Elaboración de un test para medir el nivel 5 de Van Hiele

Victor Manero
Alberto Arnal-Bailera
Departamento de Matemáticas – Universidad de Zaragoza

Qué caracteriza el nivel 5 de VH?

- Características de las personas en este nivel (Mayberry, 1983):
  - Comprende los aspectos formales de la deducción.
  - Comprende el papel y la necesidad de diferentes tipos de demostraciones.
  - Aplica sin problemas las leyes de la lógica formal.
  - Distingue entre axiomas y teoremas.
  - Deduce hechos a partir de afirmaciones sobre una geometría finita.

Qué caracteriza el nivel 5 de VH?

- Contenidos: aspectos no convencionales de la Geometría.
  - Geometrías finitas.
  - Métricas no convencionales dentro de la Geometría euclídea.
  - Geometrías no euclideas.

Antecedentes

Usiskin (1982) y Mayberry (1983) proponen incluir la **deducción de hechos de proposiciones sobre geometrías finitas**.

Blair (2004) plantea **trabajar cuestiones clásicas de geometría pero utilizando métricas poco convencionales** (cartero) y describir cómo es una circunferencia, trazar un triángulo equilátero, o probar que algunas definiciones equivalentes de objetos geométricos con la métrica Euclidea dejan de serlo con esta nueva métrica.

De cara a validar **nuestro cuestionario** nos planteamos administrarlo a alumnos del grado de matemáticas y a alumnos del máster de profesorado en la especialidad de matemáticas de la Universidad de Zaragoza. Las respuestas de estos alumnos permitirán rediseñar el cuestionario y establecer ejemplos concretos de valoraciones de respuestas.

¿Por qué lo queremos medir? Implicaciones para la enseñanza

- Trabajar el nivel 5 puede mejorar el 4. Blair (2004) habla de los **procesos de folding back** en los que ciertas dificultades en tareas exigentes provoca un reprocesamiento y reconstrucción de conocimientos más básicos.
- Esto es, el trabajo con actividades propias de nivel 5 de Van Hiele puede promover una **adquisición más completa de niveles inferiores**.
- Lo importante es el **nivel de razonamiento**, no los contenidos sobre los que trabaja el nivel. Trabajar sobre esos contenidos puede hacer ver de un modo más global el resto.

Objetivos

1. Describir qué características debe tener un cuestionario que permita medir (¿también?) el nivel 5 de Van Hiele.
2. Diseñar y validar un cuestionario que permita medir (¿también?) el grado de adquisición del nivel 5 de Van Hiele.

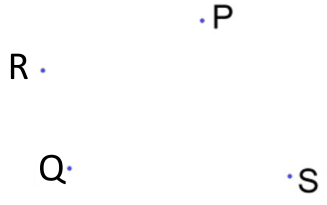
Características deseables en un cuestionario para medir el nivel 5 de VH

- **Respuesta abierta** (mayores niveles de coherencia)
- **Describir previamente qué procesos clave se ponen en juego en el nivel 5 y después dar indicadores de los grados de adquisición para cada uno.**
- **Valorar reducir a 5 grados de adquisición**: no adquisición, adquisición baja, adquisición media, adquisición alta y adquisición total.
- **Estructura de superítems:** nos planteamos si este nivel está relacionado con los anteriores o es algo "especial". Algunos superitems podrían distinguir grados de adquisición, no niveles.

ITEM 1

- Geometría finita
- Identificación
- Demostración
- Uso de definiciones.

