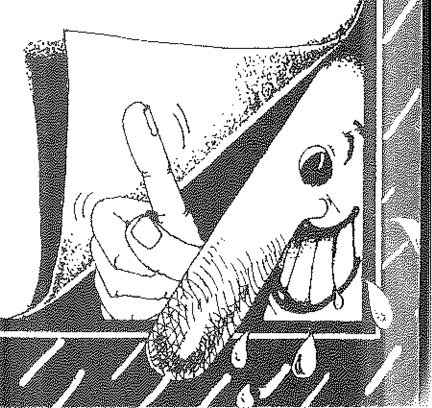
Papeles de Enseñanza de la Matemática

ACTIVIDADES CON EL GEOPLANO



Miembros del seminario:

FERNANDO CERDAN PEREZ

ALEJANDRO FERNANDEZ LAJUSTICIA (*)

EDUARDO GALAN PELAEZ

BERNARDO GOMEZ ALFONSO

RAMON GRANELL TRENCO

GREGORIA GUILLEN SOLER

ANGEL GUTIERREZ RODRIGUEZ (*)

ADELA JAIME PASTOR

LUIS PUIG ESPINOSA

(*) Autores de este número.

DEPOSITO LEGAL: V - 2575 - 1979

SERVICIO DE IMPRENTA UNIVERSITARIA

DSETA: Como a la mayoría de los matemáticos, no se me da bien eso de contar. Acabo de tratar de contar las aristas y vértices de un heptágono y primero hallé siete aristas y ocho vértices y, luego, ocho aristas y siete vértices . . .

I. LAKATOS. Pruebas y refutaciones, pág. 90.

INTRODUCCION

El Geoplano es un material ideado por Gattegno para que con su manipulación los niños invesguen las relaciones geométricas.

Su forma mas usual es la de una base de madera sobre la que hay una malla cuadrangular de clavos, aunque para obtener una mayor riqueza de situaciones la malla puede ser triangular, hexagonal, circular, etc. . .

Segmentos y polígonos pueden construirse con gomas elásticas alrededor de los clavos del geoplano.

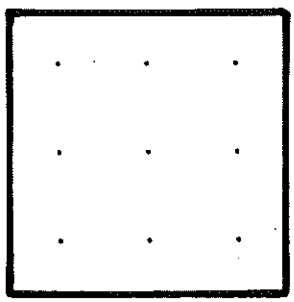
Con el uso de gomas elásticas, el estudiante puede fácilmente deformar una figura o transformar una en otra.

El geoplano se puede usar en la investigación de muchos conceptos de geometría plana: segementos y longitudes, áreas, figuras abiertas y cerradas, simetrías, giros, semejanzas, polígonos inscritos, propiedades de los polígonos, etc. . .

Las longitudes y áreas dependerán siempre de la definición de la unidad de distancia y de la unidad de área.

Este trabajo desarrolla algunos de estos conceptos en forma de actividades, dando al final del mismo algunas soluciones, sugerencias y comentarios que corresponden a los arteriscos (*) que van apareciendo a lo largo del texto.

MATERIAL:



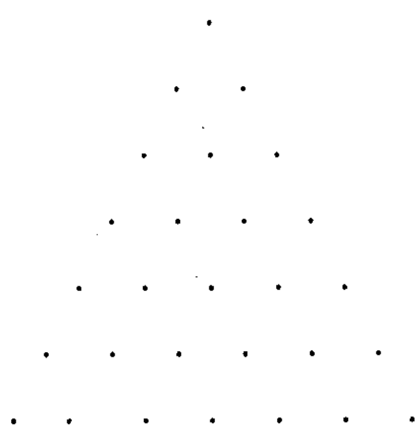
En primer lugar PAPEL CUADRICULADO para poder dibujar resultados y retenerlos.

Los GEOPLANOS CUADRANGULARES son mallas cuadradas de clavos sobre una base cuadrada de madera, con la cantidad deseada de clavos en cada línea 3, 4, 5, etc. . .

Para este trabajo se utilizan geoplanos cuadrangulares de 3x3, 5x5, y 10x10 clavos.

Aconsejamos las siguientes medidas para su construcción:

– Para el geoplano 3x3:	La base de 15 cm. de lado. La distancia entre clavos de 5 cm.
– Para el geoplano 5x5:	La base de 20 cm. de lado. La distancia entre clavos de 4 cm.
– Para el geoplano 10x10:	La base de 25 cm. de lado. La distancia entre clavos 2,5 cm.



El GEOPLANO TRIANGULAR es una malla triangular de clavos sobre una base de madera no necesariamente triangular.

En este caso la figura elemental es un triángulo. Puede usarse cualquier forma para este triángulo, pero la más práctica es la del triángulo isósceles pero no equilátero.

El geoplano que usaremos tiene 7 clavos de lado, y un total de 28.

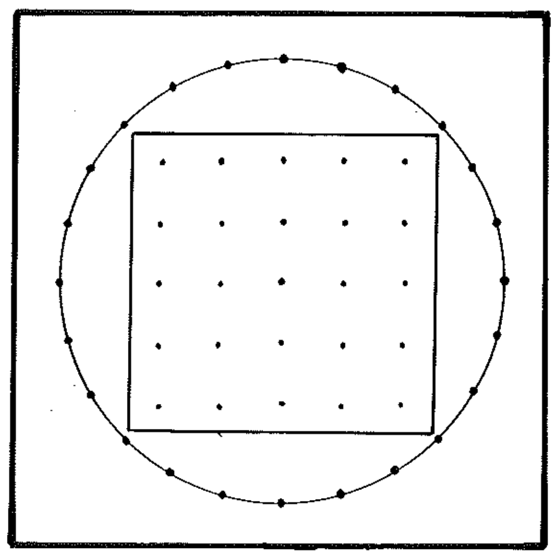
GEOPLANO GIRATORIO:

Se construye un geoplano circular de 25 clavos, de los cuales 24 están 24 sobre una circunferencia a espacios iguales, y el otro es un clavo especial colocado en el centro de la circunferencia que tendrá la función de eje.

Las medidas mas aconsejables son 34 cm. de lado para el cuadrado base, y de 30 cm. para el diámetro de la circunferencia.

Se construyen cuadrados base cuyo lado sea de 21 cm. y en cuyo centro haya un agujero que encaje lo más perfecto posible con el "clavo-eje" construido anteriormente.

Sobre estas bases se construyen geoplanos cuadrangulares con un número impar de clavos de manera que el clavo del centro sea el "clavo-eje". También se pueden construir sobre estas bases, geoplanos circulares cuyo centro sea el "clavo-eje". De esta forma, el geoplano inscrito puede girar sobre el eje.



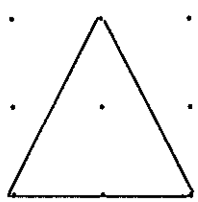
FIGURAS EN UN GEOPLANO CUADRADO DE NUEVE CLAVOS (*)

A-1. Elige un punto que no sea el centro. Por medio de una goma puedes unirlo con otro punto con lo que habrás formado un segmento.
(*) ¿Con cuántos puntos puedes unir el que has elegido?
¿Cuántas longitudes distintas has hallado?

A-2. Si eliges otros puntos, ¿puedes construir segementos que tengan longitud diferente?

A-3. Elige tres puntos del geoplano que no estén en línea recta, al unirlos con una goma habrás construido un triángulo. Construye todos los
(*) triángulos que puedas que sean iguales al anterior.

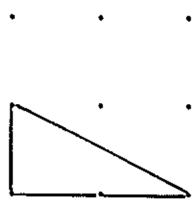
A-4. Construye un triángulo que tenga forma distinta que los anteriores. Construye todos los triángulos que puedas que sean iguales a este.



A-5. Repite A-4 todas las veces que puedas.

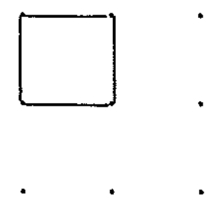
A-6. ¿Cuántas formas distintas has hallado?

A-7. *Si el triángulo tiene dos lados iguales se llama isósceles.* En las actividades anteriores, ¿has encontrados triángulos isósceles?
¿Cuántos distintos?



A-8. *Si el triángulo tiene un ángulo recto, se llama rectángulo.* En las actividades anteriores, ¿has encontrados triángulos rectángulos?
¿Cuántos distintos?
¿Has hallado alguno que sea isósceles y rectángulo simultáneamente?
¿Cuántos distintos?

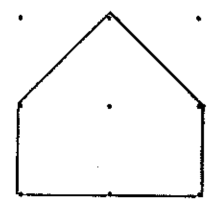
A-9. Construye cuadrados como los de la figura.
(*) ¿Cuántos puedes obtener?
¿Puedes construir algún cuadrado que sea distinto a los anteriores?



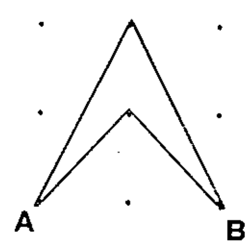
A-10. Construye rectángulos en el geoplano. ¿Cuántos puedes obtener?
(*)

A-11. Hay otros cuadriláteros que no son ni cuadrados ni rectángulos.
(*) Construye algunos de ellos y distingue los que son paralelogramos (sus lados son paralelos dos a dos) y los que no lo son.

A-12. Construye el pentágono de la figura. ¿Cuántos hay como él?
(*) Busca otros pentágonos diferentes a este.

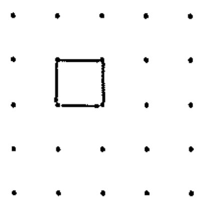


A-13. Esta figura también es un cuadrilátero (pues tiene cuatro lados). ¿Habías construido en A-11 alguno parecido?. Une los punto A y B con una goma de otro color. ¿Está la goma dentro o fuera del cuadrilátero?
A los polígonos con esta particularidad (tienen dos vértices tales que al unirlos por un segmento no se pasa por el polígono), los llamaremos "cóncavos". A los demás los llamaremos polígonos "convexos".
Busca más cuadriláteros cóncavos.

