**Resolución de los problemas de los exámenes de
MATEMÁTICAS (12907) Licenciatura de Químicas
Cursos 2000-2001 y 2001-2002**

ÁLGEBRA LINEAL

Problema 1 (6 de Febrero de 2001)

Estudiar si la siguiente matriz es diagonalizable y, en caso afirmativo, hallar la matriz de paso explicando su función:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución: Comenzaremos estudiando los valores propios de la matriz (en adelante A). Para ello calcularemos las raíces de su polinomio característico, $\det(A - \lambda I)$,

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3 - \lambda & 4 \\ -1 & -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3 = -(\lambda - 3)(\lambda^2 - 1) = 0,$$

cuyas soluciones son $\lambda = 1, -1, 3$.

Como los tres valores propios son reales y distintos dos a dos, sabemos que la matriz es diagonalizable y bastará con encontrar un vector propio para cada uno de ellos para conformar cada una de las columnas de la denominada matriz de paso.

Si $\lambda = 1$ buscamos un vector (v_1, v_2, v_3) tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \left. \begin{array}{l} v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ 2v_1 + 2v_2 + 4v_3 = 0 \\ -v_1 - v_2 - 3v_3 = 0 \end{array} \right\}$$

Las dos primeras ecuaciones son, obviamente, linealmente independientes. Multiplicando la primera por -2 y sumando la segunda se tiene $v_3 = 0$, luego $v_1 = -v_2$ y como vector propio podemos tomar $(1, -1, 0)$.

Si $\lambda = -1$ buscamos un vector (v_1, v_2, v_3) tal que

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \left. \begin{array}{l} 3v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ 2v_1 + 4v_2 + 4v_3 = 0 \\ -v_1 - v_2 - v_3 = 0 \end{array} \right\}$$

De nuevo las dos primeras ecuaciones son, obviamente, linealmente independientes. Multiplicando la primera por -4 y sumando la segunda se tiene $v_1 = 0$, luego $v_2 = -v_3$ y como vector propio podemos tomar $(0, 1, -1)$.

Si $\lambda = 3$ buscamos un vector (v_1, v_2, v_3) tal que

$$\left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -5 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \implies \left. \begin{array}{l} -v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ 2v_1 + 4v_3 = 0 \\ -v_1 - v_2 - 5v_3 = 0 \end{array} \right\}$$

Las dos primeras ecuaciones son linealmente independientes. De la segunda se deduce $v_1 = -2v_3$ y sustituyendo en la primera $v_2 = -3v_3$, luego como vector propio podemos tomar $(-2, -3, 1)$.

Notemos que el subespacio característico asociado a cada valor propio tiene dimensión 1 al estar definido por dos ecuaciones no paramétricas. La suma de las dimensiones da 3 que como hemos indicado más arriba afirma la diagonalizabilidad de A . Así pues sabemos que

$$A = P.D.P^{-1}$$

siendo P la llamada “matriz de paso” y D la matriz diagonal, esto es,

$$D = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \quad P = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Problema 2 (6 de Febrero de 2001)

Discutir y resolver el sistema

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 5y + 4z = -3 \\ x - 2y + z = 5 \\ x - 4y + 6z = 10 \end{array} \right\}.$$

Solución: Procederemos por el método de reducción de Gauss-Jordan. Usaremos sólo, por simplicidad, los coeficientes de las incógnitas.

$$\begin{array}{l} \mathbf{(1)} \\ \mathbf{(2)} \\ \mathbf{(3)} \end{array} \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 6 & 10 \\ 2 & -5 & 4 & -3 \end{array} \implies \begin{array}{l} \mathbf{(1)} - \mathbf{(2)} \\ 2 \cdot \mathbf{(1)} - \mathbf{(3)} \end{array} \implies \begin{array}{l} \mathbf{(1')} \\ \mathbf{(2')} \\ \mathbf{(3')} \end{array} \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 13 \end{array}$$

Reordenamos

$$\begin{array}{l} \mathbf{(1')} \\ \mathbf{(2')} \\ \mathbf{(3')} \end{array} \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 13 \\ 0 & 2 & -5 & -5 \end{array} \implies 2 \cdot \mathbf{(2')} - \mathbf{(3')} \implies \begin{array}{l} \mathbf{(1'')} \\ \mathbf{(2'')} \\ \mathbf{(3'')} \end{array} \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 31 \end{array}$$

Es decir tenemos el sistema equivalente

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z = 5 \\ y - 2z = 13 \\ z = 31 \end{array} \right\}$$

lo que nos indica que el sistema inicial es compatible y determinado con solución $x = 124$, $y = 75$, $z = 31$.

Problema 3 (15 de Junio de 2001)

Estudiar si las siguientes matrices son diagonalizables y, en caso afirmativo, calcular la matriz de paso: $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: Comenzaremos estudiando los valores propios de la primera matriz (en adelante A). Para ello calcularemos las raíces de su polinomio característico, $\det(A - \lambda I) = 0$,

$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)^2 = 0$, cuya raíz (doble) es $\lambda = 4$. Calculemos su vector propio asociado.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies u_2 = 0$$

Con lo que $\dim(N(A - 4I)) = 1$ y la matriz no es diagonalizable.

Para la segunda matriz (en adelante B) calculemos las raíces de $\det(B - \lambda I) = 0$:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0, \text{ cuyas raíces son } \lambda = -1, 2.$$

Al ser los dos valores propios distintos la matriz es diagonalizable. Para hallar la matriz de paso bastará con encontrar un vector propio para cada uno de ellos (que serán linealmente independientes) y colocarlos en columnas.

Para $\lambda = -1$ buscamos un vector (v_1, v_2) tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v_1 - v_2 = 0 \implies v_1 = v_2.$$

Podemos tomar como vector propio asociado el $(1, 1)$.

Para $\lambda = 2$ buscamos un vector (v_1, v_2) tal que

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies -2v_1 - v_2 = 0 \implies v_2 = -2v_1.$$

Podemos tomar como vector propio asociado el $(1, -2)$.

Con ello la matriz de paso es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, cuya inversa es $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, luego se tiene:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Problema 4 (14 de Septiembre de 2001)

Sea la aplicación $f(x, y, z) := (ax + y + z, x + ay + z, x + y + az)$, $a \in \mathbb{R}$.

(a) Calcular los valores del parámetro a de modo que el núcleo de f no se reduzca al elemento neutro.

(b) Hallar, en esos casos, una base de dicho núcleo.

Solución: (a) Si una terna (x, y, z) es un elemento del núcleo de f , en adelante $N(f)$, debe ser solución del sistema

$$\left. \begin{aligned} ax + y + z &= 0 \\ x + ay + z &= 0 \\ x + y + az &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Se trata de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas homogéneo. Cuando tenga como única solución la trivial $N(f)$ se reducirá al elemento neutro siendo distinto en otro caso. Estudiemos, pues, el determinante de la matriz del sistema

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 = (a + 2)(a - 1)^2$$

Dicho determinante se anula si a toma los valores 1 y -2 . Consideraremos sólo esos dos valores ya que en otro caso el rango de la matriz es tres y el sistema tiene sólo la solución trivial.

(b) Si $a = 1$ las tres ecuaciones son iguales y se reducen a $x + y + z = 1$, con lo que el rango del sistema, y de la función, es uno y la dimensión del núcleo dos (usamos que $\text{rang}(f) + \dim N(f) = 3$). Dado cualquier (x, y, z) en el núcleo se tiene

$$(x, y, z) = (-y - z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$$

luego una base del núcleo es $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

Si $a = -2$ el rango de la matriz y de f es dos y la dimensión del núcleo uno, quedando definido por las ecuaciones

$$-2x + y + z = 0$$

$$x - 2y + z = 0$$

que restadas nos dan $-3x + 3y = 0$, de donde $x = y$ y sustituyendo en la segunda, por ejemplo, $z = x$. Dado cualquier (x, y, z) en el núcleo se tiene

$$(x, y, z) = (x, x, x) = x(1, 1, 1)$$

luego una base del núcleo es $\{(1, 1, 1)\}$.

