MAPEANDO LA INVESTIGACIÓN ESPAÑOLA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA[1]

Mapping the Spanish Research in Mathematics Education

Bosch, M.[a], Gutiérrez, A.[b] y Llinares, S.[c]

[a] Universidad de Barcelona, [b] Universidad de Valencia, [c] Universidad de Alicante

Resumen

Este artículo informa sobre las recientes y relevantes investigaciones en educación matemática realizadas por la comunidad española. El objetivo es presentar una visión global de la producción en las diferentes grandes líneas de investigación, organizadas en varios grandes bloques: el aprendizaje por los estudiantes de contenidos curriculares específicos, como álgebra, probabilidad y estadística, cálculo y argumentación o demostración en contextos geométricos; la formación de profesores de matemáticas; estudiantes con necesidades educativas especiales, tanto por dificultades de aprendizaje como por alta capacidad matemática; el uso de las TIC para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; y los desarrollos en diversos marcos teóricos realizados por investigadores españoles.

Palabras clave: *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, formación de profesores, necesidades educativas especiales, TIC para la enseñanza y el aprendizaje, teorías de la educación matemática.*

Abstract

This article reports on recent and relevant research in mathematics education produced by the Spanish community. The aim is to present an overview of the production in the different major lines of research in which there have been results, organized in several wide blocks: students' learning of specific curricular contents, such as algebra, probability and statistics, calculus, and argumentation or demonstration in geometric contexts; mathematics teacher training; students with special educational needs, both due to learning difficulties and mathematical giftedness; the use of ICT for teaching and learning mathematics; and advances based on various theoretical frameworks that have been created or developed by Spanish researchers.

Keywords: *Mathematics teaching and learning, teacher training, special educational needs, ICT for teaching and learning, mathematics education theories.*

1. INTRODUCCIÓN

En España, la educación matemática (o didáctica de las matemáticas) es un área de investigación dinámica. En ella trabajan diferentes grupos que utilizan una variedad de enfoques, centrados en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en diversos contextos y en todos los niveles educativos, desde preescolar hasta la universidad. El desarrollo de esta comunidad investigadora ha tenido lugar durante los últimos 40 años (Rico et al., 2002) y, particularmente, durante las dos últimas décadas. Este artículo presenta una panorámica de esta investigación en los últimos seis años, identificando líneas, focos o tendencias que se están desarrollando actualmente, tanto localmente como con colaboraciones internacionales. Los ejemplos de las investigaciones empíricas que describimos son representativos de los ámbitos de investigación con reflejo en revistas indexadas y actas de simposios de la SEIEM y otros congresos relevantes, así como en el número especial de la revista ZDM

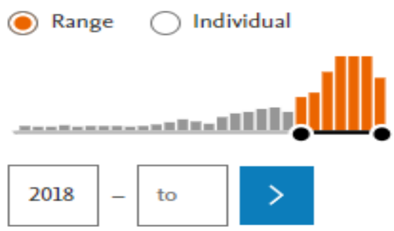
[1] Algunos resultados de esta publicación son parte de los proyectos de I+D+i PID2020-117395RB-I00 y PID2021-126717NB-C31 financiados por MCIN/AEI/10.13039/50110001 1033; y PID2020-116514GB-I00.

Bosch, M., Gutiérrez, A. y Llinares, S. (2024). Mapeando la investigación española en educación matemática. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 51-94). SEIEM.

Mathematics Education dedicado a la investigación española reciente en educación matemática (*ZDM, 56(6), 2024, Spanish Research on Mathematics Education*).

Para determinar unas primeras referencias usamos la base de datos SCOPUS, con los criterios de búsqueda: palabras clave “Mathematics AND Education”; país de afiliación: “Spain”, desde el 2018 hasta hoy. Se generaron 1.108 documentos en 25 áreas temáticas. Las 15 palabras clave con más presencia son “Mathematics” (196), “Mathematics Education” (135), “Primary Education” (109), “Education” (94), “Secondary Education” (81), “Students” (80), “Teaching” (69), “STEM” (63) y “Learning” (54).

Figura 1. Fuente Scopus, Rango (2018-) con los filtros Mathematics AND Education (Article Title, Abstract, Key words) y Affiliation Country (Spain).



Con el objetivo de mapear los focos generales de interés en la investigación española en los últimos años, esta búsqueda inicial fue acotada insertando nuevos filtros (tales como el nivel educativo - Primary, Secondary, Higher Education, - Technology, Teacher), permitiendo identificar las publicaciones usadas para caracterizar los focos de estas investigaciones. Finalmente, consideramos el filtro con el título de las ocho revistas que consideramos de nuestro ámbito y que están insertadas en la base de datos *Web of Science* (ZDM, MTL, JMTE, JRME, ESM, EC, IJSME, Relime) obteniendo 140 artículos. Completamos entonces los grupos de investigaciones identificadas con estos criterios con grupos de investigación con desarrollo que, por los criterios de búsqueda usados, tenían menos presencia pero con relevancia en nuestro ámbito (p. ej., historia y su uso en la enseñanza de las matemáticas) y con algunas referencias desde otras revistas y actas de congresos que consideramos relevantes para comprender el mapeo o con fecha fuera del rango establecido. De esta forma organizamos el mapeo de la investigación en educación matemática en España en los últimos años en las cinco secciones siguientes: enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos, formación de profesores, procesos cognitivos de estudiantes con necesidades educativas especiales, tecnología y, finalmente, aportes españoles al desarrollo de teorías.

2. INVESTIGACIÓN CENTRADA EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE CONTENIDOS MATEMÁTICOS

Tradicionalmente, entre las principales agendas de investigación en educación matemática se encuentra la dedicada a analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos curriculares de los diferentes niveles educativos, desde educación infantil hasta la universidad, incluyendo la formación inicial de profesores. Dichos análisis se pueden enfocar desde diversas ópticas, siendo las principales las centradas en los estudiantes, los (futuros) profesores, los currículos y las características sociopolítico-culturales del entorno. Esta sección tiene como foco central los procesos de aprendizaje de los estudiantes y está organizada en base a los diferentes bloques tradicionales de contenidos curriculares (aritmética, geometría, probabilidad y estadística, álgebra, cálculo). Los artículos correspondientes a esta agenda de investigación que presentamos son ejemplos representativos, aunque no los únicos, de la actividad investigadora española en educación matemática de las últimas décadas y de sus colaboraciones internacionales.

2.1 Pensamiento numérico

La investigación española sobre pensamiento numérico y aprendizaje de la aritmética en los diferentes niveles educativos se viene desarrollando desde los años 1980. Los programas del XIX y el XXVI Simposios de la SEIEM (2019 y 2023, respectivamente) incluyeron seminarios en los que se hicieron revisiones de la investigación reciente sobre pensamiento numérico. Hemos tomado como punto de partida para nuestra revisión el último seminario (Cañadas, 2023; Adamuz-Povedano, 2023; Bruno y Almeida, 2023), por lo que sugerimos a los lectores interesados en este tema que consulten esos documentos para conocer el estado de la investigación en pensamiento numérico en años anteriores.

A dichas revisiones podemos añadir algunas publicaciones aparecidas en los últimos años en esta línea de investigación, que son de características muy diferentes. Zorrilla et al. (2024) investigan las características de la elección de las operaciones en la resolución de problemas de estructura multiplicativa en estudiantes de 6º de Educación Primaria al transitar desde el dominio de los números naturales a las fracciones, identificando diferentes trayectorias de desarrollo. Vicente et al. (2022a y 2022b) hacen un análisis comparativo de los problemas aritméticos que hay en los libros de texto de los seis cursos de primaria de España y Singapur. El análisis realizado los lleva a concluir que no hay una diferencia suficiente en la cantidad y tipos de problemas que pueda explicar la diferencia de resultados entre ambos países en las evaluaciones internacionales, siendo la única diferencia significativa la mayor presencia de ilustraciones en los enunciados; también concluyen que hay que buscar motivos en las diferencias culturales entre los países. Quevedo Gutiérrez et al. (2023) presentan un estudio en el que pedían a estudiantes de 6º de primaria y 1º de ESO plantear un problema que se resolviera mediante la operación $2 - 3 = -1$. En el artículo analizan las características matemáticas, contextuales, etc. de los diferentes tipos de enunciados propuestos. Torres et al. (2024) se sitúan en la difusa frontera entre los pensamientos aritmético y algebraico para analizar las resoluciones por un estudiante de 2º de primaria de un problema de generalización funcional del tipo de caja negra (entra una cantidad y sale otra, sin saber qué transformación se ha realizado). El artículo muestra la variación en la forma de razonar del estudiante durante la intervención y el paso, mediante un proceso inductivo, de un pensamiento aritmético inicial a otro funcional. González-Forte et al. (2020, 2022a, 2022b, 2023) estudian la comprensión de estudiantes de secundaria de las operaciones con números racionales y describen sus formas de razonar erróneas ("natural number bias" y "gap thinking") al comparar los tamaños de números racionales, indicando la resistencia al cambio de estas formas de razonar.

2.2. Pensamientos algebraico y funcional, álgebra y funciones

El estudio del álgebra y de las funciones son los dos bloques de contenidos más importantes en los currículos de educación secundaria en España. En nuestro país, como en casi todo el mundo, el estudio del álgebra se inicia en los últimos cursos de primaria o los primeros de secundaria y el estudio de las funciones se inicia algunos cursos después. La investigación en el aprendizaje de estas áreas de las matemáticas escolares es intensa y muy diversa, pues incluye desde el pensamiento algebraico o funcional propio de los estudiantes de educación infantil y primeros cursos de educación primaria hasta el estudio de los contenidos típicos de la educación secundaria superior y de especialidades universitarias relacionadas con las matemáticas, ingenierías y otras especialidades científicas. Consideramos el pensamiento funcional como "un componente del pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre funciones y los elementos que las constituyen" (Cañadas y Molina, 2016, p. 211).

En el conjunto de publicaciones de la última década sobre pensamiento algebraico que hemos identificado, destacan el grupo del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y el grupo de las universidades de Valencia y Castilla-La Mancha (que también ha realizado estudios basados en el uso de software educativo, comentados en la sección 5).

El grupo de la Universidad de Granada tiene una larga trayectoria de investigación sobre pensamiento algebraico en la que han abordado diversas cuestiones, como la traducción de enunciados verbales a expresiones algebraicas (Castro et al., 2022; Rodríguez-Domingo et al., 2015) y significados de los símbolos algebraicos (Cañadas et al., 2018; Fernández-Millán y Molina, 2016).

En la Universidad de Valencia, diversos estudios se han centrado en el uso de los problemas de patrones para introducir a los estudiantes al álgebra. Arbona et al. (2017) y Gutiérrez et al. (2018a) han presentado datos de un estudio longitudinal de tres años, en 4º, 5º y 6º de primaria, en el que analizaron el progreso de los estudiantes de un curso al siguiente en sus formas de generalización y de expresión (verbal o algebraica) de las generalizaciones que habían realizado. Sus resultados indican que los estudiantes de estos cursos pueden aprender a generalizar, describir verbalmente las relaciones entre las variables que intervienen en los problemas y, finalmente, producir expresiones algebraicas que representan esas generalizaciones y en las cuales las letras tienen significado.

La mayoría de los libros de texto españoles presentan expresiones algebraicas desde el principio de la primera lección de álgebra, esperando que los estudiantes sean capaces de darles significado a las expresiones y a las letras que las forman (normalmente x, y, z) por sí mismos. Sin embargo, las investigaciones muestran que brindar a los estudiantes contextos significativos les ayuda a comprender el significado algebraico de letras y otros símbolos y las diferencias respecto de la aritmética. Pedir expresiones verbales para las generalizaciones producidas, expresiones verbales-simbólicas abreviadas y, finalmente, expresiones algebraicas significativas (por ejemplo, escribir *m* para "minuto") puede ayudar a los estudiantes para que las letras y las operaciones adquieran significado para ellos (Gutiérrez et al., 2018a).

Otras investigaciones se han centrado en diferentes aspectos del aprendizaje del álgebra a lo largo de primaria y secundaria, tales como el uso de los problemas de patrones (Callejo et al., 2016), conversiones entre expresiones verbales y expresiones algebraicas por estudiantes de ESO (Castro et al., 2022), lenguaje de los enunciados verbales (Soneira et al., 2023) y de los profesores (Planas, 2021), inecuaciones (Pacheco et al., 2023), interpolación (Berciano Alcaraz et al., 2015) o niveles de algebrización (Godino et al., 2015).

El grupo de las universidades de Valencia y Castilla-La Mancha ha realizado investigaciones sobre el manejo de expresiones algebraicas en secundaria (Soneira et al., 2018a, 2023) y formación inicial de profesorado de primaria (González-Calero et al., 2015; Soneira et al. 2018b). Soneira et al. (2018a y 2023) analizan la influencia de diferentes elementos en los enunciados de problemas de edades en su resolución algebraica, en relación con la dificultad para convertir el enunciado verbal en expresiones algebraicas correctas y, en particular, con la presencia de errores debidos al uso de la misma letra (incógnita) para referirse a cantidades diferentes (p. ej., usar x para referirse a la edad actual de una persona y a su edad dentro de varios años). Entre las conclusiones, destacan que estos errores han sido los más frecuentes y que parecen deberse a que los estudiantes leían los enunciados a trozos, con lo que no tenían una visión del conjunto. Otros investigadores han trabajado con estudiantes de secundaria y conceptos funcionales típicos de este nivel educativo, como límites (Fernández Plaza et al., 2015) o derivadas (Fuentealba et al., 2017, 2019, 2022; Vargas et al., 2020).

En cuanto al estudio del pensamiento funcional, diversas publicaciones se centran en estudiantes de primaria y sus capacidades para representar relaciones funcionales (Ramírez et al., 2022; Pinto et al., 2022), para expresarlas verbalmente (Cañadas et al., 2016), para dar significados a las letras (Ayala-Altamirano y Molina, 2019 y 2021), así como en sus estrategias de manejo de relaciones funcionales (Morales Merino et al., 2018).

A continuación, comentamos con detalle varias investigaciones que ejemplifican la diversidad de líneas de investigación, que incluyen el pensamiento funcional (o variacional) de estudiantes de primeros cursos de educación primaria, estudiantes de precálculo de los últimos cursos de educación secundaria y estudiantes de postgrado de matemáticas.

Cañadas et al. (2024) realizan un estudio para explorar las capacidades de los estudiantes españoles de 3º y 4º de educación primaria (8 a 10 años de edad) para dibujar y leer representaciones cartesianas de funciones lineales. Dicho estudio tiene un antecedente en Pérez-Martos et al. (2023). Los autores elaboran un marco teórico formado por tres elementos principales: el concepto de construcción de gráficos cartesianos, que entienden como un resultado de un proceso de generalización que se exterioriza mediante su representación gráfica; criterios de análisis de los dibujos de gráficos hechos por los estudiantes, propuestos por Friel et al. (2001) y Kosslyn (1994). Los autores informan de que no han encontrado ningún marco de referencia que permita analizar la lectura de representaciones cartesianas de funciones por estudiantes de educación primaria, por lo que se basan en un marco definido por Arteaga et al. (2021a) para investigar la lectura de diagramas estadísticos por niños del mismo nivel educativo. Este marco presenta cuatro niveles de lectura de gráficos, que Cañadas et al. adaptan al contexto de los diagramas cartesianos; los niveles son: leer los datos, leer dentro de los datos, leer más allá de los datos y leer detrás de los datos.

En lo referente al dibujo de los ejes de las gráficas, la mitad de los estudiantes de 3º curso y cinco estudiantes de 4º curso fueron capaces de dibujarlos sin ayuda desde el principio, mientras que los demás estudiantes necesitaron resolver actividades previas de introducción; destaca en particular que algunos estudiantes intercambiaron las posiciones de los ejes de abscisas y ordenadas. La escritura de las escalas de los ejes supuso una dificultad alta para los estudiantes, especialmente por el papel del origen de coordenadas y sus valores (0, 0). Los estudiantes presentaron una variedad de errores: empezar las escalas en 1 en vez de en 0; asignar unas veces el primer valor de la escala a la intersección de los ejes y otras veces no; invertir la escala, empezándola en el extremo del eje opuesto al origen. Otro aspecto analizado es la forma de escribir las escalas, es decir, qué valores escribieron los niños, qué separaciones había entre ellos, etc. Algunos estudiantes, de 3º y 4º grados, consideraron los ejes como líneas numéricas, que habían utilizado desde que empezaron a estudiar aritmética, y los representaron escribiendo la secuencia numérica con espacios iguales entre los números. Sin embargo, otros estudiantes escribieron los números de maneras particulares, por ejemplo, escribiendo solo los números que están representando y en el mismo orden en que aparecen en la tabla de valores, aunque no sea su orden correcto. En cuanto a la lectura de gráficas dadas por los investigadores o dibujadas por el propio estudiante, esta actividad resultó mucho más fácil para los estudiantes que dibujarlas. Los autores diferencian la lectura de los elementos de la gráfica (valores de las escalas y de puntos), tanto presentes en ella como no dibujados. Una conclusión global que se puede derivar de este estudio es que los estudiantes de 3º y 4º grados de educación primaria pueden interactuar con gráficas cartesianas de funciones lineales, incluso sin hacer enseñanza explícita previa, pero con ciertas limitaciones en el conjunto numérico disponible para el dominio y el rango de las funciones.

El estudio realizado por Santos et al. (2024) se centra en la enseñanza y el aprendizaje de la derivada en secundaria. Es de carácter teórico y tiene como objetivos: hacer una revisión de reformas curriculares recientes; recopilar publicaciones recientes de investigación en educación matemática que informan sobre el desarrollo de la comprensión y las dificultades que experimentan los estudiantes; e identificar fortalezas del uso sistemático de un software de geometría dinámica (SGD) por los estudiantes en su aprendizaje del concepto de derivada. El artículo está dividido en varias partes, dedicadas a diferentes tipos de contextos de enseñanza de la derivada apoyados en el SGD. Los autores también presentan investigaciones en las que se propone a los estudiantes resolver problemas no rutinarios sobre derivación de funciones, como encontrar los valores a y b para que la recta $2x + 3y = a$ sea tangente a la curva $y = bx^2$ (Selden et al., 1989) o, dados una circunferencia fija de centro O, un punto P exterior, las dos tangentes a la circunferencia que pasan por P y sus puntos de tangencia A y B, analizar la variación del área del triángulo AOB al moverse P. No son problemas nuevos, pero siguen siendo interesantes para la enseñanza.

Existe un amplio consenso en las publicaciones consultadas por Santos et al. (2024) en que los cursos de cálculo de educación secundaria suelen estar principalmente orientados al aprendizaje memorístico y de algoritmos rutinarios. Esto les plantea dudas sobre la utilidad de estos cursos para fundamentar los cursos universitarios de cálculo (Frank y Thompson, 2021). Sin embargo, las investigaciones que presentan Santos et al.(2024) sobre el uso del SGD muestran que este entorno puede romper con dicho tipo de enseñanza y fomentar el aprendizaje comprensivo. Esto lleva a los autores a plantear, entre otras conclusiones: que los estudiantes de educación secundaria necesitan ampliar y profundizar su formación en pensamiento variacional para lograr, en particular, una comprensión adecuada del concepto de derivada; y que una enseñanza adecuada del cálculo pasa por dilemas aplicar sus concepciones de los diferentes componentes, propiedades, relaciones, etc. del cálculo.

Otra investigación dedicada al pensamiento funcional se centra también en el análisis de los procesos de comprensión de la derivada, pero está en el contexto de un curso de postgrado. Trigueros et al. (2024) presentan resultados de un estudio que analiza el trabajo de varios estudiantes al abordar problemas complejos en cuyas soluciones tienen que establecer relaciones entre derivadas. El cálculo diferencial es un área de las matemáticas cuya enseñanza y aprendizaje han recibido atención por parte de los investigadores en educación matemáticas desde hace muchos años. No obstante, Trigueros et al. han identificado poca información sobre la enseñanza para preparar a los estudiantes a abordar las demandas de las matemáticas avanzadas, en particular del cálculo diferencial, y sobre la comprensión por los estudiantes de las relaciones matemáticas entre diferentes conceptos.

