Suma+ 86
Artículos
Noviembre 2017
pp. 39-46

Aprendizaje del álgebra a través de problemas de patrones geométricos[1]

Eva Arbona Picot
María José Beltrán Meneu
Adela Jaime Pastor
Ángel Gutiérrez Rodríguez

Presentamos una unidad de enseñanza para introducir el álgebra a estudiantes de Educación Primaria mediante problemas de patrones geométricos. La unidad está dividida en tres partes, cada una relacionada con un objetivo didáctico diferente: iniciación a la generalización, para aprender a generalizar relaciones empíricas; introducción de conceptos y símbolos algebraicos, para aprender la representación simbólica algebraica, plantear y resolver ecuaciones lineales; y aplicación de los contenidos estudiados a otros contextos, para aprender a resolver problemas algebraicos de enunciado verbal.

Palabras clave: Álgebra, Patrones geométricos, Altas capacidades matemáticas, Educación Primaria.

Learning of Algebra through geometric pattern problems

In this article, we present a teaching sequence designed to introduce algebra to Primary School students through geometric pattern problems. The sequence is divided into three parts, each one related to a different didactic objective: initiation to generalization, to learn to generalize empirical relationships; introduction of algebraic concepts and symbols, to learn manipulate algebraic symbols, formulate and solve equations; and application of the contents learned to other algebraic contexts, to learn solve verbal algebraic problems.

Keywords: Algebra, Geometric patterns, Mathematical giftedness, Primary Education.

El álgebra es uno de los contenidos clave del currículum de matemáticas de la ESO. En España, el estudio del álgebra se inicia en el primer curso de la Educación Secundaria, con la introducción de las letras como símbolos que representan números indeterminados o pertenecientes a conjuntos numéricos con una propiedad común, la realización de operaciones con expresiones algebraicas y la resolución de ecuaciones lineales. En Educación Primaria, el currículo no hace referencia alguna al aprendizaje del álgebra.

Muchos estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje del álgebra (Banerjee y Subramaniam, 2012; Jupri, Drijvers y Van den Heuvel-Panhuizen, 2015), a pesar, incluso, de haber obtenido buenas calificaciones en las matemáticas de Educación Primaria (Fritzlar y Karpinski-Siebold, 2012). En algunos países, por ejemplo, Inglaterra (Department of Education, 2014), se realiza una introducción a las ideas algebraicas (pre-álgebra) en los últimos cursos de Educación Primaria, lo cual facilita la transición hacia su uso en Educación Secundaria.

Adoptando esta postura como nuestra, en este artículo presentamos una unidad de enseñanza-aprendizaje que permite iniciar y desarrollar el pensamiento algebraico en los estudiantes de Educación Primaria a través de la

Artículo recibido en *Suma* en junio de 2017 y aceptado en septiembre de 2017

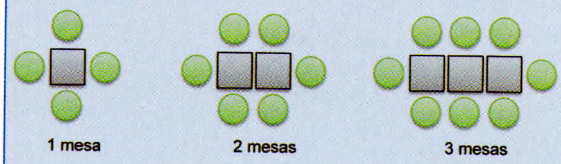
resolución de problemas de *patrones geométricos.* Un patrón geométrico es una representación gráfica de los términos de una secuencia creciente de números naturales, representación formada por objetos cuya cantidad corresponde al valor del término de la secuencia representado (en las páginas siguientes se pueden ver algunos ejemplos). El uso de los patrones se contempla en el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria (MECD, 2014), a través del siguiente objetivo: «conseguir que todo el alumnado, al acabar la Educación Primaria, sea capaz de describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones» (19387).

Los problemas de patrones geométricos presentan en su enunciado los primeros términos de una secuencia de figuras cuya forma y número de objetos que las componen crecen siguiendo un patrón y piden a los estudiantes calcular los valores de otros términos de la secuencia, es decir la cantidad de objetos que forman su representación gráfica. Estos problemas (figura 1), generalmente,

> piden calcular, por este orden, el término *inmediato* (el que sigue a los dados), un término *próximo* a los conocidos (de manera que se puedan utilizar tanto la representación geométrica como la aritmética para el cálculo de valores), un término *lejano* tal que, aunque esté asociado a un valor numérico, su representación gráfica sea costosa de llevar a cabo y sea más conveniente poner en marcha un proceso de generalización y, finalmente, formular una expresión (que se espera sea algebraica) para el término *general* de la secuencia (Benedicto, Jaime y Gutiérrez, 2015: 154).

