{\lambda<\omega_1}$ de subconjuntos C_λ cofinales en λ de ordinal ω. Para cada conjunto numerable X definimos

$$\alpha_X = \sup(X \cap \omega_1), \quad \delta_X = \sup(X \cap \kappa^+),$$

si $\alpha < \lambda < \omega_1$, sea $a_\lambda(\alpha) = |C_\lambda \cap \alpha|$, si $\delta < \beta < \kappa^+$, sea

$$w(\delta, \beta) = \min\{n \in \omega \mid \delta \in K(n, \beta)\}.$$

Ahora fijemos un cardinal regular μ suficientemente grande como para que $H(\mu)$ contenga todos los conjuntos que estamos considerando y sea $M \prec H(\mu)$. Veamos que existe $\delta_M \leq \beta_M < \kappa^+$ tal que para todo $\gamma < \kappa^+$ y todo $n \in \omega$ existe un $m \in \omega$ tal que $K(n, \gamma) \cap M \subset K(m, \beta_M)$.

Para ello observamos que el conjunto $\{K(n, \gamma) \cap M \mid n \in \omega \wedge \gamma < \kappa^+\}$ tiene a lo sumo cardinal $2^{\aleph_0} \leq \aleph_2$, mientras que $\operatorname{cf}\kappa^+ > 2^{\aleph_0}$. Por lo tanto, existe $\delta_M < \beta_M < \kappa^+$ tal que todo $K(n, \gamma) \cap M = K(n', \gamma') \cap M$, con $\gamma' < \beta_M$, y basta aplicar la propiedad e) de la definición de matriz recubridora. Sea

$$\Sigma(M) = \{X \in \mathcal{P}(M \cap \kappa^+) \mid \alpha_X < \alpha_M \wedge \delta_X < \delta_M \wedge a_{\alpha_M}(\alpha_X) < w(\delta_X, \beta_M)\}.$$

Veamos que $\Sigma(M)$ es abierto. Para ello tomamos $X \in \Sigma(M)$ y tenemos que encontrar $x \subset X$ finito tal que $[x, X] \subset \Sigma(M)$. Si $\delta_X \in X$ basta tomar $x = \{\delta_X\}$. Supongamos que, por el contrario, X no tiene máximo y llamemos $n = w(\delta_X, \beta_M) > 0$. Entonces $\delta_X \notin K(n-1, \beta_M)$, luego $K(n-1, \beta_M) \cap \delta_X$ está acotado en δ_X, pues $K(n-1, \beta_M)$ es cerrado en β_M. Por lo tanto, existe $\gamma \in X$ tal que $(\delta_X \setminus \gamma) \cap K(n-1, \beta_M) = \varnothing$. Entonces $[\{\gamma\}, X] \subset \Sigma(M)$, pues si $\gamma \in X' \subset X$ entonces $\gamma \leq \delta_{X'} \leq \delta_X$, luego $\delta_{X'} \notin K(n-1, \beta_M)$, luego $w(\delta_{X'}, \beta_M) \geq n > a_{\alpha_M}(\alpha_X) \geq a_{\alpha_M}(\alpha_{X'})$.

Ahora veamos que $\Sigma(M)$ es M-estacionario. Para ello tomamos $C \in M$ que sea c.n.a. en $\mathcal{P}_{\aleph_1}\kappa^+$. Por [PC B.8] existe una aplicación $f : \mathcal{P}^f\kappa^+ \longrightarrow \mathcal{P}_{\aleph_1}\kappa^+$ tal que $\operatorname{cl} f \subset C$, y podemos exigir que $f \in M$. Basta encontrar un conjunto $Y \in \operatorname{cl} f \cap \Sigma(M) \cap M$.

Observemos que $|f| = \kappa^+$, por lo que $f \in H(\kappa^{++})$. Sea $N \prec H(\kappa^{++})$ tal que $f \in N$. Podemos suponer que N contiene todos los conjuntos que vayamos a necesitar que contenga, así como que $N \in M$. Sea $m = a_{\alpha_M}(\alpha_N)$. Consideremos el conjunto

$$E = \{\gamma < \kappa^+ \mid \operatorname{cf}\gamma = \omega \wedge \bigwedge x \in \mathcal{P}^f\gamma \; f(x) \subset \gamma\}.$$

Es claro que E no está acotado en κ^+, luego $|E| = \kappa^+$ y, por hipótesis, $|[E]^{\aleph_0}| = \kappa^{+\kappa^{\aleph_0}} > \kappa^+$. Por lo tanto, $[E]^{\aleph_0}$ no puede estar contenido en

$$\bigcup\{[K(n, \beta)]^{\aleph_0} \mid n \in \omega \wedge \beta < \kappa^+\},$$

ya que por $(*)$ este conjunto tiene cardinal $\leq \kappa^+$. Por consiguiente, existe un $X \in [E]^{\aleph_0}$ tal que $X \not\subset K(n, \beta)$ para todo n y β. Además podemos exigir que $X \in N$. En particular $X \not\subset K(m, \beta_M)$. Puesto que $X \in N$ es numerable, $X \subset N$. Por lo tanto, tomando $\gamma \in X \setminus K(m, \beta_M)$, tenemos que $\gamma \in E \cap N$ y $w(\gamma, \beta_M) > m$.

Como $\operatorname{cf}\gamma = \omega$, podemos tomar $y_0 \subset \omega$ cofinal numerable, a partir del cual obtenemos fácilmente un $Y \subset \gamma$ cofinal numerable tal que $Y \in \operatorname{cl} f$. Más aún, podemos exigir que $Y \in N \subset M$. Entonces $\delta_Y = \gamma < \delta_M$ y, como $Y \subset N$, $\alpha_Y \leq \alpha_N < \alpha_M$, luego

$$a_{\alpha_M}(\alpha_Y) \leq a_{\alpha_M}(\alpha_N) = m < w(\delta_Y, \beta_M).$$

Por lo tanto $Y \in \operatorname{cl} f \cap \Sigma(M) \cap M$.

Así tenemos definida $\Sigma : \mathcal{E}_\mu \longrightarrow \mathcal{P}_{\aleph_1}\kappa^+$ estacionaria abierta, luego podemos tomar $\{N_\epsilon\}_{\epsilon<\omega_1}$ en las condiciones de PRA. Llamemos

$$\alpha_\epsilon = \sup(N_\epsilon \cap \omega_1), \qquad \delta_\epsilon = \sup(N_\epsilon \cap \kappa^+).$$

Claramente $\{\delta_\epsilon\}_{\epsilon<\omega_1}$ es una sucesión normal, por lo que $C = \{\delta_\epsilon \mid \epsilon < \omega_1\}$ es c.n.a. en $\delta_{\omega_1} = \sup C < \kappa^+$. Además $\operatorname{cf}\delta_{\omega_1} = \aleph_1$, por lo que existe un n tal que $K(n, \delta_{\omega_1})$ no está acotado en δ_{ω_1}. Como $K(n, \delta_{\omega_1})$ es cerrado, existe un c.n.a. C' en ω_1 tal que $\{\delta_\epsilon \mid \epsilon \in C'\} \subset K(n, \delta_{\omega_1})$. Sea $\lambda \in C'$ tal que $\lambda \cap C'$ no esté acotado en λ y sea $M = N_\lambda$.

Según PRA, existe un cierto $\delta < \lambda$ tal que si $\epsilon < \lambda$ y $\delta \in N_\epsilon$, entonces $N_\epsilon \cap \kappa^+ \in \Sigma(M)$. Notemos que, para que se cumpla $\delta \in N_\epsilon$ basta con que $\delta < \alpha_\epsilon$, pues $\alpha_\epsilon \subset N_\epsilon$. Así pues, si $\delta \in \alpha_\epsilon$ se cumple que $\alpha_\epsilon < \alpha_M$, $\delta_\epsilon < \delta_M$ y $a_{\alpha_M}(\alpha_\epsilon) < w(\delta_\epsilon, \beta_M)$.

Por la elección de β_M, existe un m tal que $K(n, \delta_{\omega_1}) \cap M \subset K(m, \beta_M)$. Claramente, si $\epsilon \in C' \cap \lambda$, entonces $\delta_\epsilon \in K(n, \delta_{\omega_1}) \cap M \subset K(m, \beta_M)$, luego $w(\delta_\epsilon, \beta_M) \leq m$.

Por otra parte, $\{\alpha_\epsilon\}_{\epsilon<\omega_1}$ también es normal en ω_1, luego $\{\alpha_\epsilon\}_{\epsilon<\lambda}$ no está acotada en $\alpha_\lambda = \alpha_M$, luego $\{a_{\alpha_M}(\alpha_\epsilon) \mid \epsilon \in \lambda\}$ no está acotado en ω, luego podemos tomar $\epsilon \in C' \cap \lambda$ tal que $\delta < \alpha_\epsilon$ y $a_{\alpha_M}(\alpha_\epsilon) > w(\delta_\epsilon, \beta_M)$, contradicción.

■

Aquí terminan las consecuencias de APP sobre la hipótesis del continuo. En efecto, a partir de APP no puede demostrarse nada del estilo de $2^{\aleph_5} = \aleph_7$. En efecto, a partir de un modelo con un cardinal supercompacto el teorema [CG 10.21] nos da otro en el que el cardinal supercompacto κ sigue siéndolo en cualquier extensión por un c.p.o. fuertemente κ-cerrado, luego podemos pasar a una extensión por un producto de Easton según 5.38 para una función de Easton cuyo dominio sea un conjunto de cardinales regulares $\geq \kappa$. El c.p.o. correspondiente es fuertemente κ-cerrado, por lo que en la extensión κ sigue siendo supercompacto y la función del continuo sobre cualquier conjunto prefijado de cardinales regulares $\geq \kappa$ pasa a ser cualquier determinación razonable que queramos exigir. Entonces aplicamos la construcción del teorema 13.1 y obtenemos un modelo de ZFC + APP en el que la función del continuo sobre cualquier conjunto de cardinales regulares $\geq \aleph_2$ es la que hayamos querido que sea. La función del continuo sobre los cardinales singulares queda determinada entonces por la HCS.

Veamos una última consecuencia de PRA que implica la consistencia de que existan cardinales más altos que los débilmente compactos en la escala de consistencia. Para ello introducimos un principio combinatorio:

Definición 13.11 Si κ es un cardinal no numerable, llamamos $\square(\kappa)$ a la afirmación siguiente: Existe una sucesión $\{C_\lambda\}_{\lambda<\kappa}$ que cumple las propiedades siguientes:

a) C_λ es c.n.a. en λ.

b) Si $\lambda' < \lambda$ cumple que $C_\lambda \cap \lambda'$ no está acotado en λ', entonces $C_{\lambda'} = C_\lambda \cap \lambda'$.

c) No existe un c.n.a. $C \subset \kappa$ tal que si $\lambda < \kappa$ y $C \cap \lambda$ no está acotado en λ entonces $C_\lambda = C \cap \lambda$.

No hay que confundir este principio con el $\square_\kappa$ definido[2] en [TC 6.41]. La relación es que si $\kappa > \aleph_0$ entonces $\square_\kappa \rightarrow \square(\kappa^+)$. En efecto, la única diferencia

[2]Los principios $\square_\kappa$ son los únicos principios combinatorios definidos en [TC] cuya consistencia no hemos probado en [PC] ni en este libro. Puede probarse que se cumplen si $V = L$, aunque la prueba es complicada, y su consistencia también puede obtenerse mediante extensiones genéricas. Por otra parte, se sabe que $\neg\square_\kappa$ con κ singular implica la consistencia de infinitos cardinales de Woodin.

entre $\square_\kappa$ y $\square(\kappa^+)$ es que en lugar de la condición c) una sucesión $\square_\kappa$ debe cumplir que si $\operatorname{cf}\lambda < \kappa$ entonces $|C_\lambda| < \kappa$, pero una sucesión $\square_\kappa$ cumple también la condición c). En efecto, si existiera $C \subset \kappa^+$ en las condiciones de c), el conjunto

$$C' = \{\lambda < \kappa^+ \mid C \cap \lambda \text{ no está acotado en } \lambda\}$$

sería c.n.a. en κ^+, luego su ordinal sería κ^+. Si $f : \kappa^+ \longrightarrow C'$ es la semejanza, basta tomar $\lambda = f(\kappa+\omega)$, que cumple $\operatorname{cf}\lambda = \aleph_0 < \kappa$, pero $C_\lambda = C \cap \lambda$ contiene a $f[\kappa+\omega]$, luego $|C_\lambda| = \kappa$.

Teorema 13.12 (PRA) *Para todo cardinal regular $\kappa > \aleph_1$ se cumple $\neg\square(\kappa)$. En particular, para todo cardinal $\kappa \geq \aleph_1$ se cumple $\neg\square_\kappa$.*

Demostración: Supongamos, por reducción al absurdo, que existe una sucesión $\square(\kappa)$, digamos $\{C_\lambda\}_{\lambda<\kappa}$. Sea $\mathcal{E}$ el conjunto de todos los $M \prec H(\kappa^+)$ numerables tales que $\{C_\lambda\}_{\lambda<\kappa} \in M$, que claramente es c.n.a. en $\mathcal{P}_{\aleph_1}H(\kappa^+)$. Para cada $M \in \mathcal{E}$, sea $\Sigma(M)$ el conjunto de todos los $N \subset M \cap \kappa$ tales que $\sup N \in \lambda \setminus C_\lambda$, donde $\lambda = \sup(M \cap \kappa)$.

Veamos que $\Sigma(M)$ es abierto. Para ello tomamos $N \in \Sigma(M)$ y llamemos $\gamma = \sup N \notin C_\lambda$. Como C_λ es cerrado, existe un $\gamma_0 \in N$ tal que si $\gamma_0 \leq \delta < \gamma$, entonces $\delta \notin C_\lambda$. Notemos que si $\gamma \in N$ basta tomar $\gamma_0 = \gamma$ y la condición se cumple trivialmente. Es claro entonces que $[\{\gamma_0\}, N] \subset \Sigma(M)$.

Ahora probamos que $\Sigma(M)$ es M-estacionario. Para ello tomamos $C \in M$ c.n.a. en $\mathcal{P}_{\aleph_1}\kappa$. Sea $S = \{\sup N \mid N \in C\}$. Tenemos que probar que $S \cap M \not\subset C_\lambda$, pues esto implica que existe un $N \in C$ tal que $\sup N \in M \land \sup N \notin C_\lambda$. Ahora bien, si llamamos $\delta = \sup N$, como M es elemental y C, $\delta \in M$, de $\bigvee N \in C \ \sup N = \delta$ podemos deducir $\bigvee N \in C \cap M \ \sup N = \delta$ y entonces $N \in C \cap \Sigma(M) \cap M$.

Suponemos, pues, que $S \cap M \subset C_\lambda$. Entonces, si $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda$ cumplen que $S \cap M \cap \lambda_i$ no está acotado en λ_i, entonces $C_\lambda \cap \lambda_i$ no está acotado en λ_i, luego $C_{\lambda_i} = C_\lambda \cap \lambda_i$, luego $C_{\lambda_1} = C_{\lambda_2} \cap \lambda_1$. En otros términos, hemos probado que en M se cumple que si $\lambda_1 < \lambda_2$ cumplen que $S \cap \lambda_i$ no está acotado en λ_i, entonces $C_{\lambda_1} = C_{\lambda_2} \cap \lambda_1$. Como M es un submodelo elemental, esto es cierto también en $H(\kappa^+)$, luego en V.

