Investigaciones en educación geométrica

Leonor Camargo
Compilador

Camargo Uribe, Leonor
Investigaciones en educación geométrica / Leonor Camargo Uribe, Dora Calderón, Ángel Gutiérrez Rodríguez. -- Bogotá : Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2012.
258 p. ; cm.
ISBN 978-958-8782-22-5
1. Geometría - Investigaciones 2. Geometría del espacio - Enseñanza 3. Percepción espacial - Enseñanza 4. Matemáticas - Enseñanza I. Calderón, Dora Inés II. Gutiérrez Rodríguez, Ángel III. Tít.
516 cd 21 ed.
A1359021
CEP-Banco de la República-Biblioteca Luis Ángel Arango

ISBN: 978-958-8782-22-5

Primera edición: Bogotá D.C., septiembre de 2012

Dirección Sección de Publicaciones
Rubén Carvajalino C.

Coordinación editorial
María Elvira Mejía

Diagramación
Carlos Vargas Salazar - Kilka Diseño Gráfico

Corrección de estilo
Leonardo Holguín Rincón

Diseño de cubierta
Carlos Vargas Salazar - Kilka Diseño Gráfico

Impresión
Imprenta Editorial Universidad Nacional

Preparación editorial
Sección de Publicaciones
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Miembro de la Asociación de Editoriales Universitarias de Colombia (Aseuc)

Sección de Publicaciones
Editorial UD
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Carrera 19 No. 33 -39.
Teléfono: 3239300 ext. 6203
Correo electrónico: publicaciones@udistrital.edu.co

Hecho en Colombia

Capítulo 8

Unidad de enseñanza para las razones trigonométricas en un ambiente Cabri para el desarrollo de habilidades de demostración*

Jorge Enrique Fiallo
Universidad Industrial de Santander
Ángel Gutiérrez Rodríguez
Universidad de Valencia

Presentamos algunos resultados del trabajo de investigación realizado con estudiantes de décimo grado de bachillerato de tres instituciones de Santander, cuyos objetivos apuntaban a: 1) diseñar, implementar y evaluar una unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un entorno de geometría dinámica enfocándola además hacia el desarrollo de las habilidades de la demostración en los estudiantes de décimo grado; 2) analizar los tipos de demostración que emergen con el uso de Cabri en el proceso de demostración de propiedades trigonométricas de los estudiantes que inician el grado décimo y 3) analizar los procedimientos, las estrategias de razonamiento y los errores y dificultades detectados en el desarrollo de las actividades planteadas en la unidad de enseñanza. En general, podemos decir que las actividades de la unidad de enseñanza lograron promover procedimientos, estrategias de razonamiento y demostraciones que fueron presentando un continuo progreso

---

* Una versión anterior de las ideas de este capítulo se presentó en una ponencia del grupo Aprendizaje de la Geometría en el X Simposio de la SEIEM, Huesca, España, en el 2006.

desde lo empírico hacia lo deductivo y que contribuyeron al logro de los objetivos de aprendizaje y de investigación propuestos.

Introducción

El estudio de la trigonometría puede convertirse en un proceso memorístico, rutinario y mecánico, sin ningún sentido ni utilidad si no se atiende a condiciones adecuadas. Por esta razón es importante brindarle al estudiante no solo una serie de conceptos, sino también las herramientas y estrategias necesarias para que explore, analice, relacione, conjeture, demuestre y aprenda con sentido los conceptos y propiedades trigonométricos; que aprenda a utilizar diferentes procedimientos y estrategias de razonamiento, a producir distintos tipos de demostración en la solución de problemas de conjetura y demostración de las propiedades trigonométricas y a relacionar las diferentes representaciones de los conceptos de manera que el aprendizaje sea más efectivo y duradero.

Es de amplio conocimiento en la comunidad de investigadores en educación matemática que el tema de la demostración en matemáticas es una de las agendas que reporta un gran número de investigaciones, agrupándose, como lo propone Mariotti (2006), en tres líneas de investigación caracterizadas por tres categorías de asuntos de investigación, a saber: la demostración en el currículo, diferentes aproximaciones a las concepciones de demostración de los estudiantes y propuestas para introducir a los estudiantes en la demostración.

Por otra parte, las nuevas tecnologías nos ofrecen herramientas para la enseñanza que contribuyen a que los estudiantes, por medio de ellas, planteen sus ideas, exploren, analicen, tomen datos, etcétera, y pongan a prueba sus conjeturas. En geometría existe una variedad de software de geometría dinámica, como Cabri Géomètre, que pone a disposición del estudiante un micromundo geométrico en el cual los objetos matemáticos pasan de ser simples dibujos a convertirse en "objetos geométricos" que pueden ser construidos mediante acciones de una manera muy similar a las construcciones en lápiz y papel, pero con la posibilidad de tener más de una representación del objeto construido y de la familia de figuras semejantes a la inicial, además de poder manipularlas por medio de la opción de arrastre o animación que ofrece el programa.

Tomando como base las ideas anteriores, y siguiendo las líneas de investigación tendientes a obtener una mejor idea de los procesos de demostración y del planteamiento de propuestas para introducir a los estudiantes en el tema de la demostración, se planteó esta investigación basada en el diseño, experimentación y evaluación de una unidad de enseñanza que permitiera acercar a los estudiantes al estudio de la trigonometría y la demostración desde una metodología que sustenta que:

1. A partir de un enfoque geométrico en un ambiente de geometría dinámica se favorece la formación de objetos mentales[1] de los conceptos de las razones trigonométricas.

