

UNA TRAYECTORIA DE APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE POLÍGONO EN ESTUDIANTES DE 9 AÑOS

A learning trajectory in 9-year-olds' students of concept of polygon

Bernabeu, M.^a, Moreno, M.^a, Llinares, S.^a y Gutiérrez, A.^b

^aUniversidad de Alicante, ^bUniversidad de Valencia

Resumen

El objetivo de esta investigación es caracterizar una trayectoria de aprendizaje del concepto de polígono en estudiantes de 9 años. Usamos un experimento de enseñanza y analizamos los datos de 9 estudiantes para caracterizar niveles de sofisticación en el desarrollo del pensamiento geométrico sobre los polígonos. El análisis de tres entrevistas (inicial, media y final) permitió inferir características de cómo dotan de sentido matemático a las partes de las figuras para determinar la pertenencia de un polígono a una clase. Los diferentes niveles de sofisticación de la comprensión del concepto de polígono se usan para caracterizar una trayectoria de aprendizaje del concepto de polígono.

Palabras clave: *concepto de polígono, educación primaria, niveles de sofisticación, pensamiento geométrico, trayectoria de aprendizaje*

Abstract

The aim of this research is to characterize a learning trajectory in 9-year-old students of the concept of polygon. We employed a teaching experiment and analysed data of 9 students to characterize the levels of sophistication in the development of thinking about polygon. Analysis of three interviews (initial, middle and ending) allowed us to infer features of the way in which students made mathematical sense to the parts of the figures to determine the belonging of a polygon to a class. The levels of sophistication are used to characterize a learning trajectory of polygon.

Keywords: *concept of polygon, primary education, levels of sophistication, geometrical thinking, learning trajectory*

INTRODUCCIÓN

La comprensión del concepto de polígono es un paso importante en el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes (Hershkowitz, 1989). En el desarrollo de esta comprensión, reconocer y dotar de sentido matemático a las partes de las figuras geométricas es considerado un aspecto clave (Battista, 2007; Bernabeu, Moreno y Llinares, 2019a, 2019b; Clements, Swaminathan, Hannibal y Sarama, 1999; Levenson, Tirosh y Psamir, 2011; Llinares y Clemente, 2019). La comprensión del concepto de polígono puede ser vista como la conjunción entre reconocer figuras geométricas como polígonos (figura plana cerrada con lados rectos y no cruzados) y determinar la pertenencia de un polígono a una clase de polígonos (p. ej., considerar que un rombo es un ejemplo de la clase de paralelogramos y el trapecio isósceles no es un ejemplo de los paralelogramos). Algunas investigaciones indican que la enseñanza de la geometría en los primeros años debería fomentar el reconocimiento visual de los atributos de los objetos geométricos y el establecimiento de relaciones entre ellos para desarrollar la comprensión de las figuras geométricas (Awnar y Rofiki, 2018; Clements et al., 1999) y de los cuerpos geométricos (Ambrose y Kenehan, 2009; Pittalis y Christou, 2013).

Investigaciones previas han usado los niveles de pensamiento de van Hiele para caracterizar la comprensión de los conceptos geométricos en diferentes niveles educativos (Battista, 2007; Gutiérrez y Jaime, 1998). Otras investigaciones (Clements, et al., 1999) han refinado la transición entre algunos de estos niveles (por ejemplo, en la transición entre lo perceptual y lo analítico). En este caso, Clements y colegas (1999) añaden el nivel *sincrético*, un nivel entre el de *pre-reconocimiento* (Clements y Battista, 1992) y el *analítico*. Sin embargo, hay menos información sobre cómo los estudiantes empiezan a desarrollar el nivel analítico. Por ejemplo, cómo los estudiantes empiezan a razonar con atributos no relevantes del concepto de polígono para generar la idea de clases de polígonos. Esta investigación intenta aportar información sobre dicha progresión en estudiantes de 9 años tras un experimento de enseñanza dirigido a favorecer el análisis de las figuras geométricas y la relación entre ellas.

MARCO TEÓRICO

En esta investigación, tomamos como referencia la teoría de Duval (1995, 2017) y, en particular, la noción de *deconstrucción dimensional* junto con la coordinación de las *aprehensiones cognitivas*.