Ahora bien, como C es c.n.a. en $\mathcal{P}_{\aleph_1}\kappa$, es claro que S contiene un c.n.a. en κ, luego el conjunto

$$S' = \{\lambda' \in S \mid S \cap \lambda' \text{ no está acotado en } \lambda'\},$$

no está acotado en κ. Entonces $C^* = \bigcup\limits_{\lambda' \in S'} C_{\lambda'}$ es c.n.a. en κ. En efecto, claramente es no acotado y, si $C^* \cap \lambda$ no está acotado en λ, tomamos $\lambda' \in S'$ tal que $\lambda' > \lambda$, y así $C^* \cap \lambda = C_{\lambda'} \cap \lambda$, luego $\lambda \in C_{\lambda'} \subset C^*$. Más aún, entonces $C_\lambda = C_{\lambda'} \cap \lambda = C^* \cap \lambda$, lo que contradice la propiedad c) de la definición de $\square_\kappa$.

Así pues, tenemos una aplicación estacionaria abierta $\Sigma : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{P}_{\aleph_1}\kappa$. Sea $\{N_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ en las condiciones de PRA. Sea $\nu_\alpha = \sup(N_\alpha \cap \kappa)$. Claramente

$\{\nu_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ es una sucesión normal, luego el conjunto $C = \{\nu_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ es c.n.a. en $\eta = \sup C$, al igual que $C' = C \cap C_\eta$. Fijemos $\lambda \in C'$ tal que $C' \cap \lambda$ no esté acotado en λ. Entonces $C \cap \lambda$ no está acotado en λ, luego $\lambda = \nu_{\lambda'}$, para cierto $\lambda' < \omega_1$, necesariamente un ordinal límite. Por otra parte $C_\eta \cap \lambda$ no está acotado en λ, luego $C_\lambda = C_\eta \cap \lambda$.

Según PRA, existe un $\delta < \lambda'$ tal que si $\delta \leq \epsilon < \lambda'$, entonces $N_\epsilon \cap \kappa \in \Sigma(N_{\lambda'})$. Sea $\alpha \in C'$ tal que $\nu_\delta < \alpha < \lambda = \nu_{\lambda'}$. Entonces existe un $\delta < \epsilon < \lambda'$ tal que $\alpha = \nu_\epsilon$. Como $N_\epsilon \cap \kappa \in \Sigma(N_{\lambda'})$, tenemos que $\nu_\epsilon \in \lambda' \setminus C_\lambda$, pero por otra parte $\nu_\epsilon \in C' \cap \lambda \subset C_\eta \cap \lambda = C_\lambda$, contradicción. ■

13.3 Más consecuencias de APP

Veamos un par de consecuencias más de APP. La primera es que implica el Axioma de las Coloraciones Abiertas 7.45:

Teorema 13.13 APP $\rightarrow$ ACA

Demostración: Recordemos que $\mathcal{N} = {}^\omega\omega$, considerado como espacio topológico con la topología producto de la topología discreta en ω, es decir, con la topología que tiene como base a los conjuntos $B_s = \{x \in \mathcal{N} \mid s \subset x\}$, para cada $s \in \omega^{<\omega}$.

Podemos relativizar toda la prueba a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Consideramos $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega_1, 2, \aleph_1)$, de modo que si G es $\mathbb{P}$-genérico sobre M, según 5.40 en $M[G]$ se cumple $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Como $\mathbb{P}$ es $\aleph_1$-cerrado, se cumple que $\mathcal{N}^{M[G]} = \mathcal{N}^M$. Escribiremos simplemente $\mathcal{N}$ para referirnos a este espacio.

En M, tomamos $X \subset \mathcal{N}$ y una coloración abierta C de X, es decir, $C \subset [X]^2$ y se identifica con un subconjunto abierto de $X \times X$. Suponemos que X no es unión numerable de subconjuntos totalmente no coloreados y vamos a demostrar que tiene un subconjunto no numerable totalmente coloreado.

Obviamente, C sigue siendo una coloración abierta de X en $M[G]$, y en $M[G]$ sigue siendo cierto que X no es unión numerable de conjuntos no coloreados. En efecto, si fuera $X = \bigcup\limits_{n\in\omega} X_n$, por 7.46 podemos suponer que cada X_n es cerrado en X. Entonces existe $f : \omega \times \omega \longrightarrow \omega^{<\omega}$ tal que $X \setminus X_n = X \cap \bigcup\limits_{i\in\omega} B_{f(n,i)}$.

En principio $f \in M[G]$, pero como $\mathbb{P}$ es $\aleph_1$-cerrado, de hecho $f \in M$, luego $\{X_n\}_{n\in\omega} \in M$, y llegamos a que X es unión numerable en M de conjuntos totalmente no coloreados, en contradicción con lo supuesto.

Por 7.47 en $M[G]$ existe $Y = \sigma_H \subset X$ no numerable tal que

$$\mathbb{Q} = \{q \in \mathcal{P}^f Y \mid q \text{ está totalmente coloreado}\},$$

considerado como c.p.o. con la relación inversa de la inclusión, cumple la c.c.n. Sea $\tau_G : \omega_1 \longrightarrow Y$ biyectiva (donde ω_1 representa a $\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$) Podemos elegir los nombres σ y τ, al igual que $\mathbb{Q} = \pi_G$, de modo que

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \pi = \{q \in \mathcal{P}^f \sigma \mid q \text{ está totalmente coloreado}\} \land \cdots$$

donde los puntos suspensivos representan las propiedades que conocemos de π, σ y τ (incluyendo toda la conclusión de 7.47). En particular $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \pi$ es propio y separativo (es propio por la c.c.n. y la separatividad es trivial), y también tenemos que $\mathbb{P}$ es propio y separativo (es propio por ser $\aleph_1$-cerrado. El teorema 11.18 nos da que $\mathbb{P} * \pi$ es propio. Para cada $\alpha < \omega_1$ sea

$$D_\alpha = \{(p, \rho) \in \mathbb{P} * \pi \mid \bigvee \beta < \omega_1 \bigvee xr\ (\beta > \alpha \land p \Vdash (\check{x} = \tau(\check{\beta}) \in \rho = \check{r}))\}.$$

Se trata de un subconjunto denso, pues dado $(p, \rho) \in \mathbb{P} * \pi$, podemos tomar un filtro genérico tal que $p \in G$, y entonces $\rho_G \in \pi_G$ es un subconjunto finito de σ_G totalmente colorado. Por la parte b) del teorema 7.47 existe un $\beta > \alpha$ tal que $r = \rho_G \cup \{\tau_G(\beta)\} \in \pi_G$, luego podemos elegir un nombre $\rho' \in \hat{\pi}$ de modo que $\rho'_G = r$. A su vez, tomando $x = \tau_G(\beta)$, existe $q \in G$, que podemos tomar $q \leq p$, de modo que $q \Vdash (\check{x} = \tau(\check{\beta}) \in \rho' = \check{r})$, y entonces es claro que $(q, \rho') \leq (p, \rho)$ y $(q, \rho') \in D_\alpha$.

Por APP existe un filtro $H \in M$ que corta a todos los conjuntos D_α. Para cada $\alpha < \omega_1$, tomamos $(p_\alpha, \rho_\alpha) \in D_\alpha \cap H$, de modo que existen $\alpha < \beta_\alpha < \omega_1$, x_α y r'_α tales que $p_\alpha \Vdash x_\alpha = \tau(\check{\beta}_\alpha) \in \rho_\alpha = \check{r}_\alpha$, lo que en particular implica que r_α es un subconjunto finito de X y que $x_\alpha \in r_\alpha$. Entonces $Y = \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} r_\alpha \in M$, y es un conjunto no numerable totalmente coloreado.

En efecto, para ver que Y es no numerable basta ver que lo es el conjunto $A = \{x_\alpha \mid \alpha < \omega_1\} \subset Y$, pero dado cualquier $\delta < \omega_1$ siempre podemos tomar un ordinal $\bigcup\limits_{\epsilon<\delta} \beta_\epsilon < \alpha < \omega_1$, y así, para todo $\epsilon < \delta$, como $(p_\epsilon, \rho_\epsilon)$, $(p_\alpha, \rho_\alpha) \in H$, existe una condición $(p, \rho) \in H$ que extiende a ambas, y tomando un filtro tal que $p \in G$, en $M[G]$ se cumple que $x_\epsilon = \tau_G(\beta_\epsilon)$ y $x_\alpha = \tau_G(\beta_\alpha)$, con $\beta_\epsilon < \alpha < \beta_\alpha$, y además τ_G es inyectiva, luego $x_\epsilon \neq x_\alpha$. Esto significa que $x_\alpha \notin \{x_\epsilon \mid \epsilon < \delta\}$, luego A no es numerable en M.

Similarmente, Y es totalmente coloreado porque si u_1, $u_2 \in Y$, $u_1 \neq u_2$, existen $\alpha_1, \alpha_2 < \omega_1$ tales que $u_i \in r_{\alpha_i}$. Como $(p_i, \rho_{\alpha_i}) \in H$, existe un $(p, \rho) \in H$ que los extiende a ambos, y si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M que contenga a p, entonces en $M[G]$ se cumple que $r_i = (\rho_{\alpha_i})_G \subset \rho_G \in \pi_G$, luego ρ_G está totalmente coloreado, luego $\{u_1, u_2\} \subset [\rho_G]^2 \subset C$. ■

Los resultados que hemos deducido de APP (salvo $\neg\Box(\kappa)$) no son demostrables en ZFC, pero su consistencia puede demostrarse sin suponer la consistencia de ningún cardinal grande. Veamos ahora una consecuencia que, como sabemos, implica la consistencia de que exista un cardinal débilmente compacto:

Teorema 13.14 (APP) *No existen $\aleph_2$-árboles de Aronszajn.*

DEMOSTRACIÓN: Relativizamos la prueba a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Supongamos que existe (en M) un $\aleph_2$-árbol de Aronszajn A. Sea $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega_1, 2, \aleph_1)$ y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Según 5.40, en $M[G]$ se cumple $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, pero $\mathbb{P}$ es $\aleph_1$-cerrado, luego M y $M[G]$ tienen los mismos elementos de $\mathcal{P}\omega$, luego $\aleph_2^M$ se colapsa en $M[G]$ a un ordinal de cardinal $\aleph_1$.

Si llamamos $\omega_1 = \omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$ y $\kappa = \omega_2^M$, entonces κ es en $M[G]$ un ordinal de cardinal $\aleph_1$ y, más aún, tiene cofinalidad ω_1 en $M[G]$, pues si tuviera cofinalidad numerable, una sucesión cofinal estaría en M, lo cual es absurdo. Podemos tomar, pues, $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $\mathbb{1} \Vdash \tau : \check{\omega}_1 \longrightarrow \check{\kappa}$ cofinal y normal.

Sea $A_{\tau_G} = \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} \mathrm{Niv}_{\tau_G(\alpha)}(A) \in M[G]$, que es un árbol de altura ω_1. El teorema 12.2 nos da que A no tiene caminos en $M[G]$, luego A_{τ_G} tampoco, pero no podemos decir que es un $\aleph_1$-árbol de Aronszajn en $M[G]$ porque sus niveles pueden tener cardinal $\aleph_1$.

Sea $\mathbb{Q} \in M[G]$ el conjunto formado por todas las aplicaciones $q : a \longrightarrow \omega$, donde $a \subset A_{\tau_G}$ es finito y $\bigwedge st \in a(s < t \rightarrow q(s) \neq q(t))$, considerado como c.p.o. con la relación inversa de la inclusión. En la prueba del teorema [TC 9.28] se ve que si A_{τ_G} es un $\aleph_1$-árbol de Aronszajn entonces $\mathbb{Q}$ cumple la c.c.n. Sin embargo, se observa sin dificultad que la prueba vale sin cambio alguno bajo las hipótesis que cumple A_{τ_G} en $M[G]$, es decir, que es un árbol de altura $\aleph_1$ sin ramas no numerables.

Pongamos que $\mathbb{Q} = \pi_G$, donde π es un $\mathbb{P}$-nombre para un c.p.o. tal que $\mathbb{1}$ fuerza que π cumple la definición de $\mathbb{Q}$. En particular $\mathbb{1} \Vdash \pi$ cumple la c.c.n., luego $\mathbb{P} * \pi$ es propio en M.

Sea $\{f_\gamma\}_{\gamma<\kappa} \in M$ tal que $f_\gamma : \omega_1 \longrightarrow \mathrm{Niv}_\gamma(A)$ suprayectiva. Para cada α, $\delta < \omega_1$, consideramos el conjunto

$$D_{\alpha,\delta} = \{(p, \sigma) \in \mathbb{P} * \pi \mid \bigvee \gamma n\, (p \Vdash \tau(\check{\alpha}) = \check{\gamma} \wedge \check{f}_\gamma(\check{\delta}) \in \mathcal{D}\sigma \wedge \sigma(\check{f}_\gamma(\check{\delta})) = \check{n}\}.$$

Observemos que es denso, pues si $(p, \sigma) \in \mathbb{P} * \pi$ y G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $p \in G$, entonces $\tau_G : \omega_1 \longrightarrow \kappa$, luego podemos considerar $\gamma = \tau(\alpha)$. Entonces $s = f_\gamma(\delta) \in A$ y, por otra parte, $\mathcal{D}\sigma_G \subset A$. Si $s \in \mathcal{D}\sigma_G$ tomamos $n = \sigma_G(s)$ y llamamos $q = \sigma_G$. En caso contrario consideramos una extensión $q = \sigma_G \cup \{(s, n)\} \in \mathbb{Q}$, lo cual es posible sin más que elegir n fuera de la imagen de σ_G. Expresamos $q = \sigma'_G$, con $\sigma' \in \hat{\pi}$, y tomamos $p' \in G$, $p' \leq p$ tal que

$$p' \Vdash \sigma' \leq \sigma \wedge \tau(\check{\alpha}) = \check{\gamma} \wedge \check{f}_\gamma(\check{\delta}) \in \mathcal{D}\sigma' \wedge \sigma'(\check{f}_\gamma(\check{\delta})) = \check{n}.$$

Así es claro que $(p', \sigma') \in D_{\alpha,\delta}$ y extiende a (p, σ).

Por APP existe un filtro $H \in M$ que es $\mathbb{P} * \pi$-genérico sobre la familia formada por los conjuntos $D_{\alpha,\delta}$. Esto significa que para cada α, $\delta < \omega_1$ existe $(p_{\alpha,\delta}, \sigma_{\alpha,\delta}) \in D_{\alpha,\delta} \cap H$.

Definimos $g_H : \omega_1 \longrightarrow \kappa$ mediante $g_H(\alpha) = \gamma$ si y sólo si existe $(p, \sigma) \in H$ tal que $p \Vdash \tau(\check{\alpha}) = \check{\gamma}$. Esto es correcto, porque cualquier $(p_{\alpha,\delta}, \sigma_{\alpha,\delta})$ cumple lo requerido y dos condiciones que cumplan esto tienen una extensión común en H, lo que obliga a que el γ correspondiente sea el mismo. Es claro que g_H es estrictamente creciente.

Sea $A_H = \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} \mathrm{Niv}_{g_H(\alpha)}(A)$, que es un árbol de altura $\aleph_1$. Definimos también $f_H : A_H \longrightarrow \omega$ mediante $f_H(s) = n$ si y sólo si existe $(p, \sigma) \in H$ tal que $p \Vdash \check{s} \in \mathcal{D}\sigma \wedge \sigma(\check{s}) = \check{n}$. Esto es correcto porque si $s \in \mathrm{Niv}_\gamma(A)$, con $\gamma = g_H(\alpha)$

y $s = f_\gamma(\delta)$, entonces $(p_{\alpha,\delta}, \sigma_{\alpha,\delta})$ cumple lo requerido y el hecho de que H sea un filtro implica que sólo hay un valor posible para n. Es claro que

$$\bigwedge st \in A_H (s < t \rightarrow f_H(s) \neq f_H(t)).$$

De aquí se desprende que toda cadena en A_H tiene que ser numerable, pero si $\lambda = \sup g_H[\omega_1] < \kappa$, podemos tomar $s \in \mathrm{Niv}_\lambda(A)$ y para cada $\alpha < \omega_1$ existe un único $s_\alpha \in \mathrm{Niv}_{g_H(\alpha)}(A)$ tal que $s_\alpha < s$, y así $\{s_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ es una cadena no numerable en A_H, contradicción. ■

APP tiene muchas otras consecuencias, especialmente en topología, pero exponerlas aquí requeriría introducir un gran número de preliminares. Citemos, por ejemplo una de ellas:

> *Si X es un espacio de Hausdorff cuyos subespacios discretos son todos numerables, entonces $|X| \leq 2^{\aleph_0}$.*

Otra consecuencia destacada de AEP, más concretamente, de $\neg\Box_\kappa$, donde κ es un cardinal límite fuerte singular, es que $L(\mathcal{P}\omega) \vDash \mathrm{AD}$.

