

GEOMETRÍA 3D Y TALENTO MATEMÁTICO ¹

M.T. Escrivà, A. Jaime, A. Gutiérrez, M.J. Beltrán-Meneu

Dpto. de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia (Valencia, España)

Resumen:

La visualización es una capacidad necesaria para la formación matemática de los estudiantes. Mostramos una investigación experimental basada en actividades de geometría 3D para clases de 6º de Primaria con estudiantes de diferentes capacidades matemáticas. Las actividades permitieron a los estudiantes utilizar diversas habilidades de visualización y nos ayudaron a identificar a los que mostraron de forma consistente rasgos de talento matemático.

Palabras clave: Visualización, Talento matemático, Geometría 3D, Educación Primaria.

1. CONTEXTO Y PROBLEMÁTICA

El alumnado con altas capacidades ... necesita encontrarse con ambientes estimulantes, que no frenen sus intereses y su afán de conocimiento, y necesita que en el aula ... se desarrollen ... buenas prácticas de atención a la diversidad. (Aretxaga, 2013, p. 55).

Actualmente, se puede observar un aumento del interés por la atención diferenciada a los estudiantes que muestran algún tipo de capacidad intelectual superior a la media. Aun así, por lo que respecta a las matemáticas, la atención a estos estudiantes en las aulas de Primaria suele ser escasa porque muchos maestros no han tenido la oportunidad de recibir formación adecuada, y tampoco hay suficientes materiales educativos específicos para que los maestros puedan proporcionar a este alumnado el soporte que necesita (Jaime y Gutiérrez, 2014).

Diversas investigaciones han analizado las relaciones entre visualización espacial y talento matemático. De entre ellas destaca la de Krutetskii (1976), quien analizó las destrezas

¹ Los resultados presentados son parte de las actividades de los proyectos de investigación I+D+i EDU2012-37259 (MINECO) y EDU2015-69731-R (MINECO/FEDER).

Citar como: Escrivá, M.T.; Jaime, A.; Gutiérrez, A.; Beltrán-Meneu, M.J. (2017): Geometría 3D y talento matemático, *UNO*, 77, 7-13.

matemáticas presentes en diversas formas de resolver problemas, observando a numerosos estudiantes de diversas edades, entre los cuales había algunos con alto talento matemático. Krutetskii identificó tres estilos de razonamiento: analítico (en el que predomina la componente lógico-analítica), geométrico/visual (en el que predomina la componente visual o geométrica) y armónico (en el que se combinan los estilos analítico y geométrico con eficacia, dependiendo del problema que se está resolviendo).

Krutetskii observó también la capacidad de visualización, si bien consideraba que esta no era una característica del talento matemático. No obstante, otros investigadores más recientes han mostrado que sí hay relación entre el talento matemático y el uso de habilidades de visualización. Así, Van Garderen (2006) observó que los estudiantes con talento matemático usaban la visualización espacial (imágenes mentales y habilidades de visualización) más que los demás estudiantes.

También es interesante el trabajo de Del Grande (1990), que identificó diversas habilidades necesarias para resolver correctamente tareas que requieren uso de visualización, entre las que destacan: *identificación visual* de objetos extrayéndolos de contextos complejos, *conservación de la percepción*, que ayuda a reconocer que un objeto mantiene sus propiedades aunque no esté a la vista o se vea en otra posición, *reconocimiento de posiciones en el espacio* de objetos en relación con el observador, *reconocimiento de relaciones espaciales* entre dos o más objetos, internas e independientes del observador y *discriminación visual* para comparar características visuales de varios objetos.

En este contexto, los objetivos de la investigación que presentamos fueron diseñar y experimentar un material educativo que ayude a los estudiantes con diferentes grados de talento matemático a desarrollar su capacidad de visualización y que, al mismo tiempo, permita a los maestros identificar a aquéllos de sus alumnos que muestren características de talento matemático relacionadas con la visualización espacial durante la realización de las actividades planteadas.

2. EL EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

El experimento de enseñanza en el que se basa la investigación está formado por actividades centradas en la manipulación de cubos, organizadas en tres bloques dedicados a resolver problemas de desarrollos, de rotaciones y de secciones planas de cubos, respectivamente (Figura 1). En Escrivà (2016) se ofrece información detallada sobre la investigación, las

actividades puestas en práctica, las actuaciones de los estudiantes observados y los resultados y conclusiones obtenidos.