Problema 5 (28 de Enero de 2002)

Considerando la aplicación lineal

$$f(x, y, z) := (x + y + z, ax - y + z, 2x - y + az)$$

(a) *Encontrar los valores de a de manera que f sea biyectiva.*

(b) *Si $a = 1$, calcular $f^{-1}(1, 2, 3)$*

Solución: (a) Al ser una función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, aplicando el teorema del rango, es biyectiva si es exhaustiva (sobre) y tal ocurre si el rango de la aplicación (que es el de su matriz asociada M_f) es tres. Para conformar dicha matriz debemos escribir en columna los transformados de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Como $f(1, 0, 0) = (1, a, 2)$, $f(0, 1, 0) = (1, -1, -1)$ y $f(0, 0, 1) = (1, 1, a)$ se tiene

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Su determinante es $\det(M_f) = -a^2 - 2a + 5$, que se anula si $a = -1 + \sqrt{6}$ ó si $a = -1 - \sqrt{6}$. Si a es distinta de esos dos valores el determinante es no nulo y la matriz, y la aplicación, tienen rango tres con lo que f es biyectiva.

(b) Si $a = 1$ vamos a buscar los elementos cuya imagen dé $(1, 2, 3)$, es decir vamos a buscar los (x, y, z) tales que

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 2 \\ 2x - y + z &= 3 \end{aligned} \right\}$$

En realidad sabemos que el sistema tiene una única solución por (a). Para resolverlo por el método de Gauss escribámoslo en forma de matriz orlada, con el orden (x, y, z) .

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right)$, o cambiando a (z, x, y) , $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right)$; en él podemos restar cada una de la dos últimas filas a la primera obteniendo

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{array} \right)$. La segunda fila corresponde a $2y = -1$, luego $y = -\frac{1}{2}$

y sustituyendo en la tercera ($-x + 2y = -2$) obtenemos $x = 1$. Finalmente sustituyendo los valores anteriores en la primera ecuación ($x + y + z = 1$) se tiene $z = \frac{1}{2}$. En definitiva $f^{-1}(1, 2, 3) = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Nótese que el sistema se puede resolver rápidamente si nos damos cuenta al inicio que restando las dos primeras ecuaciones ya se obtiene el valor de y .

Problema 6 (28 de Enero de 2002)

Razonar si las siguientes matrices son o no diagonalizables encontrando, en su caso, la matriz de paso y su inversa

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución: (i) La ecuación característica de la primera matriz es $\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 = 0$, cuya única solución, único valor propio, es $\lambda = 2$. Calculemos el subespacio característico asociado E_2 : Si (u_1, u_2) está en él

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así pues $E_2 = \{(u_1, u_2) : u_1 = 0\}$ con lo que $\dim(E_2) = 1$ y la matriz no es diagonalizable.

(ii) La ecuación característica de la segunda matriz es $\begin{vmatrix} 4 - \lambda & -2 \\ 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(-1 - \lambda) + 4 = \lambda(\lambda - 3) = 0$, cuyas soluciones son 0 y 3. Como se trata de una matriz cuadrada de orden dos y aparecen dos valores propios distintos la matriz es diagonalizable. Si la denominamos M se tendrá

$$M = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

siendo $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ la matriz diagonal semejante y P la matriz de paso que tiene por columnas vectores propios asociados a los valores 0 y 3. Para calcularla hallemos sendos vectores propios asociados a los valores propios:

Para $\lambda = 0$ hagamos $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, con lo que $4u_1 - 2u_2 = 0$ o, lo que es igual, $u_2 = 2u_1$. Tomamos el vector $(1, 2)$.

Para $\lambda = 3$ hagamos $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, con lo que $u_1 - 2u_2 = 0$ o, lo que es igual, $u_1 = 2u_2$. Tomamos el vector $(2, 1)$.

En definitiva $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Su inversa es $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$

Problema 7 (26 de Junio de 2002)

Aplicando el método de reducción de Gauss discutir, según los valores de a y b , el sistema $\left. \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 1 \\ x - y + z = a \\ x + 2y + bz = 3 \end{array} \right\}$. Resuélvase en el caso compatible.

Solución: Para aplicar el método pasamos la segunda fila a la primera y escribimos el sistema como matriz orlada

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & b & 3 \end{array} \right)$. Sustituimos la segunda fila por el resultado de restar a la segunda dos veces la primera y sustituimos la tercera fila por el resultado de restar de la tercera la primera. Se tiene $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 - 2a \\ 0 & 3 & b - 1 & 3 - a \end{array} \right)$. Ahora sustituimos la nueva tercera fila por el resultado de restarle la segunda

multiplicada por tres obteniendose $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1-2a \\ 0 & 0 & b-4 & 5a \end{array} \right)$.

La última matriz corresponde a un sistema equivalente cuya última ecuación es $(b-4)z = 5a$.

(i) Si $b \neq 4$ se tiene que $z = \frac{5a}{b-4}$, $y = 1 - 2a - \frac{5a}{b-4}$, $x = 1 - a - \frac{10a}{b-4}$, luego el sistema es compatible y determinado.

(ii) Si $b = 4$, se tiene $0 \cdot z = 5a$. Si $a \neq 0$ ningún valor de z hace posible la ecuación luego el sistema es incompatible. Por otro lado si $a = 0$ queda el sistema

$$\left. \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ y + z = 1 \end{array} \right\}$$

en el que dándole a z el valor t se obtiene el conjunto de soluciones

$$z = t, \quad y = 1 - t \quad x = 1 - 2t$$

luego el sistema es compatible e indeterminado.

Problema 8 (2 de Septiembre de 2002)

Estudiar si la matriz $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ es diagonalizable y calcular su potencia A^m .

Solución: Vamos a calcular sus valores propios. La ecuación característica es $\det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 =$

$$(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$$

Calculemos los vectores y subespacios propios asociados a cada valor propio:

Si $\lambda = 1$, el subespacio $E_1 := \text{Ker}(A - I_n)$, siendo $A - I_n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Buscamos vectores $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ tales que $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

es decir que satisfagan el sistema
$$\left. \begin{array}{l} -v_1 + v_2 - v_3 = 0 \\ -v_1 + v_2 - v_3 = 0 \\ v_1 - v_2 + v_3 = 0 \end{array} \right\};$$
 en realidad una sola ecuación (lógicamente pues el rango de la matriz es uno). Así, si $\mathbf{v}$ está en E_1 , $v_3 = -v_1 + v_2$ y, por lo tanto, $(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2, -v_1 + v_2) = v_1(1, 0, -1) + v_2(0, 1, 1)$. La dimensión de E_1 es 2 y

$$E_1 = \langle (1, 0, -1); (0, 1, 1) \rangle$$

Si $\lambda = 2$, el subespacio $E_2 := \text{Ker}(A - 2I_n)$, siendo $A - 2I_n = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Buscamos vectores $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ tales que
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir, que satisfagan el sistema
$$\left. \begin{array}{l} -2v_1 + v_2 - v_3 = 0 \\ -v_1 - v_3 = 0 \\ v_1 - v_2 = 0 \end{array} \right\}.$$
 El rango de

la matriz es dos. Si $\mathbf{v}$ está en E_2 , $v_2 = v_1$ y $v_3 = -v_1$, por lo tanto, $(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_1, -v_1) = v_1(1, 1, -1)$. La dimensión de E_2 es 1 y

$$E_2 = \langle (1, 1, -1) \rangle$$

Como $\dim(E_1) + \dim(E_2) = 3$ la matriz es diagonalizable. Las matrices diagonal y de paso son, respectivamente,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de P . Su determinante es -1 , de donde $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ teniéndose $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

Para calcular la potencia m de A basta tener en cuenta que

$$A^m = P \cdot D^m \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^m \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 - 2^m & -1 + 2^m & 1 - 2^m \\ 1 - 2^m & 2^m & 1 - 2^m \\ -1 - 2^m & 1 - 2^m & 2^m \end{pmatrix}.$$

CÁLCULO DIFERENCIAL

Problema 9 (6 de Febrero de 2001)

Sean $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 , de forma que $f(x, y, g(x, y)) = e^{x^2+y^2}$. Si $g(0, 0) = 0$ y $\nabla f(0, 0, 0) = (1, 2, 1)$, calcular $\nabla g(0, 0)$.

