Investigaciones en educación geométrica

Leonor Camargo
Compilador

Camargo Uribe, Leonor
Investigaciones en educación geométrica / Leonor Camargo Uribe, Dora Calderón, Ángel Gutiérrez Rodríguez. -- Bogotá : Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2012.
258 p. ; cm.
ISBN 978-958-8782-22-5
1. Geometría - Investigaciones 2. Geometría del espacio - Enseñanza 3. Percepción espacial - Enseñanza 4. Matemáticas - Enseñanza I. Calderón, Dora Inés II. Gutiérrez Rodríguez, Ángel III. Tít.
516 cd 21 ed.
A1359021
CEP-Banco de la República-Biblioteca Luis Ángel Arango

ISBN: 978-958-8782-22-5

Primera edición: Bogotá D.C., septiembre de 2012

Dirección Sección de Publicaciones
Rubén Carvajalino C.

Coordinación editorial
María Elvira Mejía

Diagramación
Carlos Vargas Salazar - Kilka Diseño Gráfico

Corrección de estilo
Leonardo Holguín Rincón

Diseño de cubierta
Carlos Vargas Salazar - Kilka Diseño Gráfico

Impresión
Imprenta Editorial Universidad Nacional

Preparación editorial
Sección de Publicaciones
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Miembro de la Asociación de Editoriales Universitarias de Colombia (Aseuc)

Sección de Publicaciones
Editorial UD
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Carrera 19 No. 33 -39.
Teléfono: 3239300 ext. 6203
Correo electrónico: publicaciones@udistrital.edu.co

Hecho en Colombia

Capítulo 3

Tipos de demostración de estudiantes de grado 10º en Santander, Colombia*

Jorge Enrique Fiallo
Universidad Industrial de Santander
Ángel Gutiérrez Rodríguez
Universidad de Valencia

Presentamos los resultados cualitativos y cuantitativos de una evaluación diagnóstica aplicada a tres grupos de estudiantes de 10º grado de bachillerato (catorce-dieciséis años) de tres instituciones de Santander (Colombia), cuyo objetivo apuntaba a indagar y analizar los tipos de demostraciones que realizan los estudiantes al inicio del curso. Los datos, además, nos permitieron sacar algunas conclusiones acerca de su comprensión de la demostración.

Introducción

El fracaso y bajos niveles de comprensión de la demostración han llevado a que muchos profesores abandonen esta práctica (Mariotti, 2006). Sin embargo, existe consenso general entre los didactas de las matemáticas con respecto a que el desarrollo del sentido de la demostración constituye un objetivo importante de la educación matemática, sumada a una tendencia general a incluir el aprendizaje de la demostración en el currículo de matemáticas, como se puede apreciar por ejemplo en los "principios y estándares"

---

* Una versión de este texto se publicó en Camacho, M., Flores, P. y Bolea P. (eds.) (2007). *Actas de Investigación en Educación Matemática XI*. Barcelona: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003), en los que se señala el razonamiento y la demostración como estándares fundamentales para las matemáticas escolares desde preescolar al nivel 12, inclusive.

En este capítulo se sugiere que los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:

- Reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas.
- Formular e investigar conjeturas matemáticas.
- Desarrollar y evaluar argumentos matemáticos y demostraciones.
- Elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y métodos de demostración (NCTM, 2003, p. 59).

En los lineamientos curriculares de matemáticas del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 1998), dentro de los procesos generales, se menciona el razonamiento matemático como una actividad que debe estar presente en todo el trabajo matemático de los estudiantes y que tiene que ver con:

- Dar cuenta del cómo y del por qué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.
- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.
- Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar. (MEN, 1998, p. 77)

Teniendo en cuenta estas ideas y las de varios investigadores en el tema de la demostración en matemáticas, se planteó un proyecto de investigación llevado a cabo dentro del programa del Doctorado en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Valencia, cuyos objetivos fueron: 1) diseñar, implementar y evaluar una unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un entorno de geometría dinámica, enfocándola además hacia el desarrollo de las habilidades de la demostración; 2) analizar los tipos de demostración que emergen con el uso de Cabri en el proceso de demostración de propiedades trigonométricas de los estudiantes; 3) analizar los procedimientos, las estrategias de razonamiento y los errores y dificultades detectados en el desarrollo de las actividades planteadas en la unidad de enseñanza. Una de las fases de dicho trabajo consistió en la aplicación y análisis de un test diagnóstico que nos permitió clasificar a cada uno de los estudiantes y obtener información sobre sus ideas y su comprensión de la demostración en matemáticas antes de iniciar el curso.

Presentamos en este texto el marco teórico, la metodología, el proceso de análisis de los datos y algunas conclusiones de esta fase de la investigación.

Marco teórico

El análisis de las respuesta de los estudiantes al test diagnóstico se hizo considerando la demostración, desde una perspectiva amplia, como un proceso que incluye todos los intentos realizados por los estudiantes para explicar, verificar o justificar, con miras a convencerse a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor, la veracidad de una afirmación matemática.

