

TEMA I

OPTICA GEOMÉTRICA APLICADA AL OJO

I – Adaptación de las relaciones paraxiales

II.- Proximidades y potencias

III.- Ecuación de Gauss

IV.- Ecuación de Gauss generalizada

V.- Fórmulas de efectividad

VI.- Acoplamiento de sistemas

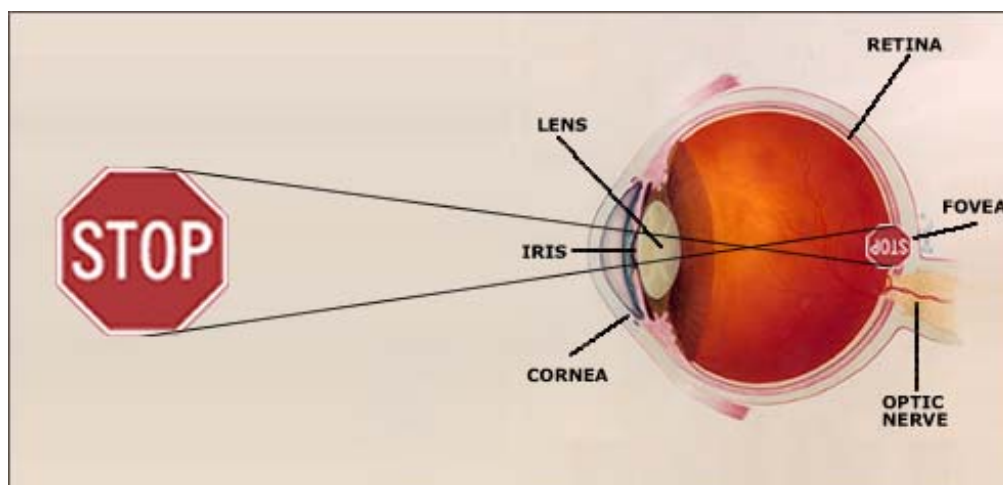
VII.- Potencia principal y potencia equivalente

VIII.- Potencias frontales

IX.- Factor de forma de una lente

X.- La ecuación de Gauss con potencias frontales

XI.- Potencia y factor de forma de una lente



I – Adaptación de las relaciones paraxiales

Las conocidas ecuaciones de la óptica geométrica, no suelen utilizarse en la forma en que fueron obtenidas, cuando se trata de aplicarlas al sistema óptico del ojo y a las lentes o sistemas asociados con él. Dado que el ojo siempre opera entre dos índices de refracción n y n' bien definidos, no es necesario que éstos figuren de forma explícita en las ecuaciones. Por otra parte, operar directamente en dioptrías resulta más práctico y simple en muchos casos en los que interviene el ojo. En este capítulo se demostrará que, los conceptos de proximidad y potencia que vamos a introducir, permiten escribir las relaciones paraxiales de la óptica geométrica en una forma mucho más compacta y apropiada para su aplicación a los cálculos propios de la óptica fisiológica.

II.- Proximidades y potencias

En óptica geométrica las distancias o longitudes básicas en un sistema óptico cualquiera se definían como:

distancia frontal objeto: $x = HO$

distancia frontal imagen: $x' = H'O'$

longitud focal objeto: $f = HF$

longitud focal imagen: $f' = H'F'$

siendo H y H' los puntos principales, O y O' los puntos objeto e imagen sobre el eje óptico y F y F' los focos objeto e imagen del sistema respectivamente. El radio de curvatura de un dioptrio de vértice S y centro de curvatura C que separa dos medios de índices n y n' se define como $R=SC$.

Llamaremos longitud reducida al cociente entre una longitud y el índice de refracción del medio en que se encuentra. Así las longitudes reducidas correspondientes a las distancias anteriores son: x/n , x'/n' , f/n , f'/n' y R/n o R/n' .

La inversa de la longitud reducida es lo que denominaremos en adelante proximidad. De este modo, por definición:

proximidad objeto: $X = n/x$

proximidad imagen: $X' = n'/x'$

ambas se expresarán en dioptrías sustituyendo las distancias x y x' en metros. Obviamente a mayor distancia corresponde una proximidad menor, siendo la proximidad cero cuando la distancia se hace infinita.

