TIPOS DE DEMOSTRACIÓN DE ESTUDIANTES DEL GRADO 10º EN SANTANDER (COLOMBIA)

Jorge Enrique Fiallo Leal
Universidad Industrial de Santander (Colombia)

Ángel Gutiérrez Rodríguez
Universidad de Valencia

RESUMEN

Presentamos los resultados cualitativos y cuantitativos de una evaluación diagnóstica aplicada a tres grupos de estudiantes de 10º grado de bachillerato (14-16 años) de tres instituciones de Santander (Colombia), cuyo objetivo apuntaba a indagar y analizar los tipos de demostraciones que realizan los estudiantes al inicio del curso. Los datos, además, nos permitieron sacar algunas conclusiones acerca de su comprensión de la demostración.

ABSTRACT

We present qualitative and quantitative results of a diagnostic evaluation applied to three groups of students of 10th grade (14-16 years) in three high schools in Santander (Colombia). The evaluation was aimed to investigate and analyze the types of proofs they produced at the beginning of the course. The data, informed us the types of proof produced at the beginning of the course, and allowed us to reach some conclusions about the understanding of proof by the students in this level.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI
Jorge Enrique Fiallo Leal y Ángel Gutiérrez Rodríguez (2007). TIPOS DE DEMOSTRACIÓN DE ESTUDIANTES DEL GRADO 10º EN SANTANDER (COLOMBIA), pp. 355-368.

INTRODUCCIÓN

Los fracasos y bajos niveles de comprensión de la demostración han llevado a que muchos profesores abandonen esta práctica (Mariotti, 2006). Sin embargo existe el consenso general entre los didactas de las matemáticas de que el desarrollo del sentido de la demostración constituye un objetivo importante de la educación matemática y se ve una tendencia general a incluir el aprendizaje de la demostración en el currículo de matemáticas, como se puede apreciar, por ejemplo, en los "principios y estándares" del National Council of Teachers of Mathematics (N.C.T.M., 2003), donde se señala el razonamiento y la demostración como uno de los estándares para las matemáticas escolares desde preescolar al nivel 12 inclusive. En este texto se sugiere que los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:

- Reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas.
- Formular e investigar conjeturas matemáticas.
- Desarrollar y evaluar argumentos matemáticos y demostraciones.
- Elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y métodos de demostración. (N.C.T.M., 2003, p. 59).

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 1998), dentro de los procesos generales se menciona el razonamiento matemático como una actividad que debe estar presente en todo el trabajo matemático de los estudiantes y que tiene que ver con:

- Dar cuenta de cómo y del por qué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.
- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.
- Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar. (MEN, 1998, p. 77).

Teniendo en cuenta estas ideas y las de varios investigadores en el tema de la demostración en matemáticas, se planteó un proyecto de investigación llevado a cabo dentro del programa del Doctorado en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Valencia, cuyos objetivos fueron: i) Diseñar, implementar y evaluar una unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un entorno de geometría dinámica enfocándola además hacia el desarrollo de las habilidades de la demostración; ii) Analizar los tipos de demostración que emergen con el uso de Cabri en el proceso de demostración de propiedades trigonométricas de los estudiantes; iii) Analizar los procedimientos, las estrategias de razonamiento y los errores y dificultades detectados en el desarrollo de las actividades planteadas en la unidad de enseñanza. Una de las fases de dicho trabajo consistió en la aplicación y análisis de un test diagnóstico que nos permitió clasificar a cada uno de los estudiantes y obtener información sobre sus ideas y su comprensión de la demostración en matemáticas antes de iniciar el curso.

Presentamos en este texto el marco teórico, la metodología, el proceso de análisis de los datos y algunas conclusiones de esta fase de la investigación.

MARCO TEÓRICO

El análisis de las respuesta de los estudiantes al test diagnóstico se hizo considerando la demostración desde una perspectiva amplia, como un proceso que incluye todos los intentos hechos por los estudiantes para explicar, verificar o justificar con miras a convencerse a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática.

Para la clasificación de las respuestas de los estudiantes se utilizaron las categorías propuestas por Marrades y Gutiérrez (2000), quienes apoyados en los trabajos de Balacheff (1988), Bell (1976) y Harel y Sowder (1998), propusieron la siguiente estructura analítica para analizar, organizar y describir las respuestas de los estudiantes a problemas de demostración.