2. El uso de Cabri favorece la visualización, generalización y conjetura de propiedades de las razones trigonométricas.

3. El uso de Cabri contribuye al desarrollo de habilidades de demostraciones empíricas y deductivas en el estudio de las razones trigonométricas.

La concepción de la demostración en nuestra investigación

Arzarello y otros (1998) consideran cruciales dos componentes para focalizar el significado de la demostración, a saber, el cognitivo y el histórico-epistemológico (Barbin, 1988; Balacheff, 1988; Harel, 1996; Mariotti et ál., 1997). Por supuesto, los dos componentes pueden ser separados solamente por razones de análisis teóricos o, por el contrario, pueden entrelazarse con profundidad en la realidad (Hanna, 1996); ambos pueden considerarse para abordar apropiadamente lo didáctico de la demostración.

Hanna (2000) manifiesta que cuando se intenta caracterizar el papel de la demostración en educación matemática se tiende a considerarlo en la actividad matemática misma, pues se espera que refleje en las clases todo lo que los matemáticos esperan de ella. Pero estas funciones no siempre son relevantes para el aprendizaje de las matemáticas en el mismo grado ni tampoco deberían tener el mismo peso en la instrucción (de Villiers, 1990, Hersh, 1993). Al comenzar el largo trabajo de preparar a los estudiantes para la demostración deberíamos empezar por dos funciones fundamentales: verificación y explicación. En la clase, la pregunta fundamental que la demostración debe dirigir es: ¿por qué? En el dominio educativo es natural, entonces, valorar las demostraciones que mejor ayuden a explicar.

Teniendo en cuenta las ideas expuestas y las de otros investigadores (Godino y Recio, 2001; Battista y Clements, 1995), consideramos la *demostración,* desde una perspectiva amplia, como un proceso que incluye todos los intentos hechos por el estudiante para *explicar, verificar o justificar* con mi-

1 Entendido como lo plantea Freudenthal (2001), quien afirma que la constitución de objetos mentales precede a la adquisición de conceptos y puede ser altamente efectivo, incluso si no le sigue la adquisición de conceptos. Siguiendo las ideas de Freudenthal acerca de la fenomenología didáctica, consideramos que desde los fenómenos geométricos se favorece la formación de objetos mentales de los conceptos de las razones trigonométricas; en este caso, el uso de Cabri se constituye en una herramienta potente para favorecer y comprender las relaciones entre los objetos mentales de los conceptos de las razones trigonométricas.

ras a convencerse a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática.

Análisis de conjeturas y demostraciones producidas por los estudiantes

Marrades y Gutiérrez (2000), apoyados en los trabajos de otros investigadores como Balacheff (1988), Bell (1976) y Harel y Sowder (1998), proponen una estructura analítica para analizar, organizar y describir las respuestas de los estudiantes a problemas de demostración. A continuación presentamos un resumen de las categorías propuestas y una breve descripción de cada una de ellas.

1. Demostraciones empíricas: caracterizadas por el uso de ejemplos como elementos de convicción. Los tipos de demostración empírica son:

- Empirismo ingenuo: cuando en el planteamiento de una conjetura y en la demostración se usan solamente ejemplos escogidos sin ningún criterio específico. Se identifican dos tipos de empirismo ingenuo:
  - Perceptivo: cuando los estudiantes se basan en elementos visuales o táctiles.
  - Inductivo: cuando los estudiantes se basan en elementos matemáticos o relaciones detectados en el ejemplo.
- Experimento crucial: cuando la conjetura es demostrada usando un ejemplo que se escoge porque se presume que en cualquier otro caso va a dar el mismo resultado. Se identifican los siguientes tipos de experimentos cruciales:
  - Basado en ejemplo: cuando los estudiantes se basan en la existencia de un único ejemplo o en la ausencia de contraejemplos para su demostración.
  - Constructivo: cuando los estudiantes sustentan sus demostraciones en las construcciones realizadas sobre el ejemplo o en la forma de conseguir el ejemplo.
  - Analítico: cuando se usan ejemplos cuidadosamente seleccionados y las demostraciones de los estudiantes están basadas en propiedades y relaciones observadas en el ejemplo o en elementos auxiliares.
  - Intelectual: cuando las conjeturas o demostraciones de los estudiantes están basadas en observaciones empíricas del ejemplo,

pero en la demostración usan propiedades matemáticas aceptadas o relaciones entre los ejemplos.

- Ejemplo genérico: cuando en la demostración o en la conjetura se usa un ejemplo específico que es representante de una clase y la demostración incluye la producción de razonamientos abstractos.

Los cuatro tipos de demostración definidos en los párrafos anteriores para el experimento crucial se presentan en los ejemplos genéricos.

2. Demostraciones deductivas: caracterizadas por la descontextualización de las discusiones usadas, se basan en aspectos genéricos del problema, operaciones mentales y deducciones lógicas. Los tipos de demostraciones deductivas son:

- Experimento mental: cuando se usa un ejemplo para ayudar a organizar la demostración. Se pueden distinguir dos tipos de experimento mental:
    - Experimento mental transformativo: cuando las demostraciones se basan en operaciones mentales que transforman el problema inicial en otro equivalente. El papel de los ejemplos es ayudar a prever cuáles transformaciones son convenientes.
    - Experimento mental estructural: cuando las demostraciones están basadas en secuencias lógicas derivadas de los datos del problema, de los axiomas, las definiciones o teoremas aceptados; si se usan ejemplos, son para ayudar a organizar o entender los pasos de las deducciones.
- Deducción formal: cuando la demostración se basa en operaciones mentales sin la ayuda de ejemplos específicos.