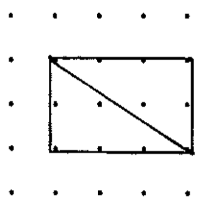


A-14. ¿Puedes construir un triángulo cóncavo? ¿por qué?
(*) Puedes construir en el geoplano polígonos cóncavos de 5, 6, 7, ó 8 lados?
¿Y convexos?

CARACTERIZACION DE PARALELOGRAMOS POR SUS DIAGONALES



El geoplano 5x5, como el de la figura, está formado por 25 clavos y tiene forma cuadrada. La unidad de área será el cuadrado que ves dibujado, y la unidad de longitud será su lado.

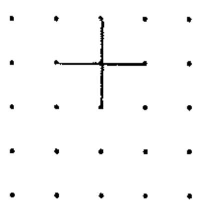


B-1. *En un cuadrilátero, se llama diagonal a la línea que une dos vértices opuestos.* Construye varios cuadriláteros y comprueba que todos tienen dos diagonales.

B-2. ¿Has hecho cuadriláteros cóncavos en B-1? Si no, construyelos. En un cuadrilátero, ¿se cortan siempre las diagonales?

B-3. Construye un cuadrado y sus diagonales. ¿Son de la misma longitud?. ¿En qué punto se cortan?. ¿Que posición relativa tienen entre sí?. Haz más cuadrados para comprobar los resultados.

B-4. Repite B-3 con rectángulos, rombos y romboides.



B-5. Vamos a empezar ahora al revés: Construye en el geoplano dos segmentos de la misma longitud, perpendiculares entre sí y que se corten en el punto medio. Une con una goma los cuatro extremos de los segmentos. ¿Qué cuadrilátero tienes? ¿Cuáles son sus diagonales?. Repite el ejercicio varias veces y compara los resultados.

B-6. Repite B-5 con segmentos iguales, que se corten en su punto medio pero que no sean perpendiculares entre sí.

B-7. Repite B-5 con segmentos desiguales, que se corten en su punto medio y que sean perpendiculares entre sí.

B-8. Repite B-5 con segmentos desiguales que se corten en su punto medio y que no sean perpendiculares entre sí.

B-9. Rellena la tabla siguiente (con SI o NO) y tendrás una forma de caracterizar algunos tipos de cuadriláteros según sus diagonales:

tipo de cuadrilátero	diagonales iguales	diagonales perpendiculares	se cortan en su pto. medio
cuadrado			
rectángulo			
rombo			
romboide			

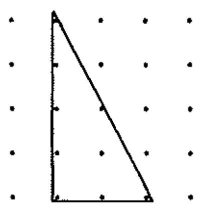
CALCULO DE AREAS PASANDO POR EL TEOREMA DE PITAGORAS

Seguiremos trabajando con el geoplano 5x5.

C-1. (*) Construye un rectángulo de área 2. ¿Cuántos puedes construir con ese área?

C-2. Construye un triángulo de área 1. ¿Porqué ese triángulo tiene área 1?

C-3. Construye triángulos de área 3.



C-4. (*) ¿Puedes construir algun triángulo con área mayor de 3 unidades?. Construyelo con el área lo mayor posible. ¿Cuánto vale ese área?. ¿Hay mas triángulos de distinta forma con el mismo área?

C-5. (*) Construye cuadrados que tengan área 1. También que tengan área de 4, 9, 16 unidades.
¿Cuántos cuadrados puedes construir de cada tipo?

C-6. Rellena la tabla siguiente con los cuadrados que has construido en C-5:

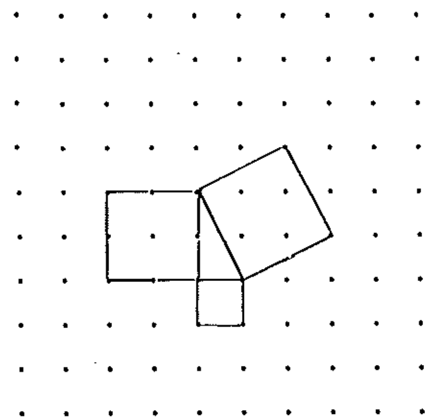
cuadrado	longitud del lado	área del cuadrado
1º		
2º		
3º		
. . .		

¿Qué relación existe entre el área del cuadrado y la longitud de sus lados?. Escribe una fórmula general.

C-7. (*) ¿Se puede construir algun cuadrado cuyo área sea diferente de las de C-5?
Construyes los cuadrados distintos que puedas.

En la actividad siguiente C-8 usaremos un geoplano 10x10.

C-8. Construye un triángulo como el de la figura. Ves que es rectángulo. Los lados que forman el ángulo recto se llaman "*catetos*" y el otro lado "*hipotenusa*". Construye (como en la figura) tres cuadrados de forma que cada uno de ellos tenga como lado uno de los lados del triángulo.
¿Qué relación hay entre las tres áreas?. Repite el ejercicio con otros triángulos rectángulos cuyos catetos midan: 1 y 1; 1 y 2; 1 y 4; 2 y 2; 2 y 3; 3 y 3; unidades de longitud.
Si escogieras un geoplano más grande podrías estudiar más casos distintos.
¿Es válida la relación para un triángulo que no sea rectángulo?. El resultado que acabas de obtener se llama "**Teorema de Pitágoras**".



C-9. (*) Aplicando el teorema de Pitágoras (C-8), mide todos los segmentos diferentes que puedes construir en el geoplano 5x5.

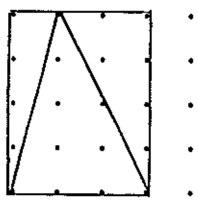
C-10. Comprueba que la fórmula que has obtenido en C-6 sirve también para los cuadrados construidos en C-7.

C-11. Recuerda la cuestión C-1. ¿Por qué el área del rectángulo era 2?. Construye un rectángulo de área 3. ¿Por qué su área es 3?

C-12. Construye varios rectángulos más, procurando que tengan formas diferentes. Piensa que obtienes sus áreas. Rellena la tabla siguiente:

rectángulo	área	longitud de base	longitud de altura
1º			
2º			
3º			
. . .			

¿Qué relación hay entre el área y la longitud de los lados de los tángulos?. ¿Puedes dar una fórmula?



C-13. Construye un *triángulo acutángulo (sus tres ángulos son agudos)*. Construye un rectángulo de la misma base y altura que el triángulo, y ponlo encima de él. ¿Qué relación existe entre las áreas de las dos figuras?

C-14. Repite el ejercicio anterior con otros triángulos acutángulos y completa la tabla siguiente:

Triángulo	long. de la base del	long. de la altura del	área del triángulo	área del rectángulo
1º				
2º				
3º				
. . .				

¿Puedes deducir una fórmula para calcular el área de estos triángulos?. Recuerda el resultado que has obtenido en C-12.

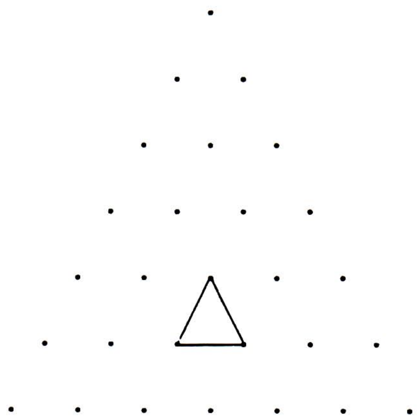
C-15. Construye un paralelogramo que no sea ni rectángulo ni cuadrado. Calcula su área. ¿Cómo la has obtenido?. Repítelo con otros paralelogramos. ¿Puedes obtener una fórmula para calcular sus áreas?. Si lo consigues pasa a C-18, y si no, pasa a C-16.

C-16. Puesto que sabes calcular el área de un rectángulo, intenta aprovecharte de eso. Si tienes un paralelogramo, divídelo en piezas (con gomas de otro color) de manera que al cambiar alguna de ellas de sitio, la figura se convierta en un rectángulo. ¿Está claro que el área de la figura sigue siendo la misma?. Comprueba esto con cuidado.

C-17. Repite los cambios de C-16 con más paralelogramos que no sean rectángulos. ¿Qué relación hay entre la base de un paralelogramo y la del rectángulo que sacas de él? ¿Y entre sus alturas?. Contesta ahora a C-15.

C-18. Construye un *triángulo obtusángulo (tiene un ángulo obtuso).* ¿Hay algún paralelogramo que tenga la misma base y altura?. Construyelo y ponlo encima del triángulo (recuerda lo que hacías en C-13). ¿Qué relación hay entre las áreas del triángulo y el paralelogramo?. Di alguna fórmula para calcular el área del triángulo. Si no se te ocurre, recuerda las actividades C-13 y C-14. ¿Se parece esta fórmula a la que has obtenido en C-14?.

LA FORMULA DE PICK

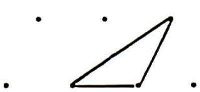


Esta fórmula relaciona el área de un polígono con el número de puntos que tiene. Para obtener la fórmula de Pick, es más cómodo usar un geoplano triangular que uno cuadrado, pues en éste aparecen áreas 1/2, cosa que en el triangular no ocurre y que facilita el hallazgo de la solución.

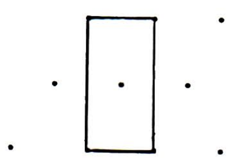
Vamos a trabajar en un geoplano como el de la figura, formado por un triángulo isósceles de 7 puntos de lado y con 28 puntos en total. Como en este caso el geoplano es triangular, la unidad de área va a ser el triángulo pequeño que ves en la figura. Por lo tanto, el área de un polígono será el número de esos triángulos que tienen la misma superficie.

D-1. (*) Construye un triángulo unidad, naturalmente su área es 1. Construye otros triángulos que tengan área 1. ¿Son todos iguales?. ¿Cuántas formas diferentes has encontrado? ¿Hay más?