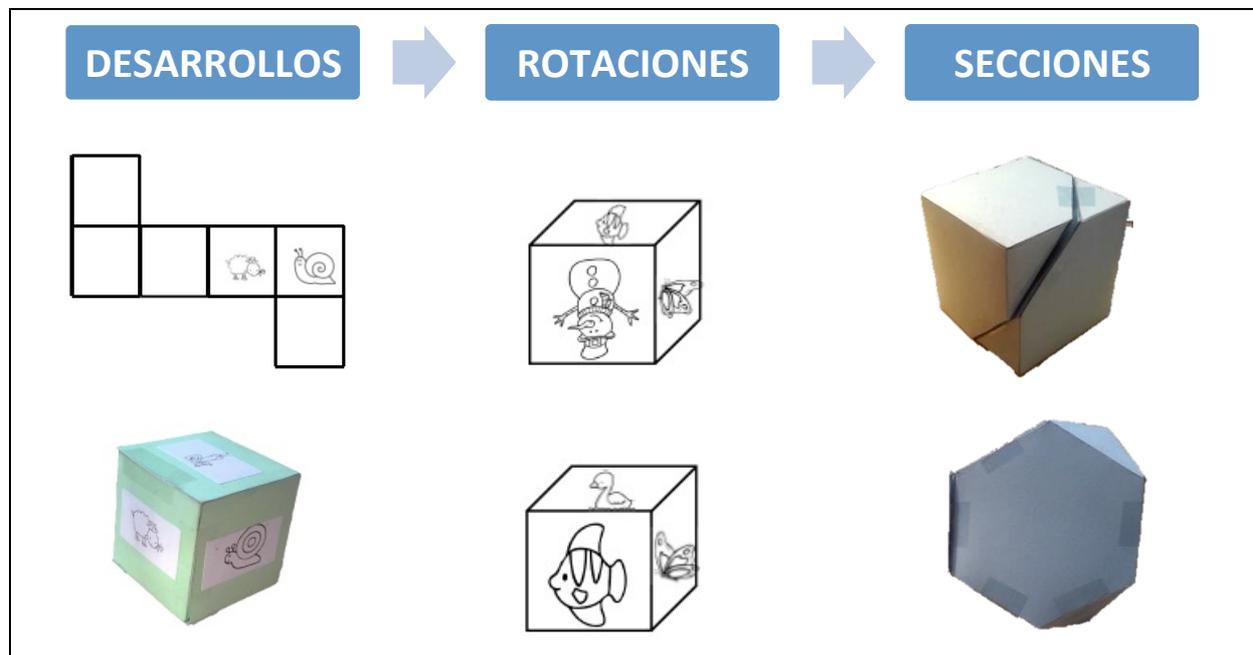


Figura 1. Estructura del experimento de enseñanza y tipos de actividades.

En nuestra investigación, experimentamos las actividades en 6º de Primaria. No obstante, es posible utilizarlas en otros cursos de Primaria y de ESO, tal vez con pequeñas adaptaciones.

En nuestro experimento participaron 20 alumnos de un grupo heterogéneo de clase ordinario y una niña identificada previamente como de talento matemático. El experimento se desarrolló en 4 sesiones de clase ordinarias, dedicadas dos de ellas a desarrollos, una a rotaciones y una a secciones.

Los estudiantes resolvieron las actividades en pequeños grupos, con el fin de que comentaran lo que iban realizando y, así, poder observar sus razonamientos, que fueron registrados en audio y/o video. Además, al terminar cada sesión, entrevistamos a cuatro estudiantes de distinto rendimiento en matemáticas, siempre los mismos y siendo uno de ellos la estudiante identificada con talento matemático, para observar con más detalle sus formas de razonar al realizar las distintas actividades.

Después de terminar el experimento, analizamos en detalle las actuaciones de 10 estudiantes, centrándonos en las habilidades de visualización y las características de talento matemático (Jaime y Gutiérrez, 2014) manifestadas.

3. ANÁLISIS Y RESULTADOS

Uno de los objetivos de la experimentación era observar si las diferentes formas de utilizar las habilidades de visualización por los estudiantes permitían discriminar a los de más talento matemático y determinar si existía relación entre habilidad visual y talento matemático. A continuación mostramos los dos estilos de razonamiento (geométrico/visual y analítico) empleados mayoritariamente por los alumnos durante la experimentación, mediante ejemplos de resoluciones de la actividad mostrada en la Figura 2.

DESARROLLOS

1. Aquí tienes tres desarrollos del mismo cubo, pero se les han borrado algunas figuras. Debes poner en las caras de cada desarrollo las figuras que faltan. Fíjate en la posición de las figuras.

a

b

c

2. Aquí tienes tres fotos de ese mismo cubo. A partir de los desarrollos anteriores, completa las caras vacías de cada foto del cubo.

a

b

c

Figura 2: Actividad de desarrollos de un cubo.