A) Demostraciones empíricas, caracterizadas por el uso de ejemplos como elementos de convicción. Los tipos de demostración empírica son:

- *Empirismo ingenuo:* Cuando en el planteamiento de una conjetura y en la demostración se usan solamente ejemplos escogidos sin ningún criterio específico. Se identifican dos tipos de empirismo ingenuo:
  - *Perceptivo:* Cuando los estudiantes se basan en elementos visuales o táctiles.
  - *Inductivo:* Cuando los estudiantes se basan en elementos matemáticos o relaciones detectados en el ejemplo.
- *Experimento crucial:* Cuando la conjetura es demostrada usando un ejemplo que se escoge porque se presume que en cualquier otro caso va a dar el mismo resultado. Se identifican los siguientes tipos de experimentos cruciales:
  - *Basado en ejemplo*: Cuando los estudiantes se basan en la existencia de un único ejemplo o en la ausencia de contraejemplos para su demostración.
  - *Constructivo:* Cuando los estudiantes sustentan sus demostraciones en las construcciones realizadas sobre el ejemplo o en la forma de conseguir el ejemplo.
  - *Analítico:* Cuando se usan ejemplos cuidadosamente seleccionados y las demostraciones de los estudiantes están basadas en propiedades y relaciones observadas en el ejemplo o en elementos auxiliares.
  - *Intelectual:* Cuando las conjeturas o demostraciones de los estudiantes están basadas en observaciones empíricas del ejemplo, pero en la demostración usan propiedades matemáticas aceptadas o relaciones entre los ejemplos.
- *Ejemplo genérico:* Cuando en la demostración o la conjetura se usa un ejemplo específico que es representante de una clase, y la demostración incluye la producción de razonamientos abstractos.

Los cuatro tipos de demostración definidos en los párrafos anteriores para el experimento crucial se presentan en los ejemplos genéricos.

B) Demostraciones deductivas, caracterizadas por la descontextualización de las discusiones usadas, se basan en aspectos genéricos del problema, operaciones mentales y deducciones lógicas. Los tipos de demostraciones deductivas son:

- *Experimento mental:* Cuando se usa un ejemplo para ayudar a organizar la demostración. Se pueden distinguir dos tipos de experimento mental:

- o *Experimento mental transformativo:* Cuando las demostraciones se basan en operaciones mentales que transforman el problema inicial en otro equivalente. El papel de los ejemplos es ayudar a prever cuáles transformaciones son convenientes.
- o *Experimento mental estructural:* Cuando las demostraciones están basadas en secuencias lógicas derivadas de los datos del problema, de los axiomas, las definiciones o teoremas aceptados, y, si se usan ejemplos, son para ayudar a organizar o entender los pasos de las deducciones.

- *Deducción formal:* Cuando la demostración se basa en operaciones mentales sin la ayuda de ejemplos específicos.

Los dos tipos de demostración definidos para el experimento mental, pueden también ser encontrados en la demostración deductiva forma.

También plantean una clase llamada fallida, que incluye los casos de estudiante que no son capaces de seguir un camino de solución que los lleve al planteamiento de una conjetura o de una demostración, o aquellos que no hacen nada, no ven la conjetura, o no se puede inferir nada de sus respuestas.

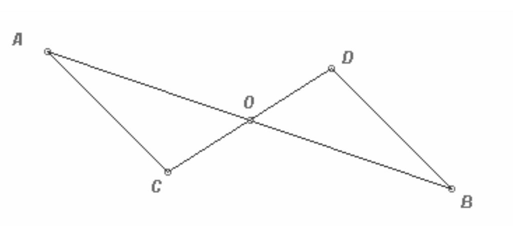
METODOLOGÍA

El test diagnóstico se aplicó el segundo día del inicio de la experimentación de la investigación, en una sesión de 90 minutos a 100 estudiantes del grado 10º de bachillerato (14 a 16 años de edad) de dos instituciones privadas y una pública de de Santander (Colombia), tomando como criterio para su elección la facilidad de poder establecer contactos con las directivas y profesores, y que fueran instituciones que contaran con una sala de computadores disponible tres horas semanales durante el periodo de tiempo que se había planeado la experimentación.

Al finalizar la prueba se recogieron los originales de los test de todos los estudiantes. Las actuaciones de los estudiantes se usaron para realizar un análisis cualitativo usando las categorías mencionadas antes y un análisis cuantitativo del porcentaje de estudiantes clasificados en cada categoría.

TEST DIAGNÓSTICO DE LOS TIPOS DE DEMOSTRACIÓN

Problema 1. En el siguiente diagrama los segmentos *AB* y *CD* se intersecan en el punto medio *O*. Los segmentos pueden variar de posición o variar su longitud y siempre se intersecan en el punto medio *O* formando el cuadrilátero cruzado *ACDB.*



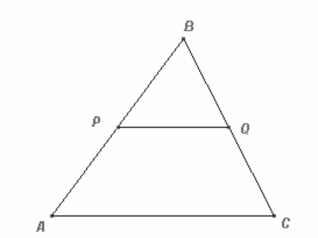
Andrea, Cesar, Natalia, Silvia, Óscar y Carlos están discutiendo si la siguiente afirmación es verdadera:

"Los triángulos *ACO* y *BDO* son iguales".