Metodología

La figura 8.1 resume la metodología de investigación planteada por fases; en la que se llevaron a cabo acciones investigativas para dar cumplimiento a los objetivos de investigación planteados.

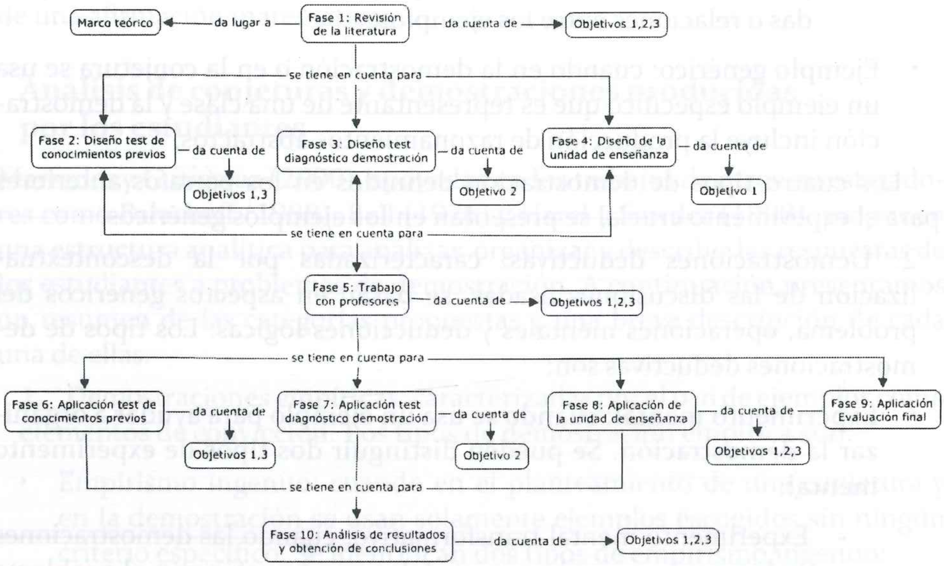


Figura 8.1. Secuencia y relación entre las fases y los objetivos de investigación

Los datos se recogieron de las hojas de trabajo de los estudiantes; los mapas conceptuales que debían completar o realizar al finalizar una actividad; las evaluaciones cortas y acumulativas aplicadas durante el desarrollo de la experimentación; los test diagnósticos de los preconceptos y de las habilidades de demostración; de los videos de las discusiones de clase con los compañeros y profesores; de una entrevista final realizada a algunos estudiantes y a la profesora de una de las instituciones; de registros de sesión de Cabri y de los cuadernos de apuntes del investigador y de los profesores. Para la determinación de conclusiones se utilizaron todos los análisis cualitativos y cuantitativos realizados sobre todas las actividades, teniendo en cuenta las categorías de análisis de Marrades y Gutiérrez (2000), las categorías emergentes, así como los datos cuantitativos obtenidos.

Durante dos semanas previas al comienzo de las clases, el investigador trabajó con los profesores, haciendo énfasis en los objetivos de la investigación y de aprendizaje propuestos en la unidad de enseñanza, en la concepción de demostración de nuestra investigación, en el uso de Cabri y en la revisión y corrección de la unidad y de los test diagnósticos. Este trabajo continuó en el transcurso del desarrollo de la experimentación, período durante el cual los profesores eran los encargados de implementar las actividades y orientar la clase según lo planeado y descrito en cada una de las actividades para el logro de los objetivos de aprendizaje y de investigación.

El investigador fue el responsable del diseño de las actividades y de los correspondientes archivos de Cabri, de participar en el desarrollo de las actividades en las instituciones, adoptando un papel de observador activo y colaborador del profesor en las tareas de asesoramiento y orientación a los estudiantes, preguntando y registrando las respuestas y conclusiones en el desarrollo de las tareas propuestas.

Descripción de la población

La implementación de la unidad de enseñanza se llevó a cabo con cien estudiantes del grado décimo de bachillerato (entre catorce y dieciséis años) de tres instituciones de Santander, tomando como único criterio de elección la facilidad de establecer contacto con las directivas y profesores, además de que fueran instituciones que contaran con una sala de computadores disponible tres horas semanales para trabajar en dos sesiones semanales de noventa minutos cada una durante el período que se había planeado la experimentación.

Ninguno de los estudiantes había tenido experiencia previa en el uso de Cabri, por lo que las dos primeras semanas de febrero se dedicaron a su aprendizaje. Teniendo en cuenta que los estudiantes partícipes de la experiencia eran noveles en el uso de Cabri y el tiempo disponible para la capacitación fue de apenas dos semanas, en casi todas las actividades Cabri fue utilizado más como una herramienta para obtener construcciones sencillas y orientada a la visualización, exploración y análisis de relaciones y propiedades trigonométricas que como una herramienta que los estudiantes manipularan como expertos para la solución de un problema de demostración. Cuando la construcción era compleja se daba a los estudiantes el archivo correspondiente para que ellos la manipularan y exploraran las propiedades estudiadas. Solo en los casos en que las construcciones eran sencillas se pidió a los estudiantes que intentaran hacerlas y que, de acuerdo con el resultado, plantearan, verificaran y demostraran las propiedades correspondientes.

De los profesores, solamente uno había usado Cabri en la calculadora TI 92 plus y Cabri II en el computador, por lo que se trabajó con ellos durante las dos últimas semanas de enero y las dos primeras semanas de febrero.