Para la clasificación de las respuestas de los estudiantes se utilizaron las categorías propuestas por Marrades y Gutiérrez (2000), quienes, apoyados en los trabajos de Balacheff (1988), Bell (1976) y Harel y Sowder (1998), propusieron la siguiente estructura analítica para analizar, organizar y describir las respuestas de los estudiantes a problemas de demostración.

Demostraciones empíricas

Caracterizadas por el uso de ejemplos como elementos de convicción. Los tipos de demostración empírica son:

- Empirismo ingenuo: cuando en el planteamiento de una conjetura y en la demostración se usan solamente ejemplos escogidos sin ningún criterio específico. Se identifican dos tipos de empirismo ingenuo:
    - Perceptivo: cuando los estudiantes se basan en elementos visuales o táctiles.
    - Inductivo: cuando los estudiantes se basan en elementos matemáticos o relaciones detectados en el ejemplo.
- Experimento crucial: cuando la conjetura es demostrada usando un ejemplo que se escoge porque se presume que en cualquier otro caso va a dar el mismo resultado. Se identifican los siguientes tipos de experimentos cruciales:

- Basado en ejemplo: cuando los estudiantes se basan en la existencia de un único ejemplo o en la ausencia de contraejemplos para su demostración.
- Constructivo: cuando los estudiantes sustentan sus demostraciones en las construcciones realizadas sobre el ejemplo o en la forma de conseguir el ejemplo.
- Analítico: cuando se usan ejemplos cuidadosamente seleccionados y las demostraciones de los estudiantes están basadas en propiedades y relaciones observadas en el ejemplo o en elementos auxiliares.
- Intelectual: cuando las conjeturas o demostraciones de los estudiantes están basadas en observaciones empíricas del ejemplo, pero usan en la demostración propiedades matemáticas aceptadas o relaciones entre los ejemplos.

• Ejemplo genérico: cuando en la demostración o la conjetura se usa un ejemplo específico que es representante de una clase y la demostración incluye la producción de razonamientos abstractos.

Los cuatro tipos de demostración definidos para el experimento crucial se presentan en los ejemplos genéricos.

Demostraciones deductivas

Caracterizadas por la descontextualización de las discusiones usadas, se basan en aspectos genéricos del problema, operaciones mentales y deducciones lógicas. Los tipos de demostraciones deductivas son:

• Experimento mental: cuando se usa un ejemplo para ayudar a organizar la demostración. Se pueden distinguir dos tipos de experimento mental:
  - Experimento mental transformativo: cuando las demostraciones se basan en operaciones mentales que transforman el problema inicial en otro equivalente. El papel de los ejemplos es ayudar a prever cuáles transformaciones son convenientes.
  - Experimento mental estructural: cuando las demostraciones están basadas en secuencias lógicas derivadas de los datos del problema, de los axiomas, las definiciones o teoremas aceptados; si se usan ejemplos, es para ayudar a organizar o entender los pasos de las deducciones.

- Deducción formal: cuando la demostración se basa en operaciones mentales sin la ayuda de ejemplos específicos.

Los dos tipos de demostración definidos para el experimento mental también pueden ser encontrados en la demostración deductiva formal. Así mismo, plantean una clase llamada fallida, que incluye los casos de estudiantes que no son capaces de seguir un camino de solución que los lleve a plantear una conjetura o una demostración, o aquellos que no hacen nada, no ven la conjetura o no se puede inferir nada de sus respuestas.

Metodología

El test diagnóstico se aplicó el segundo día del inicio de la experimentación de la investigación, en una sesión de noventa minutos a cien estudiantes del grado 10º de bachillerato (entre catorce y dieciséis años de edad) de dos instituciones privadas y una pública de Santander (Colombia), tomando como criterio de elección la facilidad de establecer contactos con las directivas y los profesores y que fueran instituciones que contaran con una sala de computadores disponible tres horas semanales durante el período que se había planteado para la experimentación.

Al finalizar la prueba se recogieron los originales de los test de todos los estudiantes. Las actuaciones de los estudiantes se utilizaron para realizar un análisis cualitativo usando las categorías antes mencionadas y un análisis cuantitativo del porcentaje de estudiantes clasificados en cada categoría.

Test diagnóstico de los tipos de demostración

Problema 1. En la figura 3.1 los segmentos *AB* y *CD* se intersecan en el punto medio *O*. Los segmentos pueden variar de posición o variar su longitud y siempre se intersecan en el punto medio *O* formando el cuadrilátero cruzado *ACDB*.

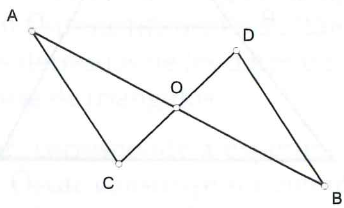


Figura 3.1

Andrea, César, Natalia, Silvia, Óscar y Carlos están discutiendo si la siguiente afirmación es verdadera: “Los triángulos *ACO* y *BDO* son iguales”.

