UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Departament de Didàctica de la Matemàtica

Análisis y caracterización de la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de figuras planas

Tesis para optar al Grado de
Doctor en Didáctica de las Matemáticas

Presentada por

ÉLGAR GUALDRÓN PINTO

Codirigida por

Dr. Ángel Gutiérrez Rodríguez

Dr. Joaquín Giménez Rodríguez

Valencia, junio de 2011

Dr. D. Ángel Gutiérrez Rodríguez, profesor de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València, y Dr. D. Joaquín Giménez Rodríguez, profesor de Didáctica de la Matemática de la Universitat de Barcelona,

HACEMOS CONSTAR

1) Que la presente memoria, titulada *Análisis y caracterización de la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de figuras planas*, ha sido realizada bajo nuestra dirección por D. ÉLGAR GUALDRÓN PINTO en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y constituye su tesis para optar al Grado de Doctor en Didáctica de las Matemáticas.

2) Que esta memoria cumple los requisitos exigidos por la legislación vigente, por lo que autorizamos su presentación y defensa en la Universitat de València.

En Valencia, a 1 de junio de 2011.

Fdo.: Dr. Ángel Gutiérrez Rodríguez

Fdo.: Dr. Joaquín Giménez Rodríguez

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El interés por el estudio del proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de semejanza surge al observar, a lo largo de nuestra experiencia docente como profesor de matemáticas de secundaria, las serias dificultades a las que se enfrentan los estudiantes de este nivel educativo al resolver problemas en los que de forma directa o indirecta está implicado dicho concepto. Prácticamente, cualquier profesor de matemáticas de la Educación Media (16-18 años) o de los primeros cursos de carreras de ciencias e ingenierías (18-20 años) puede constatar cómo el desconocimiento o la incomprensión de este concepto dificulta el aprendizaje de otros conceptos matemáticos y procedimientos habituales en los currículos de dichos niveles educativos (Gualdrón, 1997).

Al analizar las publicaciones en las que se presentan estudios dedicados a este tema, se constató que prácticamente todos se han desarrollado fuera de Colombia. Por otra parte, como se pudo comprobar en el trabajo de investigación de doctorado previo (Gualdrón, 2006), en los estudios realizados, de un modo u otro, los investigadores coinciden en que los estudiantes tienen bajos niveles de comprensión de conceptos relacionados con la semejanza, como puede constatarse en los resultados poco favorables obtenidos en diferentes tests que les han aplicado y en considerar como causa fundamental de ello el modo en que se realiza su enseñanza, limitada comúnmente a la noción intuitiva, presentación de condiciones matemáticas básicas para la semejanza y, en algunos casos, criterios para la semejanza de triángulos.

Los Principios planteados por la NCTM (2000) describen las características particulares de una Educación Matemática de calidad. En cuanto al currículo, uno de los bloques es la geometría y una de las nociones básicas que, según ellos, debería ocupar un lugar prominente en el currículo es la proporcionalidad, dentro de la cual se encuentra la semejanza de figuras planas. Con respecto a la enseñanza, plantean, entre otros aspectos, que los profesores deberían realizar a diario la selección y uso de materiales curriculares apropiados, técnicas de enseñanza oportunas y comprometerse en una práctica reflexiva que les permita una continua autoformación. En cuanto al aprendizaje, plantean, entre otros aspectos, que la geometría, más que definiciones, es describir relaciones y razonar. Están de acuerdo con la idea de construir el conocimiento geométrico a través de los niveles de

Van Hiele, desde el pensamiento informal al más formal, reconocen la importancia de la visualización como medio para la construcción y manipulación mental de representaciones de objetos de dos y tres dimensiones y también sugieren una enseñanza que enfatice la interrelación de las ideas matemáticas, lo que permite a los estudiantes no sólo aprender matemáticas sino también ser conscientes de la utilidad de las matemáticas.

Desafortunadamente, al consultar materiales curriculares de diversas editoriales colombianas (correspondientes al grado noveno donde se sugiere enseñar el tema) y de conocer las maneras como muchos colegas enseñan el tema, observamos y constatamos que no se consideran los aspectos que menciona la NCTM como importantes a tener en cuenta para una Educación Matemática de calidad. Por el contrario, comprobamos que existe una tendencia generalizada en la mayoría de estos materiales curriculares y en los profesores de matemáticas a plantear la enseñanza de la semejanza de maneras criticadas por los investigadores.

Como parte de la investigación que hemos realizado, hemos diseñado una secuencia de enseñanza que está organizada mediante la estructura del modelo de Van Hiele y la idea de que las tareas propuestas promuevan el uso de elementos de visualización y se beneficien de las ventajas de su uso. El desarrollo de la secuencia permite que se puedan establecer conexiones con temas relacionados con la semejanza (homotecia, teorema de Thales, escala), lo cual permite al estudiante adquirir más y mejores formas de razonamiento en el tema de estudio.

La constatación del desconocimiento e incomprensión del concepto de semejanza de figuras planas por parte de los estudiantes, la ausencia de propuestas curriculares para la enseñanza del tema que vayan más allá de las típicas y simplistas formas de "ver" la semejanza, la ausencia por parte de los profesores de una reflexión sistemática sobre su propia práctica (como una forma de mejoramiento de su labor académica), y la ausencia de un estudio específico en Colombia, hicieron que consideráramos importante llevar a cabo la investigación que presentamos en esta memoria con el fin de contribuir al estudio del proceso de enseñanza y de aprendizaje de la semejanza de figuras planas.

Nuestra investigación tiene la particularidad de que se ajusta a la realidad educativa colombiana porque plantea un análisis de todo el intervalo de tiempo de un curso de semejanza de figuras planas. También tiene en cuenta la realidad curricular, contextual y administrativa de un centro de enseñanza, ya que analiza a un grupo específico de estudiantes y a su profesor.

Tradicionalmente existe un alto número de docentes de matemáticas que desarrollan la enseñanza de las matemáticas, y en particular de la semejanza, de la manera como les fueron enseñadas a ellos, sin recurrir a otras estrategias que les pueden facilitar establecer caracterizaciones de los cambios que se generan tanto en el profesor como en los alumnos y que redunden en una mejora de la comprensión y el aprendizaje por los estudiantes. Lo anterior permite inferir que es necesario modificar este hábito de los docentes. En esta vía, y con miras a realizar un aporte en este sentido, una parte de este trabajo de tesis tiene como objetivo experimentar una estrategia de modificación de los hábitos de un profesor cuando se encuentra en situación de utilizar una metodología de enseñanza novedosa para él.

Por otra parte, el proceso de enseñanza y aprendizaje de la semejanza en Educación Secundaria ha sido analizado con anterioridad, pero todavía sigue demandando más investigación.

La estrategia específica propuesta en la investigación experimental que presentamos en esta memoria se basa en el diseño e implementación de una práctica instruccional que utilizará un profesor en sus clases. Los objetivos generales de nuestra investigación son analizar:

- Maneras que tienen los profesores de enseñar la semejanza.
- Formas de promover que los profesores de matemáticas se adapten a nuevas propuestas curriculares que incluyan cambios en las metodologías de enseñanza.
- Maneras que tienen los estudiantes de adquirir conocimientos en el tema de la semejanza.

En este contexto, entendemos que el desarrollo profesional del profesor de matemáticas es un factor determinante en su práctica y que el razonamiento de los estudiantes puede explicarse desde diversos puntos de vista. En nuestra investigación nos centramos en analizar y caracterizar la enseñanza y el aprendizaje de la semejanza de figuras planas a estudiantes de noveno grado de la Enseñanza Básica Secundaria colombiana (14-15 años).

En relación a la parte de la investigación que tiene que ver con la actividad del profesor, nos planteamos como objetivo:

O1. Caracterizar elementos del desarrollo profesional del docente ante el proceso de enseñanza/aprendizaje de los estudiantes en situaciones matemáticas escolares del tema de semejanza de figuras planas que son nuevas para él.

Este objetivo se puede descomponer en los siguientes objetivos operativos:

- Reconocer características del desarrollo profesional que permitan situar al docente frente a su posicionamiento y práctica reflexiva profesional respecto al contenido matemático de la semejanza de figuras planas, y a elementos que permiten el análisis de aprendizajes de los estudiantes.
- Describir la situación y posicionamiento inicial del docente en términos de conocimiento profesional ante tareas de enseñanza/aprendizaje de la semejanza de figuras planas.
- Implementar una práctica de acción y formación reflexivas sobre semejanza de figuras planas. Analizar y caracterizar elementos del desarrollo profesional del docente durante la implementación.
- Obtener conclusiones del proceso global de la experimentación de una unidad de enseñanza de semejanza de figuras planas relativas a elementos del desarrollo profesional del docente al término de la unidad.

En relación a la parte de la investigación que tiene que ver con los estudiantes, nos planteamos como objetivos:

O2. Caracterizar los niveles de razonamiento de Van Hiele de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas relacionadas con la semejanza de figuras planas.

Este objetivo se puede descomponer en los siguientes objetivos operativos:

- Caracterizar los niveles de razonamiento de Van Hiele en el contexto del aprendizaje de la semejanza de figuras planas.
- Analizar y caracterizar desde la óptica de los niveles de Van Hiele la evolución del razonamiento de los estudiantes en el contexto del aprendizaje de la semejanza de figuras planas.

O3. Caracterizar el uso que hacen los estudiantes de elementos de visualización cuando se enfrentan a tareas relacionadas con la semejanza de figuras planas.

Este objetivo se puede descomponer en los siguientes objetivos operativos:

- Caracterizar los elementos de visualización en el contexto del aprendizaje de la semejanza de figuras planas.
- Analizar y caracterizar el uso que hacen los estudiantes de elementos de visualización cuando se enfrentan a tareas relacionadas con semejanza de figuras planas.

Los anteriores objetivos están relacionados con el medio que utilizaremos para la consecución de los mismos, una clase de matemáticas, en relación con el cual nos planteamos como objetivo:

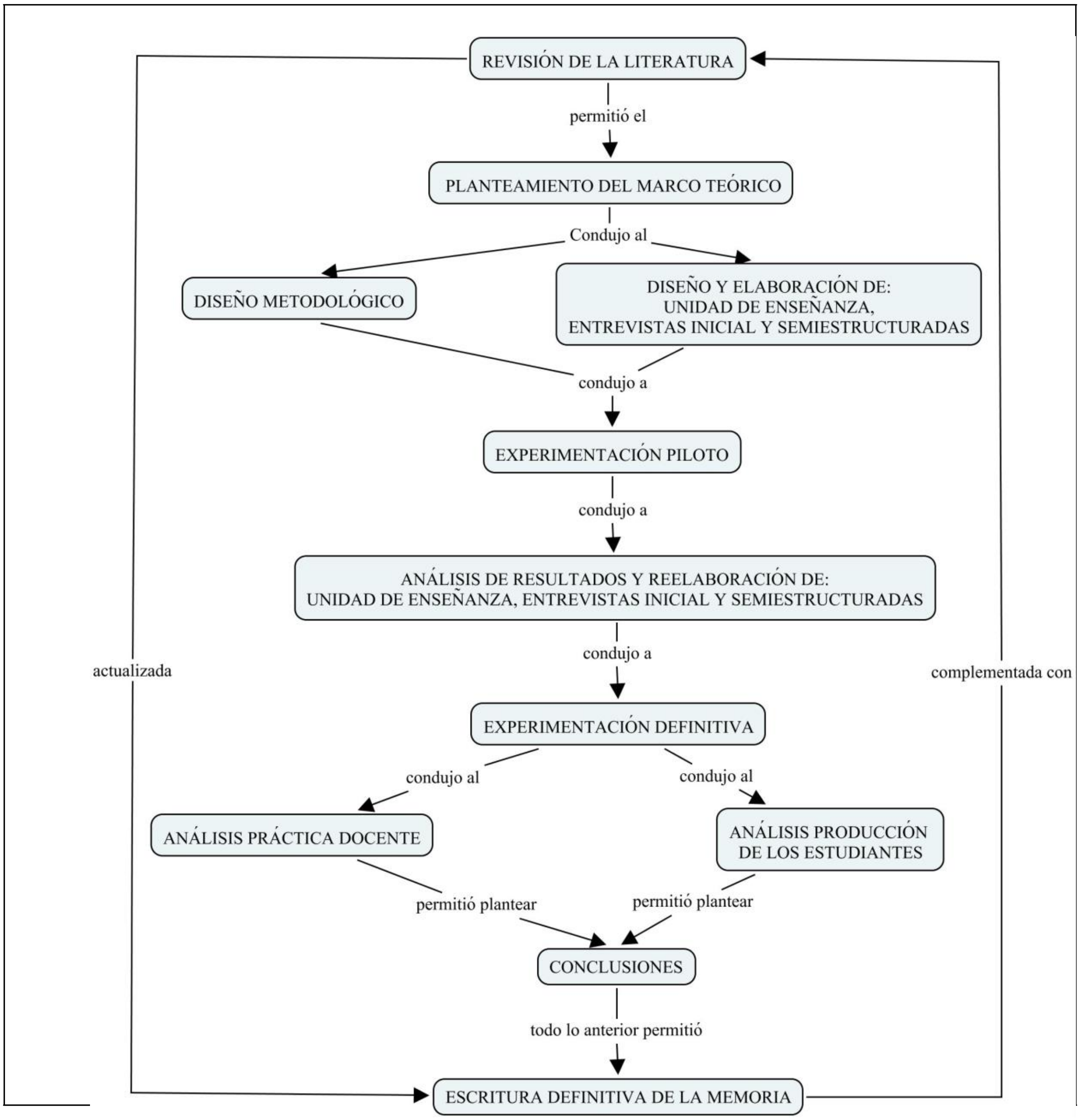
O4. Diseñar e implementar una unidad de enseñanza de la semejanza de figuras planas teniendo en cuenta el modelo de razonamiento de Van Hiele y aspectos relacionados con la visualización.

Este objetivo se puede concretar mediante el siguiente objetivo operativo:

- Diseñar y experimentar una unidad de enseñanza de la semejanza de figuras planas basada en los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje de Van Hiele y en la consideración de las imágenes mentales, los procesos y las habilidades de visualización que puedan usar los estudiantes.

En síntesis, consideramos que los resultados y conclusiones que aporte este estudio y las relaciones y cuestiones que ponga de manifiesto, apoyados y contrastados con los de otros estudios, pueden ayudarnos a construir explicaciones, por una parte, sobre cómo inducir el desarrollo profesional del profesor, y por la otra, sobre la caracterización de los tipos de razonamiento matemático y de los elementos de visualización utilizados por los estudiantes a partir del análisis de sus actuaciones durante la resolución de tareas de semejanza.

Finalmente, con el fin de ofrecer una visión general del contenido de esta memoria, a continuación presentamos un esquema (esquema 1.1) que sintetiza dicho contenido y posteriormente una explicación del esquema mencionado.



Esquema 1.1. Visión general del contenido de la memoria de investigación.

Esta memoria se inicia con una revisión particularizada de la literatura existente sobre los aspectos claves de la misma (capítulo 1). La revisión incluye una variedad temas. Así, en relación con los profesores, se contemplan el contenido del desarrollo profesional del profesor de matemáticas (principalmente del profesor en ejercicio), su conocimiento profesional, las relaciones entre el conocimiento profesional del profesor y su práctica, las relaciones entre su desarrollo profesional y su práctica, y la reflexión del profesor sobre su propia práctica.

En relación con los estudiantes, se revisó la literatura sobre implementación de unidades didácticas (principalmente en el tema de semejanza), caracterizaciones de nivel

Van Hiele para temas matemáticos específicos, uso del modelo de Van Hiele, uso de elementos de visualización en el diseño de unidades didácticas, y caracterizaciones de elementos de visualización en temas matemáticos específicos.

En relación con el tema matemático objeto de estudio, informamos sobre aproximaciones didácticas para la enseñanza de la semejanza de figuras planas, y sobre propuestas curriculares generales y particulares para el tema de estudio (en particular las generadas desde el Ministerio de Educación Nacional de Colombia).

En el capítulo 2 planteamos los referentes teóricos que nos permitirán fundamentar nuestro estudio, es decir, sentar las bases en aspectos tales como la semejanza como objeto de enseñanza y de aprendizaje, el conocimiento profesional y la práctica matemática reflexiva del profesor, el modelo de Van Hiele como organizador de la enseñanza y el aprendizaje de la semejanza, y la presencia de la visualización en el aprendizaje de la semejanza.

Después de haber descrito los que serán nuestros referentes teóricos, planteamos la metodología de investigación (capítulo 3). Aquí incluimos los tipos de metodología empleados, las maneras como se recolectó la información acerca del profesor y de los estudiantes, la descripción de la población y el contexto en el que se llevó a cabo el estudio, así como los criterios y procedimientos de análisis de los datos.

El diseño de la experimentación (capítulo 4) incluye aspectos relacionados con el experimento de enseñanza, con el diseño, observación y análisis del proceso reflexivo del profesor y con la práctica de aprendizaje con los estudiantes; lo anterior incluye ejemplos representativos de cómo se llevó a cabo el análisis de la información obtenida.

En el capítulo 5 presentamos el análisis de la práctica del profesor, mostrando diversos ejemplos que clarifican las conclusiones a que hemos llegado en cada uno de los apartados en relación con la actividad del profesor.

En el capítulo 6 presentamos los análisis de la actividad de los estudiantes desde las ópticas de los niveles de razonamiento matemático de Van Hiele y de la utilización de elementos de visualización espacial. En este capítulo presentamos caracterizaciones de los respectivos modelos teóricos derivadas de la actividad de los estudiantes cuando resolvieron las actividades de la unidad de enseñanza, acompañadas de diversos ejemplos que clarifican las conclusiones a que hemos llegado.

Por último, el capítulo 7 contiene las conclusiones globales observadas, las limitaciones que hemos detectado fruto de un análisis autocrítico del proceso investigativo llevado a cabo y las implicaciones que consideramos este estudio tiene en los campos relacionados con la formación de profesores de matemáticas y las implicaciones que hacen referencia al aprendizaje de la geometría en general y de la semejanza de figuras planas en particular.

El documento concluye con diversos anexos que recogen la unidad de enseñanza completa (anexo 1) y la información derivada de las entrevistas con el profesor (anexos 2 a 10). Hemos decidido incluir en esta memoria los anexos 4 a 10 sólo en formato electrónico debido a su elevado número de páginas.

El trabajo de investigación que presentamos tiene como finalidad contribuir a la tarea de clarificar las maneras de llevar a cabo la enseñanza y el aprendizaje de la semejanza de figuras planas. Queremos hacer énfasis en que nuestra intención es usar el diseño instruccional realizado como medio para determinar los cambios del profesor (en términos de mejoramiento) en su desarrollo profesional y como medio para determinar las formas de razonamiento que usan los estudiantes al realizar las tareas matemáticas que se les proponen.

El estudio aquí presentado es el resultado de varios años de trabajo, iniciándose éste formalmente en el curso escolar 2007-2008, donde se presentó y aprobó el Trabajo de Investigación del doctorado. Después de la aprobación del Proyecto de Tesis Doctoral, se requirieron tres años más para poder elaborar la memoria que presentamos.

CAPÍTULO 1

REVISIÓN DE LA LITERATURA

Los principales objetivos de este capítulo son sintetizar diversas publicaciones que dan cuenta de diferentes investigaciones realizadas hasta el momento sobre la enseñanza y el aprendizaje del concepto de semejanza de figuras planas así como sentar las bases de las decisiones tomadas para la elección del marco definitivamente utilizado. La información presentada en este capítulo es el resultado del análisis de dichas investigaciones que realizamos con el fin de conocer los antecedentes de la problemática en torno al objeto de estudio y, de este modo, delimitar el alcance de nuestra investigación.

Aquí presentamos los resultados y conclusiones de los estudios consultados que nos han parecido más interesantes, por su carácter general y, sobre todo, por su influencia directa en nuestro trabajo. El capítulo está dividido en cinco sesiones a saber: 1) la enseñanza y el aprendizaje de la semejanza, 2) la semejanza en el currículo escolar colombiano, 3) el conocimiento profesional del profesor de matemáticas, 4) el modelo de razonamiento de Van Hiele en el diseño curricular y 5) la visualización como soporte en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

1.1. ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA SEMEJANZA

1.1.1. Aproximación al concepto y algunas dificultades

Iniciamos el apartado explicando las diferentes aproximaciones al concepto de semejanza a partir de los desarrollos de investigación realizados. Según Lemonidis (1991), reconocemos tres momentos históricos en el desarrollo de dicho concepto, que permiten identificar tres aproximaciones al concepto: (a) *visto como relación intrafigural*, (b) *transformación geométrica vista como útil* y (c) *transformación geométrica vista como objeto matemático*.

La interpretación de la semejanza como *relación intrafigural* es un tratamiento en el que se consideran aspectos relativos a configuraciones[1] de tal forma que, aunque se destaca la relación entre elementos de una figura y los correspondientes de su semejante, está ausente toda idea de transformar una figura en otra.

La interpretación de la semejanza como *transformación geométrica vista como útil* se percibe como una aplicación del conjunto de los puntos del plano en él mismo. En este sentido, existe consenso entre los profesores[2] de matemáticas e investigadores en didáctica de las matemáticas acerca de la importancia de considerar la semejanza como una transformación útil en la resolución de muchos problemas de la trigonometría y el cálculo. Según Lemonidis (1991), este enfoque está presente durante el período comprendido entre los siglos XVI y XVIII.

La interpretación de la semejanza como *transformación geométrica vista como objeto matemático* está caracterizada por un tratamiento algebraico en el que se busca la transformación resultante de dos o más transformaciones. Según Escudero (2003), este enfoque está presente en la enseñanza durante la época llamada "matemática moderna".

En nuestro estudio, realizado en grado noveno de la enseñanza secundaria en Colombia, consideramos que es excesivo usar la interpretación de la semejanza como transformación en un grupo de transformaciones. En efecto, el Ministerio de Educación Nacional de Colombia, en los Estándares Básicos (M.E.N., 2003), no propone analizar la *transformación geométrica vista como objeto matemático* como un enfoque para la enseñanza del tema entre otras razones porque "el currículo colombiano [en geometría] no se apoya en la geometría transformacional,…" (Vasco, 1998) como tampoco en otros currículos (Swoboda y Tocki, 2002).

Lemonidis (1991), al analizar la complejidad cognitiva de la noción de homotecia con el objeto de comprender las dificultades de su utilización, identifica en la representación figurativa distintos elementos significativos perceptivamente diferentes:

[1] Entendemos por *configuración* (en el contexto de la semejanza, el teorema de Thales y la homotecia) a una representación gráfica de una situación en la cual aparecen involucradas rectas y/o segmentos de recta de una forma particular y donde, además, dichas rectas o segmentos forman figuras planas. Por ejemplo, cuando decimos "configuración de Thales" hacemos referencia a la representación gráfica típica que se hace de este teorema: un haz de dos o más rectas paralelas cortadas por dos rectas transversales no paralelas entre sí.

[2] Por cuestiones de brevedad, y sin pretender menoscabar el término femenino, en esta memoria de tesis hemos usado los términos profesor y estudiante para referirnos a los géneros masculino y femenino indistintamente.

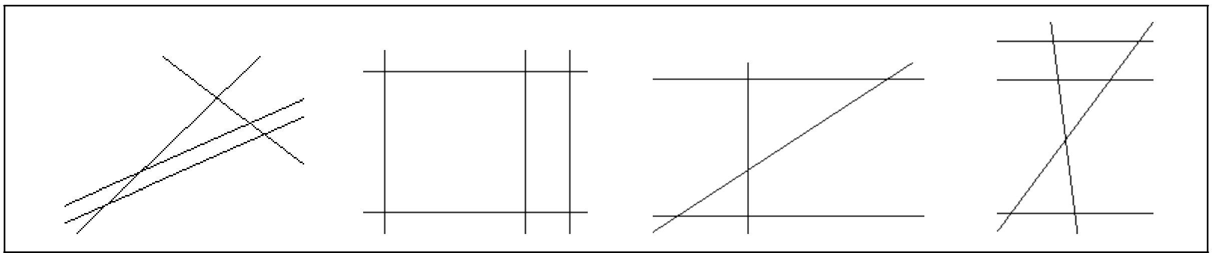
- la posición del centro de homotecia en relación a las figuras,
- la orientación o sentido relativo entre el objeto e imagen, y
- las longitudes de los elementos homólogos.

En la unidad de enseñanza de la semejanza que elaboramos aparecen actividades[3] donde las tareas propuestas contienen diferentes tipos de configuraciones dibujadas en ellas. En otras actividades se sugiere al profesor que plantee a los estudiantes otros tipos de configuraciones diferentes a los que se proponen en las tareas.

Por otra parte, debemos situar el tema de la semejanza tradicionalmente en los textos escolares después del teorema de Thales. En diversos estudios se ha analizado este precedente en cuanto los estudiantes se enfrentan a un formato gráfico con varios elementos relevantes que hay que considerar (Cordier y Cordier, 1991):

- la situación de las rectas paralelas en relación a la intersección de las rectas secantes (horizontal, vertical e inclinada),
- el número de rectas trazadas,
- si la dirección de las rectas paralelas es horizontal o no,
- rectas secantes cortadas por paralelas con el punto de intersección visible o no,
- varias configuraciones del teorema de Thales entremezcladas.

Tener en cuenta dichos elementos minimiza los estereotipos que se presentan en la enseñanza del tema, dado que generalmente éste se enseña usando tres rectas paralelas (dibujadas horizontalmente) cortadas por dos rectas transversales oblicuas. Estos autores también plantean que las situaciones menos representativas (configuraciones menos comunes) son aquellas en las que los estudiantes cometen más errores y/o invierten más tiempo en su resolución. Algunos ejemplos de este tipo de configuraciones se muestran en el cuadro 1.1.

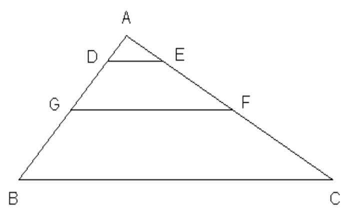


Cuadro 1.1. Configuraciones de Thales poco comunes (Cordier y Cordier, 1991).

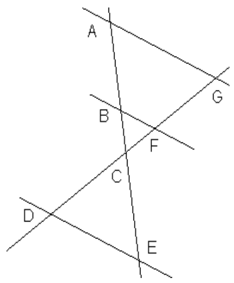
[3] Entendemos *actividad* en el sentido de Llinares (1994, pág. 275) para quien ésta "viene caracterizada por la interacción entre la tarea/situación y los alumnos...".