La teoría APOE es el marco teórico de Trigueros et al. (2024). Los autores presentan con bastante detalle sus componentes (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) y los utilizan para analizar los datos experimentales recopilados. En particular, caracterizan tres etapas de desarrollos de Esquemas, intra, inter y trans, aplicadas a los Esquemas relativos a las funciones derivadas y a las informaciones sobre intervalos de las derivadas. La teoría APOE ha mostrado, desde su creación (Dubinski, 1991), ser un marco muy adecuado para las investigaciones sobre cálculo avanzado. En este contexto, Trigueros et al. plantean como objetivos: i) analizar las formas de resolución de problemas de cálculo diferencial complejos en los que intervienen representaciones gráficas por estudiantes de postgrado de matemáticas y ii) identificar el apoyo que pueden presentar los Esquemas gráficos de la derivada (EGD) a los estudiantes para que identifiquen y usen interacciones entre propiedades e intervalos de las curvas para generar Esquemas. La principal aportación del artículo es informar sobre la comprensión por los estudiantes de matemáticas de postgrado del contexto de las representaciones gráficas de las derivadas. Su experimento de enseñanza se llevó a cabo con 26 estudiantes graduados en matemáticas y enrolados en un máster de educación matemática. Los autores diseñaron dos cuestionarios individuales de papel y lápiz y una entrevista semiestructurada. El primer cuestionario consistió en un problema dirigido a identificar la evolución de los EGD de los estudiantes. Los estudiantes que mostraron un nivel de construcción de sus EGD del tipo trans-intervalos y trans-derivadas respondieron el segundo cuestionario, formado por tres problemas que piden analizar las gráficas de funciones usando sus derivadas. Finalmente, los estudiantes que resolvieron correctamente los tres problemas fueron entrevistados; la entrevista consistió en resolver dos problemas en los que es necesario relacionar una función y sus derivadas segunda y tercera. Las entrevistas permitieron observar, describir y analizar el Esquema gráfico de la derivada de cada estudiante, lo cual supone un aporte interesante al conocimiento actual de las complejidades de las funciones en los cursos universitarios de cálculo avanzado, desde la óptica de la teoría APOE.

Este conjunto de investigaciones permite observar, independientemente de los marcos teóricos usados, las principales dificultades de los estudiantes, como son los significados de las letras o del signo = y las principales aproximaciones didácticas al inicio del estudio del álgebra, como la presentación del álgebra como aritmética generalizada.

Por su parte, Gascón (2024) presenta una panorámica de las investigaciones sobre álgebra elemental, modelización algebraico-funcional y cálculo diferencial llevadas a cabo por miembros del grupo español que trabaja en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) desde finales de los años 1990. Estos trabajos se centran en el estudio de las organizaciones matemáticas escolares que componen el saber por enseñar y en la identificación de fenómenos didácticos que permitan explicar las dificultades de estudiantes y profesores en su aprendizaje y enseñanza. Para analizar las características de las matemáticas que se enseñan y de las formas de enseñarlas, se elaboran entonces reconstrucciones o modelos alternativos de las matemáticas escolares. En el caso de la enseñanza del álgebra elemental y las funciones, el modelo propuesto se expresa en forma de procesos de modelización algebraico-funcionales que conectan los inicios del álgebra con los modelos funcionales discretos y continuos, incluyendo en este proceso la construcción de los números enteros (Cid et al., 2020).

2.3. Pensamiento geométrico y visual, incluyendo argumentación/demostración

La investigación sobre conceptos y procesos geométricos tiene varios focos de atención, entre ellos el desarrollo del pensamiento geométrico, de la argumentación/demostración y de la capacidad de visualización. En relación con el pensamiento geométrico, una secuencia de experimentos ha permitido identificar niveles de sofisticación en la comprensión del concepto de polígono y de clases de polígonos por niños/as de 3º de Educación Primaria (Bernabeu et al., 2021a, 2021b, 2022), así como factores en la enseñanza que influyen en esa comprensión (Bernabeu et al., 2024).

La enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática se pueden hacer en el contexto de cualquier área de las matemáticas de educación secundaria y universitaria, pero la geometría tiene algunas características que la diferencian de las demás áreas matemáticas (Sinclair et al., 2017) y la hacen más idónea para iniciar la enseñanza. Una de estas características diferenciadoras es que, al empezar a aprender a demostrar, los estudiantes necesitan el apoyo de elementos visuales para identificar propiedades, organizar argumentos y expresar demostraciones. Por ello, es también interesante investigar sobre los aportes que la visualización puede hacer para facilitar el aprendizaje de la demostración. Esta conexión entre visualización y demostración está en el centro de la dialéctica entre diagramas (representaciones físicas de objetos geométricos) y figuras (entidades ideales que corresponden a las definiciones de esos objetos), entre lo real tangible y lo ideal (Laborde, 2005), y gana actualidad y relevancia cuando la enseñanza se basa en entornos de geometría dinámica.

Diversos grupos desde las universidades de Alicante, Gerona, Granada, Santiago de Compostela, Sevilla, Valencia y Zaragoza, entre otras, han investigado distintas facetas de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración y/o argumentación en matemáticas, en la mayoría de los casos en entornos con soporte geométrico. Estas investigaciones usan diferentes marcos teóricos, algunos más generales, como los niveles de Van Hiele, y otros más específicos, como las categorías de demostraciones. Los niveles educativos abordados van desde los primeros cursos de primaria hasta investigadores matemáticos.

Alsina, et al. (2021) analizaron las argumentaciones producidas por estudiantes de 3º de primaria, en su mayoría cortas, simples y tendentes a explicar las acciones realizadas previamente por los niños para resolver actividades de tipo STEM, con escasa presencia de otras funciones como la de refutar. En el otro extremo, Fernández-León et al. (2021), como otros investigadores españoles e internacionales, exploraron los procesos de razonamiento y los procedimientos de trabajo de profesores universitarios en sus investigaciones matemáticas. Ramírez-Uclés et al. (2018) y Ramírez-Uclés y Ruiz-Hidalgo (2022) exploraron las habilidades de conjetura y demostración al resolver problemas de geometría de estudiantes, de final de la primaria y principio de la ESO, que participan en los talleres de ESTALMAT. Sua et al. (2024) presentaron un experimento basado en GeoGebra en el que los estudiantes, mediante pensamiento analógico, debían construir objetos similares en el plano y el espacio, por ejemplo, construir la mediatriz de un segmento en 2D y su plano mediador en 3D; el razonamiento analógico ayudó a los estudiantes a descubrir conceptos de geometría espacial desconocidos para ellos y a desarrollar demostraciones de las propiedades involucradas en 3D.

También Prior y Torregrosa (2020) analizaron las respuestas de estudiantes de ESO a varios problemas geométricos de demostrar, tomando como marco teórico la combinación del razonamiento configural y el espacio de trabajo matemático. El artículo muestra los diferentes estilos de razonamiento usados para realizar las demostraciones pedidas en los problemas, que van desde demostraciones naifs, consistentes en mostrar un ejemplo, a demostraciones empíricas más sofisticadas. Saorín et al. (2019a, 2019b) analizaron la relación entre el razonamiento configural (RC) y la organización discursiva en procesos de prueba en contextos geométricos, mientras que Llinares y Clemente (2019) caracterizan las transiciones desde el razonamiento configural al razonamiento deductivo en la resolución de problemas de probar en geometría. Richard et al. (2016) usan también el marco del espacio de trabajo matemático y proponen enseñar a demostrar mediante la resolución de problemas geométricos de Clairaut, para mostrar la utilidad de dicho marco teórico para analizar la actividad demostrativa de los estudiantes.

Manero y Arnal-Bailera (2021) trabajaron con futuros profesores de matemáticas de secundaria y analizan sus procesos de demostración mediante los niveles de Van Hiele. Obtienen diversos estilos de respuestas, llamando la atención que algunos futuros profesores muestran un nivel de razonamiento en demostración inferior al que tienen parte de los estudiantes de bachillerato.

Otra línea de investigación productiva y prometedora es la relacionada con la demostración automática. Recio et al. (2019) utilizaron las habilidades de GeoGebra para verificar automáticamente propiedades de las construcciones para iniciar a futuros profesores canadienses en la demostración matemática y su enseñanza.

El equipo investigador más destacado en los temas de visualización, demostración y su intersección es el de la Universidad de Valencia, que incluye también a colegas de diversas universidades españolas y latinoamericanas. Además de numerosas presentaciones en los simposios de SEIEM y otros congresos, así como diversas tesis doctorales defendidas en los últimos 15 años, entre las publicaciones de este grupo podemos destacar diversos trabajos: Guinjoan et al. (2015) analizan las respuestas de estudiantes que han alcanzado distintos niveles de éxito en las pruebas Cangur, para identificar las diferentes estrategias de resolución de los problemas, algunas de los cuales incluyen razonamiento deductivo (en la sección 4.2 daremos más detalles). Fiallo y Gutiérrez (2017) presentan resultados de la tesis doctoral del primer autor, analizando el aprendizaje de la demostración por estudiantes colombianos de secundaria; el artículo muestra cómo las fases ascendente y descendente, la unidad o ruptura cognitiva de los teoremas y el diagrama de Toulmin forman un marco teórico idóneo para analizar las resoluciones de problemas que formaban parte de un curso experimental de trigonometría. Mora et al. (2024a) han planteado a estudiantes de varios cursos de primaria, desde 2º hasta 6º, diferentes tipos de problemas de visualización que requieren crear imágenes mentales de proyecciones ortogonales no accesibles, manipular y comparar de módulos de cubos y calcular la cantidad de piezas de un módulo de cubos. Para analizar las respuestas, determinaron un detallado conjunto de descriptores de la capacidad de visualización. Los resultados de estos experimentos indican que los diversos tipos de problemas requieren el uso de diferentes formas de razonamiento visual.

Gutiérrez et al. (2018b) y Ramírez et al. (2016) presentaron un experimento basado en la resolución de un problema de orientación espacial y visualización por dos estudiantes con alta capacidad matemática (ACM), que debían comunicarse uno al otro verbalmente información visual y, al mismo tiempo, ofrecer argumentos que justificaran que sus afirmaciones o propuestas eran válidas. Sua et al. (2021) informaron sobre las estrategias de varios futuros profesores de primaria al resolver dos problemas de visualización en el entorno de realidad aumentada de GeoGebra.

Blanco et al. (2024a) informan sobre la investigación en educación matemática española enfocada a explorar la conexión entre visualización y argumentación, y cómo la primera ayuda a los estudiantes a desarrollar sus habilidades de argumentación. Los autores han elegido dos marcos teóricos que permiten trabajar de manera conjunta en los dos componentes, visualización y argumentación; estos marcos son el enfoque ontosemiótico (EOS) y el razonamiento configural (RC). Los autores empiezan presentando sus definiciones de visualización en matemáticas y de argumentación matemática. Para la visualización, adoptan la definición de Gutiérrez (1996), que alude explícitamente a la importancia y utilidad de implicar la visualización en la realización de argumentaciones y demostraciones.

En la literatura de educación matemática existe un debate permanente sobre los significados de "argumentación" y "demostración" y las relaciones entre ambos constructos. Blanco et al. (2024a) toman partido por diferenciarlos, pues su conceptualización de argumentación matemática, basada en Molina et al. (2019) y Camargo et al. (2024), la presenta como un proceso, individual o colectivo, que, siguiendo ciertas reglas aceptadas, lleva a conclusiones mutuamente aceptables sobre la verdad o falsedad de una afirmación o acción. Los constructos de argumentación y visualización aluden uno al otro, incluso en sus definiciones. Blanco et al. exploran esta conexión en el artículo, presentando resultados de investigaciones que analizan el papel de la visualización en la creación de argumentos para realizar tareas de conjetura y demostración, y el papel de la argumentación en la resolución de tareas que promueven la visualización. La primera parte del artículo está dedicada a presentar las posiciones y significados de visualización y argumentación en los dos marcos teóricos mencionados antes (EOS y RC). Un componente central del EOS son seis "objetos" que intervienen en la actividad matemática, uno de los cuales son los argumentos, que se usan para validar y dar soporte a afirmaciones matemáticas. En este marco, la visualización se interpreta basándose en la definición de Gutiérrez (1996) y se analiza desde el punto de vista de cada uno de dichos objetos (Godino et al., 2012). El marco del RC se basa en las aprehensiones de Duval y considera la elaboración de argumentaciones ligada a las aprehensiones discursiva y operativa. Además, entiende la visualización como la transferencia de objetos, conceptos, fenómenos, procesos y sus representaciones a algún tipo de representación visual y viceversa. Se observa que las definiciones de ambos marcos señalan como elemento central el movimiento bidireccional entre información no figurativa e información visual. Blanco et al. (2024a) analizan las aportaciones de diversas publicaciones, organizándolas en diferentes grupos, según que sus aportaciones tengan que ver con el soporte argumentativo en las tareas de tipo visual, para explicar y justificar las imágenes creadas, o el soporte visual en las tareas de conjetura y demostración, para la elaboración de argumentos durante su resolución.

2.4. Pensamiento probabilístico y sentido estocástico

Es conocido que los temas de probabilidad y estadística ocupan la última posición en las prioridades de los profesores de primaria y que tampoco son un tema prioritario para los profesores de secundaria. Esto hace que la investigación didáctica en estos temas sea más escasa que en otros como álgebra, aritmética o funciones. No obstante, en España ha habido siempre, desde los primeros años de existencia del área de conocimiento de la didáctica de la matemática, interés por la investigación en didáctica de la probabilidad y, más recientemente, en didáctica de la estadística. Buena parte de esta investigación se centra en los (futuros) profesores de matemáticas de primaria y secundaria; estos trabajos están recogidos en la sección 3.

El principal grupo de investigación español en este tema tiene su centro en la Universidad de Granada y está liderado por Carmen Batanero. Las publicaciones que se pueden encontrar en las revistas y bases de datos nacionales e internacionales están en su mayoría firmadas por Batanero u otros miembros centrales de su equipo, como María M. Gea o Nuria Begué. Más recientemente, el grupo liderado por Àngel Alsina en la Universidad de Girona también está empezando a desarrollar una línea de investigación centrada en la probabilidad y la estadística. Así mismo, encontramos otras publicaciones que parecen ser productos de investigaciones puntuales, pero que son interesantes.

En lo referente a la enseñanza y el aprendizaje de las probabilidades, Batanero y Álvarez-Arroyo (2024) presentan una revisión de la literatura internacional de los seis últimos años, que incluye algunas publicaciones de autoría española. Además, Batanero et al. (2021) ofrecen una síntesis de la literatura internacional sobre razonamiento probabilístico de niños de hasta 7 años de edad. En ella revisan la literatura y la organizan alrededor de diferentes temáticas, como son conceptos o relaciones probabilísticas, combinatoria y procesos cognitivos asociados a las anteriores. En el mismo contexto escolar, Vásquez y Alsina (2019) presentan experimentos con estudiantes de infantil para analizar sus concepciones de azar y probabilidad. Sus resultados confirman que los estudiantes de estas edades necesitan, igual que para cualquier otro contenido matemático, un fuerte apoyo visual y manipulativo para realizar experiencias y desarrollar su pensamiento probabilístico. Además, Vásquez Ortiz et al. (2020) ofrecen una pauta para analizar las clases de probabilidad en primaria basándose en cinco dimensiones: tipos de tareas planteadas; tipos de razonamiento probabilístico necesarios para resolver las tareas; conexiones entre elementos probabilísticos que surgen con las tareas; comunicación en diálogos para compartir ideas y avanzar en el aprendizaje; y uso del lenguaje probabilístico. El artículo es de carácter predominantemente metodológico, pues se centra en mostrar el proceso de creación, validación y mejora del instrumento.

En cuanto a otras investigaciones específicas, estas recorren los diferentes niveles educativos, desde la primaria superior hasta la formación de profesorado. Hernández-Solís et al. (2023) y Batanero et al. (2023) presentan un estudio que analiza el uso de la proporcionalidad en la resolución de problemas aritméticos escolares ordinarios y en problemas de comparación de probabilidades. La muestra está formada por estudiantes españoles de 6º de primaria a 4º de ESO y costarricenses de los cursos equivalentes. Los resultados muestran diferencias en el uso del razonamiento proporcional según que se trate de problemas de probabilidad o aritméticos, las cuales tienen que ver con la mayor o menor complejidad de las proporciones de los contextos probabilísticos. Alonso-Castaño et al. (2021), trabajando con futuros profesores de primaria en el contexto de una actividad de invención de problemas, comprueban que la mayoría de los participantes manejan adecuadamente la comunicación y la argumentación, pero una gran parte de los participantes tenían importantes carencias de conocimientos matemáticos necesarios para resolver los problemas que creaban.

En Batanero et al. (2018) podemos ver los resultados de un estudio centrado en las pruebas de acceso a las universidades españolas. Definen diferentes variables de análisis, tales como los contenidos probabilísticos puestos en juego en las resoluciones, los tipos de experimentos y muestras, los contextos de los problemas y las formas de presentación de los datos. Con un objetivo similar, aunque contexto y metodología diferentes, Rubio-Chueca et al. (2021) analizan los problemas planteados en olimpiadas matemáticas regionales y nacionales españolas. Estos autores evalúan el nivel de demanda cognitiva (Smith y Stein, 1998) de los problemas y concluyen que la gran mayoría de ellos están en los niveles más altos de demanda cognitiva, es decir, que son adecuados para las olimpiadas. También concluyen que el lenguaje de la mayoría de los problemas está basado en terminología matemática y pocos presentan contextos cotidianos; además, presentan más frecuentemente la información de manera gráfica (en particular mediante diagramas de árbol) que tabular.

En lo referente a la enseñanza y el aprendizaje de la estadística, también destaca el grupo de la Universidad de Granada, por la cantidad e importancia de su producción. Sus publicaciones abordan el análisis didáctico de diferentes componentes de la estadística, como las distribuciones muestrales (Batanero et al., 2020; Begué et al., 2023), diversas medidas estadísticas que se estudian en primaria y secundaria, como la media (Begué et al., 2018; Rondero y Font, 2015), y la mediana (Madrid et al., 2022). También han analizado las formas de presentar diferentes tipos de gráficos estadísticos (histogramas, lineales, de sectores, etc.) en los libros de texto de secundaria de Chile (Arteaga et al., 2021a) y Costa Rica (Arteaga et al., 2021b). En estos artículos, además, presentan cuatro niveles de complejidad semiótica (Arteaga et al., 2021a) y cuatro niveles de lectura de los gráficos (Arteaga et al., 2021b).

En cuanto a los libros de texto españoles de primaria, Gea et al. (2022) han estudiado las actividades cuyas resoluciones incluyen el uso de tablas estadísticas planteadas en libros de texto de los seis cursos de primaria. Esta línea de investigación continúa en Pallauta et al. (2023a), donde las autoras clasifican los diferentes tipos de tablas estadísticas según su complejidad semiótica y presentan un cuestionario para identificar la comprensión por los estudiantes de los tipos de tablas identificados previamente. También en relación con el uso de tablas estadísticas por los estudiantes de secundaria, pero con otro enfoque, Pallauta et al. (2023b) proponen usar los niveles de algebrización elemental previamente definidos en otras publicaciones para analizar los requisitos de uso de lenguaje algebraico por los diferentes tipos de tablas estadísticas, pues estas pueden parecer visualmente similares, pero tener muy diferentes requerimientos de complejidad de razonamiento de los estudiantes.

2.5. La historia de las matemáticas y de su enseñanza como herramienta didáctica

En España hay una larga tradición de investigación didáctico-histórica, con cuatro focos iniciales en las universidades de Valencia, Salamanca, Córdoba y Murcia, que posteriormente se extendieron a otras universidades, como la de Zaragoza. A lo largo de los años, estos estudios han abarcado todas las áreas de contenidos curriculares. Algunas investigaciones se centran en analizar libros de texto (o tratados con finalidad educativa) de épocas anteriores. Así, Madrid et al. (2023b) consultan libros de aritmética del siglo XVI para analizar las conexiones que hacen con los contextos cotidianos. Madrid et al. (2023a) informaron sobre la introducción del álgebra en España en el siglo XVI y Ruiz-Catalán et al. (2024) han presentado los procedimientos de resolución de ecuaciones introducidos en el siglo XVII. Sánchez y González (2017, 2019), en relación con la enseñanza de la geometría analítica en el siglo XIX, analizaron algunos currículos y libros de texto de esa época y aspectos más específicos como la interpretación de las soluciones negativas. Más allá de los libros de texto, también se han analizado manuales históricos de matemáticas (Muñoz-Escolano y Oller-Marcén, 2020; Oller-Marcén y Muñoz-Escolano, 2019) y estudiado la presencia de las matemáticas en revistas pedagógicas antiguas o en prensa generalista (Muñoz-Escolano et al., 2022; Oller-Marcén, 2023). Otros investigadores han informado sobre elementos de la historia de las matemáticas o de su enseñanza que han influido en la enseñanza de las matemáticas posterior, como es el caso de Puig (2022), que ha analizado la evolución del concepto de estructura algebraica hasta llegar a las matemáticas actuales.