Estas preguntas son conocidas como cuestiones de *relación directa.* Además, los problemas de patrones geométricos también pueden plantear cuestiones de *relación inversa*, en las cuales se proporciona el número de elementos de un término y se pide calcular la posición de ese término en la secuencia, favoreciendo, de este modo, la inversión de las operaciones y sirviendo como punto de partida para la introducción al planteamiento y resolución de ecuaciones.

Este sábado, María va a realizar una comida con sus amigos y familiares para celebrar que ha cumplido 12 años. Para ello, quiere calcular cuántas mesas y sillas le harán falta. Quiere sentarlos del siguiente modo:



a) ¿Cuántos invitados cabrán con 6 mesas? ¿Cómo lo sabes?
b) ¿Cuántos invitados cabrán con 15 mesas? ¿Cómo lo sabes?
c) ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos invitados cabrán con 50 mesas? ¿Cómo lo sabes?
d) ¿Cómo le explicarías a un amigo como puede calcular cuántos invitados cabrán según el número de mesas que utilice?
e) Si hay 22 invitados, ¿cuántas mesas habrá? ¿Cómo lo sabes?

Figura 1. Ejemplo de problema de patrones geométricos

Los estudiantes con altas capacidades son aquellos que, según Torrego (2011: 13-14), «presentan un nivel de rendimiento intelectual superior en una amplia gama de capacidades y aprenden con facilidad cualquier área o materia». En particular, los estudiantes con altas capacidades matemáticas son los que destacan en el área de matemáticas y muestran una habilidad claramente superior a la media para aprender contenidos matemáticos y resolver problemas.

Los problemas de patrones geométricos se pueden situar en el contexto de las *actividades matemáticas ricas*, caracterizadas por emplear una metodología de resolución de problemas y por permitir graduar su dificultad para poder adaptarse a las distintas capacidades y niveles de conocimiento matemático que pueden presentar los estudiantes (Jaime y Gutiérrez, 2014). Por este motivo, la unidad de enseñanza que presentamos está enfocada hacia una intervención educativa curricular para estudiantes de los últimos cursos de la Educación Primaria, siendo especialmente adecuada para aquellos estudiantes que poseen altas capacidades matemáticas, ya que permiten que cada estudiante avance más o menos en la resolución en función de su capacidad matemática (Arbona, 2016).

La unidad de enseñanza

Nuestra propuesta de enseñanza tiene dos objetivos principales: introducir a los estudiantes de los últimos cursos de Educación Primaria en el lenguaje algebraico y la resolución de ecuaciones lineales y proporcionar una línea de trabajo que permita que los estudiantes de altas capacidades matemáticas desarrollen su potencial matemático. Concretamente, la unidad de enseñanza está diseñada para ser implementada en grupos de clase de 5.º y 6.º de Educación Primaria (10-12 años).

La unidad de enseñanza está distribuida en tres etapas diferenciadas, cada una de las cuales corresponde a un objetivo de aprendizaje, facilitando la secuenciación y graduación de la dificultad de los contenidos y los problemas, así como el establecimiento de metas parciales que nos permitirán valorar el aprendizaje de los estudiantes. Los objetivos didácticos que proponemos son:

— Aprender a realizar generalizaciones prealgebraicas y a resolver relaciones inversas en un entorno de resolución de problemas de patrones geométricos.
— Adquirir y asimilar diversos conceptos algebraicos elementales y componentes básicos del sistema algebraico de signos, como el significado de las letras y del signo =, el uso de paréntesis y la jerarquía de las operaciones e iniciar al estudiante en la formulación y resolución de ecuaciones lineales.
— Profundizar en el aprendizaje de la resolución de ecuaciones lineales y aplicarlas a diversos contextos mediante la resolución de problemas de enunciado verbal.

En cuanto a la metodología de trabajo en el aula, esta unidad de enseñanza puede implementarse como trabajo individual o en parejas, si se quiere fomentar que los estudiantes puedan verbalizar su razonamiento y debatir qué respuesta es más adecuada. Asimismo, puede llevarse a cabo con distintas distribuciones temporales. Nuestra propuesta es implementar la unidad a lo largo del curso, abordando cada una de las etapas propuestas en un trimestre escolar (figura 2).