ITEM 1. En **geometría-F**, una distinta a la que estas acostumbrado, existen exactamente cuatro puntos y seis líneas. Cada línea contiene exactamente dos puntos. Denotemos a los puntos como P, Q, R, y S, las líneas como $\{P, Q\}$, $\{P, R\}$, $\{P, S\}$, $\{Q, R\}$, $\{Q, S\}$ y $\{R, S\}$



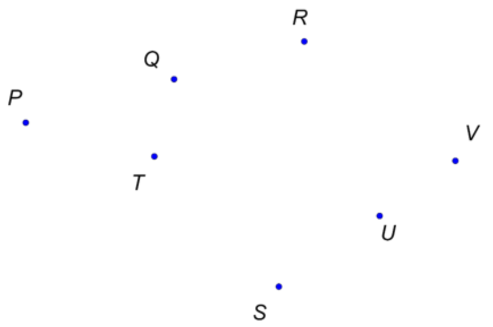
Las palabras "intersecar" y "paralelas" se usan en geometría-F así:
Las líneas $\{P, Q\}$ y $\{P, R\}$ intersecan en P porque $\{P, Q\}$ y $\{P, R\}$ tienen P en común. Las líneas $\{P, Q\}$ y $\{R, S\}$ son paralelas porque no tienen puntos en común.

Dada la recta $\{P, Q\}$ describe cual es su relación con el resto de líneas, es decir, di si se interseca o es paralela a cada una de las otras líneas. En cada caso justifica tu respuesta.

ITEM 2

- Geometría finita
- Demostración
- Uso de definiciones.

ITEM 2. En **geometría-H**, una distinta a la que estas acostumbrado, existen exactamente siete puntos y siete líneas. Cada linea contiene exactamente tres puntos. Denotemos a los puntos como P, Q, R, S, T, U y V y las líneas como $\{P,Q,R\}$, $\{P,S,T\}$, $\{P,U,V\}$, $\{Q,S,U\}$, $\{Q,T,V\}$, $\{R,S,V\}$ y $\{R,T,U\}$



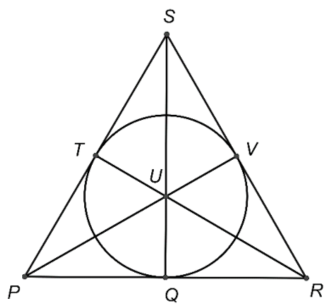
Las palabras "intersecar" y "paralelas" se usan en geometría-H así:
Dos líneas se intersecan si tienen un punto en común y son paralelas si no poseen ningún punto en común.

2.1 En geometría-H, ¿se cumple que por cualesquiera dos puntos pasa una única línea? Justifica tu respuesta.
2.2 En geometría-H ¿se cumple que dos líneas cualesquiera se intersecan en un único punto? Justifica tu respuesta.

ITEM 3

- Geometría finita
- Demostración con ayuda gráfica
- Uso de definiciones.

ITEM 3. En **geometría-H**, una distinta a la que estas acostumbrado, existen exactamente siete puntos y 7 líneas. Cada linea contiene exactamente tres puntos. Denotemos a los puntos como P, Q, R, S, T, U y V y las líneas como $\{P,Q,R\}$, $\{P,S,T\}$, $\{P,U,V\}$, $\{Q,S,U\}$, $\{Q,T,V\}$, $\{R,S,V\}$ y $\{R,T,U\}$
Normalmente la geometría-H se suele representar con el diagrama siguiente:



Las palabras "intersecar" y "paralelas" se usan en geometría-H así:
Dos líneas se intersecan si tienen un punto en común y son paralelas si no poseen ningún punto en común.

3.1 En geometría-H, ¿se cumple que por cualesquiera dos puntos pasa una única línea? Justifica tu respuesta.
3.2 En geometría-H ¿se cumple que dos líneas cualesquiera se intersecan en un único punto? Justifica tu respuesta

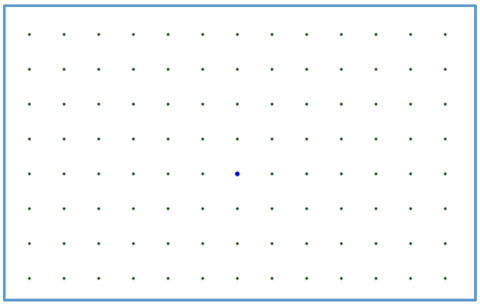
ITEM 4

- Métricas no convencionales en Geometría euclidea
- Demostración
- Demostración con ayuda
- Uso de definiciones.