Respuesta de Andrea Mido los lados de los triángulos y encuentro que $OC = OD = 1{,}5cm$, $OA = OB = 3\ cm$, $AC = DB = 2cm$. Entonces los triángulos ACO y BDO son iguales.	Respuesta de César Si los dos segmentos son iguales y forman un ángulo de 60º, se forman dos triángulos equiláteros de igual longitud. Entonces los triángulos ACO y BDO son iguales.
Respuesta de Natalia Mido los ángulos y encuentro que $m\angle COA = m\angle DOB$, $m\angle ACO = m\angle BDO$, $m\angle OCA = m\angle ODB$. Entonces los triángulos ACO y BDO son iguales.	***Respuesta de Silvia*** Los lados $OC = OD$, $OA = OB$, Por ser O el punto medio de los segmentos. $m\angle COA = m\angle DOB$, Porque son ángulos opuestos. Entonces los triángulos ACO y BDO son iguales.
Respuesta de Óscar Si se mueve el segmento CD hasta que quede perpendicular a los lados AC y BD se forman dos triángulos rectángulos iguales. Entonces los triángulos ACO y BDO son iguales.	***Respuesta de Carlos*** Siempre que se muevan los segmentos AB y CD los triángulos ACO y BDO quedan en diferentes posiciones. Entonces los triángulos ACO y BDO no son iguales.

¿Cuál de las respuestas se identifica más con lo que usted haría? ¿Por qué?

Problema 2. En figura 3.2 $PQ \parallel AC$. ¿Qué relación hay entre ΔABC y ΔPBQ?, Demuestra tu conjetura.

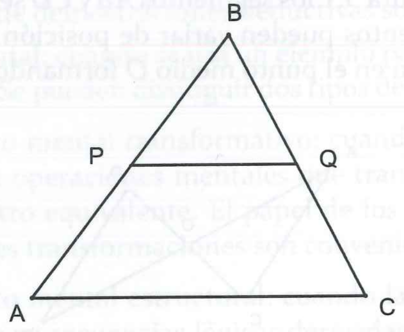


Figura 3.2

Descripción de las categorías y análisis de los datos del problema 1

En el primer problema de la prueba se daban seis respuestas acerca de la verdad de una afirmación. Cada respuesta correspondía a un tipo de demostración asignado según las categorías propuestas. El objetivo era que los estudiantes seleccionaran una de las seis respuestas de acuerdo con lo que ellos hubieran hecho para responder el problema y que justificaran el motivo de su selección. La comparación de la respuesta elegida con la justificación dada determinaría la categoría del tipo de demostración asignada al estudiante.

A continuación se explica la asignación que se le dio a cada una de las respuestas propuestas en el enunciado del problema y se explica la razón para ubicarla en esta categoría:

- Respuesta de Andrea: corresponde a un empirismo ingenuo inductivo (EII), puesto que Andrea sustenta su afirmación en las medidas tomadas sobre el único ejemplo dado y en la relación de igualdad que surge al comparar las longitudes de los lados correspondientes de los triángulos del ejemplo.
- Respuesta de César: corresponde a un experimento crucial basado en ejemplo (ECB), puesto que César construye un triángulo específico (equilátero), describe la figura que se ha inventado y supone que si se cumple para este ejemplo, se cumple para todos los triángulos.
- Respuesta de Natalia: corresponde a experimento crucial analítico (ECA), puesto que Natalia hace mediciones sobre la figura dada y se da cuenta de la igualdad de los ángulos correspondientes; finalmente, se basa en las propiedades empíricas observadas en el ejemplo para justificar la verdad de su conjetura.
- Respuesta de Silvia: corresponde a deductivo formal estructural (DFE), puesto que Silvia no hace uso de ningún ejemplo para sustentar la verdad de la afirmación y sus justificaciones están basadas en secuencias y propiedades lógicas derivadas de los datos del problema y del teorema LAL de la congruencia de triángulos.
- Respuesta de Óscar: corresponde a experimento crucial constructivo (ECC), puesto que Óscar construye un ejemplo específico (triángulo rectángulo) y basa su justificación en la forma de conseguir el ejemplo.
- Respuesta de Carlos: corresponde a una demostración fallida (F), puesto que Carlos no muestra ningún proceso empírico ni deductivo para afirmar que la afirmación es falsa (sólo dice que si se mueven los segmentos los triángulos cambian).

Al tener en cuenta solamente la respuesta elegida (es decir, con cuál de las repuestas se identificaban) salió la clasificación que se presenta en la figura 3.3 (DOS representa a los estudiantes que escogieron dos respuestas).