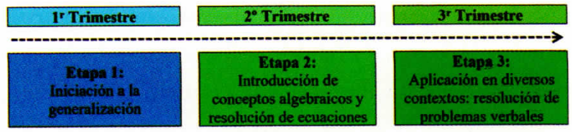
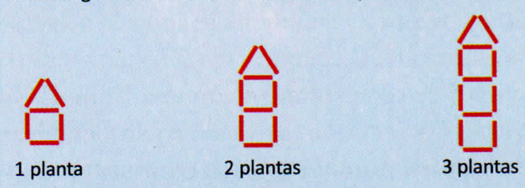


Figura 2. Propuesta de temporalización para la unidad de enseñanza

Etapa 1. Iniciación a la generalización

Esta etapa se basa en plantear problemas de patrones geométricos para que los estudiantes aprendan a realizar generalizaciones, mediante las preguntas de relaciones directas, así como a invertir operaciones mediante las preguntas de relaciones inversas. Para ello, en cada problema, proponemos cuatro cuestiones (figura 3), con las que se pretende que los estudiantes alcancen poco a poco los objetivos propuestos.

Dos amigas están haciendo edificios con palillos de esta forma:



a) ¿Cuántos palillos necesitarán para hacer un edificio de 6 plantas? ¿Cómo lo sabes?
b) ¿Cuántos palillos necesitarán para hacer un edificio de 12 plantas? ¿Cómo lo sabes?
c) ¿Puedes explicar algún modo de calcular cuántos palillos necesitarán para hacer un edificio de 46 plantas? ¿Cómo lo sabes?
d) Si un edificio está formado por 27 palillos, ¿cuántas plantas tiene? ¿Cómo lo sabes?

Figura 3. Problema de patrones geométricos de la primera etapa

En estos problemas, incluimos tres cuestiones de relación directa (a, b y c) y una de relación inversa (d). Por una parte, las cuestiones de relación directa están graduadas en dificultad, teniendo en cuenta que la mayor lejanía entre el término demandado (inmediato, próximo o lejano) y los datos hará más difícil calcular el número de elementos que lo componen y será necesario desarrollar y usar estrategias más elaboradas. Estas cuestiones sirven de contexto para que los estudiantes identifiquen similitudes y diferencias entre las figuras de la secuencia y puedan llegar a descubrir un patrón de crecimiento que les pueda ayudar a alcanzar una generalización del patrón, pudiendo llegar incluso a obtener una regla general que les permita calcular el número de elementos de cualquier término, por lejano que sea. Por otra parte, para resolver la cuestión de relación inversa, los estudiantes deberán generar estrategias de inversión de las operaciones, que son un paso previo a la introducción de las ecuaciones y al aprendizaje de su resolución.

Conviene plantear, a lo largo de esta etapa, problemas con estructuras geométricas de distintos grados de complejidad. Dependiendo de cómo esté construido el patrón y cómo estén distribuidas las piezas de las figuras, puede resultar más fácil o difícil identificar el patrón de la secuencia y una relación general. En las figuras 4 y 5, mostramos patrones con estructuras geométricas de distintos grados de complejidad. Mientras que el patrón de la figura 4 tiene un crecimiento lineal claramente ligado a la posición del término en la secuencia ($2n$), los patrones de la figura 5 se corresponden con una fórmula general afín ($2n+1$), que es más difícil de identificar. Por otra parte, aunque los dos patrones de la figura 5 son equivalentes, ya que cada elemento de la secuencia tiene el mismo valor en ambos, la estructura gráfica del patrón superior es mucho más simple que la del patrón inferior, en el que los segmentos compartidos por los triángulos hacen que aumente el nivel de dificultad para interpretar las figuras e identificar el proceso de crecimiento.

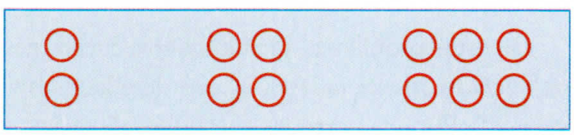


Figura 4. Patrón geométrico lineal

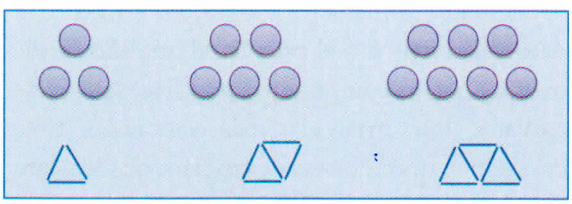
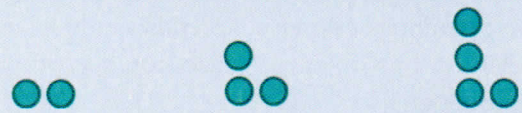