ITEM 4. Normalmente para medir distancias en el plano usamos la **distancia Euclidea**, que se define del modo siguiente:
Dados dos puntos, la distancia entre ambos es la longitud del segmento que los une.
Sin embargo, podemos definir otras distancias diferentes, como por ejemplo la conocida como **distancia del cartero** (o del taxista) que se define como sigue:
La distancia entre dos puntos viene dada por la ruta mas corta que los une usando solo líneas horizontales y verticales.

4.1 Si definimos la **circunferencia** como el conjunto de puntos que equidistan (están a la misma distancia) de otro punto, ¿qué forma tienen las circunferencias con la distancia del cartero? Justifica tu respuesta.

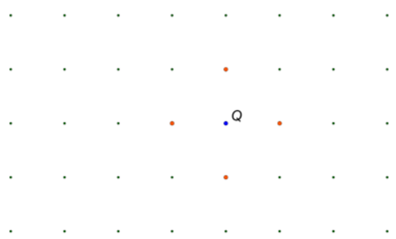
4.2 Si definimos la **circunferencia** como el conjunto de puntos que equidistan (están a la misma distancia) de otro punto, ¿qué forma tienen las circunferencias con la distancia del cartero? Justifica tu respuesta.
Puedes usar la trama siguiente para dibujar los puntos que equidistan del punto señalado.



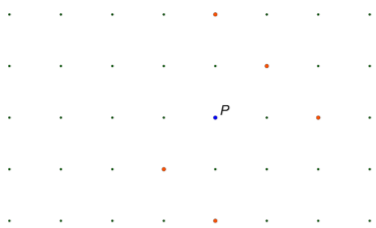
ITEM 4

- Métricas no convencionales en Geometría euclidea
- Demostración
- Demostración con ayuda
- Uso de definiciones.

4.3 Si definimos la **circunferencia** como el conjunto de puntos que equidistan (están a la misma distancia) de otro punto. Fijate en los dibujos siguientes:



Todos los puntos señalados se encuentran, con la distancia del cartero, a distancia .... del punto Q.

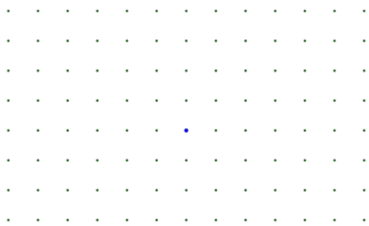


ITEM 4

- Métricas no convencionales en Geometría euclidea
- Demostración
- Demostración con ayuda
- Uso de definiciones.

¿Qué forma tienen las circunferencias con la distancia del cartero? Justifica tu respuesta.

Puedes usar la trama siguiente para dibujar los puntos que equidistan del punto señalado.

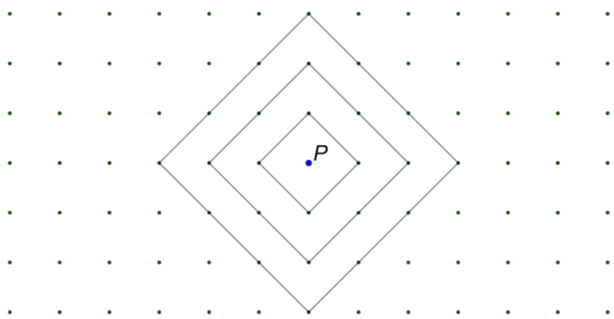


ITEM 5

- Métricas no convencionales en Geometría euclidea
- Demostración
- Demostración con ayuda
- Uso de definiciones.

ITEM 5. Normalmente para medir distancias en el plano usamos la **distancia Euclidea**, que se define del modo siguiente:
Dados dos puntos, la distancia entre ambos es la longitud del segmento que los une.
Sin embargo, podemos definir otras distancias diferentes, como por ejemplo la conocida como **distancia del cartero** (o del taxista) que se define como sigue:
La distancia entre dos puntos viene dada por la ruta mas corta que los une usando solo líneas horizontales y verticales.