Reconocer una figura geométrica como un polígono implica reconocer los atributos relevantes de la definición de polígono. Una evidencia de esto se muestra cuando se reconocen qué atributos relevantes de la definición de polígono no están presentes en una figura y se transforman para construir un polígono *explicando* la transformación realizada. Todo este proceso implica dotar de sentido matemático a las partes de la figura geométrica mediante la *deconstrucción dimensional* (Duval, 2017). El proceso de deconstrucción dimensional se articula a través de diferentes aprehensiones. Mediante la *aprehensión discursiva* se establecen relaciones entre las partes de una figura y la definición de polígono; mediante la *aprehensión operativa*, se transforman los atributos de una figura, que no es un polígono, en un polígono y, mediante la *aprehensión secuencial*, se representa el polígono, mental o físicamente, a través de un dibujo o una construcción con materiales (Duval, 1995). Por otro lado, para determinar la pertenencia de un polígono a una clase es necesario identificar el atributo común que define la clase en un conjunto de figuras diferentes. Por ejemplo, identificar qué tienen en común los polígonos de una clase que permite determinar cuándo una figura es ejemplo de dicha clase.

El proceso progresivo a través del cual los estudiantes razonan con las partes de las figuras y las dotan de sentido matemático puede determinar trayectorias de aprendizaje del concepto de polígono en los estudiantes. Algunas investigaciones usan la idea de *trayectoria de aprendizaje* para mostrar este desarrollo (Anwar y Rofiki, 2018; Clements y Sarama, 2004; Simon, 1995). Una trayectoria de aprendizaje es “una descripción del pensamiento de los niños en un dominio matemático específico” (Clements y Sarama, 2004, p. 83). Nosotros usamos este constructo junto con las aprehensiones cognitivas y la deconstrucción dimensional de Duval (1995, 2017) para describir y comprender cómo los estudiantes desarrollan su comprensión sobre los polígonos.

MÉTODO

Participantes y contexto

Se diseñó un experimento de enseñanza en el que participaron 59 estudiantes de tercer curso de educación primaria (9 años). Las tareas del experimento de enseñanza se diseñaron para potenciar la habilidad de deconstruir dimensionalmente las figuras y dotarlas de sentido matemático mediante la coordinación de diferentes aprehensiones (discursiva, secuencial y operativa). Las tareas se organizaron a través de dos dimensiones. En la Dimensión 1 (D1) los estudiantes tenían que reconocer polígonos, y en la Dimensión 2 (D2) los estudiantes tenían que determinar si un polígono pertenecía o no a alguna clase de polígonos a partir: (a) del reconocimiento de los atributos de los polígonos y (b) de la identificación de atributos comunes en un grupo de polígonos para determinar

si un polígono era ejemplo o no de dicha clase. Los estudiantes no habían recibido instrucción previa durante el curso sobre los contenidos geométricos.

Los participantes respondieron a un cuestionario inicial (CI) considerando estas dimensiones. De estos 59 estudiantes, se entrevistó a 9 al inicio, a mitad y al final del experimento de enseñanza. Estos estudiantes fueron seleccionados de acuerdo con los resultados del cuestionario inicial: tres de ellos que no comprendían el concepto de polígono; tres que reconocían los polígonos, pero no atributos no relevantes para determinar una clase de polígonos; y otro tres que reconocían los polígonos y, además, reconocían algunos atributos no relevantes.

El experimento de enseñanza constó de 10 sesiones (Tabla 1). La primera sesión se centró en reconocer polígonos (figura plana cerrada con lados rectos y no cruzados) y no-polígonos (D1). El resto de las sesiones se centraron en reconocer diferentes atributos no relevantes para la definición de polígono pero que podían determinar la generación de una clase (D2) como, por ejemplo, concavidad-convexidad, número de lados, figuras simétricas, relación entre la longitud de los lados en los triángulos, relación entre la amplitud de los ángulos de un triángulo y lados paralelos. Para determinar cómo los estudiantes podían empezar a identificar clases de polígonos se usaron tareas basadas en la metáfora de la *Máquina de Dibujar* (Figura 3) (Battista, 2012). La Máquina de dibujar puede hacer figuras con unos determinados atributos (ejemplos de una clase) y no puede hacer figuras que no cumplan dichos atributos (ejemplos de polígonos que no pertenecen a la clase).