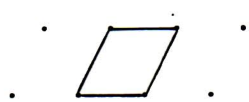
D-2. Calcula el área de los siguientes polígonos:



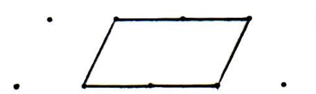
1



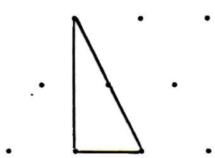
2



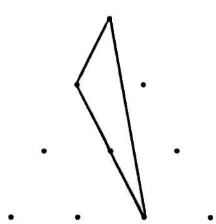
3



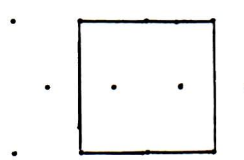
4



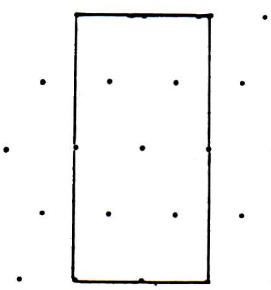
5



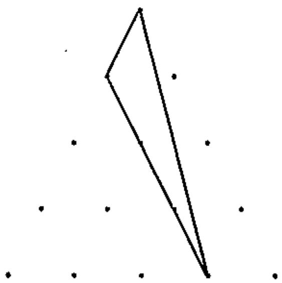
6



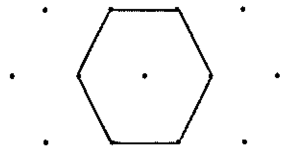
7



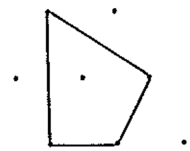
8



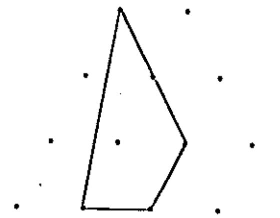
9



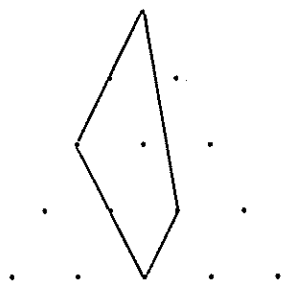
10



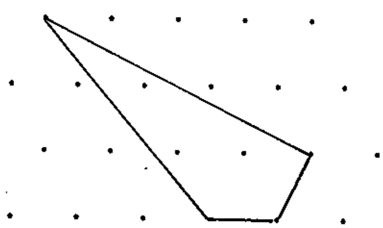
11



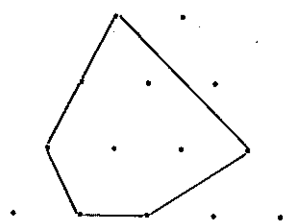
12



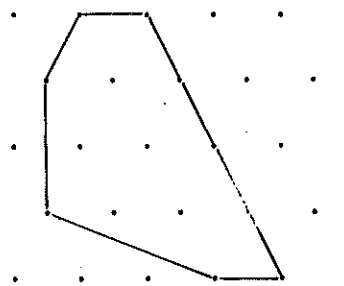
13



14



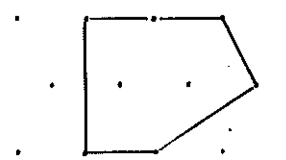
15



16

D-3. *LLamaremos "punto frontera" a todo punto que está en un lado del polígono (es decir a los puntos que tocan la goma), y llamaremos "punto interior" a todo punto que está dentro del polígono (sin tocar la goma).*

Por ejemplo, el polígono de la figura tiene 6 puntos frontera y 2 puntos interiores.



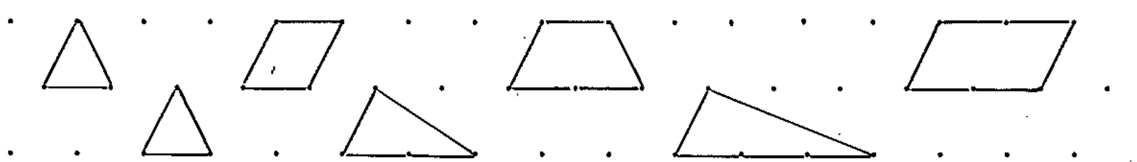
Completa la tabla siguiente con los polígonos de D-2:

polígono número	nº puntos frontera	nº puntos interiores	área
1	3	0	1
2	4	1	4
3			
4			
. . .			

Habrás observado que en algunas figuras es difícil calcular el área contando triángulos unidad. Por eso, vamos a intentar un procedimiento más sencillo para calcular el área de polígonos.

A continuación empezaremos a ver si existe alguna relación entre el número de puntos que tiene una figura y su área, una relación así nos permitiría calcular el área sólo con contar esos puntos.

D-4. (*) Observa los polígonos dibujados debajo. Busca una relación entre el área de cada uno de ellos y el número de sus puntos frontera.



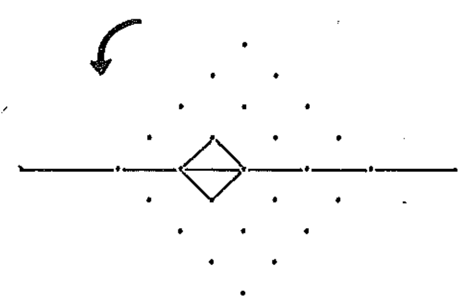
Comprueba la relación que has obtenido con otros polígonos sin puntos interiores.

D-5. Comprueba la relación que has obtenido en D-4 con polígonos cualesquiera.
¿Es siempre válida? ¿Cuándo no lo es?

D-6. Construye un polígono con un punto interior. ¿Qué hay que hacer para desomponerlo en dos plígonos sin puntos interiores? ¿Qué relación hay entre el área del polígono grande y las áreas de los polígonos pequeños?
Repite con otros polígonos que tengan un solo punto interior.

D-7. Trata de hacer lo mismo con los polígonos de D-2. que tienen varios puntos interiores. Cuenta el número de puntos frontera que tiene cada uno de los dos polígonos en que has dividido al grande. ¿Cuántos puntos del geoplano has contado varias veces?. ¿Cuántas veces has contado cada uno?. ¿Qué particularidades tienen esos puntos?.

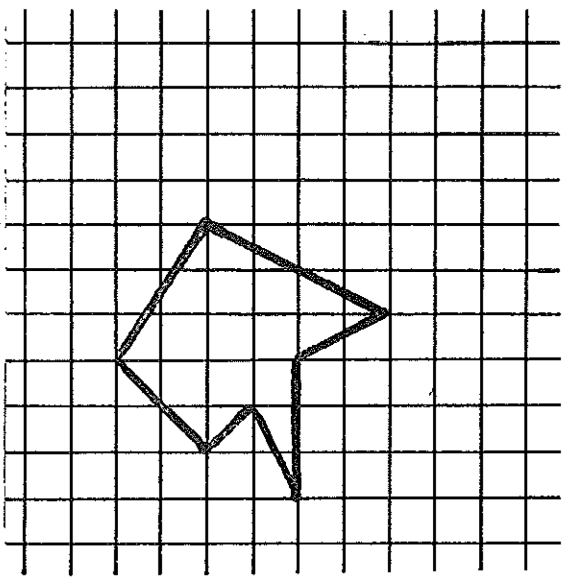
D-8. Observa la tabla de D-3. Intenta deducir de ella una regla que te dé el área de cada polígono (A) en función del número de puntos interiores (n_i) y del número de puntos frontera (n_f) que tiene. Comprueba la fórmula con más polígonos. (Recuerda lo que has hecho en las actividades anteriores).
Esta relación se llama **fórmula de Pick.**



D-9. (*) Coge ahora un geoplano cuadrado; ya sabes que su unidad De área es un cuadrado pequeño. Si giras el geoplano un poco, de manera que sus vértices queden arriba y abajo (como en la figura), ¿verdad que se parece al geoplano triangular que has usado antes?.
Construye aquí un triángulo unidad.

D-10. Si mantienes el geoplano cuadrado en esta posición inclinada, puedes medir las áreas en cuadrados unidad (si lo ves como geoplano cuadrado) o en triángulos unidad (si lo ves como geoplano triangular).
¿Qué relación hay entre el triángulo unidad y el cuadrado unidad? ¿Qué relación hay entre el área de un polígono medida en triángulos, y ese mismo área medida en cuadrados?.
Compruébala haciendo varias ejemplos.

D-11. ¿Cómo se transforma la relación que has obtenido en D-8 (fórmula de Pick) si mides las áreas en cuadrados en vez de en triángulos?.



D-12. Coge una hoja de papel cuadriculado. Dibuja en ella varios polígonos cuyos vértices sean puntos de cruce de la cuadrícula. Tomando un cuadrado pequeño como unidad de área, calcula el área de esos polígonos aplicando la fórmula de Pick.

CAMINOS EN EL GEOPLANO 5x5

En esta sección vamos a usar un geoplano cuadrado de 25 clavos.

E-1. Imagina que el geoplano es una ciudad y que sus puntos son los cruces de las calles. Entonces, hay caminos que son imposibles, como el de la figura 1, y otros que sí se pueden seguir, como el de la figura 2. ¿Notas la diferencia entre estos dos caminos? Si la unidad de longitud es el segmento marcado en la figura 2, es muy fácil saber qué longitud tiene un camino (por ejemplo, el de la figura 2 mide 11 unidades). Construye varios caminos para ir desde A hasta Z y mide sus longitudes.

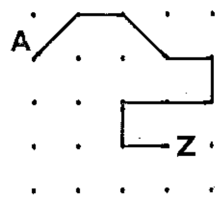


fig.1

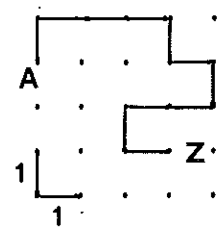


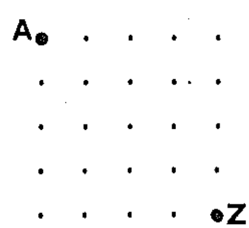
fig.2

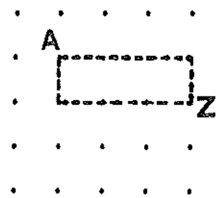
E-2. De todos los caminos que has trazado en E-1, quédate con el de menor longitud (o los de menor longitud). ¿Puedes construir otro camino más corto todavía? ¿Cuánto mide el camino más corto desde A hasta Z? ¿Hay varios caminos con esa longitud mínima?

Esos caminos son muy interesantes, y desde ahora nos vamos a ocupar de ellos.
Diremos que la longitud del camino más corto entre A y Z es la distancia entre A y Z.