Figura 5. Patrones geométricos afines equivalentes de diferente complejidad gráfica

Etapa 2. Introducción de conceptos algebraicos

La segunda etapa de la unidad de enseñanza introduce a los estudiantes en la comprensión del significado de las letras y del signo = en expresiones algebraicas, la transformación en expresiones algebraicas de verbalizaciones de las generalizaciones de patrones geométricos, el uso del paréntesis y la jerarquía de las operaciones y la resolución de ecuaciones lineales. Para ello, proponemos plantear nuevos problemas de patrones geométricos con cuestiones diferentes de las anteriores (figura 6).

El caracol Pepito va avanzando poco a poco y cada día deja un rastro de su avance. Aquí puedes ver el recorrido que sigue:



a) ¿Cuántas marcas circulares habrá dejado el día 21? ¿Cómo lo sabes?
b) ¿Escribe la fórmula que has utilizado.
c) Si ha dejado 47 marcas circulares, ¿cuántos días han pasado? ¿Cómo lo sabes?

Figura 6. Problema de patrones geométricos de la segunda etapa

Estos problemas incluyen una cuestión de relación directa (a) y una de relación inversa (c). La cuestión b pide escribir la fórmula general empleada en la cuestión a, con el objetivo de introducir la utilización de letras para transformar las expresiones verbales, expresadas al explicar la forma de calcular la respuesta en la cuestión a, en expresiones algebraicas. Para ello, es conveniente que la introducción de las letras se haga de un modo significativo, para que los estudiantes puedan relacionarlas directamente con la variable a la que representan. Por ejemplo, en la figura 6, los estudiantes podrían usar la letra d para hacer referencia a *día*, como proponen Store, Richardson y Carter (2016).

En esta etapa, la cuestión de relación inversa (c) debe servir para iniciar a los estudiantes en la resolución de ecuaciones lineales. A partir de la fórmula algebraica expresada en la cuestión b, el profesor puede guiar a los estudiantes para que planteen la ecuación necesaria para la resolución de la cuestión c. Existen diversos métodos para dar significado a las ecuaciones como paso previo a enseñarles a resolverlas, por ejemplo, el modelo geométrico, basado en la comparación de áreas de figuras formadas por rectángulos, y el modelo de la balanza, basado en mantener una balanza en equilibrio (Rojano, 1985). Nuestra propuesta es usar el *modelo de balanza*, ya que es dinámico y manipulativo y permite a los estudiantes asociar el signo = de la ecuación al equilibrio de la balanza, resolviendo así las ecuaciones mediante procesos de compensación. La figura 7 muestra un ejemplo de balanza dinámica (NLVM, 2016).

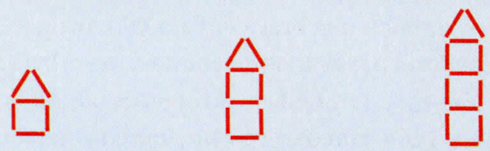
Esta balanza permite representar ecuaciones lineales, del tipo $ax+b=cx+d$, con incógnita en uno o ambos lados de la ecuación y resolverlas mediante manipulación o indicando las operaciones aritméticas que deben aplicarse a ambos brazos para mantener la balanza en equilibrio. Dado su dinamismo, es posible conocer en todo momento si se mantiene la igualdad durante la resolución de la ecuación, proporcionando, de este modo, una herramienta para interpretar la resolución de ecuaciones como un proceso de compensación. No obstante, esta aplicación también presenta algunas limitaciones, como utilizar siempre la letra x para representar la incógnita y la imposibilidad de representar coeficientes de más de una cifra.

Etapa 3. Aplicación en diversos contextos

La última etapa de la unidad de enseñanza sirve para comprobar si los estudiantes son capaces de aplicar aquello aprendido durante la segunda etapa en el contexto de los problemas de patrones geométricos y fuera de él. Para ello, dividimos esta etapa en dos subetapas.

En la subetapa de aplicación en problemas de patrones geométricos, proponemos que el profesor plantee de nuevo los problemas utilizados durante la primera etapa cuya cuestión de relación inversa (d) presentó más dificultades de resolución a los estudiantes. Estos problemas pueden rediseñarse para que los alumnos apliquen en ellos los conceptos estudiados en la etapa anterior (figura 8).