13.4 El Axioma de Martin Máximo

Para terminar vamos a presentar sin probar su consistencia la mayor generalización posible del axioma de Martin. Partimos del resultado siguiente:

Teorema 13.15 *Si $\mathbb{P}$ es un c.p.o. propio y $E \subset \omega_1$ es estacionario, entonces $\mathbb{1} \Vdash \check{E}$ es estacionario en $\check{\omega}_1$.*

Demostración: Por 11.14 sabemos que $\mathbb{P}$ fuerza que todo conjunto estacionario en $\mathcal{P}_{\aleph_1}\omega_1$ se conserva estacionario (y por 11.11 se conserva el cardinal $\aleph_1$).

Observemos ahora que si $E \subset \omega_1$ es estacionario, entonces

$$E^* = \{A \in \mathcal{P}_{\aleph_1}\omega_1 \mid \sup A \in E\}$$

es estacionario en $\mathcal{P}_{\aleph_1}\omega_1$. En efecto, si C es c.n.a. en $\mathcal{P}_{\aleph_1}\omega_1$, se cumple que $C^* = \{\sup A \mid A \in C\}$ contiene un c.n.a. en ω_1, pues podemos construir una sucesión $\{A_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ en C creciente para la inclusión, de modo que $A_\lambda = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} A_\delta$ y que la sucesión $\{\sup A_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ sea estrictamente creciente, luego normal. Por consiguiente existe un $A \in C$ tal que $\sup A \in E$, luego $A \in C \cap E^*$.

Recíprocamente, si E^* es estacionario en $\mathcal{P}_{\aleph_1}\omega_1$, entonces E es estacionario en ω_1, pues si C es c.n.a. en ω_1, podemos restringirlo para que esté formado por ordinales límite, y entonces es claro que C es c.n.a. en $\mathcal{P}_{\aleph_1}\omega_1$ (viendo a cada $\lambda \in C$ como subconjunto numerable de ω_1). Por lo tanto, existe $\lambda \in C \cap E^*$, luego $\lambda = \sup \lambda \in C \cap E$.

Ahora la conclusión es inmediata: si $E \subset \omega_1$ es estacionario, entonces $\mathbb{1}_\mathbb{P}$ fuerza que $\check{E}^*$ es estacionario en $\mathcal{P}_{\aleph_1}\omega_1$, luego fuerza que $\check{E}$ es estacionario en ω_1. ■

Diremos que un c.p.o. $\mathbb{P}$ *conserva los subconjuntos estacionarios de* ω_1 si cumple la conclusión del teorema anterior. Observemos que un conjunto estacionario en un ordinal de cofinalidad numerable tiene necesariamente complemento acotado, pues si el complemento es no acotado contiene una sucesión cofinal creciente, que es trivialmente un c.n.a.

Por lo tanto, todo c.p.o. que conserva los subconjuntos estacionarios de ω_1 conserva $\aleph_1$, ya que en ω_1 existen conjuntos estacionarios con complemento no acotado, que tienen que seguir siendo estacionarios en las extensiones genéricas.

Axioma de Martin Máximo (MM) *Si $\mathbb{P}$ es un c.p.o. que conserva los subconjuntos estacionarios de ω_1 y $\mathcal{D}$ es una familia de a lo sumo $\aleph_1$ subconjuntos densos en $\mathbb{P}$, existe un filtro $\mathbb{P}$–genérico sobre $\mathcal{D}$ (es decir, un filtro en $\mathbb{P}$ que corta a todos los elementos de $\mathcal{D}$).*

El teorema anterior implica que MM $\rightarrow$ APP. El nombre de "axioma de Martin máximo" está justificado por el resultado siguiente:

Teorema 13.16 *Si $\mathbb{P}$ es un c.p.o. tal que existe $E \subset \omega_1$ de modo que $\mathbb{1} \Vdash \check{E}$ no es estacionario en $\check{\omega}_1$, entonces existe una familia $\mathcal{D}$ de $\aleph_1$ subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ tal que ningún filtro es $\mathbb{P}$-genérico sobre $\mathcal{D}$.*

Demostración: Sea $\sigma \in V^{\mathbb{P}}$ tal que

$$\mathbb{1} \Vdash \sigma \text{ es c.n.a. en } \check{\omega}_1 \land \sigma \cap \check{E} = \varnothing.$$

Para cada $\alpha < \omega_1$ consideremos los conjuntos densos

$$D_\alpha = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee \beta(\alpha \leq \beta < \omega_1 \land p \Vdash \check{\beta} \in \sigma)\},$$

$$E_\alpha = \{p \in \mathbb{P} \mid (p \Vdash \check{\alpha} \in \sigma) \lor \bigvee \gamma < \alpha \bigwedge \delta(\gamma < \delta < \alpha \rightarrow p \Vdash \check{\delta} \notin \sigma)\}.$$

Veamos que ningún filtro G en $\mathbb{P}$ puede cortar a todos estos conjuntos. En tal caso el conjunto

$$C = \{\alpha < \omega_1 \mid \bigvee p \in G \; p \Vdash \check{\alpha} \in \sigma\}$$

sería c.n.a. en ω_1. En efecto, dado $\alpha < \omega_1$, como $D_\alpha \cap G \neq \varnothing$, existe un $\beta \in C$ tal que $\alpha \leq \beta$, luego C no está acotado. Si $C \cap \lambda$ no está acotado en λ, como $E_\lambda \cap G \neq \varnothing$, se cumple que $\lambda \in C$, pues la alternativa sería que existe $p \in G$ y $\gamma < \alpha$ tal que si $\gamma < \delta < \alpha$ entonces $p \Vdash \check{\delta} \notin \sigma$, pero podríamos tomar $\delta \in C$ tal que $\delta > \gamma$, y entonces existe $q \in G$ (que podemos tomar $q \leq p$) tal que $q \Vdash \check{\delta} \in \sigma$, contradicción.

Por consiguiente, existe $\alpha \in G \cap E$, luego existe $p \in G$ tal que $p \Vdash \check{\alpha} \in \sigma \cap \check{E}$, contradicción. ■

Más precisamente, es fácil ver que MM implica que su enunciado es válido también para c.p.o.s $\mathbb{P}$ tales que si $E \subset \omega_1$ es estacionario, entonces $\neg \mathbb{1} \Vdash \check{E}$ no es estacionario en $\check{\omega}_1$, y el teorema anterior implica que cualquier extensión de MM a una familia de c.p.o.s que extendiera estrictamente a la formada por los que tienen esta propiedad sería contradictoria.

Nota El teorema 13.1 puede generalizarse para probar la consistencia de MM, de modo que a partir de un modelo con un cardinal supercompacto puede construirse una extensión genérica que cumpla MM. Sin embargo, las técnicas que hemos usado para probar 13.1 se quedan cortas para este fin. En lugar de utilizar una iteración con soportes numerables, es necesario usar lo que se llama "soportes numerables revisados" y una clase de c.p.o.s intermedios entre los c.p.o.s propios y los c.p.o.s que conservan los subconjuntos estacionarios de ω_1, los llamados c.p.o.s *semipropios.* No vamos a entrar en los detalles. ■

Varias de las consecuencias de APP que hemos mostrado son refinamientos de demostraciones que originalmente partían de MM. Por ejemplo, PRA es una variante del principio que vamos a introducir a continuación:

Definición 13.17 Diremos que un conjunto $E \subset \mathcal{P}_{\aleph_1} X$ es *proyectivamente estacionario* si para todo $F \subset \omega_1$ estacionario, el conjunto $\{A \in E \mid A \cap \omega_1 \in F\}$ es estacionario en $\mathcal{P}_{\aleph_1} X$.

Principio de Reflexión Fuerte (PRF) *Para todo cardinal regular $\kappa \geq \aleph_2$, si E es proyectivamente estacionario en $\mathcal{P}_{\aleph_1} H(\kappa)$, existe una sucesión $\{N_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ en E de submodelos elementales de $H(\kappa)$ tal que si $\alpha < \beta < \omega_1$ entonces $N_\alpha \in N_\beta$ y si $\lambda < \omega_1$ es un ordinal límite entonces $N_\lambda = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} N_\delta$.*

Para probar que MM implica este principio usaremos algunos resultados previos:

Teorema 13.18 *Si $E \subset \omega_1$ es estacionario y $\alpha, \gamma < \omega_1$, existe $C \subset E \setminus \gamma$ cerrado y de ordinal $\alpha + 1$.*

DEMOSTRACIÓN: Vamos a probar que, para cada $\alpha < \omega_1$ existe $C \subset E \setminus \gamma$ de ordinal α que es cerrado en ω_1 si α es un ordinal sucesor y que es cerrado en $\xi = \sup C$ si α es un ordinal límite.

Razonamos por inducción sobre α. El caso $\alpha = 0$ es trivial. Si $C \subset E \setminus \gamma$ es un cerrado de ordinal α, es claro que existe $\xi \in E$ tal que $C \subset \xi$, luego $C \cup \{\xi\} \subset E \setminus \gamma$ tiene ordinal $\alpha + 1$. Ahora bien, si α es un ordinal límite necesitaríamos que fuera $\xi = \sup C$ (para que $C \cup \{\xi\}$ sea cerrado) y no es necesariamente cierto que $\xi \in E$.

Para tratar este caso no trivial construimos una sucesión $\{A_\delta\}_{\delta<\alpha}$ de conjuntos contenidos en $E \setminus \gamma$ de ordinal α y con la propiedad de que si $\gamma_\delta = \sup \bigcup\limits_{\epsilon<\delta} A_\epsilon$ entonces $A_\delta \subset E \setminus \gamma_\delta$ y A_δ es cerrado en $\gamma_{\delta+1}$. Esto es posible por la hipótesis de inducción para α (tomando $\gamma = \gamma_\delta$). Es claro entonces que la sucesión $\{\gamma_\delta\}_{\delta<\omega_1}$ es normal, luego $\{\gamma_\lambda \mid \lambda < \omega_1\}$ es c.n.a. en ω_1, luego existe un $\lambda < \omega_1$ tal que $\gamma_\lambda \in E$. Sea $\{\delta_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión cofinal creciente en λ y sea $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ cofinal creciente en α.

Para cada $n \in \omega$, tenemos que A_{δ_n} tiene ordinal $\alpha > \alpha_n$, luego podemos tomar B_n como el conjunto de los elementos de A_{δ_n} que, a través de la semejanza con α, se corresponden con los ordinales $\alpha_n < \epsilon \leq \alpha_{n+1}$. Finalmente, llamamos

$B = \bigcup\limits_{n\in\omega} B_n \subset E\setminus\gamma$. Es fácil ver que tiene ordinal α, que $\sup B = \gamma_\lambda \in E$ y que B es cerrado en γ_λ, por lo que $B\cup\{\gamma_\lambda\}$ cumple lo requerido.

Suponemos ahora que el resultado es cierto para todo $\alpha < \lambda$. Tomamos una sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ cofinal creciente en λ formada por ordinales sucesores y elegimos $A_n \subset E\setminus\gamma$ cerrado de ordinal β_n tal que $\alpha_n + \beta_n = \alpha_{n+1}$, con la propiedad adicional de que si $\gamma_n = \sup A_n$ entonces $A_n \subset E\setminus\gamma_n$. Basta tomar $A = \bigcup\limits_{n\in\omega} A_n$. ■

Teorema 13.19 *Si $E \subset \mathcal{P}_{\aleph_1}[H_\kappa]$ es estacionario y $\gamma < \omega_1$, existe una sucesión $\{N_\alpha\}_{\alpha\leq\gamma}$ en E en las condiciones de* PRF *(salvo que su longitud es numerable).*

Demostración: Relativizamos la prueba a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Sea $\mathbb{P}\in M$ el conjunto formado por las sucesiones $\{N_\alpha\}_{\alpha\leq\beta}$ de submodelos elementales numerables de $H(\kappa)$ de longitud $\beta<\omega_1$ (no exigimos que estén en E) tales que $N_\alpha\in N_{\alpha+1}$ y $N_\lambda = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} N_\delta$. Consideramos a $\mathbb{P}$ como c.p.o. de modo que una condición extiende a otra si la extiende como sucesión.

Observemos que $\mathbb{P}$ es $\aleph_1$-cerrado, pues si $\{p_n\}_{n<\omega}$ es una sucesión decreciente de condiciones, entonces $p^* = \bigcup\limits_{n\in\omega} p_n$ es una condición salvo por que su longitud es un ordinal límite $\lambda<\omega_1$ (excepto en el caso trivial en que la sucesión dada sea finalmente constante), pero claramente $p = p^*\cup(\lambda, \bigcup\limits_{\delta<\lambda} p^*(\delta))\in\mathbb{P}$ extiende a la sucesión dada.

Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Es inmediato que, para todo $\delta<\omega_1$, el conjunto D_δ de las condiciones de longitud $\geq\delta$ es denso en $\mathbb{P}$, por lo que si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, en $M[G]$ determina una sucesión $\{N_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ que enumera un cerrado en $\mathcal{P}_{\aleph_1}H(\kappa)^M$. De hecho es no acotado, porque, para todo $x\in H(\kappa)^M$, el conjunto E_x formado por las condiciones p tales que $x\in p(\delta)$, para cierto δ en su dominio, es denso en $\mathbb{P}$.

Por otra parte, como $\mathbb{P}$ es propio, el teorema 11.14 d) implica que E es estacionario en $\mathcal{P}_{\aleph_1}H(\kappa)^M$, y de aquí se sigue que $\{\alpha<\omega_1 \mid N_\alpha\in E\}$ es estacionario en ω_1, pues si C es c.n.a. en ω_1, entonces $\{N_\alpha \mid \alpha\in C\}$ es c.n.a. en $\mathcal{P}_{\aleph_1}H(\kappa)^M$, luego corta a E.

Por el teorema anterior, $\{\alpha<\omega_1 \mid N_\alpha\in E\}$ contiene un cerrado $\{\alpha_\delta\}_{\delta\leq\gamma}$ de ordinal $\gamma+1$, luego la sucesión $\{N_{\alpha_\delta}\}_{\delta\leq\gamma}$ cumple lo requerido salvo que, en principio, está en $M[G]$ y la necesitamos en M. Ahora bien, de hecho está en M porque $\mathbb{P}$ es $\aleph_1$-cerrado, todos los $N_{\alpha_\delta}\subset H(\kappa)^M$ son numerables y γ es numerable. ■

Ahora ya podemos probar:

Teorema 13.20 MM $\rightarrow$ PRF.

Demostración: Sea $\kappa\geq\aleph_2$ y $E\subset\mathcal{P}_{\aleph_1}H(\kappa)$ proyectivamente estacionario. Sea $\mathbb{P}$ el conjunto de las sucesiones $\{N_\alpha\}_{\alpha\leq\gamma}$, con $\gamma<\omega_1$ que cumplen la conclusión de PRF salvo que su longitud no es ω_1. Consideramos a $\mathbb{P}$ como c.p.o. con el orden que hace que una condición extiende a otra si la extiende como sucesión.