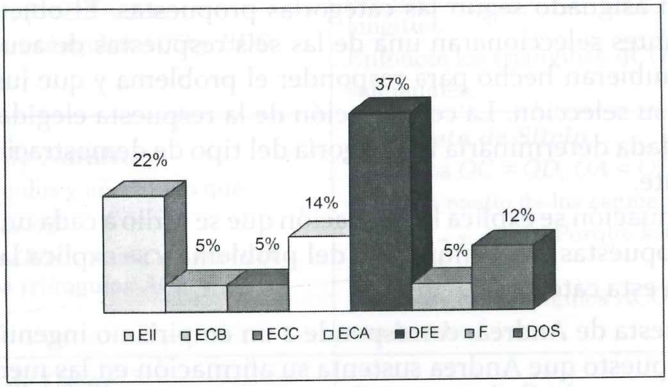


Figura 3.3. Tipos de demostración elegidos por los estudiantes

La figura 3.3 demuestra que un porcentaje significativo de estudiantes realizaba demostraciones formales estructuradas o demostraciones ingenuas inductivas; pero al analizar las justificaciones de su elección vimos que era necesario matizar esta asignación inicial, pues no representaba con exactitud suficiente la forma de pensar de los estudiantes.

De acuerdo con las justificaciones dadas, se decidió utilizar los siguientes criterios para la clasificación de los estudiantes:

- Si el estudiante escogía una respuesta demostración empírica o deductiva, se respetó esa primera ubicación; es decir, aceptamos que el estudiante podría haber razonado de manera empírica o deductiva, respectivamente. También se respetó la subclase correspondiente a la demostración escogida (empirismo ingenuo, experimento crucial, experimento mental o deducción formal).
- Si la justificación dada por el estudiante era coherente con el tipo de justificación escogida (perceptiva, inductiva, basada en ejemplo, constructiva, analítica, intelectual, transformativa o estructural), se asignó ese tipo; si la justificación dada por el estudiante apuntaba a otro tipo de demostración, pero dentro de la misma subclase, se asignó al estudiante a este tipo.
- Si de la justificación del estudiante no se podía determinar nada, se clasificaba como empírica fallida (EF) o deductiva fallida (DF) respetando

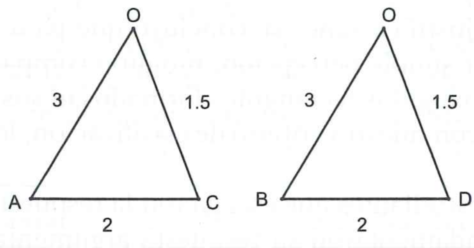
que podía haber razonado empíricamente o deductivamente, como se planteó en el primer criterio.

- Si escogían dos respuestas, se analizaba la coherencia o complementariedad entre ellas y se clasificaba en una de las categorías de la estructura.

Con estos criterios queríamos establecer una categorización que permitiera una coherencia entre lo que el estudiante *piensa* que es una demostración que se identificaría con lo que él haría y lo que el estudiante *hace* cuando tiene que justificar una conjetura. Es decir, si el estudiante escoge una respuesta es porque se está identificando con esa forma de razonamiento, ya sea porque piensa así, porque cree en ella, porque le gusta la forma, porque le parece fácil o porque fue la única que entendió; por eso se respeta la subclase de demostración escogida y se busca la coherencia con la justificación dada.

Al analizar las justificaciones, de los veintidós estudiantes que se inclinaron por la respuesta de Andrea (EII), encontramos varias justificaciones que se basaban en argumentos similares a los de Andrea refiriéndose a los lados correspondientes de los dos triángulos, por ejemplo:

G35: *La de Andrea, porque los triángulos son iguales cuando los lados son congruentes, o sea de la mima medida.*



En este caso las medidas coinciden, por eso son iguales.

Estos estudiantes permanecieron en EII, aunque se pueden identificar justificaciones de más nivel que otras y se podría decir que algunos de ellos podrían estar en otra subclase superior –pero no los hemos cambiado de subclase de acuerdo con los criterios determinados– o son estudiantes en transición entre las demostraciones empíricas ingenuas y los experimentos cruciales; igualmente, pareciera que algunos con su justificación dan respuestas de menor categoría, pero se dejaron ahí pues de alguna manera son estudiantes que no tienen entrenamiento previo para responder este tipo de preguntas.

Otras justificaciones se basan en argumentos de convicción externa (Harel y Sowder, 1998), por ejemplo: "G34: La respuesta de Andrea porque las aclaraciones todas son ciertas, y no dudo en nada de lo que dice."

Estos estudiantes no muestran en sus respuestas un razonamiento ni exploración de las relaciones matemáticas de los lados de los triángulos en el problema, ni hacen ninguna alusión a teoremas matemáticos, por lo que se ubicaron en EF.

De los cinco estudiantes que escogieron la respuesta de César (ECB), solamente dos de las justificaciones se refirieron a la relación de los lados del triángulo y de los ángulos, por ejemplo: "F35: ...allí no cambia la longitud de los segmentos ya que siempre va ser la misma, solo cambia su posición llegando a ser un triángulo equilátero y teniendo siempre la misma forma a los triángulos formados por aquellos segmentos"

Uno de los cinco se clasificó en ECA, al hacer referencia a las mediciones que haría. Las otras dos justificaciones se clasificaron en EF.