Solución: La situación que se produce es la composición $F = f \circ G$, siendo $F(x, y) = e^{x^2+y^2}$, $G(x, y) = (x, y, g(x, y))$. Al ser las funciones de clase C^1 se puede aplicar la regla de la cadena en el $(0, 0)$, es decir

$$F'(0, 0) = f'(G(0, 0)) \cdot G'(0, 0)$$

o de otro modo al ser $G(0, 0) = (0, 0, 0)$ y $f'(0, 0, 0) = (1 \ 2 \ 1)$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) \right) = (1 \ 2 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x}(0, 0) & \frac{\partial G_1}{\partial y}(0, 0) \\ \frac{\partial G_2}{\partial x}(0, 0) & \frac{\partial G_2}{\partial y}(0, 0) \\ \frac{\partial G_3}{\partial x}(0, 0) & \frac{\partial G_3}{\partial y}(0, 0) \end{pmatrix}$$

siendo $G_1(x, y) = x$, $G_2(x, y) = y$ y $G_3 = g$. Así, como

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

por lo que

$$(0 \ 0) = (1 \ 2 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) & \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) \end{pmatrix}$$

Multiplicando las matrices y despejando se tiene

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = -1 \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = -2 \quad \text{i.e.} \quad \nabla g(0, 0) = (-1, -2).$$

NOTA: Si consideramos $f(u, v, w) = F$ y aplicamos la regla nemotécnica de la regla de la cadena

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Haciendo ahora $u = x$, $v = y$, $w = g$ y como las parciales de F en el $(0, 0)$ se anulan y $\frac{\partial f}{\partial u} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial v} = 2$, según hemos visto más arriba, se tiene

$$0 = 1 + \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) \implies \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = -1.$$

Igualmente

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} \\ 0 &= 2 + \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) \implies \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = -2, \end{aligned}$$

lo cual es una forma directa y simplificada de lo anterior.

Problema 10 (6 de Febrero de 2001)

Calcular todos los puntos de la superficie $z = e^{x+y} + \text{sen}(x-y)$ cuyo plano tangente es paralelo a $z = x + y$.

Solución: El plano tangente a $z = e^{x+y} + \text{sen}(x-y)$ en un punto (a, b, c) es $z - c = A(x - a) + B(y - b)$ siendo $A = \frac{\partial z}{\partial x}(a, b)$, $B = \frac{\partial z}{\partial y}(a, b)$, $c = e^{a+b} + \text{sen}(a - b)$. Como el plano citado tiene como vector normal el $(1, 1, -1)$ necesitamos encontrar a y b para que se cumpla el sistema $A = 1$, $B = 1$. Como

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = e^{x+y} + \cos(x-y) \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = e^{x+y} - \cos(x-y),$$

debemos resolver el sistema

$$\left. \begin{aligned} e^{a+b} + \cos(a-b) &= 1 \\ e^{a+b} - \cos(a-b) &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Sumando las dos ecuaciones se tiene $e^{a+b} = 1$, de donde $a + b = 0$. Igualmente si restamos se tiene $\cos(a-b) = 0$, luego $a - b = \frac{2k+1}{2}\pi$, para

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ En definitiva

$$a = \frac{2k+1}{4}\pi \quad b = -\frac{2k+1}{4}\pi \quad c = 1 + (-1)^k$$

Problema 11 (6 de Febrero de 2001)

Calcular los puntos del elipsoide $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$ cuya distancia al origen es máxima y mínima.

Solución: La distancia de un punto (x, y, z) al origen es $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y es tanto máxima o mínima cuando lo es su cuadrado. Luego debemos maximizar y minimizar $x^2 + y^2 + z^2$ bajo la condición de que el punto esté en el elipsoide. Se trata pues de un problema de multiplicadores de Lagrange con una sola condición de ligadura. Buscaremos los puntos críticos de la función lagrangiana

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} - 1\right).$$

Estos son las soluciones del sistema

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2x + \frac{2}{9}x\lambda &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2y + \frac{2}{4}y\lambda &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= 2z + \frac{2}{16}z\lambda &= 0 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} & &= 1 \end{aligned} \right\}$$

La primera ecuación se cumple si $\lambda = -9$, en cuyo caso de la segunda y tercera se deduce que $y = z = 0$, y por la cuarta obtenemos los puntos $(3, 0, 0)$ y $(-3, 0, 0)$. Similarmente la segunda ecuación se cumple si $\lambda = -4$, y se obtienen los puntos $(0, 2, 0)$ y $(0, -2, 0)$. Por su parte si $\lambda = -16$ se cumple la tercera ecuación y obtenemos los puntos $(0, 0, 4)$ y $(0, 0, -4)$. Cualquier otro valor de λ provocaría que $x = y = z = 0$, lo que contradice la cuarta ecuación. Los puntos obtenidos son los únicos puntos críticos de

F . Aplicando la función distancia al origen en todos ellos el mayor valor se alcanza en $(0, 0, 4)$ y $(0, 0, -4)$ y el menor en $(0, 2, 0)$ y $(0, -2, 0)$.

Problema 12 (15 de Junio de 2001)

Calcular los extremos absolutos de la función $f(x, y) := x - y$ en la región

$$A := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}.$$

Solución: A es la parte del círculo unidad que se encuentra en el primer cuadrante. Se trata de una función continua sobre un conjunto cerrado (contiene a su frontera) y acotado (está dentro de un círculo en el plano). Sabemos con seguridad que dicha función alcanza en A su valor máximo y su valor mínimo.

Para efectuar su cálculo procedamos primero a tomar el interior de A

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, \quad x > 0, \quad y > 0\}$$

Caso de tener candidatos en él deben cumplir $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$; como $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = -1$ no existe tal posibilidad.

Pasemos a estudiar la frontera de A :

(i) En el trozo correspondiente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ siendo $x > 0, y > 0$, planteamos un problema de multiplicadores de Lagrange con función lagrangiana

$$F(x, y, \lambda) = x - y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

para la que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -1 + 2\lambda y = 0, \quad x^2 + y^2 = 1$$

cuyas soluciones son $\lambda = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = -\frac{1}{2\lambda}$, $y = \frac{1}{2\lambda}$, lo que nos proporciona los puntos

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ninguno de los cuales está en A .

(ii) En el trozo en el que $x = 0$, no hace falta usar los multiplicadores de Lagrange pues ahí $f(x, y) = -y$, cuyo valor máximo se alcanza en $(0, 0)$ y su valor mínimo en $(0, 1)$.

(iii) En el trozo en el que $y = 0$, no hace falta usar tampoco los multiplicadores de Lagrange pues ahí $f(x, y) = x$, cuyo valor máximo se alcanza en $(1, 0)$ y su valor mínimo en $(0, 0)$.

Recogiendo los posibles candidatos (incluimos las intersecciones de los trozos considerados de la frontera) obtenemos $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Aplicamos la función f en ellos y el valor máximo se alcanza en $(1, 0)$ (donde $f(1, 0) = 1$) y el valor mínimo se alcanza en $(0, 1)$ (donde $f(0, 1) = -1$).