Si definimos la **circunferencia** como el conjunto de puntos que equidistan (están a la misma distancia) de otro punto, las circunferencias de centro P con la distancia del cartero tienen la siguiente forma:

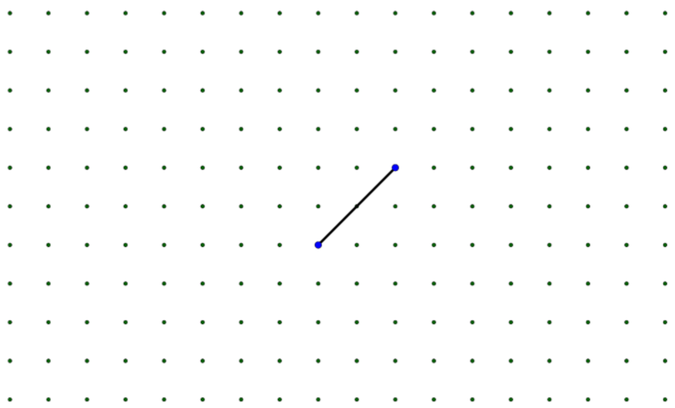


5.1 Un **triángulo equilátero** es un polígono de tres lados de igual longitud. Usando la distancia del cartero dibuja un triángulo equilátero que tenga por lado el segmento dibujado.

ITEM 5

- Métricas no convencionales en Geometría euclidea
- Demostración
- Demostración con ayuda
- Uso de definiciones.

5.1 Un **triángulo equilátero** es un polígono de tres lados de igual longitud. Usando la distancia del cartero dibuja un triángulo equilátero que tenga por lado el segmento dibujado.



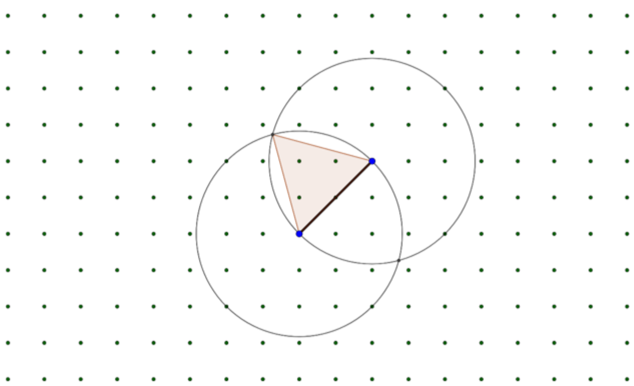
Dicho triángulo equilátero, ¿es único? ¿Cuántos triángulos equiláteros que tengan al segmento dado como lado podrías dibujar? Justifica tus respuestas.

ITEM 5

- Métricas no convencionales en Geometría euclidea
- Demostración
- Demostración con ayuda
- Uso de definiciones.

5.2 Un **triángulo equilátero** es un polígono de tres lados de igual longitud. Normalmente en geometría Euclidea (a la que estamos acostumbrados) la construcción de un triángulo equilátero que tenga por lado un segmento dado se hace de la forma siguiente:

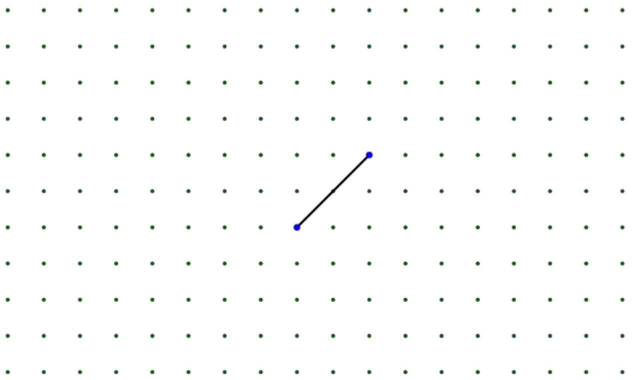
- Con centro en cada uno de los extremos de dicho segmento y radio la longitud del segmento se trazan sendas circunferencias.
- El punto de corte de ambas circunfenrencias se encuentra a distancia, la dada por el segmento, de cada uno de los extremos del mismo.
- El polígono que resulta de unir los tres puntos es un triángulo equilátero.