Metodológicamente, en cada sesión, los estudiantes resolvían tareas en gran grupo y contrastaban sus respuestas con las de sus compañeros y, al finalizar la sesión, realizaban tareas individualmente.

Sesión 1: Atributos relevantes de la definición de polígonos. Polígonos según el número de lados	Sesión 2: Diagonales. Polígonos cóncavos/convexos
Sesión 3: Ejes de simetría. Polígonos simétricos	Sesión 4: Clases de ángulos: agudo, recto y obtuso
Sesión 5: Clases de triángulos según la longitud de sus lados: equilátero, isósceles y escaleno	Sesión 6: Clases de triángulos según la amplitud de sus ángulos internos: acutángulo, rectángulo y obtusángulo
Sesión 7: Clases de triángulos según la longitud de sus lados y la amplitud de sus ángulos internos	Sesión 8: Líneas paralelas. Clases de cuadriláteros según el paralelismo de sus lados: paralelogramo, trapecio y trapezoide
Sesión 9: Clases de paralelogramos: relaciones entre cuadrado, rectángulo, rombo y romboide	Sesión 10: Propiedades de las diagonales de los paralelogramos: bisección, congruencia y perpendicularidad.

Tabla 1. Secuencia de las sesiones del experimento de enseñanza

Instrumento y procedimiento

Realizamos tres entrevistas, antes, durante y después de la instrucción, con tareas similares a las realizadas durante el experimento de enseñanza (Tabla 2).

El objetivo de la entrevista inicial era determinar el conocimiento previo de los estudiantes sobre el concepto de polígono. Para la entrevista inicial (EI) se usaron las tareas del cuestionario inicial (CI), y tareas adicionales (Figura 1). El objetivo de la entrevista intermedia era determinar cómo los estudiantes comprendían clases particulares de polígonos, clasificación y relaciones de inclusión. La entrevista intermedia (EM) se centró en determinar cómo los estudiantes identificaban clases de polígonos según la concavidad/convexidad, número de lados y simetría (Figura 4). El objetivo de la entrevista final era determinar cómo los estudiantes razonaban con atributos no relevantes para la definición de polígono. Las tareas de la entrevista final (EF) se centraron en clasificar triángulos según sus lados o ángulos y clasificar cuadriláteros según el paralelismo de los lados o la posición de sus diagonales, aspectos abordados al final de la instrucción.


TAREA 1	
a) Indica si la figura es un polígono. ¿Por qué?	
	b) Si la figura “ NO es un POLÍGONO , indica con tus palabras cómo la podemos transformar para que sea un polígono c) Dibújalo.

Figura 1. Tarea en el guion de la entrevista intermedia centrada en reconocer polígonos

Análisis

Las entrevistas fueron transcritas y su análisis siguió un proceso de dos pasos considerando el proceso de generación de una *Teoría fundamentada* (Straus y Corbin, 1990). Esta teoría se deriva de “datos recopilados y analizados sistemáticamente a través de la investigación [...] permitiendo que la teoría emerja de los datos” (p. 12). Primero, en cada una de las entrevistas, se identificaron cómo los estudiantes reconocían las figuras como polígonos o no-polígonos (D1), y cómo los estudiantes dotaban de sentido matemático a las partes de las figuras para considerar clases de polígonos (D2). Segundo, comparamos las resoluciones de las tareas de las tres entrevistas (inicial, intermedia y final). El objetivo fue inferir características de los cambios al reconocer polígonos, al identificar clases y cómo se identificaba una figura como ejemplo de una clase. Estas características nos permitían tener información para articular trayectorias de aprendizaje considerando cómo los estudiantes realizaban la deconstrucción dimensional y coordinaban las apprehensions cognitivas en los ejemplos particulares de figuras que se les presentaban.