Para cada $\alpha < \omega_1$ y cada $x \in H(\kappa)$, sean

$$D_\eta = \{p \in \mathbb{P} \mid \eta \in \mathcal{D}p\}, \quad E_x = \{p \in \mathbb{P} \mid \bigvee \alpha \in \mathcal{D}p\ x \in p(\alpha)\}.$$

Se cumple que ambos conjuntos son densos. En efecto, dados η, x y una condición $p = \{N_\alpha\}_{\alpha\leq\gamma}$ (donde no perdemos generalidad si suponemos que $\gamma < \eta$), el conjunto $E^* = \{M \in E \mid \{N_\gamma, x\} \subset M\}$ es estacionario en $\mathcal{P}_{\aleph_1}(\kappa)$, luego por el teorema anterior existe $\{M_\alpha\}_{\alpha\leq\eta+1} \in \mathbb{P}$ con todos sus elementos en E^*. Definimos $q \in \mathbb{P}$ mediante

$$q(\alpha) = \begin{cases} p(\alpha) & \text{si } \alpha \leq \gamma, \\ M_\alpha & \text{si } \gamma < \alpha \leq \eta. \end{cases}$$

Observemos que $N_\gamma \in q(\gamma + 1)$, por lo que ciertamente se cumple que $q \in \mathbb{P}$, y además $x \in q(\gamma + 1)$, por lo que $q \in D_\eta \cap E_x$ y $q \leq p$.

Ahora basta probar que $\mathbb{P}$ conserva conjuntos estacionarios, pues entonces por MM existirá un filtro G en $\mathbb{P}$ que corte a todos los conjuntos D_α, el cual determinara una sucesión $\{N_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ en las condiciones requeridas por PRF.

Ahora relativizamos la prueba a un modelo transitivo numerable M de ZFC. Sea $F \subset \omega_1$ un conjunto estacionario, sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y veamos que E sigue siendo estacionario en $M[G]$. Para ello tomamos un c.n.a. $C \subset \omega_1^M$ en $M[G]$. Digamos que $C = \sigma_G$, donde $\mathbb{1} \Vdash \sigma$ es c.n.a. en $\check{\omega}_1$. Basta probar que $\mathbb{1} \Vdash \sigma \cap \check{E} \neq \varnothing$. A partir de aquí trabajamos en M o, equivalentemente, podemos volver a trabajar en V.

Por hipótesis tenemos que el conjunto $E_F = \{N \in E \mid N \cap \omega_1 \in F\}$ es estacionario en $\mathcal{P}_{\aleph_1}H(\kappa)$. Fijemos una condición $p \in \mathbb{P}$ y sea μ un cardinal regular suficientemente grande y sea $N \prec H(\mu)$ numerable que contenga a σ, E, E_F, p, $\mathbb{P}$, etc. Como el conjunto de los modelos N que cumplen esto es c.n.a. en $\mathcal{P}_{\aleph_1}H(\mu)$, el conjunto de las intersecciones $N \cap H(\kappa)$ es c.n.a. en $\mathcal{P}_{\aleph_1}H(\kappa)$, luego podemos exigir que $N \cap H(\kappa) \in E_F$, y por lo tanto que $\delta = N \cap \omega_1 \in F$.

Sea $\{D_n\}_{n\in\omega}$ una enumeración de todos los subconjuntos densos en $\mathbb{P}$ que están en N. Definimos $p_0 = p$ y elegimos $p_{n+1} \leq p_n$ tal que $p_{n+1} \in D_n \cap N$. Pongamos que el dominio de p_n es $\gamma_n + 1$. Entonces $\delta = \sup\limits_n \gamma_n$. En efecto, para cada $\alpha < \delta$ tiene que ser $D_\alpha \in N$, luego algún $p_n \in D_\alpha$.

Similarmente, $N \cap H(\kappa) = \bigcup\limits_{n\in\omega} p_n(\gamma_n)$, usando ahora que si $x \in N \cap H(\kappa)$, entonces $E_x \in N$.

Por consiguiente, $q = \bigcup\limits_{n\in\omega} p_n \cup \{(\delta, N \cap H(\kappa))\} \in \mathbb{P}$ y extiende a todas las condiciones p_n.

Si $\alpha < \delta$, como $\mathbb{1} \Vdash \sigma$ no está acotado en $\check{\omega}_1$, existe un $\tau \in V^{\mathbb{P}}$ tal que $\mathbb{1} \Vdash \tau \in \sigma \wedge \check{\alpha} < \tau$, y como α, $\sigma \in N$, podemos exigir que $\tau \in N$. A su vez,

$$\{r \in \mathbb{P} \mid \bigvee \beta < \omega_1\ r \Vdash \tau < \check{\beta}\} \in N,$$

y es un conjunto denso en $\mathbb{P}$, luego contiene a algún p_n, luego existe un $\beta \in M$ (es decir, $\beta < \delta$) tal que $q \Vdash \tau < \check{\beta}$, luego $q \Vdash \check{\alpha} < \tau \in \sigma \cap \check{\delta}$. De aquí se sigue que q fuerza que $\sigma \cap \check{\delta}$ no está acotado en $\check{\delta}$ y, como también fuerza que σ es cerrado, $q \Vdash \check{\delta} \in \sigma \cap \check{E}$.

Hemos probado que el conjunto de las condiciones q tales que $q \Vdash \sigma \cap \check{E} \neq \varnothing$ es denso en $\mathbb{P}$, luego $\mathbb{1} \Vdash \sigma \cap \check{E} \neq \varnothing$. ■

Como aplicación probamos que [CG 6.30] no puede extenderse a $\kappa = \aleph_1$:

Teorema 13.21 (PRF) *El ideal de los conjuntos no estacionarios en ω_1 es $\aleph_2$-saturado.*

Demostración: Sea W una anticadena maximal de conjuntos estacionarios en ω_1 (es decir, una familia de conjuntos estacionarios tal que la intersección de dos cualesquiera de sus miembros es no estacionaria). Tenemos que probar que $|W| \leq \aleph_1$. Para ello consideramos el conjunto

$$E = \{N \in \mathcal{P}_{\aleph_1} H(\aleph_2) \mid N \prec H(\aleph_2) \land W \in M \land \bigvee A \in W \cap N\ N \cap \omega_1 \in A\}.$$

Veamos que E es proyectivamente estacionario. Si $F \subset \omega_1$ es estacionario, entonces, por la maximalidad de W, existe un $A \in W$ tal que $A \cap F$ es estacionario en ω_1. Sea C un c.n.a. en $\mathcal{P}_{\aleph_1} H(\aleph_2)$. Cortando C con otro c.n.a. podemos suponer que todo $N \in C$ cumple que $N \prec H(\aleph_2)$ y que W, $A \in M$. Entonces podemos construir una cadena $\{N_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ en C creciente para la inclusión tal que la sucesión $\{N_\alpha \cap \omega_1\}_{\alpha<\omega_1}$ sea también creciente, luego normal, luego existe un $N \in C$ (uno de los términos de la cadena) tal que $N \cap \omega_1 \in A \cap F$. Así $N \in C \cap \{N \in E \mid N \cap \omega_1 \in F\}$, como había que probar.

Sea $\{N_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ una cadena en E en las condiciones de PRF. Basta probar que, si $N = \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} N_\alpha$, se cumple que $W \subset N$.

Supongamos que existe $A \in W \setminus N$. Sea M el núcleo de Skolem de $N \cup \{A\}$ y, para cada $\alpha < \omega_1$, sea M_α el núcleo de Skolem de $N_\alpha \cup \{A\}$. Pasando a una subsucesión podemos suponer que la sucesión $\{N_\alpha \cap \omega_1\}_{\alpha<\omega_1}$ sigue siendo normal, y que también lo es $\{M_\alpha \cap \omega_1\}_{\alpha<\omega_1}$. Entonces

$$C = \{\lambda < \omega_1 \mid N_\lambda \cap \omega_1 = M_\lambda \cap \omega_1 = \lambda\}$$

es c.n.a. en ω_1, luego podemos tomar $\lambda \in C \cap A$. Como $N_\lambda \in E$, existe $B \in W \cap N_\alpha$ tal que $\lambda = N_\lambda \cap \omega_1 \in B$. Como $B \in N$, tenemos que $A \cap B$ no es estacionario, luego existe un c.n.a. D en ω_1 tal que $A \cap B \cap D = \varnothing$, y como A, $B \in M_\lambda$, podemos exigir que $D \in M_\lambda$, pero entonces se cumple que (D no está acotado en $\omega_1)^{M_\lambda}$, y como $\lambda = M_\lambda \cap \omega_1$, resulta que $D \cap \lambda$ no está acotado en λ, luego $\lambda \in A \cap B \cap D$, contradicción. ■

Así pues, aunque la propiedad de tener un ideal κ^+ saturado implica la consistencia de que exista un cardinal medible, el propio cardinal κ no tiene por qué ser grande, al contrario de lo que sucede si tiene un ideal κ-saturado (teorema [CG 6.25]). Puede probarse que el hecho de que $\aleph_1$ tenga un ideal $\aleph_2$-saturado implica la consistencia de que existan cardinales grandes mayores que los medibles.

Apéndice A

Extensiones sin álgebras de Boole

En el capítulo IV, para definir la relación $\Vdash$ asociada a un c.p.o. $\mathbb{P}$ y para probar que cumple el teorema fundamental de la teoría de extensiones, nos hemos apoyado en que $\mathbb{P}$ puede completarse hasta un álgebra de Boole completa $\mathbb{B}$ y hemos demostrado en primer lugar el teorema para este tipo de álgebras. En este apéndice demostraremos que es posible definir $\Vdash$ directamente a partir de $\mathbb{P}$, sin hacer referencia a $\mathbb{B}$, aunque la definición y la prueba del teorema fundamental se vuelven más sofisticadas.

Una de las ventajas de este enfoque es que permite construir extensiones genéricas de modelos de ZF $-$ AP, y en este contexto no vale el enfoque que conocemos porque para demostrar que todo c.p.o. tiene una compleción se requiere el axioma de partes.

Teorema A.1 *Existe una fórmula (metamatemática) $p \Vdash \sigma_1 = \sigma_2$ con las variables libres p, $\mathbb{P}$, $\leq$, $\mathbb{1}$, σ_1, σ_2, que es absoluta para modelos transitivos de* ZF$-$AP *y que verifica:*

Si $\mathbb{P}$ es un c.p.o., $p \in \mathbb{P}$ y σ_1, $\sigma_2 \in V^{\mathbb{P}}$, entonces $p \Vdash \sigma_1 = \sigma_2$ si y sólo si

a) Para todo $(\pi_1, s_1) \in \sigma_1$, el conjunto

$$\{q \in \mathbb{P} \mid q \leq p \wedge (q \leq s_1 \to \bigvee \pi_2 s_2((\pi_2, s_2) \in \sigma_2 \wedge q \leq s_2 \wedge q \Vdash \pi_1 = \pi_2))\}$$

es denso bajo p.

b) Para todo $(\pi_2, s_2) \in \sigma_2$, el conjunto

$$\{q \in \mathbb{P} \mid q \leq p \wedge (q \leq s_2 \to \bigvee \pi_1 s_1((\pi_1, s_1) \in \sigma_1 \wedge q \leq s_1 \wedge q \Vdash \pi_1 = \pi_2))\}$$

es denso bajo p.

Demostración: Definimos $H : V^{\mathbb{P}} \times V^{\mathbb{P}} \longrightarrow \mathcal{P}\mathbb{P}$ de modo que $H(\sigma_1, \sigma_2)$ es el conjunto de todas las condiciones $p \in \mathbb{P}$ tales que

a) Para todo $(\pi_1, s_1) \in \sigma_1$, el conjunto

$$\{q \in \mathbb{P} \mid q \leq p \wedge (q \leq s_1 \rightarrow \bigvee \pi_2 s_2((\pi_2, s_2) \in \sigma_2 \wedge q \leq s_2 \wedge q \in H(\pi_1, \pi_2)))\}$$

es denso bajo p.

b) Para todo $(\pi_2, s_2) \in \sigma_2$, el conjunto

$$\{q \in \mathbb{P} \mid q \leq p \wedge (q \leq s_2 \rightarrow \bigvee \pi_1 s_1((\pi_1, s_1) \in \sigma_1 \wedge q \leq s_1 \wedge q \in H(\pi_1, \pi_2)))\}$$

es denso bajo p.

Se trata de una definición por recursión sobre la relación bien fundada

$$(\pi_1, \pi_2)\ R\ (\sigma_1, \sigma_2) \leftrightarrow \pi_1 \in \operatorname{ct} \sigma_1 \wedge \pi_2 \in \operatorname{ct} \sigma_2.$$

Basta definir $p \Vdash \sigma_1 = \sigma_2 \equiv p \in H(\sigma_1, \sigma_2)$. El carácter absoluto de esta fórmula se demuestra fácilmente por inducción sobre la misma relación bien fundada. ■

A partir de aquí definimos recurrentemente una fórmula $p \Vdash \phi$ para cada fórmula metamatemática sin descriptores:

Definición A.2 Si $\mathbb{P}$ es un c.p.o. y σ_1, $\sigma_2 \in V^{\mathbb{P}}$, definimos

$$p \Vdash \sigma_1 \in \sigma_2 \equiv \{q \in \mathbb{P} \mid \bigvee \pi s((\pi, s) \in \sigma_2 \wedge q \leq s \wedge q \Vdash \pi = \sigma_1)\}$$

es denso bajo p.

Para cada fórmula metamatemática $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ sin descriptores definimos la fórmula $p \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ como la construida según las reglas siguientes:

a) $p \Vdash \sigma_i = \sigma_j$ y $p \Vdash \sigma_i \in \sigma_j$ son las ya definidas,

b) $p \Vdash \neg\phi \equiv \neg \bigvee q \in \mathbb{P}(q \leq p \wedge q \Vdash \phi)$,

c) $p \Vdash \phi \rightarrow \psi \equiv \{q \in \mathbb{P} \mid q \Vdash \phi \rightarrow q \Vdash \psi\}$ es denso bajo p,

d) $p \Vdash \bigwedge x \phi(x) \equiv \{r \in \mathbb{P} \mid \bigwedge \sigma(\sigma$ es un $\mathbb{P}$-nombre $\rightarrow r \Vdash \phi(\sigma))\}$ es denso bajo p.

En los teoremas siguientes ponemos entre paréntesis la hipótesis "sin descriptores" porque después veremos que todos los resultados son igualmente válidos para fórmulas con descriptores.

Teorema A.3 *Sea $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula (sin descriptores). Sea $\mathbb{P}$ un c.p.o., sea $p \in \mathbb{P}$ y san $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in V^{\mathbb{P}}$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) $p \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$,

b) $\bigwedge r \in \mathbb{P}(r \leq p \rightarrow r \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))$,

c) $\{r \in \mathbb{P} \mid r \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\}$ *es denso bajo p.*

Demostración: Es inmediato que b) $\rightarrow$ a) y que b) $\rightarrow$ c). Probaremos las implicaciones a) $\rightarrow$ b) y c) $\rightarrow$ a) por inducción sobre la longitud de ϕ.

Supongamos que $\phi \equiv \sigma_1 = \sigma_2$.

a) $\rightarrow$ b). Sea $r \leq p$. Por a) y el teorema A.1, si $(\pi_1, s_1) \in \sigma_1$ el conjunto

$$D_p = \{q \in \mathbb{P} \mid q \leq p \wedge (q \leq s_1 \rightarrow \bigvee \pi_2 s_2((\pi_2, s_2) \in \sigma_2 \wedge q \leq s_2 \wedge q \Vdash \pi_1 = \pi_2))\}$$

es denso bajo p.