Problema 13 (15 de Junio de 2001)

Transformar en coordenadas cartesianas la expresión $\frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \theta}$, con $z \in C^2$.

Solución: Aplicando la regla de la cadena al cambio $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ (inversamente $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctg \frac{y}{x}$), sabemos que

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} (-\rho \sin \theta) + \frac{\partial z}{\partial y} \rho \cos \theta = -y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right) = \left[T := \frac{\partial z}{\partial \theta} \right] = \frac{\partial T}{\partial \rho} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \\ &= \left(-y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial y} + x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \left(-\frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \\ &= \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

Problema 14 (14 de Septiembre de 2001)

Calcular y clasificar los puntos críticos de la función

$$f(x, y) := xy(x^2 - y^2).$$

Solución: Como la función tiene como dominio $\mathbb{R}^2$, vamos a calcular sus puntos críticos resolviendo el sistema de ecuaciones que determinan sus derivadas parciales igualadas a cero, es decir

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y(x^2 - y^2) + 2x^2y = y(3x^2 - y^2) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x(x^2 - y^2) - 2y^2x = x(x^2 - 3y^2) = 0 \end{cases}$$

En él si $y = 0$ se tiene, obviamente, que $x = 0$ y viceversa. En otro caso, de la primera ecuación se tiene $3x^2 = y^2$, y sustituyendo en la segunda queda $-8x^3 = 0$ lo que provoca que $x = 0$. Así pues la única solución es el punto $(0, 0)$.

Calculemos las derivadas parciales segundas para clasificarlo.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6xy.$$

Como todas se anulan en el $(0, 0)$ el hessiano vale cero y no obtenemos información con lo que hemos de recurrir a observar cómo se comporta la función en un entorno del punto. Como $f(0, 0) = 0$ factorizamos la función

$$f(x, y) = xy(x + y)(x - y).$$

En cualquier círculo centrado en el origen la función toma valores positivos y valores negativos (basta representar las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x - y = 0$, $x + y = 0$ y estudiar los valores en las regiones que determinan). En conclusión se trata de un punto de silla.

Problema 15 (14 de Septiembre de 2001)

Suponiendo que el sistema

$$\left. \begin{aligned} x + \operatorname{sen} v - \operatorname{sen}^2 u &= 0 \\ x \operatorname{sen} v + \cos u &= 0 \end{aligned} \right\}$$

define a u y v como funciones de x , $u = f(x)$, $v = g(x)$, con $f(1) = \frac{\pi}{2}$ y $g(1) = 0$, calcular $f'(1)$ y $g'(1)$.

Solución: Sustituyendo u por $f(x)$ y v por $g(x)$ obtenemos el sistema

$$\left. \begin{aligned} x + \operatorname{sen} g(x) - \operatorname{sen}^2 f(x) &= 0 \\ x \operatorname{sen} g(x) + \cos f(x) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

en el que, derivando respecto de x , se tiene

$$\left. \begin{aligned} 1 + g'(x) \cos g(x) - 2f'(x) \operatorname{sen} f(x) \cos f(x) &= 0 \\ \operatorname{sen} g(x) + xg'(x) \cos g(x) - f'(x) \operatorname{sen} f(x) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Si damos el valor 1 a x se tiene

$$\left. \begin{aligned} 1 + g'(1) &= 0 \\ g'(1) - f'(1) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

de donde se deducen $f'(1) = g'(1) = -1$.

Problema 16 (28 de Enero de 2002)

Si $z = z(x, y)$ es una función de clase $C^{(2)}$ y tenemos unas nuevas variables u y v tales que $x = u + 3v$, $y = 2u - v$, transformar la expresión

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y}$$

Solución: Como $u = \frac{1}{7}(x + 3y)$, $v = \frac{1}{7}(2x - y)$ se tiene

$$\begin{aligned} T &= \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{7} \left(\frac{\partial z}{\partial u} + 2 \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{7} \left(3 \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right) \end{aligned}$$

Pasemos a volver a derivar

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{7} \left(\frac{\partial T}{\partial u} + 2 \frac{\partial T}{\partial v} \right) = \frac{1}{7} \left(\frac{1}{7} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \right) + \frac{2}{7} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) \right)$$

Al ser la función $C^{(2)}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}$ obtenemos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{49} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 4 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right)$$

Ahora sólo quedaría sustituir.

Problema 17 (28 de Enero de 2002)

Consideremos la superficie $xyz = 1$

(a) Encontrar los puntos de dicha superficie en los que el plano tangente es paralelo a $x + y + z = 0$.

(b) Si la porción de superficie contenida en el primer octante la intersecamos con el plano $2x + y - z = 2$ se sabe que se pueden despejar y y z en función de x , ($y = f(x)$, $z = g(x)$), calcular $f'(1)$ y $g'(1)$.

Solución: (a) La superficie está escrita de forma implícita $F(x, y, z) = xyz - 1 = 0$. Su plano tangente en un punto (a, b, c) (en el que $abc = 1$) viene dado por

$$A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0$$

siendo

$$A := \frac{\partial F}{\partial x}(a, b, c) = bc, \quad B := \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c) = ac, \quad C := \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) = ab$$

Sustituyendo y dividiendo por abc la ecuación del plano es

$$\frac{1}{a}(x - a) + \frac{1}{b}(y - b) + \frac{1}{c}(z - c) = 0,$$

con lo que el vector $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$ es proporcional a $(1, 1, 1)$. Así $a = b = c$ y como su producto es la unidad sólo puede ser $a = b = c = 1$. El punto buscado es el $(1, 1, 1)$.

(b) Asumiendo que $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, consideremos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} xyz = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{array} \right\} \text{ en el que sustituimos } y \text{ y } z, \text{ respectivamente, por } f(x) \text{ y } g(x) \text{ obteniendo}$$

$$\left. \begin{array}{l} xf(x)g(x) = 1 \\ 2x + f(x) - g(x) = 2 \end{array} \right\}; \text{ haciendo en } \acute{e}l \ x = 1 \text{ obtenemos de la segunda ecuaci3n que } f(1) = g(1) \text{ y como la primera nos dice que } f(1)g(1) = 1, \text{ al ser no negativos, se tiene que } f(1) = g(1) = 1.$$

Derivemos el sistema respecto a x obteniendo

$$\left. \begin{array}{l} (f(x) + xf'(x))g(x) + xf(x)g'(x) = 0 \\ 2 + f'(x) - g'(x) = 0 \end{array} \right\}, \text{ y para } x = 1, \quad \left. \begin{array}{l} 1 + f'(1) + g'(1) = 0 \\ 2 + f'(1) - g'(1) = 0 \end{array} \right\}$$

que, obviamente, nos proporciona los valores $f'(1) = -\frac{3}{2}$ y $g'(1) = \frac{1}{2}$

Problema 18 (28 de Enero de 2002)

Calcular los extremos de la función $f(x, y) := x^2 + x + y^2 + y$ en el conjunto

$$K := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Solución: K es un círculo de centro el origen y radio 1. La función f alcanza en él sus valores extremos. Para encontrarlos distinguiremos su interior y su frontera y buscaremos los posibles candidatos a extremos.

En el interior de K , $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$, dichos candidatos deben ser puntos críticos de f , luego calculemos las soluciones del sistema

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 1 = 0 \end{array} \right\}, \text{ cuya única solución es } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right). \text{ Como dicho}$$

punto está en el interior de K lo aceptamos como candidato.