En la Universidad de Murcia se inició en los años 1990 una línea de estudios sobre la enseñanza de las matemáticas en las Escuelas Normales (Carrillo, 2004; Sánchez-Jiménez y Dólera, 2023). Algunas de estas investigaciones han utilizado la TAD como marco analítico complementario para sus estudios históricos sobre la educación matemática y la formación del profesorado (Sánchez-Jiménez, 2020). Se establecen así vínculos productivos entre la investigación histórica y la didáctica, ampliando el ámbito de estudio de esta última más allá de las instituciones contemporáneas e identificando fenómenos que han condicionad nuestras formas actuales de operar (Carrillo et al., 2018). La línea de investigación seminal se extendió al movimiento de la Escuela Nueva en España (Sánchez-Jiménez et al., 2020) y a la enseñanza de las matemáticas en bachillerato en el siglo XX, con la figura especial de Pedro Puig Adam (Dólera y Sánchez-Jiménez, 2024).

Finalmente, la utilización de manuales y publicaciones periódicas antiguas como herramienta para la formación de profesorado surge como línea de trabajo por desarrollar (Arnal-Bailera y Oller-Marcén, 2020).

3. INVESTIGACIÓN SOBRE LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS

Para la identificación de focos en la investigación sobre el profesor (formación inicial y desarrollo profesional) y la práctica del profesor hemos tomado como referencia inicial las actas de los simposios de la SEIEM desde 2018 (cinco simposios), en el trabajo de síntesis realizado en la presentación de la comunidad de investigadores españoles en el PME45-2022 en Alicante y los focos de atención identificados los hemos complementado con la reseña de artículos publicados en bases de datos internacionales. De esta manera, identificamos focos en la investigación en educación matemática sobre y con el profesor (Badillo et al., 2019; Llinares, 2018, 2023) y que nos permiten ejemplificar algunos de los problemas de investigación recurrentes mediante investigaciones específicas. En la última parte de esta sección ejemplificamos los focos con una presencia mayoritaria a través de algunas investigaciones empíricas que describimos brevemente y que forman parte de la propuesta de Special Issue de la revista ZDM mencionada en la introducción.

3.1. La visibilidad en SEIEM y bases de datos internacionales

3.1.1. Desde los simposios de la SEIEM (2018-2023)

En los últimos años, ha habido dos simposios de la SEIEM con seminarios de investigación sobre la investigación sobre y con el profesor de matemáticas. En el Simposio de 2018 (Gijón), el seminario titulado “Conocimiento y competencia docente: estableciendo relaciones entre perspectivas teóricas”, y en el Simposio de 2023 (Logroño) el titulado “Retos de la formación del profesorado ante las exigencias de los nuevos currículos”. Además, en estos últimos cinco simposios (en 2020 no hubo Simposio debido al COVID) se presentaron comunicaciones de investigaciones empíricas que desde perspectivas diversas han estado aportando nuevo conocimiento sobre la formación del profesorado de matemáticas y su práctica (115 de 238) (Tabla 1).

Tabla 1. Comunicaciones en Seminarios SEIEM con foco profesor

Año	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Comunicaciones Foco profesor/total	22/50	25/46		22/66	21/48	25/55

En el simposio de la SEIEM de 2018 (Gijón) se realizó un seminario de investigación con el título “Conocimiento y competencia docente: estableciendo relaciones entre perspectivas teóricas”. El seminario se organizó alrededor del análisis de un mismo conjunto de evidencias (una narrativa de una estudiante para maestra de educación primaria escrita durante el periodo de prácticas) desde diferentes perspectivas teóricas. El objetivo del seminario era ejemplificar diferencias y posibles complementariedades que se podían generar desde diferentes perspectivas teóricas para comprender mejor el aprendizaje y desarrollo de competencias profesionales en los estudiantes para docentes (en este caso maestros de educación primaria). Se ejemplifican tres perspectivas teóricas. Dos procedentes de modelos del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK y Modelo de conocimiento y competencias didáctico-matemáticas desde el EOS, y una tercera derivada de la perspectiva de la “racionalidad de la práctica”) ejemplificada a través de la conceptualización de la competencia docente del profesor de matemáticas “mirar profesionalmente la enseñanza de las matemáticas” (como un proceso de razonamiento sobre la práctica realizado en contextos específicos para justificar acciones). El seminario permitió ilustrar cómo se genera nuevo conocimiento sobre el desarrollo de competencias docentes que puede informar y justificar decisiones sobre el diseño de los programas de formación (ejemplificando procesos de transferencia).

El segundo seminario se realizó en el simposio de la SEIEM de 2023 (Logroño), con el título “Retos de la formación del profesorado ante las exigencias de los nuevos currículos”. El seminario presentó aportes de la investigación sobre la formación de profesores ante los cambios curriculares como una manera de evidenciar el valor del conocimiento generado por la investigación para la toma de decisiones en la formación inicial y continua del profesorado. En este seminario se subrayó el papel de los modelos teóricos sobre el aprendizaje de las matemáticas y sobre el conocimiento y práctica del profesor para organizar la formación docente. En particular, se hizo visible la influencia de la perspectiva teórica (la adoptada por los formadores en cada caso particular) en la toma de decisiones que configuran el diseño de los programas (considerando en cada caso las restricciones institucionales). El seminario permitió situar las reflexiones sobre la influencia de los modelos teóricos en las decisiones sobre el diseño y recursos de los programas de formación (o parte de ellos) desde una perspectiva internacional (a través de ejemplos de UK, Italia, Portugal y España).

Estos dos seminarios, realizados en los últimos años, muestran claramente el papel que puede desempeñar instituciones como la SEIEM en relación con instrumentos políticos como la reciente creación de la "Oficina Nacional de Asesoramiento Científico" creada para coordinar el conocimiento y la mejora de la toma de decisiones y el diseño de las políticas públicas para crear espacios que ayuden a fundamentar las decisiones políticas en resultados de investigaciones científicas.

En relación con las comunicaciones, las 115 comunicaciones presentadas en los últimos cinco simposios que podemos situar con un foco considerando al profesor se pueden organizar según la especificidad de su foco mediante un proceso inductivo. Asignar un determinado estudio empírico a un foco determinado lo hemos realizado considerando la cuestión de investigación y el conocimiento generado (y no necesariamente la perspectiva teórica adoptada) (mirando el resumen, la pregunta de investigación y las conclusiones/discusión generada). La asignación no es un proceso simple y tiene limitaciones derivadas de la dificultad de asignar algunos estudios en un foco particular. Sin embargo, esta aproximación permite mostrar a grandes rasgos ciertas tendencias en los focos identificados que reflejan, en cierta manera, las preocupaciones de los investigadores. Estas preocupaciones también responden a la necesidad de responder a preguntas generadas desde la práctica de formar docentes. Siguiendo este proceso, hemos identificado ocho focos específicos que hemos denominado: práctica del profesor, desarrollo profesional, concepciones, dominio afectivo, conocimiento especializado, prácticas profesionales específicas (competencia docente), Formador, y otros (contexto, programa) (Tabla 2). Dos focos centran en mayor medida las investigaciones realizadas (considerando la manera en la que hemos realizado la asignación): investigaciones centradas en el conocimiento específico del docente de matemáticas e investigaciones centradas en el aprendizaje y desarrollo de prácticas profesionales específicas vinculadas a la enseñanza de las matemáticas (considerando la perspectiva de las competencias docente).

Para la descripción de los focos, consideramos algunos descriptores identificados en las propias comunicaciones o generados por la lectura. Dos focos tienen una presencia menor en estos últimos cinco simposios, las comunicaciones sobre el "desarrollo profesional" centradas en el contexto del "análisis de lecciones" (*lesson study*) y el papel de las reflexiones del docente como mecanismo de mejora de la calidad de la enseñanza, y el foco que hemos denominado "otros", que incluye un análisis de programas de formación. Algunos de los descriptores de los otros focos se incluyen a continuación, ordenados por el número de comunicaciones.

Tabla 2. Focos de las investigaciones presentadas en los Simposios de la SEIEM.

FOCOS	**2018**	**2019**	**2021**	**2022**	**2023**	**Total**
Práctica del profesor	2	2	1	2	2	9
Desarrollo profesional	1	1	0	0	0	2
Concepciones	2	3	2	3	3	13
Dominio afectivo	2	1	2	0	1	6
Conocimiento especializado	4	13	8	6	3	34
Prácticas profesionales específicas (Competencia docente)	10	3	9	9	13	44
Formador	0	2	0	1	3	6
Otros	1	0	0	0	0	1
Total	22	25	22	21	25	115

Existen cuatro focos con una presencia media (pero con diferente número de comunicaciones) que son los centrados en el dominio afectivo, el formador de docentes, la práctica del profesor y las concepciones. El foco sobre el "dominio afectivo" incluye investigaciones empíricas centradas en la ansiedad, autoestima, perfil emocional docente y actitudes hacia recursos (introducción de robots) o tópicos específicos (probabilidad). Se analizan aspectos del dominio afectivo como rasgos característicos del perfil profesional de ser docente en matemáticas. Las comunicaciones centradas en el "formador" de docentes se centran en determinar dominios de conocimiento del formador, la explicitación de este conocimiento a través de la reflexión que se manifiesta en la toma de decisiones de los contenidos de la formación inicial, y en caracterizar su práctica como diseñador de los procesos formativos. Las comunicaciones con el foco sobre la "práctica del profesor "se centran en caracterizar el discurso del profesor (la lengua), la naturaleza de las interacciones en la clase (grupo y docente-estudiante, y los procesos de negociación de significados), y sobre las manifestaciones del conocimiento especializado de los docentes (MTSK) en la práctica de enseñar procesos o tópicos matemáticos específicos. El foco "concepciones" agrupa comunicaciones que también recogen términos como creencias y percepciones (por ejemplo, sobre el conocimiento profesional docente, la utilidad de la geometría, sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, sobre los estudiantes como resolutores de problemas, sobre la creatividad, sobre el uso de la historia como recurso, o sobre la inclusión de diferentes perspectivas en la enseñanza de las matemáticas (modelización, pensamiento computacional, competencias lógico-matemáticas).

3.1.2. Desde SCOPUS (2018 - julio 2024)

Los dos focos con una mayor presencia de comunicaciones son el centrado en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, y el centrado en el aprendizaje de prácticas profesionales específicas (competencia docente) vinculadas a la enseñanza de las matemáticas. Estos dos focos de atención también han tenido un reflejo claro en las publicaciones en revistas indexadas, lo que refleja agendas de investigación dinámicas y productivas. Para esta sección, añadimos a la búsqueda inicial indicada en la introducción en SCOPUS el filtro "teacher" y sus variantes ("preservice", "in-service", "prospective", "professional development"), con las palabras clave: "Mathematics AND Education AND Teacher". Del listado producido, elegimos aquellos artículos que tenían el foco sobre el profesor de matemáticas (y no eran editoriales, ni documentos describiendo la perspectiva de la revista) obteniendo 50 artículos (de 140). Se puede observar que la razón entre artículos con foco en aspectos del profesor y el número total de artículos publicados en estas revistas de referencia es similar a lo encontrado en la revisión de las comunicaciones a la SEIEM en los últimos cinco simposios. Además, los focos de estos artículos coinciden con la descripción temática generada en el primer paso de esta revisión, considerando los simposios de la SEIEM. Aunque estos criterios de búsqueda generan algunas limitaciones, permiten construir un mapa aproximado de las preocupaciones de los investigadores españoles en relación con el profesor.

3.2. Conocimiento de matemáticas para la enseñanza (conocimiento especializado) y prácticas profesionales específicas (competencia docente)

Consideradas conjuntamente las aportaciones desde los simposios de la SEIEM y los artículos identificados en las bases de datos usadas en este mapeo los dos focos con más presencia son el centrado en el conocimiento de matemáticas para la enseñanza y el centrado en las prácticas profesiones específicas. Estos dos focos particulares serán ejemplificados en la siguiente sección, desarrollando una mirada detallada y situándonos en relación con una perspectiva internacional.

3.2.1. Una mirada a los focos sobre conocimiento especializado y sobre las prácticas profesionales específicas (competencia docente) del profesor de matemáticas

Dos ideas permiten categorizar al grupo de investigaciones relacionadas con el profesor. Por una parte, la idea de "práctica profesional específica" (*core practice*) (Grossman, 2018; Matsumoto-Royo et al., 2021), y por otra, la idea de conocimiento especializado necesario para enseñar (Shulman, 1986; Lin y Rowland, 2016). En esta sección, desarrollamos inicialmente los apoyos que podemos identificar en estas dos ideas para posteriormente ejemplificar estos focos a través de algunas investigaciones empíricas. Los ejemplos de investigaciones empíricas forman parte de la propuesta del número especial de la revista ZDM dedicado a la investigación española en Educación Matemática.

La primera idea se articula alrededor de la noción de competencia docente, vinculada a la práctica de enseñar matemáticas. La práctica de enseñar matemáticas se puede concebir formadas por un conglomerado de *prácticas profesionales específicas (core practices)* que son reconocidas como relevantes para la enseñanza de la matemática y que se pueden aprender en los programas de formación (Fernández et al., 2020; Moreno et al., 2021; Breda et al., 2017, 2018; Álvarez-Arroyo et al., 2024). Ejemplos de estas prácticas son diseñar tareas matemáticas, planificar lecciones y presentar las tareas en el aula; gestionar discusiones matemáticas productivas en el aula para generar explicaciones matemáticas provechosas; interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes y anticipar diferentes niveles de respuestas a tareas matemáticas; y analizar situaciones de enseñanza tanto propias como observadas (reflexionar sobre la propia práctica) (Márquez, et al., 2021; Montero et al., 2020, 2022; Sánchez-Matamoros et al., 2018, 2019). Estas prácticas profesionales específicas se consideran centrales en la enseñanza de las matemáticas, ya que son necesarias para apoyar el aprendizaje matemático de los estudiantes, y pueden ser consideradas parte de prácticas profesionales más complejas de la profesión de enseñar. La competencia docente se entiende desde esta perspectiva como la realización de acciones fundamentadas en el conocimiento especializado para apoyar los objetivos de aprendizaje matemático, es decir, para apoyar líneas de acción (Callejo et al., 2022). En este sentido, estas prácticas profesionales específicas evidencian usos en contexto de diferentes dimensiones del conocimiento especializado para la práctica de enseñar matemáticas (Carrillo-Yáñez et al., 2018; Pino-Fan et al., 2018).

La relevancia del papel que desempeñan estas prácticas en la enseñanza de las matemáticas traslada la atención hacia encontrar maneras de favorecer su desarrollo en los programas de formación (Grossman, 2018), generando focos específicos de investigación. En particular, la idea de "descomponer la práctica de enseñar matemáticas" en prácticas profesionales específicas, permite generar lenguaje y categorías para discutir y analizar la práctica de enseñar matemáticas, haciendo visibles a los estudiantes para profesores rasgos implícitos de dicha práctica. Es decir, es una manera de hacer visibles a los que quieren ser maestros y profesores de aspectos relevantes de la práctica de enseñar matemáticas, al mismo tiempo que ayuda a los formadores a identificar y pensar en oportunidades de aprendizaje de estas prácticas. En general, las propuestas formativas derivadas de esta perspectiva responden a una "formación basada en la práctica" (*practice-based teacher education*). Esta perspectiva subraya la noción de competencia docente como el uso pertinente del conocimiento para resolver situaciones derivadas de la enseñanza y, como consecuencia, la de intentar diseñar oportunidades para su desarrollo en las propuestas formativas (Barquero et al., 2024; Fernández et al., 2018a). De esta manera, las investigaciones recogidas en esta sección se insertan en procesos formativos que, en cierta medida, buscan describir y comprender el aprendizaje de estas prácticas profesionales específicas (Fernández et al., 2018b). Estos procesos formativos subrayan una estructura de la secuencia de actividades que pretende apoyar los razonamientos (formas de pensar sobre…) de los estudiantes para profesores y profesores (en propuestas de desarrollo profesional), introduciendo información teórica desde la didáctica de la matemática (guías para focalizar lo que hay que observar y apoyar formas de mirar para definir líneas de actuación en la práctica) (Ivars et al., 2018, 2020a, 2020b; Sánchez-Matamoros et al., 2018).

La segunda idea es la caracterización de un conocimiento especializado del profesor de matemáticas y las diferentes dimensiones que lo configuran. Desde los trabajos seminales de Shulman (1986) ha habido un desarrollo importante de modelos teóricos sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas que subrayan la idea de enseñar matemáticas como una profesión (Schwarz y Kaiser, 2019). La importancia de estas actuaciones radica en colocar en el centro de la enseñanza la disciplina a ser enseñada, y, en particular, en hacer conscientes a los investigadores sobre la enseñanza de lo que representa el conocimiento sobre la comprensión de la disciplina, en nuestro caso las matemáticas (Carrillo-Yáñez et al., 2018; Pino Fan, et al., 2018, 2023).

La identificación de dominios del conocimiento necesario para enseñar matemáticas se generó inicialmente a nivel internacional a partir del análisis de la práctica de enseñar matemática e identificando aspectos del conocimiento relevantes para la enseñanza (conocimiento del contenido, conocimiento didáctico del contenido y conocimiento curricular) (Ball et al., 2008; Shulman, 1986). Desarrollos posteriores, muestran que las creencias/concepciones de los profesores sobre el contenido influenciaban las formas en las que enseñaba. Por lo que, en el caso particular de las matemáticas, algunos modelos, como el MTSK, introdujo la noción de creencias sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje permeando el conocimiento del profesor (Carrillo et al., 2018) e identificándose perspectivas alternativas (Scheiner et al., 2019), mientras que el DMKC (Pino-Fan, 2023) enfatizaban la relación del conocimiento con las competencias docentes.

En las investigaciones recogidas en esta revisión, podemos identificar diferentes usos de la idea del conocimiento especializado del profesor centrado en conocimiento de dominios y procesos matemáticos específicos necesarios para la enseñanza (Buforn et al., 2018, 2022); o considerando sus características como variable de entrada al programa de formación (Gorgorio et al., 2021). Un aspecto particular que ejemplificamos es el uso del modelo del conocimiento MTSK como referencia para diseñar tareas en los programas de formación, con el objetivo de favorecer el aprendizaje integrado de diferentes dominios de conocimiento (p. ej., conocimiento de matemáticas y conocimiento sobre el aprendizaje de las matemáticas). Además, se abre el espacio para complementar con otros modelos teóricos (tales como los Espacios de trabajo matemáticos) la manera en la que los estudiantes para profesor pueden llegar a ser conscientes de las relaciones entre la dimensión afectiva y epistemológica como aspecto importante en el conocimiento especializado del profesor (Gómez-Chacón y Marbán, 2024).

3.2.1. Prácticas profesionales específicas en la enseñanza de las matemáticas: Algunos ejemplos

Describimos siete investigaciones con foco en el desarrollo de algunos aspectos de las prácticas profesionales específicas con participantes de diferentes niveles educativos, siendo estudiantes para docentes o docentes en ejercicio.

Alsina et al. (2024) se centran en el análisis del diseño de tareas como una práctica profesional específica que debe ser aprendida por estudiantes para maestras de educación infantil. El objetivo del estudio es identificar características del proceso de diseñar tareas matemáticas que permitan promover procesos matemáticos vinculados al algebra temprana (resolución de problemas, comunicación, representación, conexiones y razonamiento). Los resultados indican que las tareas diseñadas creaban espacios que los docentes podían usar para potenciar la resolución de problemas y comunicación. Los procesos de resolución de problemas en las tareas diseñadas se evidencian en dos aspectos: considerando que las situaciones presentadas son desafiantes para los estudiantes y, que la tarea está planteada (o se dan indicaciones en relación con su gestión) que favorezca el que los estudiantes puedan pasar por diferentes fases en la resolución del problema (comprensión, búsqueda de estrategias apropiadas, aplicación, y revisión). En relación con los procesos de comunicación, vinculados a las interacciones entre estudiantes y entre estos y la maestra al hablar sobre las tareas y los procesos de resolución generados, se identifican por la indicación explícita por parte de los estudiantes para maestro de momentos para apoyar las interacciones y por la introducción y consolidación del lenguaje matemático adecuado.