De los cinco estudiantes que escogieron la respuesta de Óscar (ECC), algunos hicieron referencia al movimiento realizado por Óscar, pero no justificaron adecuadamente por qué los dos triángulos rectángulos formados eran iguales, por ejemplo: "F08: Yo pienso que de cualquier forma que se mueva el segmento CD o también el AB, siempre y cuando la longitud del segmento AC y DB no cambien la longitud, entonces los triángulos ACO y BDO son iguales".

Al analizar las justificaciones se concluyó que para ellos los triángulos ya eran iguales por simple percepción, ninguno comparó los lados correspondientes a los triángulos rectángulos formados ni sus ángulos rectos, por tanto, de acuerdo con nuestro criterio de clasificación, los cinco se ubicaron en EF.

De los catorce estudiantes que escogieron la respuesta de Natalia (ECA), nueve de ellos fundamentaron su respuesta argumentando que si los ángulos correspondientes eran iguales, entonces los triángulos eran iguales; por tanto, estuvimos de acuerdo en dejarlos en esa categoría. Cuatro de los catorce estudiantes basaron sus justificaciones enunciando propiedades aceptadas, pero refiriéndose a que era suficiente tener los ángulos iguales para que los triángulos fueran iguales. Estos estudiantes se reubicaron en experimento crucial intelectual (ECI) y uno se pasó a EF.

De los treinta y siete que se identificaron con la respuesta de Silvia (DFE), diez se mantuvieron en esa categoría, por ejemplo: "C15: ...ella dice que entre los dos triángulos existe una relación de ángulo, lado, ángulo, y con esas tres cosas se puede saber si 2 triángulos son equivalentes. Cumple con una de las reglas para saber si dos triángulos son equivalentes. En la gráfica muestran el punto O como la mitad, por lo que sería razonable que $\overline{AO} \cong \overline{OB}$ y $\overline{CO} \cong \overline{OD}$, y como $\overline{AB}$se interseca con $\overline{CD}$ forman ángulos opuestos, lo cual son equivalentes y $m\angle AOC = m\angle DOB$".

Solo en este caso se hizo alusión al teorema LAL para justificar la congruencia de los triángulos, además de utilizar una notación adecuada. Los otros estudiantes mencionaron la relación de igualdad entre los lados correspondientes y al ángulo opuesto por el vértice, argumentando que eso es lo que se necesitaba para que los triángulos fueran iguales. Algunos de ellos lo hicieron por convicción en la respuesta de Silvia y porque les pareció que Silvia completó de manera general lo que hicieron Andrea y Natalia. Otros, queriendo argumentar más sus repuestas, llegaron a conclusiones falsas, pero dejaron entrever un razonamiento deductivo formal. Doce de estos estudiantes fueron clasificados con el tipo experimento mental estructurado (EME) al usar el gráfico como ejemplo para basar sus justificaciones en secuencias lógicas derivadas de los datos del problema. Los quince estudiantes restantes se reclasificaron en DF.

De los cinco que escogieron la demostración de Carlos (F), todos coincidieron en que si se movían los segmentos, entonces los triángulos cambiaban. Todos quedaron en la misma categoría.

De los doce que escogieron dos respuestas, ocho seleccionaron la respuesta de Andrea combinada con otra, tres la combinaron con la Silvia, mencionando que se debe conocer las medidas de los lados y los ángulos, por ejemplo: "G10: ...para identificar si dos triángulos son iguales, debo saber las medidas de cada uno de sus lados y también saber la de sus ángulos".

Suponiendo que de alguna manera aceptaban y entendían los argumentos de Silvia, y por sus justificaciones, estos tres estudiantes se clasificaron en ECI.

Otros tres la combinan con la respuesta de Natalia, refiriéndose todos a que las dos son complementarias. Estos estudiantes se ubicaron en ECA, puesto que recurrieron a propiedades aceptadas que consideraban necesarias para justificar la respuesta.

Dos estudiantes combinaron la respuesta de Andrea con la de César o la de Óscar, haciendo construcciones auxiliares sobre el diagrama dado para que los triángulos "quedaran" equiláteros y se refirieron a la construcción para su justificación, por lo que se ubicaron ECC. Un estudiante escogió las respuestas de Óscar y César, y basó su justificación en el movimiento de los segmentos, por lo que también se ubicó en ECC.

Dos estudiantes combinaron las respuestas de Natalia con Silvia y Óscar, pero sus justificaciones los ubicaron en una demostración EF. Uno escogió las respuestas contradictorias de Andrea y Carlos, por lo que se ubicó en F.

La figura 3.4 resume los resultados de la nueva asignación de los estudiantes.