En la frontera de K , $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ disponemos de una condición de ligadura ($x^2 + y^2 - 1 = 0$) luego vamos a plantear un problema de extremos condicionados, aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange: estudiamos los puntos críticos de la función lagrangiana

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2 + x + y^2 + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

calculando sus derivadas parciales, igualando a cero y exigiendo que cumplan la condición, esto es

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 1 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 1 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right\},$$

podemos restar las dos primeras ecuaciones obteniendo $(x - y)(1 + \lambda) = 0$. Si el segundo paréntesis es cero $\lambda = -1$, pero eso no puede ser ya que al sustituir en las ecuaciones se obtiene la aporía $1 = 0$. No queda más remedio que sea el otro paréntesis cero con lo que $x = y$, y con la condición de ligadura se obtiene $2x^2 = 1$, es decir $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Se tiene como candidatos

los puntos $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Para saber cuales son los valores extremos de f basta con calcularla en los tres candidatos y comparar. Como

$$f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + \sqrt{2} \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \sqrt{2}$$

resulta que el segundo punto es en el que la función alcanza su valor máximo y el primero en el que alcanza su valor mínimo.

Problema 19 (26 de Junio de 2002) Sea la función $f(x, y) = xy + \cos(xy) + x - y$

(i) Calcular el plano tangente a su gráfica en el punto $(0, 0, 1)$

(ii) Si f se anula se puede despejar y en función de x . Calcular $y'(0)$.

Solución: (i) El plano tangente será

$$z - 1 = A(x - 0) + B(y - 0)$$

siendo A y B las derivadas parciales de f en el $(0, 0)$. Como

$\frac{\partial f}{\partial x} = y - y \operatorname{sen}(xy) + 1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x - x \operatorname{sen}(xy) - 1$, resulta ser $A = 1$ y $B = -1$ con lo que el plano tangente es $z = x - y + 1$.

(ii) Si $0 = xy + \cos(xy) + x - y$ y asumimos $y = y(x)$ haciendo $x = 0$ se obtiene $0 = 1 - y(0)$, luego $y(0) = 1$. Si derivamos en la primera ecuación se tiene $y + xy' - y' \operatorname{sen}(xy) + 1 - y' = 0$ que aplicando en $x = 0$ nos da $1 + 0y' - y'(0) \operatorname{sen}(0) + 1 - y'(0) = 0$ de donde $y'(0) = 2$.

Problema 20 (26 de Junio de 2002) Calcular los extremos absolutos de $f(x, y) := x^2 - y^2$ en el triángulo determinado por los puntos $A = (3, 0)$, $B = (0, 3)$ y $C = (-2, -2)$.

Solución: La función es continua sobre el triángulo $\mathbf{T}$ que es cerrado y acotado luego alcanza en él su valor máximo y su valor mínimo. Distinguiremos el interior y la frontera de la región:

Interior de $\mathbf{T}$: Los posibles candidatos deben ser soluciones del sistema

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0 \end{array} \right\} \text{luego el único candidato es el } (0, 0), \text{ que al estar en en}$$

interior de $\mathbf{T}$ lo mantenemos como tal. Le llamamos P_1 .

Frontera de $\mathbf{T}$: Trataremos cada uno de los lados como un problema de multiplicadores de Lagrange

Lado que une A con B : su ecuación es (recta que pasa por dos puntos) $x + y - 3 = 0$. La función lagrangiana es

$$F(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 + \lambda(x + y - 3)$$

cuyos puntos críticos son solución del sistema
$$\left. \begin{array}{l} 2x + \lambda = 0 \\ -2y + \lambda = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{array} \right\}$$

De la primera y segunda ecuación se deduce que $y = -x$, que al sustituir en la tercera nos proporciona $0 = 3$. No hay candidatos en este lado.

Lado que une B con C : su ecuación es $5x - 2y + 6 = 0$. La función lagrangiana es

$$F(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 + \lambda(5x - 2y + 6)$$

cuyos puntos críticos son solución del sistema
$$\left. \begin{array}{l} 2x + 5\lambda = 0 \\ -2y - 2\lambda = 0 \\ 5x - 2y + 6 = 0 \end{array} \right\}$$

De la segunda ecuación se deduce que $y = -\lambda$, que nos deja la primera como $2x - 5y = 0$. Ésta junto a la tercera nos proporciona el $(-\frac{10}{7}, -\frac{4}{7})$ que se encuentra en el lado. Lo reservamos llamándole P_2 .

Lado que une C con A : su ecuación es $2x - 5y - 6 = 0$. La función lagrangiana es

$$F(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 + \lambda(2x - 5y - 6)$$

cuyos puntos críticos son solución del sistema
$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2\lambda = 0 \\ -2y - 5\lambda = 0 \\ 2x - 5y - 6 = 0 \end{array} \right\}$$

De la primera ecuación se deduce que $x = -\lambda$, que nos deja la segunda como $-2x + 5y = 0$. Ésta junto a la tercera nos proporciona el $(-\frac{4}{7}, -\frac{10}{7})$ que se encuentra en el lado. Lo reservamos llamándole P_3 .

Añadimos a la reserva que estamos haciendo los tres vértices del triángulo.

Calculemos finalmente la función en los seis puntos candidatos. $f(P_1) = 0$, $f(P_2) = \frac{12}{7}$, $f(P_3) = -\frac{12}{7}$, $f(A) = 9$, $f(B) = -9$ y $f(C) = 0$. En resumidas cuentas el máximo se alcanza en A y el mínimo en B .

Problema 21 (2 de Septiembre de 2002)

Pasar a coordenadas polares la expresión

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$$

siendo $z = z(x, y)$.

Solución: Vamos a resolverlo de dos maneras, ambas usando la regla de la cadena:

En primer lugar como $x := \rho \cos \theta$, $y := \rho \sin \theta$ se tiene

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \rho} = \cos \theta \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \sin \theta \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\rho \sin \theta \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \rho \cos \theta \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \end{cases}$$

Considerando lo anterior como un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas ($\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$) cuyo determinante es no nulo (vale ρ) obtenemos, usando la regla de Cramer:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \theta} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

Sustituyendo en la expresión inicial se tiene

$$\rho \cos \theta \left(\cos \theta \frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) + \rho \sin \theta \left(\sin \theta \frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) = \rho \frac{\partial z}{\partial \rho}$$

Otra opción sería considerar que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \arctan \frac{y}{x}$ con lo que se tiene

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{cases}$$

que tras cambiar x e y por sus valores en polares nos proporciona idéntico resultado al obtenido anteriormente.

Problema 22 (2 de Septiembre de 2002)

Estudiar y clasificar, usando el cálculo diferencial, los puntos críticos de la función $f(x, y) := (2x - y)(x^2 - y)$.

Solución: Hallemos los puntos críticos de f buscando los que anulen a sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x^2 - y) + 2x(2x - y) = 6x^2 - 2xy - 2y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -(x^2 - y) - (2x - y) = 2y - x^2 - 2x = 0$$

Obtenemos $(0, 0)$, $(1, \frac{3}{2})$, $(2, 4)$.

Calculemos las derivadas parciales segundas y el Hessiano:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x - 2y, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2x - 2, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad H := AC - B^2.$$

Al aplicarlo en cada uno de los puntos críticos se tiene

Para $(1, \frac{3}{2})$: $A = 9$, $B = -4$, $C = 2$ y $H = 2$; es un mínimo local.

Para $(0, 0)$: $A = 0$, $B = -2$, $C = 2$ y $H = -4$; es un punto de silla.

Para $(2, 4)$: $A = 16$, $B = -6$, $C = 2$ y $H = -4$; es un punto de silla.

CÁLCULO INTEGRAL

Problema 23 (15 de Junio de 2001)

Calcular el volumen de la región del primer octante limitada por $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$.