Respuesta de Andrea Mido los lados de los triángulos y encuentro que OC = OD = 1.5cm., OA = OB = 3cm., AC = DB = 2cm. Entonces los triángulos ACO y BDO son iguales.	**Respuesta de César** Si los dos segmentos son iguales y forman un ángulo de 60º, se forman dos triángulos equiláteros de igual longitud. **Entonces los triángulos *ACO* y *BDO* son iguales**
Respuesta de Natalia Mido los ángulos y encuentro que $m\angle COA = m\angle DOB$, $m\angle ACO = m\angle BDO$, $m\angle OCA = m\angle ODB$ Entonces los triángulos *ACO* y *BDO* son iguales.	**Respuesta de Silvia** Los lados *OC = OD*, *OA = OB*, Por ser O el punto medio de los segmentos. $m\angle COA = m\angle DOB$, Porque son ángulos opuestos. Entonces los triángulos *ACO* y *BDO* son iguales.
Respuesta de Óscar Si se mueve el segmento *CD* hasta que quede perpendicular a los lados *AC* y *BD* se forman dos triángulos rectángulos iguales. Entonces los triángulos *ACO* y *BDO* son iguales.	**Respuesta de Carlos** Siempre que se muevan los segmentos *AB* y *CD* los triángulos *ACO* y *BDO* quedan en diferentes posiciones. Entonces los triángulos *ACO* y *BDO* no son iguales.

¿Cuál de las respuestas se identifica más con lo que usted haría?, ¿Por qué?

Problema 2. En el siguiente diagrama *PQ // AC*. ¿Qué relación hay entre ΔABC y ΔPBQ? Demuestra tu conjetura.



Descripción de las categorías y análisis de los datos del problema 1

En el primer problema de la prueba se daban seis respuestas acerca de la verdad de una afirmación. Cada respuesta correspondía a un tipo de demostración asignado según las categorías propuestas. El objetivo era que los estudiantes seleccionaran una de las seis de acuerdo a lo que ellos hubieran hecho para dar respuesta al problema, y que justificaran el motivo de su selección. La comparación de la respuesta elegida con la justificación dada determinaría la categoría del tipo de demostración asignada al estudiante.

A continuación se explica la asignación que se le dio a cada una de las respuestas propuestas en el enunciado del problema y se explica la razón para ubicarla en esta categoría:

***Respuesta de Andrea**:* Corresponde a un Empirismo Ingenuo Inductivo (EII), puesto que Andrea sustenta su afirmación en las medidas tomadas sobre el único ejemplo dado y en la relación de igualdad que surge al comparar las longitudes de los lados correspondientes de los triángulos del ejemplo.

***Respuesta de César**:* Corresponde a un Experimento Crucial Basado en Ejemplo (ECB), puesto que Cesar construye un triángulo específico (equilátero), describe la figura que se ha inventado y supone que si se cumple para este ejemplo se cumple para todos los triángulos.

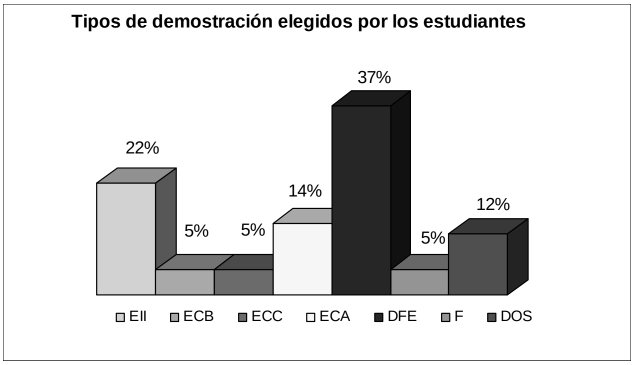
Respuesta de Natalia: Corresponde a Experimento Crucial Analítico (ECA), puesto que Natalia hace mediciones sobre la figura dada y se da cuenta de la igualdad de los ángulos correspondientes, finalmente se basa en las propiedades empíricas observadas en el ejemplo para justificar la verdad de su conjetura.

Respuesta de Silvia: Corresponde a Deductivo Formal Estructural (DFE), puesto que Silvia no hace uso de ningún ejemplo para sustentar la verdad de la afirmación y sus justificaciones están basadas en secuencias y propiedades lógicas derivadas de los datos del problema y del teorema LAL de la congruencia de triángulos.

Respuesta de Óscar: Corresponde a Experimento Crucial Constructivo (ECC), puesto que Oscar construye un ejemplo específico (triángulo rectángulo) y basa su justificación en la forma de conseguir el ejemplo.

Respuesta de Carlos: Corresponde a una Demostración Fallida (F), puesto que Carlos no muestra ningún proceso empírico ni deductivo para afirmar que la afirmación es falsa (sólo dice que si se mueven los segmentos los triángulos cambian).