La potencia se define como la inversa de la longitud focal reducida, es decir:

potencia objeto: $P = n/f$

potencia imagen: $P' = n'/f'$

III.- Ecuación de Gauss

La ecuación, $n'/x' - n/x = n'/f'$, en función de las proximidades queda escrita como sigue:

$$\boxed{X' = X + P'} \quad (1)$$

siendo el aumento lateral,

$$\boxed{\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{n}{n'} \frac{x'}{x} = \frac{X}{X'}} \quad (2)$$

Estas mismas expresiones sirven para un dioptrio esférico considerando que

$$\boxed{P' = \frac{n' - n}{R} = \frac{n'}{f}} \quad (3)$$

IV.- Ecuación de Gauss generalizada

Cuando las distancias frontales x, x' , se toman con orígenes en un par de puntos conjugados del eje, distintos de los puntos principales, entre los cuales existe un cierto aumento lateral de valor g , la ecuación de Gauss se escribe:

$$\boxed{g \frac{n'}{x'} = \frac{n}{gx} + \frac{n'}{f'}} \quad (4)$$

siendo la expresión del aumento lateral

$$\boxed{\beta' = \frac{nx'}{gxn'}} \quad (5)$$

las expresiones (4) y (5) escritas en función de proximidades y potencias se transforman en:

$$\boxed{gX' = \frac{X}{g} + P'} \quad (6) \quad \text{y} \quad \boxed{\beta' = \frac{1}{g} \frac{X}{X'}} \quad (7)$$

V.- Fórmulas de efectividad

Recordemos las ecuaciones de paso de la óptica geométrica que permitían, conocida la distancia imagen $x'_1 = H'_1O'_1$ dada por un primer sistema, obtener la distancia objeto $x_2 = H_2O'_1 = H_2O'_1$ para un segundo sistema (Figura 1), siendo $H'_1H_2 = e$, se procedía de la siguiente manera:

$$x_2 = H_2O'_1 = H_2H'_1 + H'_1O'_1 = -e + x'_1 \quad \text{resultando:} \quad x_2 = x'_1 - e$$

En definitiva se trata de cambiar el origen de distancias, el origen respecto del cual estamos dando la posición del punto O'_1 .

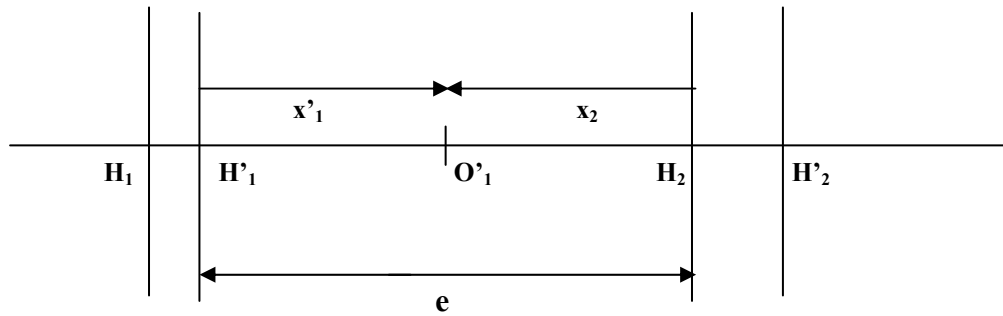


Figura 1

Tratemos pues este problema en general. Sean O_1 y O_2 dos puntos cualquiera que van a ser utilizados como orígenes de distancias y sea M un punto alineado con ellos tal que:

$$x_1 = O_1M, \quad x_2 = O_2M \quad \text{y} \quad O_1O_2 = d$$

las correspondientes longitudes reducidas son:

$$x_1/n, \quad x_2/n \quad \text{y} \quad d/n = \delta$$

La relación entre las tres distancias anteriores es:

$$O_1O_2 = O_1M + MO_2 \quad \text{es decir:} \quad d = x_1 - x_2$$

despejando x_1 o x_2 se puede obtener una de las dos distancias a partir de la otra