Álvarez-Arroyo et al. (2024) presentan los resultados de una investigación para identificar el uso de los conocimientos y el razonamiento probabilísticos de futuros profesores de secundaria al responder a preguntas sobre información aparecida en los periódicos. Los objetivos de la investigación son de tipo matemático (identificar los tipos de análisis que hacen los futuros profesores de la información y los contenidos probabilísticos que ponen en juego para ello) y didáctico (observar si los futuros profesores son capaces de identificar las dificultades que pueden tener los estudiantes de educación secundaria al responder esas mismas cuestiones). Este tipo de objetivos situa estas investigaciones en la intersección de los dos focos que estamos considerando. Las autoras definen "competencia probabilística" como el conocimiento y las disposiciones que los estudiantes pueden tener que desarrollar para ser considerados competentes en el abordaje de temas probabilísticos del mundo real. El análisis de los resultados muestra que la mayoría de los futuros profesores participantes en el experimento pusieron en juego su conocimiento y razonamiento probabilísticos y un lenguaje específico. Sin embargo, un número importante de estudiantes mostraron notables lagunas en su razonamiento probabilístico, especialmente por no diferenciar condicionamiento y causalidad o por no interpretar correctamente los enunciados probabilísticos. En relación con el conocimiento didáctico, la mayoría de futuros profesores mostraron un conocimiento pobre, incluso después de las clases en el máster, y escasa capacidad para prever los errores de los estudiantes en las cuestiones que ellos habían resuelto previamente. Estos resultados son coherentes con los obtenidos en investigaciones anteriores con el mismo tipo de sujetos.

García et al. (2024) estudian las características de las reflexiones posteriores a la implementación de una lección (dentro de un ciclo de estudio de lecciones) (*lesson study*) estudiantes para maestra de educación infantil para identificar los mecanismos de activación del conocimiento especializado. Esta investigación usa la teoría de las situaciones didácticas (TSD) (Brousseau, 1997) como conocimiento de referencia para ayudar a las estudiantes para maestras a comprender las situaciones de enseñanza y la TAD (Bosch et al., 2020) para caracterizar su aprendizaje. Este referencial teórico asume la dependencia mutua entre lo que los profesores enseñan (*mathematical praxeologies*) y cómo la enseñanza (d*idáctical praxeologies)*, lo que permite situar el foco de atención para analizar el aprendizaje de las estudiantes para maestra sobre el tipo de tareas y técnicas, las tecnologías para describir, explicar y justificar las técnicas y las teorías. Los resultados muestran el potencial de la adaptación de los ciclos de estudio de lecciones en la formación inicial de maestras de educación infantil cuando se proporciona a las estudiantes para maestra elementos teóricos para dotar de sentido a las situaciones de enseñanza y decidir sobre posibles líneas de actuación, al permitir movilizar y desafiar las explicaciones iniciales derivadas de su equipamiento praxeológico.

Lupiáñez et al. (2024) estudian la toma de decisiones, al planificar lecciones centradas en la resolución de problemas, de profesores de educación primaria (noveles y maestros con y sin formación en la enseñanza basada en la resolución de problemas). La planificación de las lecciones se entiende como un contexto en el que los profesores transforman el currículo y se relacionan con los recursos curriculares (Remillard, 2012). Los autores adaptan el modelo de toma de decisiones de Schoenfeld (2010) para examinar cómo los recursos (conocimiento y recursos técnicos), las orientaciones (creencias y concepciones) y los objetivos pretendidos influyen en la toma de decisiones de los profesores, considerando el foco en la resolución de problemas. Los resultados muestran diferencias entre los tres perfiles de profesores en relación con los recursos, las orientaciones y los objetivos que se ponían en marcha en la planificación de la enseñanza de la resolución de problemas. Las diferencias se centran en considerar la resolución de problemas como foco o como medio para el aprendizaje. Se constata que solo la experiencia no es suficiente para que los profesores desarrollen referencias para dotar de significado a las indicaciones dadas en las propuestas curriculares.

Fernández et al. (2024) estudian el desarrollo de la mirada profesional de estudiantes para profesores de educación secundaria al participar en un módulo formativo en relación con el pensamiento matemático de los estudiantes. La hipótesis sobre la que se apoya este estudio es que es posible desarrollar esta competencia docente en los programas de formación inicial cuando las actividades propuestas permiten entrelazar diferentes procesos cognitivos, permitiendo razonar sobre la situación con conocimiento especializado (Fernández et al., 2020). Los cuatro procesos considerados son: i) resolver problemas para identificar los elementos matemáticos que intervienen (atender a las matemáticas que intervienen en la resolución); ii) anticipar respuestas de los estudiantes que pudieran reflejar diferentes niveles de comprensión de los elementos matemáticos que intervienen en la resolución del problema; iii) interpretar las respuestas de estudiantes a estos problemas, y iv) proporcionar sugerencias de actividades (decidir) para apoyar la comprensión de estudiantes situados en diferentes niveles de desarrollo. Las rutas de desarrollo de la competencia “mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes” se caracterizan considerando cómo los estudiantes para profesores anticipan e interpretan las respuestas de los estudiantes y toman decisiones instruccionales para apoyar la comprensión. Esta caracterización se vincula al reconocimiento por parte de los estudiantes para profesores de lo que puede ser un avance conceptual en los estudiantes, la comprensión de determinados elementos del concepto (en este caso, la coordinación de las aproximaciones en el dominio y rango de la función).

Font et al. (2024) se centran en caracterizar la competencia de estudiantes para profesores de secundaria en identificar errores producidos en la enseñanza cuando reflexionan sobre lo realizado (*reflection-on-action*). Esta competencia conlleva el que los estudiantes para profesores describan lo que ha sucedido en su enseñanza, interpreten lo sucedido generando explicaciones como una forma de valoración, para apoyar su práctica futura considerando la información generada. En este caso, el uso de un referente teórico permitió a los estudiantes para profesor organizar su reflexión, pero, no es fácil conseguir niveles altos de la competencia de evaluación de la idoneidad didáctica del proceso instructivo en el caso de los errores. Este nivel alto de competencia de valoración de la idoneidad didáctica (en el caso de los errores) viene caracterizada por la capacidad de los estudiantes para profesor de analizar con cierta profundidad diferentes aspectos de los errores matemáticos (quien lo detecta, cómo se maneja, etc.).

Barquero y Ferrando (2024) se centran en analizar los procesos de diseño de tareas de modelización por profesores de matemáticas de educación secundaria cuando se les proporciona varios referenciales teóricos sobre la modelización (TAD y otras). El estudio se plantea identificar condiciones y limitaciones a las que se enfrentan los profesores cuando tienen que diseñar tareas de modelización considerando diferentes perspectivas teóricas. En particular, cuando el proceso de diseño se entiende apoyado en la reconstrucción y articulación de organizaciones matemáticas cada vez de mayor complejidad, que refleja una aproximación a la enseñanza basada en la indagación. El estudio analiza dos propuestas formativas en las que su estructura permitía a los profesores desempeñar diferentes roles, de diseñadores, como gestores de la implementación (y como alumnos) y analizando las propuestas a priori y posteriori. Los resultados muestran diferencias en el tipo de tareas diseñadas, pero también en la especificidad en relación con el contenido matemático, y las condiciones que permiten integrar las tareas de modelización en la enseñanza secundaria (análisis ecológico) mediante la determinación de “niveles de codeterminación” (Chevallard, 2002) y en la generación de un lenguaje profesional para hablar sobre la modelización.

Planas et al. (2024) estudian cómo apoyar el desarrollo de una mirada profesional del profesor de matemáticas centrada en el papel del discurso/habla matemática, en particular de las prácticas lingüísticas de nombrar y explicar en la enseñanza de las matemáticas como una forma organizada de ver y comprender los sucesos. El foco sobre dos prácticas matemáticas lingüísticas como nombrar y explicar es subrayado por el papel que pueden desempeñar en articular prácticas discursivas relevantes para el aprendizaje matemático junto a otras prácticas matemáticas. Los resultados subrayan la necesidad de hacer conscientes a los profesores de sus propias prácticas lingüísticas en relación con nombrar y explicar, y su relativo impacto en la enseñanza. Además, señalan las tensiones que se identifican al centrar el foco de atención en estas prácticas discursivas en relación con las prácticas y formas de comunicación habituales en las aulas de matemáticas. El trabajo en grupo de los profesores en los talleres diseñados subraya el desarrollo colectivo de la competencia docente mirar profesionalmente, más allá de los informes individuales.

3.2.2. Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas: Algunos ejemplos

En relación con el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, describimos dos investigaciones con foco en caracterizar el uso del modelo teórico del conocimiento especializado (MKST) en el diseño de procesos formativos y en la consideración del dominio afectivo en el aprendizaje del conocimiento especializado.

Climent et al. (2024) estudian el potencial de usar un modelo teórico del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) como referente teórico para diseñar secuencias de tareas en los programas de formación de profesorado. Esta idea se particulariza en el aprendizaje de la práctica matemática de definir en estudiantes para maestros de Educación Primaria (aplicada al caso del concepto de polígono) como una forma de articular propuestas que combinen el aprendizaje por parte de los estudiantes para maestro de conocimiento de matemáticas y conocimiento de contenido pedagógico. La hipótesis de partida es que estructurar el contenido de los programas de formación (lo que tiene que ser aprendido por los estudiantes para maestro) a través de tareas organizadas considerando un modelo del conocimiento del maestro puede ayudar a los estudiantes para maestro a desarrollar diferentes tipos de conocimiento especializado para enseñar matemáticas, evidenciando una mejora en las diferentes dimensiones del conocimiento (de matemáticas y sobre la enseñanza y aprendizaje).

Gómez-Chacón y Marbán (2024) se centran en analizar las relaciones entre los dominios cognitivos y afectivos en el aprendizaje de las matemáticas de estudiantes para profesores de matemáticas de educación secundaria. La relación entre el dominio afectivo (emociones epistémicas) y el aprendizaje matemático se analiza en las prácticas específicas de resolver problemas y anticipar las posibles emociones de los estudiantes cuando resuelven problemas, junto con las reflexiones de lo que ha sucedido en las aulas. En esta investigación se definen las emociones epistémicas como emociones que se generan cuando se están resolviendo problemas (el foco de la emoción es el conocimiento y el proceso de llegar a conocer). De esta manera, las emociones epistémicas de sorpresa, aburrimiento, confusión, ansiedad y así, se identifican en las diferentes partes por las que pasa el proceso de resolver los problemas. Esta investigación complementa el foco sobre el conocimiento especializado del profesor con la dimensión afectiva y cómo los juicios que los estudiantes para profesores realizan sobre las emociones de los estudiantes cuando están resolviendo un problema (anticipar) se diferencia de sus propias emociones y de las emociones de los estudiantes. Para analizar las interacciones entre la dimensión afectiva (emociones epistémicas) y la cognición (procesos de llegar a conocer) se usa la teoría de los espacios de trabajo matemático (Kuzniak et al., 2022). Los resultados muestran diferencias en las interacciones entre las emociones y las acciones epistémicas según las prácticas de resolver problemas, anticipar las emociones de los estudiantes de bachillerato, y reflexionar sobre estas relaciones en un espacio del proceso formativo.

3.3. Algunas características de las investigaciones con foco el profesor: Investigación y transferencia

Un producto que se puede explicitar desde este conjunto de investigaciones es que permiten pensar en la construcción de una investigación que apoya cierta forma de entender la formación docente en el ámbito de las matemáticas. Este apoyo quedó reflejado en el trabajo colectivo que describe las aportaciones desde la investigación en formación de profesores al desarrollo del currículo con foco en los programas de formación (Llinares et al., 2023). Esta manera de entender la formación se refleja en identificar prácticas profesionales específicas en la práctica de enseñar matemáticas y aspectos del conocimiento especializado para enseñar matemáticas que se convierten en foco de atención en la formación de profesores, y el papel que desempeñan los referentes teóricos generados desde la Didáctica de la Matemática para articular las decisiones de los investigadores. Las investigaciones realizadas en este ámbito en los últimos años permiten identificar algunos rasgos característicos comunes, independientes de la aproximación teórica adoptada, el tipo de participantes o del contexto particular. Por ejemplo, usar "representaciones de la práctica" para apoyar las formas de razonar de los docentes; y apoyar los procesos de reflexión/análisis sobre lo observado, usando referenciales teóricos desde la Didáctica de la Matemática. Estas formas de hacer en los programas de formación (inicial y continua), y en la investigación en la formación de los docentes de matemáticas puede ser entendida como maneras de describir, explicar y usar el aprendizaje de prácticas profesionales específicas para ayudar a los formadores a decidir qué hacer y cómo explicar lo que observamos. Además, el análisis de cómo los estudiantes para profesor aprenden a realizar determinadas prácticas profesionales específicas, y el uso de dominios específicos de conocimiento especializado, sugiere desde las diferentes investigaciones que el aprender la práctica apoya el aprendizaje de conocimiento especializado mostrando la simbiosis entre conocer y hacer.

4. INVESTIGACIÓN SOBRE LOS PROCESOS COGNITIVOS DE ESTUDIANTES CON NECESIDADES EDUCATIVAS ESPECIALES

En el contexto educativo español, el término "necesidades educativas especiales" se asociaba tradicionalmente a la atención a los estudiantes con dificultades de aprendizaje. Así, los especialistas de apoyo de los centros escolares de educación primaria y secundaria se dedicaban a atender de manera individualizada a estudiantes con problemas de aprendizaje de diferentes tipos. Sin embargo, las últimas leyes de educación españolas señalan la obligación de prestar atención diferenciada también a los estudiantes cuyas necesidades educativas especiales se deben a "sus altas capacidades intelectuales" (Jefatura del Estado, 2020, p. 122909). Este cambio legislativo ha hecho que aumente el reconocimiento por el profesorado de la necesidad de identificar y atender a los estudiantes con superdotación o altas capacidades, en particular a los que tienen ACM.

En el contexto de la investigación en educación matemática, también ha habido siempre interés por estudiar la problemática de los estudiantes con dificultades de aprendizaje de las matemáticas y solo en las últimas décadas se está produciendo una cantidad significativa de investigaciones sobre los estudiantes con ACM. Los objetivos centrales de esta agenda de investigación incluyen, por una parte, la identificación de estudiantes con esta característica y su atención diferenciada en contextos escolares y extraescolares y, por otra parte, el estudio de los procesos de razonamiento matemático y de la afectividad de estos estudiantes y de sus diferencias con los de estudiantes medios.

El programa del XXI Simposio de la SEIEM incluyó un seminario dedicado a la diversidad en educación matemática. Una de las intervenciones (Planas, 2017) estuvo dedicada a la diversidad lingüística, tema que se aborda en otra sección de este documento. En la otra intervención, Jaime y Gutiérrez (2017) se centraron en la ACM; en su presentación y en el texto de las actas, ofrecen una síntesis de investigaciones nacionales e internacionales de aproximadamente los diez años previos a ese simposio, por lo que aquí nos centramos principalmente en la literatura más reciente. A continuación, presentamos una síntesis de la investigación sobre los estudiantes con dificultades de aprendizaje y con ACM y, para cada tema, describimos con detalle una investigación, sobre el aprendizaje de la estructura multiplicativa por un estudiante con trastorno del espectro autista (TEA) y sobre la capacidad de generalización de estudiantes con ACM.

4.1. Estudiantes con dificultades de aprendizaje

El campo de actividad de la investigación sobre los estudiantes de matemáticas con dificultades de aprendizaje es muy amplio y diverso, pues incluye todo tipo de causas (Bruno y Noda, 2010), principalmente discapacidades intelectuales, psicológicas, físicas y sociales (p. ej., desconocimiento del idioma). Es necesario diferenciar las dificultades de aprendizaje debidas a una discapacidad de las debidas a una capacidad cognitiva por debajo de la media (de razonamiento matemático en nuestro caso). Además, cada tipo de dificultad tiene unas características que generalmente hacen que sea diferente de los otros. Bruno y Noda (2010) hacen un recorrido por la literatura de diferentes tipos de dificultades de aprendizaje de las matemáticas. Diversas publicaciones informan sobre investigaciones centradas en estudiantes con síndrome de Down (Bruno y Noda, 2010; Bruno et al., 2022), con TEA (Bruno et al., 2022; Goñi-Cervera et al., 2022) o estudiantes ordinarios con dificultades de aprendizaje de las matemáticas.

Bruno y Noda (2010) discuten el aprendizaje de la aritmética por estudiantes con síndrome de Down, mostrando características diferenciadoras de estos estudiantes y metodologías de enseñanza adaptadas. Bruno et al. (2022) completan el texto anterior mostrando experimentos de enseñanza combinada de contenidos de geometría y aritmética, concluyendo que esta combinación de contenidos produjo mejores resultados de aprendizaje que trabajando con unos u otros contenidos por separado. Estos autores también informan de experimentos de enseñanza con estudiantes con TEA que les sirven como contexto para mostrar diferentes formas adecuadas de presentar la información matemática a estos estudiantes. García-Moya et al. (2024) se centran en la resolución de problemas multiplicativos de tipo producto cartesiano por un estudiante con TEA y Goñi-Cervera et al. (2022) presentan una investigación con estudiantes con TEA de los diferentes cursos de primaria en la que les plantearon problemas de patrones geométricos para observar el desarrollo de su pensamiento algebraico.

Por su parte, Castro y Cañadas (2016) se centran en discutir y clasificar las diversas dificultades de aprendizaje de la aritmética, desde el punto de vista del contenido matemático (por ejemplo, dificultades de comprensión de un enunciado verbal, de manejo de los signos aritméticos y las reglas de operatoria, etc.), que encontraron, siendo la discalculia la causa más frecuente.

Bruno et al. (2024) presentan un estudio de caso del proceso de aprendizaje de las estructuras multiplicativas de los números naturales de un niño con TEA que, además, tenía deficiencia intelectual. En este contexto, los autores organizaron un experimento de enseñanza basado en la resolución de problemas aritméticos verbales de estructura multiplicativa, con los objetivos de identificar las estrategias de resolución del estudiante, explorar si algunas características relacionadas con el TEA podían influir en dichas estrategias e identificar los componentes de la metodología de enseñanza que jugaron un papel destacado en el proceso de aprendizaje del estudiante. Los autores se basaron en la caracterización de estrategias de resolución de problemas verbales multiplicativos propuesta por Mulligan (1992), que diferencia las estrategias según los procedimientos de cálculo y sus grados de abstracción: modelización directa con conteo, conteo sin modelización y hechos numéricos aprendidos o deducidos. Las investigaciones reportadas en la literatura muestran que los estudiantes ordinarios progresaron a lo largo de las tres categorías, mientras que los estudiantes con dificultades de aprendizaje no consiguieron progresar a las categorías superiores. El marco de la investigación se completa con la adopción de la metodología de enseñanza COMPS, creada para facilitar el establecimiento de conexiones entre diferentes tipos de problemas mediante el uso de un diagrama que representa los datos y operaciones del problema, y ayudar a identificar las operaciones que debe realizar el estudiante. Los autores citan publicaciones en las que esta metodología ha mostrado ser positiva para la enseñanza de estrategias de resolución de problemas multiplicativos a estudiantes con dificultades de aprendizaje.

El experimento presentado por Bruno et al. (2024) se realizó con un niño de 14 años diagnosticado con TEA y con una forma de comportamiento típica de estos niños. Además, el niño necesitaba una adaptación curricular en matemáticas, porque mostraba dificultades de aprendizaje. Bruno et al. describen con detalle la secuencia de problemas que plantearon y muestran ejemplos de las hojas de trabajo y de las respuestas del niño; los problemas correspondían a tres modelos de representación de las multiplicaciones: agrupamientos iguales (suma reiterada), comparación multiplicativa (una cantidad es *n* veces mayor que otra) y producto cartesiano. El experimento de enseñanza empezó con un pretest, siguió con 13 sesiones de enseñanza intercaladas con sesiones de evaluación y terminó con un postest inmediato y otro diferido 5 semanas después. El resto del artículo está dedicado a describir y analizar las estrategias de resolución mostradas por el estudiante en los tres tipos de problemas. Entre las conclusiones planteadas por los autores, podemos destacar: que el estudiante mostró a lo largo del experimento diferentes rasgos típicos del TEA tales como preferencia por expresar sus ideas mediante dibujos; que experimentó dificultades para entender algunas expresiones matemáticas como “tres veces más”, que con frecuencia interpretaba como sumar 3; que el estudiante tuvo diferentes niveles de éxito en los tipos de problemas, mostrando más destreza en los problemas de agrupamientos iguales y más dificultad en los de comparación multiplicativa; y que la metodología COMPS resultó útil para favorecer el aprendizaje.

