CARACTERÍSTICAS DIFERENCIADORAS DE ESTUDIANTES CON ALTA CAPACIDAD MATEMÁTICA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PATRONES GEOMÉTRICOS

Discriminating characteristics of mathematically gifted students when solving geometric pattern problems

Arbona, E. [a], Gutiérrez, A. [a], Beltrán-Meneu, M.J. [b]

[a] Depto. de Didáctica de la Matemática, Universitat de València (España). [b] Depto. de Educación y Didácticas Específicas, Universitat Jaume I (España)

Resumen

Presentamos un estudio comparativo de las estrategias empleadas por estudiantes medios y superdotados de los últimos cursos de Educación Primaria al resolver problemas de patrones geométricos. El análisis nos ha permitido descubrir las diferencias existentes entre ambos grupos e identificar algunas características diferenciadoras de la alta capacidad matemática, como la rapidez de aprendizaje y la habilidad para invertir procesos mentales.

Palabras clave: *pre-álgebra, patrones geométricos, alta capacidad matemática, educación primaria*

Abstract

We present a comparative study about strategies used by average and gifted students from lasts grades of Primary School while solving geometric pattern problems. Our analysis has shown existing differences between both groups of students and has led us to identify discriminating characteristics of mathematically gifted students, such as quickness of learning and ability to reverse mental processes.

Keywords: *pre-algebra, geometric pattern problems, mathematical giftedness, primary school*

INTRODUCCIÓN

Una de las principales novedades en el currículo de los últimos cursos de educación primaria o los primeros de educación secundaria, dependiendo de los países, es la aparición del lenguaje algebraico, necesario para poder avanzar en el aprendizaje de las diferentes áreas matemáticas. En cualquier caso, tradicionalmente, el uso del lenguaje algebraico aparece de manera brusca y muchos estudiantes tienen dificultades para comprenderlo y utilizarlo correctamente, a causa de los obstáculos epistemológicos presentes en ese primer contacto con el lenguaje simbólico. Es por ello que, desde hace bastante tiempo, la investigación en educación matemática se ha ocupado de analizar el periodo de transición del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico, periodo que suele denominarse pre-álgebra. Entre los aspectos clave de esta transición destacan el cambio de significado de los símbolos usados en las operaciones aritméticas (=, +, -, etc.) y la necesidad de desarrollar razonamiento abstracto para realizar actividades como la generalización de procesos matemáticos y la identificación de relaciones

Arbona, E., Gutiérrez, A. y Beltrán-Meneu, M. J. (2020). Características diferenciadoras de estudiantes con alta capacidad matemática en la resolución de problemas de patrones geométricos. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 29-36). Logroño: Universidad de La Rioja.

funcionales. Las investigaciones realizadas en este contexto muestran que resolver problemas de pre-álgebra es beneficioso para los estudiantes cuando inician el estudio del álgebra.

Un contexto muy usado en la enseñanza de pre-álgebra es la resolución de problemas de patrones geométricos (ppg). La manera típica de formular estos problemas consiste en presentar un contexto realista, que sea significativo para los estudiantes, en el cual se realiza una actividad relacionada con una sucesión estrictamente creciente de números naturales; generalmente son progresiones aritméticas, pero también pueden ser progresiones geométricas u otros tipos de sucesiones (Friel y Markworth, 2009). El enunciado del problema muestra representaciones gráficas de los primeros términos de una sucesión y plantea diversos tipos de preguntas relativas a los términos de la sucesión; las más habituales en la literatura son (Arbona, 2016): preguntas *directas*, en las que se pide calcular el valor del término que está en una posición concreta indicada (la posición puede ser *inmediata*, *próxima* o *lejana*); preguntas de *generalización*, en las que se pide expresar una forma de calcular el valor de cualquier término, es decir una aproximación a la expresión algebraica del término general; preguntas *inversas*, en las que se pide calcular la posición del término que tiene un valor concreto indicado. En nuestra investigación, además de estos problemas, hemos preparado otros ppg dirigidos a estudiantes más avanzados, que ya han superado la fase inicial, centrada en aprender a generalizar los patrones, y están en condiciones de empezar a escribir y manipular expresiones algebraicas.