Solución: La región se puede escribir como

$$A := \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq z \leq xy\}.$$

Así pues,

$$\begin{aligned} v(A) &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{xy} dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy dy dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= \int_0^1 x \frac{(1-x^2)}{2} dx = -\frac{1}{4} \int_0^1 -2x(1-x^2) dx = -\frac{1}{4} \left[\frac{(1-x^2)^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{4} \left(0 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Problema 24 (15 de Junio de 2001)

Calcular la integral de línea

$$\int_{\gamma} (2x^3 - y^3) dx + (x^3 + y^3) dy$$

siendo γ la circunferencia unidad recorrida en sentido positivo.

Solución: Aunque se puede hacer directamente la resolveremos utilizando el Teorema de Green. Éste afirma que si γ es un camino cerrado, positivamente orientado, que envuelve a una región D en el plano entonces

$$\int_{\gamma} M(x, y) dx + N(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

En nuestro caso $M = 2x^3 - y^3$, $N = x^3 + y^3$, con lo que $\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2$ y $\frac{\partial M}{\partial y} = -3y^2$, de donde

$$\int_{\gamma} (2x^3 - y^3) dx + (x^3 + y^3) dy = 3 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

siendo $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Si hacemos un cambio usando coordenadas polares

$$3 \iint_D (x^2 + y^2) \, dx dy = 3 \iint_B \rho^3 \, d\rho d\theta$$

siendo $B = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Aplicando el teorema de Fubini se tiene

$$3 \iint_B \rho^3 \, d\rho d\theta = 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^3 \, d\theta d\rho = 6\pi \int_0^1 \rho^3 \, d\rho = 6\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3\pi}{2}.$$

Problema 25 (15 de Junio de 2001)

Sea S la porción del paraboloides $z = 4 - x^2 - y^2$ situada por encima del plano $z = 0$. Calcular el flujo del campo $F(x, y, z) := (x, y, z)$ a través de S .

Solución: La superficie se puede parametrizar como

$$\phi(x, y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2)$$

definida en el conjunto $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$. El vector normal a la superficie en cada punto viene dado por

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right) = (2x, 2y, 1)$$

Con todo lo anterior el flujo pedido es

$$\iint_{\phi} F = \iint_D F(\phi(x, y)) \cdot \mathbf{n} \, dx dy = \iint_D (4 + x^2 + y^2) \, dx dy$$

Procediendo a cambiar de coordenadas cartesianas a polares y siendo $B = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, se tiene

$$\begin{aligned} \iint_{\phi} F &= \iint_B (4 + \rho^2) \rho \, d\rho d\theta = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4 + \rho^2) \rho \, d\theta d\rho = \pi \int_0^2 (4 + \rho^2) 2\rho \, d\rho = \\ &= \pi \left[\frac{(4 + \rho^2)^2}{2} \right]_0^2 = \pi \left(\frac{64}{2} - \frac{16}{2} \right) = 24\pi. \end{aligned}$$

Problema 26 (14 de Septiembre de 2001)

Una esfera centrada en el origen y de radio r se corta por un plano horizontal a una altura h , ($0 < h < r$). Hallar el volumen de la parte de la esfera que se encuentra por encima de dicho plano.

Solución: Nos piden que calculemos el volumen del conjunto A que queda entre el plano $z = h$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Es decir

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, h \leq z \leq \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\}$$

siendo D el círculo, en $\mathbb{R}^2$, de centro el origen y radio $r^2 - h^2$.

Como $v(A) = \iiint_A dx dy dz =$ (cilíndricas) $= \iiint_B \rho \, d\rho d\theta dz$, siendo B el conjunto A escrito en las nuevas coordenadas, es decir

$$B = \{(\rho, \theta, z) : 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \rho \leq \sqrt{r^2 - h^2}, h \leq z \leq \sqrt{r^2 - \rho^2}\}$$

con lo que se tiene, aplicando el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} v(A) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{r^2 - h^2}} \int_h^{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \rho \, dz d\rho d\theta = 2\pi \int_0^{\sqrt{r^2 - h^2}} \rho(\sqrt{r^2 - \rho^2} - h) d\rho = \\ &= 2\pi \left(\left[-\frac{\sqrt{r^2 - \rho^2}}{3} \right]_0^{\sqrt{r^2 - h^2}} - h \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^{\sqrt{r^2 - h^2}} \right) = 2\pi \left(\left(-\frac{1}{3}h^3 + \frac{r^3}{3} \right) - h \frac{r^2 - h^2}{2} \right) = \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{3}(r^3 - h^3) - \frac{hr^2}{2} + \frac{h^3}{2} \right) = 2\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{hr^2}{2} + \frac{h^3}{6} \right). \end{aligned}$$

Problema 27 (14 de Septiembre de 2001)

Calcular $\int_\gamma F$, siendo $F(x, y) := (\cos x \sen y, \sen x \cos y)$, si γ es una curva suave que une los puntos $(0, -\pi)$ y $(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Solución: El campo $F = (F_1, F_2)$ tiene como dominio $\mathbb{R}^2$, que es conexo y allí

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \cos x \cos y = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Se trata de un campo conservativo. Existe una función potencial del mismo, es decir, una aplicación f escalar de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ de forma que $\nabla f = F$. Calculémosla:

Como $\frac{\partial f}{\partial x} = F_1 = \cos x \sin y$, $f(x, y) = \sin x \sin y + \varphi(y)$. Así

$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin x \cos y + \varphi'(y)$, luego $\varphi'(y) = 0$, lo que nos permite tomar

como $\varphi(y)$ cualquier función constante, en particular la más simple, la nula. Por tanto tomamos $f(x, y) = \sin x \sin y$.

Finalmente para calcular $\int_{\gamma} F$ sólo nos interesa el punto inicial y final de la curva ya que al ser F conservativo es independiente de la curva que se considere, teniéndose

$$\int_{\gamma} F = f\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - f(0, -\pi) = \sin \frac{3\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \cdot \sin(-\pi) = -1$$

Problema 28 (26 de Junio de 2002)

Hallar el volumen de la región comprendida entre el plano $z = 0$ y el paraboloides $x^2 + y^2 = 4 - z$.

Solución: Nos piden el volumen de

$$B := \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$$

Veremos dos maneras de calcularlo: primero mediante una integral triple

$$V(B) = \iiint_B dx dy dz = \iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy$$

siendo $D := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Efectuando el cambio a coordenadas cilíndricas

$$V(B) = \iint_M (4 - \rho^2) \rho d\rho d\theta, \text{ con } M := \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

y aplicando el teorema de Fubini

$$V(B) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4 - \rho^2) \rho d\theta d\rho = 2\pi \int_0^2 (4 - \rho^2) \rho d\rho = -\pi \left[\frac{(4 - \rho^2)^2}{2} \right]_0^2 = 8\pi$$

Otra forma de hacerlo sería usando el principio de Cavalieri. Para ello escojamos la altura z (que varía entre 0 y 4) y si B_z es la sección horizontal del paraboloides, que tiene un área $S(B_z)$

$$V(B) = \int_0^4 S(B_z) dz$$

Dicha sección es, a la altura z , el círculo $x^2 + y^2 \leq 4 - z$, luego

$$V(B) = \int_0^4 \pi(4 - z) dz = \pi \left[-\frac{(4 - z)^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi$$

Problema 29 (26 de Junio de 2002)

Consideremos el campo de fuerzas

$$F(x, y) := (2xy \operatorname{sen}(x^2y) + \cos x, x^2 \operatorname{sen}(x^2y) - \frac{1}{y})$$

definido en el semiplano $y > 0$.

(i) ¿Es F conservativo?

(ii) Calcular el trabajo producido al trasladar una partícula bajo ese campo por el camino $\gamma(t) := (t \cos t, 1 - \frac{t}{\pi} + t^{\cos t})$, con $t \in [0, \pi]$

Solución: (i) Para ver si es conservativo sea $F := (M, N)$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x(\operatorname{sen}(x^2y) + x^2y \cos(x^2y)) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Al ser el dominio de F estrellado (o convexo) la condición necesaria es también suficiente y F resulta ser conservativo.