Las TIC están mostrando su utilidad también en la enseñanza de las matemáticas a estudiantes con dificultades de aprendizaje, en particular a los que tienen dificultades de motricidad fina y les resulta difícil usar materiales manipulativos. Estas dificultades pueden reducirse mediante el uso de pantallas táctiles (González et al., 2015). También ha habido investigaciones que han desarrollado aplicaciones específicamente orientadas a estudiantes con síndrome de Down (González et al., 2015) o con TEA (Blanco et al., 2024b). García-Moya y Blanco (2024) ofrecen una recopilación, clasificación y análisis de aplicaciones informáticas adecuadas para la enseñanza a niños con TEA.

4.2. Estudiantes con alta capacidad matemática

Uno de los focos de atención de los investigadores en educación matemática es analizar los procesos de razonamiento matemático de los estudiantes con ACM en actividades específicas como la visualización, la creatividad, la generalización o la demostración, entre otras. Los resultados de diversas investigaciones ponen de relieve que, en unas ocasiones, los estudiantes con ACM son capaces de empezar a realizar determinados tipos de razonamiento (por ejemplo, razonamiento deductivo) mucho antes que sus compañeros de curso o edad y, en otras ocasiones, los estudiantes con ACM realizan los mismos procesos de razonamiento que sus compañeros, pero lo hacen de maneras más flexibles, complejas u originales.

El nexo común de la mayoría de las investigaciones sobre ACM son los problemas, tanto en la resolución como en la invención (*problem posing*), con investigaciones basadas en muy diversos contextos, como geometría (Ramírez-Uclés y Ruiz-Hidalgo, 2022; Sua et al., 2024), grafos eulerianos (Blanco y García-Moya, 2021) o generalización prealgebraica (Mora et al., 2022). Así, Ramírez-Uclés y Ruiz-Hidalgo (2022) plantearon en una sesión de ESTALMAT varios problemas geométricos de demostración en diversos formatos (oral, gráfico, escrito, con SGD). Los autores usaron los tipos de pensamiento matemático de Krutetskii para clasificar las resoluciones de los estudiantes, que mostraron una diversidad de preferencias, dependiendo de los problemas.

Por su parte, Gutiérrez et al. (2018b) realizaron un experimento con dos estudiantes con ACM de Granada y Valencia que se comunicaban entre ellos y con los investigadores mediante videoconferencias y debían construir de manera colaborativa la solución. Cada estudiante disponía de dos proyecciones ortogonales de una ciudad formada por torres de cubos y de cubos para construir la ciudad. Los estudiantes no podían intercambiarse información gráfica, por lo que necesitaron desarrollar habilidades de comunicación verbal para transmitir sus imágenes mentales y lo que veía cada uno en su propia construcción.

Las competiciones matemáticas son un buen contexto para observar el razonamiento matemático de posibles estudiantes con ACM. Guinjoan et al. (2015) analizaron las respuestas de estudiantes que se presentaron a las pruebas Cangur y quedaron clasificados en los puestos más altos. Una peculiaridad de las pruebas Cangur es que los problemas planteados ofrecen varias posibles soluciones y los estudiantes tienen que elegir la que consideran correcta. Los autores centraron su atención en las estrategias y heurísticas usadas por los estudiantes y su uso de la intuición y de la visualización para decoro cuál era la respuesta correcta. A pesar de que todos los estudiantes de la muestra habían obtenido excelentes resultados en la prueba, los análisis muestran diferencias significativas entre sus formas de tomar decisiones y de resolver los problemas.

En el contexto de las olimpiadas de primaria de Costa Rica, Mora et al. (2023a, 2023b, 2024a, 2024b) analizaron y compararon los procesos de resolución de determinados problemas por estudiantes que habían obtenido las puntuaciones más altas y más bajas en la prueba y el uso que hicieron de sus capacidades de generalización, visualización y flexibilidad. Los resultados indican que los problemas planteados y buena parte de los descriptores definidos en su marco teórico para caracterizar cada capacidad mencionada son adecuados para discriminar a los estudiantes con ACM en cada capacidad de razonamiento.

Por otra parte, Espinoza et al. (2016) realizaron un experimento de invención de problemas por estudiantes de secundaria con ACM y ordinarios. Sus resultados muestran una clara diferencia entre los problemas inventados por unos y otros estudiantes. Las principales diferencias son la riqueza de los enunciados, la cantidad de operaciones requeridas (dificultad de resolución), los tipos de números empleados. Este estudio permitió también identificar características diferenciadoras de los estudiantes con ACM en invención de problemas.

La capacidad de generalización es un componente central de la actividad matemática, por lo que son numerosas las investigaciones que han explorado características diferenciadoras de los procesos de generalización de los estudiantes con ACM. Mora et al. (2024b) realizaron una investigación cuyos objetivos eran analizar los procesos de razonamiento de generalización de estudiantes y analizar la validez de los problemas planteados para diferenciar estudiantes con ACM de estudiantes medios. Los autores informan de que, en las investigaciones sobre generalización, normalmente se utilizan contextos de razonamiento aritmético (Rott, 2013), algebraico (Amit y Neria, 2008), etc., dependiendo de las edades de los estudiantes, pero Krutetskii (1976) hablaba de la importancia de observar la capacidad de generalización de procedimientos matemáticos y estrategias de cálculo de los estudiantes.

Mora et al. (2024b) presentan los resultados del análisis de las respuestas a dos problemas planteados en la prueba de admisión a ESTALMAT. Los estudiantes que se presentaron a dicha prueba de admisión eran de 6º de primaria y 1º y 2º de ESO. En un problema había que realizar movimientos entre los números naturales de acuerdo con ciertas reglas; en el otro había que cubrir rectángulos aplicando un criterio de cubrimiento. La clave para la resolución de ambos problemas es identificar y generalizar una estrategia de cálculo (o cubrimiento) que produce soluciones correctas. El marco teórico del estudio está formado por la caracterización de la ACM en lo relativo a la generalización y por un conjunto de descriptores originales de la actividad de generalización de métodos de solución, que evalúan los tipos de métodos de solución usados y los niveles de generalización de esos métodos alcanzados por los estudiantes.

De los 312 estudiantes que se presentaron a la prueba, los autores analizaron las respuestas de los 25 estudiantes que obtuvieron las mejores puntuaciones globales en la prueba, los 25 que obtuvieron las puntuaciones intermedias y los 25 que obtuvieron las puntuaciones más bajas. Para obtener conclusiones sobre la validez de los problemas como identificadores de ACM, los autores realizaron un análisis mixto: el análisis cualitativo se centró en clasificar las respuestas de los estudiantes de acuerdo con los descriptores de generalización, que habían definido previamente, que podían reconocerse en las respuestas; el análisis cuantitativo se basó en el índice de discriminación (Allen y Yen, 1979), que mide las diferencias entre las respuestas a un ítem o problema particular de los sujetos que obtuvieron mejores y peores puntuaciones en el cuestionario completo. Entre las conclusiones de los autores, destacan que los dos problemas y varios descriptores son muy adecuados para la identificación de estudiantes con ACM, mientras que otros descriptores (que corresponden a estrategias no correctas o niveles bajos de generalización) permiten identificar estudiantes que no tienen ACM. Este artículo abre una línea de investigación novedosa sobre una forma de desarrollar y evaluar la capacidad de generalización de los estudiantes y, en particular, de identificar a potenciales estudiantes con ACM.

5. INVESTIGACIÓN SOBRE EL USO DE LA TECNOLOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En España, igual que en una mayoría de países con niveles medios y altos de desarrollo socioeconómico, los centros escolares han incorporado, desde hace bastantes años, las tecnologías de la información y comunicación (TIC) a la enseñanza de las diferentes asignaturas y, en especial, de las matemáticas. Por ello, desde hace varias décadas se han realizado numerosas investigaciones dirigidas a explorar diversos aspectos de la presencia de las TIC en las aulas de los diferentes niveles educativos. Además, los años de confinamiento por el Covid19 han propiciado, por necesidad, la experimentación de numerosas formas de interacción con la tecnología. El interés de la educación matemática española por la investigación relacionada con las TIC se evidencia en la cantidad de artículos que se publican.

El seminario de investigación del XXV Simposio de la SEIEM estuvo dedicado al papel de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Una de las presentaciones (Arnau, 2022) reflexionaba sobre diversas relaciones entre la tecnología y la educación matemática, desde la época inicial de los sistemas informáticos programados para simular la actividad de un profesor o un estudiante en un contexto de resolución de problemas de matemáticas, desde el surgimiento de software educativo como Logo (ahora Scratch), hasta diversos sistemas tutoriales inteligentes y algunas aplicaciones en desarrollo en la actualidad. Además, Arnau (2022) informaba sobre diversos estudios realizados en España, mayoritariamente del equipo de investigación del autor. También están actualmente realizándose diversas investigaciones en el uso de la robótica educativa, en relación con el pensamiento computacional.

Esta sección está dividida en dos partes, dedicadas a dos periodos educativos muy diferentes, infantil y primaria por una parte y secundaria y universidad por otra.

5.1. Las TIC en educación infantil y primaria

El uso de las TIC con niños pequeños ha sido problemático durante mucho tiempo, por la dificultad de los niños para manejar elementos como comandos, cursores, menús desplegables, teclados, ratones, etc. Los niños cometían con frecuencia errores en el uso de la tecnología que les impedían poner en práctica sus ideas correctas y resolver los problemas. La popularización de productos como las pantallas táctiles y los robots de suelo ha ayudado a superar esas dificultades y a crear entornos mucho más amigables para los niños pequeños. Estas potencialidades del hardware táctil han permitido la inclusión del pensamiento computacional en los currículos de educación infantil y primeros cursos de educación primaria. En España encontramos estudios que plantean una diversidad de cuestiones de investigación y utilizan diferentes contextos tecnológicos para la enseñanza de las matemáticas.

Del Olmo-Muñoz et al. (2023) realizaron una investigación con estudiantes de primaria durante la época del confinamiento por el Covid-19 sobre el uso del sistema tutorial inteligente HINTS, que permite resolver problemas verbales aritmética o algebraicamente. Los estudiantes accedían al tutorial desde sus casas, sin la colaboración del profesor. Una de las características del tutorial es que está programado para que los estudiantes puedan utilizarlo de manera autónoma, pues pueden tener interacciones de la aplicación y recibir sugerencias adaptadas a las respuestas, sin necesidad de un profesor. Los autores plantearon el objetivo de analizar la relación entre el estatus socioeconómico de los estudiantes que participaron en el experimento y su éxito en el aprendizaje mediante el uso de HINTS. El artículo incluye una detallada revisión bibliográfica sobre los papeles de profesores y estudiantes cuando se usa tecnología en la enseñanza de las matemáticas. Las conclusiones señalan que no encuentran diferencias estadísticamente significativas entre los aprendizajes de estudiantes de diferentes niveles socioeconómicos.

Por su parte, Diago et al. (2018) presentaron una investigación dirigida a observar el desarrollo del pensamiento computacional, utilizando un robot de suelo programable, en estudiantes de infantil y primeros cursos de primaria. Las tareas planteadas a los estudiantes consistieron en elegir y programar recorridos del robot para alcanzar determinados objetivos. Los investigadores analizaron las heurísticas mostradas por las respuestas de los estudiantes y sus motivos o justificaciones de sus elecciones o decisiones.

En un contexto diferente de los otros que presentamos aquí, Escrivà et al. (2018) presentaron los resultados de un experimento de enseñanza de habilidades de visualización en geometría espacial con estudiantes de un grupo ordinario de 6º de primaria y estudiantes de 5º y 6º de primaria que participaban en un taller extraescolar de matemáticas para niños superdotados. Los problemas que les plantearon requerían realizar manipulaciones de cubos para identificar las figuras que decoraban sus caras y sus posiciones en ellas. Para ello, los estudiantes utilizaron, según los problemas, cubos físicos, dibujados en papel y construidos en archivos dinámicos de ordenador. Usando el marco teórico de las habilidades de visualización de Gutiérrez (1996), los autores realizaron un análisis cualitativo de las respuestas de los estudiantes, tratando de identificar las imágenes mentales creadas y manipuladas y las habilidades de visualización puestas en juego. Entre sus conclusiones destacan que cada tipo de problemas indujo el uso de imágenes y habilidades diferentes.

Del Olmo et al. (2024) presentan resultados de dos investigaciones conectadas en las que niños de educación infantil y primer curso de educación primaria (edades entre 5 y 7 años) resolvieron tareas de movimiento de un robot de suelo, en las que tenían que programar el robot para ir desde su posición actual a otro lugar (los movimientos disponibles son avance y retroceso de un paso y giros de ±90º). En una investigación, los estudiantes usaron un robot real y en la otra usaron un simulador de ese robot programado en un ordenador. La investigación, de tipo mixto, tiene como objetivo general identificar y analizar procesos metacognitivos de control realizados por los estudiantes durante la resolución de las tareas; más concretamente: i) describir y categorizar los criterios aplicados por los estudiantes en sus tomas de decisiones y ii) evaluar las posibles relaciones entre dichos procesos metacognitivos, la eficacia en la resolución de las tareas, la edad y el género de los niños.

El marco teórico de la investigación incluye elementos de metacognición, como la toma de decisiones en la elección de los recorridos y de los movimientos, la autorregulación durante la resolución de los problemas, y de pensamiento computacional, en particular relacionado con la resolución de tareas de programación de robots de suelo. La metodología de este artículo es típica de los estudios mixtos, con la particularidad de que los autores no han hecho el doble análisis cualitativo y cuantitativo de los mismos datos. La parte del experimento basada en el uso de robots de suelo incluía información sobre los recorridos previstos y realizados por los niños, así como respuestas de estos en entrevistas, por lo que es adecuada para un análisis cualitativo. Sin embargo, la parte de los experimentos basada en el simulador solo tenía datos referidos a los pasos de los recorridos programados por los niños, por lo que su análisis solo puede ser de tipo cuantitativo.

Uno de los resultados más destacables indica que, en las tareas donde los niños tenían que seleccionar uno de dos posibles destinos del robot, hay diferencias entre los niños de educación infantil y los de primaria: los primeros tendían a elegir el destino más próximo, a pesar de que el recorrido corto era más complejo porque incluía curvas y el largo era recto; por el contrario, la mayoría de los estudiantes de primaria elegían el recorrido más sencillo de programar. Por otra parte, los resultados sobre posibles diferencias debidas al grado muestran que, como es previsible, los estudiantes de 1º de primaria tienen más éxito en la resolución de las tareas que los de educación infantil. En cuanto al género, los autores no observaron ninguna diferencia estadísticamente significativa. Como conclusiones finales, los autores señalan la relevancia del estudio para mostrar que es posible realizar actividades formativas interesantes con los niños de estos grados, como desarrollo del planteamiento hecho por el actual currículo oficial español que propone la inclusión del pensamiento computacional en las asignaturas de matemáticas (Jefatura del Estado, 2020).

5.2. Las TIC en educación secundaria y superior

Las investigaciones centradas en los niveles educativos superiores son poco frecuentes y muy diversas en cuanto al tipo de estudiantes y los contextos de estas, lo cual dificulta la creación de líneas de investigación que se mantengan y evolucionen en el tiempo. Camacho et al. (2022) ofrecen una revisión de las principales publicaciones españolas de los últimos 25 años centradas en la enseñanza de las matemáticas universitarias.

Gómez-Chacón et al. (2016) analizaron la relación entre elementos afectivos y de aprendizaje. El artículo se sitúa en el marco de los espacios de trabajo matemático y los tipos de geometrías (natural, natural axiomática y axiomática) y explora, mediante un experimento de enseñanza de 25 sesiones de clase, la influencia del SGD en la estabilización de aspectos afectivos en estudiantes de 3º de ESO que transitan de la geometría natural a la natural axiomática, así como la influencia del profesor como mediador entre el software y los estudiantes.

Hoyos et al. (2021) presentan los resultados de una parte de un curso de geometría analítica 3-dimensional para futuros profesores de matemáticas, centrada en el estudio de las superficies cuádricas y con una metodología de resolución de problemas mediante dos aplicaciones informáticas creadas por el primer autor; una permite crear superficies tridimensionales a partir de secciones planas de las mismas y la otra representa las superficies cuádricas y sus proyecciones ortogonales de manera dinámica y permite modificarlas cambiando los parámetros de sus ecuaciones. Los problemas que plantearon son crear la superficie correspondiente a una ecuación dada, encontrar la ecuación correspondiente a una superficie dada e identificar la superficie a la que pertenece un conjunto de secciones planas dadas.

El libro de Richard et al. (2022) aborda el tema, de plena actualidad, de los usos que se pueden dar a la inteligencia artificial en el mundo escolar para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Algunos autores abordan el tema de la demostración automática y su uso para enseñar a demostrar. En particular, el capítulo de T. Recio muestra algunas utilidades de GeoGebra que pueden emplearse con este fin y el de J.L. Rodríguez presenta experiencias que se están desarrollando en la Universidad de Almería en un entorno de realidad virtual creado por este grupo (Neotrie VR).

En la sección 2.2 hemos comentado el artículo de Santos-Trigo et al. (2024), entre cuyos objetivos está el de informar sobre resultados de investigaciones que analicen las posibles ventajas del uso habitual del SGD en asignaturas de cálculo de secundaria. Los autores se centran en el aprendizaje de la derivada de una función. Para su introducción inicial, sigue siendo habitual que libros de texto y profesores presenten a los estudiantes la tradicional aproximación geométrica de la derivada como pendiente de la tangente límite de las pendientes de rectas secantes. Los autores muestran investigaciones que avalan que los entornos de SGD suponen una metodología de enseñanza muy interesante para representar la clásica aproximación geométrica a la derivada. La posibilidad de desplazarse a lo largo de la curva y poder observar los cambios que se producen en los diferentes valores relevantes supone una forma mucho más eficaz que los dibujos estáticos en el libro de texto o la pizarra; por ejemplo, al desplazarse alrededor de un punto de la curva cuya tangente ha sido construida, se observa que varían dx y dy, pero su cociente dy/dx permanece constante.

El grupo de la Universidad de la Laguna (Santos-Trigo et al., 2024) presenta resultados de investigaciones experimentales, en las cuales los estudiantes han resuelto problemas sencillos típicos y también problemas avanzados, que serían difíciles de abordar por los estudiantes solo con papel y lápiz, por la complejidad de los dibujos que tendrían que realizar. Muestra que el uso del SGD permite a los estudiantes concentrarse en entender y usar los aspectos conceptuales implícitos en la resolución, al poder liberarse de la necesidad de hacer dibujos exactos. Dos de las conclusiones de estas investigaciones son que el SGD es una importante herramienta para fomentar dicha comprensión y que sigue necesitándose estudios para identificar las fortalezas de diferentes tecnologías en la enseñanza del cálculo.

6. CONTRIBUCIONES A TEORÍAS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La educación matemática, como joven disciplina que es, integra actualmente una diversidad de enfoques teóricos de distinta índole, que adoptan formas particulares de concebir la investigación didáctica, sus métodos, objetivos y fundamentaciones. Destacamos en España dos grupos de investigación que se inscriben cada uno en un marco teórico concreto, enraizando en él sus producciones y contribuyendo a su desarrollo. Ambos grupos coincidieron a inicios de los años 1990 en lo que se llamó el Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SIIDM), que fue integrando progresivamente un número cada vez mayor de investigadores de distintas universidades españolas. Se celebraba entre dos y tres veces al año para compartir el estudio de los dos enfoques principales que se estaban desarrollando entonces en Francia: la TSD, creada por Guy Brousseau (1986), y la entonces emergente TAD creada por Yves Chevallard (1992). El SIIDM se convirtió posteriormente en el grupo Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica de la SEIEM, que agrupa investigadores que trabajan en dos enfoques: la TAD y el EOS; el segundo empezó su desarrollo en la Universidad de Granada a finales de los años 1990 (Godino, 2024).

Nos centraremos aquí en la presentación y análisis de estos dos marcos teóricos, al que el número especial de ZDM dedica dos artículos específicos (Gascón, 2024; Godino et al., 2024a). Estos dos enfoques agrupan en España un número considerable de investigadores que, como ya se ha indicado en algunas secciones anteriores, han presentado contribuciones en distintas áreas, como la enseñanza del álgebra y el cálculo diferencial, la enseñanza de la probabilidad y la estadística, la formación del profesorado, la modelización matemática y la enseñanza universitaria. Queremos resaltar en esta sección las investigaciones que se inscriben claramente dentro de estas dos teorías, que abordan problemas de investigación formulados desde las propias teorías y cuyos resultados contribuyen a su desarrollo.