E-3. Ya sabes, por E-2, qué longitud tiene el camino más corto desde A hasta Z, y que hay varios caminos de esa longitud, pero, ¿cuántos hay?

E-4. Busca todos los caminos más cortos para ir desde A hasta Z. ¿Cuántos hay? Si es difícil buscarlos y tienes problemas para encontrarlos todos, pasa a E-5.





E-5. Toma los puntos A y Z de la figura. Construye todos los caminos de longitud mínima entre ellos. Con una goma de otro color, traza el rectángulo que tiene como vértices opuestos A y Z (como en la figura). Hay algún camino de los que has construido que se salga del rectángulo? ¿Qué relación hay entre el perímetro del rectángulo y la longitud de los caminos? Repite esta actividad con otros pares de puntos y deduce una forma de conocer la longitud de los caminos más cortos entre los dos puntos.

E-6. Rellena, por orden, las tablas que ves a continuación. En ellas nos ocupamos de cuanto miden los caminos más cortos entre dos puntos, y de cuantos hay.

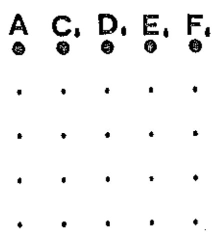


TABLA 1

extremos de los caminos	longitud de los caminos	nº de caminos
$A - C_1$	1	1
$A - D_1$	2	1
$A - E_1$	3	1
$A - F_1$		

Date cuenta de una cosa: En la figura de la tabla nº 2, los caminos que van, por ejemplo, desde A hasta D_2, para tener longitud mínima deben pasar por C_2 o por D_1. Entonces, se cumple que **nº de caminos de $(A - D_2)$ = nº de caminos de $(A - C_2)$ + nº de caminos de $(A - D_1)$**, ¡y estos dos números ya los tienes en las tablas! luego no necesitas contar. Esto es verdad para cualquiera de los puntos de las tablas siguientes.

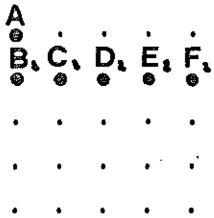


TABLA 2

extremos de los caminos	longitud de los caminos	nº de caminos
A — B_2	1	1
A — C_2	2	1 + 1 = 2
A — D_2	3	2 + 1 = 3
A — E_2		
A — F_2		

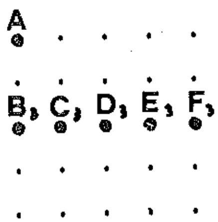


TABLA 3

extremos de los caminos	longitud de los caminos	nº de caminos
A — B_3		
A — C_3		
A — D_3		
A — E_3		
A — F_3		

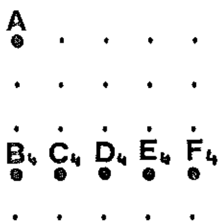


TABLA 4

extremos de los caminos	longitud de los caminos	nº de caminos
A — B_4		
A — C_4		
A — D_4		
A — E_4		
A — F_4		

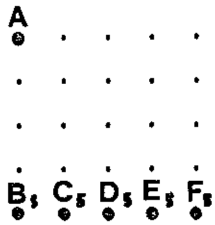
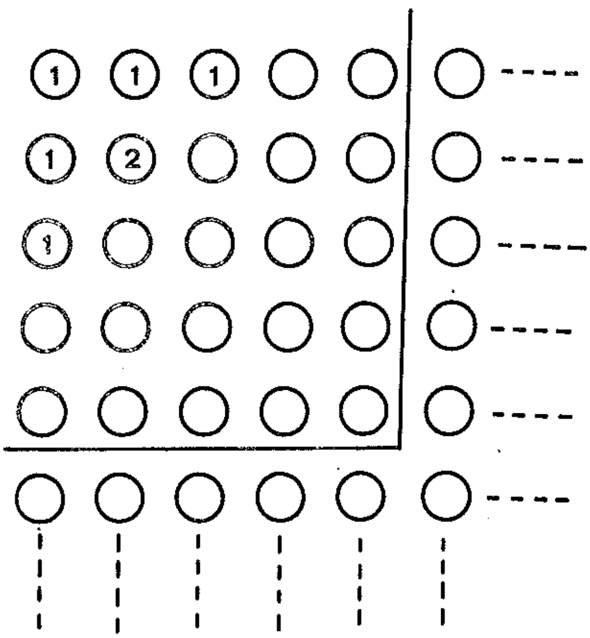


TABLA 5

extremos de los caminos	longitud de los caminos	nº de caminos
A -- B_5		
A -- C_5		
A -- D_5		
A -- E_5		
A -- F_5		



E-7. Como ya sabes cuantos caminos de longitud mínima van desde A hasta cualquier punto del geoplano 5x5, puedes completar la tabla de la derecha; en ella, cada círculo representa un punto del geoplano, y dentro pondrás el número de caminos más cortos que van desde A hasta ese punto (según los resultados de E-6).

Fíjate en la tabla (después de rellenarla) y verás que hay una relación entre cada número y sus vecinos, la misma que usabas en E-6. Aplicándola, puedes prolongar la tabla y te servirá para geoplanos 6x6, 7x7 y tan grandes como quieras.

Los números de la tabla de E-7 pueden colocarse en forma de triángulo, como ves más adelante. En esa posición, cada número es la suma de los dos que tiene encima (mira las flechas). Esta ordenación de números se llama **Triángulo de Tartaglia** y también **Triángulo de Pascal.**

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

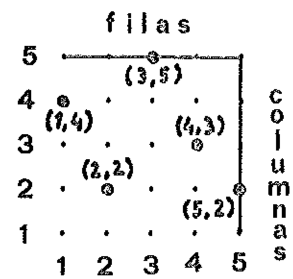
1 6 15 20 15 6 1

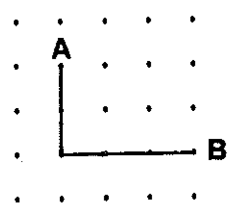
E-8. Imagina que le tienes que decir a un compañero entre qué puntos estás construyendo un camino; no puedes enseñarle tu geoplano ni un dibujo, porque estais hablando por teléfono. ¿Cómo se lo dirías?.

Una forma puede ser usando los nombres de E-6 (si unes las cinco figuras de E-6 en una sola, verás que cada punto tiene un nombre distinto). Si tu compañero conoce esos nombres, podreis hablar sin problemas.

Vamos a inventar otros nombres más prácticos y más fáciles de usar: Primero diremos en cual de las cinco columnas está el punto y después en cual de las cinco filas. De esta forma se pueden identificar todos los puntos del geoplano. En la figura tienes varios ejemplos. Practica con tus compañeros. *A esos dos números los llamaremos las coordenadas del punto.*

¿Es importante el orden de las coordenadas? El punto (3,5) y el punto (5,3), ¿son el mismo?





E-9. Sabes que la distancia entre dos puntos A y B es la longitud del camino más corto que los une, y también sabes que para calcularla basta con medir el camino que ves en la figura. ¿Cuales son las coordenadas de los puntos A y B? ¿Cuánto mide cada tramo (vertical y horizontal) del camino de la figura? ¿Qué relación hay entre las coordenadas de A y B y esas longitudes? ¿Qué relación hay entre las coordenadas de A y B y la distancia entre ellos?
Repite esta actividad con otros pares y comprueba tus conclusiones.

E-10. Comprueba el resultado de la actividad anterior, y corrígelo si es necesario, con los pares de puntos siguientes calculando la distancia entre los dos puntos de cada par:

(2,4) y (5,2); (3,4) y (1,3); (2,1) y (4,4); (3,3) y (5,3); (3,5) y (5,4); (4,2) y (2,4); (1,4) y (1,1); (2,3) y (5,5).

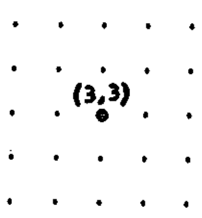
Para representar la distancia entre A y B escribiremos d (A,B). A partir de las actividades E-9 y E-10 puedes escribir una fórmula general para calcular d (A,B). Para eso, ten en cuenta que lo que haces es medir longitudes y por lo tanto los resultados de las restas debes tomarlos sólo en su **valor absoluto** (es decir, debes ignorar el signo negativo).

E-11. Comprueba las siguientes propiedades:

$d(A,A) = 0$; $d(A,B) = 0 \rightarrow A = B$; $d(A,B) = d(B,A)$; $d(A,B) \leqslant d(A,C) + d(C,B)$.

A, B y C son tres puntos cualesquiera del geoplano.

E-12. Has visto en E-11 que, dados A y B, para cualquier otro punto C se cumple $d(A,B) \leqslant d(A,C) + d(A,B)$. ¿Con qué puntos C se cumple sólo la igualdad $d(A,B) = d(A,C) + d(C,B)$?

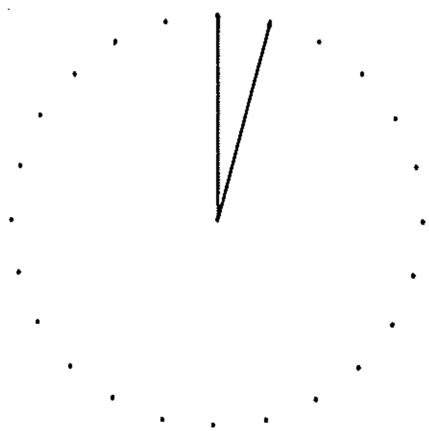


E-13. Une con una goma los puntos del geoplano cuya distancia al (3,3) es 1 unidad. Haz lo mismo con los puntos que distan 2 unidades del (3,3). Repítelo con los que distan 3 unidades, 4 unidades, etc. del (3,3).

E-14. Repite el ejercicio E-13 con el punto (4,2) y con el (1,1). En estas dos últimas actividades te quedarán mejor las cosas si usas un geoplano grande, o incluso una hoja de papel cuadriculado.

E-15. (*) Elige dos puntos del geoplano y calcula su distancia. ¿Es un número par, o es impar? Une esos dos puntos por medio de varios caminos que tengan distintas longitudes. ¿Qué puedes decir sobre la paridad de cada camino (es decir, sobre si su longitud es un número par o impar)?
¿Puedes unir esos puntos por medio de dos caminos que tengan distinta paridad (uno con longitud par y otro con longitud impar)?
¿Crees que es correcto el siguiente enunciado:
"Dados dos puntos A y B del geoplano, todos los caminos que van desde A hasta B longitud de la misma paridad"?
Si lo ves correcto, trata de demostrarlo.