Este proceso permitió inferir cuatro niveles de sofisticación de la comprensión del concepto de polígono (Tabla 2) que condujo a caracterizar diferentes trayectorias de aprendizaje. Cada nivel fue caracterizado a través de las dos dimensiones D1 y D2, y del uso del vocabulario geométrico empleado. En primer lugar, en términos de la habilidad en reconocer polígonos, transformar ejemplos de no-polígonos en polígonos (D1) y, por la habilidad de identificar clases de polígonos y determinar cuándo una figura es un ejemplo de dicha clase (D2). En segundo lugar, considerando el uso del vocabulario empleado por los estudiantes como un uso del vocabulario geométrico *estandarizado* cuando usan expresiones del tipo *lados paralelos* o *ejes de simetría*, y un uso de vocabulario geométrico *no-estandarizado* cuando prevalecen expresiones como *líneas* para referirse a lados o *picos hacia dentro* para expresar la idea de concavidad.

En este informe, usamos los datos de un estudiante para mostrar una de las trayectorias de aprendizaje identificada considerando los niveles de sofisticación de la comprensión del concepto de polígono inferidos del análisis.

Tabla 2. Niveles de sofisticación de la comprensión del concepto de polígono

N	D	Teoría Generada por la perspectiva analítica
1	D1	No reconocen algunos atributos relevantes de la definición de polígono. Usan mayoritariamente vocabulario geométrico no-estandarizado
	D2	No reconocen atributos no relevantes de la definición de polígono No identifican clases de polígonos (Es decir, no identifican el atributo que define la clase, no representan un ejemplo de la clase, no identifican no ejemplos, ...). Usan mayoritariamente vocabulario geométrico no-estandarizado
2	D1	Reconocen los atributos relevantes de la definición de polígono de manera no-sistemática (es decir, reconocen, en algunos casos, pero no en otros). Usan vocabulario geométrico estandarizado y no-estandarizado
	D2	Usan vocabulario geométrico mayoritariamente no-estandarizado: D2a) Reconocen de manera no-sistemática atributos no relevantes de la definición de polígono D2b) Identifican de manera no-sistemática el atributo que define una clase de polígonos
3	D1	Reconocen los atributos relevantes de la definición de polígono. Usan vocabulario geométrico estandarizado y no-estandarizado

	D2	Usan vocabulario geométrico estandarizado y no-estandarizado: D2a) Reconocen atributos no relevantes de la definición de polígono D2b) Identifican de manera no-sistemática el atributo que define una clase de polígonos
4	D1	Reconocen los atributos relevantes de la definición de polígono. Usan mayoritariamente vocabulario geométrico estandarizado
	D2	Usan mayoritariamente vocabulario geométrico estandarizado: D2a) Reconocen atributos no relevantes de la definición de polígono D2b) Identifican clases de polígonos (es decir, identifican el atributo que define la clase, representan/ reconocen ejemplos de dicha clase, y reconocen no ejemplos de la clase)

RESULTADOS

La figura 2 muestra una representación de la Trayectoria de Aprendizaje de uno de los estudiantes reflejando los cambios en los niveles de sofisticación en su pensamiento sobre el aprendizaje del concepto de polígono.

	Entrevista inicial (EI)			Entrevista intermedia (EM)			Entrevista final (EF)	
	Reconocer polígonos (D1)	Reconocer atributos de polígonos (D2a)	Identificar ejemplos de una clase (D2b)	Reconocer polígonos (D1)	Reconocer atributos de polígonos (D2a)	Identificar ejemplos de una clase (D2b)	Reconocer atributos de polígonos (D2a)	Identificar ejemplos de una clase (D2b)
N1								
N2								
N3								
N4								

Figura 2. Trayectoria de aprendizaje del estudiante descrita a través de los niveles de sofisticación del pensamiento sobre los polígonos

Inicialmente, el estudiante reconoce, en algunos casos, cuándo una figura no es un polígono. Por ejemplo, aunque inicialmente no reconoce el lado ligeramente curvado (Figura 3, diálogos 2 y 4), luego sí es capaz de indicar que este atributo hace que la figura no sea un polígono (Figura 3, diálogo 5). Este estudiante usa un vocabulario a veces estandarizado (*cerrar*) y a veces no-estandarizado (*línea*) (N2) (Figura 3). Además, el estudiante reconoce algunos atributos no relevantes para la definición de polígono, como el número de lados y el paralelismo usando vocabulario estandarizado y no-estandarizado (N3). Sin embargo, solo es capaz de identificar el atributo común de un conjunto de polígonos cóncavos-convexos de forma perceptual, representando ejemplos y no ejemplos de esta clase. En este caso, el estudiante emplea vocabulario estandarizado y no-estandarizado, predominando el no-estandarizado (Figura 4, diálogo 8) (N2).