Al tener en cuenta solamente la respuesta elegida (es decir con cuál de las repuestas se identificaban) salió la siguiente clasificación (DOS representa a los estudiantes que escogieron dos respuestas):



Observando el diagrama de barras se podría interpretar que existía un porcentaje significativo de estudiantes que realizaban demostraciones formales estructuradas o demostraciones ingenuas inductivas, pero al analizar las justificaciones de su elección vimos que era necesario matizar esta asignación inicial, pues no representaba con suficiente exactitud la forma de pensar de los estudiantes.

De acuerdo a las justificaciones dadas, se decidió utilizar los siguientes criterios para la clasificación de los estudiantes:

(1) Si el estudiante escogía una respuesta demostración empírica o deductiva, se respetó esa primera ubicación, es decir aceptamos que el estudiante podría haber razonado de mane-

ra empírica o deductiva respectivamente. También se respetó la subclase correspondiente a la demostración escogida (Empirismo Ingenuo, Experimento Crucial, Experimento Mental o Deducción Formal).

(2) Si la justificación dada por el estudiante era coherente con el tipo de justificación escogida (perceptiva, inductiva, basada en ejemplo, constructiva, analítica, intelectual, transformativa o estructural), se asignó ese tipo; si la justificación dada por el estudiante apuntaba a otro tipo de demostración, pero dentro de la misma subclase, se asignó al estudiante a este tipo.

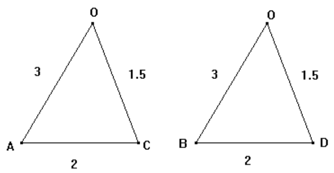
(3) Si de la justificación del estudiante no se podía determinar nada, se clasificaba como Empírica Fallida (EF) o Deductiva Fallida (DF) respetando que podía haber razonado empíricamente o deductivamente como se planteó en el primer criterio.

(4) Si escogían dos respuestas, se analizaba la coherencia o complementariedad de las dos y se clasificaba en una de las categorías de la estructura.

Con estos criterios queríamos establecer una categorización que permitiera una coherencia entre lo que el estudiante *piensa* que es una demostración que se identificaría con lo que él haría y lo que el estudiante *hace* cuando tiene que justificar una conjetura. Es decir si el estudiantes escoge una respuesta es porque se está identificando con esa forma de razonamiento, ya sea porque piensa de esta forma, porque cree en ella, porque le gusta la forma, porque le parece fácil o porque fue la única que entendió, por eso se respeta la subclase de demostración escogida y se busca la coherencia con la justificación dada.

Analizando las justificaciones, de los 22 estudiantes que se inclinaron por la respuesta de Andrea (EII), encontramos varias justificaciones que se basaban en argumentos similares a los de Andrea refiriéndose a los lados correspondientes de los dos triángulos, por ejemplo:

G35: *La de Andrea, porque los triángulos son iguales cuando los lados son congruentes, o se de la mima medida.*



En este caso las medidas coinciden por eso son iguales.

Estos estudiantes permanecieron en EII, aunque se pueden identificar justificaciones de más nivel que otras y se podría decir que hay algunos estudiantes que podrían estar en otra subclase superior (pero no los hemos cambiado de subclase de acuerdo a los criterios determinados) o son estudiantes que están en una transición entre las demostraciones empíricas ingenuas y los experimentos cruciales; igualmente algunos con su justificación mostrada pareciera que dan respuestas de menor categoría, pero se dejaron ahí ya que de alguna manera son estudiantes que no tienen entrenamiento previo para responder este tipo de preguntas.

Otras justificaciones se basan en argumentos de convicción externa (Harel y Sowder, 1998), por ejemplo:

G34: *La respuesta de Andrea porque las aclaraciones todas son ciertas, y no dudo en nada de lo que dice.*

Estos estudiantes no muestran en sus respuestas un razonamiento ni exploración de las relaciones matemáticas de los lados de los triángulos en el problema, ni ninguna alusión a teoremas matemáticos; por lo que se ubicaron en EF.

De los 5 estudiantes que escogieron la respuesta de Cesar (ECB), solamente dos de las justificaciones se refirieron a la relación de los lados del triángulo y de los ángulos, por ejemplo:

F35: *…allí no cambia la longitud de los segmentos ya que siempre va a ser la misma, solo cambia su posición llegando a ser un triángulo equilátero y teniendo siempre la misma forma los triángulos formados por aquellos segmentos.*

Uno de los cinco se clasificó en ECA, al hacer referencia a las mediciones que haría. Las otras dos justificaciones se clasificaron en EF.