y, al despejar las proximidades X_1 y X_2 de estas expresiones, obtenemos las llamadas fórmulas de efectividad, que son:

$$x_1 = x_2 + n\delta \Rightarrow \frac{x_1}{n} = \frac{x_2}{n} + \delta \Rightarrow \frac{1}{X_1} = \frac{1}{X_2} + \delta$$

$$x_2 = x_1 - n\delta \Rightarrow \frac{x_2}{n} = \frac{x_1}{n} - \delta \Rightarrow \frac{1}{X_2} = \frac{1}{X_1} - \delta$$

$$X_1 = \frac{X_2}{1 + \delta X_2} \quad (8) \quad \text{y} \quad X_2 = \frac{X_1}{1 - \delta X_1} \quad (9)$$

VI.- Acoplamiento de sistemas

Nos planteamos ahora el problema de obtener la potencia P' y los planos principales H y H' del sistema equivalente al acoplamiento de dos sistemas ópticos, de potencias P'_1 y P'_2 , que actúan sucesivamente, estando separados entre sí una distancia reducida $\delta = e/n_2 = H'_1H_2/n_2$ como se ve en la Figura 2.

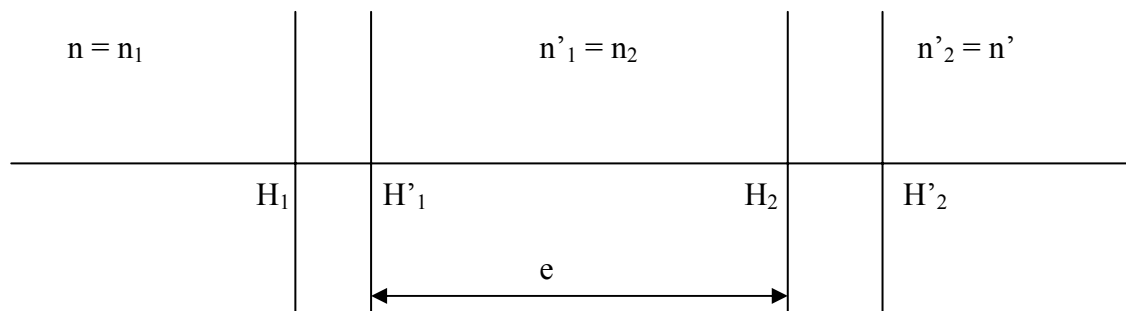


Figura 2

A partir de las relaciones ya conocidas de la óptica geométrica, introduciendo en ellas las inversas de las longitudes reducidas, podemos re-escribirlas como sigue:

$$\frac{1}{f'} = \frac{n_2}{n'_2} \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - e \frac{1}{f'_1} \frac{1}{f'_2}$$

multipliquemos toda la ecuación por el índice del espacio imagen para obtener así las potencias

$$\frac{n'_2}{f'} = \frac{n_2}{f'_1} + \frac{n'_2}{f'_2} - \frac{e}{n_2} \frac{n_2}{f'_1} \frac{n'_2}{f'_2}$$

$$\boxed{P' = P'_1 + P'_2 - \delta P'_1 P'_2} \quad (10)$$

La posición de los planos principales viene dada por las expresiones:

$$H_1 H = \frac{fe}{f_2} \Rightarrow \frac{H_1 H}{n} = \frac{f}{n} \cdot \frac{e}{f_2} = \frac{f}{n} \cdot \frac{n_2}{f_2} \cdot \frac{e}{n_2}$$

$$\boxed{\frac{H_1 H}{n} = \delta \frac{P_2}{P}} \quad (11)$$

$$H'_2 H' = -\frac{f'e}{f'_1} = -f' \frac{n'_1}{f'_1} \frac{e}{n'_1} = -f' \delta P'_1$$

dividiendo la expresión por n'_2 :

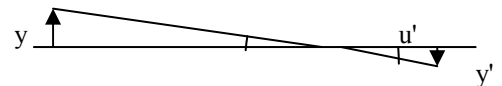
$$\boxed{\frac{H'_2 H'}{n'} = -\delta \frac{P'_1}{P'}} \quad (12)$$