POLIGONOS INSCRITOS EN EL GEOPLANO CIRCULAR DE 24 PUNTOS

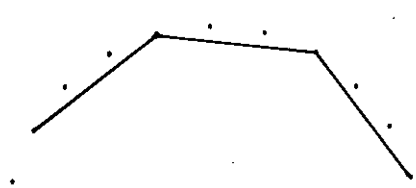


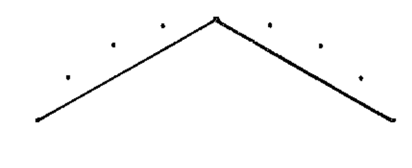
F-1. Une el clavo del centro con dos clavos consecutivos de la circunferencia (como en la figura), Construye todos los ángulos que puedas iguales a ése. ¿Cuántos hay? ¿Cuántos grados tiene cada ángulo?

F-2. Construye ángulos cuyo vértice sea el clavo del centro de la circunferencia con amplitudes de 30°, 60°, 75°, 90°, 105°, 135°, 180°, 225°, 270°, 300°.

F-3. Une por medio de una goma (o cuerda) los puntos de la circunferencia de dos en dos (es decir, uno sí y uno no, como en la figura) hasta dar una vuelta a la circunferencia. Has obtenido un polígono. ¿Cuántos vértices tiene? ¿Es regular? ¿Cuántos polígonos puedes construir iguales al que tienes?

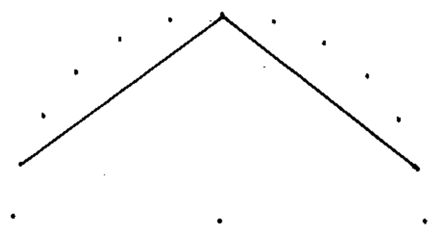
F-4. Repite F-3 uniendo los puntos de tres en tres, y de cuatro en cuatro (como en las figuras).





F-5. Recuerda los polígonos que has obtenido en F-3 y F-4.
(*) El geoplano tiene 24 puntos en la circunferencia. ¿Ves alguna relación entre este número, el número de lados de cada polígono y el número de polígonos iguales que hay? Si ves la relación, pasa a F-7 y si no, pasa a F-6.

F-6. Uniendo los puntos de cinco en cinco (mira la figura),
(*) ¿puedes volver al primer punto dando sólo una vuelta? Si te ha quedado una línea poligonal abierta, ciérrala uniendo el último punto con el primero. ¿Es un polígono regular? ¿Es divisor de 24 el número de sus lados? Vuelve a F-5.



F 7. Comprueba la relación que has obtenido construyendo otros polígonos por el mismo procedimiento.

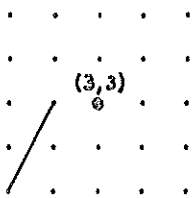
F-8. Construye un hexágono regular en el geoplano. Con una goma de otro color, une sus vértices de dos en dos. Si no has unido todos, repite la operación con los que quedan. Así, has construido una "estrella" con tantas puntas como vértices tiene el polígono. *La llamaremos polígono estrellado*. ¿Cortan las líneas del polígono estrellado el centro del geoplano? Si no es así, ¿qué polígono ves en el centro de la estrella?

F-9. Repite lo que has hecho en F-8 con los polígonos regulares de más de seis lados que puedas construir en el geoplano. También puedes conseguir polígonos estrellados uniendo los vértices de tres en tres, de cuatro en cuatro, etc...

Así mismo, puedes hacerlo a partir de polígonos no regulares. Contesta en cada caso a las preguntas de F-8.

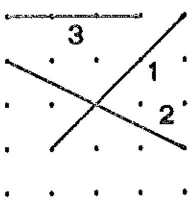
MOVIMIENTOS Y SEMEJANZAS EN UN GEOPLANO GIRATORIO

G-1. Gira el geoplano 5x5 ángulos de 30º, 60º, 75º, 90º, 105º, 135º, 180º, 225º, 270º, 300º.

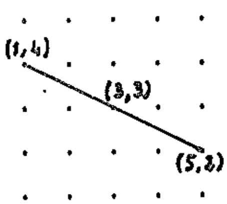


G-2. En la actividad anterior has observado cómo los puntos del geoplano van cambiando de posición constántemente al girarlo. Dibuja el segmento (1,1) --- (2,3), como en la figura.
¿Cuántos grados tienes que girar el geoplano para que el segmento vuelva a estar en la posición inicial?

G-3. Repite la operación anterior con otros segmentos como tú quieras. ¿Es necesario hacer siempre el mismo giro? Construye un segmento que pase por el punto (3,3). ¿Cuántos grados tienes que girar el geoplano en este caso? ¿Puedes hacer que vuelva a la posición inicial con un giro más pequeño? Repite el experimento con más segmentos que pasen por el punto (3,3) y mira si obtienes siempre el mismo resultado.



G-4. Mira los segmentos de la figura. ¿Necesitan todos el mismo giro para volver a estar en posición inicial? ¿Cual necesita un giro menor? ¿Qué lo diferencia de los otros segmentos?
Diremos que el punto (3,3) es el centro de simetría del segmento número 2.



Diremos que los puntos (1,4) y (5,2) son simétricos respecto del punto (3,3) pues el (3,3) es el centro de simetría del segmento que los une.

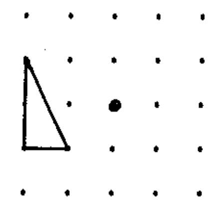
G-5. Di si los pares de puntos siguientes son simétricos respecto del (3,3):

(2,2) y (4,4); (1,2) y (3,4); (2,4) y (5,1); (1,3) y (5,3); (2,3) y (4,3).

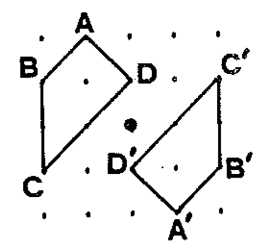
Busca el simétrico respecto del (3,3) de los puntos siguientes:

(1,2), (2,4), (2,1), (1,1), (4,5), (1,5), (3,3).

G-6. En la figura ves un triángulo. Calcula los puntos simétricos de sus vértices respecto del (3,3). Une esos nuevos puntos con una goma. ¿Qué relación hay entre las longitudes de los lados de uno y otro triángulo? ¿Y entre sus áreas?
Diremos que estos dos triángulos son simétricos respecto del punto (3,3).

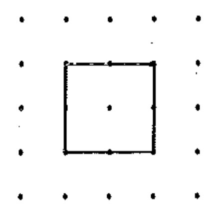


G-7. Lo que has hecho en G-6 con un triángulo puedes repetirlo con otros polígonos de más vértices, pero con cuidado de unir los nuevos vértices en el mismo orden que los del polígono inicial (mira la figura). Construye los polígonos que tú quieras, incluso cóncavos, busca sus simétricos respecto del (3,3) y contesta a las preguntas de G-6. Intenta sacar conclusiones de las respuestas a cada pregunta.



G-8. Construye un triángulo en el geoplano. Construye su simétrico respecto del (3,3) y dibuja el resultado en papel cuadriculado. Ahora, gira el primer triángulo 180° y dibuja el resultado también en papel cuadriculado. Compara los dos resultados. Repite esta actividad con más polígonos y saca conclusiones.

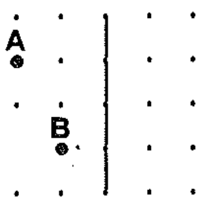
G-9. Construye el simétrico del polígono de la figura respecto del (3,3). ¿Qué relación hay entre éllas?
Se dice que el punto (3,3) es el centro de simetría de ese cuadrado.



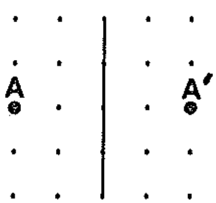
En general, *diremos que el punto (3,3) es el centro de simetría de un polígono si el simétrico de ese polígono respecto del (3,3) es él mismo.*

G-10. Construye polígonos que tengan al (3,3) como centro de simetría, y dí cuantas veces aparece cada polígono en la posición inicial si giras una vuelta el geoplano.

G-11. Construye un polígono regular sobre el geoplano circular de 24 puntos. ¿Tiene centro de simetría? ¿Puedes construir algún polígono regular que no tenga centro de simetría? ¿Tienen el mismo centro de simetría todos los polígonos regulares construidos en el geoplano circular? ¿Qué punto es ése?

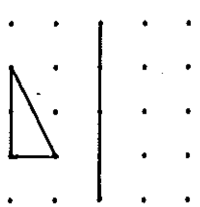


G-12. En la figura hay una recta. Imagina que es un espejo. ¿Dónde verás reflejado el punto A? ¿Y el B?



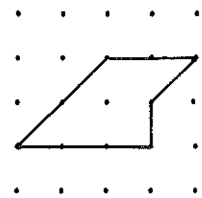
G-13. En la figura, A' es el reflejo de A en el espejo de la recta que va del (3,1) al (3,5). *Diremos que A' es el punto simétrico de A respecto del eje (3,1)--- (3,5), y a esta recta la llamaremos eje de simetría.*
Busca el simétrico respecto del eje (3,1)---(3,5) de los puntos: (1,1), (2,3), (5,1), (4,5), (5,4) y (3,2).
Construye los segmentos que unen cada punto y su simétrico. ¿Qué relación tienen con el eje de simetría?

G-14. Busca los simétricos respecto del eje (1,1)---(5,5) de los puntos de G-13. Construye los segmentos que unen cada punto y su simétrico. ¿Qué relación tienen con el eje de simetría? ¿Es la misma que en G-13?



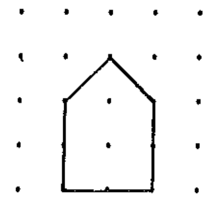
G-15. Igual que has hecho en G-6, puedes obtener el **simétrico del triángulo de la figura respecto del eje (3,1)---(3,5)** buscando los simétrico de sus tres vértices respecto del eje y uniendo los nuevos puntos.
¿Qué relación hay entre las longitudes de los lados de uno y otro triángulo? ¿Y entre sus áreas? ¿Qué diferencia hay entre el triángulo que has obtenido en G-6 y el que has obtenido ahora?