Por otro lado, los trabajos de Lemonidis (1991) y de Cordier y Cordier (1991) aportan algunas variaciones figurativas de las configuraciones geométricas del teorema de Thales. Están, por ejemplo, las que consideran:

- los triángulos en forma de pico o encajados, es decir, los triángulos están superpuestos (ver cuadro 1.2 a),
- los triángulos están en forma de mariposa, es decir, los triángulos se forman cuando el punto de intersección de las rectas secantes está entre las paralelas (ver cuadro 1.2 b).



(a) Triángulos en forma de pico o encajados

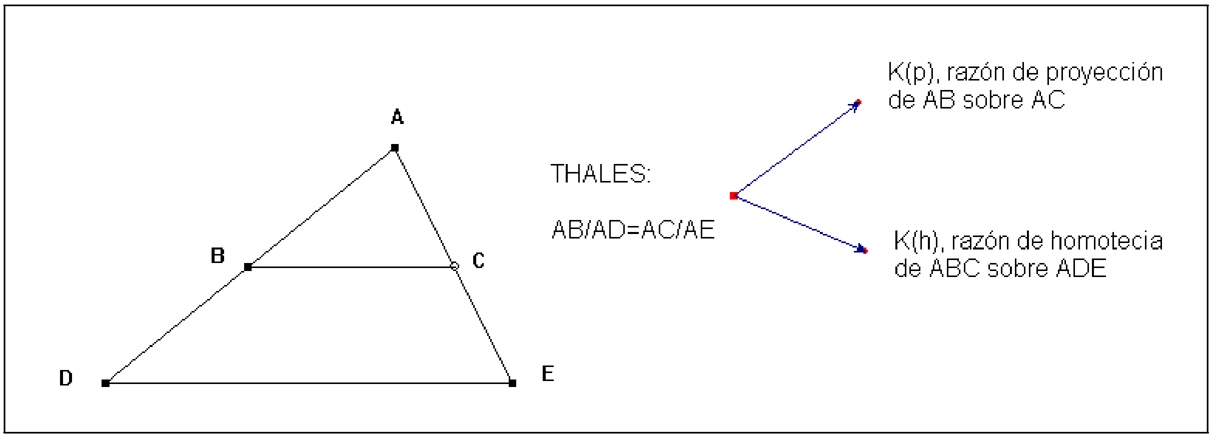


(b) Triángulos en forma de mariposa

Cuadro 1.2. Variaciones figurativas de las configuraciones geométricas del teorema de Thales (Lemonidis, 1991; Cordier y Cordier, 1991).

Algunos estudios han tenido su foco de atención en aquellos aspectos que aparecen interrelacionados en los modos de representación figurativo y simbólico. En este sentido, en relación también con el estudio del teorema de Thales, Duperret (1996; citado en Escudero, 2003) distingue lo que él denomina dos dinámicas, atendiendo a la proporcionalidad asociada al teorema (ver cuadro 1.3):

- El aspecto de *proyección*, que destaca: a) en el modo figurativo, el paso de la recta AB a la AC y, b) en el modo simbólico, las medidas implicadas en la razón obtenida son longitudes sobre las rectas secantes, por lo que podemos hablar de la "razón de proyección" de AB sobre AC (K_p = AC/AB = AE/AD = CE/BD);
- El aspecto de *homotecia*, que destaca: a) en el modo figurativo, el paso del triángulo ABC al ADE y, b) en el modo simbólico, aparecen también implicadas, en la razón obtenida, las medidas sobre los segmentos de paralelas (intervienen las longitudes de los lados de los triángulos), pudiéndose hablar de "razón de homotecia" (K_h = AD/AB = AE/AC = DE/BC).



Cuadro 1.3. Dinámicas atendiendo a la proporcionalidad asociada al teorema de Thales (Duperret, 1996).

Los estudios de Lemonidis (1990, 1991) tienen también uno de sus focos de atención en la articulación entre los aspectos figurativo y simbólico en las situaciones de enseñanza de la homotecia. Este autor, en el análisis de la complejidad cognitiva de la noción de homotecia y con objeto de comprender las dificultades de su utilización, identifica en la representación figurativa, utilizada en diversas tareas escolares, distintos elementos perceptivamente diferentes (posición del centro de homotecia en relación a las dos figuras, la orientación o sentido relativo entre objeto e imagen, las longitudes de los segmentos homólogos, etc.) y estudia los correspondientes elementos en el modo de representación simbólico (signo de la razón de homotecia y su valor absoluto).

Lemonidis recomienda, para la adquisición de la noción de homotecia, la introducción de tareas donde aparezcan los distintos tipos de figuras que pueden darse. También señala para la exploración de las relaciones entre los modos figurativo y simbólico la importancia que tiene estudiar, en primer lugar, de manera separada y, después, de forma articulada ambos modos de representación en las tareas planteadas a los estudiantes; éste es otro aspecto a tener en cuenta en el diseño de las actividades de la unidad de enseñanza.

1.1.2. Sobre proporcionalidad y semejanza

Entre las propiedades métricas que conservan dos figuras semejantes, están la amplitud de ángulos homólogos y la proporcionalidad entre las longitudes de lados correspondientes. Por tanto, en el estudio de la semejanza está implícito el concepto de proporcionalidad entre longitudes. Esto nos conduce a hacer una breve revisión de aquellas investigaciones de razonamiento proporcional que han tratado de precisar los conceptos de razón y/o de proporción.

Algunos estudios de investigación que se han centrado específicamente en el concepto de semejanza reportan resultados aparentemente contradictorios. Por un lado, los investigadores sugieren que los niños de primeros grados de primaria son capaces de reconocer figuras semejantes visualmente (Freudenthal, 1983b; Swoboda y Tocki, 2002), e incluso algunos son capaces de razonar con imágenes a escala (Brink y Streefland, 1979). Por otro lado, cuando se trabaja en tareas de ausencia de un valor que involucran figuras semejantes, cerca del 40% de los estudiantes de 15 años se concentran en el cambio aditivo más que en el cambio multiplicativo de los valores dados al plantear el cálculo del valor que falta (Hart, 1981, 1988).

En otra vía, algunos investigadores han intentado identificar la naturaleza de la dificultad con el concepto de semejanza; por ejemplo Chazan (1988) identificó tres aspectos que influyen en una sólida adquisición del tema: 1) considerar las nociones de semejanza, 2) el razonamiento proporcional, y 3) el desarrollo dimensional como la mayor dificultad en conceptos relacionados con la semejanza para los estudiantes.

Este autor plantea que el uso de la palabra “semejante” podría inducir a error a los estudiantes que tienen fuertes imágenes asociadas con el término establecido en contextos no matemáticos y entendido como “parecido” (Giménez, Vanegas y Badillo 2010). Por ejemplo, algunos estudiantes pueden pensar que todos los rectángulos son semejantes porque son parecidos en su forma y todos tienen cuatro ángulos rectos. Lehrer, Strom y Confrey (2002) y Swoboda y Tocki (2002) sugieren que una manera de aclarar esta situación con los estudiantes es asociar figuras semejantes como una forma especial de clasificación de figuras. En relación a esta sugerencia, en el diseño de las actividades de la unidad de enseñanza tendremos en cuenta que los estudiantes clasifiquen figuras que “tienen la misma forma” y hablar de figuras que simplemente “se parecen” como una forma de enfrentar esta situación.

La mayoría de los hallazgos sobre el concepto de semejanza están incluidos en los estudios de razonamiento proporcional, tema que ha sido ampliamente estudiado. Se ha aprendido mucho acerca de los errores de los estudiantes y las dificultades en la solución de tareas de proporcionalidad (Hart, 1984; Lamon, 1993) así como las variables que afectan la elección por los estudiantes de las estrategias de solución de las tareas (Kaput y West, 1994).

La proporcionalidad se reconoce como uno de los conceptos centrales en la educación básica (en Colombia, desde primer grado hasta noveno), pero existe cierta ambivalencia ya que en un principio suele aparecer como un concepto sencillo y, sin embargo, se muestra como una noción difícil en las aplicaciones, en la resolución de problemas.

La semejanza lleva consigo la ampliación de la idea de proporcionalidad aritmética a situaciones estrictamente geométricas, y por lo tanto, debemos tener en cuenta algunas dificultades y errores posibles del alumnado. El interés por la ampliación de la noción de proporcionalidad a nuevos casos (como la comparación de números naturales, o la introducción de algoritmos de cálculo), que ha motivado en los estudiantes el afán por utilizarlos de manera automática sin comprenderlos, favorece cometer errores en la búsqueda de la solución a tareas de proporcionalidad (Fiol, 1992). Uno de los errores, quizá el más frecuente, es el denominado estrategia aditiva (o error aditivo) el cual ha sido identificado por diferentes investigadores como Piaget, Karplus, Freudenthal, Hart, y muchos otros. Fiol (1992) plantea que al estudiante se le debería situar frente a problemas prácticos, estructurados de manera que deba, inevitablemente, cuestionarse este tipo de error, lo cual puede contribuir a que el estudiante lo evite y responda adecuadamente. En este sentido consideramos que, en general, esta es una estrategia que debe usarse en las aulas de clase con el fin de, por lo menos en parte, disminuir la cantidad de errores que cometen los estudiantes al enfrentarse a las tareas que se les plantean.

En general, en relación a los errores cometidos por los estudiantes, se considera que, si el problema es de estructura, no bastará con la presentación de “contraejemplos” sino que habrá que introducirse en un estudio en profundidad sobre, por ejemplo, lo que significa cometer un error, por qué se produce éste de una determinada manera y no de otra, por qué se comete más en unas tareas que en otras y algunas veces con una frecuencia alta.

Cuando se enfoca la problemática de la proporcionalidad en sentido geométrico, se suelen usar situaciones de semejanza de polígonos. Por ejemplo, el trabajo de Piaget e Inhelder (1948; citado en Fiol, 1992), centrado en el problema de la semejanza de triángulos y rectángulos, se orientó a explorar el paralelismo de los lados como un criterio de semejanza, así como la relación de este criterio con el de la igualdad de los ángulos.

En diversos trabajos se suele tratar la transformación ampliación (o reducción) básicamente considerando los elementos matemáticos que la definen (Hart y otros, 1989): el factor de escala, el centro de ampliación y la configuración inicial. En estudios sobre proporcionalidad y fracciones se observa que al trabajar con ampliaciones y reducciones, los números influyen más de lo que imaginamos (Giménez 1991, Bairral 1996) y debemos tener en cuenta usar diversas magnitudes para generar estrategias visuales y aritméticas.

Por otro lado, desde el enfoque de la proporción aritmética, Lamon (1993), en un intento por identificar variables de las tareas que afectan la dificultad de los problemas e identificar componentes que ayuden a explicar las realizaciones de los estudiantes en este dominio, utiliza cuatro tipos de problemas semánticos para analizar las situaciones problemáticas que pueden ser organizadas por una proporción: *medidas bien definidas, parte-parte-todo*, *conjuntos asociados*, y *ampliaciones y reducciones*[4].

En el trabajo de Gualdrón y Gutiérrez (2006), donde se diseña una unidad de enseñanza de la semejanza de polígonos, se mostraron evidencias de que los estudiantes identificaron lo erróneo de la estrategia aditiva y lograron superarla en la mayoría de los casos. En este mismo trabajo, los autores identificaron la presencia de otras estrategias[5] (correctas y erróneas) en la resolución de las tareas propuestas a los estudiantes, que se habían mencionado anteriormente en otros trabajos[6] (por ejemplo, Hart y otros, 1981; Hart, 1984, 1988): Doble y mitad, construcción progresiva (*building up*), estrategia multiplicativa y métodos ingenuos (*naive*).

En épocas modernas el inicio del interés por el aprendizaje del razonamiento proporcional (sobre el desarrollo de los conceptos de razón y proporción) habría que situarlo en la amplia obra de Piaget y colaboradores quienes situaron la edad de la utilización correcta de la estrategia proporcional entre los 11 y 14 años. A pesar de esto, investigadores como Karplus y Peterson (1970), Karplus, Karplus, Formisano y Paulsen (1977) y Karplus, Adi y Lawson (1981) pusieron en evidencia que gran parte de los estudiantes al final de la secundaria, incluso estudiantes en edad universitaria, no han alcanzado una comprensión adecuada del concepto y, en general, no han logrado adquirir un entendimiento funcional de la proporcionalidad. Pero tener ideas claras sobre el razonamiento proporcional es necesario en la construcción de la idea de semejanza.

La visión del aprendizaje del razonamiento proporcional ha pasado a otro plano, sin dejar de lado los inicios: en un principio se le consideraba como una manifestación de una

[4] Este tipo de problema ya había sido identificado por Freudenthal (1983a), ubicando aquí aquellas tareas que se refieren a escalas o que incluyen cuestiones de ampliación o reducción en transformaciones de semejanza.

[5] Estrategias que pueden ser consultadas en Gualdrón (2006, pág. 6-13).

[6] Como se dijo antes, principalmente en trabajos sobre razonamiento proporcional.

estructura cognitiva global, y posteriormente se ha pasado a considerarlo centrado en el estudio de los procedimientos (con éxito o no) usados en la resolución de diversas tareas. Esto ha conducido al estudio de diversas estrategias, unas correctas o adecuadas y otras no, y de las variables que intervienen en el grado de dificultad de los problemas de proporción (Fiol, 1992).

Fernández (2001) realizó una investigación con estudiantes de 3º a 6º cursos de enseñanza primaria, en relación con el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. En su estudio buscaba, entre otras cosas, identificar cómo actúan los estudiantes al enfrentarse con problemas basados en los conceptos objeto de estudio. En este sentido, uno de sus logros fue la elaboración de un instrumento de análisis y clasificación de actuaciones, herramienta que permite examinar y categorizar las actuaciones de los estudiantes al resolver tareas en las que están involucradas la razón, la proporción o la proporcionalidad.

Otro importante aporte de Fernández (2001) tiene que ver con una descripción de categorías que suponen una mejora sobre las que planteó Hart en sus estudios, pues presentó una categorización más compleja y detallada, las cuales le permitieron hacer un análisis más fino de las respuestas de los estudiantes de la muestra estudiada.

Lesh y otros (1989) recogen y confrontan distintas visiones sobre la naturaleza de las razones, reuniendo los puntos de vista de autores como Vergnaud (1983, 1988) y Schwartz (1988), entre otros.

Para Karplus, Pulos y Stage (1983) la naturaleza esencial de la relación de proporcionalidad hay que entenderla íntimamente relacionada con la comprensión de la función lineal o dentro de la noción más general de isomorfismo de medidas de Vergnaud (1983), afirmación que complementan diciendo: *las teorías que tratan sólo con relaciones aritméticas entre conjuntos particulares de números y no con relaciones entre las variables implicadas no pueden contribuir -o explicar- satisfactoriamente el razonamiento proporcional* (Karplus, Pulos y Stage, 1983, pág. 50).

En este sentido, Vergnaud (1983) define “rate” como la razón entre cantidades de diferentes espacios de medida (por ejemplo 5 m./seg.), mientras que con el término “ratio” se refiere a la razón entre cantidades dentro del mismo espacio de medida (por ejemplo 11 niñas/10 niños). Este mismo tipo de diferenciación la hace Freudenthal (1983a) cuando denomina *razones internas* a las formadas dentro de un mismo sistema -o de la misma magnitud-, y *razones externas* a las formadas entre dos sistemas diferentes -o entre dos magnitudes- En el sentido de Freudenthal, la razón interna es un número y la externa es una magnitud. Freudenthal extiende las nociones de razón interna y externa al caso en que se comparan magnitudes de dos cantidades que están relacionadas conceptualmente, pero no naturalmente pensadas como partes de un mismo todo. Estas comparaciones se dan entre situaciones de escalas y de ampliación y reducción en transformaciones de semejanza. De este modo, la semejanza se puede entender como una transformación *S* entre los puntos del plano, que mantiene la congruencia de figuras. En este sentido, Gualdrón (2006) sugiere que lo anterior es equivalente a decir que *S* mantiene las razones internas (considerando éstas como la razón entre las longitudes de dos segmentos cualesquiera en cada una de las figuras consideradas) y la constancia de las razones externas (siendo cada una de éstas la razón entre la longitud de un segmento y la de su homólogo por la transformación).

1.1.3. La semejanza en libros de texto

Los libros de texto juegan un importante papel en la enseñanza de la matemática, y en particular de la semejanza; esto nos lleva a revisar la literatura que se ha desarrollado en torno al análisis de libros de texto, particularmente en el tópico de semejanza.

Lo, Cox y Mingus (2006) examinaron tres series de libros de texto (de sexto a octavo grados) y encontraron que todos comparten dos objetivos relacionados: 1) desarrollar los conceptos relacionados con la semejanza y 2) aplicar las propiedades de semejanza para resolver problemas. Un importante hallazgo de este estudio es la relevancia que tiene proveer a los estudiantes de diferentes tipos de tareas (de medición, de construcción y de diferenciación) a fin de ayudarles a establecer las condiciones necesarias y suficientes para la definición del concepto. En nuestro estudio hemos utilizado actividades cuyas tareas están inmersas implícita o explícitamente en ellas. Las hemos tipificado como actividades cuyas tareas son de cálculo, de identificación de relaciones, de construcción, y de demostración.

Por otro lado, estos autores plantean que las tareas de medición ayudan a los estudiantes a “ver” la existencia de las propiedades de las partes correspondientes entre las figuras con la misma forma; las tareas de construcción proporcionan a los estudiantes experiencia en la creación de imágenes de la misma forma utilizando las propiedades de las partes correspondientes, mientras que las tareas de diferenciación desarrollan la intuición de los estudiantes en aspectos relacionados con la misma forma y su comprensión de las propiedades de las partes correspondientes. Según Lo, Cox y Mingus (2006), la fuerza de estas conexiones ayudará a los estudiantes a evitar depender excesivamente de las pistas visuales.

Escudero (2005) realizó un estudio que centró la atención en el tratamiento de la semejanza y el teorema de Thales en los libros de texto de matemáticas para estudiantes de edades comprendidas entre 11 y 16 años. Los resultados de este estudio pusieron de manifiesto bastantes diferencias en el tratamiento de la semejanza y su relación con el teorema de Thales tanto entre distintos períodos como dentro de uno mismo. Por otra parte, Escudero señala que la razón de ser del teorema de Thales no es dar vida a otros conceptos, sino que se puede limitar al caso particular del triángulo, siendo su función principal situaciones de ampliación y reducción y de medidas indirectas.

Por su parte, Gualdrón (2006) realizó un análisis de libros de texto de matemáticas para grado 9º (en el caso de Colombia) tendente a indagar la manera cómo se presenta el concepto de semejanza. Los resultados indican los diferentes enfoques que se ha dado al concepto desde hace aproximadamente cuatro décadas; la tendencia a la enseñanza está basada en la demostración de teoremas y propiedades, dejando de lado el enfoque basado en la construcción. Este enfoque fue variando a medida que transcurre el tiempo; las tareas de demostración fueron disminuyendo hasta el punto de desaparecer, mientras que el enfoque basado en construcciones prácticamente siguió ausente. La tendencia de las tres últimas décadas básicamente transcurrió teniendo la definición como base para la resolución de ejercicios de cálculo de medidas ausentes.

En lo que constatamos, los libros de texto han minimizado la enseñanza del concepto a una breve descripción de la definición, a los criterios de semejanza de triángulos, y ejercicios de cálculo de valores desconocidos en figuras semejantes. Pensamos que se puede profundizar en los distintos significados y propiedades.

1.1.4. Propuestas de mejoramiento en la enseñanza y aprendizaje

La revisión de la literatura en este aspecto nos ha permitido verificar la escasez de propuestas tendentes al mejoramiento de la enseñanza y aprendizaje de la semejanza. Por un lado, encontramos libros que incluyen propuestas generales para la enseñanza de la semejanza (Grupo Beta, 1997; Perry y otros, 2003) y, por el otro, reportes de investigación tendentes a ofrecer posibilidades de mejoramiento en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de semejanza (Ray, 2000; Gualdrón y Gutiérrez, 2007; Gualdrón, 2008a, 2008b).

El Grupo Beta (1997) plantea una propuesta orientadora para profesores, en el tema de proporcionalidad geométrica y semejanza, basada en aspectos tales como la concepción de currículo, los fundamentos matemáticos y principios didácticos para su enseñanza y aprendizaje, y un marco legislativo (caso de España). La propuesta tiene en cuenta los modelos curriculares tecnicistas y humanistas para basar la propuesta en un modelo curricular abierto y flexible, que se fundamenta preferentemente en el proceso e incorpora aquello que de positivo tiene el modelo conductista o tecnológico, considerando como muy importante el estudio de las relaciones que se dan en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Por su parte, Perry y otros (2003), basados en dos aspectos que se pueden dar en torno a la enseñanza de la semejanza (construcción de figuras semejantes y definición de criterios para decidir sobre la semejanza de dos figuras), presentan elementos descriptivos de un taller para profesores en ejercicio.

Para Ray (2000) las intuiciones de los estudiantes acerca de las figuras semejantes se basan en sus percepciones y las experiencias vividas, así como la comprensión de la semejanza les provee un inicio para el desarrollo de una comprensión conceptual de la misma. Este mismo autor sugiere que la semejanza de figuras geométricas está inicialmente guiada por orientaciones perceptuales[7] y, además, que la riqueza de ese dominio perceptual provee el terreno propicio para el desarrollo de consideraciones formales que posibilitan a los estudiantes construir nociones más potentes sobre la semejanza.

Gualdrón y Gutiérrez (2007) realizaron una investigación tendente, entre otros aspectos, a analizar los efectos de una intervención instruccional en el concepto de semejanza en estudiantes de edades comprendidas entre 14-16 años. Los hallazgos de este estudio sugieren que los estudiantes lograron superar el primer nivel de razonamiento de Van Hiele y la mayoría de ellos se ubicaron en el segundo nivel. Gualdrón (2008a, 2008b)[8] replanteó la secuencia de enseñanza para la semejanza que habían usado en el estudio

[7] En nuestro estudio, en el diseño de las actividades, hemos tenido en cuenta el modelo de Van Hiele (cuyo primer nivel de razonamiento es el exclusivamente visual) y elementos de visualización matemática. En este sentido, Gualdrón (2006) plantea que el tratamiento visual, como una estrategia para la enseñanza de la semejanza, es altamente positivo en la adquisición del objeto mental (en el sentido de Freudenthal, 1983b) de semejanza.

[8] Referencias que informan de resultados obtenidos en la experimentación piloto que llevamos a cabo para el desarrollo de esta tesis doctoral y la cual nos permitió (como se comentará posteriormente) realizar algunas modificaciones a los instrumentos de recogida de información.

anterior incluyendo los conceptos de homotecia y el teorema de Thales. Los resultados del estudio sugirieron que la conexión entre los temas de semejanza, homotecia y el teorema de Thales fue altamente positiva, dado que las formas de razonamiento de los estudiantes aumentaron e incluyeron más argumentos de tipo matemático en sus respuestas.

En síntesis, este apartado muestra la relativamente poca investigación y propuestas que existen relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje específicos del concepto de semejanza, así como la necesidad de seguir los trabajos iniciados (Gualdrón 2006, 2008a, y 2008b; Gualdrón y Gutiérrez, 2007).

1.2. LA SEMEJANZA EN EL CURRÍCULO ESCOLAR COLOMBIANO

Un aspecto relevante a tener en cuenta en nuestro estudio es el enfoque propuesto actualmente por los entes gubernamentales de Colombia para la enseñanza de la matemática y, en particular, de la semejanza. Si bien este aspecto podría ser un tema de investigación, en este apartado nos centraremos en algunos aspectos que brindan un panorama sucinto acerca de las propuestas curriculares gubernamentales y, además, algunos ejemplos de la manera como algunos libros de texto han enfocado el tema.

1.2.1. El contexto curricular

En Colombia, en las cuatro últimas décadas, se han llevado a cabo tres reformas curriculares impulsadas por el Ministerio de Educación Nacional (M.E.N.), en las que se reflejan cambios en la manera de ver las matemáticas escolares y los procesos de enseñanza y aprendizaje de las mismas. En la década de los 70 se impulsó una reforma que se plasmó en el Decreto 080 de 1974; luego, en la década de los 80 se impulsó una nueva propuesta plasmada en el Decreto 1002 de 1984 denominada la *Renovación Curricular*. Posteriormente, en 1998, apareció la propuesta de los *Lineamientos Curriculares* (M.E.N., 1998) para el área de matemática (derivada de la Ley 115 de 1994) cuya finalidad estaba orientada básicamente a impulsar la construcción autónoma de los currículos escolares y a propiciar un enfoque de resolución de problemas para la enseñanza de la matemática. Los Lineamientos Curriculares posibilitaron la consolidación de proyectos educativos institucionales (PEI) que tuviesen en cuenta necesidades e intereses de la comunidad educativa local y la diversidad cultural; sin embargo, esta propuesta deja un vacío, en el sentido de que si cada institución construía su propio currículo, basados en su propia autonomía y desde su PEI, todos los estudiantes del país no tendrían el derecho y la oportunidad de recibir el mismo nivel de educación.

Como una manera de subsanar, por lo menos en parte, dicho vacío, el M.E.N., a partir del año 2002, ha presentado una serie de documentos -*Estándares Básicos*[9]- que tienen que ver con criterios claros y públicos sobre lo que deben saber los estudiantes colombianos. Nuestro trabajo de investigación se ha desarrollado durante la implementación de esta propuesta (Estándares Básicos de matemáticas). Los Estándares Básicos de matemáticas están organizados en cinco tipos de pensamiento matemático: Pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medidas, pensamiento aleatorio y sistemas de datos y, por último, pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Los Estándares para matemáticas están formulados por grupos de grados, desde el grado primero (6-7 años) hasta el grado undécimo (16-17 años) y en el caso de preescolar (grado obligatorio) se dan orientaciones generales; se plantean Estándares para los grados primero a tercero, cuarto y quinto, sexto y séptimo, octavo y noveno, y décimo y undécimo. El estudio de la semejanza aparece en el documento de Estándares para los grados octavo y noveno (13-15 años), con los siguientes objetivos en relación con el tema:

- *Hacer conjeturas y verificar propiedades de congruencia y semejanza entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.*
- *Aplicar y justificar criterios de congruencia y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas* (M.E.N., 2003).

Como puede notarse, no se sugiere que la semejanza sea abordada como una transformación del plano, lo cual tuvimos en cuenta al momento de diseñar la unidad de enseñanza para nuestro estudio.