Dos amigas están haciendo edificios con palillos de esta forma:



a) Escribe la fórmula algebraica que utilizarías para calcular cuántos palillos necesitarán según el número de plantas.
b) ¿Crees que podríamos escribir esta fórmula de un modo más simple? En caso afirmativo, escríbela.
c) Si un edificio está formado por 45 palillos, ¿cuántas plantas tiene? ¿Cómo lo sabes?

Figura 8. Problema de patrones geométricos de la tercera etapa

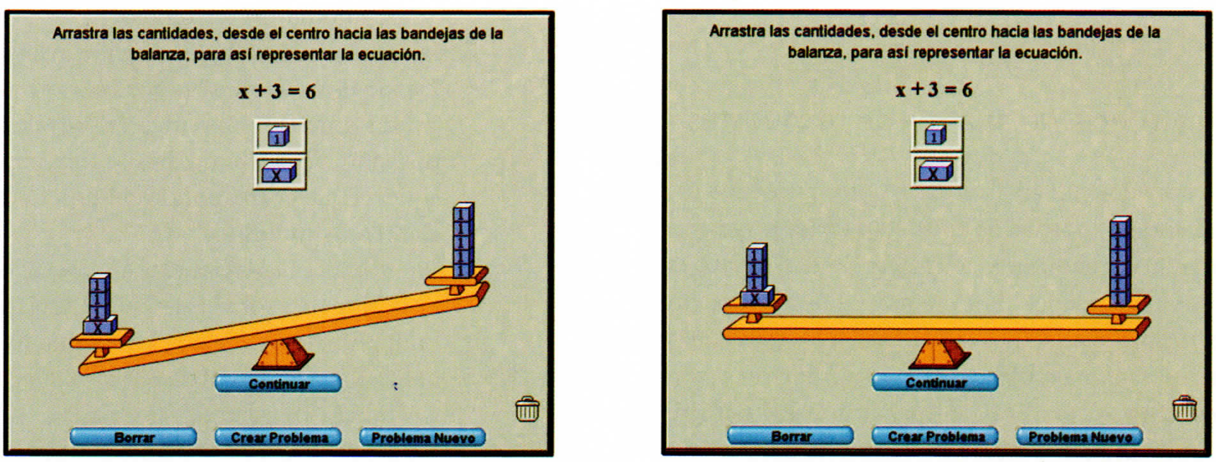


Figura 7. Modelo de balanza dinámica

Como se observa, la cuestión a tiene como objetivo que el alumno escriba una expresión algebraica correspondiente a la fórmula de cálculo de cualquier término de la secuencia, haciendo uso de símbolos y letras según lo aprendido en la etapa anterior. La cuestión b tiene como objetivo que el alumno simplifique la expresión algebraica que ha obtenido en a, para facilitar la resolución de ecuaciones con dicha expresión. La cuestión de relación inversa c ofrece un contexto en el que los estudiantes planteen ecuaciones y utilicen el modelo de la balanza para resolverlas, si han comprendido e interiorizado dicho modelo. Además, la resolución de problemas de patrones geométricos que no habían logrado resolver previamente por medio de nuevos métodos, permite mostrar a los estudiantes la utilidad del álgebra y del uso de ecuaciones.

Por otra parte, la subetapa de aplicación en otros contextos pretende ampliar el aprendizaje de los estudiantes, mediante la resolución de problemas verbales algebraicos. Para ello, proponemos diversos problemas de enunciado verbal (figura 9), con contextos diferentes al de los patrones geométricos y con un aumento gradual de dificultad, que fomenten específicamente la transformación de expresiones verbales en expresiones algebraicas y que se puedan resolver mediante ecuaciones lineales.

Héctor y María han estado contando en clase cuántos colores de madera tiene cada uno.
Héctor tiene el doble de María más 7.
Si Héctor tiene 33 colores de madera, ¿cuántos tiene María?