En educación matemática, se caracteriza a los estudiantes con alta capacidad matemática (acm) en base a diversos rasgos de su forma de hacer matemáticas, que tienen principalmente que ver con su capacidad de resolver problemas, superior a la media de los estudiantes de su edad o curso (Krutetskii, 1976). Por ello, la resolución de problemas es el mejor contexto para que los profesores puedan identificar a sus alumnos con acm y es importante tener criterios para identificar las formas de resolver problemas de diversos tipos y contenidos matemáticos (aritmética, geometría, álgebra, etc.) que son propias de los estudiantes con acm. En pre-álgebra, varias investigaciones han mostrado que los niños de Primaria con acm son capaces de progresar rápidamente para lograr el nivel de razonamiento abstracto necesario para resolver problemas algebraicos (Fritzlar, Karpinski-Siebold, 2012; Gutiérrez, Benedicto, Jaime, Arbona, 2018).

El uso de las TICs para la enseñanza a estudiantes con acm resulta igual de beneficioso que con cualquier otro estudiante. Las TICs pueden facilitar el trabajo individual de los estudiantes, lo cual es muy útil para dar autonomía a los estudiantes con acm y que puedan avanzar a su ritmo y resolver actividades o problemas en más cantidad o diversidad que sus compañeros. Existen distintas aplicaciones informáticas creadas para la enseñanza inicial del álgebra, en especial para ayudar a los estudiantes a entender el significado de las ecuaciones y a aprender las manipulaciones de simplificación, cambio de término, etc. durante la resolución. Los tipos de aplicaciones más frecuentes son las que modelizan las ecuaciones mediante balanzas (p. ej., las balanzas algebraicas de la NLVM), mediante regiones rectangulares (p. ej., Algebra Tiles) y mediante regiones de la pantalla (p. ej., Dragon Box). Sin embargo, son muy escasas las aplicaciones utilizables en pre-álgebra para representar los ppg (por ejemplo, eXpresser), ninguna de las cuales resultaba útil en el contexto de nuestros experimentos. Por ello, decidimos crear una aplicación específica.

En este contexto, estamos realizando una investigación cuyos objetivos globales son diseñar y experimentar una secuencia de actividades de pre-álgebra, orientadas a la resolución de varios estilos de ppg basados en progresiones aritméticas, para estudiantes de 4º a 6º cursos de educación primaria, así como analizar la actividad de los estudiantes y su avance en la comprensión de los contenidos algebraicos iniciales. El objetivo específico de investigación en el que se centra este artículo es observar cómo razonan y resuelven los ppg estudiantes con acm, con el fin de encontrar en este contexto características diferenciadoras entre estudiantes con acm y estudiantes medios de igual edad o curso.

MARCO TEÓRICO

Para alcanzar el objetivo de investigación formulado, el marco teórico está formado por dos componentes, uno centrado en la resolución de ppg y el otro centrado en las características diferenciadoras de los estudiantes con acm.

El clásico estudio de Küchemann (1978) muestra que una de las primeras dificultades que deben superar los estudiantes de álgebra es dotar de significado a las letras en las expresiones algebraicas en general y las ecuaciones y funciones en particular. Las preguntas que planteamos durante la resolución de los sucesivos ppg tienen como finalidad guiar a los estudiantes para que realicen procesos de generalización, desde valores numéricos específicos hasta el término general de la progresión, aprendan a expresar algebraicamente dichas generalizaciones y, finalmente, descubran la resolución de ecuaciones como la forma adecuada de encontrar la respuesta a algunas de esas preguntas.

Tomando como referencia varios estudios previos, hemos formulado un referente teórico para analizar las respuestas de los estudiantes, integrado por los componentes teóricos propuestos por estos autores o variantes de ellos y otros componentes definidos por nosotros para diferenciar determinados tipos de respuestas, que nos están permitiendo hacer un análisis completo y detallado de las respuestas de los estudiantes. Por la limitación de extensión de este texto, aquí solo mencionamos los componentes teóricos utilizados en el análisis de los datos presentados.

El primer paso de la resolución de un ppg es interpretar la información gráfica proporcionada en el enunciado para calcular los valores de términos específicos de la sucesión y el término general, en respuesta a las preguntas planteadas. Basándonos en Rivera y Becker (2005), definimos dos tipos de interpretaciones:

- Las *visuales* son aquéllas en las que los estudiantes descomponen en partes las figuras del enunciado, observan el cambio de tamaño de las partes al avanzar en la sucesión y usan esas relaciones para realizar los cálculos.
- Las *numéricas* son aquéllas en las que los estudiantes, prestando poca o nula atención a la información gráfica, cuentan la cantidad total de piezas que componen cada figura del enunciado y usan esas cantidades para realizar los cálculos.