G-16. Busca el simétrico respecto del eje (1,5)--(5,1) del polígono de la figura. Construye más polígonos y busca sus simétricos respecto de algún eje que pase por el punto (3,3).
Busca también los simétricos de esos polígonos respecto del (3,3), y contesta a las preguntas de G-15 con cada uno de ellos.



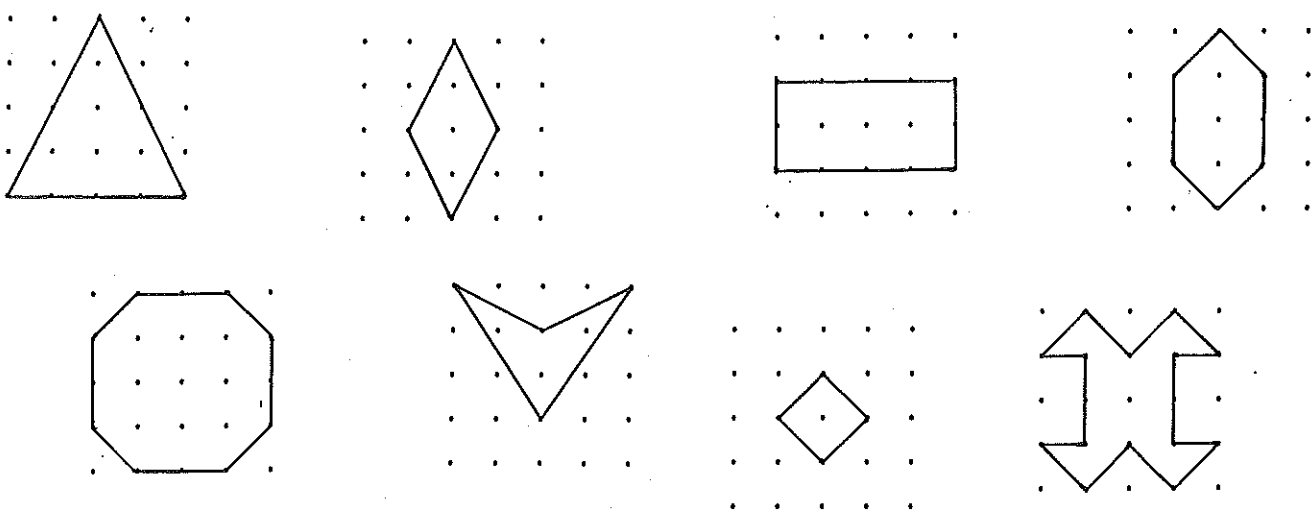
G-17. Construye el simétrico del polígono de la figura respecto del eje (3,1)--(3,5). ¿Qué relación hay entre los dos polígonos?
Diremos que el eje (3,1)--(3,5) es un eje de simetría del polígono.

Diremos que una recta es eje de simetría de un polígono si el simétrico del polígono respecto de ese eje es él mismo.



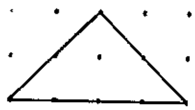
G-18. Construye polígonos que tengan algún eje de simetría. ¿Es único el eje de simetría de un polígono? Construye polígonos con varios ejes de simetría, si es posible.

G 19. Busca todos los ejes de simetría de los polígonos de las figuras.



¿Tienen centro de simetría estos polígonos? ¿Qué relación hay entre el centro y los ejes de simetría? ¿Cuántas veces aparece cada polígono en la posición inicial al girar una vuelta el geoplano? Relaciona este resultado con el número de ejes de simetría del polígono.

G-20. Repite G-19 con polígonos (estrellados o no) construidos sobre el goeplano circular de 12 puntos.



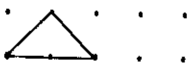


fig.1

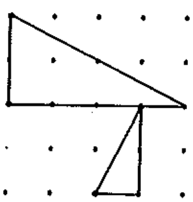


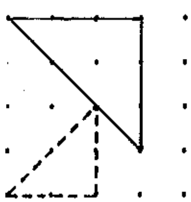
fig.2

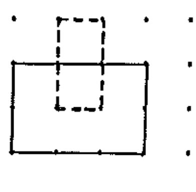
G-21. En la figura 1 hay dos triángulos. ¿En qué se parecen? ¿En qué se diferencian? Mide los lados de ambos y busca una relación entre las longitudes de los lados correspondientes. ¿Es la misma en los tres lados?
Diremos que estos dos triángulos son semejantes.
Los triángulos de la figura 2 también son semejantes; compruebalo comparando las longitudes de los lados correspondientes.

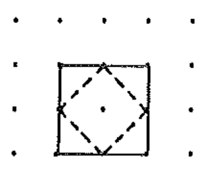
Diremos que dos polígonos son semejantes si existe una relación constante entre las longitudes de los lados correspondientes de los dos polígonos.

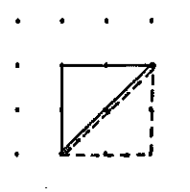
G-22. Construye más triángulos semejantes a los que hay en las figuras de G-21.

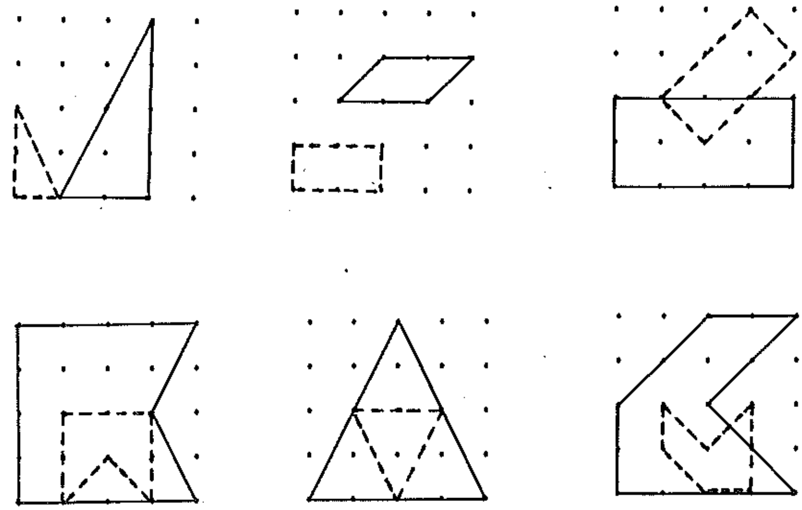
G-23. En cada figura hay dos polígonos. Dí si son semejantes o no.



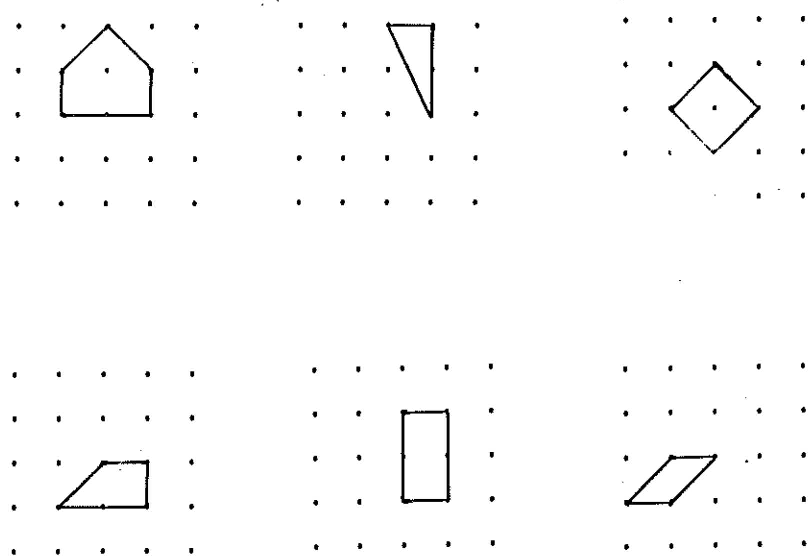








G-24. Construye polígonos semejantes a los siguientes (haz varios en cada caso).



G-25. En las cuestiones anteriores tienes muchos polígonos semejantes a otros. Toma dos que sean semejantes entre sí. ¿Qué relación hay entre las longitudes de sus lados? ¿Y entre sus áreas? Rellena la tabla siguiente y saca una conclusión que ligue la relación entre los lados y la relación entre las áreas de dos polígonos semejantes.

par de polígonos	relación entre lados	relación entre áreas
1º		
2º		
.		
.		
.		

COMENTARIOS Y SOLUCIONES

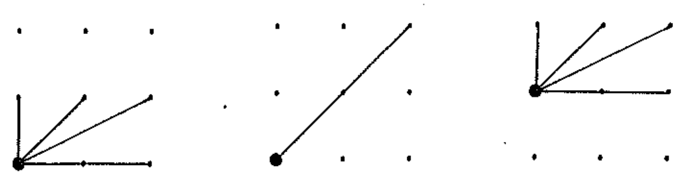
GEOPLANO 3x3. Este geoplano se puede usar para tener la primera toma de contacto con el aparato.

En él, se orientará la atención hacia las formas y tamaños. Así, se obtienen los distintos segmentos posibles, sin medir sus longitudes, sólo viendo cuándo dos segmentos son iguales o no. También se buscarán las figuras que se puedan construir. Como el geoplano es pequeño, no hay mucha variedad de formas ni de posiciones, lo cual es conveniente en una fase en la que los alumnos todavía no han desarrollado una metodología de búsqueda sistemática, sino que lo hacen aleatoriamente.

Es interesante que el profesor se fije en los métodos de búsqueda de figuras, y que procure encauzar a los alumnos para que usen las simetrías del geoplano y los giros.

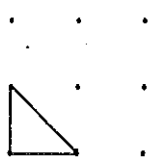
A-1. Hay cinco longitudes diferentes: 1, 2, $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$.