ITEM 5

- Métricas no convencionales en Geometría euclidea
- Demostración
- Demostración con ayuda
- Uso de definiciones.

Usando la distancia del cartero dibuja un triángulo equilátero que tenga por lado el segmento dibujado.



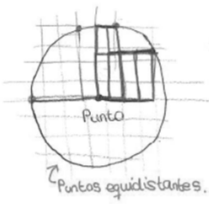
Dicho triángulo equilátero, ¿es único? ¿Cuántos triángulos equiláteros que tengan al segmento dado como lado podrías dibujar? Justifica tus respuestas.

ITEM 4

4.1 Si definimos la **circunferencia** como el conjunto de puntos que equidistan (están a la misma distancia) de otro punto, ¿qué forma tienen las circunferencias con la distancia del cartero? Justifica tu respuesta.

NIVEL 5 – GRADO 1 – Alumno 2

- Mucha influencia de la Gª euclidea
- Ven la circunf. del cartero como una deformación de la euclídea.
- No ven la influencia de la métrica en los l. g.
- Ven la circunf. como algo global no punto a punto.
- Confusión con las Gª finitas.



Las circunferencias tendrán forma de polígonos, de muchos polígonos juntos, como vemos en el dibujo, que formarán un polígono mayor. Es decir, las circunferencias tendrán únicamente lados rectos (líneas horizontales y verticales).

Si calcularamos la distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia haciendo todos los caminos posibles conseguiríamos practicamente un círculo relleno de líneas pero que no termina de ser circular, si no una aproximación a la circunferencia. Pero de aspecto muy parecido.

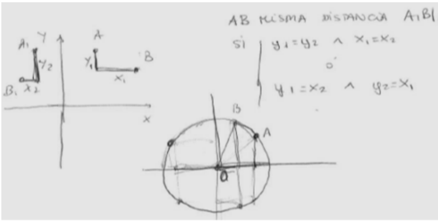
Todo dependerá de los puntos que se tomen del hacerlo

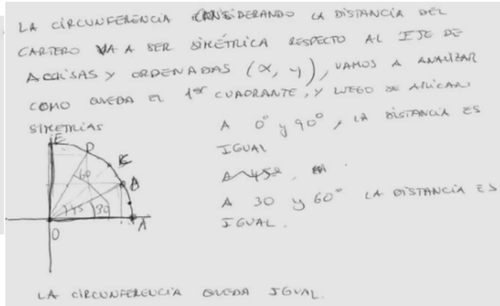
ITEM 4

4.1 Si definimos la **circunferencia** como el conjunto de puntos que equidistan (están a la misma distancia) de otro punto, ¿qué forma tienen las circunferencias con la distancia del cartero? Justifica tu respuesta.

NIVEL 5 – GRADO 2 – Alumno 5

- No comprenden funcionalmente la def. de distancia.
- Construyen la circunferencia a partir de unos pocos puntos.
- Siguen muy "pegados" a la circunferencia euclídea.



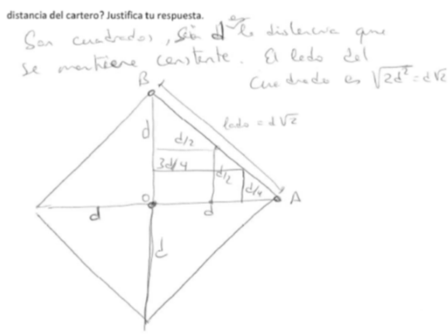


ITEM 4

4.1 Si definimos la **circunferencia** como el conjunto de puntos que equidistan (están a la misma distancia) de otro punto, ¿qué forma tienen las circunferencias con la distancia del cartero? Justifica tu respuesta.