Para el análisis de los resultados se tomaron cuatro grupos conformados por dos o tres estudiantes de dos de las instituciones y tres grupos conformados por dos estudiantes de la institución restante.

Jorge Enrique Fiallo / Ángel Gutiérrez Rodríguez

Planificación de la experimentación

La experimentación de la unidad de enseñanza se llevó a cabo entre la segunda semana de enero y la primera semana de mayo del 2006 en el transcurso normal del periodo de clases de las tres instituciones participantes. El cuadro 8.1 muestra la secuencia cronológica de las acciones de experimentación realizadas.

Acciones de la experimentación	Feb 2006				Mar 2006				Abr 2006				May 2006			
Aplicación del test de conocimientos previos	■	■														
Aplicación del test diagnóstico de los tipos de demostración	■	■														
Aplicación de la unidad de enseñanza			■	■	■	■	■	■	■	■		■	■	■		
Aplicación de las evaluaciones cortas					■	■						■				
Aplicación de la evaluación acumulativa								■	■	■						

Cuadro 8.1.

Se aplicaron cinco actividades[2] que abarcaron los siguientes temas de estudio de las razones trigonométricas:

- Actividad 1: razones trigonométricas para triángulos rectángulos.
- Actividad 2: razones trigonométricas para ángulos en posición normal.
- Actividad 3: representaciones lineales y visualización de las razones trigonométricas.
- Actividad 4: identidades pitagóricas.
- Actividad 5: seno de la suma de dos ángulos.

Como uno de los objetivos fundamentales de la unidad era el desarrollo de las habilidades de demostración, desde la primera actividad se planteó el análisis y demostración de conjeturas que involucraban las identidades trigonométricas. De esta manera, cada actividad era mucho más extensa de lo que normalmente se plantea en los textos escolares, puesto que se requería la realización y análisis de construcciones en Cabri, así como el plan-

---

2 Las cinco actividades y los archivos de Cabri correspondientes se encuentran publicadas en el trabajo de investigación Fiallo (2006).

teamiento y discusión de las ideas en la hoja de trabajo con el grupo y en la discusión con la clase y el profesor.

Algunos resultados

Las actividades planteadas permitieron el uso de diferentes procedimientos de resolución de actividades cada uno de ellos caracterizados por el tipo de actividad propuesta, viéndose una evolución desde el uso inicial de procedimientos numéricos basados generalmente en los datos observados en Cabri hacia el uso de procedimientos algebraicos, geométricos y analíticos que promovieron el uso de razonamientos más analíticos y deductivos para mejorar las habilidades de demostración en el tema de las razones trigonométricas. Por ejemplo, al realizar los movimientos que hacían variar el ángulo *A* en un solo sentido, planteaban que algunas razones aumentaban y otras disminuían. Al solicitarles propiedades matemáticas para justificar, se basaban en lo observado en Cabri y volvían a dar ejemplos. Este tipo de procedimiento se clasificaba como numérico basado en los datos de Cabri (NDC). Para hallar las relaciones entre las razones de los ángulos *A* y *A-90*, construyeron en Cabri el ángulo *A-90* por rotación y justificaron que *cos (A-90) = sen A* porque "cuando el triángulo rota (A-90) pasa a ser el coseno de A por lo tanto cos (A-90) = sen A los triángulos son semejantes, pero diferentes las posiciones de seno y coseno". Este tipo de procedimiento se clasificaba geométrico basado en propiedades geométricas (GP).

Por la insistencia en el uso de propiedades matemáticas para las justificaciones, a medida que los estudiantes avanzaban en las actividades, empezaban a utilizar procedimientos más analíticos que tendían a ser más generales y no tan numéricos. En este caso Cabri les servía como una herramienta exploratoria para analizar las variantes e invariantes y deducir propiedades geométricas y analíticas.

Se detectaron cinco estrategias de razonamiento muy relacionadas con los procedimientos de resolución de actividades y con los tipos de demostración realizados por los estudiantes. Estas estrategias emergían por el tipo de actividad propuesta. Por ejemplo, la estrategia de razonamiento usada al principio se basó en el análisis empírico de los datos de Cabri al realizar el movimiento del punto P sobre la circunferencia; para hallar las relaciones de las razones entre los ángulos *A* y *–A* los estudiantes hicieron construcciones y analizaron los valores de las coordenadas de los puntos sobre el lado final de cada ángulo, no utilizaron argumentos geométricos para justificar las relaciones. Este tipo de razonamiento se clasificó como empírico inductivo apoyado en los datos de Cabri (EIC-AD).

A medida que fueron explorando otras relaciones se fue dando una transición desde un razonamiento empírico inductivo hacia un razonamiento deductivo ayudado por una transición entre las representaciones numéricas hacia representaciones algebraicas apoyadas por un enfoque geométrico. Los estudiantes sustentaban sus afirmaciones en deducciones de los datos del problema o propiedades recordadas y utilizaban Cabri para su validación. Por ejemplo, para hallar el rango de variación de la tangente utilizan la identidad $\tan A = \frac{senA}{\cos A}$ y explican comparando los valores del cociente cuando seno y coseno varían: "Al acercarse a 90º aumenta más rápidamente, pues la proporción entre senA y el cosA son mayores y el cosA disminuye y el senA aumenta por lo que su división va a ser un número mayor". Este tipo de razonamiento se clasificó como deductivo apoyado en el uso de Cabri (D).