El Alumno A1 utilizó una estrategia geométrica (visualizadora) ya que intentaba imaginarse el desarrollo cerrado, ayudándose de las manos, para, a partir de ahí, tratar de situar las figuras en las caras vacías. A continuación transcribimos sus explicaciones sobre su solución al cubo *c* de la segunda parte de la actividad (Figura 3):

A1: Aquí [desarrollo c] estaba la ballena al lado [del gato]. Lo sabía y sabía que estaba así [boca de la ballena con la cabeza del gato] y después, si lo juntaba [ballena y gato, desarrollo a] se quedaba igual que éste. Y además, si eso [ballena y gato, desarrollo b] lo juntabas, ha sido la definitiva. Eso es la ballena



Eso hacía así



, así



y así



. Y quedaba en la cabeza, su cabeza [del gato] estaba sobre su boca [de la ballena].

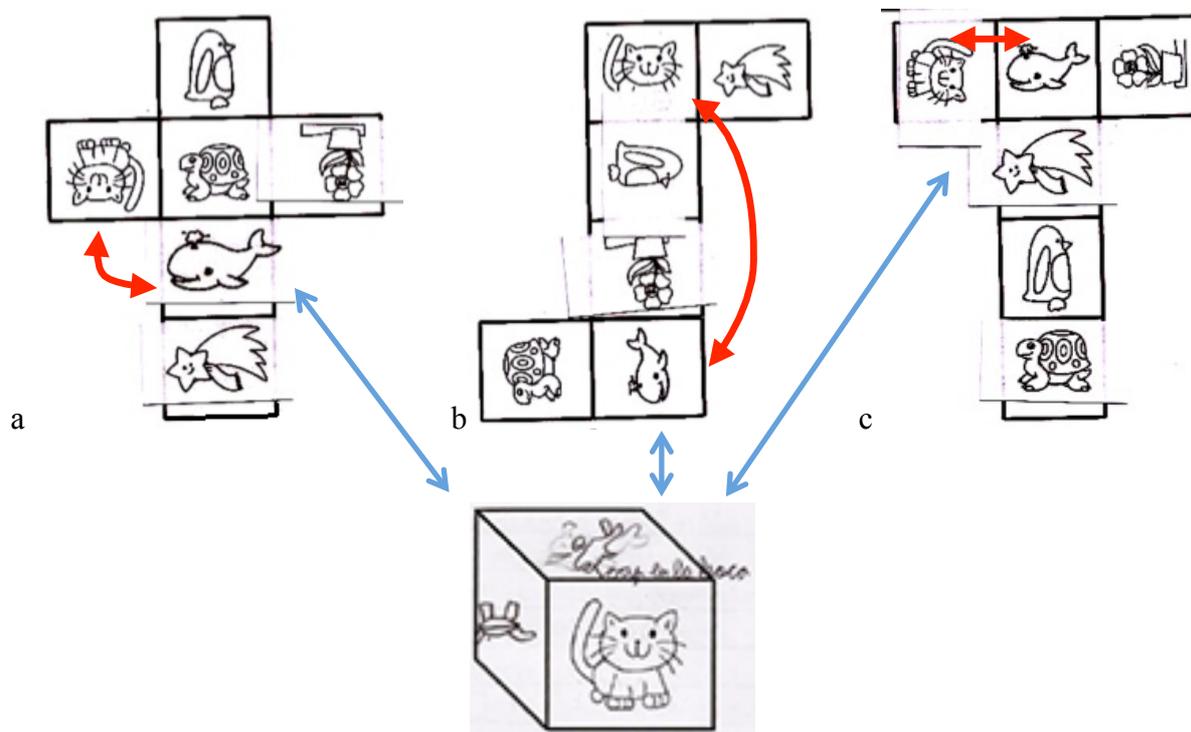


Figura 3: Respuesta del alumno A1.

Para comparar el cubo con los desarrollos a y b, A1 se imaginaba los desarrollos del cubo cerrados para ver (mentalmente) juntas figuras que en los desarrollos están separadas. De esta forma, A1 conecta la ballena y el gato en cada desarrollo para confirmar que, al cerrar los desarrollos, ballena y gato tienen la misma posición relativa que en el cubo c. Para realizar estas comparaciones, A1 utiliza las habilidades de reconocimiento de relaciones espaciales,

para conectar la ballena y el gato, y de discriminación visual, para comparar las posiciones relativas de estos animales en los cubos imaginados y en el cubo *c*.