(ii) Por el apartado anterior basta encontrar la función potencial de F , f , y el trabajo será

$$W := \int_{\gamma} F = f(\gamma(\pi)) - f(\gamma(0)) = f(-\pi, \frac{1}{\pi}) - f(0, 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = 2xy \operatorname{sen}(x^2y) + \cos x, \quad \text{luego} \quad f = -\cos(x^2y) + \operatorname{sen} x + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \operatorname{sen}(x^2y) + \varphi'(y) = N = x^2 \operatorname{sen}(x^2y) - \frac{1}{y}$$

Con ello $\varphi(y) = -\log y + C$. Tomamos $C = 0$ con lo que resulta

$$f(x, y) = -\cos(x^2 y) + \operatorname{sen} x - \log y$$

y, por lo tanto,

$$W = 2 + \log \pi.$$

Problema 30 (26 de Junio de 2002)

Hallar el área encerrada por la elipse intersección del plano $x + y + z = 1$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Solución: Nos están pidiendo el área de la superficie dada por el plano y circunscrita por el cilindro. Parametrizamos la superficie

$$\phi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi(x, y) = (x, y, z) = (x, y, 1 - x - y)$$

siendo $D := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Así el área pedida es

$$S = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \, dx dy = \iint_D \sqrt{3} \, dx dy = \sqrt{3} \iint_D dx dy$$

Como la integral es el área de D , esto es π , se tiene

$$S = \sqrt{3}\pi$$

Problema 31 (2 de Septiembre de 2002)

Sea $A := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \leq 0\}$. Calcular

$$I := \iiint_A \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2} \, dx dy dz.$$

Solución: Por la forma del integrando y al ser A un trozo de esfera deberemos ensayar el cambio a coordenadas esféricas:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \operatorname{sen} \varphi \\ y &= \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \\ z &= \rho \cos \varphi \end{aligned} \right\} \text{ con jacobiano } J = -\rho^2 \operatorname{sen} \varphi.$$

El conjunto A se transforma en

$$B = \{(\rho, \theta, \varphi) : 0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi\}$$

Aplicamos el teorema de cambio de variable y tenemos

$$\begin{aligned} I &= \iiint_B \frac{1}{1+\rho^2} \rho^2 \operatorname{sen} \varphi \, d\rho d\theta d\varphi = (\text{Fubini}) = \int_0^1 \frac{\rho^2}{1+\rho^2} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho = \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{\rho^2}{1+\rho^2} \, d\rho = 2\pi \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+\rho^2}\right) \, d\rho = 2\pi[\rho - \arctan \rho]_0^1 = 2\pi\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 2\pi - \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

Problema 32 (2 de Septiembre de 2002)

Dado el campo vectorial

$$F(x, y) := (-3x^2y^2 \operatorname{sen}(x^3y^2), -2yx^3 \operatorname{sen}(x^3y^2))$$

calcular $\int_{\gamma} F$, si γ es un camino, C^1 a trozos, que une los puntos $(1, 7)$ y $(4, 9)$.

Solución: El campo es de la forma $F = (M, N)$, con

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -6x^2y \operatorname{sen}(x^3y^2) - 6x^5y^3 \cos(x^3y^2) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

luego, al estar definido en todo el plano, se trata de un campo conservativo. Calculemos su función potencial. Debe ser una $f(x, y)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2y^2 \operatorname{sen}(x^3y^2)$, con lo que $f(x, y) = \cos(x^3y^2) + g(y)$. Como, por otro lado, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2yx^3 \operatorname{sen}(x^3y^2)$, necesariamente es $g'(y) = 0$. Podemos tomar $f(x, y) = \cos(x^3y^2)$.

La integral de línea sabemos que depende sólo de los valores que toma cualquier función potencial en los extremos del camino, con lo que

$$\int_{\gamma} F = f(4, 9) - f(1, 7) = \cos 5184 - \cos 49.$$

ECUACIONES DIFERENCIALES

Problema 33 (15 de Junio de 2001)

Integrar

$$y' + y \cos x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}.$$

Solución: Se trata de una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden. Para integrarla vamos a suponer factorizada la solución $y = u \cdot v$. En ese caso la ecuación queda

$$u'v + v'u + uv \cos x = \operatorname{sen} x \cos x$$

$$u'v + u(v' + v \cos x) = \operatorname{sen} x \cos x$$

Igualando el paréntesis a cero se tiene la ecuación con variables separables

$$\frac{v'}{v} = -\cos x$$

cuya solución es $\log v = -\operatorname{sen} x$, es decir, $v = e^{-\operatorname{sen} x}$. Así la ecuación original queda

$$u'e^{-\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x \cos x$$

de donde

$$u' = e^{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} x \cos x$$

Resolviendo

$$u = \int e^{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} x \cos x dx = (\text{por partes}) = \operatorname{sen} x e^{\operatorname{sen} x} - \int e^{\operatorname{sen} x} \cos x dx = \operatorname{sen} x (e^{\operatorname{sen} x} - 1) + C$$

Con todo ello

$$y = C e^{-\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen} x - 1.$$

Problema 34 (15 de Junio de 2001)

Calcular la solución particular de la ecuación $y''' - y'' = 4x^2$ que cumple las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.

Solución: *Primer método* La ecuación propuesta es una ecuación de orden tres no homogénea con coeficientes constantes. Su solución general se puede obtener como suma de una solución particular y de la solución general de la correspondiente homogénea $y''' - y'' = 0$.

Para encontrar dicha solución tomemos la ecuación característica

$$m^3 - m^2 = 0,$$

que tiene como raíces $m = 0$ (doble) y $m = 1$. La solución buscada es combinación lineal de las funciones $e^{0x} = 1$, $xe^{0x} = x$ y e^x , es decir

$$y_h = A + Bx + Ce^x$$

La solución particular de la ecuación original debe ser (a la vista del segundo miembro que es un polinomio de grado dos y del hecho de que el cero es una raíz doble de la ecuación característica):

$$y_p = x^2(ax^2 + bx + c)$$

Calculamos su segunda y tercera derivadas y sustituimos en la ecuación obteniendo

$$(24ax + 6b) - (12ax^2 + 6bx + 2c) = 4x^2$$

de donde, identificando coeficientes, se deduce el sistema $-12a = 4$, $24a - 6b = 0$, $6b - 2c = 0$, cuya solución es $a = -\frac{1}{3}$, $b = -\frac{4}{3}$, $c = 4$. En definitiva la solución general de la ecuación inicial es

$$y = A + Bx + Ce^x - \frac{1}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 4x^2.$$

Si buscamos la solución particular que cumple las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$, derivamos una y dos veces y sustituimos x por cero obteniendo

$$y(0) = 1 = A + C, \quad y'(0) = 1 = B + C, \quad y''(0) = 1 = C - 8$$

con lo que $A = -8$, $B = -8$ y $C = 9$ y la solución particular buscada es

$$y = 9e^x - \frac{1}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 - 8x - 8.$$