Sea $s \leq r$. Entonces existe $q \in D_p$ tal que $q \leq s \leq r$ y, claramente, $q \in D_r$, luego tenemos que D_r es denso bajo r. Esto prueba la parte a) de A.1 para la fórmula $r \Vdash \sigma_1 = \sigma_2$. Igualmente se comprueba la parte b), con lo que concluimos que $r \Vdash \sigma_1 = \sigma_2$.

c) $\rightarrow$ a). Supongamos que $\{r \in \mathbb{P} \mid r \Vdash \sigma_1 = \sigma_2\}$ es denso bajo p. Sea $(\pi_1, s_1) \in \sigma_1$ y $t \leq p$. Entonces existe $r \leq t$ tal que $r \Vdash \sigma_1 = \sigma_2$. Por A.1, el conjunto D_r es denso bajo r, luego existe un $q \in D_r$ tal que $q \leq r \leq t \leq p$. Entonces $q \in D_p$, lo que prueba que D_p es denso bajo p. Esto es la parte a) de A.1, e igualmente se prueba la parte b), con lo que concluimos que $p \Vdash \sigma_1 = \sigma_2$.

Supongamos ahora que $\phi \equiv \sigma_1 \in \sigma_2$.

a) $\rightarrow$ b). Sea $r \leq p$. Por a) tenemos que el conjunto

$$D = \{q \in \mathbb{P} \mid \bigvee \pi s((\pi, s) \in \sigma_2 \wedge q \leq s \wedge q \Vdash \pi = \sigma_1)\}$$

es denso bajo p, luego también es denso bajo r, lo que prueba que $r \Vdash \sigma_1 \in \sigma_2$.

c) $\rightarrow$ a). Supongamos que $\{r \in \mathbb{P} \mid r \Vdash \sigma_1 \in \sigma_2\}$ es denso bajo p. Si $t \leq p$, entonces existe un $r \leq t$ tal que $r \Vdash \sigma_1 \in \sigma_2$, luego el conjunto D es denso bajo r, luego existe un $q \in D$ tal que $q \leq r \leq s \leq p$. Esto prueba que D es denso bajo p, luego $p \Vdash \sigma_1 \in \sigma_2$.

Supongamos el teorema para ϕ y veámoslo para $\neg\phi$.

a) $\rightarrow$ b). Suponemos que $p \Vdash \neg\phi$. Entonces $\neg \bigvee q \in \mathbb{P}(q \leq p \wedge q \Vdash \phi)$ luego, dado $r \leq p$, también se cumple $\neg \bigvee q \in \mathbb{P}(q \leq r \wedge q \Vdash \phi)$, de donde $r \Vdash \neg\phi$.

c) $\rightarrow$ a). Suponemos que $\{r \in \mathbb{P} \mid r \Vdash \neg\phi\}$ es denso bajo p. Hemos de probar que $\neg \bigvee q \in \mathbb{P}(q \leq p \wedge q \Vdash \phi)$. Si existiera tal q, podríamos tomar $r \leq q$ tal que $r \Vdash \neg\phi$. Por hipótesis de inducción se cumple a) $\rightarrow$ b) para ϕ, luego $r \Vdash \phi$, pero esto contradice la definición de $r \Vdash \neg\phi$.

Supongamos el teorema para ϕ y ψ y veámoslo para $\phi \rightarrow \psi$.

a) $\rightarrow$ b). Suponemos que $p \Vdash \phi \rightarrow \psi$. Esto significa que $\{q \in \mathbb{P} \mid q \Vdash \phi \rightarrow q \Vdash \psi\}$ es denso bajo p, luego es denso bajo q para todo $q \leq p$ y, por consiguiente, todo $q \leq p$ cumple $q \Vdash \phi \rightarrow \psi$.

c) $\rightarrow$ a). Supongamos que el conjunto $\{r \in \mathbb{P} \mid r \Vdash \phi \rightarrow \psi\}$ es denso bajo p. Hemos de probar que el conjunto $D = \{q \in \mathbb{P} \mid q \Vdash \phi \rightarrow q \Vdash \psi\}$ es denso bajo p y, en efecto, dado $q \leq p$, existe un $r \leq q$ tal que $r \Vdash \phi \rightarrow \psi$, de donde D es denso bajo r. Por consiguiente, existe un $s \leq r \leq q$ tal que $s \in D$.

Supongamos el teorema para ϕ y veámoslo para $\bigwedge x\,\phi(x)$.

a) $\rightarrow$ b). Supongamos que $p \Vdash \bigwedge x\,\phi(x)$. Esto significa que el conjunto

$$D = \{r \in \mathbb{P} \mid \bigwedge \sigma \in V^{\mathbb{P}}\, r \Vdash \phi(\sigma)\}$$

es denso bajo p, luego es denso bajo r para todo $r \leq p$, luego todo $r \leq p$ cumple $r \Vdash \bigwedge x\,\phi(x)$.

c) $\rightarrow$ a). Supongamos que $\{r \in \mathbb{P} \mid r \Vdash \bigwedge x\,\phi(x)\}$ es denso bajo p. Si $s \leq p$, existe un $r \leq s$ tal que $r \Vdash \bigwedge x\,\phi(x)$, luego el conjunto D anterior es denso bajo r, luego existe un $q \leq s \leq p$ tal que $q \in D$. Esto para todo $s \leq p$, luego D es denso bajo p, y esto significa que $p \Vdash \bigwedge x\,\phi(x)$. ■

El teorema siguiente contiene lo básico del teorema fundamental:

Teorema A.4 *Sea $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula (sin descriptores) con la lo sumo $x_1, \ldots, x_n$ como variables libres. Sea M un modelo transitivo de* ZF$-$AP, *sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o., sean $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in M^{\mathbb{P}}$ y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces*

a) Si $p \in G$ y $(p \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))^M$, entonces $\phi^{M[G]}(\sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG})$.

b) Si $\phi^{M[G]}(\sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG})$, entonces $\bigvee p \in G(p \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))^M$.

Demostración: Por inducción sobre la longitud de ϕ. Supongamos primero que $\phi \equiv \sigma_1 = \sigma_2$.

a) Si $(p \Vdash \sigma_1 = \sigma_2)^M$, de hecho tenemos que $p \Vdash \sigma_1 = \sigma_2$, pues la fórmula es absoluta. Suponemos además que $p \in G$ y hemos de probar que se cumple $(\sigma_{1G} = \sigma_{2G})^{M[G]}$, es decir, que $\sigma_{1G} = \sigma_{2G}$.

Consideramos en $M^{\mathbb{P}} \times M^{\mathbb{P}}$ la relación dada por $(\pi_1, \pi_2)\, R\, (\sigma_1, \sigma_2)$ si y sólo si cada π_i está en el dominio del correspondiente σ_i. Obviamente está bien fundada. Demostraremos el teorema por inducción sobre R. Tomamos σ_1 y $\sigma_2 \in M^{\mathbb{P}}$ y suponemos como hipótesis de inducción que si π_i está en el dominio de σ_i, $q \in G$ y $q \Vdash \pi_1 = \pi_2$ entonces $\pi_{1G} = \pi_{2G}$. Suponemos así mismo que $p \in G$ cumple $p \Vdash \sigma_1 = \sigma_2$ y hemos de probar que $\sigma_{1G} = \sigma_{2G}$. Por simetría basta probar una inclusión.

Tomamos $x \in \sigma_{1G}$, con lo que existe $(\pi_1, s_1) \in \sigma_1$ de modo que $x = \pi_{1G}$ y $s_1 \in G$. Sea $r \in G$ tal que $r \leq p \wedge r \leq s_1$. Por el teorema anterior $r \Vdash \sigma_1 = \sigma_2$, lo que significa que el conjunto

$$E = \{q \in \mathbb{P} \mid q \leq r \wedge (q \leq s_1 \rightarrow \bigvee \pi_2 s_2((\pi_2, s_2) \in \sigma_2 \wedge q \leq s_2 \wedge q \Vdash \pi_1 = \pi_2))\}$$

es denso bajo r. Claramente $E = E^M \in M$, y el teorema 4.6 nos da que existe un $q \in G \cap E$. Entonces $q \leq r \leq s_1$, luego existe $(\pi_2, s_2) \in \sigma_2$ según la definición de E. En particular $q \Vdash \pi_1 = \pi_2$, luego por hipótesis de inducción $x = \pi_{1G} = \pi_{2G}$. Por otra parte, $q \leq s_2$, luego $s_2 \in G$, lo que implica que $x = \pi_{2G} \in \sigma_{2G}$, como queríamos probar.

b) Supongamos ahora como hipótesis de inducción que si π_i está en el dominio de σ_i y $\pi_{1G} = \pi_{2G}$ entonces existe un $q \in G$ tal que $q \Vdash \pi_1 = \pi_2$. Suponemos también que $\sigma_{1G} = \sigma_{2G}$. Sea D el conjunto de las condiciones $r \in \mathbb{P}$ tales que $r \Vdash \sigma_1 = \sigma_2$ o bien cumplen una de las dos afirmaciones siguientes:

a') $\bigvee \pi_1 s_1((\pi_1, s_1) \in \sigma_1 \wedge r \leq s_1 \wedge \bigwedge \pi_2 s_2 q((\pi_2, s_2) \in \sigma_2 \wedge q \in \mathbb{P} \wedge q \leq s_2 \wedge q \Vdash \pi_1 = \pi_2 \rightarrow q \perp r))$,

b') $\bigvee \pi_2 s_2((\pi_2, s_2) \in \sigma_2 \wedge r \leq s_2 \wedge \bigwedge \pi_1 s_1 q((\pi_1, s_1) \in \sigma_1 \wedge q \in \mathbb{P} \wedge q \leq s_1 \wedge q \Vdash \pi_1 = \pi_2 \rightarrow q \perp r))$,

Se tiene que $D \in M$ porque la fórmula que lo define es absoluta. Veamos que es denso en $\mathbb{P}$. Para ello tomamos $p \in \mathbb{P}$ y observamos que, o bien $p \Vdash \sigma_1 = \sigma_2$, en cuyo caso $p \in D$, o bien no se cumple una de las dos propiedades a) o b) del teorema A.1. Supongamos, por ejemplo, que no se cumple a). Esto significa que existe un par $(\pi_1, s_1) \in \sigma_1$ tal que el conjunto

$$\{q \in \mathbb{P} \mid q \leq p \wedge (q \leq s_1 \rightarrow \bigvee \pi_2 s_2((\pi_2, s_2) \in \sigma_2 \wedge q \leq s_2 \wedge q \Vdash \pi_1 = \pi_2))\}$$

no es denso bajo p. Por consiguiente existe un $r \leq p$ tal que

$$\bigwedge q \in \mathbb{P}(q \leq r \rightarrow (q \leq s_1 \wedge \bigwedge \pi_2 s_2((\pi_2, s_2) \in \sigma_2 \rightarrow \neg(q \leq s_2 \wedge q \Vdash \pi_1 = \pi_2)))).$$

Vamos a probar que r cumple a'), con lo que $r \in D \wedge r \leq p$. La propiedad anterior aplicada a $q = r$ nos da que $r \leq s_1$. Si $(\pi_2, s_2) \in \sigma_2$, $q \in \mathbb{P}$, $q \leq s_2$ y $q \Vdash \pi_1 = \pi_2$, entonces $q \perp r$, pues si existiera una extensión común $q' \leq q \wedge q' \leq r$ entonces tendríamos $q' \leq r \wedge q' \leq s_1 \wedge q' \leq s_2 \wedge q' \Vdash \pi_1 = \pi_2$.

Así pues, D es denso en $\mathbb{P}$, luego existe $r \in D \cap G$. Ahora bien, r no puede cumplir a') ni b'), pues si, por ejemplo, existiera un par $(\pi_1, s_1) \in \sigma_1$ según a') tendríamos que $r \leq s_1$, luego $s_1 \in G$, luego $\pi_{1G} \in \sigma_{1G} = \sigma_{2G}$, luego $\pi_{1G} = \pi_{2G}$ con $(\pi_2, s_2) \in \sigma_2$ y $s_2 \in G$. Por hipótesis de inducción existe $q_0 \in G$ tal que $q_0 \Vdash \pi_1 = \pi_2$. Sea $q \in G$ tal que $q \leq q_0 \wedge q \leq s_2$. Por el teorema anterior $q \Vdash \pi_1 = \pi_2$ y entonces, por a'), $q \perp r$, lo cual es absurdo porque ambos están en G.

Supongamos ahora que $\phi \equiv \sigma_1 \in \sigma_2$. Como $p \Vdash \sigma_1 \in \sigma_2$ es absoluta para modelos transitivos, podemos olvidar las relativizaciones que aparecen en el enunciado.

a) Sea $p \in G$ tal que $p \Vdash \sigma_1 \in \sigma_2$. Entonces el conjunto

$$D = \{q \in \mathbb{P} \mid \bigvee \pi s((\pi, s) \in \sigma_2 \wedge q \leq s \wedge q \Vdash \pi = \sigma_1)\}$$

es denso bajo p y claramente $D \in M$. Sea $q \in G \cap D$. Sea $(\pi, s) \in \sigma_2$ tal que $q \leq s \wedge q \Vdash \pi = \sigma_1$. Como $q \leq s$ se cumple que $s \in G$, luego $\pi_G \in \sigma_{2G}$. Como $q \in G$ y $q \Vdash \pi = \sigma_1$, por a) para la fórmula $\pi = \sigma_1$ se cumple que $\pi_G = \sigma_{1G}$, y así $\sigma_{1G} \in \sigma_{2G}$.

b) Suponemos ahora que $\sigma_{1G} \in \sigma_{2G}$. Entonces $\sigma_{1G} = \pi_G$, con $(\pi, s) \in \sigma_2$ y $s \in G$. Por b) para la fórmula $\pi = \sigma_1$ existe un $r \in G$ tal que $r \Vdash \pi = \sigma_1$. Sea

$p \in G$ tal que $p \leq s$ y $p \leq r$. Veamos que el conjunto D anterior es denso bajo p, y así tendremos que $p \Vdash \sigma_1 \in \sigma_2$.

Si $q \leq p$ existe $(\pi, s) \in \sigma_2$ (el par que ha habíamos elegido) de modo que $q \leq p \leq s \wedge q \Vdash \pi = \sigma_1$ (pues $q \leq p \leq r \wedge r \Vdash \pi = \sigma_1$), luego $q \in D$.

Supongamos el teorema para ϕ y veámoslo para $\neg\phi$.

a) Sea $p \in G$ tal que $(p \Vdash \neg\phi)^M$, es decir, $\neg\bigvee q \in \mathbb{P}(q \leq p \wedge (q \Vdash \phi)^M)$. Hemos de probar $\neg\phi^{M[G]}$. Si se cumpliera $\phi^{M[G]}$, por a) existe un $r \in G$ tal que $(r \Vdash \phi)^M$. Sea $q \in G$ tal que $q \leq p \wedge q \leq r$. Entonces tenemos $(q \leq r \wedge r \Vdash \phi)^M$. Por el teorema anterior relativizado a M concluimos que $(q \Vdash \phi)^M$, contradicción.

b) Supongamos $\neg\phi^{M[G]}$ y sea $D = \{p \in \mathbb{P} \mid (p \Vdash \phi)^M \vee (p \Vdash \neg\phi)^M\}$. Entonces $D \in M$ y es denso por definición de $p \Vdash \neg\phi$. Sea $p \in D \cap G$. No puede ser $(p \Vdash \phi)^M$ ya que entonces por a) tendríamos $\phi^{M[G]}$. Por consiguiente $(p \Vdash \neg\phi)^M$.

Supongamos el teorema para ϕ y ψ y demostrémoslo para $\phi \to \psi$.

a) Si $p \in G$ cumple $(p \Vdash \phi \to \psi)^M$, hemos de probar que $\phi^{M[G]} \to \psi^{M[G]}$, luego suponemos $\phi^{M[G]}$. Por b) existe $q \in G$ tal que $(q \Vdash \phi)^M$. Sea $r \in G$ tal que $r \leq p \wedge r \leq q$. Tenemos que el conjunto $\{s \in \mathbb{P} \mid (s \Vdash \phi)^M \to (s \Vdash \psi)^M\}$ es denso bajo p, luego el conjunto $\{s \in \mathbb{P} \mid s \leq r \wedge (s \Vdash \phi)^M \to (s \Vdash \psi)^M\}$ es denso bajo r y está en M, por lo que podemos tomar $s \in G$ tal que $s \leq r \wedge (s \Vdash \phi)^M \to (s \Vdash \psi)^M$. Como $s \leq r \leq q$, se cumple que $(s \Vdash \phi)^M$ y así también $(s \Vdash \psi)^M$. Como $s \in G$, por a) concluimos $\psi^{M[G]}$.

b) Supongamos $\phi^{M[G]} \to \psi^{M[G]}$, es decir, $\neg\phi^{M[G]} \vee \psi^{M[G]}$. Distinguimos los dos casos.