Posteriormente, en la entrevista intermedia, reconoce todos los atributos de la definición de polígono, empleando mayoritariamente un vocabulario geométrico estandarizado (*lado*) (N4) (Figura 3, diálogo 7). Además, en algunos casos reconoce atributos de un polígono (concauidad/convexidad, número de lados y simetría) que permite determinar una clase, pero no de manera sistemática (en todos los casos) y emplea un vocabulario geométrico mayoritariamente no-estandarizado (N2). Por ejemplo, representa polígonos con condiciones (polígono cóncavo o de seis lados), pero no sabe representar un polígono que tenga que cumplir las tres condiciones (polígono de seis lados, cóncavo y con al menos un eje de simetría). En estos casos emplea vocabulario geométrico estandarizado y no-estandarizado.

Finalmente, en la entrevista final, reconoce los atributos que determinan la clase de triángulos, según la longitud de sus lados y la amplitud de sus ángulos, y clases de cuadriláteros (N4). Además, identifica el atributo que determina una clase (cuadriláteros con lados congruentes) (Figura 4, diálogo 10). Esto se evidencia cuando indica que una cometa no es un ejemplo de cuadrilátero con

todos los lados congruentes. El estudiante usa mayoritariamente un vocabulario geométrico estandarizado (N4).

Las siguientes figuras muestran los cambios que caracterizan la trayectoria de aprendizaje en relación con el reconocimiento de polígonos y la transformación de no-polígonos en polígonos (Figura 3) y la identificación del atributo que define una clase de polígonos para considerar ejemplos y no ejemplos de dicha clase (Figura 4).

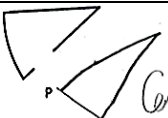

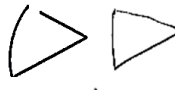
La figura no es un polígono. Indica con tus palabras qué cambiarías para que fuera un polígono. Dibújalo		
Cuestionario Inicial (CI)	Cuestionario Adicional (EI)	Entrevista Intermedia (EM)
 <p>Cerrar la línea</p> <p>1. INV: ¿Qué cambiaste? 2. EST: Cerrarla. 3. INV: ¿Hiciste algo más? 4. EST: No.</p>	 <p>Cerrar la línea y hacer recta la de la derecha</p> <p>5. EST: Esta que está curvada ponerla recta, y cerrarla.</p>	 <p>Cerrarla y el lado ponerlo recto</p> <p>6. INV: ¿Qué cambiarías? 7. EST: Cerrarla, y este lado ponerlo recto.</p>

Figura 3. Cambios en relación con el reconocimiento de polígonos y transformación de ejemplos de no-polígonos en polígonos