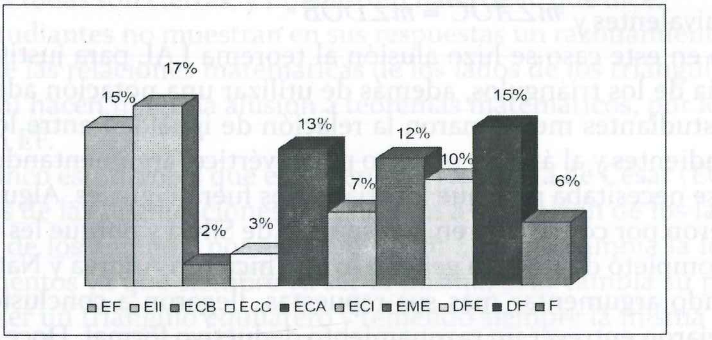


Figura 3.4. Tipos de demostración asignados a las justificaciones de los estudiantes

La nueva clasificación permitió ver que muchos de los estudiantes que se identificaban con una respuesta de tipo deductivo formal estructurado no tenían realmente ese tipo de razonamiento, dando lugar a la nueva categoría de demostración deductiva fallida. Lo mismo ocurrió con varios estudiantes que estaban ubicados en las subclases empíricas, cuyas justificaciones no mostraban un tipo de razonamiento que los mantuviera en esa categoría, por lo que, de acuerdo con los criterios planteados, hubo necesidad de pasarlos a la nueva categoría de demostración empírica fallida.

Descripción de las categorías y análisis de los datos del problema 2

Para el análisis se consideró la asignación de categoría final dada a cada estudiante en el problema 1 y se examinaron todas las respuestas de los estudiantes agrupados en determinada categoría con el fin de ver las conjeturas que planteaban y las demostraciones que hacían en el problema 2. Esto nos permitió analizar y contrastar la asignación final dada al estudiante en el problema 1 de “escoger una demostración” con el problema 2 de “hacer una demostración”. Una consideración para la clasificación y diferenciación de las demostraciones fallidas y las demostraciones empíricas fallidas que tuvimos en cuenta fue que, si el estudiante enunciaba alguna relación válida entre los dos triángulos, aunque no hiciera ninguna demostración se ubicaba en EF, pero si la conjetura dada no tenía nada que ver con la relación entre los dos triángulos, se ubicaba en F.

Los estudiantes que fueron clasificados en el problema 1 en empirismo fallido encontraron relaciones de proporcionalidad, igualdad de ángulos, ser parte de, o estar incluido en, estar dentro de, semejanza, reducción, ser el doble de, congruencia, tener en común el punto B. Ninguno de ellos realizó una demostración válida, aunque algunos trataban de justificar con palabras lo que "veían" y creían. Por ejemplo: "F17: ...son proporcionales, se ve que tienen el mismo ángulo,..., se podría demostrar con regla y transportador midiendo y finalmente haciendo pruebas para ver que son proporcionales".

Considerando que la mayoría de estudiantes plantearon conjeturas válidas, pero no las demostraron, se pudo ver que existía una gran correlación entre la clasificación de los problemas 1 y 2, es decir, casi todos los estudiantes están en la categoría EF. Solamente los casos de los estudiantes que señalaron la congruencia y la mitad como relación entre los triángulos sin justificar por qué se pasaron a F.

La mayoría de estudiantes que en el problema 1 habían sido clasificados en empirismo ingenuo inductivo identificaron relaciones (algunas más completas que otras), pero no las demostraron, se limitaron a comentar lo que veían, por lo que los clasificamos en EF. Por ejemplo: "C09:...por medio del segmento PQ se forma otro triángulo adentro del ΔABC...".

Algunos estudiantes quedaron ubicados en EII, al basar sus justificaciones en las propiedades observadas en el diagrama y referirse a medidas hechas sobre el dibujo. Por ejemplo: "F31: ... el triángulo ABC es el doble de grande que el triángulo PBQ, lo comprobé midiéndolos. Además como PQ// AC si el triángulo PBQ fuera más grande, aumentaría sus medidas al doble sería exactamente igual que el ΔABC".

El caso de F02 se consideró como una demostración DFE puesto que utilizó una secuencia lógica de teoremas aceptados derivados de los datos del problema.

"F02: Equivalencia: Porque siendo paralelas las líneas PQ y AC, los ángulos formados por la intervención de la línea PQ en los segmentos BC y BA serían igual en ángulo ACB, es decir <ACB=<PQB, <CAB=<QPB. La igualdad de 2 ángulos en 2 triángulos distintos garantiza la equivalencia de dichos triángulos, en este caso PBQ y ABC son equivalentes".

Los dos estudiantes que estaban ubicados en el problema 1 en experimento crucial basado en ejemplo respondieron lo siguiente: "F35: ΔABC es una reducción de ΔPBQ o viceversa... se podría comprobar trasladando PQ hasta AC y el resultado sería que los dos triángulos son iguales. (ECB)".

G17: La relación que hay entre ABC y PBO es que se cortan en el vértice B. (EF)

Para F35 fue suficiente tomar un ejemplo para trasladar el segmento y comprobar su conjetura; no habló de otros ejemplos ni de contraejemplos; G17 plantea solamente una conjetura y no la demuestra.