Si $\neg\phi^{M[G]}$, por el caso de $\neg\phi$ ya demostrado, contamos con a) y b) para $\neg\phi$. Así pues, existe un $p \in G$ tal que $(p \Vdash \neg\phi)^M$. Veamos que $(p \Vdash \phi \to \psi)^M$, para lo cual hemos de probar que el conjunto $D = \{q \in \mathbb{P} \mid (q \Vdash \phi)^M \to (q \Vdash \psi)^M\}$ es denso bajo p. Ahora bien, si $q \leq p$ entonces $(q \Vdash \neg\phi)^M$, luego $\neg(q \Vdash \phi)^M$ y trivialmente $(q \Vdash \phi)^M \to (q \Vdash \psi)^M$. Así pues, $q \in D$.

Si $\psi^{M[G]}$ existe un $p \in G$ tal que $(p \Vdash \psi)^M$. Como antes, D es denso bajo p, pues si $q \leq p$ entonces $(q \Vdash \psi)^M$ y también $(q \Vdash \phi)^M \to (q \Vdash \psi)^M$.

Supongamos el teorema para $\phi(x)$ y probémoslo para $\bigwedge x\, \phi(x)$.

a) Sea $p \in G$ tal que $(p \Vdash \bigwedge x\, \phi(x))^M$. Entonces el conjunto

$$D = \{r \in \mathbb{P} \mid \bigwedge \sigma \in M^{\mathbb{P}}(r \Vdash \phi(\sigma))^M\}$$

es denso bajo p. Como $D \in M$ existe un $r \in D \cap G$. Para todo $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ tenemos que $(r \Vdash \phi(\sigma))^M$, luego por a) se cumple $\phi^{M[G]}(\sigma_G)$. Así pues, concluimos que $\bigwedge x \in M[G]\, \phi^{M[G]}(x)$.

b) Si $\bigwedge x \in M[G]\, \phi^{M[G]}(x)$, hemos de encontrar una condición $p\ nG$ tal que el conjunto

$$D = \{q \in \mathbb{P} \mid \bigwedge \sigma \in M^{\mathbb{P}}(q \Vdash \phi(\sigma))^M\}$$

sea denso bajo p. De hecho basta probar que existe un $p \in D \cap G$, pues en tal caso todo $q \leq p$ está en D. Supongamos, por reducción al absurdo, que $D \cap G = \varnothing$. Por el teorema 4.6, si $D \cap E = \varnothing$, existe un $p \in G$ incompatible con todas las condiciones de D. Sea $E = \{q \in \mathbb{P} \mid \bigvee \sigma \in M^{\mathbb{P}}(q \Vdash \neg\phi(\sigma))^M\} \in M$ y veamos que es denso bajo p.

En efecto, si $q \leq p$ se cumple que q es incompatible con todos los elementos de D y, en particular, $q \notin D$. Por lo tanto existe un $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ tal que $\neg(q \Vdash \phi(\sigma))^M$. Ha de existir un $r \leq q$ tal que $(r \Vdash \neg\phi(\sigma))^M$ o, de lo contrario, por definición de $r \Vdash \neg\phi$, para todo $r \leq q$ existiría un $s \leq r$ tal que $(s \Vdash \phi(\sigma))^M$. Esto significaría que el conjunto $\{r \in \mathbb{P} \mid (r \Vdash \phi(\sigma))^M\}$ sería denso bajo q, y tendríamos así que $(q \Vdash \phi(\sigma))^M$, contradicción.

Sea, pues, $r \leq q$ tal que $(r \Vdash \neg\phi(\sigma))^M$. Así $r \leq q \land r \in E$.

Como G es genérico y $p \in G$, existe un $q \in E \cap G$, luego $(q \Vdash \neg\phi(\sigma))^M$ para un cierto $\sigma \in M^P$. Por a) aplicado a $\neg\phi$ (usamos el paso ya probado de la inducción correspondiente a $\neg\phi$) obtenemos $\neg\phi(\sigma_G)^{M[G]}$, en contradicción con la hipótesis. ■

Antes de sacar consecuencias vamos a extender la definición de $\Vdash$ a fórmulas con descriptores.

Definición A.5 Sea ϕ una fórmula metamatemática y sea ψ una fórmula sin descriptores que sea equivalente a ϕ bajo los axiomas de extensionalidad y del conjunto vacío (podemos dar un procedimiento explícito para fijar una en concreto). Definimos

$$p \Vdash \phi \equiv p \Vdash \psi.$$

Del teorema siguiente se desprende en particular que la elección de ψ es irrelevante. La hipótesis entre paréntesis que excluye a los axiomas de reemplazo y partes es provisional. La podremos eliminar en cuanto sepamos que las extensiones genéricas satisfacen todo ZFC.

Teorema A.6 *Sean $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ y $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ fórmulas equivalentes en* ZF *(sin los axiomas de reemplazo y partes). Si $\mathbb{P}$ es un c.p.o. $p \in \mathbb{P}$ y $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ son $\mathbb{P}$-nombres se cumple*

$$p \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \leftrightarrow p \Vdash \psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Demostración: Supongamos en primer lugar que ϕ y ψ no tienen descriptores. Si se cumpliera $p \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ pero $\neg p \Vdash \psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, entonces existe $q \leq p$ tal que $q \Vdash \neg\psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. En efecto, en caso contrario para todo $q \leq p$ se tendría $\neg q \Vdash \neg\psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, luego existiría un $r \leq q$ tal que $r \Vdash \psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Esto significa que el conjunto $\{r \in \mathbb{P} \mid r \Vdash \psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)\}$ sería denso bajo p y, por lo tanto, se cumpliría $p \Vdash \psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

Así pues, se cumple la sentencia

$$\bigvee \mathbb{P}\, \sigma_1 \cdots \sigma_n\, pq(\mathbb{P} \text{ es un c.p.o.} \land \sigma_1, \ldots \sigma_n \in V^{\mathbb{P}} \land p \in \mathbb{P} \land q \in \mathbb{P} \land q \leq p \land$$

$$p \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \land q \Vdash \neg\psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)).$$

Por el teorema de reflexión existe un modelo transitivo numerable M de ZFC tal que esta sentencia es absoluta para M y, por lo tanto, es verdadera en M. Entonces tenemos un c.p.o. $\mathbb{P} \in M$, nombres $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in M^{\mathbb{P}}$ y condiciones $q \leq p$ tales que

$$(p \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))^M \wedge (q \Vdash \neg\psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))^M.$$

Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $q \in G$ (y por lo tanto $p \in G$). Por el teorema anterior debería cumplirse $\phi^{M[G]} \wedge \neg\psi^{M[G]}$, pero $M[G]$ es un modelo de ZF (menos los axiomas de partes y reemplazo), luego $\phi^{M[G]}$ es equivalente a $\psi^{M[G]}$, contradicción.

Ahora es claro que la definición anterior no depende de la elección de ψ, es decir, si ϕ es una fórmula con descriptores y ψ y ψ' son fórmulas sin descriptores equivalentes a ϕ bajo los axiomas de extensionalidad y vacío, entonces ψ y ψ' son equivalentes entre sí bajo estos axiomas, luego acabamos de probar que $p \Vdash \psi$ es equivalente a $p \Vdash \psi'$. Similarmente se llega ahora al caso general del teorema. ■

Es fácil ver que todas las propiedades de $\Vdash$ que teníamos para fórmulas sin descriptores (incluyendo las que hemos usado como definición) valen ahora para fórmulas arbitrarias.

Teorema A.7 (Teorema fundamental de la teoría de extensiones) *Sea $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula con a lo sumo las variables libres indicadas. Sea M un modelo transitivo de* ZF$-$AP, $\mathbb{P} \in M$ *un c.p.o. y* $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in M^{\mathbb{P}}$.

a) Si M es numerable y $p \in \mathbb{P}$ entonces $(p \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))^M$ si y sólo si para todo filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M con $p \in G$ se cumple $\phi^{M[G]}(\sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG})$.

b) Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M entonces

$$\phi^{M[G]}(\sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG}) \leftrightarrow \bigvee p \in G\, (p \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))^M.$$

Demostración: a) Si p cumple la condición sobre filtros genéricos consideramos el conjunto

$$D = \{r \in \mathbb{P} \mid (r \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))^M\} \in M.$$

Veamos que D es denso bajo p. En caso contrario existiría un $q \leq p$ tal que $\neg\bigvee r \in \mathbb{P}(r \leq q \wedge r \in D)$, o sea, $\neg\bigvee r \in \mathbb{P}(r \leq q \wedge r \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))^M$, y esto implica que $(q \Vdash \neg\phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))^M$. Sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M tal que $q \in G$ (aquí usamos que M es numerable). Como $q \leq p$, también $p \in G$, pero entonces el teorema A.4 nos da que $\phi^{M[G]} \wedge \neg\phi^{M[G]}$, contradicción.

Por consiguiente (D es denso bajo $p)^M$ y el teorema A.3 nos permite concluir que $(p \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))^M$.

Supongamos ahora que $(p \Vdash \phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))^M$. Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M y $p \in G$, entonces el teorema A.4 nos da $\phi^{M[G]}(\sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG})$. (Esta implicación no requiere la numerabilidad de M.)

b) es consecuencia directa de A.4. ■

A partir de aquí ya podemos probar sin ningún cambio el teorema del modelo genérico 4.22 y, en general, todos los resultados básicos de la teoría de extensiones genéricas sin hacer referencia en absoluto a álgebras de Boole.

Formalización de la relación fundamental Hemos definido $p \Vdash \phi$ para fórmulas metamatemáticas ϕ, de modo que "$p \Vdash \phi$" no es una fórmula, sino una fórmula distinta para cada fórmula metamatemática ϕ. Sin embargo, la definición recurrente de $p \Vdash \phi$ puede reinterpretarse como la definición de un único término $p \Vdash_{\mathbb{P}} \phi$ con las variables libres p, ϕ y $\mathbb{P}$, $\leq$, $\mathbb{1}$, de modo que se demuestra que si $\phi \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$, $\mathbb{P}$ es un c.p.o. entonces $(p \Vdash_{\mathbb{P}} \phi) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$ es una fórmula cuyas variables libres son p, $\mathbb{P}$, $\leq$, $\mathbb{1}$ y las variables libres de ϕ. (Consideramos únicamente fórmulas que no contengan las cuatro variables precedentes.)

Más concretamente, $p \Vdash_{\mathbb{P}} (x = y)$ y $p \Vdash_{\mathbb{P}} (x \in y)$ no son sino las formalizaciones de las fórmulas metamatemáticas definidas en A.1 y A.2, respectivamente y, en general, $p \Vdash_{\mathbb{P}} \phi$ se define por inducción sobre la longitud de ϕ exactamente igual que en A.2. La demostración del esquema teoremático A.7 se adapta trivialmente para probar el (único) teorema siguiente:

Teorema A.8 (Teorema fundamental de la teoría de extensiones) *Sea $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Form}(\mathcal{L}_{\mathrm{tc}})$ una fórmula con a lo sumo las variables libres indicadas. Sea M un conjunto transitivo tal que $M \vDash \mathrm{ZF{-}AP}$, sea $\mathbb{P} \in M$ un c.p.o. y $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in M^{\mathbb{P}}$.*

a) Si M es numerable y $p \in \mathbb{P}$ entonces $M \vDash [p] \Vdash \phi_{[\mathbb{P}]}[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ si y sólo si para todo filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M con $p \in G$ se cumple

$$M[G] \vDash \phi[\sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG}].$$

b) Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M entonces

$$M[G] \vDash \phi[\sigma_{1G}, \ldots, \sigma_{nG}] \leftrightarrow \bigvee p \in G\, M \vDash [p] \Vdash_{[\mathbb{P}]} \phi[\sigma_1, \ldots, \sigma_n].$$

Apéndice B

Conjuntos cerrados no acotados y estacionarios

En este apéndice vamos a desarrollar una teoría sobre conjuntos cerrados no acotados y estacionarios análoga a la expuesta en el capítulo VI de [TC], pero en un contexto distinto. En lugar de tratar con subconjuntos de ordinales vamos a fijar un conjunto no numerable arbitrario A y un cardinal regular no numerable $\kappa \leq |A|$, y vamos a trabajar con subconjuntos del conjunto

$$\mathcal{P}_\kappa A = \{X \in \mathcal{P}A \mid |X| < \kappa\}.$$

B.1 Subconjuntos de $\mathcal{P}_\kappa A$

Definición B.1 Diremos que un conjunto $C \subset \mathcal{P}_\kappa A$ es *cerrado* si para toda sucesión creciente[1] (respecto de la inclusión) $\{x_\delta\}_{\delta<\mu}$ con $\mu < \kappa$ de elementos de C se cumple que $\bigcup\limits_{\delta<\mu} x_\delta \in C$.

Diremos que C es *no acotado* si para todo $x \in \mathcal{P}_\kappa A$ existe un $y \in C$ tal que $x \subset y$. Como es habitual, c.n.a. significará "cerrado no acotado".

Por ejemplo, si $x \subset A$ cumple $|x| < \kappa$, es claro que $\hat{x} = \{y \in \mathcal{P}_\kappa A \mid x \subset y\}$ es c.n.a.

Una de las propiedades básicas de los conjuntos c.n.a. es la siguiente:

Teorema B.2 *La intersección de menos de κ conjuntos cerrados no acotados es cerrada no acotada.*

[1] No perdemos generalidad si suponemos que μ es un cardinal infinito, pues dada una sucesión $\{x_\delta\}_{\delta<\alpha}$, con $\alpha < \mu$, si $\alpha = \beta + 1$ entonces $\bigcup\limits_{\delta<\alpha} x_\delta = x_\beta \in C$ trivialmente, y si α es un límite tomamos $\mu = \operatorname{cf} \alpha$ y una sucesión cofinal creciente $\{\delta_\gamma\}_{\gamma<\mu}$, y entonces $\bigcup\limits_{\delta<\alpha} x_\delta = \bigcup\limits_{\gamma<\mu} x_{\delta_\mu}$. En particular, si $\kappa = \aleph_1$ basta considerar sucesiones $\{x_n\}_{n\in\omega}$.

Demostración: Es inmediato que la intersección de cualquier familia de subconjuntos cerrados de $\mathcal{P}_\kappa A$ es cerrada.

Veamos ahora que si C_1 y C_2 son c.n.a.s, entonces $C_1 \cap C_2$ también lo es. Para ello fijamos $x \in \mathcal{P}_\kappa A$ y vamos tomando extensiones

$$x \subset x_0 \subset x_1 \subset x_2 \subset \cdots$$

de modo que $x_{2n} \in C_1$ y $x_{2n+1} \in C_2$. Entonces

$$x \subset y = \bigcup_{n\in\omega} x_{2n} = \bigcup_{n\in\omega} x_{2n+1} \in C_1 \cap C_2,$$

luego $C_1 \cap C_2$ no está acotado. Supongamos ahora que existe un cardinal $\mu < \kappa$ tal que existe una familia $\{C_\delta\}_{\delta<\mu}$ de c.n.a.s cuya intersección no es c.n.a. Podemos suponer que μ es el menor posible (necesariamente infinito, por la parte ya probada). En particular, tenemos que, para todo $\delta < \mu$, la intersección $D_\delta = \bigcap\limits_{\gamma<\delta} C_\gamma$ es c.n.a., y $\bigcap\limits_{\delta<\mu} D_\delta = \bigcap\limits_{\delta<\mu} C_\delta$, luego no perdemos generalidad si suponemos que la sucesión $\{C_\delta\}_{\delta<\mu}$ es decreciente. Vamos a probar que no está acotada y tendremos una contradicción.