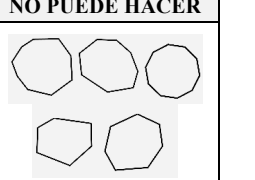


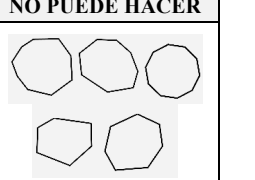

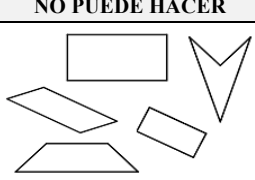


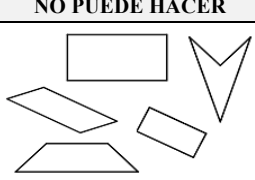

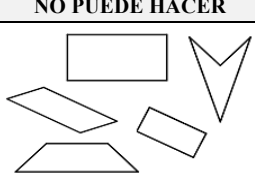


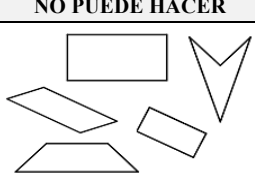

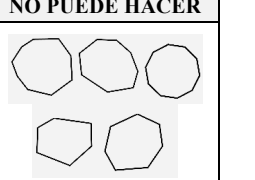

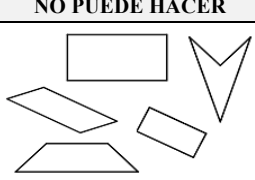

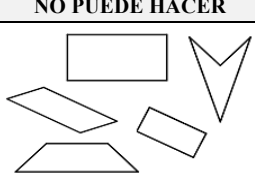
Tenemos una Máquina de Dibujar que puede hacer estos polígonos. Todos los polígonos que puede hacer tienen algo en común. Dibuja otro polígono diferente que la Máquina de Dibujar sí pueda hacer y di por qué. Dibuja otro polígono diferente que la Máquina de dibujar no pueda hacer y di por qué.															
Entrevista Inicial (EI)		Entrevista Final (EF)													
<table border="1"> <thead> <tr> <th>PUEDA HACER</th> <th>NO PUEDE HACER</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>  </td> <td>  </td> </tr> </tbody> </table> <p>Dibuja: </p> <p>Explica: <i>Porque tiene partes triangulares.</i></p>	PUEDA HACER	NO PUEDE HACER			<table border="1"> <thead> <tr> <th>PUEDA HACER</th> <th>NO PUEDE HACER</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>  </td> <td>  </td> </tr> </tbody> </table> <p>Dibuja: </p> <p>Explica: <i>Son rombos</i></p>	PUEDA HACER	NO PUEDE HACER			<table border="1"> <thead> <tr> <th>PUEDA HACER</th> <th>NO PUEDE HACER</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>  </td> <td>  </td> </tr> </tbody> </table> <p>Dibuja: </p> <p>Explica: <i>No son rombos</i></p>	PUEDA HACER	NO PUEDE HACER			<p>8. EST: Yo creo que es porque tienen forma aquí de triángulo y estas de cuadradas. Tienen partes cuadradas [convexas] y estas como partes triangulares [cóncavas].</p> <p>9. INV: [...] ¿Por qué esta no es un rombo? [polígono del grupo “no puede hacer”]</p> <p>10. EST: Porque aquí las líneas miden igual [puede hacer], y aquí no [no puede hacer].</p>
PUEDA HACER	NO PUEDE HACER														
															
PUEDA HACER	NO PUEDE HACER														
															
PUEDA HACER	NO PUEDE HACER														
															

Figura 4. Cambios en el pensamiento geométrico en relación con la identificación del atributo común no-relevante que define la clase

DISCUSIÓN

El objetivo de esta investigación es caracterizar una trayectoria de aprendizaje del concepto de polígono en estudiantes de 9 años vinculada a un experimento de enseñanza. La trayectoria de aprendizaje se ha caracterizado identificando: (a) cambios en la manera en la que el estudiante reconoce figuras como polígonos y transforma figuras que no son polígonos en polígonos; y, (b) cambios en cómo usa atributos no relevantes para la definición de polígono para identificar clases de polígonos y considerar o representar ejemplos y no ejemplos de estas clases.

La caracterización de la trayectoria de aprendizaje ha sido generada considerando los niveles de sofisticación de cómo el estudiante dota de sentido matemático, de manera progresiva, a las partes de las figuras. Es decir, cómo el estudiante progresivamente identifica atributos no relevantes para la definición de polígono, dotándolos de significado matemático, lo que le permite empezar a considerar clases de polígonos. En este proceso, identificar atributos comunes a un grupo de figuras y dotarlos de sentido matemático parece ser un factor clave en la trayectoria de aprendizaje. Esta idea muestra que, identificar atributos en los polígonos (como por ejemplo la concavidad/convexidad) es un primer paso para razonar con ellos e identificarlo como un atributo común a un grupo de figuras, lo que permite identificar la clase. Esta progresión en el pensamiento geométrico de los estudiantes se apoya en el desarrollo de la capacidad de análisis de las figuras geométricas (Sarama y Clements, 2009; Bernabeu, Moreno y Llinares, 2019a), reconociendo atributos no relevantes para la definición y la capacidad para dotarlos de sentido matemático (deconstrucción dimensional) (Duval, 2017). En particular, una característica de la progresión, que determina la trayectoria de aprendizaje que hemos descrito se da cuando el atributo no relevante de una figura pasa a ser considerado como un atributo común a un grupo de figuras (lo que tiene en común dos figuras que las diferencian de una tercera) y se llega a representar un polígono como elemento de la clase (aprehensión secuencial) (Duval, 1995) (Figura 4). En paralelo a esta progresión, en cómo se dota de significado matemático a las partes de las figuras en el proceso de construir el significado de una clase, se produce el desarrollo en el uso del vocabulario a través de la justificación (aprehensión discursiva) (diálogos 6-7 y 9-10). La descripción de la trayectoria de aprendizaje proporciona información sobre cómo los estudiantes desarrollan el nivel analítico razonando con atributos no relevantes del concepto de polígono para generar la idea de clases de polígonos.