La mayoría de errores surgieron en el transcurso del desarrollo de determinada actividad, algunos de ellos muy propios de esta por el tipo de actividad planteada. Sin embargo, un error constante en casi todas las primeras actividades fue considerar una variable positiva si no tenía ningún signo y negativa si tenía el signo menos. Por ejemplo, asumían que el ángulo *A* siempre es negativo y el ángulo *A* siempre es positivo o que la variable real *x* siempre es positiva y la variable real *–x* siempre es negativa. Un error característico y cometido por casi todos los grupos en la actividad 2 fue considerar el ángulo siempre positivo y en el primer cuadrante, consideración que los inducía al análisis de las conjeturas solamente en el primer cuadrante. Por ejemplo, "sen A = -sen (-A) porque sen A es positivo, sen (-A) es negativo y al multiplicarlo por -1 queda positivo".

Las mayores dificultades encontradas, especialmente al inicio de la experimentación, fueron las relacionadas con establecer las relaciones que se daban entre los diferentes elementos o conceptos involucrados en el estudio de las razones trigonométricas y la incapacidad inicial de justificar matemáticamente; relacionada con estas, la dificultad de expresar las relaciones y las propiedades en un lenguaje y notación adecuadas. Por ejemplo, quienes no escribieron en Cabri las razones en forma de fracción, indicando los valores de los lados en el numerador y denominador, no veían la relación numérica de estos lados cuando varía el ángulo y no eran capaces de justificar con argumentos basados en las definiciones de las razones dadas por qué al variar el ángulo varían las razones.

En cuanto a los tipos de demostración, vimos cómo a medida que desarrollaban las actividades, se dio una transición de demostraciones de tipo inductivo hacia demostraciones de tipo deductivo (tabla 8.1) y desaparecieron las demostraciones fallidas, empíricas fallidas o deductivas fallidas. Este hecho no se puede tomar como un indicador rotundo de éxito e interpretar que en las actividades finales todos los estudiantes tenían habilidades para producir demostraciones deductivas. También se evidenció que, de acuerdo con la actividad propuesta, se promovió determinado tipo de demostración.

A CT	F	EF	E I P	E I I	A CB	A CC	E CA	EC I	E GB	E GC	E GA	EG I	DF	E MT	E ME	DF T	D FE
1																	
2																	
3																	
4																	
5																	

Códigos: F = fallido; EF = empirismo fallido; EIP = empirismo ingenuo perceptivo; EII = empirismo ingenuo inductivo; ECB = experimento crucial basado en ejemplo; ECC = experimento crucial constructivo; ECA = experimento crucial analítico; ECI = experimento crucial intelectual; EGB = ejemplo genérico basado; EGC = ejemplo genérico constructivo; EGA = ejemplo genérico analítico; EGI = ejemplo genérico intelectual; EMT = experimento mental transformativo; EME = experimento mental estructural; DFT = deductivo formal transformativo; DFE = deductivo formal estructural; DF = deductivo fallido.

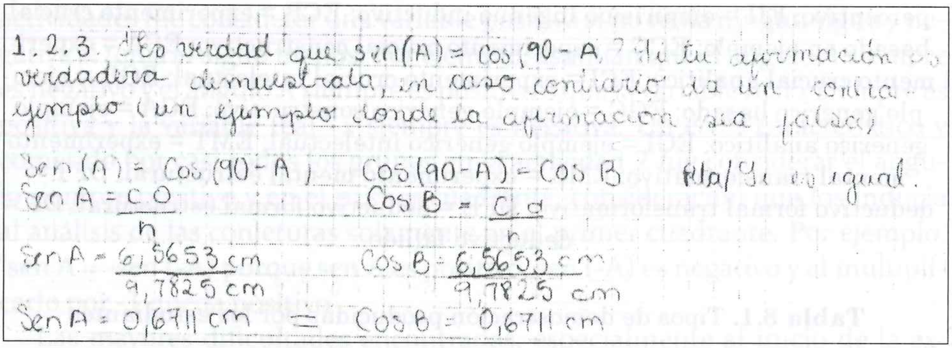
Tabla 8.1. Tipos de demostración producidas por los estudiantes

En la primera actividad prevalecieron las demostraciones empíricas, especialmente las cruciales, sobresaliendo el tipo experimento crucial intelectual. No se produjeron demostraciones genéricas porque el tipo de actividades y de problemas de demostración propuestos no lo permitieron. Las demostraciones deductivas fueron producidas por estudiantes que desde el inicio mostraron un tipo de razonamiento deductivo y un buen dominio de conceptos previos. En la segunda actividad se presentó mayor variedad de demostraciones porque, además de la actividad, se aplicó una evaluación individual de cinco problemas de demostración. Destacó la presencia de todos los tipos de demostración a excepción del experimento crucial basado, el experimento crucial constructivo y el ejemplo genérico constructivo, predominando los tipos fallido, experimento crucial intelectual y el empirismo ingenuo inductivo, con una buena cantidad de demostraciones deductivas. En la actividad 3 se destacaron las demostraciones tipo deductivo formal transformativo debido al tipo de problema y a la gran ayuda de visualización que se ofreció la cual los estudiantes supieron aplicar incluso en la evaluación de lápiz y papel que se hizo. Las demostraciones empíricas corresponden a uno de los grupos que logró menos avances hacia el logro de habilidades de demostración de tipo deductivo. Las actividades 4 y 5 muestran un avance hacia las demostraciones deductivas basadas en propiedades geométricas y algebraicas generales con la ayuda de las demostraciones visuales propuestas en Cabri.