Dado $x \in \mathcal{P}_\kappa A$ vamos a construir una sucesión $\{x_\delta\}_{\delta<\mu}$ creciente en $\mathcal{P}_\kappa A$. Tomamos $x_0 \in C_0$ tal que $x \subset x_0$. En general, supuesta construida $\{x_\delta\}_{\delta<\gamma}$, con $\gamma < \mu$, tomamos $x_\gamma \in C_\gamma$ tal que $\bigcup\limits_{\delta<\gamma} x_\delta \subset x_\gamma$. Esto es posible porque la unión tiene cardinal menor que κ y C_γ no está acotado. De este modo, $x_\gamma \in C_\gamma \subset C_\delta$ para todo $\delta \geq \gamma$, luego $y = \bigcup\limits_{\delta<\mu} x_\delta = \bigcup\limits_{\gamma\leq\delta<\mu} x_\delta \in C_\gamma$, porque C_γ es cerrado, luego $x \subset y \in \bigcap\limits_{\delta<\mu} C_\delta$, lo que prueba que la intersección no está acotada. ■

Definición B.3 Si $\{C_a\}_{a\in A}$ es una familia de subconjuntos de $\mathcal{P}_\kappa A$, definimos su *intersección diagonal como*

$$\mathop{\triangle}_{a\in A} C_a = \{X \in \mathcal{P}_\kappa A \mid X \in \bigcap_{a\in X} C_a\}.$$

Teorema B.4 *La intersección diagonal de una familia de c.n.a.s es c.n.a.*

Demostración: Sea $\{C_a\}_{a\in A}$ una familia de c.n.a.s y sea C su intersección diagonal. Sea $\{x_\delta\}_{\delta<\mu}$ una sucesión creciente de elementos de C y tomemos $a \in \bigcup\limits_{\delta<\mu} x_\delta$. Sea $\gamma < \mu$ tal que $a \in x_\gamma$. Entonces, para todo $\gamma \leq \delta < \mu$, se cumple que $a \in x_\gamma \subset x_\delta \in C$, luego $x_\delta \in C_a$, luego

$$\bigcup_{\delta<\mu} x_\delta = \bigcup_{\gamma\leq\delta<\mu} x_\delta \in C_a,$$

porque C_a es cerrado, y esto prueba que está en C, luego C es cerrado.

Ahora tomamos $x \in \mathcal{P}_\kappa A$ y tomamos $x \subset x_0 \in \bigcap_{a\in x} C_a$, lo cual es posible porque la intersección es c.n.a., luego tomamos $x_0 \subset x_1 \in \bigcap_{a\in x_1} C_a$, y de este modo construimos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega}$. Veamos que $x \subset y = \bigcup_{n\in\omega} x_n \in C$.

En efecto, si $a \in y$, existe un $m \in \omega$ tal que $a \in x_m$, luego para todo $n > m$ se cumple que $a \in x_{n-1} \subset x_n \in \bigcap_{a\in x_{n-1}} C_a$, luego $x_n \in C_a$, luego

$$y = \bigcup_{m<n\in\omega} x_n \in C_a,$$

porque C_a es cerrado, y esto prueba que $y \in C$, luego C no está acotado. ■

Conviene observar que los conjuntos cerrados cumplen una propiedad de clausura más general que la que exige la definición. Para ello necesitamos el concepto siguiente:

Definición B.5 *Se dice que un conjunto D es dirigido si*

$$\bigwedge xy \in D \bigvee z \in D(x \subset z \wedge y \subset z).$$

Teorema B.6 *Si C es cerrado y $D \subset C$ es un conjunto dirigido tal que $|D| < \kappa$, entonces $\bigcup D \in C$.*

Demostración: Observemos en primer lugar que si D es un conjunto dirigido y $X \subset D$, existe un conjunto dirigido D_0 tal que $X \subset D_0 \subset D$ y $|D_0| \leq \aleph_0|X|$. En efecto, podemos tomar una función $f : D \times D \longrightarrow D$ que cumpla $\bigwedge xy \in D\ x \cup y \subset f(x, y)$, y a partir de ella definimos

$$X_0 = X, \quad X_{n+1} = f[X_n \times X_n], \quad D_0 = \bigcup_{n\in\omega} X_n.$$

Si el teorema es falso, existe un $D \subset C$ dirigido tal que $|D| < \kappa$ pero $\bigcup D \notin C$. Podemos tomarlo del menor cardinal posible $\mu < \kappa$, que será infinito, porque claramente un conjunto dirigido finito tiene máximo. Sea $\{d_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ una enumeración de D. Podemos construir recurrentemente una sucesión creciente $\{D_\alpha\}_{\alpha<\mu}$ de subconjuntos dirigidos de D de cardinal $< \mu$ tal que $d_\alpha \in D_\alpha$.

En efecto, basta tomar como D_α un conjunto dirigido de cardinal $< \mu$ que contenga a $\bigcup_{\delta<\alpha} D_\delta \cup \{d_\alpha\}$. Por la minimalidad de μ tenemos que $\bigcup D_\delta \in C$ y estas uniones forman una sucesión creciente, luego $\bigcup D = \bigcup_{\delta<\mu} \bigcup D_\delta \in C$, contradicción. ■

Definición B.7 Si $f : [A]^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{P}_\kappa A$, definimos

$$\operatorname{cl} f = \{X \in \mathcal{P}_\kappa A \mid \bigwedge x \in [X]^{<\omega}\ f(x) \subset X\}.$$

Teorema B.8 *Si $f : [A]^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{P}_\kappa A$ entonces* $\operatorname{cl} f$ *es c.n.a. y si C es c.n.a. existe $f : [A]^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{P}_\kappa A$ tal que* $\operatorname{cl} f \subset C$.

Demostración: Sea $\{X_\delta\}_{\delta<\mu}$ una sucesión creciente en $\operatorname{cl} f$, con $\mu < \kappa$ infinito. Si $x \subset \bigcup\limits_{\delta<\mu} X_\delta$ es finito, existe un $\delta < \mu$ tal que $x \subset X_\delta$, y entonces $f(x) \subset X_\delta \subset \bigcup\limits_{\delta<\mu} X_\delta$, luego la unión está en $\operatorname{cl} f$, que es, por tanto, cerrada.

Tomemos ahora $X \in \mathcal{P}_\kappa A$ y definamos una sucesión $\{X_n\}_{n\in\omega}$ como sigue:

$$X_0 = X, \qquad X_{n+1} = \bigcup_{x\in[X_n]^{<\omega}} f(x), \qquad Y = \bigcup_{n\in\omega} X_n.$$

Es claro entonces que $|Y| < \kappa$ y si $x \subset Y$ finito, existe un n tal que $x \subset X_n$, luego $f(x) \subset X_{n+1} \subset Y$, luego $Y \in \operatorname{cl} f$, que es, por tanto, acotada.

Tomemos ahora un c.n.a. arbitrario C. Definimos $f : [A]^{<\omega} \longrightarrow C$ por recurrencia sobre $|x|$. Elegimos $f(\varnothing)$ arbitrariamente y si tenemos f definida para conjuntos de cardinal n y $|x| = n+1$, definimos $f(x) \in C$ de modo que

$$x \cup \bigcup_{a\in x} f(x \setminus \{a\}) \subset f(x),$$

lo cual es posible porque C no está acotado. Observemos que esta construcción garantiza que si $x \subset y$, entonces $f(x) \subset f(y)$, por lo que $\{f(x) \mid x \in [A]^{<\omega}\}$ es un subconjunto dirigido de C. Además, si $X \in \operatorname{cl} f$, tenemos que

$$X = \bigcup_{x\in[X]^{<\omega}} x \subset \bigcup_{x\in[X]^{<\omega}} f(x) \subset X,$$

luego $X = \bigcup\limits_{x\in[X]^{<\omega}} f(x) \in C$, por el teorema B.6. Esto prueba que $\operatorname{cl} f \subset C$.
■

Definición B.9 Llamaremos

$$\mathcal{D}_\kappa A = \{X \subset \mathcal{P}_\kappa A \mid \bigvee C \subset \mathcal{P}_\kappa A (C \text{ es c.n.a.} \land C \subset X)\}.$$

El teorema B.2 implica que $\mathcal{D}_\kappa A$ es un filtro κ-completo, el teorema B.4 nos da que es cerrado para intersecciones diagonales y B.6 implica que está generado por los conjuntos de la forma $\operatorname{cl} f$, con $f : [A]^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{P}_\kappa A$.

Un conjunto $E \subset \mathcal{P}_\kappa A$ es *estacionario* si corta a todo c.n.a. o, equivalentemente, a todo elemento de $\mathcal{D}_\kappa A$, o también si $\mathcal{P}_\kappa A \setminus E \notin \mathcal{D}_\kappa A$.

Una aplicación $f : D \subset \mathcal{P}_\kappa A \longrightarrow A$ es *regresiva* si

$$\bigwedge x \in D (x \neq \varnothing \to f(x) \in x).$$

Así, pues, en este contexto las aplicaciones regresivas (análogas a las definidas en [TC 6.14]) son simplemente las funciones de elección. Vamos a probar un análogo parcial de [TC 6.15]:

Teorema B.10 *Si $E \subset \mathcal{P}_\kappa A$ es estacionario y $f : E \longrightarrow A$ es regresiva, entonces existe un $a \in A$ tal que $\{x \in E \mid f(x) = a\}$ es estacionario.*

DEMOSTRACIÓN: En caso contrario, para cada $a \in A$ existe un c.n.a. C_a disjunto con $E_a = \{x \in E \mid f(x) = a\}$ y podríamos formar el c.n.a. $C = \mathop{\triangle}\limits_{a \in A} C_a$.

Como E es estacionario existe $x \in E \cap C$. Sea $a = f(x) \in x$, de modo que $x \in C_a \cap E_a$, contradicción. ■

Teorema B.11 *Supongamos que $A \subset B$. Si $P \in \mathcal{D}_\kappa B$, entonces*

$$P_A = \{X \cap A \mid X \in P\} \in \mathcal{D}_\kappa A.$$

DEMOSTRACIÓN: Existe $f : [B]^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{P}_\kappa B$ tal que $\operatorname{cl} f \subset P$. Para cada $X \subset \mathcal{P}_\kappa B$ definimos

$$X_0 = X, \quad X_{n+1} = X_n \cup \bigcup_{x \in [X_n]^{<\omega}} f(x), \quad \operatorname{cl}_f(X) = \bigcup_{n \in \omega} X_n.$$

Es claro entonces que $\operatorname{cl}_f(X)$ es el menor elemento de $\operatorname{cl} f$ que contiene a X. Observemos que

$$\operatorname{cl}_f(X) = \bigcup_{x \in [X]^{<\omega}} \operatorname{cl}_f(x),$$

pues claramente, si llamamos U al miembro derecho, $X \subset U \subset \operatorname{cl}_f(X)$, y además $U \in \operatorname{cl} f$, pues si $u \in [U]^{<\omega}$, teniendo en cuenta que $\operatorname{cl}_f(x) \cup \operatorname{cl}_f(y) \subset \operatorname{cl}_f(x \cup y)$, existe un $x \in [X]^{<\omega}$ tal que $u \subset \operatorname{cl}_f(x)$, y entonces $f(u) \subset \operatorname{cl}_f(x) \subset U$. Esto nos da la igualdad.

Definimos $g : [A]^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{P}_\kappa A$ mediante $g(x) = \operatorname{cl}_f(x) \cap A$. Así, si $X \in \operatorname{cl} g$, se cumple que

$$X \subset \operatorname{cl}_f(X) \cap A = \bigcup_{x \in [X]^{<\omega}} \operatorname{cl}_f(x) \cap A = \bigcup_{x \in [X]^{<\omega}} g(x) \subset X,$$

luego $X = \operatorname{cl}_f(X) \cap A$. Además $\operatorname{cl}_f(X) \in \operatorname{cl} f$, luego

$$\operatorname{cl} g \subset \{X \cap A \mid X \in \operatorname{cl} f\} \subset \{X \cap A \mid X \in P\}.$$

■

Ejercicio: Si $A \subset B$ y C es c.n.a. en $P_\kappa A$, entonces $C^B = \{X \in \mathcal{P}_\kappa B \mid X \cap A \in C\}$ es c.n.a. en $\mathcal{P}_\kappa B$. Por consiguiente, si $P \in \mathcal{D}_\kappa A$, entonces $P^B \in \mathcal{D}_\kappa B$.

B.2 Subconjuntos de $\mathcal{P}^{\alpha}_{\aleph_1} A$

Finalmente vamos a generalizar los conceptos y resultados de las secciones anteriores a un contexto menos habitual, pero que resulta necesario en el capítulo XI para caracterizar los c.p.o.s α-propios. Por simplicidad nos limitaremos al caso $\kappa = \aleph_1$. Trabajaremos con un conjunto no numerable A y un ordinal numerable $\alpha > 0$.

Definición B.12 Sea A un conjunto no numerable y α un ordinal numerable. Definimos $\mathcal{P}^{\alpha}_{\aleph_1} A$ como el conjunto de todas las sucesiones $\{a_\delta\}_{\delta<\alpha}$ que cumplen las propiedades siguientes:

a) Cada $a_\delta \in \mathcal{P}_{\aleph_1} A$.

b) Si $\delta < \epsilon < \alpha$, entonces $a_\delta \subset a_\epsilon$.

c) Si $\lambda < \alpha$ es un ordinal límite, entonces $a_\lambda = \bigcup\limits_{\delta<\lambda} a_\delta$.

En lo sucesivo escribiremos $\mathcal{P}^\alpha A$ en lugar de $\mathcal{P}^\alpha_{\aleph_1} A$. Notemos que, en particular, podemos identificar $\mathcal{P}^1(A) = \mathcal{P}_{\aleph_1} A$.

Definimos $\mathcal{F}^\alpha(A)$ como el conjunto de todas las funciones

$$F : \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{P}^\beta(A) \times [A]^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{P}^1 A.$$

Diremos que $a \in \mathcal{P}^\alpha A$ es *cerrada* para F si para todo $\beta < \alpha$ que no sea un ordinal límite y cada $x \in [a_\beta]^{<\omega}$, se cumple $F(\{a_\delta\}_{\delta<\beta}, x) \subset a_\beta$.

Llamamos $G(F)$ al conjunto de todos los elementos de $\mathcal{P}^\alpha A$ cerrados para F. Notemos que $G(F) \neq \varnothing$, pues podemos definir $a \in G(F)$ como sigue:

Supuesto definido $\{a_\delta\}_{\delta<\gamma}$, con $\gamma < \alpha$, que cumpla la definición de sucesión cerrada para $\beta < \gamma$, si $\beta = 0$ o $\beta = \delta + 1$ definimos como sigue a_β:

$$a^0_\beta = \begin{cases} \varnothing & \text{si } \beta = 0, \\ a_\delta & \text{si } \beta = \delta + 1, \end{cases} \qquad a^{k+1}_\beta = \bigcup_{x\in[a^k_\beta]^{<\omega}} F(\{a_\delta\}_{\delta<\beta}, x), \qquad a_\beta = \bigcup_{k<\omega} a^k_\beta.$$

Claramente la prolongación $\{a_\delta\}_{\delta<\beta+1}$ sigue cumpliendo la definición de sucesión cerrada. Si β es un límite definimos simplemente a_β según la tercera condición de la definición de $\mathcal{P}^\alpha A$. Es obvio que la sucesión obtenida de este modo está en $G(F)$.