A continuación mostramos las explicaciones del Alumno A9 sobre cómo había resuelto la parte 1 de la actividad. Para ello utilizó una estrategia analítica basada en la identificación de relaciones internas (detrás, encima, etc.) entre figuras contiguas en los desarrollos y en mantener esa relación en los otros desarrollos, sin recurrir al cubo resultante (Figura 4):

A9: *Aquí [señala la ballena y la flor en el desarrollo c]. Y por tanto, me he fijado que ahí [desarrollo c], la cola [de la ballena] tocaba con la flor [compara los desarrollos a y c]. Así que lo he puesto ahí [desarrollo a].*

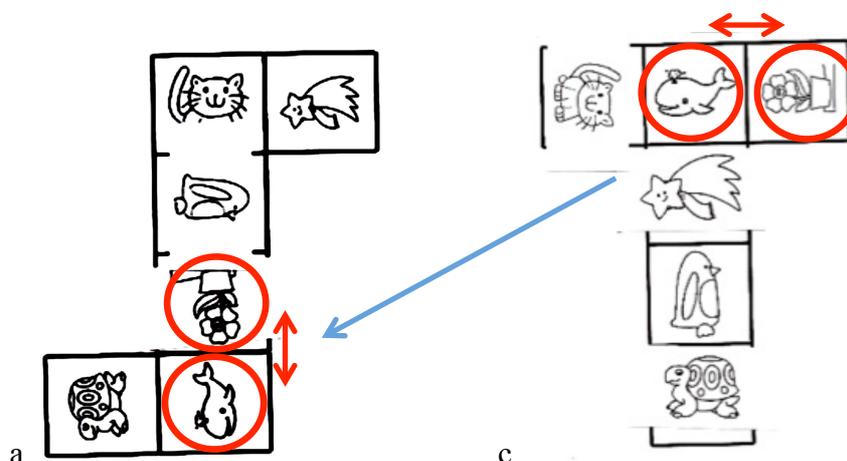


Figura 4: Respuesta del alumno A9.

El alumno A9 basó sus explicaciones en las relaciones de posiciones relativas entre figuras que en los desarrollos están unidas, por lo que no tenía necesidad de cerrarlos. También pone en juego la habilidad de reconocimiento de relaciones espaciales en sus explicaciones.

Los perfiles de los estudiantes con razonamientos geométrico y analítico eran diferentes (Tabla 1): en ambos grupos encontramos estudiantes que obtenían muy buenas notas en clase de matemáticas pero, entre estos, los que tenían preferencia por el razonamiento geométrico/visualizador resolvieron las actividades usando siempre de forma correcta las habilidades de visualización, mientras que quienes tenían preferencia por el razonamiento analítico resolvieron de forma incorrecta una cantidad significativa de las actividades, debido a un uso inadecuado de las habilidades de visualización.

Rendimiento académico en matemáticas	Tipo de pensamiento	Rendimiento en tareas de visualización espacial
Muy bueno	Analítico	Parcialmente incorrecto
Muy bueno	Geométrico	Siempre correcto

Tabla 1: Diferencias entre estudiantes analíticos y geométricos con muy buen rendimiento académico.

Además de observar las estrategias de resolución de cada actividad, también hemos analizado las características de talento matemático (Jaime y Gutiérrez, 2014) puestas de manifiesto por los estudiantes durante la realización del experimento de enseñanza. Ha destacado la presencia de las siguientes: atención a los detalles, desarrollo de estrategias eficientes, pensamiento crítico y persistente en la consecución de los objetivos que se proponen y memoria matemática. Además, algunos alumnos mostraron seguridad en sus respuestas.

De los diez estudiantes analizados, una había sido identificada previamente como de talento matemático, lo cual se confirmó en la experimentación. Otros tres estudiantes también mostraron características de talento relacionadas con la visualización. Además, estos cuatro alumnos fueron los que más habilidades de visualización manifestaron durante la resolución de las actividades y los que mejor las resolvieron. Por lo tanto, el presente estudio sugiere que hay coincidencia en los estudiantes entre la presencia de características de talento matemático y la alta capacidad visualizadora.

Por otra parte, estos cuatro alumnos obtenían notas muy buenas en la asignatura de matemáticas, pero no todos los alumnos del grupo con notas muy buenas en matemáticas fueron capaces de utilizar con eficacia las habilidades de visualización, ni de resolver correctamente las actividades planteadas (Figura 5).