A continuación presentamos ejemplos de algunos de los tipos de demostración más frecuentes analizadas en las actuaciones de los estudiantes de los siete grupos, incluyendo las evaluaciones cortas y acumulativas que se practicaron en el desarrollo de la unidad.

Ejemplo 1. *Actividad 1.2.3*: se pregunta sobre la verdad de la relación *sen(A) = cos (90 - A).*

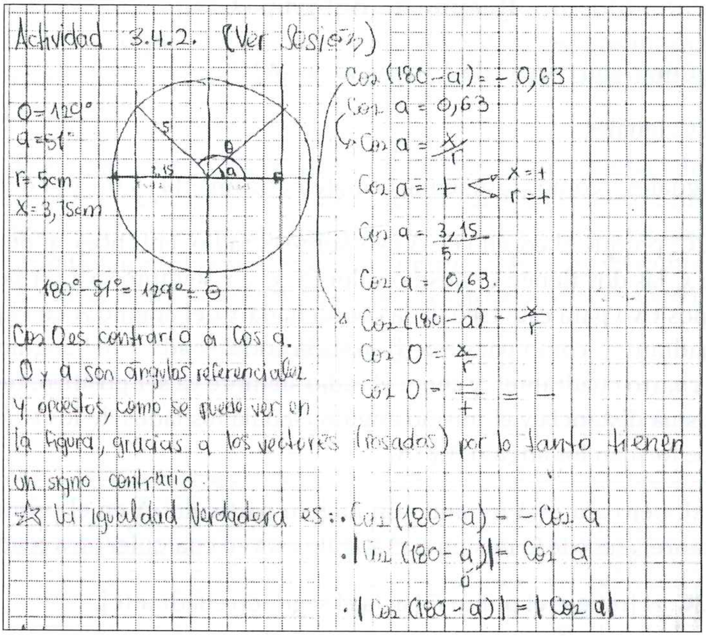
Respuesta de G27:



Usa las definiciones de seno y coseno estudiadas para reemplazar por los valores de los catetos e hipotenusa del triángulo rectángulo que en esos momentos tenía en la pantalla del computador, y se basa en este único ejemplo, escogido sin ningún criterio, para justificar que la conjetura es verdadera. Por el uso exclusivo de un ejemplo escogido sin ningún criterio, y basándose en esta percepción (los cocientes son iguales) y en su afirmación de que la conjetura es verdadera porque este es igual, decimos que este tipo de demostración corresponde a un empirismo ingenuo inductivo (EII).

Ejemplo 2. *Actividad 3.4.2. Explorando y demostrando:* ¿Es verdad que *cos (180 - A) = cos A*? Si la igualdad es cierta, demuéstrala; si es falsa, refútala y encuentra una verdadera y demuéstrala.

Respuesta de C23:



Después de haber representado en Cabri los ángulos *A* y *180 - A* (teniendo en cuenta que *A* es agudo y por tanto sólo toma valores entre 0º y 90º), el estudiante toma el ejemplo que está en ese momento sobre la pantalla del computador y observa que los valores absolutos de las razones son iguales, pero los signos son diferentes. Con base en esto, utiliza la fórmula de seno y coseno para reemplazar por los valores de esas coordenadas y justificar el signo positivo del ángulo *A*; pero, para el ángulo *A* (el estudiante lo representa con un símbolo parecido a un cero o a la vocal mayúscula o), simplemente se refiere a los signos en la razón determinando que es negativo. Esto y lo que está viendo en el computador le permiten concluir que las razones son opuestas. Luego se refiere a otra propiedad observada en la representación de los lados trigonométricos en la figura (los vectores rosados que dibujó en la hoja y nombró como *rcos*) para reafirmar que los signos son contrarios y decir cuáles serían las conjeturas verdaderas, pero sin demostrarla, como se había pedido en la actividad. Por el uso exclusivo de un ejemplo y las demostraciones basadas en propiedades observadas en el ejemplo, se concluye que este tipo de demostración corresponde a un Experimento crucial analítico.

Ejemplo 3. *Actividad 2.3.1:* explorando, conjeturando y aprendiendo Usa Cabri como ayuda para encontrar relaciones entre: cos (A) y cos (-A)

Respuesta del grupo G2C:

1. I: ¿Cómo son coseno de A y coseno de –A?

2. G2C: iguales.

3. I: iguales, ¿cómo argumentaría matemáticamente eso?, ¿por qué?

4. G2C: porque el coseno de A es *x* sobre el radio, entonces, al depender de *x*, las dos tienen el mismo valor de *x*, y *x* siempre va a ser positivo, *x* positivo para este [señala la coordenada *x* del ángulo *A* en el primer cuadrante], como para este [señala la coordenada *x* del ángulo *-A* en el cuarto cuadrante], y como el radio siempre va ser positivo, tienen la misma distancia y el mismo ángulo [señala los lados de los triángulos que forman los ángulo *A* y *-A*]

5. I: sí, pero ahí está mirando un ángulo particular A en el primer cuadrante; ¿sucede lo mismo si el ángulo está en cualquier otro cuadrante?