Figura 9. Problema verbal algebraico

Sugerencia de análisis de respuestas

Es conveniente analizar las respuestas de los estudiantes a lo largo de cada etapa para poder valorar su aprendizaje y adaptar la unidad didáctica a sus necesidades. Por ejemplo, nuestra opción en la primera etapa ha sido analizar las estrategias de resolución empleadas por los estudiantes para descubrir su grado de comprensión del patrón. Proponemos los siguientes criterios para la clasificación y evaluación de las estrategias, basados en García-Cruz y Martinón (1997) y García-Reche, Callejo y Fernández (2015):

— Estrategias en cuestiones de relación directa:
- Según el procedimiento de resolución:
  - *Visual*: realizan una descomposición gráfica de las figuras del patrón en partes diferenciadas que permiten obtener de forma más sencilla el número de objetos que componen cada término de la secuencia.
  - *Numérica*: cuentan los objetos que hay en las representaciones gráficas de los términos y deducen el patrón aritmético de crecimiento a partir de estos valores numéricos.
- Según el procedimiento de cálculo:
  - *Recuento*: dibujan el término demandado y cuentan los elementos que lo forman.
  - *Recursiva*: realizan sumas sucesivas de la diferencia entre los valores de dos términos consecutivos de la secuencia, desde los términos conocidos hasta llegar al término demandado.
  - *Funcional*: expresan una fórmula matemática general que permite calcular el número de objetos de cualquier término en función de su posición en la secuencia.
  - *Proporcional*: establecen una proporción, que generalmente es errónea, entre las posiciones de dos términos de la secuencia y la cantidad de elementos que los forman, que utilizan para calcular el valor desconocido de uno de los términos.

— Estrategias en cuestiones de relación inversa:
- *Ensayo y error mediante cálculo de la relación directa*: prueban diferentes valores de la posición del término hasta encontrar aquel al que corresponde el número de elementos indicado.
- *Inversión de las operaciones*: usan operaciones aritméticas inversas (suma y resta, multiplicación y división) a las que han utilizado en las tareas de relación directa y cambian el orden de las mismas.
- *Resolución de ecuaciones*: plantean y resuelven una ecuación.

A continuación, incluimos algunos ejemplos de respuestas a la cuestión a de la figura 3 que hacen uso de las diferentes estrategias descritas arriba.

— Estrategia visual y funcional:

Estudiante: *Para construir un edificio de 6 plantas, necesitarán 21 palillos porque he hecho 4x6=24, le he restado 5, que es lo que comparten, y le he sumado el tejado que es 2.*

— Estrategia numérica y recursiva:

Estudiante: *Para construir un edificio de 6 plantas, necesitarán 21 palillos porque 12+3+3+3=21.*

— Estrategia visual y de recuento:

Estudiante: Para construir un edificio de 6 plantas, necesitarán 21 palillos. Lo he dibujado (figura 10).

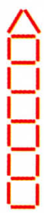


Figura 10

— Estrategia numérica y proporcional:

Estudiante: *Para construir un edificio de 6 plantas necesitarán 24 palillos porque si en el edificio de 3 plantas hay 12 palillos, en el edificio de 6 plantas habrá 24 palillos.*

También incluimos a continuación algunos ejemplos de posibles respuestas a la cuestión d de la Figura 3. En ellos, se muestran las distintas estrategias descritas para cuestiones de relación inversa.

— Estrategia de ensayo y error mediante cálculo de la relación directa:
En las cuestiones de relación directa, el estudiante hizo los cálculos empleando la generalización $4n-(n-1)+2$.

Estudiante: *Si el edificio está formado por 27 palillos, tendrá 8 plantas porque he probado con 8 pisos y me daba 8 × 4=32, menos 7 que comparten, 25. 25+2=27 palillos.*

— Estrategia de inversión de las operaciones:
En las cuestiones de relación directa, el estudiante empleó la generalización $3n+3$.

Estudiante: *Si el edificio está formado por 27 palillos, tendrá 8 plantas porque 27−3=24 y 24 entre 3 da 8.*

— Estrategia de resolución de ecuaciones: en cuestiones de relación directa, el estudiante empleó la generalización

$$4n-(n-1)+2.$$

Estudiante: *4n−(n−1)+2=27*
4n−n+1+2=27
3n+3=27
3n=24
n=24/3=8

Conclusión

En este artículo hemos presentado una propuesta de unidad de enseñanza para introducir a estudiantes de los últimos cursos de Educación Primaria al álgebra de una forma gradual mediante la resolución de problemas de patrones geométricos. La unidad está dividida en tres etapas (iniciación a la generalización, introducción de conceptos algebraicos y ecuaciones, y aplicación de lo aprendido en diversos contextos) con objetivos didácticos diferenciados. La implementación de esta unidad en Educación Primaria puede servir como antecedente al inicio del estudio del álgebra en la ESO y propiciar la desaparición de algunas de las dificultades que presentan los estudiantes durante su aprendizaje. Pensamos que esto es así porque los patrones geométricos son un contexto que permite una aproximación inicial visual e intuitiva, al alcance de todos los estudiantes, y permiten pasar de forma significativa a la aproximación algebraica mediante el uso de letras y símbolos que adquieren significado en el contexto de las representaciones gráficas de secuencias numéricas.