NIVEL 5 – GRADO 3 – Alumno 4

- Entienden la distancia del cartero pero:
- O bien no explicitan la posición del cuadrado.
- O bien lo mezclan con G. finitas.
- Explicación, no argumentación.

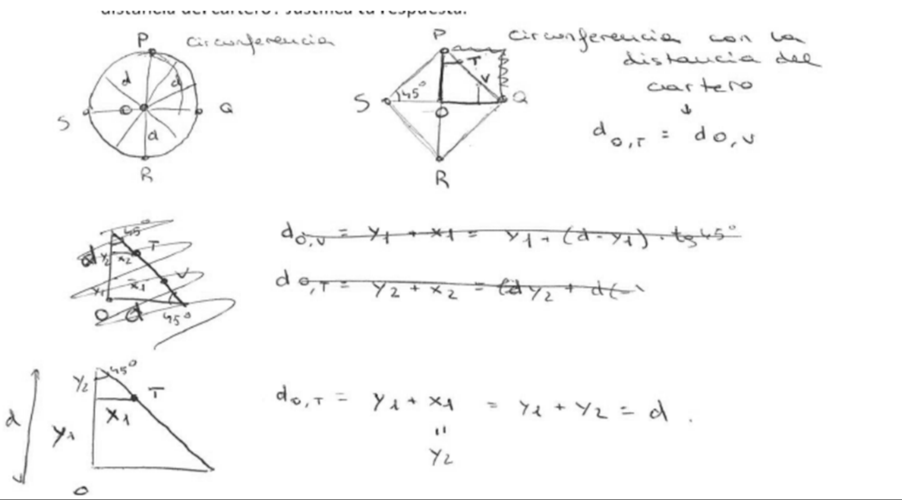


ITEM 4

4.1 Si definimos la **circunferencia** como el conjunto de puntos que equidistan (están a la misma distancia) de otro punto, ¿qué forma tienen las circunferencias con la distancia del cartero? Justifica tu respuesta.

NIVEL 5 – GRADO 5 – Alumno 3

- No explicita la importancia de la posición de la circunferencia.
- Da la forma y prueba que un punto está a la misma distancia del centro que un vértice.
- No hay argumentación escrita sino gráfica y formal.

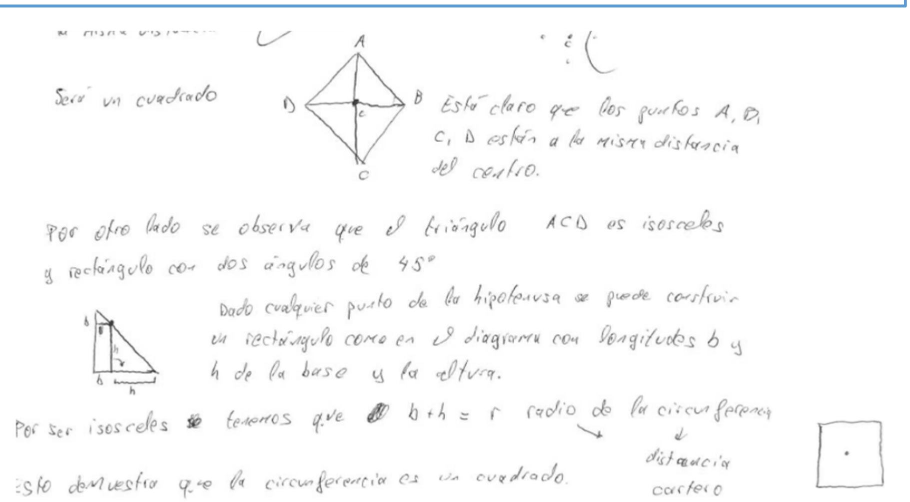


ITEM 4

4.1 Si definimos la **circunferencia** como el conjunto de puntos que equidistan (están a la misma distancia) de otro punto, ¿qué forma tienen las circunferencias con la distancia del cartero? Justifica tu respuesta.