6. G2C: sí [mueve el punto *P* hacia el segundo cuadrante].

7. I: ¿qué pasa ahí, por ejemplo?

8. G2C: son negativos.

9. I: ¿y entonces?

10. G2C: porque...es que están dependiendo de la misma *x*.

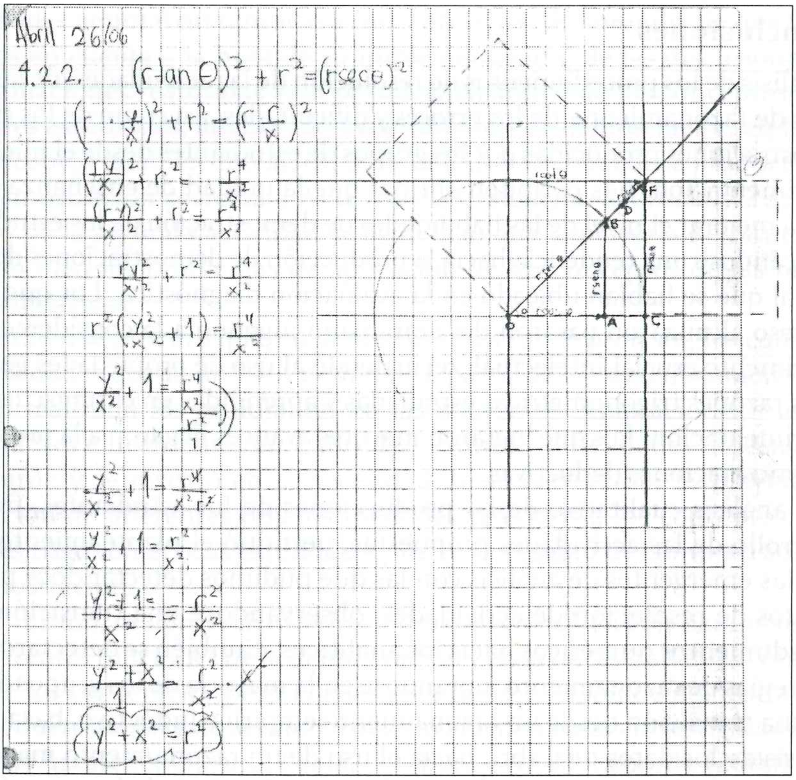
11. I: ¡ah!

12. G2C: Como dependen de la misma *x*, como dependen sólo de *x* y no de *y*, entonces las dos *x*, como el triángulo se pinta hacia *x* [señala los triángulos congruentes que se forman entre las semirrectas de los ángulos *A* y –*A*, el eje *x* y la perpendicular por *P* al eje *x*], siempre la *x* de *A* y –*A* va a ser la misma.

El grupo G2C utiliza un ejemplo de un ángulo *A* cualquiera sin tener en cuenta el valor del ángulo sino las propiedades observadas en él, al ubicarlo inicialmente en el primer cuadrante. Con esta primera exploración del ejemplo aseguran que *cos (A)* y *cos (-A)* son iguales porque en ese caso la *x* es positiva y el radio siempre es positivo (no utilizan el valor específico de *x*), por tanto, las distancias son positivas. Posteriormente, ante la intervención de investigador, analizan la relación en otro cuadrante y verifican que la relación sigue siendo verdadera y utilizan propiedades generales para su justificación. Este ejemplo se diferencia de un experimento crucial porque no utilizan valores específicos, sino que se refieren a generalidades observadas en los ejemplos explorados en Cabri; por tanto, se considera un ejemplo genérico analítico.

Ejemplo 4. *Actividad 4.2.2 Demostrando.* Utiliza lo que acabas de aprender para demostrar, visualmente (en Cabri), geométricamente (con propiedades geométricas) y analíticamente (utilizando las definiciones de las razones para un ángulo en posición normal, las propiedades encontradas en esta actividad y en las anteriores) que: $(r\tan\theta)^2 + r^2 = (r\sec\theta)^2$.

Respuesta de C23:



C23 representa el "lado tangente" y el "lado secante" de un ángulo cualquiera. Esto le recuerda el Teorema de Pitágoras, según lo visto en la actividad 4.1.1, y le da confianza para ver que la conjetura es válida. Luego reemplaza en la identidad planteada por las definiciones de tangente y secante en la circunferencia de radio *r*, utiliza las propiedades de las operaciones de los números reales (producto, cociente, potenciación, simplificación, factor común) y propiedades de una igualdad para llegar a otra igualdad conocida y aceptada en el punto 4.1.1 que identificaba con el Teorema de Pitágoras (los estudiantes, cuando llegaban a esta igualdad, manifestaban que la igualdad $x^2+y^2=r^2$ era válida porque ese es el Teorema de Pitágoras). Vale la pena aclarar que esta respuesta se acepta como una demostración deductiva estructural formal, de acuerdo con el tema y la secuencia de actividades que se desarrollaron y al tiempo que duró la experiencia, en la que fue bastante notorio el paso que se dio de un tratamiento geométrico con la ayuda de Cabri a un tratamiento analítico y algebraico que, de una u otra manera, son indispensables en la demostraciones trigonométricas.

Conclusiones

El análisis de los procedimientos de resolución de las actividades, de las estrategias de razonamiento, de los errores y dificultades, así como de los tipos de demostraciones producidas por los grupos de estudiantes desde el inicio de la experimentación, nos permiten afirmar que la unidad de enseñanza contribuyó a mejorar el nivel de las habilidades de demostración de los estudiantes, destacándose una tendencia hacia la producción de demostraciones de mejor nivel al que se habían ubicado en la evaluación diagnóstica. Los que menos progreso alcanzaron pasaron del empirismo ingenuo a la consideración del experimento crucial intelectual, recurriendo al uso de propiedades generales de las razones trigonométricas estudiadas y aprendidas en el transcurro de la experimentación. Los que lograron mayores avances llegaron a la producción de demostraciones deductivas.