1.2.2. Libros de texto en el contexto curricular

Al consultar algunos libros de texto de diversas editoriales colombianas en las cuatro últimas décadas, en lo concerniente a temas geométricos y en particular a la semejanza, se nota que su organización y presentación no ha variado considerablemente. Se sigue un

[9] Cuya consigna es que los estudiantes colombianos aprendan significativamente, es decir, “aprendan lo que tienen que aprender para saber y saber hacer como ciudadanos competentes, que conocen, piensan, analizan y actúan con seguridad” (M.E.N., 2003). En otros términos, mejorar la calidad de la educación en Colombia es meta prioritaria de la política educativa denominada Revolución Educativa.

esquema tradicional de presentación de definiciones, ejemplos, propiedades, teoremas o criterios y ejercicios. Se percibe que, en las sucesivas reformas curriculares, los textos disminuyen la presentación de demostraciones y la cantidad de contenidos relacionados con el tema. En los textos de la reforma que está en curso, sucede lo mismo, excepto porque utilizan términos propios de la reforma. Consideramos que esto no se corresponde con lo que pretende el M.E.N. en su propuesta de Estándares. En general, se comprueba que existe una tendencia casi generalizada en la mayoría de estos textos a plantear la enseñanza de la semejanza de la manera en que se ha criticado por los expertos, es decir, siguiendo el esquema tradicional ya mencionado. Esto permite justificar, por lo menos en parte, la poca comprensión que los estudiantes tienen del tema que nos ocupa.

Comparando textos de 1978, 1988, 1999 y 2004, los cuales desarrollan el tema en 18, 11, 5 y 4 páginas respectivamente, se nota una disminución tanto en el uso de simbología matemática como en la demostración de propiedades y teoremas. Se sigue manteniendo el esquema definición, ejemplos, teoremas (demostración de algunos de ellos) y ejercicios. Estos textos desarrollan la semejanza de manera similar, con la diferencia de que los más recuentes realizan menos demostraciones de teoremas o propiedades.

El texto analizado más reciente es del año 2004[10]. En él se puede percibir la total desaparición de las demostraciones y una desaparición casi total de la simbología matemática. Además, excepto porque se hace una inducción (mediante la ampliación de una figura dada) a la definición de semejanza, se mantiene el esquema de definición, ejemplos, teoremas (sin presentar sus demostraciones) y ejercicios. En este texto, durante el desarrollo del tema se nota una inclinación a ver el tópico como una *transformación geométrica útil*. Además, se nota el uso de términos propios de la reforma curricular (Estándares Básicos) en el que está inmerso, pero, como ya se dijo antes, sigue manteniendo el esquema de presentación de la temática.

En el texto de 2004, en general, se trata la semejanza totalmente desvinculada del teorema de Thales y la homotecia, excepto por que en algunos ejercicios propuestos aparecen triángulos en posición de Thales. En general, en relación a los modos de representación, si tenemos en cuenta los tipos de registros de representación planteados por Duval (1996), se observa que la mayoría de textos usan equilibradamente todos los tipos de registros de lenguaje. Por otro lado, en relación a los tipos de problema y/o ejercicios

[10] Hemos revisado libros de texto hasta el año 2009, pero no contienen cambios significativos en relación al del año 2004 analizado.

descrita por Pfaff (1997-98), este texto plantea problemas de cálculo, estando ausentes los problemas de construcción.

En síntesis, la secuenciación del contenido del tema de semejanza en los libros de texto analizados presenta diversos puntos en común: El teorema de Thales no es la noción de partida, al igual que la homotecia (excepto en el texto de 1978); en todos los casos notamos que los conceptos y teoremas básicos no son clara ni explícitamente conectados, es decir, se nota una completa desvinculación de la semejanza con el teorema de Thales y la homotecia, lo que disminuye su papel posibilitador en el establecimiento de conexiones[11] entre temáticas. Además, se nota en el texto de la década de los 70 una fuerte inclinación a proponer problemas de demostración y poco uso de representaciones gráficas, mientras que en los textos posteriores se minimizan los problemas de demostración y se incrementan los de cálculo, estando ausentes los de construcción.

1.3. EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR

Nuestro trabajo aborda elementos de la caracterización del desarrollo profesional del profesor cuando incorpora una secuencia de estudio en su aula. El análisis de procesos de formación de profesorado de matemáticas de enseñanza secundaria es un tema de interés en la investigación en Educación Matemática (Fennema y Loef, 1992; Ponte y Chapman, 2006; Sowder, 2007). En este campo, una de las ramas que se ha empezado a desarrollar contempla la complementariedad entre una perspectiva cognitiva y rasgos derivados de la actividad profesional (Bromme y Tillema, 1995). Teniendo en cuenta que el estudio del conocimiento profesional del profesorado de matemáticas, como campo de investigación, es amplio y complejo, se plantea la necesidad de estudiarlo ligado a tópicos de contenido matemático específico (Cooney y Wilson, 1993).

Parece claro entonces que es necesario pensar en cómo diseñar y promover estrategias de formación permanente que posibiliten la mejora de los profesores en ejercicio. En este sentido, indagar más sobre cómo se producen cambios, mejoras en el docente parece clave para hacer propuestas bien fundamentadas. Es relevante saber más sobre cómo es ese conocimiento, qué lo caracteriza, cómo se genera, qué estrategias formativas posibilitan su ampliación o mejoramiento (Climent, 2002). Además, como

[11] Lo cual, según lo sugiere la NCTM (2000), permite una mayor comprensión y entendimiento de las temáticas relacionadas y, de esta forma, hacerlas más profundas y más permanentes.

muchos estudios lo indican, una práctica docente más estructurada también posibilita un mejoramiento en la comprensión de los estudiantes; es por ello que adicionalmente analizaremos las actuaciones de los estudiantes frente al desarrollo de una secuencia de enseñanza por el profesor involucrado en el estudio.

Basándonos en la caracterización de Dewey sobre profesores reflexivos, y los aportes posteriores de Smyth y Schön, hemos concentrado la noción de reflexión, práctica profesional, conocimiento y desarrollo profesional. Enmarcamos el estudio del conocimiento profesional del profesor como un elemento a tener en cuenta en el desarrollo profesional del profesor (Eraut, 1994) ya que se considera que éste está asociado a una mejora de las competencias profesionales, lo que significa una asimilación de dicho conocimiento. Desde esta perspectiva debe entenderse la fundamentación teórica que sigue.

Desde esta perspectiva, Leinhardt y sus colaboradores consideran la enseñanza como una "habilidad cognitiva compleja", la cual está basada en dos sistemas básicos del conocimiento del profesor: conocimiento de la lección y conocimiento de la materia que él (o ella) enseña (Leinhardt y Greeno, 1986). Para Leinhardt y sus colaboradores, el primer sistema de conocimiento incluye "las habilidades necesarias para planificar y ejecutar una lección sin problemas y pasar fácilmente desde un segmento a otro, y para explicar claramente el material" (Leinhardt y Smith, 1985). Además, sugieren que las lecciones en las clases de matemáticas no son homogéneas con respecto a la actividad del profesor o de los estudiantes; ellas están segmentadas en partes discernibles, llamadas "segmentos" o "estructura de la actividad" (Stodolsky, 1988; Leinhardt, 1989).

Los profesores de matemáticas, en su práctica cotidiana, se encuentran con una gran variedad de problemas, muchos de ellos de gran complejidad. Basta pensar en problemas como: (a) el fracaso de los estudiantes relativo a los objetivos de aprendizaje curricular, (b) la inadecuación de los planes de estudios en relación con las necesidades de las personas a las que están destinados, (c) los libros de texto y materiales curriculares preparados para los profesores de educación primaria y secundaria son insuficientes, y (d) el que surge de la implementación de un nuevo currículo, lo cual precisa necesariamente de un profesorado con una formación específica que le permita acceder a su puesta en práctica con una nueva mentalidad, más abierta y cercana a los principios que subyacen en su caracterización normativa.

A partir de estos problemas se han identificado una gama de factores que están relacionados, en ocasiones entre sí, y que están organizados mediante clasificaciones y líneas de trabajo, con el fin de facilitar su detección, delimitación y marco teórico.

Por otro lado, somos conscientes de la necesidad de profesionales autónomos y reflexivos, capaces de tomar decisiones, que no se corresponde, precisamente, en la mayoría de los casos, con la formación actual del profesorado de matemáticas. Así mismo, dentro de la comunidad internacional, se admite que en el éxito o fracaso de una reforma educativa, ocupa un papel importante el profesorado, los nuevos currículos se tienen que apoyar en el principio de que no existe desarrollo del currículo sin desarrollo del profesor (Stenhouse, 1984).

En síntesis, creemos que no existen estudios suficientes que aborden la gran cantidad de problemáticas a las que se ve enfrentado un profesor de matemáticas en su práctica. Es necesario fomentar programas de formación que involucren a los profesores de matemáticas, los cuales incluyan alternativas de solución a los diversos problemas a los que se ven enfrentados los profesores.

En este sentido, Ferrández (1989a, 1989b), en el marco que el llama “modelo contextual-crítico de formación de formadores”, propone que la formación del profesorado sea una preparación para entender el desarrollo de un proyecto humano, social y crítico, que implique tanto una realización personal, como un compromiso de incidencia en el medio profesional y social en el que se encuentra.

1.3.1. El conocimiento profesional del profesor y sus componentes

Al identificar y describir el conocimiento del profesor se suelen diferenciar distintos elementos que, más que explicar su organización y estructura, ayudan a concretar su contenido. Una de las consideraciones principales en la determinación del contenido del conocimiento del profesor es su conexión y especificidad respecto de la materia que enseña (Llinares, 1996; Climent, 2002).

En cuanto a los componentes del conocimiento profesional, no todos los autores utilizan los mismos parámetros. En algunos casos, los diferencian en relación a lo que trata ese conocimiento, otros lo hacen en torno a elementos que se refieren a cómo se genera o se organiza. Se han utilizado diferentes conceptos para referirse al conocimiento del profesor: conocimiento del oficio (Brown y McIntyre, 1986); conocimiento práctico personal (Clandinin, 1986); paradigmas funcionales de los profesores (Cröker, 1986);

conocimiento práctico (Elbaz, 1983; Azcárate, 1999); conocimiento profesional y reflexión en la acción (Schön, 1983) (citados en Butt, Raymond y Yamagishi, 1988).

En cuanto a las diferenciaciones en los componentes de sobre qué trata dicho conocimiento, muchos autores toman como referente la categorización de Lee Shulman y sus colaboradores. Shulman (1986) plantea tres categorías en relación a lo que él considera componentes del contenido del conocimiento en la enseñanza:

Conocimiento del contenido de la materia[12]: Incluye comprender las estructuras de la materia, esto es las estructuras substantivas y las sintácticas. Las substantivas son la variedad de formas en que los conceptos básicos y principios básicos de la disciplina están organizados para incorporar sus hechos. La estructura sintáctica de una disciplina es el conjunto de formas en que se establecen la verdad o la falsedad, la validez o invalidez. Para Escudero y Sánchez (2007) este componente incluye el conocimiento de las matemáticas como un objeto de enseñanza y aprendizaje en general y en tópicos específicos en particular; conocimiento de procesos y hechos, conceptos y principios; y las formas en las cuales los profesores conectan y organizan unos conceptos con otros, así como también las formas alternativas de aproximarse a un concepto particular. En este sentido, Buchmann (1984, pág. 37) plantea que "Conocer algo nos permite enseñarlo; y conocer un contenido con profundidad significa estar mentalmente organizado y bien preparado para enseñarlo de una forma general". Por otra parte, la falta de conocimientos del profesor del contenido a enseñar puede afectar el nivel del discurso en clase, así como el tipo de preguntas que los profesores hacen en clase (Carlsen, 1987); y a la forma en que los profesores critican y utilizan libros de texto (Hashweh, 1987).

Conocimiento del contenido pedagógico[13]: Esta categoría considera el conocimiento de las formas de razonar de los estudiantes en tópicos particulares de la materia. Incluye *las formas más útiles de representar las ideas, las poderosas analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones, y demostraciones -en una palabra, las formas de representar y formular el contenido para hacerlo más comprensible a los demás* (Shulman, 1986, pág. 9). En este sentido, McDiarmid, Ball y Anderson (1989) sugieren que los

[12] Traducción de la expresión "Subject Matter Content Knowledge".

[13] Traducción de la expresión *"Pedagogical Content Knowledge"*. En la literatura en castellano se ha usado la expresión *Conocimiento Didáctico del Contenido* para referirse a este componente. Creemos que la traducción que usamos en esta memoria expresa con mayor claridad la especificidad del campo en el que trabajamos.

profesores, bien de forma consciente o inconsciente, adaptan, reconstruyen, reordenan y simplifican el contenido para hacerlo comprensible a los estudiantes. Para Gudmundsdottir y Shulman (1987) el conocimiento didáctico del contenido se constituye a partir del conocimiento del contenido que el profesor posee, así como del conocimiento pedagógico general del conocimiento de los estudiantes. Según Meredith (1995), la conceptualización de conocimiento de contenido pedagógico de Shulman considera al profesor principalmente como un transmisor de contenidos, lo cual no permite otras formas de enseñanza, por ejemplo, que los estudiantes sean aprendices autónomos que construyan, reconstruyan su propia comprensión de la materia a través del trabajo colaborativo en grupos. En este sentido, en nuestro estudio contemplamos que el profesor no sea un transmisor de conocimientos, sino que sea un guiador del desarrollo del razonamiento en los estudiantes a partir de las diferentes actividades que les plantea. En últimas, el profesor usa una metodología por descubrimiento guiado.

<u>Conocimiento curricular</u>[14]: Hace referencia al conocimiento de todo tipo de materiales instruccionales disponibles y válidos para enseñar tópicos específicos, y *el conjunto de características que sirven como indicadores y contraindicadores para el uso de determinados materiales en particulares circunstancias* (Shulman, 1986, pág. 10). En esta categoría se incluye el conocimiento de libros de texto alternativos, software y materiales visuales que puedan ayudar a los estudiantes a representar las ideas matemáticas.

La investigación dirigida por Lee Shulman en la Universidad de Stanford “Desarrollo del Conocimiento en la Enseñanza”[15] (Shulman y Sykes, 1986; Shulman y Grossman, 1988; Wilson, Shulman y Richert, 1987; Shulman, 1987) es uno de los mayores intentos de determinar el “conocimiento base” requerido para la enseñanza; amplía a siete la categorización presentada anteriormente de forma más general: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico, conocimiento del currículum, conocimiento de los estudiantes y del aprendizaje, conocimiento del contexto[16], conocimiento didáctico del contenido, y conocimiento de filosofía educativa, fines, y objetivos. Esta investigación ha

---

[14] Traducción de la expresión *“Curricular Knowledge”*.

[15] Traducción de la expresión *“Knowledge Growth in Teaching”*.

[16] Según Leinhardt (1992) los profesores han de adaptar su conocimiento de la materia a las condiciones particulares de la escuela y de los estudiantes inmersos en ella.

influido de manera importante en otras que han tratado de conceptualizar y analizar el conocimiento de los profesores, por ejemplo, Grossman (1990), Reynolds (1991, 1992).

Los planteamientos (el modelo) de Shulman en relación al conocimiento profesional han recibido numerosas críticas por parte de estudiosos en el tema, catalogándolas, entre otras cosas, de academicistas. Sin embargo, y a pesar de la ampliación del modelo en aspectos que tienen en cuenta la práctica docente, su definición del conocimiento del contenido y didáctico del contenido, aún sigue teniendo un enfoque académico, que además recoge más *saber* que *saber hacer*. Gimeno y Pérez (1993) destacan el carácter academicista como uno de los inconvenientes del modelo de Shulman; argumentan esta afirmación planteando que éste está construido desde la investigación científica, tanto de las disciplinas como de las didácticas específicas, dejando en un lugar secundario el conocimiento resultado de la experiencia práctica. Nuestra visión, en relación a este asunto, es la misma que propone Gimeno y Pérez, consideramos de vital importancia el conocimiento que se adquiere de la práctica.

1.3.2. Sobre creencias, concepciones, reflexión y conocimiento profesional

En lo expresado hasta el momento, hemos esbozado algunas ideas en relación a diferentes acercamientos que distintos autores han sugerido al respecto de los componentes del conocimiento profesional del profesor. En lo que sigue presentamos una breve[17] reseña desde diversos estudios (desde la pedagogía general y la Educación Matemática) que han tratado la relación entre creencias, concepciones y conocimiento en los profesores y, de manera particular.

En el campo de la educación, las creencias, concepciones y los sistemas de creencias han sido objeto de estudio (Nespor, 1987; Pajares, 1992). En el campo de la Educación Matemática este interés también se ha puesto de relieve (Thompson, 1992; Gil y Rico, 2003). Sin embargo, y a pesar de los diversos estudios, no ha habido consenso en, por ejemplo, la definición de creencias y en la relación entre creencias y conocimiento.

1.3.2.1. De las creencias a la reflexión

Una creencia no se mantiene aislada, por eso se habla siempre de sistemas de creencias. Una definición clásica de sistema de creencias es la de Rokeach (1968): “Una

[17] El estudio detallado de las creencias y concepciones desborda el objetivo de nuestra investigación, no queriendo dar a entender que desconocemos su importancia en las relaciones que se derivan de su uso en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

forma organizada psicológicamente, aunque no necesariamente lógica, de todas y cada una de las incontables creencias personales sobre la realidad física y moral”. El interés por conocer la estructura de los sistemas de creencias de los profesores en formación y en ejercicio radica en el hecho de que inciden en sus comportamientos, nos ayudan a explicarlos y dan pistas para tratar de cambiarlos. Creencias y práctica forman un círculo difícil de romper, pero afortunadamente los cambios en las prácticas de clase parece que ayudan a modificarlas.

Las creencias pueden tener un fuerte impacto en la forma que los estudiantes aprenden las matemáticas y pueden ser un obstáculo (Pehkonen y Törner, 1996). Los alumnos que tienen unas creencias negativas y rígidas de las matemáticas y su aprendizaje, pueden convertirse en aprendices pasivos, que valoran más la memoria que la comprensión.

Dentro de las creencias sobre la materia específica se podría distinguir entre las creencias que influencian lo que un profesor elige para enseñar y la forma de enseñarlo, y por otra parte lo que denominan “orientaciones” hacia la materia específica, incluiría las concepciones sobre lo que es importante conocer y cómo uno lo conoce (otros autores lo han denominado “conocimiento sobre las matemáticas”, Ball, 2000). En esta misma línea, pensando en las creencias de los profesores como parte de su conocimiento, Ponte (1994) argumenta que son una parte relativamente menos elaborada, y el no exigirles unas ciertas condiciones de validez y consistencia, las hace bastante disputables y menos dinámicas que otros aspectos del conocimiento. Por tanto, según este autor, en aquellos aspectos del conocimiento donde la verificación es difícil, las creencias juegan un papel fundamental. No es el objetivo de este trabajo analizar el papel de mediación que ocupan los sistemas de creencias del profesor en su práctica profesional.

De acuerdo con Llinares (1996), “las dificultades en separar conocimiento y creencias en las investigaciones cognitivas sobre el conocimiento de profesor ha conllevado al uso de términos como concepciones o el uso del término conocimiento pero englobando todo un rango de cogniciones del profesor que incluye creencias, conocimiento desde la experiencia, etc.” En este sentido, Grossman, Wilson y Shulman (1989) sugieren una distinción entre creencias y conocimiento. Señalan que las creencias se basan principalmente en evaluaciones afectivas y personales; además, agregan que las creencias son más discutibles que el conocimiento, éstas están más abiertas al debate.

Las creencias pueden ser mantenidas con diversos grados de convicción y no son consensuadas, mientras que el conocimiento debe satisfacer algún criterio de validez

(Thompson, 1992). En este sentido, en relación al criterio de validez usado por Thompson (en la diferenciación entre conocimiento y creencias), Ponte (1992) sugiere que puede ser más operativo considerar una perspectiva en la que el conocimiento es visto en términos de una correspondencia a una práctica social.

Otro aspecto de interés para nuestra investigación es la reflexión sobre la práctica, la cual puede considerarse como promotora y favorecedora de desarrollo profesional del profesor.

En el campo de la educación se considera a Dewey (1989) como el precursor en el uso del término para referirse a una cualidad del profesor. La reflexión para Dewey es un proceso de resolución de conflictos, de dudas, a la vez que una actitud de disposición a revisar la actuación. Para Dewey el principal propósito de los cursos de formación de profesores debe ser ayudarlos a reflexionar sobre su práctica profesional (Mewborn, 1999).

Shulman (1987) sugiere que junto con el aula de clase como sitio para el aprendizaje de los profesores, la reflexión es un proceso esencial en el aprendizaje y central en su capacidad de razonamiento pedagógico. La reflexión está en el corazón del aprendizaje y sólo promocionándola se podrán asegurar cambios positivos y reorientaciones a la luz de la experiencia pero con el filtro de la reflexión profesional (evaluando, revisando, autocriticando actuaciones, etc.). Llegar a ser "un profesor ideal" (Shulman y Shulman, 2004) o bien un profesor excelente (AAMT, 2002) es un proceso a largo plazo que implica una gestión personal y voluntaria del proceso, pero en la que deben intervenir de manera decisiva instituciones y personas, en un marco social determinado.

De acuerdo con Schön (1983, 1992), el profesional reflexivo (que, como el profesor, se enfrenta a situaciones que son inciertas, inestables, singulares, y en las que a veces aparecen conflictos de valor) reflexiona *para*, pero también *en* y *sobre* su acción, para la resolución de problemas en las situaciones prácticas. Esta reflexión es la que colabora en su desarrollo, permitiéndole aprender desde su propia práctica (Flores, 2004). La reflexión *en* la acción ocurre mientras una acción se realiza y la reflexión *sobre* la acción ocurre cuando se revisa la acción desde afuera de su escenario (Schön, 1983). Ha habido críticas a la noción de reflexión *en* la acción; por ejemplo, McNamara (1990) y Eraut (1995) plantean que es imposible realizar una reflexión eficaz desde la práctica porque no hay tiempo suficiente y oportunidad a nivel consciente para desarrollarla.

Van Manen (1998), al intentar responder uno de los interrogantes planteados por Hatton y Smith (1995) en relación a los marcos temporales en que tiene lugar la reflexión, distingue tipos de reflexión, según el momento en que se realiza y la intención de la misma: *reflexión anticipativa* (para la acción), *reflexión activa o interactiva* (en la acción) y la *reflexión sobre los recuerdos* (sobre la acción). En el caso particular de nuestro estudio, las reflexiones anticipativas y sobre los recuerdos han sido tenidas en cuenta. Nuestro modelo de análisis de la actividad del profesor incluye obtener información a partir de entrevistas semiestructuradas antes y después de cada sesión de clase. Dichas entrevistas semiestructuradas han sido elaboradas teniendo en cuenta el ciclo reflexivo de Smyth, el cual será comentado más adelante en este mismo apartado.

En diversas ocasiones Smyth (por ejemplo, Smyth, 1991) ha planteado la necesidad de trabajar críticamente con los profesores, de tal forma que la capacidad de cuestionamiento que se espera que adquieran siga una lógica de concientización progresiva. Smyth sugiere dos aspectos centrales para la consecución de dicha concientización por parte de los profesores; primero, favorecer un diálogo mediante el cual los profesores sean capaces de reconocer y analizar aquellos factores que limitan su actuación y, segundo, darles la oportunidad de que se vean a sí mismos como agentes potencialmente activos y comprometidos en cambiar las situaciones dominantes que los reducen a meros técnicos realizando tareas ajenas.

Para concretar un modelo de reflexividad sobre la acción, Smyth (1991) ha sintetizado y organizado su modelo en cuatro tipos de acción (descripción, inspiración, confrontación y reconstrucción) docente en relación a la enseñanza y que corresponden a una serie de preguntas a las que debemos intentar responder cuando estamos inmersos en un programa de perfeccionamiento docente. El *ciclo reflexivo de Smyth* comienza con la detección de un problema o de una práctica, y termina en un proceso de reconstrucción de la práctica:

1. *Descripción*: ¿qué es lo que hago? En esta fase se caracteriza la práctica.
2. *Inspiración*: ¿cuál es el sentido de enseñanza que imparto? Aquí se tratarán de expresar las teorías locales que determinan la práctica.
3. *Confrontación*: ¿cómo llegué a ser de esta forma? Se analiza la práctica y las bases que la sustentan, percibiendo otras formas de concebir la práctica.
4. *Reconstrucción*: ¿cómo podría hacer las cosas de otra manera? Aquí se define un nuevo plan de acción, como resultado de las fases anteriores.

Las principales limitaciones de una estrategia de formación están intrínsecamente unidas a nuestras prácticas políticas, históricas y teóricas como profesores, y a nuestra propia capacidad para superarlas (Smyth, 1991).

Por otro lado, la práctica reflexiva ha sido vinculada con el concepto de colaboración (Day, 1999). Las discusiones y diálogos entre profesores con objetivos comunes son necesarias para pasar de la rutina a la práctica reflexiva en la escuela, y muchos investigadores han identificado los peligros de las culturas parroquiales que inhiben a las escuelas de oportunidades para reorientar y renovar el pensamiento y la práctica, por lo tanto de cualquier progreso (Hargreaves, 1994; Day, 1995, 1997). Sería deseable, además, la vinculación de las facultades de educación de las universidades (con tutores conocedores del tema) para que participen, junto con las escuelas, en procesos de formación del profesorado en programas que incluyan la reflexión como parte importante en el desarrollo profesoral.

El conocimiento profesional se genera en el uso del conocimiento orientado a la actividad en situaciones concretas de la enseñanza, siendo una construcción personal en el sentido de que el uso de dicho conocimiento, por parte del profesorado, para gestionar sus situaciones de enseñanza de las matemáticas y reflexión posterior, genera un nuevo conocimiento.

1.3.2.2. Desde la Educación Matemática

A continuación, presentamos los resultados de algunas investigaciones que se relacionan con el conocimiento profesional del profesor de matemáticas y con la reflexión sobre la práctica, asuntos estos que nos han permitido tener mayor claridad sobre la manera de cómo caracterizar la actividad del profesor en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Escudero y Sánchez (1999) estudiaron la relación entre el conocimiento profesional de dos profesores[18] de matemáticas de secundaria y su enseñanza práctica, cuando ellos enseñan el tema de semejanza geométrica. Para el experimento, los profesores realizaron su actividad en cursos de estudiantes de 3º y 4º de Enseñanza Secundaria (14-15 años y 15-16 años respectivamente). Entre otros medios de recogida de información usaron entrevistas (entrevista para la planificación, entrevista antes y después de cada sesión de clase, y entrevista final). La metodología usada les permitió observar diferentes aspectos del manejo que los profesores dan al contenido matemático, tales como: uso de un ejemplo para introducir una definición, una propiedad, un teorema, con la constante intervención del profesor y los estudiantes; explicación a través de un ejemplo para alcanzar la definición, una propiedad, etc. con una mínima o nula intervención de los estudiantes,

[18] Identificados como “expertos” por sus compañeros de labor, y los cuales trabajaron en el proyecto de forma voluntaria.

entre otros. Escudero y Sánchez encontraron, además, que la "acción" desarrollada en las clases no es un proceso lineal. Esto no implica, según estas investigadoras, la evaluación de la calidad de la planificación mediante la comparación de lo planificado y lo ejecutado, sino el estudio de los motivos por los cuales los nuevos contenidos aparecen, cómo el profesor maneja esto y los argumentos aducidos por él.