NIVEL 5 – GRADO 6 – Alumno 12

- No explicita la posición de la circunferencia.
- Mucha argumentación escrita.
- ACD equilátero? No con la dist. del cartero. ¿está en nivel 5?
- Muestra un grado (aunque mínimo) de "apego" a la dist. Euclidea.



ITEM 4

4.1 Si definimos la **circunferencia** como el conjunto de puntos que equidistan (están a la misma distancia) de otro punto, ¿qué forma tienen las circunferencias con la distancia del cartero? Justifica tu respuesta.

NIVEL 5 – GRADO 7 – Alumno 10

- Correcto / completo.
- Argumentación completa
- Consciente de la posición de la circunferencia.

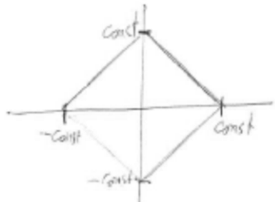
Separemos los 4 cuadrantes (C):

C1: $y = -x + const$

C2: $y = +x + const$

C3: $-y = +x + const \Rightarrow y = -x - const$

C4: $-y = -x + const \Rightarrow y = +x + const$



Así pues, la circunferencia así definida toma la forma de un rombo cuadrado con diagonales sobre los ejes

Asignación de grados de adquisición Nivel 5

- Tipo 1: Items sin respuesta, con respuestas no codificables o con respuestas que indican que el estudiante no está en un determinado nivel de razonamiento pero que no proporcionan ninguna información sobre su forma de utilizar los niveles de razonamiento inferiores.
- Tipo 2: Respuestas matemáticamente incorrectas y muy incompletas, pero en las que se reconocen indicios de utilización de cierto nivel de razonamiento. Se trata, por lo general, de respuestas muy breves y pobres que, además, contienen errores matemáticos o que no contestan directamente a la pregunta planteada.
- Tipo 3: Respuestas matemáticamente correctas pero muy incompletas, en las que se reconocen indicios de utilización de cierto nivel de razonamiento. Se trata, por lo general, de respuestas muy breves y pobres, aunque no contienen errores matemáticos.
- Tipo 4: Respuestas que reflejan claramente características de dos niveles de razonamiento consecutivos. Esta es la situación más típica de los alumnos en transición entre niveles, pues entremezclan dos niveles de razonamiento consecutivos en sus respuestas a un ítem (generalmente en función de la dificultad de las preguntas). Las respuestas pueden ser matemáticamente correctas o incorrectas, pero deben ser bastante completas.