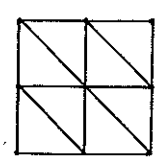
Depende del punto que se elige, para obtener todas las longitudes o no:



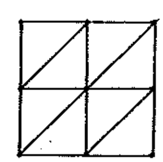
5 longitudes 4 longitudes

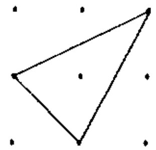
A-3. Se considera la forma de la figura, no la posición.





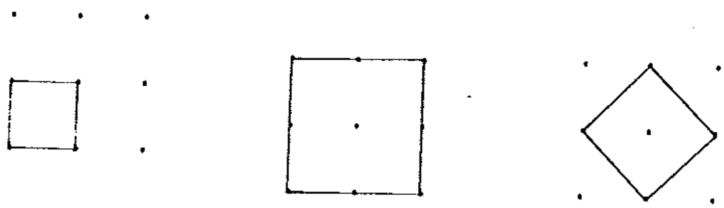
girando 90º aparecen otros 8:



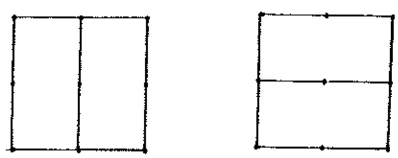


girando 90°, 180°, 270° aparecen en total 4 triángulos.

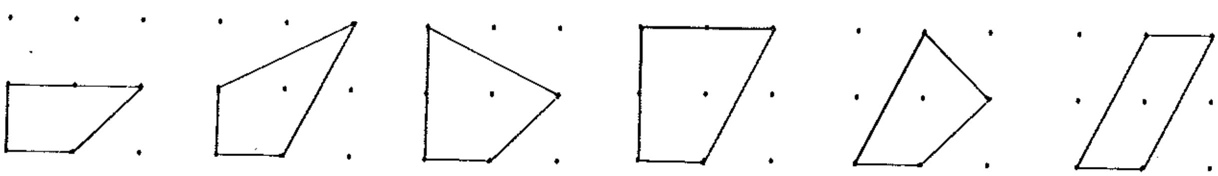
A-9. Cuadrados diferentes:

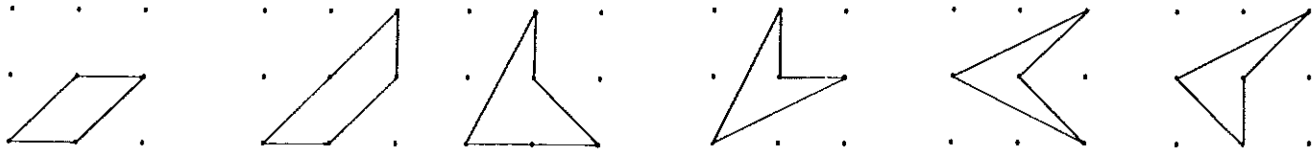


A 10. Cuatro iguales:

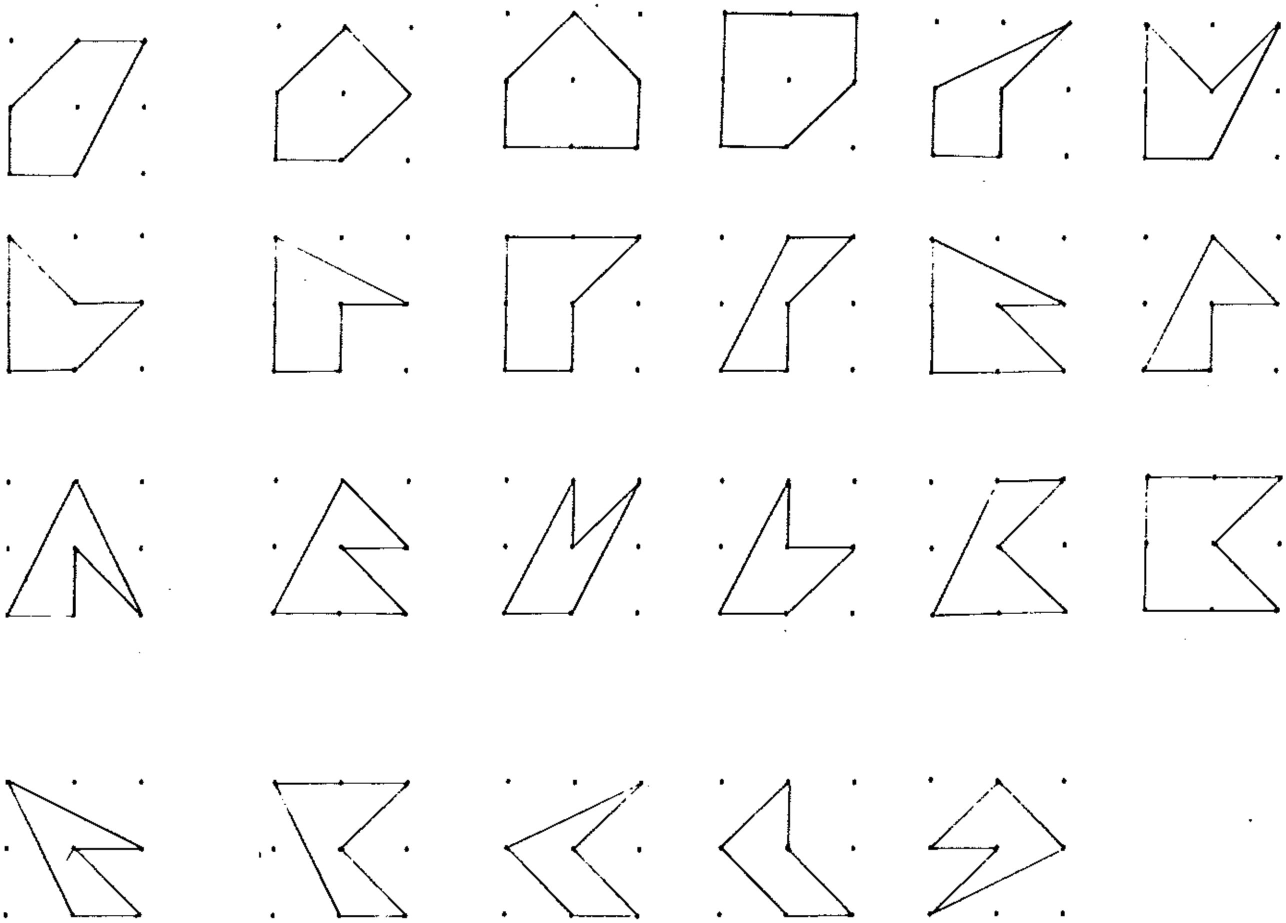


A-11. Otros cuadriláteros:

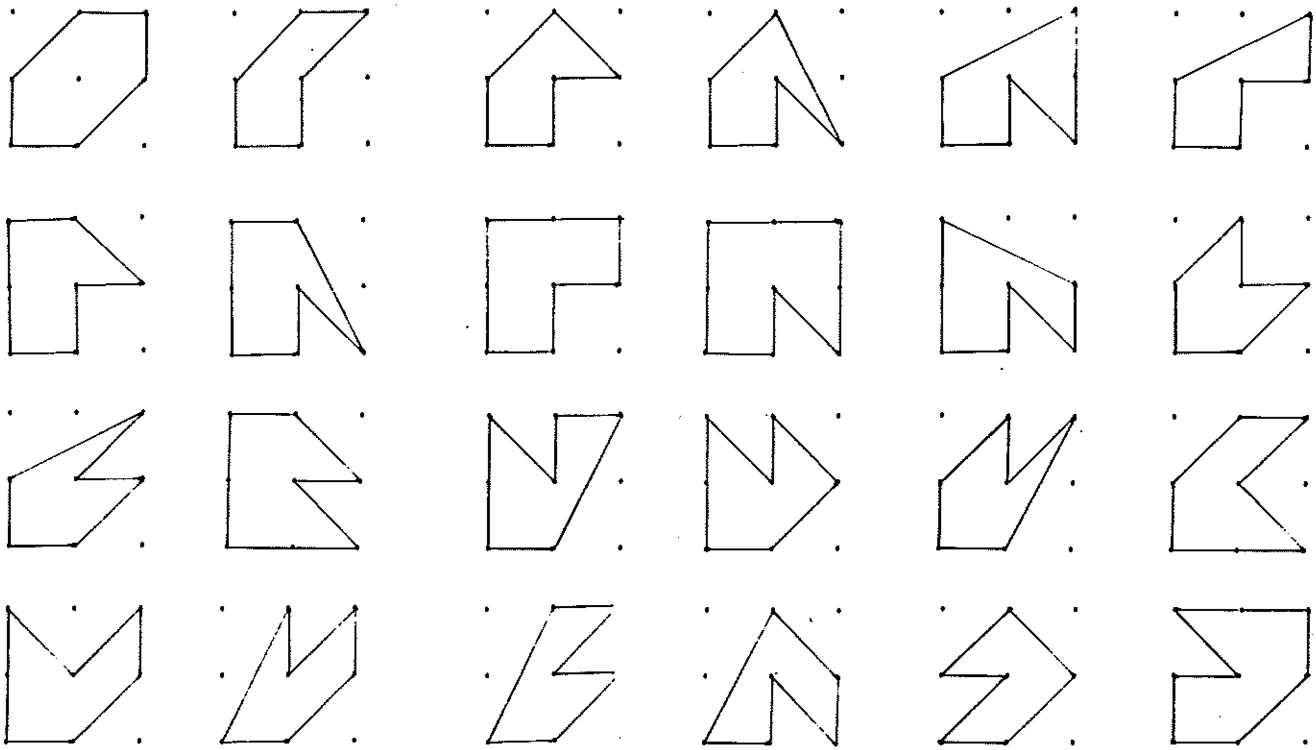




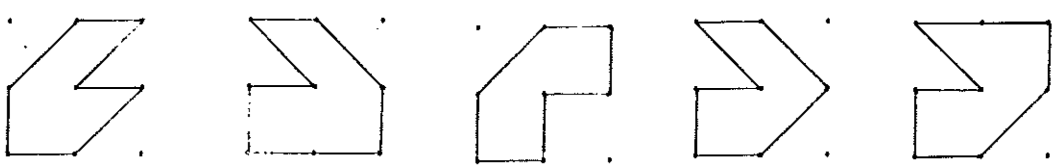
A-12. Hay 23 pentágonos:



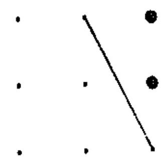
A-14. Hay 24 hexágonos:

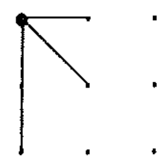


Hay 5 heptágonos:



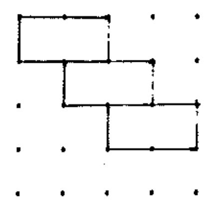
La demostración de que no es posible construir un octágono se puede hacer partiendo de la base de que de los 9 puntos del geoplano, harían falta 8 como vértices, cosa que limita mucho las posibilidades de construcción (por ejemplo, una línea como la de la figura no puede ser un lado del octágono, porque aísla dos puntos, ninguno de los cuales podría ser vértice del polígono y por lo tanto quedan 7 puntos para 8 vértices). Procediendo sistemáticamente, se irán descartando una tras otra todas las posibilidades; se puede empezar a partir del siguiente hecho evidente: Para construir un octágono, siempre tiene que ser un vértice suyo, al menos una de las cuatro esquinas del geoplano. Entonces, desde ese vértice solo hay tres posiciones posibles (ver la figura) para los dos lados que salen de él, lo cual da cuatro combinaciones de estos dos lados; al intentar construir el resto del octágono, siempre se llega a un resultado diferente del deseado.