Para finalizar, estas investigadoras notaron en los casos estudiados cómo los diferentes sistemas de conocimiento de los profesores están interconectados e integrados, y la fuerte interrelación entre los dominios del conocimiento y la práctica docente. También, observaron cómo la toma de decisiones en la acción, en relación con el contenido matemático, es una de las habilidades básicas para un profesor, con algunas características de la integración de los distintos ámbitos. Este resultado plantea una situación concordante con lo sugerido por García (1997, pág. 212) cuando plantea que el conocimiento profesional "es una construcción personal producto de la elaboración cognitiva personal en la acción profesional que lleva a una integración cognitiva de diferentes dominios de conocimiento".

Por otra parte, Britt, Irwin y Ritchie (2001) emprendieron un programa de desarrollo profesional para 18 profesores (8 de Middle School[19] y 10 de High School[20]) por un período de dos años. El objeto de este programa fue conocer los efectos de dicho programa sobre sus creencias y prácticas acerca de la enseñanza de las matemáticas y si el cambio en las creencias y prácticas pueden dar lugar a una mejor comprensión de sus estudiantes. Los resultados de esta investigación sugieren que se generó un cambio positivo en las prácticas de los docentes, sus creencias, sus reflexiones y en los logros de los estudiantes, particularmente en los profesores experimentados de High School que fueron quienes usaron más las herramientas que les ofreció el programa, al contrario sucedió con los profesores de Middle School, quienes las usaron menos.

Otros trabajos de investigación que hacen referencia a programas de desarrollo profesional para profesores de primaria en ejercicio son los de Scherer y Steinbring (2006), Ticha y Hospesova (2006) y Wood (2001). Estos estudios se centran en la autorreflexión y reflexión sistemática conjunta entre profesores e investigadores sobre su propia práctica. Los resultados de estos estudios sugieren que dichos programas fueron un importante aporte al desarrollo profesional de los profesores.

---

[19] Constituida por los niveles 6, 7 y 8.

[20] Constituida por los niveles 9 a 12.

Los programas de formación de profesores en servicio es una actividad muy compleja y es más que incrementar el conocimiento matemático de los profesores (Cooney y Krainer, 1996); estos autores sugieren la necesidad de enfatizar la componente reflexiva en dichos programas en los cuales los profesores explícitamente consideren las implicaciones de sus propias experiencias de aprendizaje para su enseñanza y para la creación de contextos en los que la pedagogía y el contenido se entrelazan en una reforma propicia para su desarrollo profesional.

En otra vía, Burgués y Giménez (2007) presentaron parte de los resultados de una investigación sobre la formación inicial de matemáticas para profesores de primaria. El reporte de estos investigadores centra la atención en las tareas profesionales en las que el futuro profesor analiza planificaciones de otros en cuanto organizaciones del contenido. Su especial interés fue ver cómo los futuros profesores pueden aprender a establecer razonamientos profesionales a partir de un trabajo orientado por un planteamiento realista de la formación; en otras palabras, buscaron establecer patrones de aprendizaje-formación docente así como significados que justifiquen dicho proceso de formación. Entre los resultados encontrados por Burgués y Giménez se encuentra que las dificultades para superar la visión naïf de que aprender a elaborar una secuencia de aprendizaje, a partir de secuencias ajenas, no implica reconocer que "si alguien lo ha publicado, debe estar bien". Por otro lado, encontraron que las estudiantes conformistas y reflexivas son las que muestran mayor indefinición sobre cuáles pueden ser sus intenciones educativas.

Por su lado, Flores (1998) diseñó una parte de un curso de formación práctica de profesores de matemáticas de secundaria. El objetivo que se pretendía con esta experiencia formativa es que los estudiantes reflexionaran de manera sistemática sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas, partiendo para ello de cuestiones que habían surgido durante las prácticas, y que los propios estudiantes seleccionaron. Los resultados (preliminares) de este estudio han permitido al autor plantearse una investigación centrada en la experiencia, en la que espera poder analizar los procesos que se llevan a cabo en cada etapa del ciclo de Smyth, para la actuación reflexiva de los estudiantes, y así favorecer la profesionalización de la profesión docente.

1.3.3. El desarrollo profesional del profesor de matemáticas

Para Ponte (1999), el desarrollo profesional corresponde a un proceso "de crecimiento de su competencia en términos de prácticas lectivas y no lectivas, en el autocontrol de su actividad como educador y como elemento activo en su organización escolar. El desarrollo profesional respecto a los aspectos ligados a la didáctica y también a la acción educativa general, a los aspectos personales y relacionales y de interacción con otros profesores y con la comunidad extra-escolar" (pág.44).

El desarrollo profesional implica siempre algún aprendizaje, y en consecuencia algún cambio. Según Christiansen y Walter (1986), el aprendizaje del profesor sobre la enseñanza se da cuando adquiere la capacidad de ver y hacer cosas que no hacía antes. El cambio en el docente sólo se da si el profesor está dispuesto a cambiar (Fullan, 1993; Hargreaves, 1994; Thompson 1992). Nadie cambia a nadie, el cambio es un fenómeno interior, el cambio no se puede forzar (Day, 1999). Para que se dé, debe ser deseado por el sujeto (Burgués 2005). Es necesario que el profesor esté dispuesto a correr riesgos implícitos en las innovaciones educativas y a afrontar las inseguridades de los nuevos planteamientos. Esto ya constituye un elemento importante en el inicio del proceso de aprender a enseñar.

También Kelchtermans (1995) destaca el papel de la experiencia y de la reflexión, afirmando que un enseñante legitima una teoría cuando ve que le funciona en la práctica. La reflexión que hace sobre su acción práctica en el aula, es esencial para que haya desarrollo profesional. Según Day (1999) los adultos aprenden cuando se les ofrecen oportunidades para reflejar sus experiencias y aprenden de la práctica sacando partido de las situaciones que combinan acción y reflexión. El cambio es un proceso que lleva su tiempo y que implica la alteración de las creencias, conocimientos y formas de trabajar del profesor.

El desarrollo profesional está ligado al nivel de competencia en las diversas clases de conocimiento que sustentan la preparación para enseñar y sus consecuencias en la clase. El debate sobre el papel del conocimiento de la materia a enseñar se extiende por todo el siglo XX, desde Dewey hasta Shulman (1986), en que ya se distingue entre conocimiento de la materia y conocimiento de cómo enseñarla. En los últimos años el conocimiento de la materia ha sido bien documentado y sus carencias se han relacionado con una menor capacidad de enseñarla (Wragg, Bennett y Carre 1989; Simon y Brown, 1996; Rowland, Martyn, Barber y Heal, 2001).

Para Burgués (2005) el desarrollo profesional es *un conjunto de trayectorias de formación que se integran a través de tres tipos de contenidos: epistemológico-matemático, estratégico-didáctico y actitudinal*. Por esta misma vía, Burgués y Giménez (2007) sugieren, para el componente matemático-epistemológico del desarrollo profesional, realizar un análisis del contenido de los libros de texto de los estudiantes; para el componente actitudinal, usar la tipología de profesores al considerar las matemáticas como práctica social: conformista, reflexivo e interrogativo (Burgués, 2005); y para el componente estratégico-didáctico sugieren tener en cuenta la estructuración de las declaraciones obtenidas con base a tres grandes categorías: aprendizaje, instrucción y procesos interactivos.

1.3.4. La formación docente y análisis de la práctica profesional

En los últimos años, el análisis de la práctica del profesor ha generado bastante interés entre la comunidad de educadores matemáticos, quienes lo han considerado como un aspecto clave de investigación (Escudero, 2003; Barbé, Bosh, Espinoza y Gascón, 2005; Martin, Soucy, Wallace y Dindyal, 2005; Llinares y Krainer, 2006; Franke, Kazemi y Battey, 2007).

Se encuentran estudios que han centrado su atención en el planteamiento de estructuras conceptuales para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas (Artzt, 1999; Gavilán, García y Llinares, 2007; Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz, 2007). Estos tres estudios, en el planteamiento de la estructura, tienen en común el uso de la reflexión sobre la práctica por parte del profesor, y difieren en los elementos teóricos usados para llevar a cabo el análisis de la información. Por ejemplo, Artzt (1999) utiliza la noción de “reflexión pre-lección y post-lección”, mientras Gavilán y otros (2007) utilizan la noción de “modelación de mecanismos de construcción de conocimiento”.

Artzt (1999)[21] plantea su estructura basándose en la idea de que el conocimiento del profesor (conocimiento de la materia, conocimiento de estrategias pedagógicas, y conocimiento de los estudiantes), las creencias y metas afectan directamente su práctica instruccional. Además, plantea que las etapas preactiva, interactiva, y postactiva en la enseñanza juegan un importante papel en la estructuración de una práctica instruccional del profesor. Esta autora usó las actividades reflexivas prelección y postlección para facilitar el análisis de la cognición y práctica instruccional (de los profesores involucrados) antes, durante y después de la lección. Específicamente, antes de enseñar sus lecciones, además de escribir los planes de lección, a los profesores se les pidió que escribieran sus ideas e intereses al respecto. Después de la lección, a los profesores se les comprometió en una

[21] Este estudio fue realizado con profesores en formación.

sesión de discusión con dos expertos, en la cual ellos presentaban sus impresiones y análisis de la lección; al final de esta etapa, los expertos planteaban sus impresiones de la lección y daban sugerencias de tal manera que el profesor mejorara en las futuras lecciones. Dentro de los resultados del estudio, Artzt (1999) encontró que la estructura planteada sirvió como una base conceptual para la estructuración que permite a los profesores relacionar sus pensamientos y acciones.

Por su parte, Gavilán y otros (2007) se proponen comprender la práctica del profesor de matemáticas desde la perspectiva sociocultural, la cual asume que los instrumentos utilizados y la forma en que se utilizan en la práctica del profesor de matemáticas influyen en el tipo de comprensión matemática y creencias de sus estudiantes. Desde esta perspectiva, estos autores plantean, como una manera de comprender la práctica del profesor, centrar la atención en dos aspectos: el primero, identificar los instrumentos de la práctica que el profesor emplea en la realización/planificación de sus tareas, es decir, el tipo de problemas presentados a los estudiantes y cómo están organizados, y los modos de representación (sistemas de símbolos); y segundo, caracterizar cómo el profesor usa dichos instrumentos (fase de gestión), indicando cuál es el propósito de su uso, es decir, su comprensión del significado de dichos instrumentos. Estos autores utilizaron para el análisis de la práctica del profesor la idea de "modelación de un mecanismo de construcción". Esta idea es una forma de dar significado, desde la perspectiva de los investigadores, a las acciones del profesor, a sus decisiones sobre qué problemas utilizar y a cómo gestiona el contenido matemático en el aula y a las justificaciones que proporciona. Además, usaron la noción de viñeta (Gavilán, 2005) como una manera de organizar un informe sobre aspectos de la práctica del profesor que integra información de diferentes fuentes, transcripciones de las sesiones de clase, los informes elaborados en el análisis descriptivo, la unidad didáctica, y la descripción e interpretación de lo que sucede en los segmentos de enseñanza. En las viñetas además se integran inferencias realizadas por los investigadores para mostrar qué interpretaciones se han realizado y su vinculación con la evidencia empírica. Dentro de los resultados del estudio, Gavilán y otros, encontraron que la herramienta teórica utilizada les permitió describir y caracterizar la manera en la que el profesor crea las condiciones para el aprendizaje de sus estudiantes.

En diversos handbooks recientes se plantea la importancia de una adecuada formación inicial y permanente de los profesores de matemáticas, así como de su relación con la práctica profesional. Por ejemplo, en el handbook del PME, Llinares y Krainer (2006) sugieren que los profesores son considerados como constructores activos de su conocimiento lo que fomenta la reflexión sobre su propia práctica y la consecuente realización de cambios donde consideren necesarios. Sugieren además que es un desafío encontrar las respuestas a las preguntas sobre dónde, cómo y por qué los profesores aprenden, teniendo en cuenta que el aprendizaje de los profesores es un proceso complejo y es, en gran medida, influenciado por factores personales, sociales, organizacionales, culturales y políticos.

En casi todos los trabajos sobre desarrollo profesional se insiste en que para reconocer la práctica del profesor, deberíamos analizar su discurso (Franke, Kazemi y Battey, 2007) y considerar el desarrollo en términos de trayectorias sobre la práctica.

1.4. EL MODELO DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE EN EL DISEÑO CURRICULAR

El propósito de este apartado es realizar una descripción del modelo de Van Hiele como resultado de una revisión bibliográfica de los documentos que han abordado el tema. Esta descripción se refiere los dos elementos del modelo, los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje. La descripción pretende presentar una mirada general que incluya, además, resultados de investigaciones que han utilizado el modelo de Van Hiele como marco de referencia, por ejemplo, en el diseño de currículos y de unidades de enseñanza. Las características destacables de la estructura y propiedades de los niveles de Van Hiele, pueden encontrarse descritas y analizadas en la literatura (Clements y Battista, 1992; Jaime y Gutiérrez, 1990).

Los profesores holandeses de matemáticas de secundaria Pierre Marie y Dina Van Hiele-Geldof, en sus tesis doctorales, presentaron, respectivamente, un modelo de enseñanza y aprendizaje de la geometría (Van Hiele, 1957) y una aplicación concreta del modelo en algunos cursos de geometría (Van Hiele-Geldof, 1957). La constitución del modelo está basada en la idea central "de que a lo largo del proceso de aprendizaje de la geometría, el razonamiento de los estudiantes pasa por una serie de niveles de razonamiento que son secuenciales, ordenados y de tal manera que no se puede saltar ninguno" (Jaime, 1993). Cada nivel supone la comprensión y utilización de los conceptos de una manera distinta, lo cual se refleja en una manera diferente de reconocerlos, definirlos, clasificarlos, y realizar demostraciones (Jaime, 1993). Según los Van Hiele, los estudiantes, ayudados por unas experiencias instruccionales apropiadas, diseñadas de acuerdo a las fases de aprendizaje definidas por el modelo, van alcanzando ordenadamente cinco niveles de razonamiento geométrico.

El modelo de Van Hiele tiene dos partes, una de las cuales es la descripción del razonamiento matemático y la otra la prescripción de cómo enseñarlo. La parte *descriptiva* identifica una secuencia de tipos de razonamiento ("niveles de razonamiento"), a través de los cuales progresa el razonamiento geométrico de los individuos desde que inician su aprendizaje hasta que llegan a su máximo grado de desarrollo intelectual en ese campo. La parte *instructiva* sugiere a los profesores pautas ("fases de aprendizaje") sobre cómo ayudar a los estudiantes a avanzar en su nivel de razonamiento geométrico.

Se han realizado diversas investigaciones con el fin de cuestionar y validar el modelo de Van Hiele (Wirszup, 1976; Usiskin, 1982; Burger y Shaughnessy, 1986; Fuys, Geddes y Tischler, 1988; Gutiérrez y Jaime, 1998; Huerta 1999; Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991). También se han realizado investigaciones con estudiantes, con profesores de matemáticas en ejercicio y en formación, tendentes a evaluar los niveles de Van Hiele en tópicos específicos (Mayberry, 1983; Mason y Schell, 1988). Finalmente, el modelo de Van Hiele se ha utilizado como marco para diseñar e implementar currículos y unidades de enseñanza de matemáticas (Jaime, 1993; Guillén, 1997; Parsons, Stack y Breen, 1998; Mistretta, 2000; NCTM 2000; Clements 2001; Clements, Battista y Sarama, 2001; Gualdrón, 2006). En este sentido, en esta memoria, no pretendemos hacer un detallado recorrido por el modelo, sino que presentaremos sus elementos fundamentales y sus características relacionadas directamente con nuestro estudio. En Clements y Battista (1992) se puede encontrar un interesante análisis de las principales publicaciones de investigación relacionadas con el modelo de Van Hiele, entre las que se encuentran las mencionadas antes.

La fortaleza de los niveles de Van Hiele es describir las formas de razonamiento de los estudiantes, pero no describe el aprendizaje de contenidos matemáticos, el uso de capacidades de visualización, la capacidad de memoria, etc. En nuestra investigación hemos utilizado la visualización matemática[22] (la cual nos permite observar formas de usar elementos visuales, tanto si se está razonando como si se está realizando alguna tarea que sólo requiere recordar datos memorizados con soporte visual) como un constructo complementario a lo que nos ofrece la teoría de Van Hiele.

---

[22] La visualización será abordada en el siguiente apartado.

Se pueden encontrar buenas descripciones del modelo de Van Hiele en trabajos como Burger y Shaughnessy (1986), Crowley (1987), Fuys, Geddes y Tischler, (1988), Jaime y Gutiérrez (1990), Jaime (1993) y Guillén (1997).

1.4.1. Características generales del modelo

Los niveles de razonamiento han sufrido algunos cambios desde su aparición (Pegg y Davey, 1998) a partir de la evolución de las ideas del propio Van Hiele, de la experiencia de otros investigadores y de los resultados de investigaciones sobre los niveles. En diferentes publicaciones se numeran los niveles desde el nivel 0 al 4, mientras que en otras publicaciones se numeran desde el nivel 1 al 5. Para comodidad nuestra y de los lectores, hemos optado por usar los números del 1 al 5. En nuestro estudio, dado que los estudiantes colombianos de secundaria están lejos de alcanzar el quinto nivel (teniendo en cuenta nuestra propia experiencia), hemos prescindido de éste. De manera muy breve, las características centrales de cada nivel de razonamiento son:

Nivel 1: Visualización. Los estudiantes razonan sobre conceptos geométricos básicos, de tal manera que reconocen sus propiedades y elementos físicos globales sin considerar explícitamente las características de sus componentes.

Nivel 2: Análisis. Los estudiantes razonan sobre conceptos geométricos a través de la observación y la experimentación, además comienzan a establecer las propiedades matemáticas necesarias del concepto. Las demostraciones en este nivel son empíricas, llevadas a cabo por los estudiantes mediante la verificación en ejemplos.

Nivel 3: Deducción informal. Los estudiantes razonan sobre la manera de ordenar lógicamente las propiedades de los conceptos. Además, pueden formular definiciones abstractas y distinguir las propiedades suficientes y necesarias al determinar un concepto. Pueden comprender demostraciones deductivas y adaptarlas a otra análoga.

Nivel 4: Deducción formal. Los estudiantes razonan formalmente en el contexto de la estructura axiomática de las matemáticas (términos indefinidos, axiomas, definiciones, teoremas, etc.). Es decir, por ejemplo, pueden comprender y construir demostraciones formales (no memorizadas). También, es posible la comprensión por parte de los estudiantes de poder obtener resultados desde distintas premisas o mediante diferentes formas de demostración.

Nivel 5: Rigor. Los estudiantes razonan en sistemas axiomáticos distintos del euclidiano y pueden comparar sistemas basados en diferentes axiomas, al igual que pueden estudiar varias geometrías en ausencia de modelos concretos.

En cuanto al otro componente del modelo, las fases de aprendizaje, son pautas para que los profesores guíen a sus estudiantes en el desarrollo y mejoramiento de su nivel de razonamiento. Las fases están asociadas a cada nivel de razonamiento, es decir, para cada uno, el profesor diseña la instrucción teniendo en cuenta las fases desde la primera hasta la última. Seguidamente presentamos una breve descripción fruto del análisis principalmente de los trabajos de Crowley (1987), Jaime (1993), Corberán y otros (1994) y Guillén (1997):

Fase 1: Información. El profesor en esta fase dialoga con los estudiantes y les informa del tema que van a desarrollar, los objetivos de estudio y las actividades que planea desarrollar. También, el profesor tendrá la oportunidad de enterarse de los conocimientos previos que tienen los estudiantes que son pertinentes para el desarrollo del nuevo, además los estudiantes conocerán la futura dirección a la cual el nuevo tema los conducirá.

Fase 2: Orientación dirigida. En esta fase el profesor presenta gradualmente el material -compuesto de tareas cortas que generen respuestas específicas- que ha preparado cuidadosamente para que los estudiantes exploren el nuevo tema de estudio. Dicha exploración incluye que los estudiantes descubran y aprendan las posibles relaciones o componentes básicos que deben formar.

Fase 3: Explicitación. Es en esta fase donde se realiza un afianzamiento del tópico que se está estudiando, el cual incluye el manejo adecuado del lenguaje técnico, características, propiedades, relaciones que se han observado y analizado. El profesor debe propiciar la discusión entre él y los estudiantes y entre los mismos estudiantes.

Fase 4: Orientación libre. Es una fase en la cual el profesor debe preparar tareas que sean novedosas, diferentes a las que ha propuesto antes (con muchos pasos e incluso más complejas), que tengan diferentes vías de resolución, que le permitan a los estudiantes establecer relaciones entre los objetos que están estudiando. La intervención del profesor en esta fase debe ser mínima, de tal forma que los estudiantes intenten por sí solos buscar la solución.

Fase 5: Integración. En esta fase los estudiantes, con ayuda del profesor, realizan un resumen de todo lo aprendido, lo que les permitirá tener una visión global de los objetos y relaciones en relación al tema de estudio. Es una fase en la cual no se realiza el desarrollo de temas nuevos, sólo la recopilación y organización de los ya adquiridos.

En relación a la primera fase, Jaime (1993) sugiere que ésta se puede obviar después que se ha realizado en el proceso de desarrollo del primer nivel. La razón que plantea es el hecho de que los estudiantes ya se han enterado del tema que van a emprender (con todas sus implicaciones) y el profesor ya posee un panorama de los conocimientos previos de los estudiantes; en este sentido, no es necesario seguir desarrollando dicha fase para los siguientes niveles. En la unidad de enseñanza de la semejanza que elaboramos para nuestra investigación, sólo diseñamos actividades para la fase 1 del primer nivel de razonamiento.

Del mismo modo, en relación a la tercera fase, Jaime (1993) sugiere que esta fase "no debe interpretarse como fijada temporalmente después de la segunda fase y antes de la cuarta, sino más bien como una actitud permanente de diálogo y discusión en todas las actividades que lo permitan de las diferentes fases de aprendizaje". Este es el motivo por el cual en la unidad de enseñanza de la semejanza que elaboramos para nuestro estudio no diseñamos actividades específicas para la tercera fase. En cambio, sugerimos al profesor que permanentemente establezca la discusión entre él y los estudiantes y entre ellos mismos en relación a los objetos geométricos que están desarrollando.

Estamos de acuerdo con Jaime (1993) en que no es conveniente aplicar un modelo de enseñanza o aprendizaje de manera rigurosa, sino que más bien debe tomarse como una estructura adaptable a los diferentes casos en los que nos encontremos inmersos.

Así como hemos planteado las características de los niveles de razonamiento y de las fases de aprendizaje, ahora haremos mención (a manera de recordatorio) a las características globales del modelo. En Jaime (1993) es posible encontrar dichas características de una manera detallada; agregamos unas ideas que nos permiten justificar, por lo menos en parte, uno de los objetivos que perseguimos en este estudio.

Diversas investigaciones han analizado y confirmado en sus resultados que los niveles de Van Hiele se adquieren de manera *secuencial* (Usiskin, 1982; Mayberry, 1983; Burger y Shaughnessy, 1986; Fuys y otros, 1988). Esta característica la tuvimos en cuenta al momento de diseñar la unidad de enseñanza, es decir, las actividades están organizadas de tal manera que iniciamos con las que desarrollan el primer nivel y así sucesivamente. Puede ocurrir que los estudiantes aparenten un nivel superior al que realmente tienen porque han aprendido procedimientos rutinarios propios del nivel superior aunque realmente no los comprendan. Por esto, en nuestro estudio, el investigador y el profesor, permanentemente, indagaban a los estudiantes durante el desarrollo de las tareas lo que estaban haciendo con el fin de verificar que los estudiantes no estaban usando procesos rutinarios.

La *continuidad* se refiere a la manera como se realiza el tránsito de un nivel a otro. Inicialmente los Van Hiele plantearon que dicho tránsito se hace de una manera brusca, como un salto. Por el contrario, investigaciones posteriores (Fuys y otros, 1988; Burger y Shaughnessy, 1990; Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991), han sugerido que el paso de un nivel a otro no se da de un momento para otro, sino que numerosos estudiantes se encuentran en transición de un nivel de razonamiento a otro. En nuestro estudio consideramos el carácter continuo de la transición entre niveles.

El *lenguaje* es un factor importante en el movimiento a través de los niveles. Por ejemplo, una expresión lingüística puede ser comprendida en un nivel, sin embargo en otro puede que no. El uso por parte del profesor de un lenguaje comprensible para los estudiantes es un elemento importante durante la instrucción, particularmente en la enseñanza de la semejanza. La revisión de la literatura ha permitido constatar que no existen propuestas para la enseñanza de la semejanza que tengan en cuenta esta importante característica. El estudio que estamos desarrollando contempla el diseño de una unidad de enseñanza de la semejanza que tiene en cuenta la característica mencionada.

La *localidad* hace referencia a que los estudiantes pueden razonar en diferentes niveles cuando trabajan en distintos campos de la geometría. Esta característica nos permite inferir la necesidad de descriptores de nivel de Van Hiele para diferentes contextos geométricos, en particular para la semejanza. En este sentido, Gualdrón y Gutiérrez (2007) plantearon un listado de descriptores para este concepto, el cual se espera ampliar como uno de los resultados de esta investigación.

Después de haber planteado un panorama general en relación al modelo de Van Hiele (niveles, fases y características), a continuación describiremos algunas investigaciones que nos han permitido tener mayor claridad sobre el tema y, a la vez, complementar nuestro marco teórico.

1.4.2. Identificación de niveles de razonamiento en estudiantes

Un tópico de gran interés en la investigación ha sido la identificación de los niveles de razonamiento que exhiben los estudiantes y al diseño de instrumentos para evaluarlos. Uno de los primeros estudios importantes sobre el modelo de Van Hiele fue el de Usiskin

(1982). Usiskin desarrolló un test de elección múltiple con el objetivo de medir el nivel de razonamiento de estudiantes de décimo grado en el que cada ítem pretendía evaluar un nivel específico de razonamiento. Las respuestas fueron marcadas como correctas o incorrectas y a los estudiantes se les asignó un nivel dependiendo del número de respuestas correctas en cada nivel particular.

Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991) presentaron una forma alternativa de evaluar el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes, el cual particularmente permite clasificar a aquellos estudiantes que oscilan entre niveles; dificultad que habían tenido en sus trabajos los autores comentados antes (algunas respuestas de estudiantes no pudieron ser catalogadas en algún nivel). Estos investigadores plantean la necesidad de estudiar más a fondo la transición entre niveles, dada la no discretitud de los mismos. En este sentido, consideran, como principales argumentos para su estudio, tomar en cuenta la capacidad de los estudiantes para usar cada nivel, más que asignarle un nivel y, además, la idea de que el paso de un nivel a otro no se da en forma instantánea. Su método de evaluación trata de medir la adquisición de los niveles cualitativa y cuantitativamente.