De los 5 estudiantes que escogieron la respuesta de Oscar (ECC), algunos hicieron referencia al movimiento realizado por Oscar, pero no justificaron adecuadamente por qué los dos triángulos rectángulos formados eran iguales, por ejemplo:

F08: *Yo pienso que de cualquier forma que se mueva el segmento CD o también el AB, siempre y cuando la longitud del segmento AC y DB no cambien la longitud, entonces los triángulos ACO y BDO son iguales.*

Al analizar las justificaciones se concluyó que para ellos los triángulos ya eran iguales por simple percepción, ninguno comparó los lados correspondientes de los lados de los triángulos rectángulos formados ni sus ángulos rectos, por lo tanto, de acuerdo a nuestro criterio de clasificación se ubicaron todos los 5 en EF.

De los 14 estudiantes que escogieron la respuesta de Natalia (ECA), 9 de ellos fundamentaron su respuesta argumentando que si los ángulos correspondientes eran iguales entonces los triángulos eran iguales, por lo que estuvimos de acuerdo en dejarlos en esa categoría. Cuatro de los 14 estudiantes basaron sus justificaciones enunciando propiedades aceptadas, pero refiriéndose a que era suficiente tener los ángulos iguales para que los triángulos fueran iguales. Estos estudiantes se reubicaron en Experimento Crucial Intelectual (ECI) y uno se pasó a EF.

De los 37 que se identificaron con la respuesta de Silvia (DFE), 10 se dejaron en esa categoría, por ejemplo:

C15: *…ella dice que entre los dos triángulos existe una relación de ángulo, lado, ángulo, y con esas tres cosas se puede saber si 2 triángulos son equivalentes. Cumple con una de las reglas para saber si dos triángulos son equivalentes. En la grafica muestran el punto O como la mitad, por lo que sería razonable que* $\overline{AO} \cong \overline{OB}$ y $\overline{CO} \cong \overline{OD}$*, y como* $\overline{AB}$ *se interseca con* $\overline{CD}$ *forman ángulos opuestos, lo cual son equivalentes y* $m\angle AOC = m\angle DOB$

Solamente en este caso se hizo alusión al teorema LAL para justificar la congruencia de los triángulos además de utilizar una notación adecuada. Los otros estudiantes mencionaron la relación de igualdad entre los lados correspondientes y al ángulo opuesto por el vértice, argumentando que eso es lo que se necesitaban para que los triángulos fueran iguales. Algunos de ellos lo hicieron por convicción en la respuesta de Silvia y porque les pareció que Silvia completó de manera general lo que hicieron Andrea y Natalia. Otros, queriendo argumentar más sus repuestas llegaron a conclusiones falsas pero dejaron entrever un razonamiento deductivo formal. Doce de estos estudiantes fueron clasificados con un el tipo Experimento Mental Estructurado (EME) al usar el gráfico como ejemplo para basar sus justificaciones en secuencias lógicas derivadas de los datos del problema. Los 15 estudiantes restantes se reclasificaron en DF.

De los 5 que escogieron la demostración de Carlos (F), todos coincidieron en que si se movían los segmentos, entonces los triángulos cambiaban. Todos quedaron en la misma categoría.

De los 12 que escogieron dos respuestas, 8 seleccionaron la respuesta de Andrea combinada con otra, 3 la combinaron con Silvia, mencionando que se debe conocer las medidas de los lados y los ángulos, por ejemplo:

G10: *…para identificar si dos triángulos son iguales, debo saber las medidas de cada uno de sus lados y también saber la de sus ángulos.*

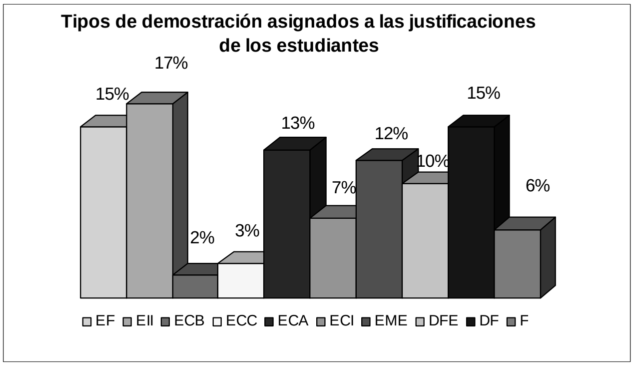
Suponiendo que de alguna manera aceptaban y entendían los argumentos de Silvia y por sus justificaciones, estos tres estudiantes se clasificaron en ECI.

Otros 3 la combinan con la respuesta de Natalia, refiriéndose todos a que las dos son complementarias. Estos estudiantes se ubicaron en ECA, puesto que recurrieron a propiedades aceptadas que consideraban necesarias para justificar la respuesta.

Dos estudiantes combinaron la respuesta de Andrea con la de Cesar o la de Oscar haciendo construcciones auxiliares sobre el diagrama dado para que los triángulos "quedaran" equiláteros y se refirieron a la construcción para su justificación por lo que se ubicaron ECC. Un estudiante escogió las respuestas de Oscar y Cesar y basó su justificación en el movimiento de los segmentos, por lo que también se ubicó en ECC.