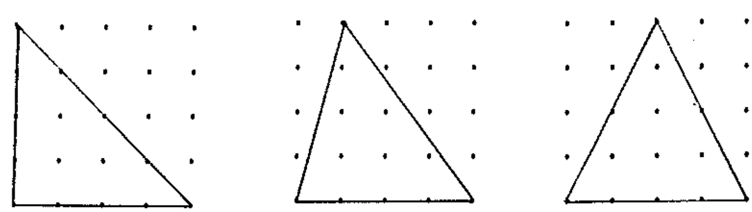


C-1. Hay 24 rectángulos de área 2:

En cada línea (vertical y horizontal) se pueden construir 3 rectángulos, luego hay 12 vértices y 12 horizontales.



C-4. Los triángulos mayores tienen áreas 8, y son de estas tres formas diferentes:



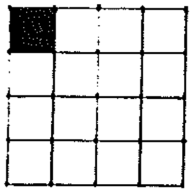


fig. 1

C-5. Hay 16 cuadrados de área 1, cuatro en cada una de las cuatro líneas (fig. 1).

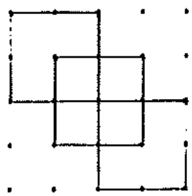


fig. 2

Hay 9 cuadrados de área 4, tres en cada par de líneas consecutivas (fig. 2).

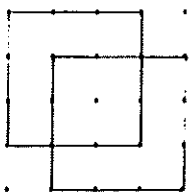
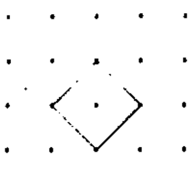
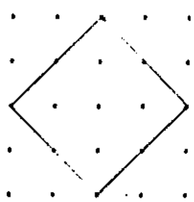


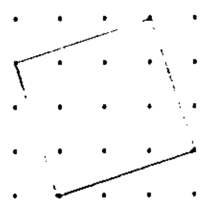
fig. 3

Hay 4 cuadrados de área 9, dos en cada trío de líneas consecutivas (fig. 3).
Hay 1 cuadrado de área 16.

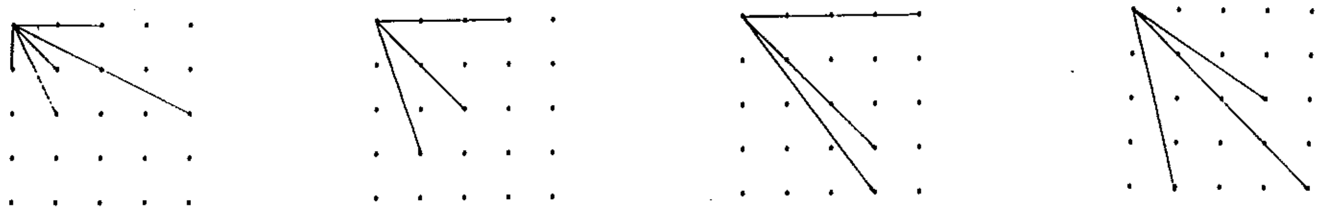
C-7. Hay otras cuatro formas diferentes de cuadrado:





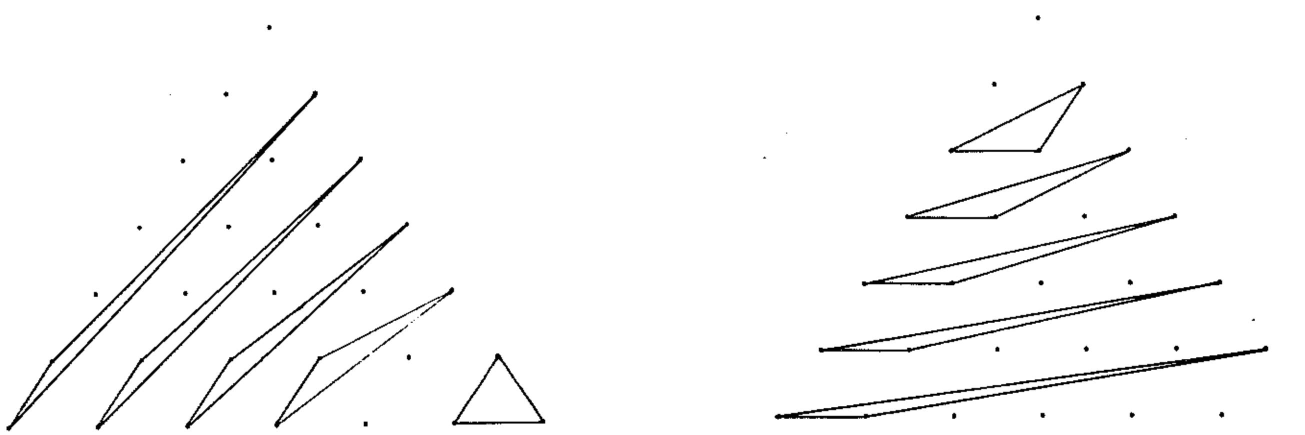


C-9. Hay 14 segmentos diferentes en el geoplano 5x5:



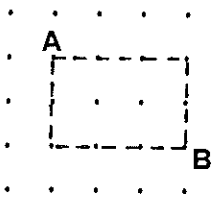
D-1. Hay triángulos que, aunque no lo parece, tienen área 1, y calcular ese área puede ser complicado. En la figura damos un ejemplo: El triángulo negro tiene área 1, lo cual se puede comprobar estudiando la descomposición del paralelogramo en cuatro triángulos iguales dos a dos. Enseguida se comprueba que el paralelogramo tiene área 6 y que los dos triángulos grandes tienen área 2 cada uno.

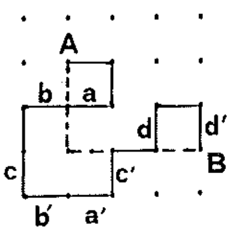
Hay 10 formas diferentes de triángulos de área 1 (teniendo en cuenta que la malla no es equilátera):



D-4. La pregunta que se hace (¿Es válida la fórmula con otros polígonos sin puntos interiores?) se refiere tanto a polígonos convexos como cóncavos, pues estos últimos serán necesarios para resolver D-6.

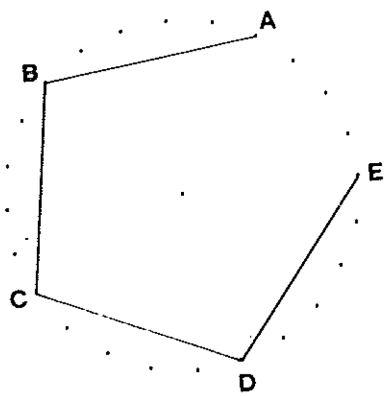
D-9. El geoplano cuadrado equivale a un geoplano triangular en el que el triángulo unidad es isósceles (medio cuadrado unidad); por ésto, decíamos al principio que no conviene usar un triángulo equilátero, sino isósceles.





E-15. Escogemos un camino de longitud mínima de A hasta B, por ejemplo uno que siga el perímetro del rectángulo. Todos los caminos mínimos de A a B son equivalentes, luego tienen la misma paridad.
Si escogemos un camino no mínimo (es decir más largo), observamos que cada segmento que se aleja del camino mínimo (a, b, c, d) se complementa con otro segmento que se acerca (a', b', c', d'), es decir que la paridad del camino no cambia sea cual sea su longitud.

F-5. Construido un polígono regular de n lados, el número de polígonos iguales a éste es 24/n.



F-6. Se trata de obtener una línea poligonal abierta análoga a la de la figura, y cerrarla uniendo el punto E con el A, con lo que se obtiene un pentágono no regular.

Valencia, Abril de 1.980
Alejandro FERNANDEZ LAJUSTICIA
Angel GUTIERREZ RODRIGUEZ

BIBLIOGRAFIA

ASSOCIATION OF TEACHERS OF MATHS. (1978), *"A collection of ideas about Geoboards"*. Ed. Peter Wells, Sutton-on-the--Forest (York, Gran Bretaña).

CASTELNUOVO, E.; BARRA, M. (1977), *"Matemática nella realtà"*. Ed. Boringhieri (Turín).

GATEÑO, C. (1965), *"Algebra y Geometría"*, de la serie Aritmética con los Números en Color, nº 9. Ed. Cuisenaire de España.

HARKIN, J.B. (1974), *"Transformation and Tesselation on the Geoboard"* en Educational Studies in Maths., vol. 5, nº 4, pg. 461 y ss.

HARKIN, J.B. (1975), *"Introducing the Geoboard"* en Educational Studies in Maths., vol. 6, nº 1, pg. 113 y ss.

SCHOOL MATHEMATICS PROJECT, *Books A y C*. Ed. Cambridge University Press.

INDICE

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

ESCUELA UNIVERSITARIA DEL PROFESORADO DE EDUCACION GENERAL BASICA