Empecemos por el caso de la TAD. A finales de los años 1980 y principios de los 1990, un grupo de investigadores españoles empezaron a desarrollar tesis doctorales bajo la dirección de Guy Brousseau en la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997) o de Yves Chevallard en la entonces incipiente TAD originada a partir de los primeros trabajos de este autor sobre los procesos de transposición didáctica (Chevallard, 1985). Ambas teorías participaban del proyecto propuesto por Brousseau de creación de una ciencia que llamó Didáctica de las Matemáticas cuyo objetivo es "el estudio directo y científico – es decir, teórico experimental – de la relación de enseñanza en lo que tiene de específico del conocimiento que se quiere transmitir" (Brousseau, 1986, resumen).

El SIIDM facilitó la generación de un equipo de investigación muy activo cuyo marco de referencia es la TAD, pero que recurre con facilidad a herramientas complementarias de la TSD. Es un grupo de referencia en la comunidad internacional sobre la TAD, con un papel activo en colaboraciones con otros equipos, incluyendo a su creador, Yves Chevallard. El grupo español sobre la TAD ha desarrollado investigaciones en distintos ámbitos: la modelización matemática; el álgebra elemental; la modelización algebraico-funcional y el cálculo diferencial; la geometría en secundaria; la enseñanza universitaria de las matemáticas y la estadística, junto con los problemas de transición entre la secundaria y la universidad; así como la formación del profesorado de los distintos niveles educativos, desde infantil hasta la universidad. Estos últimos 20 años, la principal línea de desarrollo se centra en el estudio de las condiciones necesarias para un cambio de paradigma educativo, que permita hacer evolucionar el paradigma dominante caracterizado como "de la visita de las obras" a un nuevo paradigma, todavía incipiente, caracterizado como "del cuestionamiento del mundo" (Chevallard, 2013). En muchas ocasiones, estas líneas de investigación han entrado en "diálogo" con otros enfoques teóricos, como la TSD y los estudios de clase (*lesson studies*) en la formación del profesorado de educación infantil y primaria (García et al., 2024), distintas concepciones de la modelización matemática (Barquero, 2020, 2023; Florensa et al., 2020) o la teoría APOS y la resolución de problemas en la enseñanza universitaria (Bosch et al., 2017; Florensa et al., 2024). En esta línea de diálogo con otros enfoques, Gascón y Nicolás (2017, 2019, 2023) han propuesto un trabajo sistemático sobre la naturaleza de la didáctica como ciencia y el papel que en ella tienen los juicios de valor. Finalmente, algunos investigadores del equipo utilizan la TAD como marco analítico para estudios sobre historia de la educación matemática (Sánchez et al., 2020).

No detallaremos aquí las principales contribuciones del equipo español al desarrollo teórico y metodológico de la TAD, que han quedado recogidos en Gascón (2024). Allí se describen en particular las investigaciones sobre el álgebra elemental, las funciones y el cálculo diferencial abordadas desde una perspectiva integradora basada en la modelización algebraico funcional. Solo destacaremos la importancia de la noción de modelización matemática para elaborar modelos epistemológicos de referencia de las matemáticas escolares, cuyo desarrollo futuro permitirá abarcar una parte sustancial de las matemáticas escolares desde finales de la educación primaria hasta principios de la universidad, aportando así una herramienta valiosa para sustentar el análisis didáctico de los procesos de enseñanza y aprendizaje (Cid et al., 2020).

Nos centraremos en las líneas de trabajo de este grupo sobre el estudio de las condiciones que facilitan – así como de las restricciones que dificultan – la transición entre el paradigma de la visita de las obras y el del cuestionamiento del mundo (García et al., 2019). Una de estas líneas se centra en la enseñanza universitaria, tanto de matemáticas como de estadística, en primeros cursos de grados de ingeniería y de administración y dirección de empresas. Desde el trabajo pionero de Barquero (2009), se han venido diseñando, implementando y analizando un número importante de procesos de enseñanza y aprendizaje basados en la indagación bajo la forma de lo que se designa como "recorridos de estudio e investigación" (REI). Los REI ofrecen un marco metodológico a la vez amplio, para abarcar cualquier posible proceso de estudio, desde los más guiados hasta los más abiertos, pero también concreto para aportar las herramientas de diseño y gestión necesarias para asegurar su sostenibilidad en el contexto universitario actual (Markulin et al., 2024). Ofrecen además un marco idóneo para la formación del profesorado universitario, como se muestra en Florensa et al. (2021).

Las investigaciones sobre los REI se han llevado también a la enseñanza secundaria, aunque con intervenciones más puntuales, generalmente asociadas a la enseñanza de algún tema o ámbito concreto. Los trabajos actuales en este nivel refieren a la enseñanza de la combinatoria (Vásquez et al., 2021), de la geometría (Rojas y Sierra, 2021) y de la modelización matemática en contextos multidisciplinarios (Vásquez et al., en prensa). Bosch (2018) presenta una panorámica de las investigaciones en esta línea hasta la fecha, apuntando las relaciones entre los REI y los modelos epistemológicos de los distintos ámbitos matemáticos involucrados. Desde entonces, se ha progresado en el estudio de la ecología de los REI, es decir las condiciones de todo tipo (sociales, escolares, pedagógicas, matemáticas, etc.) que permiten su implementación, así como las restricciones, principalmente institucionales, que la limitan (Barquero et al., 2021; Bosch et al., 2022). En la actualidad, las investigaciones avanzan en el desarrollo de dicha ecología para facilitar al profesorado de secundaria y de la universidad las infraestructuras didácticas y matemáticas necesarias para el cambio de paradigma, incidiendo particularmente en la enseñanza secundaria, con la reciente introducción de las situaciones de aprendizaje y en la enseñanza universitaria con diferentes modalidades de integración de los REI en las asignaturas (Barquero et al., 2024).

En cuanto a la formación del profesorado, se están desarrollando dos grandes líneas de investigación. Una extiende las propuestas de los REI a la formación del profesorado a partir de la propuesta inicial de Ruiz-Olarría (2015). Distintos estudios describen estas propuestas, tanto en la formación del profesorado de secundaria y la modelización (Barquero et al., 2018, 2019, 2022b; Barquero y Ferrando, 2024), el cálculo diferencial (Lucas et al., 2023) o la estadística (Verbisck et al., 2022), como en la formación del profesorado de primaria en distintos temas curriculares, como la numeración (García et al., 2017), la probabilidad y el análisis de datos (Hakamata et al., 2024) o la lógica (Lerma et al., 2021), entre otros. La segunda línea se centra en la formación del profesorado de educación infantil, utilizando la TAD como marco analítico, pero adoptando los principios de la TSD como marco principal para la formación del profesorado. El ámbito matemático que se considera es el de la numeración y las investigaciones más recientes plantean procesos formativos en formato de estudio de clases, tomando como lección de estudio alguna situación de las estudiadas previamente en TSD (García et al., 2019, 2024). La originalidad, así como el interés de la investigación radican precisamente en el análisis del papel que tienen los conocimientos sobre la TSD aprendidos previamente por los estudiantes en el desarrollo del estudio de clases, no solo para diseñar las lecciones experimentadas, sino también –y, sobre todo– para analizar en vivo y tomar decisiones durante el desarrollo de las lecciones, así como para identificar episodios relevantes al respecto. Dentro de esta línea, trabajos más recientes están relacionando el análisis praxeológico de las operaciones aritméticas elementales con las propuestas didácticas basadas en el "structured problem-solving" de Japón (García et al., 2024).

Finalmente, no queremos dejar de mencionar aquí las investigaciones sobre la historia de la educación matemática que se han comentado más arriba, y que abren una línea de desarrollo de la TAD muy original, tanto dentro como fuera de España.

El segundo marco teórico que destacamos es el Enfoque Onto-Semiótico que empezó a desarrollar Juan Díaz Godino en los años 1990 con el objetivo de articular los distintos constructos utilizados en educación matemática para describir los fenómenos cognitivos, así como las nociones principales de marcos teóricos como la TSD, la TAD, la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990) o la teoría de los registros de representación teórica de Duval (1995). Godino et al. (2024a) presentan una descripción de lso principales cpmponentes del EOS. En la actualidad, podemos distinguir cinco líneas de desarrollo de este enfoque. El primero es el trabajo continuado de sistematización del EOS y la profundización sobre sus fundamentos y antecedentes, un esfuerzo que queda recogido en Godino (2024). La segunda línea es la aplicación de las herramientas teóricas del EOS a diferentes bloques de contenidos de la matemática escolar, algunos de los cuales ya se han comentado previamente en la sección 2, como el razonamiento algebraico y funcional (Begué et al., 2018; Burgos et al., 2024; Godino et al., 2024b) o el razonamiento diagramático (Giacomone et al., 2023). En esta línea se realizan análisis detallados de la actividad matemática con el fin de comprender la complejidad de los objetos y procesos implicados en la resolución de problemas, proporcionando un fundamento para los procesos educativos-instruccionales de matemáticas. Esta línea de investigación se extiende en estudios como el de Godino et al. (2023), centrada en el diseño, planificación e implementación de procesos educativos-instruccionales en matemáticas. Se utiliza la teoría de la idoneidad didáctica como guía para diseñar procesos instruccionales en matemáticas localmente idóneos para lograr los fines educativos planificados.

Los estudios sobre la formación de profesores, que han sido comentados previamente, se distinguen también como una de las líneas de desarrollo abordadas por el EOS en la comunidad española (Fernández-López et al., 2024; Morales-López et al., 2024). Esta línea se centra en el diseño, implementación y evaluación de programas y acciones específicas de formación de profesores de matemáticas. En estas acciones, el sistema de categorías de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas desarrollado y los criterios de idoneidad se usan para describir y comprender la actividad de formadores y profesores de matemáticas, e identificar posibles mejoras. Destacamos finalmente los estudios sobre la articulación del EOS con otros enfoques, una línea de investigación que caracteriza este marco teórico desde sus primeras publicaciones y que ha dado lugar a trabajos recientes (como Ledezma et al., 2024; Hummes et al., 2023; Manolino et al., 2023; Rodríguez-Nieto et al., 2023, 2024).

7. CONCLUSIONES

Este trabajo intenta mostrar ideas que están siendo centro de atención de los investigadores de educación matemática en nuestro país, independientemente de los referentes teóricos y metodológicos usados. Por lo tanto, no es en sí mismo una revisión sistemática de investigaciones, sino un intento de identificar preocupaciones y aportes realizados de manera conjunta, canalizados a través de los simposios de la SEIEM en los últimos años y de publicaciones destacables. Somos conscientes de que puede haber ideas que no hayamos recogido con el énfasis suficiente y de que la instantánea que proponemos, además de necesariamente subjetiva, también es provisional, dado que la investigación se sigue desarrollando en nuestro día a día, algunas líneas evolucionarán, otras igual desaparecerán y dejarán lugar a nuevas propuestas y avances.

Al observar la panorámica que hemos presentado, no deja de sorprender la diversidad de temáticas, problemáticas y enfoques que han adoptado los distintos grupos de investigación, aunque se puedan encontrar en algunos casos agrupaciones o sinergias que integran números importantes de investigadores y que la SEIEM intenta facilitar a través de sus propios grupos. Al intentar destacar aspectos comunes, surge en primer lugar el estrecho contacto de la mayoría de los grupos con investigadores europeos y, sobre todo, de América Latina. No es extraño que la proximidad lingüística y cultural se traduzca en colaboraciones científicas, intercambio de estudiantes y organización de conferencias y publicaciones. En cierta manera, cuando hablamos de la investigación española en educación matemática, nos estamos refiriendo más a una comunidad lingüística que a un país.

Otra característica común, aunque no específica de la comunidad española, es el predominio de estudios exploratorios, basados en métodos observacionales y cualitativos cuyo objetivo es ayudar a identificar y delimitar fenómenos vinculados a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, más que a generar evidencia sobre la eficacia de determinadas propuestas o políticas educativas al respecto. Finalmente, y sin duda vinculado a lo anterior, en todos los casos se observa la necesidad de seguir desarrollando, al lado de la investigación fundamental, estudios dirigidos a analizar las condiciones necesarias para que la investigación pueda impactar en nuestros sistemas educativos y aportar respuestas a las nuevas necesidades que este plantea. Estos estudios requieren esfuerzos conjuntos de investigadores en educación matemática, profesores de todos los niveles educativos y políticas educativas curriculares que se desarrollen de forma coordinada. También requieren de infraestructuras colaborativas particulares. Se trata de una tarea pendiente de nuestra comunidad de investigación, que es muy consciente de su importancia. Los desarrollos recientes de algunos equipos españoles sobre el álgebra elemental y el pensamiento computacional, la estadística y el análisis de datos, la enseñanza a través de situaciones de aprendizaje o la formación del profesorado abren una rendija de esperanza al respecto.

Referencias

Adamuz-Povedano, N. (2023). Treinta años de investigaciones sobre desarrollo de sentido numérico en educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 11–25). SEIEM.

Allen, M. J. y Yen, W. M. (1979). *Introduction to measurement theory.* Brooks/Cole.

Alonso-Castaño, M., Alonso, P., Mellone, M. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2021). What mathematical knowledge do prospective teachers reveal when creating and solving a probability problem? *Mathematics, 9*(24), 3300. https://doi.org/10.3390/math9243300

Alsina, À., Cornejo-Morales, C. y Salgado, M. (2021). Argumentación en la matemática escolar infantil: Análisis de una actividad STEM usando la Situación Argumentativa en Conexión Interdisciplinar. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 20*, 141–159. https://doi.org/10.35763/aiem20.3999

Alsina, À., Pincheira, N. y Delgado-Rebolledo, R. (2024). The professional practice of designing tasks: how do preservice early childhood teachers promote mathematical processes in early algebra? *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01636-1

Álvarez-Arroyo, R., Batanero, C. y Gea, M. M. (2024). Probabilistic literacy and reasoning of prospective secondary school teachers when interpreting media news. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01586-8

Amit, M. y Neria, D. (2008). “Rising to the challenge”: using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM Mathematics Education, 40*(1), 111–129. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0069-5

Arbona, E., Beltrán, M. J., Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2017). Los patrones geométricos como contexto para introducir a un estudiante de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas en el álgebra. En Codina, A., Puig, L., Arnau, D., Sánchez, M.T., Montoro, A. B., Claros, J., Arnal, M. y Baeza, M. A. (Eds.), *Investigación en pensamiento numérico y algebraico: 2017* (pp. 38–47). Universidad Rey Juan Carlos y SEIEM.

Arnal-Bailera, A. y Oller-Marcén, A.M. (2020). Prospective secondary mathematics teachers read Clairaut: professional knowledge and original sources. *Educational Studies in Mathematics, 105*(2), 237-259.

Arnau, D. (2022). De la tecnología a la educación matemática: ¿una vía de doble sentido? En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 17–29). SEIEM.

Arteaga, P., Díaz-Levicoy, D. y Batanero, C. (2021a). Primary school students’ reading levels of line graphs. *Statistics Education Research Journal, 20*(2), Article 6. https://doi.org/10.52041/serj.v20i2.339

Arteaga, P., Jiménez-Castro, M. y Batanero, C. (2021b). Variables que caracterizan los gráficos estadísticos y las tareas relacionadas con ellos en los libros de texto de educación secundaria en Costa Rica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 20*, 125–140. https://doi.org/10.35763/aiem20.4001

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2019). Meanings attributed to letters in functional contexts by primary school students. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*(7), 1271–1291. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10012-5

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2021). Fourth-graders’ justifications in early algebra tasks involving a functional relationship. *Educational Studies in Mathematics, 107*(2), 359–382. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10036-1

Badillo, E., Climent, N., Fernández, C. y González-Astudillo, M. T. (Eds.). (2019). *Investigación sobre el profesor de Matemáticas: práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional*. Ediciones Universidad de Salamanca.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324

Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona. http://hdl.handle.net/10803/3110

Barquero, B. (2020). Introducción a ‘Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de a modelización matemática: Aproximaciones a la problemática de su diseño, implementación y análisis’. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *17*, 1–4. https://www.aiem.es/index.php/aiem/article/view/326

Barquero, B. (2023). Mathematical modelling as a research field: Transposition challenges and future directions. En Drijvers, P., Csapodi, C., Palmér, H., Gosztonyi, K. y Kónya, E. (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 6–30). Alfréd Rényi Institute of Mathematics y ERME. https://hal.science/hal-04427884

Barquero, B., Beltrán, P., López, P., Marí, M. y Vásquez, S. (2024). Puentes entre investigación y transferencia: el proyecto Labinquiry en Secundaria. *XXVII Simposio de la SEIEM*

Barquero, B., Bosch, M., Florensa, I. y Ruiz-Munzón, N. (2021). Study and research paths in the frontier between paradigms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(5), 1213–1229. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1988166

Barquero, B., Bosch, M. y Florensa, I. (2022b). Contribuciones de los recorridos de estudio e investigación en la universidad: el caso de la formación del profesorado. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 21*, 87–106. https://doi.org/10.35763/aiem21.4232

Barquero, B., Bosch, M. y Romo, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM–Mathematics Education*, *50*, 31–43. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0907-z

Barquero, B., Bosch, M. y Wozniak, F. (2019). Modelling praxeologies in teacher education: The cake box. En U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the CERME 11* (pp. 1144–1152). Freudenthal Group y Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Barquero, B. y Ferrando, I. (2024). Teacher Education for mathematical modelling: exploring the experiences of secondary school teachers in two courses. *ZDM Mathematics Education*, https://doi.org/10.1007/s11858-024-01609-4

Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. (2024). Teaching and learning of probability. *ZDM Mathematics Education, 56*(1), 5–17. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01511-5

Batanero, C., Álvarez-Arroyo, R., Hernández-Solís, L. A. y Gea, M. M. (2021). El inicio del razonamiento probabilístico en la educación infantil. *PNA, 15*(4), 267–288. https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22349

Batanero, C., Begué, N., Borovcnik, M. y Gea, M. M. (2020). Ways in which high-school students understand the sampling distribution for proportions. *Statistics Education Research Journal, 19*(3), 32–52.

Batanero, C., Hernandez-Solis, L. A. y Gea, M. M. (2023). Analyzing Costa Rican and Spanish students' comparisons of probabilities and ratios. *Statistics Education Research Journal, 22*(3), article 7. https://doi.org/10.52041/serj.v22i3.659

Batanero, C., López-Martín, M. M., Arteaga, P. y Gea, M. M. (2018). Characterizing probability problems posed in university entrance tests in Andalucia. En C. Batanero y E. Chernoff (Eds.), *Teaching and learning stochastics. Advances in probability education research* (pp. 103–123). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_7

Begué, N., Batanero, C. y Gea, M. (2018). Comprensión del valor esperado y variabilidad de la proporción muestral por estudiantes de educación secundaria obligatoria. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(2), 63–79. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2256

Begué, N., Batanero, C., Gea, M. M. y Valenzuela-Ruiz, S. M. (2023). Prospective secondary school teachers' knowledge of sampling distribution properties. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 19*(5), em2265. https://doi.org/10.29333/ejmste/13159

Berciano Alcaraz, A., Ortega del Rincón, T. y Puerta Rebuel, M. (2015). Aprendizajes de las interpolaciones gráficas y algebraicas. Análisis comparativo. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(3), 43–58. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1454

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2021a). Levels of Sophistication in Elementary Students' Understanding of Polygon Concept and Polygons Classes. *Mathematics, 9*, 1966, https://doi.org/10.3390/math9161966

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2021b). Primary school students' understanding of polygons and the relationships between polygons. *Educational Studies in Mathematics, 106,* 251–270, https://doi.org/10.1007/s10649-020-10012-1

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2022). Cambios en la comprensión de las relaciones entre polígonos en estudiantes de 8-9 años. *Enseñanza de las Ciencias, 40*(2), 49–70.https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3208

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2024). Polygon Class Learning Opportunities: Interplay Between Teachers' Moves, Children's Geometrical Thinking and Geometrical Tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 22*, 1381–1403. https://doi.org/10.1007/s10763-023-10425-3

Blanco, T. F., Camargo, L. y Sequeiros, P. G. (2024a). How visualization and argumentation are articulated in research on teaching and learning geometry. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01619-2

Blanco, R. y García-Moya, M. (2021). Graph theory for primary school students with high skills in mathematics. *Mathematics, 9*(13), 1567. https://doi.org/10.3390/math9131567

Blanco, R., García-Moya, M. y Gómez-Atienza, D. (2024b). Design of a mathematical problem-solving application for students with autism spectrum disorder. *Educational Technology & Society*, *27*(2), 220–242. https://doi.org/10.30191/ETS.202404_27(2).RP09

Bosch, M. (2018). Study and Research Paths: A model for inquiry. En B. Sirakov, P. N. De Souza y M. Viana (Eds.), *International Congress of Mathematicians, 3* (pp. 4001–4022). World Scientific Publishing Co.