Segundo método: Podemos utilizar la transformada de Laplace. Al aplicarla a la ecuación se tiene

$$\mathbb{L}(y''') - \mathbb{L}(y'') = 4\mathbb{L}(x^2)$$

Como

$$\mathbb{L}(y''') = s^3\mathbb{L}(y) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) = s^3\mathbb{L}(y) - s^2 - s - 1$$

$$\mathbb{L}(y'') = s^2\mathbb{L}(y) - sy(0) - y'(0) = s^2\mathbb{L}(y) - s - 1$$

$$\mathbb{L}(x^2) = \frac{2}{s^3}$$

La ecuación trasformada queda

$$(s^3 - s^2)\mathbb{L}(y) = \frac{8}{s^3} + s^2 = \frac{8 + s^5}{s^3}$$

y de ahí

$$\mathbb{L}(y) = \frac{8 + s^5}{s^5(s - 1)} = \frac{A}{s - 1} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s^2} + \frac{D}{s^3} + \frac{E}{s^4} + \frac{F}{s^5}$$

de donde

$$8 + s^5 = As^5 + Bs^4(s - 1) + Cs^3(s - 1) + Ds^2(s - 1) + Es(s - 1) + F(s - 1)$$

cuya solución es $A = 9$, $B = -8$, $C = -8$, $D = -8$, $E = -8$ y $F = -8$, es decir

$$\mathbb{L}(y) = \frac{9}{s - 1} - \frac{8}{s} - \frac{8}{s^2} - \frac{8}{s^3} - \frac{8}{s^4} - \frac{8}{s^5} = 9\left(\frac{1}{s - 1}\right) - 8\left(\frac{1}{s}\right) - 8\left(\frac{1}{s^2}\right) - 8\left(\frac{1}{s^3}\right) - \frac{4}{3}\left(\frac{3 \cdot 2}{s^4}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{s^5}\right)$$

y, en definitiva,

$$y = 9e^x - \frac{1}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 - 8x - 8.$$

Problema 35 (14 de Septiembre de 2001)

Integrar

$$(5 + y^3 \sin x)dx + 3y^2 \cos x dy = 0.$$

Solución: La ecuación es de la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, con

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{3y^2 \sin x + 3y^2 \sin x}{3y^2 \cos x} = 2 \frac{\sin x}{\cos x}$$

con lo que sabemos que admite un factor integrante μ , función sólo de x , de forma que la ecuación $\mu(x)M(x, y)dx + \mu(x)N(x, y)dy = 0$ resulta ser exacta.

Debemos entonces tener $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$, o de otra forma

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} = \mu' N + \mu \frac{\partial N}{\partial x}.$$

En definitiva

$$\frac{\mu'}{\mu} = 2 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \text{ de donde } \log \mu = -2 \log |\cos x|, \text{ y}$$

$$\mu = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Para resolver la ecuación diferencial exacta

$$\frac{5 + y^3 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx + \frac{3y^2}{\cos x} dy = 0$$

calculamos la función potencial integrando

$$\int_0^x \mu(x)M(x, y)dx + \int_0^y \mu(0)N(0, y)dy = C$$

es decir

$$\int_0^x \frac{5 + y^3 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx + \int_0^y 3y^2 dy = C$$

de donde se tiene la solución

$$5 \tan x + \frac{y^2}{\cos x} = C.$$

Problema 36 (26 de Junio de 2002)

Integrar la ecuación

$$y' = \frac{x + y + 1}{-x + y + 3}.$$

Solución: La ecuación se puede hacer de dos maneras.

Primera forma: La ecuación se puede reducir a una homogénea. Resolvamos para ello el sistema $\left. \begin{array}{l} x + y + 1 = 0 \\ -x + y + 3 = 0 \end{array} \right\}$ cuya solución es el punto $(1, -2)$. Hacemos el cambio $s = x - 1$, $t = y + 2$ con lo que $ds = dx$ y $dt = dy$ (quedando $y' = t'$) y la ecuación queda

$$t' = \frac{dt}{ds} = \frac{t + s}{t - s} = \frac{\frac{t}{s} + 1}{\frac{t}{s} - 1}$$

Hagamos $t = us$, $t' = u's + u$, de donde $u's + u = \frac{u + 1}{u - 1}$, y de ahí haciendo $u' = \frac{du}{ds}$, separamos las variables obteniendo

$$\frac{(u - 1) du}{-u^2 + 2u + 1} = \frac{ds}{s}$$

Integrando se obtiene

$$-\frac{1}{2} \log(-u^2 + 2u + 1) + C = \log s, \quad \text{es decir} \quad s\sqrt{-u^2 + 2u + 1} = e^C = D$$

Basta deshacer el cambio y agrupar constantes, obteniendose

$$x^2 - y^2 + 2xy + 2x - 6y = E$$

Segunda forma: Haciendo $y' = \frac{dy}{dx}$, la ecuación la podemos escribir como $Mdx + Ndy = (x + y + 1)dx + (x - y - 3)dy = 0$, que es exacta pues

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

luego basta encontrar la función potencial de (M, N) . Para ello esta vez integremos con $x_0 = y_0 = 0$

$$\int_0^x M(x, y)dx + \int_0^y N(0, y)dy = \int_0^x (x + y + 1)dx + \int_0^y (-y - 3)dy = K$$

$$\frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^2}{2} - 3y = K$$

Basta multiplicar por 2 para tener la misma solución que antes con $2K = E$.

Problema 37 (26 de Junio de 2002)

Integrar la ecuación

$$y'' - 6y' + 9y = 12 \operatorname{sen} x + 16 \operatorname{cos} x.$$

Solución: Es una ecuación lineal de segundo orden. Su solución será suma de la solución general de la homogénea $y'' - 6y' + 9y = 0$ y de una solución particular de la ecuación completa. Para encontrar la primera escribamos la ecuación característica

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

que tiene 3 como una raíz doble. Eso nos indica que la solución general de la homogénea es

$$y_g = (A + Bx)e^{3x}$$

El segundo miembro de la ecuación es de la forma

$$e^{ax}(P_m(x) \operatorname{sen} bx + Q_n(x) \operatorname{cos} bx) \quad a = 0, \quad b = 1, \quad P_m(x) = 12, \quad Q_n(x) = 16$$

no siendo $a \pm bi$ raíz de la ecuación característica, luego ensayaremos $y_p = C \operatorname{sen} x + D \operatorname{cos} x$,

$$y_p'' - 6y_p' + 9y_p = (8C + 6D) \operatorname{sen} x + (8D - 6C) \operatorname{cos} x = 12 \operatorname{sen} x + 16 \operatorname{cos} x$$

que, identificando y resolviendo el sistema, nos da $C = 0$, $D = 2$, luego $y_p = 2 \operatorname{cos} x$.

En definitiva la solución es

$$y = (A + Bx)e^{3x} + 2 \operatorname{cos} x.$$

Problema 38 (2 de Septiembre de 2002)

Integrar la ecuación

$$-y \, dx + (x + y^2) \, dy = 0.$$

Solución: La ecuación es de la forma $Mdx + Ndy$ con

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = -\frac{2}{y}$$

luego admite un factor integrante μ , que depende sólo de y , y que cumple que $\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{2}{y}$. Integrando se tiene que $\log \mu = -2 \log y$, es decir $\mu = \frac{1}{y^2}$. Dicho factor convierte la ecuación en diferencial exacta, en concreto

$$-\frac{1}{y} dx + \left(\frac{x}{y^2} + 1\right) dy = 0$$

Hallemos la función potencial $f(x, y) = C$ que la genera: debe cumplir que $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{y}$, es decir $f(x, y) = -\frac{x}{y} + \varphi(y)$. Así $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y^2} + \varphi'(y) = \frac{x}{y^2} + 1$, de donde tomando $\varphi(y) = y$ resulta la solución

$$-\frac{x}{y} + y = C \quad \text{o, equivalentemente,} \quad x = y^2 - Cy.$$

Otra forma de resolverla sería escribirla como $x' - \frac{1}{y}x = y$, que resulta ser lineal suponiendo x en función de y . Se supone entonces $x = u \cdot v$, luego $x' = u' \cdot v + v' \cdot u$ y tenemos

$$u \cdot v' + v \cdot \left(u' - \frac{1}{y}u\right) = y$$

Exigiendo que el paréntesis sea igual a cero obtenemos $u = y$, luego $y \cdot v' = y$ de donde $v' = 1$, es decir $v = y + D$ con lo que

$$x = y(y + D).$$