Los estudiantes utilizan diversas estrategias para calcular los valores de términos específicos pedidos, las cuales se diferencian por las formas de relacionar la información disponible con el término cuyo valor se pide. A partir de García-Reche, Callejo y Fernández (2015), definimos varios tipos y sub-tipos de estrategias de cálculo de valores de términos, entre los cuales están:

- *Funcional*: consiste en establecer una relación entre la posición de cualquier término y su valor, de manera que, solo conociendo la posición del término, es posible calcular su valor.
- Un sub-tipo de estrategia funcional es la *descomposición*, que consiste en dividir la representación gráfica de un término en partes, con el fin de encontrar una relación entre la posición del término y la cantidad de piezas que tiene cada parte.
- *Ensayo-error*: consiste en probar diferentes valores numéricos para el término demandado hasta encontrar el valor correspondiente a la posición indicada.

El objetivo de pedir a los estudiantes que calculen valores de términos particulares es proporcionarles una base experimental para que puedan identificar regularidades y generalizarlas en forma de descripción de un procedimiento de cálculo del valor de cualquier término. Cuando esta descripción está bien formulada, coincide con una expresión del valor del término general de la progresión basada únicamente en la posición del término. Nos basamos en Radford (2006) para definir diversos tipos de generalización, entre ellos los siguientes:

- *Algebraica factual*: cuando se expresa aludiendo a términos específicos y mediante operaciones con números concretos, pero permite calcular el valor de cualquier término.
- *Algebraica contextual*: cuando consiste en una relación general abstracta, válida para calcular el valor de cualquier término, expresada en forma verbal y contextualizada.
- *Algebraica simbólica*: cuando consiste en una relación general abstracta, válida para calcular el valor de cualquier término, expresada en forma algebraica.

Para inducir a los estudiantes a dar el paso de producir expresiones verbales a expresiones algebraicas, a plantear y resolver ecuaciones basadas en esas expresiones, nuestros ppg incluyen preguntas de relación inversa. Los estudiantes utilizan diversos tipos de estrategias para resolver estas preguntas (Arbona, 2016), algunos de los cuales son:

- *Inversión*, que consiste en realizar los cálculos aritméticos inversos a los hechos en las preguntas directas (en cuanto a los tipos de operaciones y al orden de realización).
- *Ensayo-error*, que consiste en probar diferentes valores numéricos para el valor demandado hasta encontrar el término correspondiente a la cantidad indicada.

En las literaturas didáctica y psicológica, existe una diversidad de términos, y una variedad de significados de estos, para referirse a las personas que destacan por encima de la media. En el contexto de nuestro estudio, los términos más usados son talento, superdotación y alta capacidad. Hay bastante consenso en considerar que una persona es superdotada cuando destaca por encima de la media en una amplia variedad de actividades intelectuales (Torrego, 2011). En este texto, tomando como referente la teoría de las inteligencias múltiples de Gardner, consideramos que una persona tiene *alta capacidad matemática* cuando destaca por encima de la media en el desarrollo de razonamiento matemático y en la realización de actividades típicamente matemáticas como definir, demostrar o resolver problemas (independientemente de que pueda o no destacar también en otras áreas). En la literatura didáctica, suele usarse el término “talento matemático” como equivalente a acm.

La literatura de investigación en educación matemática ha prestado atención a la necesidad de definir características discriminadoras de las formas de resolver problemas de los estudiantes con acm respecto de los estudiantes ordinarios. Freiman, Greenes y Krutetskii, entre otros, han identificado diversas características que presentan los estudiantes de altas capacidades matemáticas, agrupadas en Jaime y Gutiérrez (2014). Las más relevantes en el contexto de nuestra investigación son la identificación de patrones y relaciones entre diferentes elementos, la generalización y la inversión de procesos de razonamiento matemático. Por otra parte, la mejor forma de identificar la acm es mediante la realización de actividades que requieran usar razonamiento matemático, siendo la resolución de problemas matemáticos la más genuina.

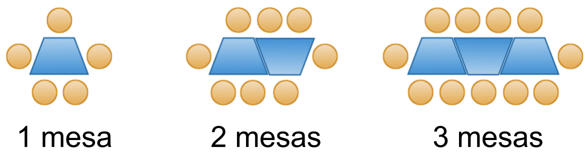
METODOLOGÍA

Para dar respuesta al objetivo de esta investigación, empleamos una metodología cualitativa enfocada a analizar las resoluciones de un ppg que forma parte de una amplia intervención educativa con estudiantes de 4º, 5º y 6º de Educación Primaria. Para dicha intervención hemos realizado diversas experimentaciones utilizando la metodología de *investigación de diseño* (Cobb, Jackson, y Dunlap, 2015).