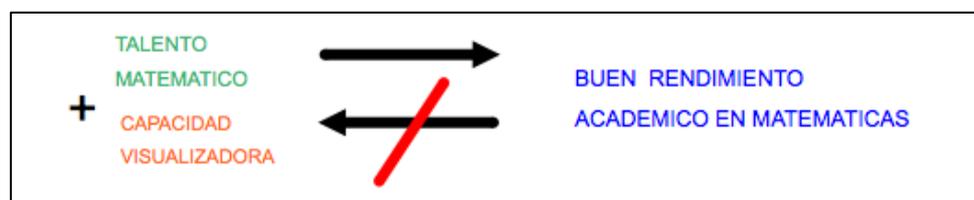


Figura 5: Relación entre talento matemático y rendimiento académico.

Por tanto, en nuestra investigación hemos observado que existe relación entre las características de talento matemático y el uso de las habilidades de visualización que

Citar como: Escrivá, M.T.; Jaime, A.; Gutiérrez, A.; Beltrán-Meneu, M.J. (2017): Geometría 3D y talento matemático, *UNO*, 77, 7-13.

manifiestan los estudiantes. Esta relación ya ha sido considerada por otros autores, como Ramírez (2012), quien observó que los estudiantes con talento matemático mostraron las habilidades de visualización en un alto porcentaje, en comparación con el grupo control.

4. CONCLUSIONES

Mediante este estudio hemos corroborado la conveniencia de plantear en las aulas de Primaria actividades que favorezcan el desarrollo de las habilidades de visualización de los estudiantes pues, con frecuencia, los que tienen preferencia por un estilo geométrico (visual) de razonamiento (Krutetskii, 1976) están penalizados en el sistema educativo, que sólo favorece el pensamiento analítico. Por tanto, esta investigación refuerza la importancia de que los maestros planteen problemas de matemáticas que permitan a sus alumnos utilizar tanto razonamiento analítico como geométrico, de manera que todos los estudiantes puedan manifestar y desarrollar sus capacidades matemáticas.

Además de la importancia de desarrollar el sentido espacial de los estudiantes, actividades como las propuestas permiten identificar los tipos de pensamiento matemático (analítico, geométrico, armónico) de los estudiantes y detectar en ellos características de talento matemático pues, para identificar a los estudiantes con talento matemático, es necesario observar los tipos de razonamiento (Krutetskii, 1976) y las habilidades de visualización (Del Grande, 1990) que ponen en juego cuando realizan actividades de geometría espacial. Como indica Ramírez (2012), la visualización es un elemento de la competencia matemática y, por ello, es necesario favorecer su desarrollo desde los primeros años de escolarización.

También hemos visto que, en esta investigación, los estudiantes que han mostrado consistentemente características de talento matemático han sido los mismos que han puesto de manifiesto mayor número de habilidades de visualización (Del Grande, 1990) y han resuelto bien las actividades propuestas. Asimismo, hemos observado que otros estudiantes con nivel académico alto en matemáticas no han resultado ser buenos resolutores de las tareas de visualización ni han mostrado rasgos de talento matemático.

5. BIBLIOGRAFÍA

ARETXAGA, L. (Coord.) (2013): *Orientaciones educativas. Alumnado con altas capacidades intelectuales*. Vitoria. Gobierno Vasco. Recuperado de http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/contenidos/informacion/dig_publicaciones_inn

Citar como: Escrivá, M.T.; Jaime, A.; Gutiérrez, A.; Beltrán-Meneu, M.J. (2017): Geometría 3D y talento matemático, *UNO*, 77, 7-13.

[ovacion/es_escu_inc/adjuntos/16_inklusibitatea_100/100012c_Pub_EJ_altas_capacidades_c.pdf](#)

DEL GRANDE, J. (1990): «Spatial sense». *Arithmetic Teacher*, núm. 37(6), pp. 14-20.

ESCRIVÀ, M. T. (2016): *Habilitats de visualització manifestades per alumnes de primària quan resolen activitats de geometria 3D i la seua relació amb el talent matemàtic* (tesis de maestría). Valencia. Universitat de València. Recuperado de: <http://roderic.uv.es/handle/10550/56732>

JAIME, A.; GUTIÉRREZ, Á. (2014): «La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de educación primaria con altas capacidades matemáticas». En B. GÓMEZ; L. PUIG (eds.): *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). Valencia. Publicaciones de la Universitat de València (PUV).

KRUTETSKII, V. A. (1976): *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago. Chicago University Press.

RAMÍREZ, R. (2012): *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (Tesis doctoral). Granada. Universidad de Granada. Recuperado de: <http://hdl.handle.net/10481/23889>

VAN GARDEREN, D. (2006): «Spatial visualization, visual imagery, and mathematical problem solving of students with varying abilities». *Journal of Learning Disabilities*, núm. 39(6), pp. 496-506.