Bosch, M., Chevallard, Y., García, F. J. y Monaghan, J. (2020). *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in mathematics education. A comprehensive casebook*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780429198168

Bosch, M., Florensa, I., Markulin, K. y Ruiz-Munzon, N. (2022). Real or fake inquiries? Study and research paths in statistics and engineering education. En R. Biehler, M. Liebendörfer, G.Gueudet, C. Rasmussen y C.Winsløw (Eds.), *Practice-oriented research in tertiary mathematics education. Advances in mathematics education* (pp. 393–409). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-14175-1_19

Bosch, M., Gascón, J. y Trigueros, M. (2017). Dialogue between theories interpreted as research praxeologies: the case of APOS and ATD. *Educational Studies in Mathematics, 95*(2), 39–52. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9734-3

Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education, 13*(6), 1893–1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: El caso del constructo idoneidad didáctica. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, 32*(60), 255–278. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques* (Tesis Doctoral). Université Bordeaux I. Disponible en https://theses.hal.science/tel-00471995/fr/

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47211-2

Bruno, A. y Almeida, R. (2023). Investigaciones sobre el desarrollo del sentido numérico en el aula de secundaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 27–41). SEIEM.

Bruno, A. y Noda, A. (2010). Necesidades educativas especiales en matemáticas. El caso de personas con síndrome de Down. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 141–162). SEIEM.

Bruno, A., Gil-Clemente, E., Gutiérrez, A., Jaime, A. y Polo-Blanco, I. (2022). Pensemos en unas matemáticas para todo el alumnado. En L. J. Blanco, N. Climent, M. T. González, A. Moreno, G. Sánchez-Matamoros, C. de Castro y C. Jiménez (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática* (pp. 322–347). SEIEM.

Bruno, A., Polo-Blanco, I., Van Vaerenbergh, S., Fernández-Cobos, R. y González-López, M. J. (2024). Strategies for solving multiplicative problems using a conceptual model-based problem-solving approach. A case study with a student with autism spectrum disorder. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01568-w

Buforn, A., Llinares, S. y Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 23*(76), 229–251.

Buforn, A., Llinares, S., Fernández, C., Coles, A. y Brown, L. (2022). Pre-service teachers' knowledge of the unitizing process in recognizing students' reasoning to propose teaching decisions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 53*(2), 425–443, https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1777333

Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Godino, J.D. (2024). Expanded model for elementary algebraic reasoning levels. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(7), em2475. https://doi.org/10.29333/ejmste/14753

Callejo, M. L., García-Reche, A. y Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico temprano de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 10*, 5–25.

Callejo, M.L., Pérez-Tyteca, P., Moreno, M. y Sánchez-Matamoros, G. (2022). The use of a length and measurement HLT by pre-service kindergarten teachers' to notice children's mathematical thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20*, 597–617. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10163-4

Camacho, M., Perdono, J., Trujillo, R. (2022). Matemáticas en la Universidad. En L. J. Blanco, N. Climent, M. T. González, A. Moreno, G. Sánchez-Matamoros, C. de Castro y C. Jiménez (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática* (pp. 224–259). Ediciones Universidad de Granada-SEIEM.

Camargo, L., Perry, P., Molina, Ó., Samper, C. y Vargas, C. (2024). Diversidad de acepciones de argumento: necesidad de la formación de profesores. *PNA, 18*(3), 313–338. https://doi.org/10.30827/pna.v18i3.26749

Cañadas, M. C. (2023). Una panorámica de las investigaciones sobre pensamiento numérico y pensamiento algebraico. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 3–9). SEIEM.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior, 41*, 87–103. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.004

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209–218). Comares.

Cañadas, M. C., Molina, M. y del Río, A. (2018). Meanings given to algebraic symbolism in problem-posing. *Educational Studies in Mathematics, 98*(1), 19–37. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9797-9

Cañadas, M. C., Moreno, A. J. y Torres, M. D. (2024). First encounter with constructing graphs in the functional thinking approach to school algebra in 3rd and 4th grades. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01627-2

Carrillo, D. (2004). La codeterminación entre las organizaciones matemáticas y las organizaciones didácticas: Pestalozzi y la enseñanza mutua. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *24*(1), 11–44.

Carrillo, D., Maurandi, A. y Olivares, P. (2018). El cálculo y la medida en el primer grado de la escuela Decroly: Análisis desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Revista Colombiana de Matemática Educativa RECME, 3,* Número Especial. http://ojs.asocolme.org/index.php/RECME

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Avila, A., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-Gonzalez, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalan, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Castro, E. y Cañadas, M. C. (2016). Enseñanza de las matemáticas para alumnos con necesidades educativas especiales. En L. Rico, M. C. Cañadas, A. Marín y M. T. Sánchez (Eds.), *Investigaciones en didáctica de la matemática. Homenaje a Moisés Coriat* (pp. 25–33). Comares.

Castro, E., Cañadas, M. C., Molina, M. y Rodríguez-Domingo, S. (2022). Difficulties in semantically congruent translation of verbally and symbolically represented algebraic statements. *Educational Studies in Mathematics, 109*(3), 593–609. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10088-3

Cid, E., Muñoz-Escolano, J. M. y Ruiz-Munzón, N. (2020). Research on negative numbers in school algebra. En: M. Bosch, Y. Chevallard, F. J. García y J. Monhagan (Eds.), *Working with the anthropological theory of the didactic in mathematics education. A comprehensive casebook* (p. 61–76). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780429198168

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Fundamental concepts in didactics: Perspectives provided by an anthropological approach. En R. Douady et al. (Eds.), *Recherches en Didactique des Mathématiques, Selected Papers* (pp. 131–167). La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude: 3. Ecologie & régulation. *XIe École d'Été de Didactique Des Mathématiques* (pp. 41–56). La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparadigma emergente. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education, 2*(2), 161–182 https://doi.org/10.4471/redimat.2013.26

Climent, N., Contreras, L.C., Montes, M. y Ribeiro, M. (2024). The MTSK model as a tool for designing tasks for teacher education. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01605-8

Del Olmo-Muñoz, J., Diago, P. D., Arnau, D., Arnau-Blasco, D. y González-Calero, J. A. (2024). Metacognitive control during problem solving at early ages in programming tasks using a floor robot. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01621-8

Del Olmo-Muñoz, J., González-Calero, J. A., Diago, P. D., Arnau, D. y Arevalillo-Herráez, M. (2023). Intelligent tutoring systems for word problem solving in COVID-19 days: could they have been (part of) the solution? *ZDM – Mathematics Education, 55*(1), 35–48. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01396-w

Diago, P. D., Arnau, D. y González-Calero, J. A. (2018). Elementos de resolución de problemas en primeras edades escolares con Bee-bot. *Educación Matemática en la Infancia (Edma 0-6), 7*(1), 12–41.

Dólera, J. y Sánchez-Jiménez, E. (2024). Pedro Puig Adam y el método heurístico en la enseñanza de las matemáticas en España. *El Futuro del Pasado, 15*, 703–723. https://doi.org/10.14201/fdp.31159

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95–123). Kluwer.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Escrivà, M. T., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2018). Uso de software 3D para el desarrollo de habilidades de visualización en Educación Primaria. *Educación Matemática en la Infancia (Edma 0-6), 7*(1), 42–62.

Espinoza, J., Lupiañez, J. L. y Segovia, I. (2016). La invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento matemático. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 14*(2), 368–392. http://dx.doi.org/10.14204/ejrep.39.15067

Fernández, C., Llinares, S., Rojas, Y. (2020). Prospective mathematics teaches' development of noticing in an online teacher education program. *ZDM Mathematics Education, 52,* 959–972, https://doi.org/10.1007/s11858-020-01149-7

Fernández, C., Moreno, M. y Sánchez-Matamoros, G. (2024) Prospective secondary teachers' noticing of students' thinking about the limit concept: pathways of development. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01573-z

Fernández, C., Sánchez–Matamoros, G., Moreno, M. y Callejo, M. L. (2018a). La coordinación de las aproximaciones en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes. *Enseñanza de las Ciencias, 36*, 143–162. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2291

Fernández, C., Sánchez–Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018b). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 13*, 39–61. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.229

Fernández-León, A., Gavilán-Izquierdo, J. M. y Toscano, R. (2021). A case study of the practices of conjecturing and proving of research mathematicians. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 52*(5), 767–781.

Fernández-López, A., Blanco, T. F. y González Sequeiros, P. (2024). Exploring pre-service primary teachers' emotions in a geometry project with 3D design. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 20*(6), em2451. https://doi.org/10.29333/ejmste/14589

Fernández-Millán, E. y Molina, M. (2016). Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas. *Enseñanza de las Ciencias, 34*(1), 53–71. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1455

Fernández Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Rico, L. (2015). Razonamientos basados en el concepto de límite finito de una función en un punto. *Enseñanza de las Ciencias,* 33(2), 211–229. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1575

Fiallo, J. y Gutiérrez, A. (2017). Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 145–167.

Florensa, I., Barbero, M. y Martínez-Planell, R. (2024). Comparative analysis between three theoretical approaches through empirical experiences at university level. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01632-5

Florensa, I., Bosch, M. y Gascón, J. (2021). Question–answer maps as an epistemological tool in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 24*, 203–225. https://doi.org/10.1007/s10857-020-09454-4

Florensa, I., García, F. J. y Sala, G. (2020). Condiciones para la enseñanza de la modelización matemática. Estudios de caso en distintos niveles educativos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *2018*(17), 21–37. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.315

Font, V., Breda, A., Sala-Sebastia, G. y Pino-Fan, L.R. (2024). Future teachers' reflections on mathematical errors made in their teaching practice. *ZDM Mathematics Education,* https://doi.org/10.1007/s11858-024-01574-y

Frank, K. y Thompson, P. W. (2021). School students' preparation for calculus in the United States. *ZDM Mathematics Education, 53*(3), 549–562. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01231-8

Friel, S. N., Curcio, F. R. y Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 124–158. https://doi.org/10.2307/749671

Fuentealba, C., Badillo, E. y Sánchez-Matamoros, G. (2019). Identificación y caracterización de los subniveles de desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(2), 63–84. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2518

Fuentealba, C., Sánchez-Matamoros, G., Badillo, E. y Trigueros, M. (2017). Thematization of derivative schema in university students: nuances in constructing relations between a function's successive derivatives. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 48*(3), 374–392. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1248508

Fuentealba, C., Trigueros M., Sánchez-Matamoros, G. y Badillo, E. (2022). Los mecanismos de asimilación y acomodación en la tematización de un Esquema de derivada. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 21*, 23–44. https://doi.org/10.35763/aiem21.4241seiem.es

García, F. J., Barquero, B., Florensa, I. y Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 15*, 75–94. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.267

García, F. J., Lendínez, E. M., Lerma, A. M. y Abril, A. M. (2024). Mechanisms and evidence of prospective teachers' learning through enquiry-oriented practices: the case of a lesson study intervention. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01620-9

García, F. J., Lendínez, E. M. y Sierra, T. A. (2017). La enseñanza del número en la escuela infantil: un estudio exploratorio del logos de la profesión. *REDIMAT*, *6*(1), 33–55. https://doi.org/10.17583/redimat.2017.2059

García, F. J., Wake, G., Lendínez, E.M. y Lerma, A.M. (2019). The role of epistemological and didactic models in the education of teachers through lesson study. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(1), 137–156. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2512

García-Moya, M. y Blanco, R. (2024). Applications with mathematical content for users with autism. *IEEE Revista Iberoamericana de Tecnologías del Aprendizaje, 19*, 111–119. https://doi.org/10.1109/RITA.2024.3368351

García-Moya, M., Blanco, R. y Rodrigues, M. (2024). Use of a conceptual model-based approach for a student with autism spectrum disorder to learn to solve Cartesian product problems in an inclusive context. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities, 59*(1), 30–44.

Gascón, J. (2024). Contributions of the Anthropological Theory of the Didactic to the Epistemological Programme of Research in Mathematics Education. *ZDM Mathematics Education.* https://doi.org/10.1007/s11858-024-01563-1

Gascón, J. y Nicolás, P. (2017). Can didactics say how to teach? The beginning of a dialogue between the anthropological theory of the didactic and other approaches. *For the Learning of Mathematics*, 37 (3), 26–30.

Gascón, J. y Nicolás, P. (2019). Research ends and teaching ends in the anthropological theory of the didactic. *For the learning of mathematics*, 39 (2), 42–47.

Gascón, J. y Nicolás, P. (2023). El papel de los juicios de valor en la ciencia didáctica. Diálogo entre la teoría antropológica de lo didáctico y el enfoque ontosemiótico en educación matemática. *Revista de Educación*, *35*(2), 47–68. https://doi.org/10.24844/EM3502.02

Gea, M. M., Pallauta, J. D., Batanero, C. y Valenzuela-Ruiz, S. M. (2022). Statistical tables in Spanish primary school textbooks. *Mathematics, 10*, 2809. https://doi.org/10.3390/math10152809

Giacomone, B., Godino, J.D., Blanco, T.F. y Wilhelmi, M. R. (2023). Onto-semiotic analysis of diagrammatic reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 21, 1495–1520. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10316-z

Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. McGraw-Hill, Aula Magna.

Godino, J. D., Aké, L., Contreras, Á., Estepa, A., Fernandez, T., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Díaz, C., Oliveras, M. L., Lacasta, E. y Lasa, A. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(1), 127–150. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1468

Godino, J. D., Batanero, C. y Burgos, M. (2023). Theory of didactical suitability: An enlarged view of the quality of mathematics instruction. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 19*(6), em2270. https://doi.org/10.29333/ejmste/13187

Godino, J. D., Batanero, C., Burgos, M. y Wilhelmi, M. R. (2024). Understanding the onto-semiotic approach in mathematics education through the lens of the cultural historical activity theory. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01590-y

Godino, J. D, Burgos M y Wilhelmi M. R. (2024). Onto-semiotic analysis of the emergence and evolution of functional reasoning. *RIME, 1*(1), 09–37. https://doi.org/10.32735/S2810-7187202400013181

Godino, J. D., Gonzato, M., Cajaraville, J. A. y Fernández Blanco, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(2), 109–130.

Gómez-Chacón, I. M. y Marbán, J. M. (2024). Epistemic emotions and pre-service mathematics teachers' knowledge for teaching. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01624-5

Gómez-Chacón, I. M., Romero Albaladejo, I. M. y García López, M. M. (2016). Zig-zagging in geometrical reasoning in technological collaborative environments: a mathematical working space-framed study concerning cognition and affect. *ZDM Mathematics Education, 48*(6), 909–924. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0755-2

González, C., Noda, A., Bruno, A., Moreno, L. y Muñoz, V. (2015). Learning subtraction and addition through digital boards: a Down syndrome case. *Universal Access in the Information Society, 14*(1), 29–44. https://doi.org/10.1007/s10209-013-0330-3

Gónzalez-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J. y Van Dooren, W. (2020). Various ways to determine rational number size: an exploration across primary and secondary education. *European Journal of Psychology of Education, 35*, 549–565. https://doi.org/10.1007/s10212-019-00440-w

González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J. y Van Dooren, W. (2022a). Profiles in understanding operations with rational numbers. *Mathematical Thinking and Learning, 24*(3), 230–247, https://doi.org/10.1080/10986065.2021.1882287

González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J. y Van Dooren, W. (2022b). Profiles in understanding the density of rational numbers among primary and secondary school students. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 22*, 47–70. https://doi.org/10.35763/aiem22.4034

González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J. y Van Dooren, W. (2023). Incorrect ways of thinking about the size of fractions. *International Journal of Science and Mathematics Education, 21,* 2005–2025, https://doi.org/10.1007/s10763-022-10338-7

Goñi-Cervera, J., Cañadas, M. C. y Polo-Blanco, I. (2022). Generalisation in students with autism spectrum disorder: an exploratory study of strategies. *ZDM – Mathematics Education, 54*(6), 1333–1347. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01415-w

Gorgorió, N., Albarracín, Ll., Laine, A. y Llinares, S. (2021). Primary education degree programs in Alicante, Barcelona and Helsinki: Could the differences i n the mathematical knowledge of incoming students be explained by the access criteria? *LUMAT General Issue, 9*(1), 174–207, https://doi.org/10.31129/LUMAT.9.1.1468

Grossman, P. (2018). *Teaching core practices in teacher education.* Harvard Education Press.

Guinjoan, M., Fortuny, J. M. y Gutiérrez, Á. (2015). Análisis del comportamiento de alumnos expertos resolutores de problemas en el contexto del concurso matemático Pruebas Cangur. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(1), 29–46. https://doi.org/https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1438

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of 20th PME Conference* (Vol. 1, pp. 3–19). PME. Disponible en http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/Gut96c.pdf

Gutiérrez, A., Benedicto, C., Jaime, A. y Arbona, E. (2018a). The cognitive demand of a gifted student's answers to geometric pattern problems. En F. M. Singer (Ed.), *Mathematical creativity and mathematical giftedness* (pp. 169–198). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73156-8_7

Gutiérrez, A., Ramírez, R., Benedicto, C., Beltrán-Meneu, M. J. y Jaime, A. (2018b). Visualization abilities and complexity of reasoning in mathematically gifted students' collaborative solutions to a visualization task. A networked analysis. En K. S. Mix y M. T. Battista (Eds.), *Visualizing mathematics. The role of spatial reasoning in mathematical thought* (309–337). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-98767-5_14

Hakamata, R., Fukuda, H., Otani, H., Otaki, K., Barquero, B. y Bosch, M. (2024). Potential of Brousseau's guessing game in teacher education: two complementary cases. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.* https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2321587

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C. y Gea, M. M. (2023). Costa Rican students' proportional reasoning and comparing probabilities in spinners. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 19*(12), em2373. https://doi.org/10.29333/ejmste/13869

Hoyos, E., Acosta, C. A., Aristizábal, J. H., Mesa, M. J., Trujillo, C. A., Rincón, J. A., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2021). Influencia de un software educativo en la consolidación del aprendizaje de superficies cuádricas. *TED: Tecné, Episteme y Didaxis, 49*, 123–142.

Hummes, V., Breda, A., Font, V. y Seckel, M. J. (2023). Improvement of reflection on teaching practice in a training course that integrates the lesson study and criteria of didactical suitability. *Journal of Higher Education Theory & Practice, 23* (14). https://doi.org/10.33423/jhetp.v23i14.6395

Ivars, P., Fernandez, C., Llinares, S. y Choy, B. H. (2018). Enhancing noticing: using a hypothetical learning trajectory to improve pre-service primary teachers' professional discourse. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(11), em1599

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2020a). Uso de una trayectoria hipotética de aprendizaje para proponer actividades de instrucción. *Enseñanza de las Ciencias, 38*(3), 105–124. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2947

Ivars, P.; Fernandez, C. y Llinares, S. (2020b). A Learning Trajectory as a Scaffold for Preservice Teachers' Noticing of Students' Mathematical Understanding. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18,* 529–548, https://doi.org/10.1007/s10763-019-09973-4

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2017). Investigación sobre estudiantes con alta capacidad matemática. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 71–89). SEIEM.

Jefatura del Estado (2020). Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado, 340*, 122868–122953.

Kosslyn, S. M. (1994). *Elements of graph design.* W. H. Freeman.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. The University of Chicago Press.

Kuzniak, A., Montoya, E. y Richard, P. (Eds). (2022). Mathematical work in educational context. *The perspective of the Theory of Mathematical Working Space*. Springer.

Laborde, C. (2005). The hidden role of diagrams in pupils' construction of meaning in geometry. En J. Kilpatrick, C. Hoyles y O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in mathematics education* (pp. 159–179). Springer.