Años más tarde, Gutiérrez y Jaime (1998) se plantearon responder cómo deberían ser evaluadas las respuestas de los estudiantes usando el modelo. Estos investigadores sugieren que no se debería "considerar un nivel de razonamiento como un único proceso que debe ser alcanzado o no por los estudiantes, sino que más bien debe ser considerado como un conjunto de procesos". Estos investigadores analizaron las propuestas de De Villiers (1987) y Hoffer (1981), entre otros, respecto a la consideración de los niveles de razonamiento de Van Hiele como un conjunto de procesos de razonamiento matemático y adoptan una postura intermedia respecto a dichos procesos de razonamiento característicos de varios (pero no todos) los niveles de Van Hiele. Gutiérrez y Jaime los etiquetaron así: "Reconocimiento", "Definición" (formulación y uso), "Clasificación" y "Demostración".

Una cuestión de relevancia para nuestro estudio es el conocimiento que se tiene de la utilidad de los niveles para describir los procesos de razonamiento de los estudiantes en actividades de polígonos (Burger y Shaughnessy, 1986; Fuys, Geddes y Tischler, 1988).

En conclusión, los trabajos comentados anteriormente muestran que los niveles de Van Hiele son útiles para describir los procesos de razonamiento de los estudiantes en diferentes actividades en el campo de la geometría. Por otro lado, hemos encontrado que se han realizado importantes aportes al modelo, por ejemplo, que para medir la adquisición de los niveles debería hacerse no sólo de manera cualitativa sino que también de manera cuantitativa.

1.4.3. Diseño e implementación de unidades de enseñanza

Otro tópico de gran interés en investigaciones relacionadas con el modelo de Van Hiele ha sido el diseño y experimentación de unidades de enseñanza en diferentes temas geométricos. A continuación haremos una breve descripción de algunos estudios que nos han permitido clarificar y ampliar el conocimiento sobre este tópico.

Diversos han sido los tópicos geométricos escogidos para el diseño de unidades de enseñanza y verificar el impacto de su experimentación en las aulas de clase, por ejemplo, Jaime (1993) en isometrías del plano, Corberán y otros (1994) en polígonos, Guillén (1997) en geometría de los sólidos, Mistretta (2000) en diversos tópicos geométricos: perpendicularidad, área, perímetro, triángulos, cuadriláteros y figuras tridimensionales. Por último, Gualdrón (2006) diseñó y experimentó una unidad de enseñanza en semejanza de polígonos en estudiantes de 14-15 años. Dicho experimento le permitió, por un lado, mejorar el nivel de razonamiento de los estudiantes y, por el otro, plantear una caracterización de niveles de Van Hiele para la semejanza. Esta investigación también sugiere la necesidad de seguir ampliando los estudios que tienen que ver con los diseños instruccionales en el tema.

En síntesis, las investigaciones revisadas dan cuenta de los buenos resultados obtenidos al experimentar diferentes unidades de enseñanza, lo que permite inferir una mejora en la enseñanza y el aprendizaje de tópicos geométricos. Así como también confirman que el modelo de Van Hiele es un excelente referente en el diseño de unidades de enseñanza que se convierten en una alternativa para el mejoramiento de la enseñanza de la geometría. Las propuestas de unidades de enseñanza que se presentan en algunos de estos trabajos están totalmente desarrolladas, preparadas para llevarlas al aula y tuvieron gran importancia en el diseño de nuestro trabajo. Los diseños instruccionales en el concepto de semejanza son escasos, lo que nos ha motivado a seguir ampliando los estudios de Gualdrón (2006) siguiendo su sugerencia de conectar la semejanza con la homotecia y el teorema de Thales.

1.4.4. Descriptores de Van Hiele en tópicos específicos

Son pocos los estudios que se han realizado con el objeto que plantear descriptores de nivel de Van Hiele en tópicos geométricos. A continuación mencionamos los que hemos encontrado en la literatura.

Burger y Shaughnessy (1986) administraron a los estudiantes, mediante entrevista clínica, un módulo de ocho actividades que contenían tareas relacionadas con formas geométricas (triángulos y cuadriláteros). Estos investigadores encontraron que los indicadores de nivel de Van Hiele que emergieron del estudio proporcionaron una primera caracterización de los niveles de Van Hiele en términos de la conducta de los estudiantes.

Jaime (1993), mediante un estudio longitudinal realizado con estudiantes desde sexto de E.G.B. hasta C.O.U., experimentó una unidad de enseñanza basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele. Mediante dicha experimentación, Jaime logró depurar un listado de descriptores iniciales para las isometrías del plano.

Por su parte, Guillén (1997) planteó una caracterización de los niveles de Van Hiele en el área de la geometría de los sólidos, como consecuencia del análisis de diferentes experimentaciones con variadas unidades de enseñanza sobre el tema, en estudiantes de diferentes cursos y niveles. El listado inicial de características las elaboró con base en las características de los niveles de Van Hiele generales y extrapolaciones desde las características de nivel existentes sobre polígonos.

Por último, Gualdrón (2006), mediante la experimentación de una unidad de enseñanza sobre semejanza de polígonos con estudiantes de noveno grado, logró depurar y afinar un listado de características de nivel de Van Hiele iniciales que había planteado con base en los descriptores de nivel generales planteados por diferentes autores.

En conclusión, los trabajos realizados con el fin de plantear descriptores de nivel de Van Hiele en tópicos geométricos son escasos. Además, los listados, en los trabajos comentados antes, incluyen sólo descripciones para algunos niveles, por ejemplo, Gualdrón (2006) los plantea para los dos primeros niveles, Jaime (1993) y Guillén (1997) para los tres primeros niveles y Burger y Shaughnessy (1986) para los cuatro primeros niveles. Todos los autores mencionados planean sus propuestas de descriptores en esos niveles justificando que los estudiantes con los que realizaron los estudios respectivos no alcanzarían un nivel superior dadas sus experiencias previas en este tipo de trabajos.

Finalmente, a manera de síntesis de todo el apartado, dentro de la revisión bibliográfica realizada sólo hemos encontrado los trabajos iniciados por Gualdrón (2006) y algunos posteriores Gualdrón y Gutiérrez (2006, 2007) y Gualdrón (2008a, 2008b) que relacionen el modelo de Van Hiele y la semejanza.

1.5. LA VISUALIZACIÓN COMO SOPORTE EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

En este apartado presentamos algunas reflexiones que se han planteado en relación a este interesante y, a la vez, controvertido campo de estudio. También, presentamos un recorrido por trabajos de investigación recientes que hacen referencia a la visualización matemática y elementos relacionados con esta.

La mayoría de estudiosos de este tema plantean que fue Francis Galton quien usó por primera vez el término visualización (Galton, 1883; citado en Clements, 1998). Galton sugirió una definición de imagen visual diciendo que "es la más perfecta forma de representación mental en la cual es de interés la forma, la posición y las relaciones entre los objetos en el espacio" (Galton, 1883, pág. 113; citado en Shepard, 1978).

La visualización ha recibido mucha atención como tema de investigación en educación matemática. Los investigadores se han interesado principalmente en la representación visual de las ideas matemáticas tanto en el trabajo con los estudiantes como en el proceso de enseñanza de esas ideas (Bishop, 1989). Por ejemplo, en la década de los 70 encontramos los trabajos de Bishop (1973), Krutetskii (1976) y Moses (1977) sobre aspectos relacionados con la visualización. En los 80, por su parte, fueron publicados algunos otros como los de Bishop (1980, 1983, 1986, 1989), Lean y Clements (1981), Clements (1981, 1982), Suwarsono (1982) y Presmeg (1986a).

Cuando se aborda el significado del término visualización, indiscutiblemente entramos en un extenso campo que es a la vez interesante y complejo. El estudio de la visualización ha sido abordado, casi desde sus inicios, por psicólogos quienes dieron las bases para que los matemáticos y educadores matemáticos, siendo conscientes de su importancia en el proceso de enseñanza y aprendizaje, la tomaran como un objeto de estudio. Entre los trabajos publicados en revistas o libros de psicología se encuentran -por mencionar algunos que han sido citados en Presmeg (1985)- Barrat (1953), Paivio (1969, 1970), Shepard (1978).

La característica principal de las investigaciones pioneras en este campo es que fueron estudios de análisis factorial y psicométricos de habilidad espacial. Según Bishop (1989), fueron los trabajos de Krutetskii (1976), Moses (1977), Lean y Clements (1981), Suwarsono (1982) y Presmeg (1986b) -por mencionar algunos- que se centraron en este campo de estudio e hicieron posible sacarlo de este enfoque, el cual producía resultados poco fiables.

La visualización es un objeto importante de estudio para la psicología, educación matemática y muchas otras áreas de investigación. Una consecuencia de esto es que han sido muchos los términos que han sido usados para hablar de lo mismo. Por ejemplo, se ha hablado de "visualización", "sentido espacial", "percepción espacial", "cognición espacial", "inteligencia espacial", "imaginería visual", "razonamiento o pensamiento espacial", "habilidad espacial", "razonamiento visual" e "imaginación" para hacer referencia a una clase razonamiento (actividad mental) que se utiliza en la resolución de problemas matemáticos. Obviamente, cada investigador, en sus respectivos estudios, ha colocado los matices que ha considerado necesarios. En cuanto a la diversidad de términos usados, Gutiérrez (1996) había planteado la ausencia de acuerdo en la terminología usada en el campo de la visualización. Hoy día, la situación no es diferente.

Uno de los primeros trabajos que marcó la pauta en este campo fue el de Krutetskii (1976), quien centró su atención en las "habilidades matemáticas" y se convirtió, en ese momento, en el mayor avance de acercamiento a la conexión entre lo espacial y lo matemático (Bishop, 1983, pág. 176). Posteriormente al trabajo de Krutetskii se publicaron otros estudios en la misma vía, por ejemplo, los de Fennema y Sherman (1977), Connor y Serbin (1985) y Ben-Chaim, Lappan y Houang (1989).

Un importante aporte en este campo, proponiendo una manera de organizarlo, lo realizó Gutiérrez (1996). Este investigador sugiere que la visualización está constituida por cuatro elementos a saber: Imágenes mentales, representaciones externas, procesos de visualización y habilidades de visualización. Para Gutiérrez una imagen mental es *cualquier clase de representación cognitiva de un concepto matemático o propiedad por medio de elementos visuales o espaciales*, una representación externa es *cualquier clase de representación gráfica de conceptos o propiedades incluyendo dibujos, bosquejos, diagramas, etc. que ayuda a crear o transformar imágenes mentales y a hacer razonamiento visual*, un proceso de visualización es *una acción mental o física en donde las imágenes mentales están involucradas*. Las habilidades de visualización *son aquellas que los individuos deben adquirir y perfeccionar para interpretar los procesos necesarios con imágenes mentales en la resolución de un problema*.

Este reporte de investigación es el que más ha influido en la realización de nuestro estudio, particularmente en relación a la visualización matemática. Es por ello que seguidamente presentamos subapartados que recogen estudios relacionados con cada uno de los elementos que plantea Gutiérrez (1996).

1.5.1. Imágenes mentales

Varios investigadores han considerado las imágenes mentales como un sistema cognitivo de representación para el aprendizaje y resolución de problemas, por ejemplo, Goldin (1982, 1987, 1998), Presmeg (1985, 1986a, 1998), Bishop (1989), Owens (1993), Thomas y Mulligan (1995), Goldin y Kaput (1996), English (1997), Thomas, Mulligan y Goldin (2002).

En cuanto a las imágenes, también ha habido una importante variedad de nombres y definiciones que, como ocurre con el concepto de visualización, son polémicas. Por ejemplo, se ha hablado de "imágenes mentales", "imágenes visuales", "imágenes espaciales", "representaciones internas", etc.

En términos de relación entre la visualización e imágenes, Bishop (1989) plantea que *el sustantivo "visualización" dirige más nuestra atención hacia el producto y, el objeto, o sea el "qué" de la visualización, a las imágenes visuales*.

Una de las primeras definiciones de imagen visual es la que proporcionó Galton (1883, pág. 113) diciendo que *es la más perfecta forma de representación mental en la cual es de interés la forma, la posición y las relaciones entre los objetos en el espacio* (Citado en Shepard, 1978).

Durante los años 40 y hasta mediados de los 70, Jean Piaget y Barbel Inhelder publicaron diversas investigaciones relacionadas con el desarrollo de concepciones y representaciones del espacio en los niños y el uso de imágenes (Clements, 1998).

En este sentido, Piaget e Inhelder (1971) hacen importantes aportes al estudio de las imágenes. Por ejemplo, las clasificaron en *reproductivas* y *anticipatorias*: Las imágenes reproductivas hacen referencia a la representación mental de sucesos y objetos conocidos con anterioridad por los individuos, y las anticipatorias hacen referencia a cuando un individuo representa objetos o sucesos que no ha tenido la oportunidad de percibir con anterioridad.

Por otra parte, Paivio (1971) proporcionó abundante información sobre imágenes mentales y se convirtió en un importante referente para los trabajos posteriores en este sentido. Paivio planteó su *teoría de doble código* la cual hace referencia a la existencia de dos formas de representación estrechamente relacionadas y que actúan conjuntamente: el sistema verbal y la imaginación, las cuales tienen propiedades funcionales y estructurales diferentes; su teoría de doble código implica que las imágenes son copiosamente pictóricas -si no copias perfectas de la realidad- (Clements, 1981).

Por otro lado, White, Ashton y Brown (1977) sugieren que las imágenes mentales pueden surgir de una gran variedad de estímulos sensoriales: visual, auditivo, táctil, gustativo, olfativo y cinético. Aunque todas las imágenes mentales son "internas" las cinco primeras provienen de los órganos de los sentidos "externos", mientras que la modalidad cinética *hace referencia a una síntesis de sensaciones simultáneas, consecuencia de relaciones entre las otras modalidades* (Plasencia, 2000).

Según Pylyshyn (1973), las definiciones de imagen han sido muy controvertidas. Un ejemplo de la dificultad de definir el concepto de imagen mental lo tenemos en las publicaciones de Kosslyn, quien en Kosslyn (1980) abandona su intento de definirlas ya que *es difícil definir algo de lo cual uno conoce poco*, y porque la palabra "imagen" puede parecer un nombre propio y, por lo tanto, no definible. Además, Kosslyn sostiene que la palabra "imagen", al igual que la mayoría de los otros nombres, *nunca se define de manera satisfactoria*. Sin embargo, Kosslyn (1990) sí ofrece una definición de imagen visual como una representación en la mente que -en ausencia de la apropiada estimulación sensorial a través de la vista- da la experiencia de "ver" (citado en Plasencia, 2000). Un importante aporte de Kosslyn es el hecho de considerar que las imágenes se forman no sólo con información perceptiva sino que también con información semántica y descriptiva, por ejemplo, el hecho de que un individuo pueda formar una imagen por medio de información verbal.

Partiendo de la afirmación de Pylyshyn (1973), presentaremos en lo que sigue algunas definiciones y algunas discusiones que se han dado al respecto.

Clements (1982) sugirió una definición de imagen como la creación de "fotografías en la mente"; también, plantea que no encuentra una razón suficiente para descartar esta definición como un punto de partida en la educación matemática. En este sentido, Presmeg (1997, pág. 302) sugiere que el planteamiento de Clements incluye, en la categoría de fotografías en la mente, teorías como las de Kosslyn (1980) y Paivio (1971), las cuales ya parecen apartarse de la idea tradicional.

En la actualidad, la metáfora que concibe las imágenes como la creación de "fotografías en la mente" no es aceptada por la comunidad de educadores matemáticos, dado que es una definición incompleta que no incluye la diversidad de imágenes que usan los individuos al resolver problemas matemáticos.

En este mismo orden de ideas, Denis (1991, pág. 104) sugiere que las imágenes *son modelos de pensamiento*. Además, plantea que *aunque dichos modelos son situaciones* *específicas, ellas, sin embargo, pueden ser usadas para generar conclusiones válidas o decisiones mucho más allá de su contenido específico*.

Para Wheatley (1997, pág. 282) *una imagen es una construcción de la mente*, las cuales son construidas a partir de un cúmulo de experiencias de un individuo. Para Wheatley, las imágenes pueden ser re-presentadas en ausencia de estímulo sensorial y, además, son factibles de ser transformadas.

Uno de los estudios que ha sido usado con mucha frecuencia es el de Presmeg (1986a). En este estudio, la autora plantea que *una imagen visual es un esquema mental que representa información visual o espacial* en ausencia o presencia de un objeto o representación externa (Presmeg, 1986a; pág. 42). En el mismo estudio, Presmeg sugiere que las imágenes pueden ser de cinco tipos diferentes, que encontró al trabajar con profesores y estudiantes de secundaria cuando éstos resolvían problemas matemáticos (en álgebra, geometría, trigonometría y vectores):

Imágenes concretas: Este tipo es definido como las "fotografías en la mente" a que hacen referencia otros investigadores.

Imágenes patrón: Aquéllas en donde no se tienen en cuenta detalles concretos y representan relaciones matemáticas abstractas en un esquema visual-espacial.

Imágenes de memoria de fórmulas: Son aquellas imágenes que se evidencian cuando los estudiantes dicen "ver" una fórmula en sus mentes, imaginándola escrita en la pizarra, cuaderno o libro de texto.

Imágenes cinéticas: Éstas son imágenes creadas, transformadas, o comunicadas con la ayuda de movimientos físicos.

Imágenes dinámicas: Son aquéllas que involucran habilidad para mover y transformar, mentalmente, imágenes concretas.

Brown y Presmeg (1993) analizaron cómo los estudiantes (de primaria y secundaria) usan imágenes cuando se enfrentan a tareas matemáticas y su relación con la comprensión matemática. Para este estudio, Brown y Presmeg usaron la tipología de imágenes mentales descrita en Presmeg (1985). A pesar de que en dicha tipología se encuentra el tipo denominado "imágenes de memoria de fórmulas", Brown y Presmeg sugieren que este tipo es limitado dado que, por ejemplo, los estudiantes de quinto grado en sus matemáticas escolares no usan con frecuencia fórmulas, pero sí es posible que ellos usen métodos visuales para recordar información. Es por ello que a estos investigadores les parece más viable hablar de:

Imágenes desde la memoria: Son aquéllas que los estudiantes usan para recordar información de sus clases de matemáticas.

En nuestro estudio hemos usado el tipo de imágenes desde la memoria por considerar que las tareas que hemos propuesto en la unidad de enseñanza no pretenden en ningún momento que los estudiantes usen o memoricen fórmulas.

Dentro de los resultados de este estudio encontraron que tanto los estudiantes de primaria como los de secundaria usaron tipos similares de imágenes mentales. También, encontraron que aquellos estudiantes -en ambos grupos- que fueron identificados como que tenían mejor pensamiento relacional en matemáticas frecuentemente usaron más formas abstractas de imágenes tales como imágenes dinámicas e imágenes patrón, mientras que los estudiantes con menos comprensión relacional tendieron a usar imágenes concretas e imágenes desde la memoria.

Por último, haremos mención al trabajo de Gutiérrez (1996) quien plantea -basado en las definiciones dadas por Kosslyn (1980), Pylyshyn (1981), Lean y Clements (1981), Presmeg (1986a), entre otros- que una imagen mental es *una clase de representación cognitiva de un concepto matemático o propiedad por medio de elementos visuales*.

Respecto a las imágenes, creemos que la naturaleza de éstas está fuertemente influenciada por el nivel de razonamiento de los estudiantes. Por ejemplo, si consideramos el modelo de razonamiento de Van Hiele, en nivel 1, algunos estudiantes pueden imaginar dos triángulos rectángulos semejantes, basados sólo en la apariencia física de ellos; en nivel 2, los estudiantes pueden imaginar dos triángulos rectángulos semejantes imaginándolos superpuestos (con vértice común el ángulo de 90 grados) e intentar “ver” si dichos triángulos tienen hipotenusas paralelas. Lo expuesto anteriormente nos indica que las personas elaboran imágenes mentales diferentes ante un mismo problema matemático, lo cual ya ha sido planteado, por ejemplo, en Presmeg (1997) y en Wheatley (1997).

En síntesis, desde el punto de vista de las imágenes, los estudios comentados anteriormente hacen referencia a que éstas son producto de la actividad mental y pueden ser creadas en presencia o ausencia de información perceptiva. Por otro lado, se puede constatar que, dependiendo de los tópicos matemáticos estudiados, surgen tipos diversos de imágenes mentales en la actividad de los estudiantes.

1.5.2. Habilidades de visualización

Hoffer (1977, citado en Del Grande, 1990) sugirió siete "habilidades de percepción visual" relevantes en el aprendizaje de las matemáticas: "Coordinación motriz de los ojos", "identificación visual", "conservación de la percepción", "reconocimiento de posiciones en el espacio", "reconocimiento de relaciones en el espacio", "discriminación visual" y "memoria visual". Las habilidades del listado anterior son habilidades generales, es decir, pueden ser usadas en la vida ordinaria o en las actividades profesionales. En el aprendizaje de las matemáticas, dependiendo de las características de la tarea, se puede usar cualquiera de ellas.

Por su parte, Del Grande (1990) proporcionó una conceptualización y ejemplos que involucran cada habilidad en el estudio de la geometría. A continuación las detallamos:

Coordinación motriz de los ojos: Es la habilidad para coordinar la visión con el movimiento del cuerpo. Por ejemplo, se hace evidente en el trazado de figuras o en el coloreado de una región.

Identificación visual: Es el acto visual de identificar una figura por aislamiento en un contexto complejo dado. Por ejemplo, identificar una figura en un conjunto de figuras superpuestas.

Conservación de la percepción: Involucra el reconocimiento de ciertas figuras geométricas presentadas en una variedad de medidas, colores, texturas y posiciones en el espacio y su discriminación como figuras geométricas semejantes. Por ejemplo, identificar figuras que tienen la misma forma pero distinto tamaño.

Reconocimiento de posiciones en el espacio: Es la habilidad para relacionar un objeto en el espacio con uno mismo (el observador) o con otro objeto que actúa como punto de referencia. Involucra la discriminación de figuras mediante la inversión y rotación de las mismas. Por ejemplo, la habilidad para identificar figuras después de un deslizamiento, una reflexión o un giro, lo cual ayuda a los estudiantes a identificar figuras congruentes en dibujos complejos.

Reconocimiento de las relaciones espaciales: Es la habilidad para imaginar dos o más objetos en relación con uno mismo o en relación entre ellos. Por ejemplo, en la construcción de una figura utilizando cubos, un estudiante debería percibir la posición de los cubos en relación a sí mismo o la posición de los cubos en relación a ellos mismos.

Discriminación visual: Es la habilidad para identificar las semejanzas y diferencias entre varios objetos. Mientras las dos anteriores habilidades se soportan mucho en la posición de los objetos en el espacio, la discriminación visual es independiente de la posición. Por ejemplo, los estudiantes deberán utilizar esta habilidad en tareas de selección y clasificación de objetos o figuras geométricas a partir de un conjunto dado, en relación al color, forma y medida.

Memoria visual: Es la habilidad para recordar las características de objetos que no están a la vista y relacionar sus características con otros objetos que estén a la vista o no. Por ejemplo, mostrar brevemente a los estudiantes una figura y luego pedirles que la reproduzcan en una hoja.

Gutiérrez (1996) para su estudio tuvo en cuenta parte de la tipología Del Grande (1990) y describió una nueva habilidad que definió como sigue:

Rotación metal: Es la habilidad para producir imágenes mentales dinámicas y para visualizar una configuración en movimiento.

Las habilidades de las que hemos hablado anteriormente las tendremos en cuenta en nuestro estudio como aquellas que los estudiantes deben adquirir y perfeccionar para ser usadas en los procesos de creación, utilización y transformación de imágenes mentales durante la resolución de problemas y actividades.

En síntesis, se percibe que se usan unas u otras habilidades de visualización dependiendo si se trabaja en el plano o en el espacio y dependiendo del tipo de tarea que se está realizando. Además, se puede decir que principalmente se ha usado la tipología planteada por Hoffer (1977).

1.5.3. Procesos de visualización y representaciones externas

Para Gutiérrez (1996), los procesos de visualización y las representaciones externas son elementos de la visualización matemática. En este sentido, y en relación a los procesos de visualización, Bishop (1983, pág. 177) plantea lo que se convertiría en un importante aporte al establecimiento de conexión entre lo espacial y lo matemático, dos clases diferentes de habilidades espaciales que considera de crucial importancia:

- *La habilidad para interpretar información figurativa (IFI): Involucra el conocimiento de convenciones y "vocabulario" espacial usado en el trabajo geométrico, gráficas, tablas, y diagramas de todos los tipos* [...] *e* [...] *incluye la "lectura" e interpretación de éstas.*

- *La habilidad para el procesamiento visual (VP): Implica la visualización, la interpretación de relaciones abstractas y datos no-figurativos en términos visuales, la manipulación y la transformación de unas representaciones visuales e imágenes visuales en otras.*

Para Bishop (1983) IFI y VP son habilidades de los individuos que se ponen en juego cuando éstos resuelven problemas. Sin embargo, Gutiérrez (1996) considera que los constructos definidos por Bishop encajan mejor en la categoría de procesos a realizarse, pues sugiere que *la descripción de una habilidad debería incluir información acerca de la forma en que puede realizarse o las destrezas que deben usarse*, mientras que *la descripción de un proceso debería incluir información acerca de la acción que debe hacerse, pero ello es independiente de la forma en que se realice en un caso específico.* Gutiérrez (1996) cita como ejemplo la rotación mental de una imagen, parte del proceso VP, donde una imagen inicial se transforma en otra que presenta el mismo objeto visto en una posición distinta. La manera de hacerlo varía dependiendo de si la rotación se hace en dos o en tres dimensiones, con el centro o eje de rotación interior o exterior a la figura, de las capacidades o preferencias del sujeto, etc., lo que puede dar lugar al uso de diferentes habilidades para realizar el mismo proceso de rotar la imagen original.

En el caso particular del estudio que estamos llevando a cabo, tendremos en cuenta los procesos IFI y VP -usados en el sentido de Gutiérrez (1996)- en el diseño de las actividades que conforman la unidad de enseñanza, de tal forma que cada una de las actividades potencien uno u otro proceso.

Otro elemento de visualización que tendremos en cuenta para nuestro estudio son las representaciones externas. Plasencia (2000) plantea que las representaciones externas son todos aquellos objetos de conocimiento -tablas, diagramas, símbolos, dibujos, gráficos, etc.- que actúan como estímulos en el aprendizaje; también, plantea que dichas representaciones se podrían considerar como "concretizaciones" de ideas o conceptos matemáticos.