En el presente trabajo nos centramos, por una parte, en las respuestas de un grupo de 8 estudiantes superdotados de 5º (1) y 6º (7) de Primaria que asistían a un taller extraescolar de matemáticas y, por otra, en las respuestas de 16 estudiantes de un grupo de clase ordinario de 6º de Primaria. Los 8 estudiantes superdotados no habían recibido instrucción previa en resolución de ppg ni en álgebra. En cambio, los estudiantes del grupo ordinario formaban parte de un estudio longitudinal de resolución de ppg de tres años, que empezó cuando este grupo estaba en 4º de Primaria, para el cual habíamos diseñado una secuencia de actividades con una duración de 3 sesiones por año. En cada sesión de la unidad de enseñanza, de 45 minutos, los estudiantes resolvían de forma individual varios problemas y después la profesora (la primera autora) proporcionaba algunas directrices y resolvía los problemas en la pizarra, animando a los estudiantes a compartir sus repuestas. En el conjunto de las sesiones de los tres años, habían aprendido a realizar generalizaciones expresándolas 1) verbalmente, 2) algebraicamente, primero combinando los números y operaciones con palabras y después combinándolos con letras y 3) algebraicamente siendo, además, capaces de simplificar las expresiones iniciales.

Los datos que presentamos corresponden a un problema que resolvieron durante la tercera sesión del tercer año del estudio longitudinal. El objetivo de dicha sesión era iniciarles en el planteamiento y la resolución de ecuaciones. Dicho problema (Figura 1) está basado en una progresión aritmética cuyo término general es $a_n = 3n + 2$ y presenta una variación respecto a la estructura usual de los ppg, pues está dirigido a estudiantes que han superado la fase inicial de aprender a generalizar patrones y que se encuentran en la fase de afianzar la escritura de expresiones algebraicas y aprender a manipularlas. Por ello, el problema incluye preguntas pidiendo explícitamente escribir (b), simplificar (c) y utilizar (d) una expresión algebraica para calcular el valor del término general de la sucesión.

Nuestro primo Nacho quiere organizar una comida familiar. El problema es que somos muchos primos y no sabe si acudirán todos. Además, hay primos de todas las edades y, por tanto, algunos acudirán con su pareja e hijos. Quiere distribuir las mesas del siguiente modo:



a) ¿Cuántos invitados cabrán en 53 mesas? ¿Cómo lo sabes?
b) Escribe la fórmula que utilizarías para calcular los invitados que cabrán dependiendo del número de mesas.
c) ¿Crees que podríamos escribir la fórmula del apartado b) de un modo más simple? Escríbela.
d) Utiliza la fórmula que has escrito en el apartado c) para averiguar cuántos invitados cabrán en 12 mesas.
e) Si hay 83 invitados, ¿cuántas mesas necesitará? ¿Cómo lo sabes?

Figura 1. Enunciado del ppg planteado.

El ppg empieza con una pregunta directa en la que se pide calcular el valor de un término lejano, sin preguntar primero por términos inmediatos o próximos. A continuación, omitiendo la fase previa usual de pedir verbalizar una generalización, el problema pide explícitamente una fórmula para calcular el valor de cualquier término. En los siguientes apartados, pide simplificar la fórmula y utilizarla para averiguar el valor de un término de una posición próxima. El problema termina con una pregunta inversa (e).

Todos los estudiantes de esta muestra resolvieron el ppg con *GeoPattern*, una aplicación para tabletas Android diseñada expresamente para la investigación de la que forma parte este trabajo.

GeoPattern (Figura 2) permite la presentación, resolución de problemas de patrones geométricos y su autocorrección, pues la aplicación informa a los estudiantes de si su respuesta es correcta o errónea. Además, guarda la traza digital que el estudiante deja durante su actuación y permite obtener información sobre las diferentes estrategias seguidas por los estudiantes, las operaciones que han realizado con la calculadora integrada en la aplicación, el número de intentos realizados o las preguntas contestadas correctamente. En Arbona y otros (2018) se puede ver una descripción más detallada de *GeoPattern* y su uso.