Uno de los tres estudiantes clasificado en el problema 1 en experimento crucial constructivo, en el problema 2 quedó en ECA, al basar su justificación en las propiedades observadas sobre el ejemplo: "F32: ... que ΔABC tiene los mismos ángulos que el ΔPBQ ya que P y Q están paralelamente organizadas sobre la recta $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$ respectivamente, entonces los ángulos <BPQ y BQP no cambian con respecto a <BAC y <BCA". Los otros dos estudiantes se ubicaron en EF.

Varios de los trece estudiantes ubicados en experimento crucial analítico se limitaron a dar la conjetura sin hacer ninguna demostración, por lo que siguió predominando la categoría EF. F29 se ubicó en ECC, ya que su justificación se basó en la construcción realizada sobre el diagrama dado:

> F29: En este caso, si se triangula la figura grande, nos damos cuenta que surgen 4 triángulos de la medida de ΔPBQ. Entonces existe una relación de ¼ de ΔPBQ con respecto a ΔABC. En conclusión el ΔPBQ está reducido a escala del ΔABC.

F30 basó su demostración en lo observado sobre el diagrama, por lo que lo ubicamos en empirismo ingenio perceptivo (EIP): "F30: que son triángulos semejantes porque si observamos su forma es igual pero las medidas de PBQ no son iguales porque es el mismo triángulo pero reducido, también se ve que sus ángulos son iguales".

La mayoría de estudiantes ubicados en el problema 1 en experimento crucial intelectual identificó la semejanza de los triángulos; pero a la hora de dar una demostración, se limitaron a enunciar propiedades y teoremas aceptados sin usarlos propiamente en ella. No consideramos que sea empirismo ingenuo debido a que no usaron medidas ni propiedades particulares sino propiedades generales; tampoco correspondía a un ejemplo genérico, porque no refiriéndose refirieron a un representante de una clase, por tanto los clasificamos en ECI.

> F37: Al ser paralelas las líneas PQ y AC lo que los relaciona es la forma solo que ΔPBQ tiene un área menor que ABC. Ya que las líneas BC y BA no cambian su inclinación y los ángulos a simple vista se ven similares, m<BAC=m<BPQ, m<BCA=m<BPQ, m<ABC=m<PBQ.

Los casos que solo enunciaron la relación siguen siendo EF.

Con respecto a los doce estudiantes que en el problema 1 se clasificaron en experimento mental estructural, se notó que, a medida que estaban en una categoría que requería mayor razonamiento, identificaban más la relación de semejanza entre los dos triángulos, además de tratar de utilizar, o al menos mencionar, propiedades matemáticas aceptadas. También se vio que, a pesar de que algunos estudiantes se habían mantenido en esta categoría en el primer punto, respetando que la elección fuera porque habían razonado de manera similar a la respuesta seleccionada, se evidenció que tal razonamiento no existía, sino más bien existían creencias acerca de cómo debe ser una demostración de acuerdo con lo estudiado en los años anteriores, pero no existía la habilidad como tal. De los doce estudiantes, solo tres tenían un tipo de demostración que correspondía a EME; no se ubicaron en DFE o DFT porque no existía una cadena lógica en su argumentación, sino más bien hacían mención a algunas propiedades que ayudaban a validar la conjetura, pero no explicaron por qué estas propiedades se cumplían. Por ejemplo:

> "C07: ... m<PQB es igual a la m<BCA pues las rectas son paralelas y aunque el ΔABC tiene mayor proporción, la abertura de los ángulos se conserva. Igualmente sucede con m<BPQ y la m<BAC. Los ángulos de los triángulos son congruentes por lo que los triángulos son semejantes".

Los demás estudiantes fueron ubicados en EF o DF, porque plantearon una conjetura pero no realizaron su demostración; para diferenciarlo y poder decidir si era empírico o deductivo, se tuvo en cuenta lo que explicaron para tratar de justificar su conjetura.

Analizando el número de estudiantes (diez) que se clasificaron en deductivo formal estructural en el problema 1 con los del problema 2 (cinco), concluimos que muchos de ellos fueron capaces de comprender un tipo de demostración DFE, pero todavía no tenían las habilidades suficientes para realizarlas por su cuenta. Por ejemplo: "C02: Que los dos triángulos son semejantes ya que sus bases son paralelas. En el triángulo ABC el segmento $\overline{AB}$ es casi la mitad del segmento $\overline{PQ}$ con lo que sus medidas son semejantes en cuanto a sus lados y ángulos".

Los que en el problema 1 estaban en la categoría deductiva fallida se clasificaron en diferentes subclases de demostraciones; se percibió que efectivamente algunos de los que habían escogido la respuesta que en el primer punto correspondía a DFE lo hicieron porque reconocían que las demostraciones se debían basar en propiedades generales, pero les faltaba habilidad de demostración. Todos, a excepción de uno, dieron respuestas de tipo empírico o fallidas. Los que dieron respuestas erradas o acertadas sin ningún tipo de explicación también confirmaron que existía diferencia entre entender una demostración y aceptar su validez a tener las habilidades para realizarla.