Respecto a las representaciones externas, Mesquita (1998, pág. 184) sugiere que *una representación externa de un problema geométrico, en sí, no permite solucionar el problema, sino que puede contribuir a la definición de la estructura del problema a manera de facilitar su tratamiento.* La autora sugiere dos roles principales de una representación externa: descriptivo y heurístico. Es descriptivo cuando la única función de la representación es dar una aprehensión sinóptica de las propiedades mencionadas en el problema planteado, sin sugerir procedimientos de solución. Es heurístico cuando la representación en sí misma actúa como un soporte para la intuición, sugiriendo transformaciones que conducen a la solución.

Gutiérrez (1996) propone que una representación externa pertinente en visualización *es cualquier clase de representación verbal o gráfica de conceptos o propiedades incluyendo para esto dibujos, bosquejos, diagramas, etc. que ayuda a la creación o transformación de imágenes mentales y a hacer razonamiento visual*.

En nuestro estudio diferenciamos las representaciones internas y las externas de la siguiente manera: una representación interna hace parte de la actividad cognitiva que es asimilable a una imagen mental, mientras que una representación externa es una concreción total o parcial de una imagen mental mediante su representación gráfica, textual, verbal o de cualquier otro tipo.

Teniendo en cuenta que las imágenes mentales no son observables directamente, dado que ocurren en la mente de cada persona, los investigadores tienen que basarse en inferencias derivadas de las representaciones externas realizadas por los estudiantes cuando resuelven tareas matemáticas. En nuestro estudio, hemos tenido que utilizar también esta forma de análisis de la actividad de los estudiantes y somos conscientes que dichas inferencias tienen un alto grado de subjetividad ya que lo escrito por los estudiantes no siempre expresa claramente lo que piensan. Esta dificultad coincide con uno de los aspectos que sugieren Lean y Clements (1981, pág. 273) como asunto a tener en cuenta cuando se está evaluando el "grado de visualidad". Es por esto que en nuestro estudio se realizaron diálogos permanentes entre el profesor o el investigador y los estudiantes mientras éstos resolvían las tareas matemáticas, con el fin de tener mayor seguridad en la identificación de sus imágenes, procesos y habilidades.

Hasta este punto hemos presentado un compendio básico acerca de la visualización y algunos elementos relacionados como son las imágenes mentales, habilidades y procesos de visualización, y las representaciones externas. A continuación iniciaremos un recorrido por estudios que relacionan elementos de visualización y la enseñanza y, en particular, la enseñanza de la geometría.

1.5.4. Otros estudios relacionados con la visualización

En la bibliografía hemos encontrado trabajos que estudian las características de la actividad mental de los estudiantes matemáticamente diestros (por ejemplo, Krutetskii 1976), trabajos sobre el uso de imágenes mentales en el razonamiento matemático (por ejemplo, Presmeg,1986a; Brown y Presmeg, 1993; Owens y Clements, 1998; Hegarty y Kozhevnikov, 1999; Plasencia, 2000; Lowrie y Kay, 2001; Van Garderen y Montague, 2003; Van Garderen, 2006), trabajos sobre la habilidad espacial como predictor de la capacidad matemática (por ejemplo, Lean y Clements, 1981; Tartre, 1990), trabajos sobre la capacidad geométrica (por ejemplo, Pittalis, Mousoulides y Christou, 2007) y sobre el uso de visualización espacial en la resolución de tareas de geometría tridimensional (por ejemplo, Gutiérrez, 1996).

Los individuos se pueden clasificar en grupos de acuerdo a la manera como ellos procesan información matemática (Krutetskii, 1976). En su estudio, este autor encontró la siguiente tipología:

Tipo analítico: Se clasifican aquí las personas que prefieren usar modos lógico-verbales cuando intentan resolver problemas matemáticos, es decir, no tienen necesidad de recurrir a ningún tipo de soporte visual para trabajar con esquemas abstractos.

Tipo geométrico: Consiste de aquellas personas que tienen una marcada inclinación hacia los aspectos visuales (modos pictórico-visuales) de las matemáticas y que, consecuentemente, hacen uso de razonamiento visual.

Tipo armónico: Es el tipo de pensamiento en los individuos que se caracteriza por un equilibrio entre los modos lógico-verbal y pictórico visual, ambos están bien desarrollados pero el primer componente es dominante.

Krutetskii (1976) sugiere que la existencia de diferentes estilos de pensamiento no es sólo consecuencia de las diferencias psicológicas individuales entre distintas personas, sino también de las diferentes demandas hechas por distintas ramas de las matemáticas.

La habilidad espacial y el conocimiento de convenciones espaciales no tienen mucha influencia sobre la capacidad matemática de los estudiantes (Lean y Clements, 1981). Estos autores sugieren que los estudiantes que prefieren procesar información matemática por medios lógico-verbales tienden a superar a los estudiantes que tienden a usar métodos visuales. Este resultado parece estar en contradicción con otros estudios que sugieren que es deseable el empleo de procesos visuales en la resolución de problemas matemáticos (Krutetskii, 1976; Presmeg, 1985); sin embargo, Lean y Clements plantean que este aparente conflicto podría ser debido al uso de tareas matemáticas sencillas y rutinarias, mientras que en la mayoría de los demás estudios se han usado problemas matemáticos no rutinarios de mayor dificultad.

Los estudiantes con un alto nivel de habilidad de visualización espacial tienden a usar más frecuentemente habilidades espaciales en la resolución de los problemas que los estudiantes con bajo nivel de habilidad (Fennema y Tartre, 1985).

Por su parte, Presmeg (1986a) encontró que los métodos visuales en la resolución de las tareas matemáticas consumieron más tiempo que los métodos no visuales. Otro aspecto que resalta es el hecho de que los visualizadores, cuando resolvían las tareas, tuvieron dificultad para comunicar los conceptos matemáticos. Estos dos aspectos comentados fueron tenidos en cuenta en nuestro estudio; en cuanto al primero, el tiempo permitido por el profesor para que los estudiantes resolvieran las tareas planteadas fue flexible, es decir, a pesar de que cada una tiene un tiempo previsto para su desarrollo, el profesor, dependiendo de lo observado en la clase, permitía más tiempo para la finalización de la tarea por parte de la mayoría de los estudiantes. En cuanto al segundo, el profesor y el investigador animaban permanentemente a los estudiantes a que verbalizaran sus pensamientos al momento de solucionar las tareas. En este mismo sentido, tanto el investigador como el profesor realizaron seguimiento a cada uno de los grupos conformados, es decir, realizaban entrevistas[23] a miembros de tales grupos para motivarlos a expresar sus ideas.

Gutiérrez (1996) planteó, por una parte, una estructura conceptual enfocada a organizar el campo de la visualización en matemáticas y, por otra, basado en dicha estructura, realizó un análisis del comportamiento de estudiantes de primaria y secundaria cuando estos resuelven tareas de geometría tridimensional usando software de geometría dinámica. La primera parte de este estudio consistió en plantear una estructura teórica tendente a integrar los diferentes elementos que, según él, conforman el campo de la visualización en matemáticas. Su estructura se basa en estudios previos realizados por Hoffer (1977), McGee (1979), Kosslyn (1980), Lean y Clements (1981), Bishop (1983), Presmeg (1986) y Yakimanskaya (1991), entre los cuales se encuentran definiciones de visualización, de imagen mental y de otros elementos relacionados con la visualización matemática como son los procesos y habilidades.

Según Gutiérrez (1996), la resolución de una tarea matemática -usando visualización- empieza con la interpretación mediante una representación externa apropiada para generar una imagen mental. Esta primera imagen inicia un proceso de razonamiento visual donde, dependiendo de las características de la tarea y las habilidades

[23] Entrevistas no estructuradas que dependían de la tarea que los estudiantes estuvieran resolviendo en el momento.

de los estudiantes, ellos usan algunas de sus habilidades visuales para interpretar los diferentes procesos. Además, plantea que pueden surgir otras imágenes mentales y/o representaciones externas antes de que los estudiantes lleguen a la respuesta.

Aunque el estudio de Gutiérrez (1996) hace referencia a la geometría tridimensional, para nuestro estudio -en geometría plana- hemos usado su estructura por considerar que encaja también en un contexto bidimensional. Coincidimos en que la visualización está constituida por imágenes mentales, representaciones externas, habilidades y procesos de visualización. En el capítulo 2 plantearemos las definiciones pertinentes que guiarán nuestra investigación.

La imaginería visual tiene un importante papel en el razonamiento matemático de los estudiantes (Dôrfler, 1991; Presmeg, 1986a; Owens y Clements, 1998; Plasencia, 2000). En este sentido, Plasencia (2000) sugiere que sería de utilidad el conocimiento de las formas ("modelos") de razonamiento de los estudiantes; concretamente sugiere que se estudie la estructuración de diseños instruccionales, con actividades que detecten el uso de imágenes por parte de los estudiantes de distintos niveles educativos.

La habilidad espacial se constituye en un fuerte predictor de la capacidad de los estudiantes en geometría (Pittalis, Mousoulides y Christou, 2007). En este sentido, Lowrie y Kay (2001) encontraron que los estudiantes usan métodos visuales para resolver problemas difíciles o novedosos, mientras que usan estrategias no visuales en pocas situaciones difíciles. Por su parte, Van Garderen (2006) encontró que los estudiantes talentosos (con un importante grado de habilidad espacial) resuelven más problemas correctamente que los estudiantes con rendimiento medio o con rendimiento bajo.

En síntesis, la mayoría de trabajos han concluido que la visualización es un factor indiscutible en el "éxito" en la resolución de problemas en matemáticas por parte de los estudiantes, excepto por algunos casos en los que se ha encontrado que no lo es (por ejemplo Lean y Clements, 1981), todo ello a pesar de que en los trabajos realizados se utilicen marcos teóricos aparentemente distintos. Por otra parte, se puede inferir que el trabajo de Krutetskii (1976) ha sido fundamental en los desarrollos posteriores en relación a la visualización matemática.

Como síntesis global, después de la revisión de la literatura sobre el uso de visualización en las clases de matemáticas, encontramos que la mayoría de estudios se han realizado mediante test estandarizados (algunos acompañados de entrevista clínica) de habilidad espacial u orientación espacial. Los demás trabajos se han realizado mediante tareas matemáticas elaboradas para cada estudio específico. No hemos encontrado estudios que usen unidades de enseñanza sobre temas específicos (particularmente sobre semejanza) para indagar sobre el uso que hacen estudiantes de elementos de visualización. La realización de trabajos en este sentido, aportarían información valiosa que puede usarse en la enseñanza de diferentes tópicos, en particular sobre la semejanza.

Es posible concluir que el campo de la visualización matemática no ha logrado un consenso, por parte de la comunidad de educadores matemáticos, en el manejo de una terminología unificada en el desarrollo de estudios teóricos o de investigación en este campo.

La mayoría de estudios tienen como punto central la determinación del papel de las imágenes mentales (o imaginería, o habilidad espacial, o habilidad de visualización) en el desempeño de los estudiantes cuando abordan ciertas tareas matemáticas. Así mismo, la determinación del uso que hacen los estudiantes de imágenes mentales (o de visualización matemática) en la resolución de problemas matemáticos.

CAPÍTULO 2
MARCO TEÓRICO

Como señalábamos en el capítulo 1, nuestro interés es acercarnos a una caracterización del desarrollo profesional del profesor de matemáticas ante el proceso de enseñanza/aprendizaje de los estudiantes y a una caracterización de los razonamientos de los estudiantes ante tareas matemáticas de semejanza de figuras planas. Teniendo en mente el interés por alcanzar los objetivos planteados, el marco teórico pertinente para estructurar el progreso de este estudio está formado por tres ejes centrales: el contenido matemático, la actividad del profesor y la actividad de los estudiantes.

El contenido matemático (sección 2.1) incluye la semejanza como objeto de enseñanza y de aprendizaje (donde se la ve en lo cotidiano, en sus diferentes formas de representación y en los diferentes tipos de problemas y/o ejercicios). La actividad del profesor (sección 2.2) está estructurada desde los constructos conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas, práctica situada y reflexión sobre la práctica. La actividad de los estudiantes está enmarcada por los referentes teóricos del modelo de razonamiento de Van Hiele (sección 2.3) y de la visualización matemática (sección 2.4).

2.1. LA SEMEJANZA COMO OBJETO DE ENSEÑANZA Y DE APRENDIZAJE

El concepto matemático de semejanza inscrito dentro del ámbito del proceso de enseñanza y aprendizaje conlleva una serie de requerimientos que van desde el abordaje para su utilización en el lenguaje común, pasando por el uso del término en situaciones “parecidas”, hasta los que puede tener cuando, además de lo cotidiano, se le utiliza en el currículo escolar como referente para la particularización en el manejo de imágenes, cantidades, etc. Más allá de tratar de establecer diferencias gramaticales relacionadas con sus significados netamente subjetivos se busca hacer énfasis en los significantes inherentes a las conceptualizaciones del lenguaje matemático. A continuación se desglosan algunos ejemplos que permiten particularizar el manejo del concepto de semejanza.

2.1.1. La semejanza en lo cotidiano

La incidencia de la utilización de la semejanza como elemento fundamental en el razonamiento proporcional es uno de los aspectos importantes en el razonamiento humano y sus usos en la práctica (en lo cotidiano) son variados. A continuación presentamos algunos aspectos que relacionan el manejo de la semejanza en nuestra interacción con el mundo que nos rodea. Este apartado lo presentamos, principalmente, con algunas anécdotas que muestran autores como Freudenthal (1983b), y Van den Brink y Streefland (1979).

El niño desde edades muy tempranas usa la semejanza para desenvolverse en su entorno físico. Por ejemplo, al estimar el tamaño de un objeto o persona que está lejos, o al intentar interpretar imágenes cotidianas como dibujos, fotos, escenas de películas, carteles, etc., sin importar a qué escala ni si están dibujados (o si aparecen) a diferentes escalas uno al lado del otro. Freudenthal (1983b) cuenta algunas conversaciones con su nieto (Bastiaan). En un día soleado, Bastiaan (de 6 años) ve nubes y dice: “lloverá”. Freudenthal le dice: “no, éstas son nubes muy altas, de las que no cae lluvia; las nubes de lluvia son bajas y oscuras”. El niño pregunta: “¿A qué altura están estas nubes?” Freudenthal, exagerando, dice: “A diez mil metros”. El niño dice: “¿Y las de lluvia”?, él responde: “A mil metros”. El niño (señalando hacia el suelo): “O sea, si estamos aquí y esto (señalando una altura de 30 centímetros aproximadamente) es de lluvia, entonces esto (señala un metro aproximadamente) es de nubes sin lluvia”.

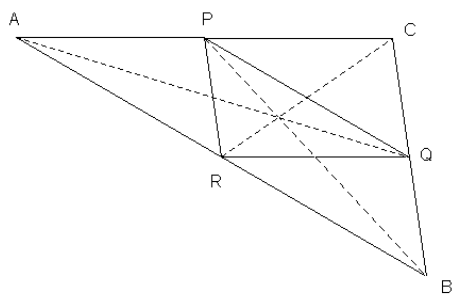
Van den Brink y Streefland (1979) presentan la conversación de un niño (Coen, de 7 años) con su padre. Están en la habitación de Coen mirando unas reproducciones de barcos. Coen pregunta por las dimensiones de la hélice y el padre le contesta: “no cabría aquí dentro”. Entonces Coen dice: “¡Sí! En un libro que he visto en el colegio hay una hélice así (señala con los dedos unos 3 centímetros) y al lado se ve un hombre pequeño así (señala con los dedos un centímetro aproximadamente)”.

Freudenthal (1983b) sugiere que “los niños aceptan sin vacilar lo más mínimo que se dibujen objetos en la pizarra diez veces más grandes que los de la hoja de trabajo, que la recta numérica de la pizarra tenga una unidad de 1 decímetro mientras que la de la hoja de trabajo sea de 1 centímetro. Sin embargo, los niños protestarían inmediatamente ante modificaciones estructurales que violan la semejanza de la imagen” (pág. 82). Freudenthal (1983c, citado en Fiol, 1992) también afirmaba que: “El niño adquiere muy pronto la capacidad de identificar objetos con la misma forma que sólo difieren en sus dimensiones, identificar el mismo objeto a distancias diferentes, un objeto y su imagen en cualquier escala o dos imágenes del mismo objeto a escalas diferentes”.

2.1.2. Los modos de representación de la semejanza

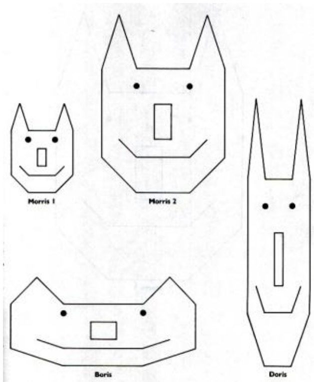
En nuestro trabajo, consideramos tres tipos de registros (Duval, 1996): los registros de lenguaje simbólico, los registros de lenguaje natural y los registros de lenguaje figurativo. Estos se articulan con lo numérico/simbólico (Lemonidis, 1991) en las tareas sobre homotecia y semejanza que deberíamos proponer a los estudiantes. A continuación expresamos en qué sentido usamos cada uno de ellos.

- Lenguaje simbólico: Aquí catalogamos las situaciones en las cuales los estudiantes deben identificar e interpretar las expresiones numéricas o literales que se presentan en lenguajes natural o figurativo. Las situaciones que pertenecen a esta categoría y se presentan en lenguaje natural, generalmente, requieren ser llevadas a lenguaje figurativo. Dicha traslación conlleva la identificación sobre las figuras de los elementos numéricos y/o literales que se expresan en el enunciado. Las situaciones que se presentan en lenguaje figurativo requieren la identificación, sobre las figuras, de los símbolos, que deberán usarse en lenguaje natural para su resolución. En nuestro estudio las expresiones simbólicas generalmente son representaciones de segmentos. A cambio de escribir, por ejemplo, el segmento de longitud *X* decimos el segmento de longitud *AB*, o simplemente el segmento *AB*. Otra expresión que se presenta es el cociente de longitudes de segmentos, por ejemplo, *AB*/*CD*. Consideramos también la expresión que representa las escalas, por ejemplo, 1:25. Un ejemplo de este tipo de representación es la actividad 23: *Los puntos P, Q y R son los puntos medios de los segmentos AC, CB y BA respectivamente. Identifique todas las posibles relaciones de semejanza, entre los diferentes triángulos que se forman en la figura dada. Justifique sus respuestas.*



- Lenguaje natural: Consideramos aquí la información que viene representada por la descripción de una situación mediante frases, oraciones, o proposiciones, y no presenta ningún tipo de representación en forma de figura[24]. Un ejemplo de este tipo de representación es la actividad 14(1) cuyo enunciado plantea: *Las dimensiones de un rectángulo son 2 cms. y 3 cms. ¿Es semejante este rectángulo a otro de dimensiones 14 cms. y 21 cms.? Si son semejantes, ¿cuál es el factor de semejanza? Justifique sus respuestas*.

- Lenguaje figurativo[25]: Aquí consideramos la información que viene representada en forma de lenguaje natural y, además, viene acompañada de representación en forma de figura. En esta categoría es imprescindible la figura para solucionar la tarea propuesta. El siguiente enunciado, correspondiente a la actividad 1, muestra un ejemplo de este tipo de representación: *En el dibujo aparecen las máscaras de Morris I, Morris II, Boris y Doris. ¿Cuáles de ellas tienen la "misma forma" y cuáles simplemente "se parecen"? Justifique su respuesta*.



2.1.3. Los tipos de problemas y/o ejercicios de semejanza

Plantear una unidad de enseñanza implica definir el tipo de tareas o problemas que se desarrollarán. Pfaff (1997-98) sugiere la existencia, en los libros de texto escolares que usó para su estudio, de tres tipos de problemas o ejercicios ligados al teorema de Thales. Estos tipos de problemas o ejercicios son (Pfaff, 1997-98, pág. 24):

- De cálculo: El cálculo puede referirse a una longitud o una razón entre longitudes.
- De demostración: La demostración concierne al paralelismo de dos rectas.
- De construcción: La construcción consiste en dividir un segmento en varios segmentos.

En nuestra unidad de enseñanza, hay actividades que no encajan en ningún tipo de la clasificación de Pfaff, por ejemplo la actividad 23 (enunciada en la página anterior). Ello nos ha inducido a definir un nuevo tipo de problemas o ejercicios:

---

[24] El sentido de *figura* lo tomamos de Mesquita (1998): "como un sinónimo de representación externa e icónica de un concepto o de una situación en geometría".

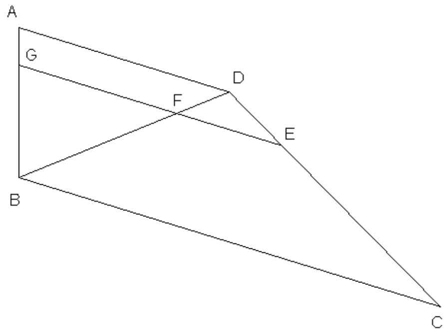
[25] En la elaboración de las actividades de la unidad de enseñanza hemos tenido en cuenta los planteamientos de Hershkowitz (1990) en relación a la posibilidad de que las representaciones gráficas pueden inducir a error en el aprendizaje debido a la persistencia de privilegiar una determinada posición prototípica en la realización de dicha representación.

- <u>De identificación de relaciones</u>: Pueden referirse a la identificación de grupos de triángulos semejantes en una configuración de Thales dada.

En nuestro estudio, usaremos la tipología sugerida por Pfaff y la extensión que hemos sugerido, pero modificando sus definiciones para que se puedan aplicar también a actividades que no sean exclusivamente referidas al teorema de Thales. A continuación describimos con más detalle los tipos e incluimos ejemplos de actividades:

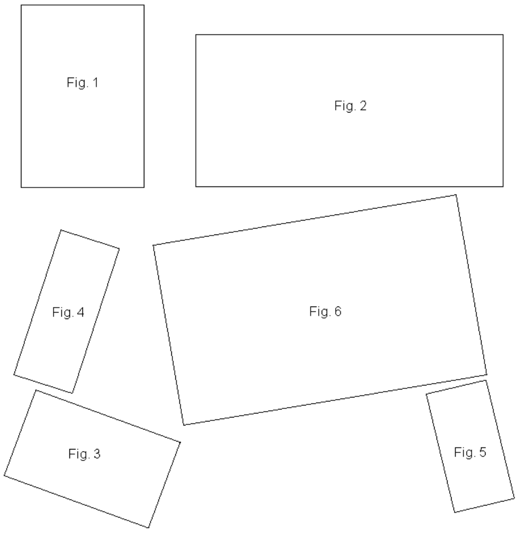
- <u>Actividades de cálculo</u>: Actividades en las que se pide encontrar una longitud desconocida (directa o indirectamente) o es necesario comparar dos longitudes.

La actividad 28 es un ejemplo de este tipo: *Determinar las longitudes de los segmentos DF y DE, dado que: ABCD es un trapecio, el segmento EG es paralelo al segmento BC. Además de la siguiente información: (AG/AB)=1/4, BD=6 y DC=8. Escriba el procedimiento que lo conduce a la respuesta.*

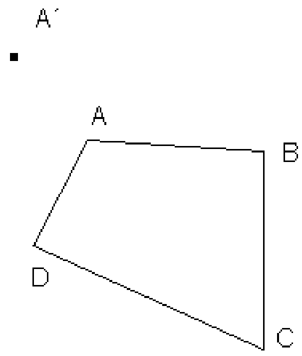


- <u>Actividades de identificación de relaciones</u>: Actividades en las que se pide identificar posibles relaciones intrafigurales (directa o indirectamente).

Un ejemplo de este tipo es la actividad 5: *¿Cuáles de los siguientes rectángulos tienen la misma forma? Justifique su elección.*



- <u>Actividades de construcción</u>: Actividades en las que se pide hacer una construcción geométrica, utilizando cualquier instrumento de dibujo y medida.



Un ejemplo de este tipo es la actividad 30(2): *Construya un polígono semejante al polígono ABCD, el cual tenga como uno de sus vértices el punto A´. ¿Cuántas posibilidades tiene de hacerlo? Justifique sus respuestas.*

- Actividades de demostración[26]: Actividades que requieran una justificación (basada en argumentos matemáticos) en forma convincente de por qué una propiedad o afirmación es verdadera o falsa.

Un ejemplo de este tipo es la actividad 32(1): *¿Dos triángulos que tienen sus lados proporcionales son semejantes? Si lo son, ¿podrían ser semejantes los triángulos que tienen sólo dos pares de lados proporcionales? Justifique sus respuestas.*

Los anteriores tipos de problemas son categorías no disjuntas, es decir, una actividad puede ser clasificada en varias de ellas. Por ejemplo, la actividad 30(2), enunciada antes, además de estar clasificada como una tarea de construcción, es una tarea de la categoría de demostración.

2.2. CONOCIMIENTO PROFESIONAL, DESARROLLO PROFESIONAL Y PRÁCTICA MATEMÁTICA REFLEXIVA

En el quehacer del profesor, en su proceso de formación, queremos analizar lo que sucede en términos de su desarrollo profesional, es decir, analizar cómo evoluciona, cómo hace cosas que otro le dice que ponga en práctica en el aula de clase, qué cambios observamos en el profesor cuando este analiza con un investigador cambios en los estudiantes. Desde este punto de vista, entonces la pregunta que surge es cómo mirar la evolución del profesor frente a esta problemática. Tendremos en cuenta algunas aproximaciones (constructos teóricos) que nos permiten dar cuenta de la evolución del profesor frente a su cambio profesional, por ejemplo, desarrollo profesional, conocimiento profesional, práctica situada, reflexión sobre la práctica y trayectoria de desarrollo profesional. Sabemos que los programas de desarrollo profesional que involucran activamente a los docentes en la reflexión sobre el aprendizaje matemático de los

[26] Asumimos este término como lo proponen Gutiérrez y Jaime (1998) cuando plantean los procesos de razonamiento característicos de los niveles de razonamiento de Van Hiele.

estudiantes tienen impacto positivo sobre su conocimiento y creencias (Llinares y Krainer, 2006). Reconocemos la importancia de analizar en detalle cómo se producen dichos impactos en el desarrollo de conocimientos específicos.

Con el fin plantear los constructos/elementos teóricos de nuestra investigación en cuanto al desarrollo profesional y el análisis de prácticas, en este apartado describiremos los elementos que asumimos la constituyen. Dichos elementos son tomados de propuestas planteadas en diversos estudios y, en algunos casos, hemos añadido algunas matizaciones, fruto de nuestras propias reflexiones.