Dos estudiantes combinaron las respuestas de Natalia con Silvia y Oscar, pero sus justificaciones los ubicaron en una demostración EF. Uno escogió las respuestas contradictorias de Andrea y Carlos, por lo que se ubicó en F.

La siguiente gráfica resume los resultados de la nueva asignación de los estudiantes:



La nueva clasificación permitió ver que muchos de los estudiantes que se identificaban con una respuesta de tipo deductivo formal estructurado realmente no tenían ese tipo de razonamiento, dando lugar a la nueva categoría de demostración deductiva fallida. Igualmente ocurrió con varios que estaban en las subclases empíricas, cuyas justificaciones no mostraban un tipo de razonamiento que los mantuviera en esa categoría, por lo que hubo necesidad de pasarlos a la nueva categoría de demostración empírica fallida de acuerdo a los criterios planteados.

Descripción de las categorías y análisis de los datos del problema 2

Para el análisis se consideró la asignación de categoría final dada a cada estudiante en el problema 1 y se examinaron todas las respuestas de los estudiantes agrupados en determinada categoría para ver las conjeturas que planteaban y las demostraciones que hacían en el problema 2. Esto nos permitió analizar y contrastar la asignación final dada al estudiante en el problema 1 de “escoger una demostración” con el problema 2 de “hacer una demostración”. Una consideración para la clasificación y diferenciación de las demostraciones fallidas y las demostraciones empíricas fallidas que tuvimos en cuenta fue que, si el estudiante enunciaba alguna relación válida entre los dos triángulos, aunque no hiciera ninguna demostración se ubicaba en EF, pero si la conjetura dada no tenía nada que ver con la relación entre los dos triángulos, se ubicaba en F.

Los estudiantes que fueron clasificados en el problema 1 en <u>empirismo fallido</u> encontraron relaciones de proporcionalidad, igualdad de ángulos, ser parte de, o estar incluido en, estar dentro de, semejanza, reducción, ser el doble de, congruencia, tener en común el punto B. Ninguno de estos estudiantes realizó una demostración válida, aunque algunos trataban de justificar con palabras lo que “veían” y creían. Por ejemplo:

F17: *…son proporcionales, se ve que tienen el mismo ángulo,…, se podría demostrar con regla y transportador midiendo y finalmente haciendo pruebas para ver que son proporcionales.*

Considerando que la mayoría de estudiantes plantearon conjeturas válidas, pero no las demostraron, se pudo ver que existía una gran correlación entre la clasificación del problema 1 y 2, es decir, casi todos estos estudiantes están en la categoría EF. Solamente los casos de los estudiantes que señalaron la congruencia y la mitad como relación entre los triángulos sin justificar por qué se pasaron a F.

La mayoría de estudiantes que en el problema 1 habían sido clasificados en <u>empirismo ingenuo inductivo</u> identificaron relaciones (algunas más completas que otras), pero no las demostraron, se limitaron a comentar lo que veían, por lo que los clasificamos en EF. Por ejemplo:

C09:*…por medio del segmento PQ se forma otro triángulo adentro del ΔABC…*

Algunos estudiantes quedaron ubicados en EII al basar sus justificaciones en las propiedades observadas en el diagrama y referirse a medidas hechas sobre el dibujo. Por ejemplo:

F31: *… el triángulo ABC es el doble de grande que el triángulo PBQ, lo comprobé midiéndolos. Además como PQ//AC si el triángulo PBQ fuera más grande, aumentaría sus medidas al doble sería exactamente igual que el ΔABC.*

El caso de F02 se consideró como una demostración DFE puesto que utilizó una secuencia lógica de teoremas aceptados derivados de los datos del problema.

F02: *Equivalencia: Porque siendo paralelas las líneas PQ y AC, los ángulos formados por la intervención de la línea PQ en los segmentos BC y BA serían igual en ángulo ACB, es decir <ACB=<PQB, <CAB=<QPB. La igualdad de 2 ángulos en 2 triángulos distintos garantiza la equivalencia de dichos triángulos, en este caso PBQ y ABC son equivalentes.*

Los dos estudiantes que estaban ubicados en el problema 1 en <u>experimento crucial basado</u> respondieron lo siguiente:

F35: *ΔABC es una reducción de ΔPBQ o viceversa… se podría comprobar trasladando PQ hasta AC y el resultado sería que los dos triángulos son iguales.* (ECB)

G17: *La relación que hay entre ABC y PBO es que se cortan en el vértice B.* (EF)

Para F35 fue suficiente tomar un ejemplo para trasladar el segmento y comprobar su conjetura, no habló de otros ejemplos, ni de contraejemplos, G17 plantea solamente una conjetura y no la demuestra.