VII.- Potencia principal y potencia equivalente

La potencia definida en el apartado II del presente capítulo, se denomina potencia principal para poner de manifiesto que las longitudes focales se toman desde

los puntos principales. Sin embargo, es posible establecer la potencia del sistema, del ojo en el caso que nos ocupa, sin conocer la posición de los planos principales. Es suficiente conocer el tamaño, y' , de la imagen de un objeto muy alejado que subtende un ángulo u desde el ojo (nótese que por ser la distancia objeto muy grande no es necesaria la distinción entre ángulo subtendido desde el punto principal H o desde el punto S, vértice de la córnea). En efecto, sea un objeto subtendiendo un ángulo u desde el punto H y sea u' el ángulo subtendido por la imagen y' desde el punto H'. Dado que los ángulos son lo suficientemente pequeños se cumplirá la relación:

$$n \cdot u = n' \cdot u'$$



La imagen y' estará sobre el plano focal, de modo que se cumple:

$$y' = f' \cdot u' \Rightarrow y' = f' \frac{n \cdot u}{n'} \Rightarrow \boxed{y' = \frac{n \cdot u}{P'}} \quad (13)$$

en donde P' es la potencia principal. A la imagen y' de la ecuación (13) se le denomina potencia equivalente porque su conocimiento equivale a conocer la potencia sin que sea necesaria la focal o los planos principales. Recíprocamente podemos razonar que un objeto de tamaño y , situado en el foco del sistema cumpliría la relación:

$$y = \frac{n' \cdot u'}{P}$$

VIII.- Potencias frontales

En Óptica Oftálmica, donde se trata de lentes que van a ser adaptadas al ojo, no es habitual utilizar las potencias principales sino las potencias frontales. Llamadas así

porque las distancias focales no han sido tomadas desde los puntos principales sino desde los vértices S_1 y S'_2 de cada uno de los dioptrios o caras de la lente.

En la Figura 2, se representan las dos caras de una lente con sus vértices S_1 y S'_2 , así como los puntos S'_1 y S_2 conjugados de los anteriores respecto de la lente.

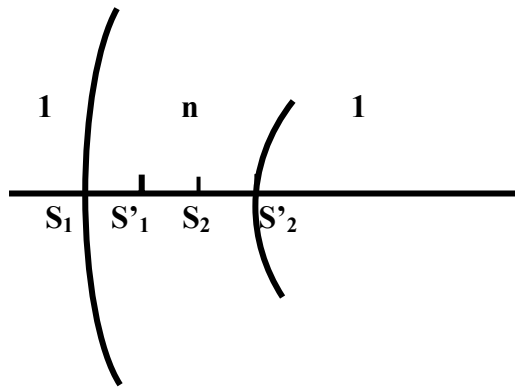


Figura 3

Suponiendo la lente de índice n y rodeada de aire, las potencias frontales de la misma se definen como sigue:

* Potencia frontal objeto anterior: $P_{fa} = 1/S_1F$

con $S_1F < 0$ si la lente es positiva.

* Potencia frontal imagen anterior: $P'_{fa} = 1/S'_1F'$

con $S'_1F' > 0$ si la lente es positiva.

* Potencia frontal objeto posterior: $P_{fp} = 1/S_2F$

con $S_2F < 0$ si la lente es positiva.

* Potencia frontal imagen posterior: $P'_{fp} = 1/S'_2F'$

con $S'_2F' > 0$ si la lente es positiva.

Conocida una de las potencias frontales resulta sencillo obtener cualquiera de las otras, ya que se cumple:

$$S_1 S'_1 \approx S'_1 S_2 \approx S_2 S'_2 \approx 1/3 e$$

como se demuestra en uno de los ejercicios de este tema, siendo $e = S_1 S'_2$ el espesor de la lente.

IX.- Factor de forma de una lente

Los frontofocómetros, son los aparatos más comunes para la medida de la potencia de lentes oftálmicas. Estos proporcionan el valor de la potencia frontal imagen posterior, que es la más utilizada en los cálculos de óptica oftálmica y óptica fisiológica. Por esta razón, vamos a tratar a continuación de escribir la ecuación de correspondencia de Gauss utilizando la potencia frontal imagen posterior, que en adelante denominaremos P'_f .