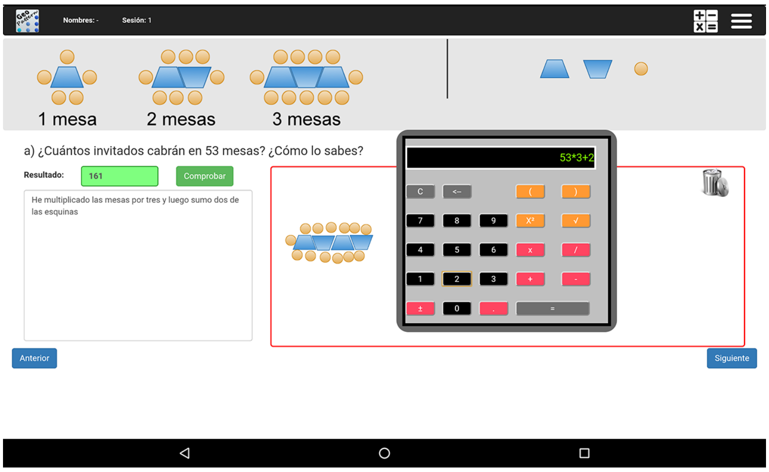


Figura 2. Pantalla de *GeoPattern*.

Los datos recogidos durante las experimentaciones fueron las respuestas de los estudiantes a los distintos apartados del ppg –registrados por la aplicación y exportados en forma de datos Excel– y las grabaciones de audio y video (captura de pantalla) generadas por las tabletas.

ANÁLISIS DE DATOS

La Tabla 1 muestra la clasificación de las respuestas al ppg de la Figura 1 proporcionadas por los 8 estudiantes superdotados y los 16 estudiantes del estudio longitudinal. La cantidad total de respuestas obtenidas varía en cada apartado, pues hubo estudiantes que dejaron apartados sin responder, por falta de tiempo o por el incremento de la dificultad.

Para el análisis de las respuestas, nos hemos basado en sus tipos de: estrategias de interpretación gráfica: numérica (N), visual (V); estrategias de cálculo de valores de términos (preguntas directas a-d): funcional (F), su subtipo descomposición (FD), ensayo-error (E-E); generalización realizada: factual (GF), contextual (GC), simbólica (GS); y estrategias de cálculo de posiciones de términos (pregunta inversa e): inversión (I), ensayo-error (E-E). Además, indicamos si las respuestas son correctas (Ct), si las estrategias son erróneas (EE) y si cometen errores algebraicos (EAg). Hemos contabilizado también las respuestas no categorizables (NC).

Tras analizar los datos, podemos observar que, en las cuestiones de relación directa (a-d), ambos grupos de estudiantes utilizaron los mismos tipos de estrategias, pero existe una mayor diversidad en el grupo ordinario. Por ejemplo, en los apartados b, c y d, todos los estudiantes superdotados emplearon la generalización más apropiada para el tipo de cuestión (simbólica en b y c y factual en d), sin embargo, los estudiantes ordinarios presentaron distintos niveles de generalización mostrando incluso, en algunos casos, generalizaciones inferiores a la esperada. Así pues, los estudiantes con acm, en general, eligieron estrategias más eficientes para dar respuestas correctas a las preguntas planteadas.

Tabla 1. Clasificación de las respuestas proporcionadas por los participantes en el estudio.

Preguntas	a)		b)		c)		d)			e)	
	Sup	Long	Sup	Long	Sup	Long	Sup	Long		Sup	Long
Cant. de respuestas	8	16	5	15	5	13	5	13		5	14
N	2	3	1	2	1	2	1	3	I	5	7
V	1	5	1	4	1	5	1	5	E-E	0	4
NC	5	8	3	9	3	6	3	5	NC	0	3
F	5	4	4	8	4	6	4	7			
FD	1	4	1	3	1	4	1	4			
E-E	1	5	0	0	0	0	0	1			
NC	1	3	0	4	0	3	0	1			
Ct	6	12	5	10	5	10	5	12	Ct	5	10
EE	1	2	0	0	0	0	0	1	EE	0	2
EAg	0	0	0	1	0	0	0	0	EAg	0	0
NC	1	2	0	4	0	3	0	0	NC	0	2
GF	2	7	0	0	0	0	5	7			
GC	1	3	0	4	0	3	0	2			
GS	3	0	5	7	5	7	0	2			
NC	2	6	0	4	0	3	0	2			

Centrándonos en la cuestión de relación inversa (e), podemos observar también cómo existe una mayor diversidad en el grupo de estudiantes ordinarios, siendo sus estrategias menos eficientes que aquellas utilizadas por los superdotados. Tan solo 7 estudiantes de 14 consiguieron resolver correctamente esta cuestión frente a la totalidad (5 de 5) de estudiantes superdotados.