Los que en el problema 1 se clasificaron en demostración fallida reconfirman su clasificación, como pudo concluirse de sus respuestas dadas al problema 2.

La figura 3.5 muestra los porcentajes de respuestas en cada uno de los tipos de demostración asignados en el problema 2. Se evidencia el predomino de las demostraciones fallidas, es decir, estudiantes que no tienen la habilidad necesaria para plantear sus propias conjeturas y demostrarlas por sí mismos, pero sí la capacidad para entenderlas, como lo vimos en el problema 1; por tanto, se considera un acierto el hecho de haber propuesto ese tipo de problema.

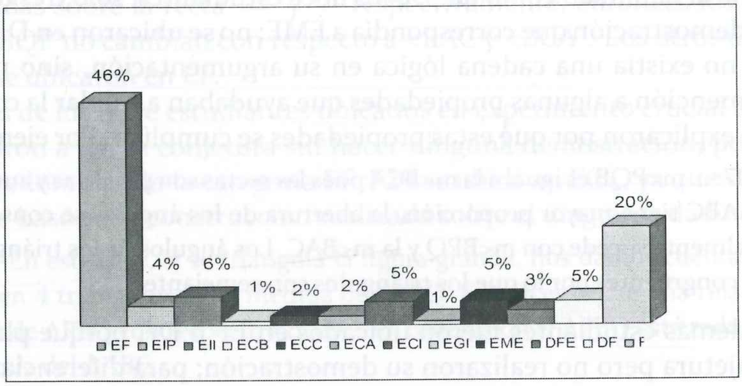


Figura 3.5. Tipos de demostración de los estudiantes en el segundo problema

Conclusiones

Los resultados de la comparación del problema 1, entre lo que los estudiantes escogieron y lo que justificaron, dejan ver que la mayoría de estudiantes tenían un tipo de razonamiento empírico, incluso los clasificados en el deductivo usaban bastante el empirismo. Estos últimos tienen la idea de que hay que utilizar argumentos matemáticos aceptados para demostrar, pero al no ser capaces de dar justificaciones deductivas, se apoyaban bastante en el empirismo. Esto se reconfirmó con el análisis del problema 2. También emergieron, de acuerdo con las justificaciones y los criterios, las demostraciones de tipo experimento crucial intelectual y experimento mental estructural. Las demostraciones que fueron seleccionadas inicialmente y que tuvieron mayor coherencia con las justificaciones dadas por los estudiantes fueron las de tipo experimento crucial analítico y la demostración fallida, la de menos coherencia fue la de tipo experimento crucial constructivo. En el problema 2 hubo más tipos de demostraciones que en el problema 1 debido a que no se limitaban a los casos dados; no obstante, se notó la falta de demostraciones tipo experimento genérico y el bajo porcentaje de estudiantes que plantearon un tipo de demostración deductiva. Con este análisis se evidenció el predomino de los tipos de demostración empírica, empírica fallida y fallida, lo cual indica que los estudiantes no tienen la habilidad necesaria para demostrar por sí mismos sus propias conjeturas. Es posible que esto se deba a que los procesos de conjeturar y demostrar no son promovidos en los cursos anteriores.

Pudimos poner en práctica un instrumento valioso de obtención de información inicial de las habilidades de demostración de nuestros estudiantes que sirvió de punto de partida para el logro de los objetivos de la investigación mencionados en la introducción de este capítulo. El test diagnóstico también sirvió para poner en práctica y validar la pertinencia y coherencia de la estructura de análisis propuesta, la cual permitió aportar información del proceso de demostración de propiedades de las razones trigonométricas realizado por los estudiantes en el transcurso de la investigación (Fiallo, 2006).

Referencias

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils′ practice of school mathematics. En D. Pimm (ed.). *Mathematics, Teachers and Children Hodder & Stoughton* (pp. 216-235). London: Hodder y Stoughton.

Bell, A.W. (1976). A study of pupil's proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics* 7 (1), 23-40.

Fiallo, J. (2006). *Enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente cabri para el desarrollo de las habilidades de demostración.* Memoria de investigación, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Valencia, Valencia.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Student's proof schemes: Results from exploratory studies. En A.H. Schoenfeld, J. Kaput y E. Dubinsky (eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education* (vol. III, pp. 234-283). Providence, Estados Unidos.: American Mathematical Society.

Küchemann, D. y Hoyles, C. (2001). *Investigating Factors that Influence Students Mathematical Reasoning.* Manuscrito recuperado de http://www.ioe.ac.uk/proof/ proofPME25.pdf

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In A. Gutiérrez y P. Boero (eds.). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 173-204). Roterdam, Holanda: Sense Publishers.

Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 87-125.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Areas obligatorias y fundamentales.* Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática.* Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.