- Tipo 1: Siempre hay respuesta, aunque no siempre con lo que llamaríamos razonamiento a este nivel. Los alumnos a los que se plantea este test siempre tienen capacidad para responder mínimamente. No obstante, los que clasificamos como Tipo 1, dan respuestas incorrectas, mostrando mucha influencia de la Geometría euclídea: ven la circunferencia que se genera con la distancia del cartero como una deformación de la euclídea. No perciben la influencia de la métrica en los l. g. Ven los objetos geométricos como algo global no como un conjunto de puntos que cumplen unas condiciones. Tienen confusiones con las Geometrías finitas.
- Tipo 2: Respuestas matemáticamente incorrectas y muy incompletas, pero en las que se reconocen indicios de utilización de cierto nivel de razonamiento. Respuestas con errores matemáticos, aunque menos graves que en el tipo 1. No son capaces de utilizar funcionalmente la definición de distancia del cartero, lo que unido a que hacen construcciones de la circunferencia como lugar geométrico a partir de pocos puntos y a que están todavía muy influenciados por la Geometría euclídea les lleva a errores.
- Tipo 3: Respuestas matemáticamente correctas pero muy incompletas, en las que se reconocen indicios de utilización de cierto nivel de razonamiento. Se trata, por lo general, de respuestas muy breves y pobres, aunque no contienen errores matemáticos. Entienden la distancia del cartero pero: o bien no explicitan la posición del cuadrado (nueva circunferencia) o bien lo mezclan con G. finitas. No argumentan su respuesta, si acaso la explican.
- Tipo 4: Respuestas que reflejan claramente características de dos niveles de razonamiento consecutivos. Esta es la situación más típica de los alumnos en transición entre niveles, pues entremezclan dos niveles de razonamiento consecutivos en sus respuestas a un ítem (generalmente en función de la dificultad de las preguntas). Las respuestas pueden ser matemáticamente correctas o incorrectas, pero deben ser bastante completas.
- No tenemos nada claro que se pueda estar a caballo entre el nivel 4 y el 5. O tal vez es que todos los casos que hemos visto están a caballo entre ambos niveles. Por ejemplo, en muchas ocasiones se refieren a los objetos según su "apariencia euclidea" en vez de según su nombre dentro de la métrica que se trate.

Asignación de niveles

- Tipo 5: Respuestas bastante completas pero matemáticamente incorrectas, que reflejan claramente la utilización predominante de un nivel de razonamiento determinado. La incorrección de las respuestas puede deberse a errores matemáticos o a que siguen una línea de trabajo que no lleva a la solución del problema planteado, pero cuyos procesos de razonamiento son válidos.
- Tipo 6: Respuestas bastante completas y matemáticamente correctas que reflejan claramente la utilización predominante de un nivel de razonamiento determinado. Se trata de respuestas claras y correctas, pero que no están completas porque no llegan a resolver el problema totalmente, porque hay "saltos" en el razonamiento deductivo seguido, porque tienen pequeños errores, etc.
- Tipo 7: Respuestas matemáticamente correctas y completas que reflejan claramente la utilización de un nivel de razonamiento determinado.

- Tipo 5: Respuestas bastante completas pero matemáticamente incorrectas, que reflejan claramente la utilización predominante de un nivel de razonamiento determinado. Se observa lo esencial de la argumentación sobre los puntos que componen la circunferencia. Aunque no hay incorrecciones matemáticas, no colocamos estas respuestas en el tipo 6 por no completar la argumentación con una explicación. La incorrección de las respuestas puede deberse a errores matemáticos o a que siguen una línea de trabajo que no lleva a la solución del problema planteado, pero cuyos procesos de razonamiento son válidos.
- Tipo 6: Respuestas bastante completas y matemáticamente correctas que reflejan claramente la utilización predominante de un nivel de razonamiento determinado. Se trata de respuestas claras y correctas, pero que no están completas porque no llegan a resolver el problema totalmente, porque hay "saltos" en el razonamiento deductivo seguido, porque tienen pequeños errores, etc. Respuestas con un alto grado de argumentación y explicación pero con imprecisiones a la hora de dar la forma o (sobre todo) la orientación de la circunferencia.
- Tipo 7: Respuestas matemáticamente correctas y completas que reflejan claramente la utilización de un nivel de razonamiento determinado. Formal, demuestra sus afirmaciones, incluye en la respuesta la forma y orientación de la circunferencia.

PREGUNTAS

- ¿Qué características debería tener un ítem para medir “bien” el nivel 5?
- ¿Tiene sentido un ítem que mida a la vez 5 y 4?
- Los ítem del VH nivel 5, podrían no servir para medir el 4 y por tanto no podría haber super-ítems que cambiaran de nivel. Si acaso que cambiaran de grado de adquisición. Aún no sabemos cómo articular esto.
- ¿Qué procesos aparecen en el nivel 5?
- ¿Qué es demostrar, identificar… en nivel 5? Necesitamos indicadores.
- ¿Es adecuado el nivel de nuestros ítem para medir el nivel 5?