Ledezma, C., Rodríguez-Nieto, C. A. y Font, V. (2024). The role played by extra-mathematical connections in the modelling process. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 25*, 81–103. https://doi.org/10.35763/aiem25.6363

Lerma, A. M., Barquero, B., García, F. J., Hidalgo-Herrero, M., Ruiz-Olarría, A. y Sierra, T. (2021). Los conocimientos lógicos en la formación matemático-didáctica de maestros. En P. D. Diago, D. F. Yañez, M. T. González y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 385–392). SEIEM.

Lin, F. L. y Rowland, T. (2016). Preservice and in-service mathematics teachers' knowledge and professional development. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 483–520). Brill-Sense.

Llinares, S. (2018). Conocimiento, competencia docente del profesor de matemáticas y llegar a ser un formador de profesores. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 13*, 1–3.

Llinares, S. (Coord.) (2023). Formación y desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En L. J. Blanco, N. Climent, M. T. González, A. Moreno, G. Sánchez-Matamoros, C. de Castro y C. Jiménez (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática* (p. 480–524). Ediciones Universidad de Granada-SEIEM.

Llinares, S. y Clemente, F. (2019). Characteristics of the shifts from configural reasoning to deductive reasoning in geometry. *Mathematics Education Research Journal, 31*, 259–277, https://doi.org/10.1007/s13394-018-0253-7

Lucas, C., Ruiz-Olarría, A. y Gascón, J. (2023). Una estrategia para la formación del profesorado: El caso del cálculo diferencial elemental, *Enseñanza de las Ciencias 41*(2), 71–92. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5640

Lupiáñez, J. L., Olivares, D. y Segovia, I. (2024). Examining the role played by resources, goals and orientations in primary teachers' decision-making for problem-solving lesson plans. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01614-7

Madrid, M. J., León-Mantero, C. y Maz-Machado, A. (2023a). The introduction of the algebraic thought in Spain: the resolution of the second degree equation. En S. Romero Sánchez, A. Serradó Bayés, P. Appelbaum y G. Aldon (Eds.), *The role of the history of mathematics in the teaching/learning process* (pp. 79–115). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-29900-1_4

Madrid, M. J., Maz-Machado, A., León-Mantero, C. y López-Esteban, C. (2023b). Aplicaciones de las matemáticas a la vida diaria en los libros de aritmética españoles del siglo XVI. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31*(59), 1082–1100. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a12

Madrid, A. E., Valenzuela-Ruiz, S. M., Batanero, C. y Garzón-Guerrero, J. A. (2022). Comprensión de la mediana por estudiantes universitarios. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 22*, 1–21. https://doi.org/10.35763/aiem22.3902

Manero, V. y Arnal-Bailera, A. (2021). Understanding proof practices of pre-service mathematics teachers in geometry. *Mathematics Teaching Research Journal 13*(3), 99–130.

Manolino, C., Giacomone, B. y Beltrán-Pellicer, P. (2023). Semiotic bundle approach and onto-semiotic approach: a dialogue between two theories on an arithmetic-algebraic problem. *Educação e Pesquisa*, 49, e256699. https://doi.org/10.1590/S1678-4634202349256699eng

Markulin, K., Bosch, M. y Florensa, I. (2024). Inquiry dynamics at the crossroads of descriptive and inferential statistics, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.* https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2309278

Márquez, M., Fernández, C. y Callejo, M.L. (2021). Pre-service primary school teachers' knowledge and their interpretation of students' answers to a measurement division problem with fractions. *Mathematics, 9*(24), 3163. https://doi.org/10.3390/math9243163

Matsumoto-Royo, K. y Ramirez-Montoya, M. S. (2021). Core Practice-based teacher education: a systematic literature review of its teaching and assessment processes. *Studies in Educational Evaluation, 70,* 101047, https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2021.101047

Molina Jaime, O. J., Font, V. y Pino-Fan, L. (2019). Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(1), 93–116. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2484

Montero, E., Callejo, M. L. y Valls, J. (2020). Instrumentación de una progresión de estrategias por estudiantes para maestro. *Enseñanza de las Ciencias, 38*(2), 83–101. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.303

Montero, E., Callejo, M.L. y Valls, J. (2022). Anticipación de estrategias de resolución de problemas de división-medida con fracciones mediante una progresión de aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* *25*(3), 289–310. https://doi.org/10.12802/relime.22.2532.Montero

Mora, M., Gutiérrez, A., Jaime, A. (2023a). Identification of pre-algebra problems of generalization that discriminate mathematical giftedness. En P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi y E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the 13th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME)* (pp. 608–615). ERME.

Mora, M., Gutiérrez, A., Jaime, A. (2023b): Descriptores para analizar la flexibilidad en la resolución de problemas como indicador del talento matemático. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, P. Ivars (eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 395–402). SEIEM.

Mora, M., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2024a). Analysis of visualization as an indicator of mathematical giftedness. En T. Lowrie, A. Gutiérrez y F. Emprin (Eds.), *Proceedings of the 26th ICMI Study Conference* (pp. 207–214). ICMI.

Mora, M., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2022). Descriptors of generalization in primary school mathematically gifted students. En S. A. Chamberlin (Ed.), Proceedings of the 12th International Conference on Mathematical Creativity and Giftedness (pp. 203–209). IGMCG.

Mora, M., Ramírez, R., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2024b). Traits of generalization of problem solution methods exhibited by potential mathematically gifted students when solving problems in a selection process. ZDM *Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01625-4

Morales Merino, R. A., Cañadas, M., Brizuela, B. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(3), 59–78. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2472

Morales-López, Y., Breda, A. y Font, V. (2024). Articulation between a technological model and an educational model to deepen the reflection of prospective mathematics teachers. *International Journal of Educational Methodology, 10* (3), 479–494. https://hal.science/hal-04634421

Moreno, M., Sánchez-matamoros, G., Callejo, M.L., Perez-Tyteca, P. y Llinares, S. (2021). How prospective kindergarten teachers develop their noticing skills: the instrumentalization of a learning trajectory. *ZDM Mathematics Education, 53*, 57–72. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01234-5

Mulligan, J. (1992). Children's solutions to partition problems. En B. Southwell, R. Perry y K. Owens (Eds.), *Proceedings of the 15th Annual Conference of the MERGA* (pp. 410–420). MERGA.

Muñoz-Escolano, J.M. y Oller-Marcén, A.M. (2020). Análisis de los prólogos de los textos algebraicos publicados en España durante el siglo XVI. *Historia y Memoria de la Educación, 11*, 51-85. https://doi.org/10.5944/HME.11.2020.23545.

Muñoz-Escolano, J.M., Oller-Marcén, A.M. y Santágueda-Villanueva, M. (2022). La sección de problemas matemáticos del Boletín La Escuela (193-1916). *Historia y Memoria de la Educación, 16*, 425-458. https://doi.org/10.5944/hme.16.2022.30828.

Oller-Marcén, A. M. (2023). Mathematics in 18th Century Spanish Daily Press. The Early Years of Diario de Barcelona. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 37*(77), 1317-1335. https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a19.

Oller-Marcén, A.M. y Muñoz-Escolano, J.M. (2019). Conceptions about mathematics, its teaching and learning in Compendio Mathematico (1707) written by the Spanish Thomas Vicente Tosca (1651-1723). *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 33*(64), 635-648. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a09

Pacheco, E., Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2023). Caracterización de tareas de inecuaciones propuestas en textos escolares de Educación Primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 427–434). SEIEM.

Pallauta, J. D., Batanero, C. y Gea, M. M. (2023a). Un instrumento para evaluar la comprensión de tablas estadísticas en educación secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 41*(3), 89–112. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5926

Pallauta, J., Gea, M., Batanero, C. y Arteaga, P. (2023b). Algebraization levels of activities linked to statistical tables in Spanish secondary textbooks. En G. F. Burrill, L. Oliveria Souza y E. Reston (Eds.), *Research on reasoning with data and statistical thinking: internationalperspectives* (pp. 317–339). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-29459-4_23

Pérez-Martos, M. C., Moreno, A., Cañadas, M. C. y Torres, M. D. (2023). Una mirada a través de gráficos funcionales del alumnado de quinto de educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 435–442). SEIEM.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: The case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education, 21*(1), 63–94. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9349-8

Pino-Fan, L. R., Castro, W. F. y Font, V. (2023). A macro tool to characterize and develop key competencies for the mathematics teacher' practice. *International Journal of Science and Mathematics Education, 21,* 1407–1432. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10301-6

Pinto, E., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2022). Functional relationships evidenced and representations used by third graders within a functional approach to early algebra. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20*(6), 1183–1202. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10183-0

Planas, N. (2017). Dimensiones de la diversidad en Educación Matemática. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 69–70). SEIEM.

Planas, N. (2021). How specific can language as resource become for the teaching of algebraic concepts? *ZDM – Mathematics Education, 53*(2), 277–288. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01190-6

Planas, N., Alfonso, J.M., Arnal-Bailera, A. y Martin-Molina, V. (2024). Mathematical naming and explaining in teaching talk: Noticing work with two groups of mathematics teachers. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01576-w

Prior, J. y Torregrosa, G. (2020). Razonamiento configural y espacio de trabajo geométrico en la resolución de problemas de probar. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 34*, 178–198. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a09

Puig, L. (2022). Ideas of structure in the history of algebra and its teaching. En T. Rojano (Ed.), *Algebra structure sense development among diverse learners* (pp. 20–35). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003197867

Quevedo Gutiérrez, E., Zapatera Llinares, A. y Lijó Sánchez, R. (2023). Invención de situaciones aditivas con número enteros. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 459–466). SEIEM.

Ramírez, R., Beltrán-Meneu, M. J., Jaime, A., Gutiérrez, A. (2016). Resolución por Skype de una tarea de visualización cooperativa por una pareja de estudiantes de talento. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 447–457). SEIEM.

Ramírez, R., Cañadas, M. C. y Damián, A. (2022). Structures and representations used by 6th graders when working with quadratic functions. *ZDM – Mathematics Education, 54*(6), 1393–1406. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01423-w

Ramírez-Uclés, R., Flores, P. y Ramírez-Uclés, I. (2018). Análisis de los errores en tareas geométricas de argumentación visual por estudiantes con talento matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(1), 29–56. https://doi.org/10.12802/relime.18.2112

Ramírez-Uclés, R. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2022). Reasoning, representing, and generalizing in geometric proof problems among 8th grade talented students. *Mathematics, 10*(5), 789. https://doi.org/10.3390/math10050789

Recio T., Richard, P. R. y Vélez, M. P. (2019). Designing tasks supported by GeoGebra automated reasoning tools for the development of mathematical skills. *International Journal of Technology in Mathematics Education, 26*(2), 81–89. https://doi.org/10.1564/tme_v26.2.05

Remillard, J. (2012). Modes of engagement: Understanding teachers' transactions with mathematics curriculum resources. En G. Gueudet, B. Pepin y L. Trouche (Eds.), *From text to «lived» resources: Mathematics curriculum materials and teacher development* (pp. 105–122). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1966-8_6

Richard, P. R., Oller Marcén, A. M. y Meavilla Seguí, V. (2016). The concept of proof in the light of mathematical work. *ZDM Mathematics Education, 48*(6), 843–859. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0805-9

Richard, P. R., Vélez, M. P. y Van Vaerenbergh, S. (Eds.) (2022). *Mathematics education in the age of artificial intelligence: How artificial intelligence can serve mathematical human learning*. Springer.

Rico, L., Sierra, M. y Castro, E. (2002). El área de conocimiento de Didáctica de la Matemática. *Revista de Educación, 328*, 35–58.

Rodríguez-Domingo, S., Molina, M., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2015). Errores en la traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal. *PNA, 9*(4), 273–293.

Rodríguez-Nieto, C. A., Cabrales González, H. A., Arenas-Peñaloza, J., Schnorr, C. E. y Font, V. (2024). Onto-semiotic analysis of Colombian engineering students' mathematical connections to problems-solving on vectors: A contribution to the natural and exact sciences. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(5), em2438. https://doi.org/10.29333/ejmste/14450

Rodriguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M. y Font, V. (2023). Combined use of the extended theory of connections and the onto-semiotic approach to analyze mathematical connections by relating the graphs of f and f'. *Educational Studies in Mathematics, 114*, 63–88. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10246-9

Rojas, C. y Sierra, T. (2021). Restricciones institucionales que dificultan la modelización espacio-geométrica en la enseñanza secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *20*, 41–63. https://doi.org/10.35763/aiem20.4031

Rondero, C. y Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 29–49. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1386

Rott, B. (2013). Comparison of expert and novice problem solving at grades five and six. En A. M. Lindmeier y A. Heinze (Eds.), *Proceedings of 37th PME Conference* (Vol. 4, pp. 113–120). PME.

Rubio-Chueca, J. M., Muñoz-Escolano, J. M. y Beltrán-Pellicer, P. (2021). Análisis de los problemas de probabilidad en las olimpiadas matemáticas. En A. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (Eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 143–150). Universidad de La Rioja.

Ruiz-Catalán, J., Madrid, M. J. y Maz-Machado, A. (2024). El Método General de Resolución de Ecuaciones en la Arithmetica Universal de José Zaragoza (1669). *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 38*, e230084. https://doi.org/10.1590/1980-4415v38a230084

Ruiz-Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria: De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza* (Tesis Doctoral). Universidad Autónoma de Madrid. https://repositorio.uam.es/handle/10486/665889?show=full

Sánchez, I. M. y González, M. T. (2017). La geometría analítica en España durante el siglo XIX: estudio de las soluciones negativas de una ecuación. *Enseñanza de las Ciencias, 35*(3), 89–106. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2348

Sánchez, I. M. y González, M. T. (2019). La geometría analítica en el Curso Completo de Matemáticas Puras (1829) de José de Odriozola. *Historia y Memoria de la Educación, 11*, 113–149. https://doi.org/10.5944/HME.11.2020.24165

Sánchez-Jiménez, E., Carrillo, D., Chevallard, Y. y Bosch, M. (2020). The Second Spanish Republic and the project method: A view fron the ATD. En M. Bosch, Y. Chevallard, F. J. García y J. Monaghan (Eds.), *Working with the Anthropological theory of the didactic in mathematics education* (pp. 101–117). Routledge.

Sánchez-Jiménez, E (2020). Materiales didácticos y renovación de la enseñanza de la matemática en la «Edad de Plata». ¿Cómo puede contribuir la TAD a la investigación en Historia de la Educación Matemática? En I. B. Dos Santos, E. Z. Búrigo y W. R. Valente (Org.), *Materiais didácticos e história da educaçao matemática* (pp. 49–79). Editora Livraia da Física.

Sánchez-Jiménez, E. y Dólera, J. (2023). Algunos dispositivos didácticos para las matemáticas en las escuelas normales españolas durante la edad de plata. *Revista Paradigma, XLIV* (2), 596–622. https://doi.org/10.1590/2236-3459/125566

Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Pérez-Tyteca, P. y Callejo, M. L. (2018). Trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros maestros de educación infantil. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(2), 203–228. https://doi.org/10.12802/relime.18.2124

Sánchez-Matamoros, G., Fernandez, C. y Llinares, S. (2019). Relationships among prospective secondary mathematics teachers' skills of attending, interpreting and responding to students' understanding. *Educational Studies in Mathematics, 100*, 83–99. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9855-y

Santos-Trigo, M., Camacho-Machín, M. y Barrera-Mora, F. (2024). Focusing on foundational Calculus ideas to understand the derivative concept via problem-solving tasks that involve the use of a Dynamic Geometry System. *ZDM Mathematics Education.* https://doi.org/10.1007/s11858-024-01607-6

Saorín, A., Quesada, H. y Torregrosa, G. (2019a). Razonamiento configural y desarrollo del discurso en la resolución de problemas empíricos en contexto geométrico. *Enseñanza de las Ciencias*, 37, 89–109. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2431

Saorín, A., Torregrosa, G. y Quesada, H., (2019b). Razonamiento configural y organización discursiva en procesos de prueba en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 22*, 213–244. https://doi.org/10.12802/relime.19.2224.

Scheiner, Th., Montes, M.A., Godino, J.,D., Carrillo, J. y Pino-Fan, L.R. (2019). What makes Mathematics TEacher Knowledge Specialized? Offering Alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17,* 153–172. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6

Schoenfeld, A. (2010). *How we think*. Routledge.

Schwarz, B. y Kaiser, G. (2019). The professional development of mathematics teachers. En G. Kaiser y N. Presmeg (Eds.), *Compendium for early career researchers in mathematics education* (pp. 325–342). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_15

Selden, J., Mason, A. y Selden, A. (1989). Can average calculus students solve nonroutine problems? *Journal of Mathematical Behavior, 8*, 45–50.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14.

Sinclair, N., Cirillo, M. y De Villiers, M. (2017). The learning and teaching of geometry. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 457–489). NCTM.

Smith, M. S. y Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: from research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 344–350.

Soneira, C., González-Calero, J. A. y Arnau, D. (2018a). Indexical expressions in word problems and their influence on multiple referents of the unknown. *International Journal of Science and Mathematics Education, 16*(6), 1147–1167. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9824-4

Soneira, C., González-Calero, J. A. y Arnau, D. (2018b). An assessment of the sources of the reversal error through classic and new variables. *Educational Studies in Mathematics, 99*(1), 43–56. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9828-1

Soneira, C., González-Calero, J. A. y Arnau, D. (2023). Effect of algebraic language and problem text wording on problem model accuracy when solving age word problems. *Educational Studies in Mathematics, 114*(1), 109–127. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10236-x

Sua, C., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2021). Análisis de una actividad de visualización en un entorno de geometría dinámica 3d y realidad aumentada. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 579–586). SEIEM.

Sua, C., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2024). Analogies: a way to promote the learning of proof in 3d geometry using dynamic geometry environments. En T. Lowrie, A. Gutiérrez, F. Emprin (Eds.), *Proceedings of the 26th ICMI Study Conference* (pp. 409–416). ICMI.

Torres, M. D., Moreno, A., Vergel, R. y Cañadas, M. C. (2024). The Evolution from "I think it plus three" Towards "I think it is always plus three." Transition from Arithmetic Generalization to Algebraic Generalization. *International Journal of Science and Mathematics Education, 22*(5), 971–991. https://doi.org/10.1007/s10763-023-10414-6

Trigueros, M., Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G. y Hernández-Rebollar, L. A. (2024). Contributions to the characterization of the Schema using APOS theory: Graphing with derivative. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01615-6

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2020). Significado de derivada en las tareas de los libros de 1º de Bachillerato. *Bolema, 34*(68), 911–933. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v34n68a04

Vásquez, C. y Alsina, A. (2019). Intuitive ideas about chance and probability in children from 4 to 6 years old. *Acta Scientiae, 21*(3), 131–154. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss3id5215

Vásquez Ortiz, C. A., Alsina, Á., Pincheira, N., Gea, M. M. y Chandia, E. (2020). Construcción y validación de un instrumento de observación de clases de probabilidad. *Enseñanza de las Ciencias, 38*(2), 25–43. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2820

Vásquez, S., Barquero, B. y Bosch, M. (2021). La gestión de un REI en secundaria: ¿Cuánto tiempo se tarda en abrir un candado? En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 621–628). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/24/Comunicaciones/621.pdf

Vásquez, S., Barquero, B. y Bosch, M. (en prensa) Interdisciplinariedad en educación secundaria: un recorrido de estudio e investigación. *Enseñanza de las Ciencias*. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6029

Verbisck, J., Bittar, M., Bosch, M., Barquero, B. y Benito, R. (2022). Study and research paths for statistics teacher education at secondary school level: An exploratory study. En S. A. Peters, L. Zapata-Cardona, F. Bonafini y A. Fan (Eds.), *Bridging the Gap: Empowering & Educating Today's Learners in Statistics*. International Association for Statistical Education. https://doi.org/10.52041/iase.icots11.t2a2

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2-3), 133–170.

Vicente, S., Verschaffel, L. y Ramos, M. (2022a). Dificultad de los problemas aritméticos verbales de los libros de texto singapurenses y españoles. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 22*, 137–156. https://doi.org/10.35763/aiem22.4412

Vicente, S., Verschaffel, L., Sánchez, R. y Múñez, D. (2022b). Arithmetic word problem solving. Analysis of Singaporean and Spanish textbooks. *Educational Studies in Mathematics, 111*(3), 375–397. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10169-x

Zorrilla, C., Roos, A.K., Fernández, C., Llinares, S. y Prediger, S. (2024). Connecting operation-choice problems by the variation principle: Sixth graders' operational or deeper relational pathways. *Journal of Mathematical Behavior, 73*, 101104. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101104