2.2.1. Desarrollo y conocimiento profesional

La capacitación del profesor para el ejercicio de su actividad profesional es un proceso que presenta múltiples facetas y está siempre incompleto (Ponte, 1994; citado en Bairral 2002). La mayoría de los profesionales que se dedican a la enseñanza de las matemáticas reconocen la necesidad de la formación continua, aunque las instituciones educativas y las políticas generales de formación solamente atienden de forma parcial estas necesidades. Tratamos el constructo de desarrollo profesional como cambio, proceso de reflexión, como experiencia y como construcción personal.

Reformadores de la educación dan cuenta de que la mejora en la instrucción y un mayor rendimiento de los estudiantes dependen del desarrollo profesional de los profesores y administradores (Elmore y Burney, 1999; Sykes, 1999).

A nivel internacional se ha reconocido la necesidad de cambiar la forma en la cual las matemáticas se enseñan y se aprenden; por ejemplo Adler (2000) plantea “En todo el mundo,... los programas de formación de profesores de matemática están preparando a los profesores para trabajar con y promover la reforma en la práctica de las matemáticas escolares”.

Los resultados relacionados con el desarrollo profesional incluyen cambios en la comprensión de los profesores de cómo los estudiantes aprenden matemáticas y la naturaleza de las matemáticas, de conocimiento matemático y de enseñar bien las matemáticas (Sowder, 2007). Day (1999) da un sentido mucho más amplio al desarrollo profesional del profesor, diciendo que se trata de un proceso que comprende todas sus experiencias de aprendizaje (naturales, planificadas e inconscientes) que le aportan beneficios directos o indirectos, y que contribuyen a la calidad de su práctica con los estudiantes. El profesor, individualmente o con sus colegas, renueva y amplía sus compromisos con respecto a las finalidades de la enseñanza y adquiere y desarrolla, de manera crítica, el conocimiento así como las técnicas y la inteligencia (cognitiva y afectiva) esenciales en una práctica profesional de calidad con los estudiantes en el contexto escolar. Así, el desarrollo profesional es visto como un proceso complejo en el que el maestro interviene globalmente incardinado en el proceso escolar, con su problemática interna y los vínculos con el exterior.

Para nuestro trabajo tomamos el desarrollo profesional como un conjunto de trayectorias de formación competencial[27] en términos de realización y autocontrol (reflexivo) de prácticas profesionales que se analizan mediante contenidos diversos (matemático-epistémico, didáctico-estratégico y comportamental-actitudinal siguiendo a Burgués y Giménez, 2006) a partir de manifestaciones de intenciones y comportamientos (datos).

Entendemos la competencia (en relación al desarrollo profesional) como el conjunto de conocimientos, destrezas y aptitudes necesarias para ejercer la profesión docente. La competencia en nuestro estudio está vinculada a tres componentes concretos: matemático, didáctico y actitudinal.

El componente matemático-epistémico implica el conocimiento de y sobre las matemáticas (en nuestro estudio, de la semejanza), la actividad matemática, lo que hay que enseñar a los estudiantes y sus relaciones/conexiones con otros contenidos (tanto dentro como fuera de la matemática); la comprensión de conceptos, procedimientos y el proceso de hacer matemáticas, forman parte de lo que se denomina conocer las matemáticas.

Así mismo, conocer matemáticas comprende el discurso matemático (incluye la terminología, el lenguaje, los significados), centrado en la abstracción, generalización, examen de modelos y construcción de argumentos matemáticos convincentes. Incluye por tanto el uso de evidencias y demostraciones, el papel de las definiciones, los ejemplos y los contraejemplos, siendo aspectos importantes conjeturar, construir y evaluar argumentos, comunicar y conectar las ideas matemáticas.

Es claro que los conceptos específicos y los procedimientos son parte también de lo que se denomina discurso matemático. Dentro de él podemos, de igual forma, considerar esencial el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas y el razonamiento

---

[27] La noción de competencia es controvertida, como afirma Tejada (1999), no es fácil acotar el concepto de competencia, lo que se evidencia al hacer una somera revisión de la literatura sobre este campo, y se manifiesta en los continuos esfuerzos dedicados a esta tarea. Los diferentes vaivenes habidos en su concreción desde lo psicológico, pedagógico, laboral, social, etc. indica que este término no es unívoco.

matemático, que potencien y amplíen sus estrategias de resolución de problemas y confronten y unan sus exploraciones intuitivas e informales con las demostraciones formales y sistemáticas.

En nuestro caso concreto, con el fin de realizar el análisis de la actividad del profesor, hemos planteado un conjunto de descriptores que desde el componente matemático-epistémico consideramos pertinentes como competencias profesionales del profesor en la semejanza. En el siguiente cuadro aparecen los tipos de representación e indicadores considerados en dicho componente.

TIPO DE REPRESEN-TACIÓN	**TERMINOLOGÍA (T), LENGUAJE (L), SIGNIFICADOS (S), DEFINICIONES (D), CONEXIONES (C), SITUACIONES ASOCIADAS (SA)**	**ARGUMENTOS (A), PROCEDIMIENTOS (P), RAZONAMIENTOS (R)**
GRÁFICO (MG)	**MGS1:** Reconocimiento visual de la semejanza como ampliación-reducción de una forma respecto de la otra. **MGS2:** Reconocimiento visual de la semejanza por la igualdad de formas mediante configuración de Thales con centro explícito. **MGS3:** Reconocimiento visual de la semejanza por la igualdad de formas mediante homotecia. **MGD1:** Semejanza como ampliación o reducción por paralelismo con centro dado. **MGD2:** Semejanza como igualdad de formas con ángulos iguales y lados proporcionales. **MGD3:** Identificar la semejanza desde las condiciones matemáticas. **MGC1:** Semejanza y teorema de Thales. **MGC2:** Semejanza y homotecia. **MGSA1:** Reconocer la semejanza en triángulos. **MGSA2:** Reconocer la semejanza en polígonos regulares. **MGSA3:** Reconocer la semejanza en polígonos irregulares.	**MGA1:** Dos triángulos son semejantes si están en posición de Thales. **MGA2:** Dos polígonos son semejantes si están en posición homotética. **MGP1:** Construir figuras semejantes mediante propiedades de la homotecia. **MGP2:** Construirtriángulos semejantes mediante configuraciones de Thales. **MGR1:** Paralelismo de figuras homotéticas. **MGR2**: Congruencia de ángulos. **MGR3:** Cociente de lados homólogos constante.
ARITMÉTI-CO – SIMBÓLICO (MA)	**MAS1:** Constancia de razones externas. **MAS2:** Invarianza de razones internas. **MAT1:** Centro de homotecia. **MAT2:** Razón de homotecia. **MAT3:** Congruencia.	**MAP1:** Uso de fracciones equivalentes en lados homólogos. **MAP2:** Reconocer rectángulos semejantes por la proporción de los lados. **MAP3:** Reconocer triángulos semejantes por la proporción de los lados.

TIPO DE REPRESEN-TACIÓN	TERMINOLOGÍA (T), LENGUAJE (L), SIGNIFICADOS (S), DEFINICIONES (D), CONEXIONES (C), SITUACIONES ASOCIADAS (SA)	ARGUMENTOS (A), PROCEDIMIENTOS (P), RAZONAMIENTOS (R)
VERBAL (MV)	**MVS1:** Precisar el concepto intuitivo de la “misma forma”. **MVS2:** Describir la semejanza como igualdad de formas. **MVS3:** Plantear la semejanza como ampliación-reducción de una forma respecto de la otra. **MVS4:** Plantear la semejanza como la igualdad de formas mediante configuración de Thales con centro explícito. **MVS5:** Plantear la semejanza como la igualdad de formas mediante homotecia. **MVT1:** Nombrar el centro de homotecia. **MVT2:** Nombrar la razón de semejanza. **MVT3:** Nombrar la congruencia de ángulos. **MVT4:** Nombrar el paralelismo. **MVT5:** Nombrar la proporcionalidad de lados. **MVT6:** Nombrar criterios de semejanza de triángulos. **MVT7:** Nombrar el perímetro y área de figuras semejantes. **MVT8:** Nombrar las escalas.	

Cuadro 2.1. Tipo de representación e indicadores considerados en el componente matemático-epistémico del contenido profesional.

El componente didáctico-estratégico incluye conocimientos curriculares descritos en planes de estudio y reflejados en los textos y otros instrumentos didácticos: cómo los estudiantes procesan, almacenan, retienen y recuperan información y de cómo los profesores negocian con los alumnos la instrucción. Igualmente el conocimiento de una variedad de ejemplos para cada idea matemática: conocimiento sobre técnicas específicas de instrucción, conocimiento de materiales instructivos, además de saber cómo es su clase, cómo son los estudiantes y cómo dirigir situaciones complejas de instrucción que involucran a un gran número de estudiantes, utilizando variedad de recursos y espacios.

Así mismo, incluye meta-conocimientos que definen el marco en que se valoran los conocimientos y su relación con la propia profesión; conocimientos sobre la didáctica de la matemática, aunando informaciones psicopedagógicas, experiencias profesionales personales y conocimientos matemáticos. También, el conocimiento de y sobre el proceso de generación de las nociones matemáticas, el conocimiento sobre las interacciones en el aula, tanto las de profesor-alumno como las de alumno-alumno, con la doble dimensión de arquitectura relacional (rutinas instruccionales) y la negociación del significado (contrato didáctico); conocimiento sobre el proceso instructivo, formas de trabajar en clase, el papel del profesor que conlleva el conocimiento sobre las representaciones instruccionales así como el conocimiento sobre las características de la relación trabajo-actividad. Todo ello puesto en relación para generar un conocimiento práctico a través de la propia práctica instruccional y caracterizado/mediatizado por las creencias epistemológicas del profesor dentro de un componente actitudinal que se verá explicitado en un subapartado posterior.

La idea central para distinguir el conocimiento que fundamenta la enseñanza está en la capacidad del profesor para transformar el conocimiento matemático en representaciones que sean útiles a él y a los alumnos en cuanto al mejor desarrollo de los objetivos de la enseñanza. Esta capacidad vendrá propiciada por la intersección/interrelación entre contenido y pedagogía, una amalgama que es propia de la comprensión profesional de los profesores. Precisamente algunos de estos aspectos quedan recogidos en el siguiente párrafo, "Un aspecto del conocimiento de contenido pedagógico implica una cierta integración de contenido y pedagogía, tomando ideas de las matemáticas y de lo que conocemos sobre la enseñanza y aprendizaje de matemáticas" (Cooney, 1994, pág. 610).

En nuestro caso concreto, hemos utilizado una serie de descriptores (tomados de Burgués y Giménez, 2007) en relación a tres importantes aspectos del desarrollo profesional del profesor (sobre el aprendizaje de los estudiantes, sobre la instrucción, sobre la evocación de procesos interactivos); para cada uno de ellos se establecen categorías e indicadores operativos (basados en el discurso) que nos permitirán posicionar, desde el componente didáctico-estratégico, al profesor involucrado en la práctica diseñada para el estudio. En el siguiente cuadro aparecen dichos descriptores para cada aspecto tenido en cuenta en este componente.

DESCRIPTORES	INDICADORES	OPERATIVOS
SOBRE EL APRENDIZAJE (DA)	**Tiene en cuenta o evoca el hecho de tratar nociones matemáticas (DANM)**	**1.** Identificando y justificando el establecimiento de relaciones de contenido. **2.** Estableciendo o mostrando conexiones interdisciplinarias. **3.** Usando o evocando esquemas y propiedades (represen-tacionales). **4.** Identificando procesos significativos (de matematización). **5.** Usando o evocando esquemas relacionales de los contenidos matemáticos. **6.** Identificando y asumiendo grados de dificultad en el contenido.
	Identifica elementos del diseño del aprendizaje (DADA)	**1.** Planificando fases claras. **2.** Relacionando la clase con la experiencia escolar de los estudiantes. **3.** Usando ejemplos y evocaciones de aprendizaje para justifi-car afirmaciones. **4.** Explicando estrategias de motivación. **5.** Simulando diálogos/imaginando posibilidades/alusiones de

DESCRIPTORES	INDICADORES	OPERATIVOS
		gestión asociadas al contenido. **6.** Proponiendo análisis de procesos (en futuro). **7.** Identificando procesos de control y regulación. **8.** Relacionando secuencia de contenido con diseño de aprendizaje.
SOBRE LA INSTRUCCIÓN (DI)	**Considera los elementos propios del currículum (DIC)**	**1.** Reconociendo finalidad y objetivos de actividades. **2.** Haciendo alusiones implícitas al contenido. **3.** Identificando referencias explícitas oficiales. **4.** Mostrando coherencia entre actividad y contenido. **5.** Utilizando/elaborando materiales (juegos) de manera consciente. **6.** Diversificando/adaptando el uso de materiales conocidos. **7.** Analizando/reflexionando sobre el uso de materiales o creando materiales adecuados (tratando de ser original). **8.** Identificando elementos claves en la secuencia del contenido. **9.** Estableciendo relaciones instructivas asociadas a diversas facetas del concepto.
	Reconoce registros o formas instructivas (elementos de gestión) (DIRI)	**1.** Identificando el marco de referencia del entorno. **2.** Relacionando y valorando representaciones. **3.** Imaginando rasgos de la cultura matemática de clase (qué saben…). **4.** Explicitando el papel de las tareas. **5.** Explicitando formas diferentes (decidiendo en función de los estudiantes y su reacción). **6.** Comparando o analizando modelos de trabajo. **7.** Teniendo en cuenta la diversidad del grupo. **8.** Identificando posiciones relevantes para justificar intervenciones. **9.** Argumentando y fundamentando decisiones instructivas.
	Reconoce elementos funcionales de tareas educativas y estilos instructivos diversos (DIF)	**1.** Proponiendo o identificando situaciones de trabajo colaborativo. **2.** Utilizando situaciones cerradas y abiertas. **3.** Situando el valor del trabajo dirigido (justicia). **4.** Proponiendo tareas complejas (proyectos…).
SOBRE LA EVOCACIÓN DE PROCESOS INTERACTIVOS (DP)	**Identifica elementos que articulan la negociación de significados (DPNS)**	**1.** Explicitando el valor del conocimiento previo. **2.** Atribuyendo intenciones negociadoras a la actividad. **3.** Separando el papel del grupo y los individuos.
	Relaciones profesor-estudiante (DPP-S)	**1.** Explicitando estrategias para posibilitar el razonamiento del estudiante. **2.** Proponiendo situaciones de análisis/síntesis. **3.** Explicitando el progreso que desea para el estudiantado.

Cuadro 2.2. Descriptores e indicadores considerados en el componente didáctico-estratégico del contenido profesional (tomado de Burgués y Giménez, 2007).

El desarrollo profesional se reconoce mediante el análisis de cambios y constataciones de conocimientos profesionales. Eso se analiza mediante el análisis de sus discursos y sus prácticas. Para el análisis del desarrollo profesional docente, reconocemos que las producciones de los profesores son textos que muestran construcciones diversas de significados. El discurso es un conjunto de actividades de representación de la realidad que los individuos y la colectividad ponen en marcha para transmitir un significado a otros, con vistas a trascender los límites ontológicos de espacio y tiempo (Sáez, 1999; citado en Bairral, 2002).

Tratamos el constructo de desarrollo profesional como cambio, proceso de reflexión, como experiencia y como construcción personal. Por otro lado, denominamos Trayectoria de Desarrollo Profesional (TDP) al *instrumento que permite analizar de modo amplio y estructurado el desarrollo profesional del profesor de matemáticas, el cual permite confirmar el estado de formación del profesor en un momento dado*. La trayectoria contempla realizar afirmaciones del estado de formación del profesor desde los aspectos del conocimiento profesional del profesor[28], teniendo en cuenta las fases del ciclo reflexivo de Smyth, en cada momento de la experimentación; es decir, en el momento inicial, intermedio, y final.

El momento inicial está conformado por la entrevista inicial y por las sesiones de clase 1 y 2; el momento intermedio por las sesiones 3 a la 7; y, el momento final conformado por las sesiones 8 a la 11. Estos tres momentos nos permitirán analizar cómo evolucionan los elementos del conocimiento profesional del profesor.

El *conocimiento profesional* se genera en el uso del conocimiento orientado a la actividad en situaciones concretas de la enseñanza, siendo una construcción personal en el sentido de que el uso de dicho conocimiento por parte del profesorado, para gestionar sus situaciones de enseñanza de las matemáticas y reflexión posterior, genera un nuevo conocimiento.

2.2.2. Reflexión y práctica situada

Nuestro enfoque parte de una perspectiva cognitiva; esto es, poniendo el énfasis en cómo el docente interpreta los procesos de enseñanza y de aprendizaje, cómo asume un tratamiento de los contenidos o cómo interpreta una secuencia de aprendizaje a través de identificar sus posicionamientos, interpretaciones y desarrollo en el aula.

[28] Aspectos matemático-epistémico, didáctico-estratégico y comportamental-actitudinal.

La idea de práctica

El análisis sobre la práctica se inserta en el principio de cognición situada, la cual está directamente relacionada con el aprendizaje desde una perspectiva más amplia, principalmente donde el aspecto sociocultural es determinante en el análisis de dicha práctica. Según la perspectiva de la cognición situada, todo proceso cognitivo es social; está situado dentro de contextos y prácticas determinadas y, además, está distribuido entre los distintos practicantes que participan de dichas prácticas. En la cognición situada se cambia el foco de la cognición individual al escenario sociocultural y a las actividades que las personas realizan dentro de este escenario, de modo que hay una relación mutuamente co-constitutiva entre personas-actividades-contexto. En este sentido, el aprendizaje se entiende como una continua y creciente participación en determinados escenarios, prácticas y comunidades culturales.

Los teóricos de la cognición situada parten de una fuerte crítica a la manera cómo la institución escolar intenta promover el aprendizaje. En particular, cuestionan la forma en que se enseñan aprendizajes declarativos abstractos y descontextualizados, conocimientos inertes, poco útiles y escasamente motivadores, de relevancia social limitada (Díaz Barriga y Hernández, 2002). Es decir, en las escuelas se privilegian las prácticas educativas artificiales, en las cuales se manifiesta una ruptura entre el saber qué y el saber cómo, y donde el conocimiento se trata como si fuera neutral, ajeno, autosuficiente e independiente de las situaciones de la vida real o de las prácticas sociales de la cultura a la que se pertenece. Esta forma de enseñar se traduce en aprendizajes poco significativos, es decir, carentes de significado, sentido y aplicabilidad, y en la incapacidad de los alumnos por transferir y generalizar lo que aprenden (Díaz Barriga, 2003).

Entendemos el aprendizaje en la perspectiva de la cognición situada, como los cambios en las formas de comprensión y participación de los sujetos en una actividad conjunta. Debe comprenderse como un proceso multidimensional de apropiación cultural ya que se trata de una experiencia que involucra el pensamiento, la afectividad y la acción (Baquero, 2002). Preguntándose por el significado de "situación", idea fundamental en la perspectiva de la cognición situada, Engeström y Cole supeditan este concepto a la idea de práctica: "Así la noción de situación conduce a la primacía de la práctica, un paisaje completamente nuevo para el estudio de la cognición" (Engeström y Cole, 1997, pág. 301). Scribner entiende como práctica: "... una actividad construida socialmente y organizada en torno a ciertos objetos comunes; una práctica comprende dominios de conocimiento necesarios y tecnologías determinadas que incluyen sistemas de símbolos. Una práctica se compone de acciones recurrentes e interrelacionadas dirigidas a objetivos; los que participan en una práctica dominan su conocimiento y tecnología y adquieren las habilidades mentales y manuales necesarias para aplicarlas en la consecución de los objetivos de las acciones." (Scribner, 2002, pág. 293; citado en Alberti, 2007).

Entendemos una práctica como una actividad socio cultural en la que se resuelven situaciones con un objetivo bien determinado y por medio de unos conocimientos necesarios y específicos. Cada práctica se compone de situaciones o problemas que resolver y en cuya resolución a menudo es necesario superar otras situaciones o problemas auxiliares. Y así sucesivamente hasta completar el objetivo propuesto por el ámbito socio cultural.

Intentar comprender la práctica profesional del profesor de matemáticas en el aula implica identificar características de su gestión en el proceso de enseñanza y de aprendizaje e identificar aspectos de dicha gestión que puedan tener relevancia teórica debido a su capacidad explicativa (Llinares, 1999). Siguiendo con Llinares, considera que el conocimiento del profesor puede llegar a determinar algunos aspectos de su gestión del proceso de enseñanza y de aprendizaje y viendo al profesor como un profesional reflexivo que construye su conocimiento a través de la reflexión sobre la acción, y por tanto se consideran no sólo acciones sino también las justificaciones dadas por el profesor.

La capacidad de reflexionar sobre la práctica se considera una necesidad para una enseñanza eficaz, por ejemplo Darling-Hammond (1998, pág. 8) sugiere que "Los profesores necesitan ser capaces de analizar y reflexionar sobre su práctica, para evaluar los efectos de su enseñanza y para refinar y mejorar su instrucción. Ellos deberían constantemente evaluar lo que los estudiantes están pensando y comprendiendo y remodelar sus planes para tener en cuenta lo que han descubierto".

La enseñanza se vuelve una rutina y con oportunidades mínimas de crecimiento profesional si no examinamos de manera organizada y disciplinada nuestra experiencia (Shulman, 1992). Aprendemos a través de la reflexión sobre la propia experiencia y no directamente a partir de ella. Los profesores pueden aprender a partir de experiencias de los otros si son documentadas y discutidas. La reflexión es un proceso por lo que los profesores reestructuran su conocimiento práctico y personal; es un proceso a largo plazo, y es esencial para desarrollar sus competencias como docente y como un proceso en el que se gana confianza para hacer y enseñar matemática.

En nuestro estudio, en relación al proceso reflexivo que lleva a cabo el profesor como elemento clave en su desarrollo profesional, tendremos en cuenta el *ciclo reflexivo de Smyth* (Smyth, 1991), el cual comienza con la detección de un problema o de una práctica y termina en un proceso de reconstrucción de la práctica:

1. *Descripción*: En esta fase se caracteriza la práctica.
2. *Inspiración*: Aquí se tratarán de expresar las teorías locales que determinan la práctica.
3. *Confrontación*: Se analiza la práctica y las bases que la sustentan, percibiendo otras formas de concebir la práctica.
4. *Reconstrucción*: Aquí se define un nuevo plan de acción, como resultado de las fases anteriores.

La idea de instrumento

Entendemos que la práctica profesional del profesor debe incluir, además de lo que el profesor hace, la comprensión de los instrumentos o recursos y el propósito de su uso (Gavilán, García y Llinares, 2007). Incluye instrumentos técnicos (materiales didácticos, software, etc.) e instrumentos conceptuales (sistemas de representación). En nuestra perspectiva, también consideramos el lenguaje hablado, los modos de representación simbólica, las tareas problema que plantea el profesor y los materiales didácticos. Según la perspectiva sociocultural los instrumentos utilizados y la forma en que son utilizados en la práctica del profesor de matemáticas influyen en la comprensión matemática y creencias de sus estudiantes.

2.2.3. Componente regulativo-discursivo en el análisis de la práctica

La práctica pedagógica en matemáticas tiene un componente regulativo instruccional, y en ella actúan, entre otras, las reglas discursivas. Así, el discurso explicativo matemático puede ser analizado bajo la óptica constructivista desde diversas componentes independientes del análisis del contenido específico. Desde un punto de vista de la construcción del conocimiento, el aprendizaje surge en los individuos por un proceso de construcción de significaciones. No hay una unidad de criterio en categorizar las acciones a partir de cómo se presentan las marcas del discurso. En el caso presente se ha usado una extensión del trabajo de Ogborn y otros (1996) en ciencias experimentales que establece cuatro tipos de acciones que se definen en el discurso: detectar diferencias, construir entidades, reconstruir el conocimiento y otorgar significación que se utilizó para estudiar el discurso del docente experto en matemáticas (Giménez y otros, 1999).

2.2.4. Posicionamiento o identidad ante la práctica matemática

Caracterizamos tres tipos de profesores interpretados como representantes de posiciones ideológicas y de prácticas pedagógicas diferentes, que no se quieren considerar como "absolutos" y excluyentes: el conformista, el reflexivo y el interrogativo que se describen a continuación:

- En el tipo *conformista*, el conocimiento se percibe al margen de valores, se pide que sea suficiente (a un nivel simple) desde el canon dado. Sólo quiere aprender lo necesario para enseñar.
- El tipo *reflexivo* considera la relación de las matemáticas con la vida diaria, es alguien que cree que debe ser mediador entre sus alumnos y el conocimiento en el contexto social de los conocimientos y en la escuela. Es consciente del papel de puerta social jugado por las matemáticas. Sabe que existen varias maneras de enseñar las matemáticas, quiere identificar las óptimas maneras de enseñar y las estrategias pero en las estructuras educacionales dadas. No se cuestiona las estructuras de poder, la reestructuración social ni los propósitos morales de la educación.
- El tipo *interrogativo*, caracterizado por la conciencia de la construcción social del conocimiento científico, no lo consideran autónomo. Se preocupan por la posición autoritaria del maestro, cuestionan las prácticas pedagógicas y son investigadores.

Para cada tipo de profesor, hemos planteado una serie de descriptores (adaptación hecha al esquema de Miller y Baker, 2001) en relación a tres importantes aspectos en el desarrollo profesional del profesor (relaciones con el conocimiento matemático, aspectos estratégicos, pedagógicos y relaciones de poder, y actitudes, emociones, valores y apreciaciones); estos descriptores nos permitirán posicionar, desde el componente comportamental-actitudinal, al profesor involucrado en la práctica diseñada para el estudio. En el siguiente cuadro aparecen dichos descriptores para cada tipo de profesor al considerar las matemáticas como práctica social.