Otra característica diferenciadora de los estudiantes superdotados en la resolución de ppg es el número de intentos a la hora de resolver los apartados con cuestiones numéricas, pues *GeoPattern* permite la autocorrección del resultado numérico obtenido en las preguntas a, d y e del problema. Los estudiantes ordinarios realizaron entre 1 y 9 intentos (media de 2’9 intentos) durante la resolución del apartado a y entre 1 y 11 intentos (media de 2’4 intentos) en el apartado e. En cambio, los estudiantes superdotados realizaron entre 1 y 6 intentos (media de 2’5 intentos) durante la resolución del apartado a y entre 1 y 2 intentos (media de 1’2 intentos) en el apartado e. No hemos tenido en cuenta el número de intentos del apartado d debido a que se pedía a los estudiantes que aplicaran la fórmula que habían desarrollado previamente.

CONCLUSIONES

En este texto hemos presentado un estudio comparativo de las estrategias empleadas por estudiantes superdotados y estudiantes ordinarios en el último curso de Educación Primaria, con el fin de encontrar características diferenciadoras entre ambos tipos de estudiantes en el contexto de los problemas de patrones geométricos que puedan usarse para identificar a estudiantes con acm.

El análisis de las respuestas muestra que los estudiantes con acm proporcionan respuestas más eficaces y eficientes que los estudiantes ordinarios, y necesitan menos intentos para llegar a la respuesta correcta. Esto hecho ocurre pese a la diferencia existente en la formación recibida, pues los estudiantes ordinarios realizaron 3 sesiones de ppg en cada uno de los tres últimos cursos escolares mientras que los estudiantes superdotados tuvieron una única sesión.

El análisis que hemos realizado muestra que los estudiantes superdotados han puesto en práctica algunas de las habilidades características de la acm señaladas por la literatura, concretamente las de generalizar, desarrollar estrategias eficientes y, sobre todo, invertir los procesos mentales y rapidez de aprendizaje.

AGRADECIMIENTOS

Los resultados presentados son parte del proyecto de investigación *Modelos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas: análisis racional y empírico* (EDU2017-84377-R, AEI/FEDER) y de la ayuda predoctoral FPU16/04513FPU.

REFERENCIAS

Arbona, E. (2016). *Introducción al álgebra mediante problemas de patrones geométricos a un estudiante de educación primaria con altas capacidades matemáticas* (Tesis de máster de investigación). U. de Valencia, Valencia. Disponible en http://roderic.uv.es/handle/10550/56731.

Arbona, E., García, D., Beltrán, M. J. y Gutiérrez, Á. (2018). GeoPattern, una app para resolver problemas de patrones geométricos en Primaria. *Educación Matemática en la Infancia (Edma 0-6), 7*(2), 1-23.

Cobb, P., Jackson, K. y Dunlap, C. (2015). Design research: An analysis and critique. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 481-503). Nueva York: Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203448946

Friel, S. N. y Markworth, K. A. (2009). A framework for analyzing geometric pattern tasks. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15*(1), 24-33.

Fritzlar, T. y Karpinski-Siebold, N. (2012). Continuing patterns as a component of algebraic thinking - An interview study with primary school students. Manuscrito presentado en el *12th International Congress on Mathematical Education* (ICME 12), Seúl, Corea del Sur.

García-Reche, A., Callejo, M. L. y Fernández, C. (2015). La aprehensión cognitiva en problemas de generalización de patrones lineales. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en educación matemática XIX* (pp. 279-288). Alicante: SEIEM.

Gutiérrez, Á., Benedicto, C., Jaime, A. y Arbona, E. (2018). The cognitive demand of a gifted student’s answers to geometric pattern problems. Analysis of key moments in a pre-algebra teaching sequence. En F. M. Singer (Ed.), *Mathematical creativity and mathematical giftedness* (pp. 169-198). Cham, Suiza: Springer.

Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de educación primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). Valencia: PUV.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, IL: The University of Chicago Press.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School, 7*(4), 23-26.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz y A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th PME-NA Conference* (Vol. 1, pp. 2-21). Mérida, México: PME-NA.

Rivera, F. D. y Becker, J. R. (2005). Figural and numerical modes of generalizing in algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School, 11*(4), 198-203.

Torrego, J. C. (Ed.) (2011). *Alumnos con altas capacidades y aprendizaje cooperativo. Un modelo de respuesta educativa*. Madrid: Fundación SM.