Además, el análisis de las respuestas de los estudiantes puede servir para orientar al profesorado sobre qué conocimientos poseen sus alumnos y, así, poder adaptar y personalizar esta propuesta didáctica a cada uno de ellos. De este modo, los profesores serán capaces de proporcionar una respuesta efectiva a las distintas necesidades de los estudiantes, en particular a aquellos con altas capacidades matemáticas, dado que la complejidad de los enunciados puede graduarse, hasta constituir un reto para este colectivo que demanda más profundidad y que puede avanzar más que la media.

Referencias bibliográficas

Arbona, E. (2016), *Introducción al álgebra mediante problemas de patrones geométricos a un estudiante de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas*, Trabajo Final de Máster, Universitat de València, Valencia. Recuperado de <https://roderic.uv.es:8443/handle/10550/56731>.

Banerjee, R., y K. Subramaniam (2012), «Evolution of a teaching approach for beginning algebra», *Educational Studies in Mathematics*, vol. 80, 351-367.

Benedicto, C., A. Jaime y Á. Gutiérrez (2015), «Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos», en C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX*, SEIEM, Alicante, 153-162.

Department of Education (2014), *National curriculum in England: mathematics programmes of study*, Department of Education, Londres. Recuperado de <https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study>.

Fritzlar, T., y N. Karpinski-Siebold (2012), *Counting patterns as a component of algebraic thinking—An interview study with primary school students*, texto de la presentación en el 12th International Congress on Mathematical Education (ICME12), Seúl, Corea del Sur. Recuperado de: <http://www.icme12.org/upload/upfile2/tsg/0360.pdf>.

García-Cruz, J. A., y A. Martinón (1997), «Actions and invariant schemata in linear generalising problems», en E. Pehkonen (ed.), *Proceeding of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2, PME, Helsinki, 289-296.

García-Reche, A., M. L. Callejo y C. Fernández (2015), «La aprehensión cognitiva en problemas de generalización de patrones lineales», en C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX*, SEIEM, Alicante, 279-288.

Jaime, A., y Á. Gutiérrez (2014), «La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de E. Primaria con altas capacidades matemáticas», en B. Gómez y L. Puig (eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán*, PUV, Valencia, 147-190.

Jupri, A., P. Drijvers y M. Van den Heuvel-Panhuizen (2015), «Improving grade 7 students' achievement in initial algebra through a technology-based intervention», *Digital Experiences in Mathematics Education*, vol. 1, nº 1, 25-58.

National Library of Virtual Manipulatives (NLVM) (2016), Algebra balance scales, Applet disponible en <http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_201_g_3_t_2.html?open=instructions&from=category_g_3_t_2.html>, Utah State University, Logan.

Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria», *Boletín Oficial del Estado* (1 de marzo de 2015), n.º 52, 19349-19420.

Rojano, T. (1985), *De la aritmética al álgebra (un estudio clínico con niños de 12 a 13 años de edad)*, Tesis doctoral no publicada, Centro de Investigación y Estudios Avanzados (CINVESTAV) del I.P.N., México D. F.

Store, J. C., K. D. Richardson y T. S. Carter (2016), «Fostering understanding of variable with patterns», *Teaching Children Mathematics*, vol. 22, nº. 7, 420-427.

Torrego, J. C. (coord.) (2011), *Alumnos con altas capacidades y aprendizaje cooperativo. Un modelo de respuesta educativa*, Fundación SM, Madrid.

Eva Arbona Picot
Universitat de València
<eva.arbona@uv.es>

María José Beltrán Meneu
Universitat Jaume I
<maria.jose.beltran@uv.es>

Adela Jaime Pastor
Universitat de València
<adela.jaime@uv.es>

Ángel Gutiérrez Rodríguez
Universitat de València
<angel.gutierrez@uv.es>

1 Esta investigación es parte de los proyectos EDU2012-37259 (MINECO) y EDU2015-69731-R (MINECO/FEDER) y ha sido realizada con una Ayuda de Iniciación a la Investigación de la Universitat de València.