El análisis cualitativo de las producciones de los estudiantes, fruto del desarrollo de las actividades propuestas, permitió el planteamiento de categorías emergentes de análisis con las que pudimos detectar doce procedimientos de resolución de actividades, observándose una transición de los procedimientos numéricos hacia los analíticos. También se detectaron cinco estrategias de razonamiento, notándose en la mayoría de los grupos analizados una transición desde un razonamiento empírico inductivo, basado en el análisis de los datos de Cabri, hacia el uso de un razonamiento más deductivo apoyado fuertemente en la visualización de propiedades geométricas y analíticas.

Los errores y dificultades en su mayoría surgieron en el transcurso del desarrollo de determinada actividad y algunos de ellos muy propios de esta por el tipo de actividad planteada.

Los estudiantes comprendieron la importancia de la demostración en matemáticas y fueron conscientes de sus capacidades y habilidades para la demostración. Igualmente, se dieron cuenta de que mediante la exploración y el análisis de variantes e invariantes en Cabri podían producir sus propias conjeturas y demostrarlas. En este sentido, vimos que nuestra experimentación logró conectar la exploración con la demostración, como lo expresa Hanna (2000), quien reconoce que lo que debemos hacer no es reemplazar la exploración por la demostración, sino hacer uso de ambas, pues son dos actividades independientes que se complementan y refuerzan entre sí: "La exploración conduce al descubrimiento, mientras que la demostración lleva a su confirmación".

Dentro del diseño e implementación de nuestra unidad de enseñanza se tuvo el propósito de incluir la demostración en la clase de matemáticas para la promoción de la comprensión matemática (Hanna, 2000), por lo que las actividades apuntaban también a unos objetivos de aprendizaje que fueron tenidos en cuenta a la hora de su implementación, de las discusiones y de las evaluaciones realizadas –allí se indagaba acerca de los conceptos y propiedades estudiados, además de los problemas de demostración en los que los conceptos también debían estar aprendidos a la hora de la producción de una demostración correcta–. Al revisar la evaluación acumulativa aplicada al final de la segunda actividad se evidenció que la mayoría de estudiantes resolvió bien los problemas de aplicación de los conceptos de las razones trigonométricas.

También se procuró que, en las discusiones con el profesor, los conceptos y propiedades quedaran bien definidos a partir de los descubrimientos que habían realizado los estudiantes en las diferentes exploraciones y análisis de variantes e invariantes en Cabri. Los errores y dificultades detectados se retomaron y se insistió en la necesidad de su corrección. Esto ayudó a la formación de diferentes objetos mentales referidos a los conceptos de las razones trigonométricas estudiadas y de su necesidad de comprensión para la demostración.

Así mismo, se aprovecharon los momentos de discusión para insistir en las diferentes funciones de la demostración y en la necesidad de la comprensión de los conceptos y propiedades para la producción de demostraciones más deductivas. En este sentido, como lo afirman varios investigadores, entre otros Arzarello, Olivero, Paola, y Robutti (2002), Laborde (2000) y Marrades y Gutiérrez (2000), el profesor desempeñó un papel muy importante en la insistencia de conectar las diferentes interacciones y relaciones que se dieron entre los procesos de construcción y demostración, entre las actuaciones con el computador y las justificaciones por medio de argumentos teóricos.

En cuanto al uso de Cabri, nuestra experimentación ratificó lo que ya varias investigaciones han comprobado en cuanto a que los ambientes de geometría dinámica favorecen la interacción entre construir y demostrar, entre actuar con el ordenador y justificar por medio de argumentos teóricos (Laborde, 2000). Vimos que las construcciones en Cabri permitieron conectar las representaciones aritméticas, geométricas, algebraicas y analíticas de los conceptos y propiedades de las razones trigonométricas, siendo evidente una transición de lo numérico hacia lo algebraico y de lo empírico a lo deductivo, con apoyo en la visualización y análisis de propiedades geométricas y analíticas producto de la exploración.

Referencias

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F. y Robutti, O. (1998). *A Model for Analiysing the Transition to Formal Proofs in Geometry.* Proceedings of the 22th PME Conference 2, 24-31.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri enviroments. *Zentralblatt dur Didaktik der Mathematik, 34* (3), 66-72.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils′ practice of school mathematics. En D. Pimm (ed.), *Mathematics, Teachers and Children Hodder & Stoughton* (pp. 216-235). London: Hodder y Stoughton.

Battista, M. T. y Clements, D. H. (1995). Geometry and Proof. *The Mathematics Teacher, 88* (1), 48-54.

Bell, A.W. (1976). A study of pupil's proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics 7* (1), 23-40.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon, 26*, 15-29.

Fiallo, J. (2006). *Enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente Cabri para el desarrollo de las habilidades de demostración.* Memoria de investigación, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Valencia.

Freudenthal, H. (2001). Didactical phenomenology of mathematical structures (L. Puig, Trans.). En E. Sánchez (ed.), *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas* (textos seleccionados) (2ª ed.). México D.F.: Departamento de Matemática Educativa.

Godino, J. D. y Recio, Á. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 19* (3), 405-414.

Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. *Actas del Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM*, 7-10.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mahtematics, 44*, 5-23.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Student's proof schemes: Results from exploratory studies. En A. H. Schoenfeld, J. Kaput, y E. Dubinsky (eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education* (vol. III, pp. 234-283). Providence, EE.UU.: American Mathematical Society.

Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 151-161

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mahtematics, 44*, 25-53.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In A. Gutiérrez y P. Boero (eds.). *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 173-204). Roterdam, Holanda: Sense Publishers.

Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 87-125.