Uno de los tres estudiantes clasificado en el problema 1 en experimento crucial constructivo, en el problema 2 quedó en ECA al basar su justificación en las propiedades observadas sobre el ejemplo:

F32: … *que ΔABC tiene los mismos ángulos que el ΔPBQ ya que P y Q están paralelamente organizadas sobre la recta* $\overline{AB}$ *y* $\overline{CD}$ *respectivamente, entonces los ángulos <BPQ y BQP no cambian con respecto a <BAC y <BCA.*

Los otros dos estudiantes se ubicaron en EF.

Varios de los 13 estudiantes ubicados en experimento crucial analítico se limitaban a dar la conjetura y no realizar ninguna demostración, por lo que siguió predominando la categoría EF. F29 se ubicó en ECC ya que su justificación se basó en la construcción realizada sobre el diagrama dado:

F29: *En este caso, si se triangula la figura grande, nos damos cuenta que surgen 4 triángulos de la medida de ΔPBQ. Entonces existe una relación de ¼ de ΔPBQ con respecto a ΔABC. En conclusión el ΔPBQ está reducido a escala del ΔABC.*

F30 se basó en lo observado sobre el diagrama para su demostración por lo que lo ubicamos en Empirismo Ingenio Perceptivo (EIP):

F30: *que son triángulos semejantes porque si observamos su forma es igual pero las medidas de PBQ no son iguales porque es el mismo triángulo pero reducido, también se ve que sus ángulos son iguales.*

La mayoría de estudiantes ubicados en el problema 1 en experimento crucial intelectual identificó la semejanza de los triángulos, pero a la hora de dar una demostración se limitaron a enunciar propiedades y teoremas aceptados sin usarlos propiamente en la demostración, no consideramos que sea empirismo ingenuo debido a que no estaban usando medidas ni propiedades particulares sino propiedades generales, tampoco correspondía a un ejemplo genérico porque no se están refiriendo a un representante de una clase, por lo tanto los clasificamos en ECI:

F37: *Al ser paralelas las líneas PQ y AC lo que los relaciona es la forma solo que ΔPBQ tiene un área menor que ABC. Ya que las líneas BC y BA no cambian su inclinación y los ángulos a simple vista se ven similares, m<BAC=m<BPQ, m<BCA=m<BPQ, m<ABC=m<PBQ*

Los casos que solo enunciaron la relación siguen siendo EF.

Respecto a los 12 estudiantes que en el problema 1 se clasificaron en experimento mental estructural, se notó que a medida que estaban en una categoría que requería un mayor razonamiento, los estudiantes identificaban más la relación de semejanza entre los dos triángulos, además de tratar de utilizar o al menos mencionar propiedades matemáticas aceptadas. También se vio que, a pesar que a algunos estudiantes se les había dejado en esta categoría en el primer punto respetando que la elección fuera por que habían razonado de manera similar a la respuesta seleccionada, se evidenció que tal razonamiento no existía, sino más bien existían creencias de cómo debe ser una demostración de acuerdo a lo estudiado en los años anteriores pero no existía la habilidad como tal. De los 12 estudiantes sólo tres tenían un tipo de demostración que correspondía a EME; no se ubicaron en DFE o DFT porque no existía una cadena lógica en su argumentación, sino más bien se hacía mención de algunas propiedades que ayudaban a validar la conjetura, pero les faltó explicar por qué estas propiedades se cumplían. Por ejemplo:

C07: … *m<PQB es igual a la m<BCA pues las rectas son paralelas y aunque el ΔABC tiene mayor proporción, la abertura de los ángulos se conserva. Igualmente sucede con m<BPQ y la m<BAC. Los ángulos de los triángulos son congruentes por lo que los triángulos son semejantes.*

Los demás estudiantes fueron ubicados en EF o DF por que plantearon una conjetura pero no realizaron su demostración; para diferenciarlo y poder decidir si era empírico o deductivo se tuvo en cuenta lo que explicaron para tratar de justificar su conjetura.

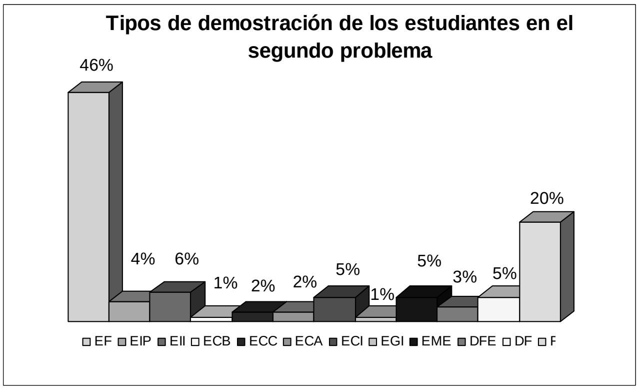
Analizando el número de estudiantes (10) que se clasificaron en <u>deductivo formal estructural</u> en el problema 1 con los del problema 2 (5). Concluimos que muchos de ellos fueron capaces de comprender un tipo de demostración DFE pero todavía no tenían las habilidades suficientes para realizarlas por su cuenta. Por ejemplo:

C02: *Que los dos triángulos son semejantes ya que sus bases son paralelas. En el triángulo ABC el segmento $\overline{AB}$ es casi la mitad del segmento $\overline{PQ}$ con lo que sus medidas son semejantes en cuanto a sus lados y ángulos.*

Los que estaban en el problema 1 en <u>deductiva fallida</u> se clasificaron en diferentes subclases de demostraciones, se percibió que efectivamente algunos de los que habían escogido la respuesta que en el primer punto correspondía a DFE eran porque reconocían que las demostraciones se debían basar en propiedades generales pero les faltaba habilidad de demostración. Todos a excepción de uno dieron respuestas de tipo empírico o fallidas. Los que dieron respuestas erradas o acertadas sin ningún tipo de explicación también confirmaron que existía diferencia entre entender una demostración y aceptar su validez a tener las habilidades para realizarla.

Los que en el problema 1 se clasificaron en <u>demostración fallida</u> reconfirman su clasificación como pudo concluirse de sus respuestas dadas al problema 2.

El siguiente diagrama de barras muestra los porcentajes de respuestas en cada uno de los tipos de demostración asignados en el problema 2. Se evidencia el predomino de las demostraciones fallidas, es decir estudiantes que no tienen la habilidad necesaria para plantear sus propias conjeturas y demostrarlas por si mismos, pero sí la capacidad para entenderlas como lo vimos en el problema 1, lo cual se considera como un acierto el hecho de haber propuesto ese tipo de problema.



ALGUNAS CONCLUSIONES

Los resultados de la comparación del problema 1, entre lo que los estudiantes escogieron y justificaron permitieron ver que la mayoría de estudiantes tenían un tipo de razonamiento empírico, inclusive los clasificados en el deductivo usaban bastante el empirismo. Estos últimos tienen la idea de que hay que utilizar argumentos matemáticos aceptados para demostrar, pero al no ser capaces de dar justificaciones deductivas se apoyaban bastante en el empirismo. Esto se reconfirmó con el análisis del problema 2. También emergieron, de acuerdo a las justificaciones y a los criterios, las demostraciones de tipo experimento crucial intelectual y experimento mental estructural. Las demostraciones que fueron seleccionadas inicialmente y que tuvieron mayor coherencia con las justificaciones dadas por los estudiantes fueron las de tipo experimento crucial analítico y la demostración fallida, la de menos coherencia la de tipo experimento crucial constructivo. En el problema 2 hubo más tipos de demostraciones que en el problema 1 debido a que no se limitaban a los casos dados, pero se notó la falta de demostraciones tipo experimento genérico y el bajo porcentaje de estudiantes que plantearon un tipo de demostración deductiva. Con este análisis se evidenció el predomino de los tipos de demostración empírica, empírica fallida y fallida que indica que los estudiantes no tienen la habilidad necesaria para poder demostrar por sí mismos sus propias conjeturas. Esto posiblemente debido a que los procesos de conjeturar y demostrar no son promovidos en los cursos anteriores.

Pudimos poner en práctica un instrumento valioso de obtención de información inicial de las habilidades de demostración de nuestros estudiantes que sirvió de punto de partida para el logro de los objetivos de la investigación mencionados en la introducción de este artículo. El test diagnóstico también sirvió para poner en práctica y validar la pertinencia y coherencia de la estructura de análisis propuesta, la cual permitió aportar información del proceso de demostración de propiedades de las razones trigonométricas realizado por los estudiantes en el transcurso de la investigación (Fiallo, 2006).

REFERENCIAS

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils´ practice of school mathematics. En Pimm, D. (Ed.). *Mathematics, Teachers and Children Hodder & Stoughton* (pp. 216-235). London: Hodder & Stoughton.

Bell, A.W. (1976). A study of pupil's proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics* 7(1), 23-40.

Fiallo, J. (2006). *Enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente cabri para el desarrollo de las habilidades de demostración*, Memoria de investigación, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Valencia, Valencia.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Student's proof schemes: Results from exploratory studies. En Schoenfeld, A.H., Kaput, J., & Dubinsky, E. (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (Vol. III, pp. 234-283). Providence, EE.UU.: American Mathematical Society.

Küchemann, D., & Hoyles, C. (2001). *Investigating factors that influence students´ mathematical reasoning.* Manuscrito descargado de http://www.ioe.ac.uk/proof/ proofPME25.pdf.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 173-204). Roterdam, Holanda: Sense Publishers.

Marrades, R., & Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 87-125.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Areas obligatorias y fundamentales*. Colombia: M.E.N.

N.C.T.M. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.