Si $\{F_n\}_{n<\omega}$ son funciones de $\mathcal{F}^\alpha(A)$, se cumple que $\bigcap\limits_{n\in\omega} G(F_n) \neq \varnothing$, pues basta tomar $F(\{a_\delta\}_{\delta<\beta}, x) = \bigcup\limits_{n\in\omega} F_n(\{a_\delta\}_{\delta<\beta}, x)$. Es inmediato comprobar que $\varnothing \neq G(F) \subset \bigcap\limits_{n\in\omega} G(F_n)$.

Definición B.13 Si A es un conjunto no numerable y $\alpha > 0$ es un ordinal numerable, definimos $\mathcal{D}^\alpha A$ [$= \mathcal{D}^\alpha_{\aleph_1}(A)$] como el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathcal{P}^\alpha A$ que contienen un conjunto $G(F)$, para cierta $F \in \mathcal{F}^\alpha(A)$.

Las observaciones precedentes muestran que $\mathcal{D}^\alpha(A)$ es un filtro $\aleph_1$-completo en $\mathcal{P}^\alpha A$. Diremos que $E \subset \mathcal{P}^\alpha A$ es *estacionario* si $\mathcal{P}^\alpha A \setminus E \notin \mathcal{D}^\alpha A$.

Observemos que el filtro $\mathcal{D}^1 A$ puede identificarse con el filtro $\mathcal{D}_{\aleph_1} A$ definido en la sección precedente. En efecto, si $\alpha = 1$ los elementos de $\mathcal{F}^1(A)$ son funciones $F : \{\varnothing\} \times [A]^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{P}^1 A$, que pueden identificarse con funciones $f : [A]^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{P}_{\aleph_1} A$, y entonces $G(f) = \operatorname{cl} f$. Por lo tanto, $\mathcal{D}^1 A$ está formado por los subconjuntos de $\mathcal{P}_{\aleph_1} A$ que contienen a algún $\operatorname{cl} f$, y eso es precisamente $\mathcal{D}_{\aleph_1} A$. Por lo tanto, la noción de conjunto estacionario también coincide en este caso con la que teníamos definida.

Teorema B.14 *Sea A un conjunto no numerable, $\alpha > 0$ un ordinal no numerable y $E \subset \mathcal{P}^{\alpha}A$ estacionario. Si $g : E \longrightarrow A$ es una función tal que si $a \in E$ cumple $a_0 \neq \varnothing$, entonces $g(a) \in a_0$, entonces existe un $u \in A$ tal que $E_u = \{a \in E \mid g(a) = u\}$ es estacionario.*

Demostración: Observemos que $C = \{a \in \mathcal{P}^{\alpha}A \mid a_0 \neq \varnothing\} \in \mathcal{D}^{\alpha}A$ (pues cualquier $F \in \mathcal{F}^{\alpha}(A)$ que cumpla $F(\varnothing, \varnothing) \neq \varnothing$ cumple $G(F) \subset C$), por lo que $E' = C \cap E$ es estacionario y basta probar que algún E'_u es estacionario, ya que $E'_u \subset E_u$. Equivalentemente, podemos suponer que todo $a \in E$ cumple $a_0 \neq \varnothing$.

Si ningún E_u es estacionario, para cada $u \in A$ existe una función $F_u \in \mathcal{F}^{\alpha}(A)$ tal que $G(F_u) \cap E_u = \varnothing$. Llamemos $f_u : [A]^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{P}^1A$ a la función dada por $f_u(x) = F(\varnothing, x)$. Entonces $C = \mathop{\triangle}\limits_{u \in A} \operatorname{cl} f_u$ es c.n.a. en $\mathcal{P}^1A$, luego existe una función $f : [A]^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{P}^1A$ tal que $\operatorname{cl} f \subset C$.

Definimos como sigue una función $F \in \mathcal{F}^{\alpha}(A)$:

$$F(\varnothing, x) = f(x), \qquad F(\{a_\delta\}_{\delta<\beta}, x) = \bigcup_{u \in a_0} F_u(\{a_\delta\}_{\delta<\beta}, x),$$

donde la segunda parte vale cuando $\beta \neq 0$. Como E es estacionario existe $a \in G(F) \cap E$. Sea $u = g(a) \in a_0$, puesto que sabemos que $a_0 \neq \varnothing$. Vamos a probar que $a \in G(F_u) \cap E_u$, con lo que tendremos una contradicción. En efecto, si $x \in [a_0]^{<\omega}$, tenemos que $f(x) = F(\varnothing, x) \subset a_0$, luego $a_0 \in \operatorname{cl} f \subset C$ y, como $u \in a_0$, esto implica que $a_0 \in \operatorname{cl} f_u$, luego si $x \in [a_0]^{<\omega}$ se cumple que $F_u(\varnothing, x) = f_u(x) \subset a_0$.

Si β es un ordinal sucesor y $x \in [a_\beta]^{<\omega}$, usando de nuevo que $u \in a_0$, vemos que $F_u(\{a_\delta\}_{\delta<\beta}, x) \subset F(\{a_\delta\}_{\delta<\beta}, x) \subset a_\beta$, luego, en efecto, $a \in G(F)$. ■

Teorema B.15 *Si $A \subset B$ son conjuntos no numerables, $\alpha > 0$ es un ordinal numerable y $P \in \mathcal{D}^{\alpha}B$, entonces*

$$P_A = \{\{a_\delta \cap A\}_{\delta<\alpha} \mid a \in P\} \in \mathcal{D}^{\alpha}A.$$

Demostración: Tomemos $F \in \mathcal{F}^{\alpha}B$ tal que $G(F) \subset P$. En la prueba del teorema B.11 hemos definido la clausura de un elemento de $\mathcal{P}^1B$ respecto de una aplicación $f : [B]^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{P}^1B$. Ahora generalizamos como sigue dicha definición: dado $a \in \mathcal{P}^{\alpha}B$, definimos como sigue $\bar{a}^F \in \mathcal{P}^{\alpha}B$:

$$\bar{a}^F_0 = \operatorname{cl}_{f_0} a_0, \quad \text{donde } f_0(x) = F(\varnothing, x),$$

$$\bar{a}^F_{\beta+1} = \operatorname{cl}_{f_{\beta+1}}(\bar{a}^F_\beta \cup a_{\beta+1}), \quad \text{donde } f_{\beta+1}(x) = F(\{\bar{a}^F_\delta\}_{\delta<\beta+1}, x),$$

$$\bar{a}^F_\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} \bar{a}^F_\delta.$$

Es claro entonces que $\bar{a}^F \in G(F)$ y que $\bigwedge \delta < \alpha\ a_\delta \subset \bar{a}^F_\delta$. Definimos $H \in \mathcal{F}^{\alpha}A$ de modo que

$$H(\varnothing, x) = \operatorname{cl}_{f_0} x \cap A, \qquad H(\{a_\delta\}_{\delta<\beta+1}, x) = \operatorname{cl}_{f_{\beta+1}}(\bar{a}^F_\beta \cup x) \cap A,$$

donde f_0 y $f_{\beta+1}$ tienen el mismo significado que en la definición de $\bar{a}^F$. Basta probar que $G(H) \subset \{\{a_\delta \cap A\}_{\delta<\alpha} \mid a \in G(F)\} \subset P_A$.

Tomamos, pues, $a \in G(H)$, de modo que $\bar{a}^F \in G(F)$, y basta probar que para todo $\delta < \alpha$ se cumple que $a_\delta = \bar{a}^F_\delta \cap A$. En efecto,

$$a_0 \subset \bar{a}^F_0 \cap A = \mathrm{cl}_{f_0} a_0 \cap A = \bigcup_{x \in [a_0]^{<\omega}} \mathrm{cl}_{f_0} x \cap A = \bigcup_{x \in [a_0]^{<\omega}} H(\varnothing, x) \subset a_0.$$

Similarmente,

$$a_{\beta+1} \subset \bar{a}^F_{\beta+1} \cap A = \mathrm{cl}_{f_{\beta+1}}(\bar{a}^F_\beta \cup a_{\beta+1}) \cap A = \bigcup_{x \in [a_{\beta+1}]^{<\omega}} \mathrm{cl}_{f_{\beta+1}}(\bar{a}^F_\beta \cup x) \cap A$$

$$= \bigcup_{x \in [a_{\beta+1}]^{<\omega}} H(\{\bar{a}^F_\delta\}_{\delta < \beta+1}, x) \subset a_{\beta+1},$$

y si $\lambda < \alpha$ es un ordinal límite y la igualdad es cierta para todo $\delta < \lambda$,

$$\bar{a}^F_\lambda \cap A = \bigcup_{\delta < \lambda} \bar{a}^F_\delta \cap A = \bigcup_{\delta < \lambda} a_\delta = a_\lambda.$$

■

Bibliografía

[1] Abraham, U. *Proper Forcing,* en [10].

[2] Abraham, U. y Shelah, S. A Δ^2_2 Well Order of the Reals and Incompactness of $L(Q^{MM})$, *Annals of Pure and Applied Logic* 59 (1) (1993) 1–32

[3] Bartoszyńsky, Y y Judah, H. *Set Theory. On the Structure of the Real Line,* A.K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 1995.

[4] Barwise, J. (editor) *Handbook of Mathematical Logic,* North Holland, Amsterdam, 1977.

[5] Baumgartner, J.E., *Sacks Forcing and the Total Failure of Martin's Axiom,* Topology and its Applications, 19 (1985) 211–225.

[6] Burke, M.R. *A proof of Hechler's theorem on embedding $\aleph_1$-directed sets cofinally into $(\omega^\omega, <^*)$,* Arch. Math. Logic (1997) 36, 399–403.

[7] Devlin, K.J., *The Yorkshireman's guide to proper forcing,* en *Surveys in set theory,* A.R.D. Mathias (Ed.) Cambridge University Press (1983).

[8] — *Constructibility,* Springer, Berlín, 1984.

[9] Felgner, U., *Models of ZF-Set Theory,* Springer, Berlin, 1971

[10] Foreman, M. y Kanamori, A. (editores) *Handbook of Set Theory,* Springer, Berlín 2010.

[11] Frankiewicz, R. y Zbierski, P. *Hausdorff Gaps and Limits,* North Holand, Amsterdam, 1994.

[12] Fuchino, S. *Open Coloring Axiom and Forcing Axioms.* Preprint.

[13] Geschke S., Quickert S.*On Sacks forcing and the Sacks property,* en: Löwe B., Piwinger B., Räsch T. (eds) *Classical and New Paradigms of Computation and their Complexity Hierarchies.* Trends in Logic, vol 23. Springer, Dordrecht, (2004).

[14] Goldstern, M. *Tools for your forcing construction,* Israel Mathematical Conference Proceedings, Vol. 106 (1992), pp. 307–362.

[15] HALBEISEN, L.J. *Combinatorial Set Theory, with a gentrle introduction to forcing,* Springer Berlín (2012).

[16] HALPERN, D., LÄUCHLI, H. *A partition theorem.* Trans. Am. Math. Soc. **124**, (1966) 360–367.

[17] HALPERN, D., LÉVY, A. *The Boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice, Axiomatic set theory,* Proc. Symp. Pure Math., Univ. of California, Los Angeles, D. Scott (ed), **13** (1), 83–134, 1971.

[18] JECH, T.J. *The Axiom of Choice,* North Holand, Amsterdam, 1973.

[19] — *Set Theory,* Academic Press, New York, 1978.

[20] — *Set Theory, The Third Millenium Edition, revised and expanded* Springer, 2000.

[21] — *Stationary sets,* en [10].

[22] JUDAH, H., JUST, W., WOODIN, H. (editores) *Set Theory of the Continuum* Springer, New York, 1992.

[23] KUNEN, K. *Combinatorics,* en [4].

[24] — *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs,* North Holland, Amsterdam, 1985.

[25] KUNEN, K. y VAUGHAN, J.E. (editores) *Handbook of Set-Theoretic Topology,* North Holland, Amsterdam, 1984.

[26] MILLER, A. W. *Covering* 2^ω *with* ω_1 *Disjoint Closed Sets* en J. Barwise, H.J. Keisler and K. Kunen (eds.) *The Kleene Symposium* North-Holland (1980) 415–421.

[27] SHELAH, S. *Proper and Improper Forcing,* Springer, Berlín, 1998.

[28] VAN DOUWEN, E.K. *The Integers and Topology,* en [25].

[29] VELICKOVIC, B. *Applications of the open coloring axiom,* en [22].

[30] WOHOFSKY, W. *On the existence of p-points and other ultrafilters in the Stone-Čech compactification of* $\mathbb{N}$. Diploma Thesis, Vienna University of Technology, Viena, 2008.

Índice de Materias

absoluta (expresión), 25
anticadena, 155
aproximación, 499
asignación, 396
atómico (c.p.o.), 144
átomo, 144
automorfismo, 145
Axioma
  de las coloraciones abiertas (ACA), 300
  de los preórdenes propios, 519
  de Martin Máximo, 538

buen nombre, 163

casi homogéneo, 145
centrado (c.p.o.), 209
cerrado
  c.p.o., 156
  subconjunto de $\mathcal{P}_\kappa A$, 553
colapso transitivo, 42
coloración, 300
compatibilidad, 117
completamente propio, 452
completo (c.p.o), 455
condición, 117
  de cadena, 155
conjugado, 326
conjunto
  hereditariamente simétrico, 327
  preordenado, 117
  simétrico, 327, 336
conservación
  de cardinales, 154
  de cofinalidades, 154
constructibilidad
  relativa, 105
constructible (conjunto), 70
cuasidisjunta (familia), 158

definible
  objeto, 91
  por ordinales, 359
    hereditariamente, 363
  por sucesiones de ordinales, 360
  relación, 65
  subconjunto, 66
denso, 119, 121
dirigido (conjunto), 555

Easton
  función de, 173
  producto, 173
Ellentuck (topología de), 522
estabilizador, 330
estacionario (conjunto), 556, 558
extensión
  genérica, 124
  simétrica, 336
extensional (relación), 43

filtro, 119
  de subgrupos, 326
  genérico, 119

genérica (condición), 433
genérico (filtro), 119
grupo de simetrías, 325, 336

hereditariamente simétrico
  conjunto, 327
  nombre, 336
homogéneo (conjunto), 300
hueco, 289

incompatibilidad, 117
inmersión, 136
  completa, 136
  densa, 136
isomorfismo de modelos, 40
iteración de preórdenes, 276

Kripke-Platek (KP), 4

Lévy (orden colapsante de), 181
Lema de los sistemas Δ, 158

Martin (axioma de), 284
modelo ω, 61
modelo (natural, transitivo, interno), 24
Mostowski (función colapsante de), 42

no atómico (c.p.o.), 144
nombre, 124
  bueno, 163
  canónico, 125
  para un c.p.o., 267

parte bien fundada de un modelo, 54
partes definibles, 66
predenso, 432
Principio de reflexión de aplicaciones, 523
producto
  de c.p.o.s, 171
    generalizado, 267
  de Easton, 173
promesa, 499
propio, 434, 436
  completamente, 452
  sobre isomorfismos, 463
proyectivamente estacionario (conjunto), 539

real
  de Sacks, 232
real (aleatorio, de Cohen), 207
reducción, 136
regresiva (aplicación), 556
relación definible, 65
relativización, 20
requisito, 499
restricción, 273

Sacks
  orden de, 230
sección, 289
semejanza, 136
simétrico (conjunto), 327
simétrico (nombre), 336
sistema de completitud, 454
sistema delta, 158
situación normal, 462
soporte, 277, 331
  de un conjunto, 403
  de un nombre, 394
  de una condición, 395

Teorema
  de Easton, 178
  de Hechler, 193
  de la forma normal, 111
  de reflexión, 40, 44
  del modelo genérico, 128
  del producto, 172
  fundamental de la teoría de extensiones, 127, 134, 550, 551

valor, 124
  booleano, 133

Zermelo-Fraenkel (ZF), 2