Consideremos la ecuación de Gauss generalizada, en donde los puntos conjugados que se toman como orígenes de distancias frontales objeto e imagen son, respectivamente, S_2 y S'_2 , entre los cuales el aumento lateral tiene un valor g . Se tiene que:

$$gX' = \frac{X}{g} + P'$$

en donde P' es la potencia principal. Para un punto en el infinito, $x = \infty$ y $X = 0$, se obtendrá la imagen correspondiente en el punto F' de tal modo que: $X' = 1/x' = 1/S'_2 F' = P'_f$. Sustituyendo estos valores de x y x' en la ecuación de Gauss queda:

$$g \cdot P'_f = P' \quad \Rightarrow \quad \boxed{P'_f = g' \cdot P'} \quad (14)$$

donde $g' = 1/g$ es el denominado factor de forma de la lente, debido a que dos lentes de la misma potencia principal pueden diferir considerablemente en su valor de la potencia frontal debido a ese factor, cuyo valor depende del tallado de las caras de la lente (dioptrios que nos determinan la posición de los planos principales).

X.- La ecuación de Gauss con potencias frontales

La ecuación de Gauss generalizada y el aumento, teniendo en cuenta la relación (14) quedan escritos de la siguiente forma:

$$gX' = \frac{X}{g} + P' \Rightarrow gX' = \frac{X}{g} + gP'_f \Rightarrow \boxed{X' = g'^2 X + P'_f} \quad (15)$$

$$\boxed{\beta' = \frac{y'}{y} = g' \frac{X}{X'} = \frac{g' X}{g'^2 X + P'_f}} \quad (16)$$

XI.- Potencia y factor de forma de una lente

En cualquier lente gruesa, conocidas las potencias P'_1 y P'_2 de las dos caras y el espesor reducido δ de la misma, las fórmulas del acoplamiento nos permiten conocer la potencia principal P' . Por otra parte, haciendo la imagen de un punto en el infinito a través de las dos caras de la lente, obtendremos la distancia S'_2F' que nos da la potencia frontal P'_f . De las expresiones de ambas potencias, teniendo en cuenta la ecuación (14), obtendremos una expresión para el factor de forma g' de la lente que nos permitirá calcularlo.

Considerando un punto objeto en el infinito, su imagen a través de la primera cara de la lente estará en: $X'_1 = P'_1$, ya que $X_1 = 0$. Para obtener la imagen a través de la segunda cara de la lente, la proximidad objeto se obtiene de la fórmula de efectividad:

$$X_2 = \frac{P'_1}{1 - \delta P'_1}$$

y la proximidad imagen $X'_2 = S'_2 F'$ que coincide con la potencia frontal imagen P'_f será:

$$X'_2 = X_2 + P'_2 = \frac{P'_1}{1 - \delta P'_1} + P_2 = \frac{P' = P'_1 + P'_2 - \delta P'_1 P'_2}{1 - \delta P'_1}$$

luego:

$$P'_f = \frac{P'}{1 - \delta P'_1}$$

 (17)

identificando las ecuaciones (14) y (17) se obtiene:

$$g' = \frac{P'_f}{P'} = \frac{1}{1 - \delta P'_1}$$

 (18)

esta ecuación permite evaluar el factor de forma de cualquier lente conocidas las características de la misma.

Finalmente, veamos que, conocido el factor de forma, las potencias principal y frontal de cualquier lente gruesa pueden expresarse:

$$P' = P'_1 + P'_2 - \delta P'_1 P'_2 = P'_1 + P'_2 (1 - \delta P'_1)$$

$$P' = P'_1 + \frac{P'_2}{g'} \quad (19)$$

y por la ecuación (14):

$$\boxed{P'_f = g' P'_1 + P'_2} \quad (20)$$

Esta última expresión es de gran interés en la fabricación de lentes (como se estudiará en Óptica Oftálmica) porque nos permiten calcular la potencia frontal como suma de la llamada potencia nominal (que es la potencia de la primera cara de una lente de un cierto espesor cuando sólo se ha tallado la primera cara: $g'P'_1$) y la potencia de la segunda cara.