La trayectoria de aprendizaje muestra que la comprensión del concepto de polígono es un proceso progresivo, aunque no lineal y depende: del tipo de tarea y de los atributos considerados (Battista, 2007; Bernabeu, Moreno y Llinares, 2019a, 2019b; Hershkowitz, 1989). La propuesta de enseñanza desarrollada en el experimento usa como atributos no relevantes para el concepto de polígono: la concavidad/convexidad, la simetría, el número de lados, la longitud de los lados en los triángulos y la amplitud de sus ángulos, el paralelismo en los cuadriláteros y la posición relativa de sus diagonales. Los estudiantes reconocen de manera diferente cada uno de estos atributos en los ejemplos individuales de polígonos, así como reconocerlo como un atributo común a un grupo de polígonos, que permite generar la idea de clase. Una implicación instruccional de estos resultados es que resulta esencial fomentar el análisis de las figuras geométricas, de forma individual y conjunta desde edades tempranas (Bernabeu, Moreno y Llinares, 2019a; Sarama y Clements, 2009).

Agradecimientos

Esta investigación ha contado con el apoyo de la Universidad de Alicante: contrato predoctoral (FPU2017-014) y ayuda para estancias breves en España y en el extranjero de investigadores/as predoctorales del programa propio del VITC 2019 (UAEEBB2019-03).

Referencias

- Ambrose, R., & Kenehan, G. (2009). Children's evolving understanding of polyhedra in the classroom. *Mathematical Thinking and Learning, 11*, 158-176. <http://dx.doi.org/10.1080/10986060903016484>
- Anwar, A., & Rofiki, I. (2018). Investigating students' learning trajectory: a case on triangle. *Journal of Physics: Conference Series, 1088* (1), 012021. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1088/1/012021>
- Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. K. Lester (Ed). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843- 908). Charlotte, EEUU: NCTM-IAP.
- Battista, M. T. (2012). *Cognition-based assessment & teaching of geometric shapes: Building on students' reasoning*. EE. UU.: Heinemann.

- Bernabeu, M., Moreno, M., & Llinares, S. (2019a). Experimento de enseñanza como una aproximación metodológica a la investigación en educación matemática. *Uni-pluri/versidad*, 19(2), 103. <https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.07>
- Bernabeu, M., Moreno, M., & Llinares, S. (2019b). Identificación y uso de los atributos de los polígonos por estudiantes de tercero de Educación Primaria: relaciones implicativas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 213-222). Valladolid: SEIEM.
- Clemente, F. & Llinares, S. (2013). Conocimiento de geometría especializado para la enseñanza en Educación Primaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación matemática XVII* (pp. 229- 236) Bilbao: SEIEM.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420–464). NY, EEUU: Macmillan.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 81-89. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_1
- Clements, D., Swaminathan, S., Hannibal, M., & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 192–212. <https://doi.org/10.2307/749610>
- Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Berlin: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-57771-0_10
- Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking – The registers of semiotic representations*. London, UK: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9>
- Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1998). *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática*. Bogotá: una empresa docente y Méjico: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry – two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 61–76.
- Levenson, S., Tirosh, D., & Tsamir, P. (2011). *Preschool geometry. Theory, research and practical perspectives*. Rotterdam, Netherland: Sense Publishers.
- Pittalis, M., & Christou, c. (2013). Coding and decoding representations of 3D shapes. *Journal of Mathematical Behavior*, 32, 673-689. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.08.004>.
- Sarama, J., & Clements, D.H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. NY, EEUU: Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203883785>
- Strauss, A., & Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research techniques*. Thousand Oaks, EEUU: Sage publications.