	CONFORMISTA	REFLEXIVO	INTERROGATIVO-CRÍTICO
RELACIONES CON EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO (CM)	**CMC1:** Algo necesario. **CMC2:** Dado y transmitido por el docente. **CMC3:** Único y autónomo. **CMC4:** Sabiduría recibida. Desligada de los valores. **CMC5:** Conocimiento del profesor imprescindible. **CMC6:** Interpretarlo como una disciplina descontextualizada. **CMC7:** Énfasis en cubrir el programa.	**CMR1:** Canon dominante único de conocimiento. **CMR2:** Autónomo (no reconoce la naturaleza ideológica del conocimiento). **CMR3:** Interpretarlo como una aceptación de aplicación. **CMR4:** Se plantea relación con la vida. **CMR5:** Piensa que hay diferentes maneras de conocimiento y piensa que las puede hacer suyas. **CMR6:** Minucioso cubrimiento de los contenidos, reforzado a través de enriquecer el currículum.	**CMI1:** Acuerdo en múltiples maneras de conocer. **CMI2:** Ideológico (naturaleza cultural, plural y grupal del conocimiento). **CMI3:** Preguntas de qué conocimiento, quiere romper espejismos y barreras. **CMI4:** Interesado en las matemáticas, su contribución, pensamiento y visión mundana.
ASPECTOS ESTRATÉGICOS, PEDAGÓGICOS Y RELACIONES DE PODER (CE)	**CEC1:** Acepta la pedagogía de la escuela. **CEC2:** Interpreta el profesor como una autoridad. **CEC3:** Visión transmisiva. **CEC4:** Tendencia a la dependencia y la pasividad. **CEC5:** Idea de reconocimiento de la necesidad del uso de recursos simplemente motivacional. **CEC6:** Conserva las estructuras de poder y apoya el sistema. **CEC7:** Aceptación conformista con la escuela, pares y sociedad. **CEC8:** Sin relación entre poder y programa. **CEC9:** Acepta el poder y estatus del conocimiento. **CEC10:** Acepta la jerarquía institucional.	**CER1:** Adopta un barniz pedagógico. **CER2:** Justifica la pedagogía escogida como la mejor manera de enseñar. **CER3:** El docente es la autoridad, pero se consideran los intereses de los alumnos en cuanto a la motivación. **CER4:** Usa sistemas de gestión para ayudar a los niños a independizarse con aprobación final del docente. **CER5:** Muestra elementos del sistema que evocan cierto poder del profesorado sin más compromisos. **CER6:** Está de acuerdo con que la escuela es el lugar para buscar mejores formas de ayudar a los niños a aprender. **CER7:** Saber matemáticas permite acceder a otras cosas. **CER8:** Justifica una pedagogía concreta	**CEI1:** Considera la negociación como una forma de relación pedagógica. **CEI2:** Los papeles del maestro y alumno son menos desiguales. **CEI3:** Se considera que el docente tiene un poder pero también el alumno. **CEI4:** Tiende a la autonomía del alumno y promueve la actividad. **CEI5:** Usa estructuras para facilitar potenciación del alumnado y democracia. **CEI6:** Escoge preguntar y usar maneras de desafiar el conocimiento y lo que hay que saber. **CEI7:** Las demandas son ahora pedagógicas y curriculares. **CEI8:** Hace explícito que el conocimiento tiene un estatus. **CEI9:** Acepta su propia posición y la de los otros.

	CONFORMISTA	REFLEXIVO	INTERROGATIVO-CRÍTICO
		que ha seleccionado.	
ACTITUDES, EMOCIONES, VALORES Y APRECIACIONES (CA)	**CAC1:** Acción pedagógica ha de ser dirigida. **CAC2:** Sólo quiere el conocimiento que precisa para enseñar. **CAC3:** Creencia en que es preciso hacer sólo lo básico para la formación docente. **CAC4:** No reconoce ningún componente socio-político **CAC5:** Profesional como alguien que mantiene el statu quo. **CAC6:** Prioriza los documentos curriculares oficiales.	**CAR1:** Acepta la importancia de la curiosidad como motivación y finalidad en la enseñanza. **CAR2:** Valora reflexionar y conjeturar. **CAR3:** Valora la equidad como necesidad sin más implicación reflexiva. **CAR4:** Enseñanza mediada entre el alumno y las matemáticas. **CAR5:** Consciencia de competencias sociopolíticas. **CAR6:** Considera positivamente los cambios. **CAR7:** Reconoce pedagogías deferentes para escoger alguna.	**CAI1:** Movida ideológicamente. **CAI2:** Pone en cuestión formas de conocimiento. **CAI3:** Pregunta, debate, negocia. **CAI4:** Reconoce que hay que atender la diversidad como una forma de mantener la equidad. **CAI5:** El conocimiento se considera contrastable. **CAI6:** Usa relación entre educación y visión sociopolítica. **CAI7:** Valora la creatividad. **CAI8:** Propone una visión intelectual sobre el hecho pedagógico.

Cuadro 2.3. Características y tipos de profesor al considerar las matemáticas como práctica social (adaptación del esquema de Miller y Baker, 2001).

2.3. EL MODELO DE VAN HIELE COMO ORGANIZADOR DE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA SEMEJANZA

En este apartado trataremos los dos aspectos que abarca el modelo. El *descriptivo*, mediante el cual se identifica una secuencia de tipos de razonamiento geométrico de los individuos y donde, además, se puede valorar el progreso de éstos ("Niveles de razonamiento"), y el *instructivo*, que sugiere a los profesores directrices sobre cómo pueden ayudar a sus estudiantes para que alcancen con más facilidad un nivel superior de razonamiento ("Fases de aprendizaje").

Los aspectos constitutivos del modelo que hacen parte de nuestro marco teórico son tomados de diversos estudios a los cuales hemos añadido algunas matizaciones, fruto de nuestra experiencia y reflexiones al respecto. Después de haber realizado una revisión de la literatura relacionada con el modelo, presentada en el capítulo 1, varios han sido los trabajos que nos han permitido tener un punto de partida en este aspecto. Dichos estudios plantean temas que coinciden con nuestras ideas al respecto. Estos son: Jaime (1993), Gutiérrez y Jaime (1998), Gualdrón y Gutiérrez (2007).

En el apartado que sigue, haremos una descripción inicial de los niveles de razonamiento particularizada para la semejanza que nos ha servido como punto de partida para el desarrollo de nuestra investigación.

2.3.1. Descripción inicial de los niveles de Van Hiele para la semejanza

En el capítulo 1 hemos presentado una descripción general de los cinco niveles de razonamiento y de las fases de aprendizaje que integran el modelo de Van Hiele. Ambos componentes del modelo los hemos utilizado al diseñar la secuencia de actividades en la que se basa la parte experimental de este estudio. Ahora nos centramos en los primeros cuatro niveles de razonamiento y, con base en los descriptores generales de los niveles de Van Hiele, en los descriptores específicos para la semejanza planteados en Gualdrón y Gutiérrez (2007) y teniendo en cuenta los contenidos matemáticos inmersos en la unidad experimental de enseñanza, planteamos una lista inicial de descriptores de los niveles de razonamiento específicos para la semejanza de figuras planas que será perfeccionada y completada, como uno de los resultados de esta memoria, a partir del análisis de las respuestas de los estudiantes a las tareas matemáticas planteadas.

En el estudio de Gualdrón y Gutiérrez (2007) aparecen los descriptores para los niveles 1 y 2, pero para este trabajo elaboramos un listado inicial ampliado de descriptores para la semejanza en los niveles 1 a 4 que será perfeccionado y completado a partir del análisis de las respuestas de los estudiantes a las tareas matemáticas planteadas en esta investigación.

<u>Nivel 1 (Reconocimiento)</u>

En este nivel, los estudiantes perciben la semejanza de figuras de manera global, por lo que consideramos que se caracteriza por los aspectos siguientes:

1.1 Reconocen figuras semejantes basándose en la apariencia de ellas, es decir, utilizando únicamente estrategias de tipo visual. Pueden presentarse casos en que no reconozcan la semejanza entre dos figuras porque alguna esté girada.

1.2 Ven las figuras como un todo y describen las diferencias y similitudes entre ellas usando términos como “más grande”, “más pequeño”, “estirado”, “ampliado”. Por ejemplo, cuando un estudiante esté decidiendo sobre la semejanza de dos rectángulos, podría decir “este rectángulo no es tan largo como éste”. También pueden incluir atributos irrelevantes en las descripciones que hacen.

1.3 Empiezan a percibir algunas características matemáticas de la semejanza, pero aún lo hacen de manera aislada. Por ejemplo, algunos pueden tomar medidas de los ángulos y darse cuenta que en las figuras semejantes estas son iguales, solo que no lo ven como una condición necesaria para la semejanza.

1.4 Pueden identificar, utilizando argumentos de tipo visual, la semejanza entre figuras cuando pertenecen a una configuración de Thales (aspecto de proyección o aspecto de homotecia) o están en disposición homotética.

1.5 Pueden identificar y explicar, utilizando argumentos de tipo visual, la semejanza de figuras en mosaicos.

1.6 Construyen o dibujan figuras semejantes a una figura dada sin tener en cuenta explícitamente aspectos matemáticos tales como la medida de los ángulos o las longitudes de los lados.

<u>Nivel 2 (Análisis)</u>

En este nivel, los estudiantes ya son conscientes de que no es suficiente observar las figuras y decidirlas por su parecido, sino que también hay condiciones matemáticas de la semejanza de figuras que deben cumplirse a través de sus elementos y propiedades. El nivel 2 se caracteriza por los aspectos siguientes:

2.1 Construir o dibujar figuras semejantes a una figura dada teniendo en cuenta explícitamente aspectos matemáticos tales como la medida de los ángulos o las longitudes de los lados.

2.2 Determinar aspectos matemáticos específicos de las figuras semejantes, tales como la proporcionalidad de longitudes de los segmentos y la igualdad de las medidas de los ángulos, así que pueden inducir las condiciones necesarias para que las figuras sean semejantes.

2.3 Descubrir que la posición de las figuras semejantes es irrelevante, es decir, que no es necesario que las figuras semejantes tengan la misma posición.

2.4 Entender que la congruencia de figuras planas es un caso particular de la semejanza de figuras planas.

2.5 Inducir algunas propiedades relacionadas con la semejanza en triángulos rectángulos. Las transformaciones usadas en semejanza, las ampliaciones y reducciones, son centrales en todas las actividades en las cuales los estudiantes crean figuras semejantes.

2.6 Comprobar que la figura resultante al aplicar una homotecia es semejante a la figura dada.

2.7 Relacionar la semejanza de triángulos con el teorema de Thales, comprendiendo que los triángulos en posición de Thales son semejantes.

2.8 Utilizar configuraciones de triángulos en posición de Thales o en disposición homotética (con centro de homotecia en un vértice) para demostrar relaciones de semejanza entre ellos.

2.9 Realizar construcciones o dibujos de figuras semejantes al darles el factor de semejanza y además predecir si la figura resultante será una ampliación, una reducción o una figura idéntica a la dada. También pueden realizar construcciones o dibujos de figuras semejantes usando homotecias y teorema de Thales.

2.10 Relacionar la razón de semejanza con las escalas. Es decir, comprender que la escala es la razón de semejanza entre una reproducción (foto, mapa, plano, etc.) y la realidad que representa dicha reproducción.

2.11 Identificar relaciones de semejanza en figuras planas complejas (dos o más figuras planas entrecruzadas).

2.12 Demostrar propiedades que tienen que ver con la semejanza de figuras verificando que se cumplen en algunos casos. Realizan la deducción de propiedades matemáticas de la semejanza mediante experimentación y generalización. Además, generalizan dichas propiedades a otros tipos de figuras.

2.13 Utilizar la definición de semejanza para la solución de situaciones matemáticas, por ejemplo determinar longitudes accesibles o inaccesibles.

Nivel 3 (Abstracción)

El razonamiento de nivel 3 se manifiesta en el hecho de establecer relaciones entre las propiedades y comprender planteamientos generales, por lo que los estudiantes consiguen:

3.1 Determinar empíricamente y justificar de manera deductiva informal las condiciones suficientes para la semejanza de rectángulos y triángulos (incluyendo los criterios AA, LLL, LAL).

3.2 Comprender y manipular relaciones entre propiedades de figuras semejantes. Por ejemplo, ellos comprenden que triángulos en posición de Thales también pueden hacer parte de una homotecia.

3.3 Distinguir entre condiciones suficientes y necesarias para la semejanza de figuras. Por ejemplo, ellos reconocen que, en los triángulos, es suficiente que dos ángulos correspondientes sean iguales para que sean semejantes, mientras que en los demás polígonos no es suficiente dicha condición, pero sí es necesaria.

3.4 Seguir los pasos de un razonamiento formal en el tema, sin intentar justificar formalmente la semejanza de figuras.

3.5 Demostrar informalmente algunas propiedades relacionadas con la semejanza de figuras planas.

Nivel 4 (Deducción)

Los estudiantes que razonan en este nivel pueden hacerlo de manera formal prescindiendo de todo soporte concreto, por lo que el nivel 4 se caracteriza porque los estudiantes pueden:

4.1 Comprender y utilizar definiciones equivalentes de la semejanza.

4.2 Razonar deductivamente en la justificación de la semejanza de figuras.

4.3 Demostrar un mismo teorema de formas diferentes, por ejemplo usando distintas formas del teorema de Thales.

4.4 Realizar demostraciones formales completas en las cuales identifican la hipótesis, la tesis y la red de implicaciones lógicas que llevan al resultado. Realizan demostraciones que tienen que ver con la semejanza de figuras verificando que la propiedad a demostrar se cumple en algunos casos (Gualdrón y Gutiérrez, 2007, pág. 378).

2.4. LA VISUALIZACIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LA SEMEJANZA

Con el fin de plantear los aspectos que, respecto de la visualización, tendremos en cuenta para el desarrollo de nuestra investigación, en esta sección enumeramos los elementos que asumimos la constituyen. Los elementos de visualización que constituyen nuestro marco teórico son tomados de propuestas planteadas en diversos estudios y, en algunos casos, hemos añadido algunas matizaciones, fruto de nuestras propias reflexiones.

A partir de la síntesis de literatura sobre visualización en matemáticas que hemos expuesto en el capítulo 1, consideramos la visualización en matemáticas como la clase de razonamiento basado en el uso de elementos visuales o espaciales –mentales o físicos- que se ponen en juego en la resolución de problemas o en la demostración de propiedades (Gutiérrez, 1996). La vemos constituida por cuatro elementos (Gutiérrez, 1996): Imágenes mentales, representaciones externas, procesos de visualización y habilidades de visualización. En segunda instancia, el estudio de Presmeg (1986a) en relación a las imágenes visuales encontradas cuando profesores y estudiantes de secundaria se enfrentan a tareas matemáticas. Por último, el de Hoffer (1977) en relación a las habilidades de visualización. Coincidimos con Yakimanskaya (1991, citada en Gutiérrez, 1996) en que la visualización incluye la creación y uso de imágenes mentales. Creemos que los estudiantes además de usar las imágenes, también las crean cuando éstas no hacen parte de su aparato cognitivo. Lo anterior nos permitirá hablar, en el análisis de las producciones de los estudiantes, de la generación de imágenes o del uso que hacen de las mismas.

La caracterización de visualización que guiará nuestro estudio es la siguiente:

> *Visualización en matemáticas es una clase de razonamiento basado en el uso o generación de imágenes mentales o representaciones externas que funciona en la resolución de problemas o en la demostración de propiedades* (Gutiérrez, 1996, pág. 9).

Por otro lado, coincidimos con Plasencia (2000) en que la visualización matemática no es "ver" la matemática a través de dibujos o una forma vaga de intuición o una sustitución del conocimiento. La visualización matemática es el tipo de razonamiento que se vale de la intuición, de las imágenes mentales y de las representaciones gráficas, entre otros factores, para la resolución de problemas o la demostración de propiedades.

2.4.1. Imágenes mentales y representaciones externas

Para Gutiérrez (1996), una imagen mental es una clase de representación cognitiva de un concepto matemático o propiedad por medio de elementos visuales o espaciales. Esta definición de imagen mental será la que tendremos en cuenta en nuestro estudio. Coincidimos con Yakimanskaya (1991, citada en Gutiérrez, 1996) en que las imágenes mentales son el elemento básico en la visualización.

Presmeg (1986a) y Brown y Presmeg (1993) identificaron en sus estudiantes de secundaria diferentes tipos de imágenes mentales, descritos en el capítulo 1: Imágenes concretas, imágenes patrón, imágenes de memoria de fórmulas, imágenes cinéticas, imágenes dinámicas e imágenes desde la memoria. En nuestro estudio tendremos en cuenta las imágenes concretas, cinéticas, dinámicas y desde la memoria. Prescindimos del tipo imágenes de memoria de fórmulas ya que, como se dijo antes, las tareas propuestas en la unidad de enseñanza en ningún momento buscan el uso o memorización de fórmulas.

También prescindimos de las imágenes patrón dado que estas pueden considerarse un caso particular del tipo de imágenes desde la memoria. A continuación describiremos cada tipo de imágenes usado en nuestro estudio de manera particularizada para la semejanza de figuras planas:

Las *imágenes concretas* tienen como principal característica que consisten en una única fotografía, la cual es inmóvil pero con muchos detalles. A pesar de que, por ejemplo, Brown y Wheatley (1989) sugirieron que este tipo de imágenes tienen poco que hacer en la comprensión matemática y que Presmeg (1985, 1986a) sugirió que este tipo de imágenes puede generar muchas dificultades en el razonamiento matemático, en nuestro estudio relacionamos este tipo de imagen con el uso de expresiones gráficas o verbales de tipo nemotécnico. Por ejemplo, en una configuración de Thales (en forma de pico), el estudiante puede encontrar una longitud desconocida estableciendo la proporción entre lados correspondientes de los triángulos formados usando este tipo de imagen. El uso se hace evidente, por ejemplo, cuando el estudiante expresa "longitud del lado del triángulo grande es a la longitud del lado del triángulo pequeño" o sintéticamente "grande es a pequeño como grande es a pequeño".

Las *imágenes desde la memoria*, cuando se presentan, pueden ser muy precisas y detalladas, aunque también puede ocurrir que no contribuyan a la comprensión matemática de los estudiantes. Consideramos en este tipo, para no tener puntos de encuentro con otros tipos de imágenes, únicamente imágenes desde la memoria de fórmulas y de diagramas. Es posible que los estudiantes puedan usar estas imágenes para ayudarse a recordar algoritmos y procedimientos. Por ejemplo, un estudiante recuerda que dos rectángulos diferentes superpuestos y coincidentes en un vértice y dos lados son semejantes si la diagonal trazada a partir del vértice común es diagonal de los dos rectángulos.

Las *imágenes cinéticas* son imágenes creadas, transformadas o comunicadas con ayuda de movimientos físicos. Por ejemplo, imaginar la superposición de dos triángulos con el objeto de visualizar (mediante una configuración de Thales) su semejanza usando el movimiento de las manos para comunicar este razonamiento.

Las *imágenes dinámicas* son las que incluyen el movimiento de un objeto en la mente, tanto si se apoyan en un movimiento continuo de la imagen concreta como en un movimiento a saltos. Por ejemplo, imaginar una composición de transformaciones en el plano para justificar la semejanza de triángulos.

En relación a las representaciones externas, seguiremos la definición dada en Gutiérrez (1996): son cualquier clase de representación verbal o gráfica de conceptos o propiedades incluyendo dibujos, bosquejos, diagramas etc. que ayudan a crear o transformar imágenes mentales y a hacer razonamiento visual.

2.4.2. Procesos de visualización

Identificamos los *procesos de visualización* como una acción mental o física donde están involucradas las imágenes mentales (Gutiérrez, 1996). Hay dos procesos de visualización, ya descritos en el capítulo 1: *Procesamiento visual de información (VP)* para crear imágenes e *interpretación de información figurativa (IFI)* para generar información. Estos dos procesos los hemos tenido en cuenta en el diseño de la unidad de enseñanza, es decir, al momento de diseñar las tareas, éstas contenían, por un lado, información para que los estudiantes usaran el proceso VP y, por otro, información para que ellos usaran el proceso IFI.

2.4.3. Habilidades de visualización

Los individuos deben adquirir y perfeccionar un conjunto de *habilidades de visualización* para interpretar los procesos necesarios con imágenes mentales específicas en un problema dado (Gutiérrez, 1996). Dependiendo de las características de los problemas matemáticos a resolver y las imágenes creadas, los estudiantes deben ser capaces de escoger entre varias de las habilidades visuales. Hoffer (1977) sugirió siete habilidades de visualización, descritas en el capítulo 1, las cuales hemos asumido con excepción de la habilidad de coordinación motriz de los ojos. Además, tenemos en cuenta en este estudio la habilidad de la rotación mental descrita por Gutiérrez (1996), también descrita en el capítulo 1. A continuación mencionamos el conjunto de habilidades que adoptamos y adicionamos ejemplos en el contexto de la semejanza:

La habilidad de identificación visual (IV) se utiliza, por ejemplo, para reconocer la semejanza de polígonos en una figura compuesta por varias figuras superpuestas o entremezcladas.

La habilidad de rotación mental (RM) es la habilidad necesaria, en el contexto de la semejanza, para rotar mentalmente una figura e imaginarla superpuesta a otra e identificar si son o no semejantes.

La habilidad de conservación de la percepción (CP) es la habilidad necesaria, por ejemplo, al reconocer que una figura, a la que dotaron de movimiento para verificar la semejanza con otra, mantiene su forma y propiedades matemáticas.

La habilidad de <u>reconocimiento de posiciones en el espacio</u> (RP) es la habilidad que permite, por ejemplo, identificar que una figura puede “encajar” en otra con el fin de verificar su semejanza.

La habilidad de <u>reconocimiento de relaciones espaciales</u> (RR) es la habilidad necesaria, por ejemplo, para identificar el teorema de Thales en una configuración gráfica.

La habilidad de <u>memoria visual</u> (MV) es la habilidad necesaria, por ejemplo, para recordar las características visuales y de posición que tienen los triángulos en posición de Thales.

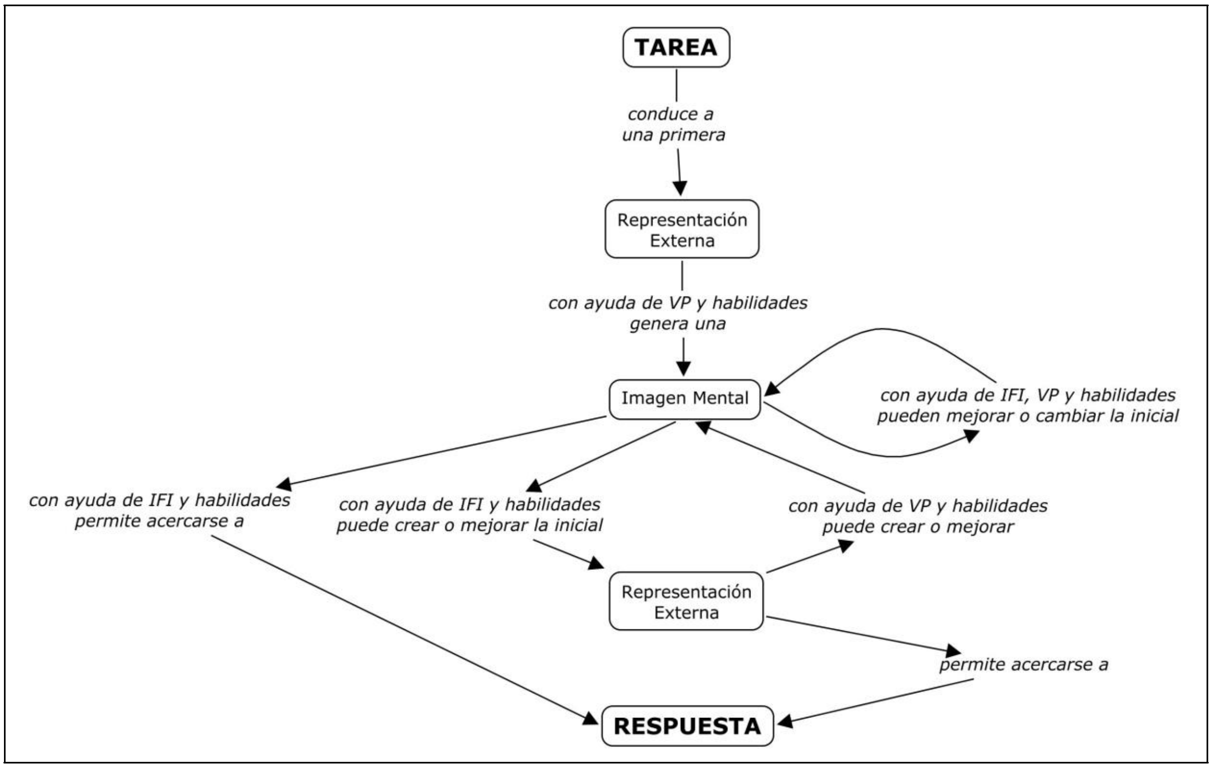
La habilidad de <u>discriminación visual</u> (DV) es la habilidad que permite, por ejemplo, comparar varias figuras geométricas o fotografías identificando sus similitudes y diferencias visuales para identificar su semejanza.

La diferencia básica entre las habilidades reconocimiento de relaciones espaciales (RR) y discriminación visual (DV) está en que la habilidad RR se usa para identificar relaciones de tipo matemático entre dos figuras, mientras que la habilidad DV se usa para identificar relaciones de tipo visual entre dos figuras. Se puede presentar discrepancia cuando una respuesta se base en una relación que tiene parte matemática y parte visual. Entonces, por ejemplo, decir que una figura es una foto de otra no es una relación matemática, sino visual, por lo que no se usa la habilidad RR, sino la habilidad DV.

Por otro lado, la diferencia entre las habilidades identificación visual (IV) y discriminación visual (DV) está en que la habilidad IV permite identificar figuras semejantes en una figura compuesta (por ejemplo mosaicos o figuras entremezcladas) y la habilidad DV permite seleccionar figuras semejantes entre un grupo de figuras dadas.

Siguiendo la estructura planteada por Gutiérrez (1996), a continuación presentamos un esquema que resume integralmente los principales elementos de visualización que se ponen en juego cuando se resuelven tareas matemáticas y, en particular, tareas relacionadas con la semejanza de figuras planas.

El esquema resume de manera general los pasos que creemos siguen los estudiantes cuando usan la visualización para resolver tareas matemáticas: El planteamiento de la tarea es interpretado por los estudiantes, dando lugar a una primera representación externa adecuada, la cual genera una imagen mental. Esta primera imagen inicia un proceso de razonamiento visual donde, dependiendo de la tarea, el proceso pertinente y las habilidades de los estudiantes, se irá transformando en otras imágenes mentales y/o representaciones externas antes de que los estudiantes lleguen a la respuesta.



Esquema 2.1. Principales elementos de visualización que integran la solución de una tarea.

2.4.4. Visualización y resolución de tareas

A continuación presentamos las definiciones de algunos constructos relaticos a la visualización tenidos en cuenta en nuestro estudio y relacionados con la actividad matemática de los estudiantes y el profesor (siguiendo los estudios de Presmeg, 1986a):

Métodos visuales y no visuales de solución de problemas matemáticos: *Un método visual de solución es aquel que involucra imágenes visuales, con o sin un diagrama, como una parte esencial del método de resolución, incluso si se emplea también razonamiento o métodos algebraicos. Un método de solución no visual es uno que involucra procedimientos no visuales como una parte esencial del método de solución*.

Visualidad matemática (VM): *La visualidad matemática de una persona es el grado de preferencia para usar métodos visuales cuando intenta resolver problemas matemáticos que pueden ser resueltos tanto por métodos visuales como por no visuales*.

Individuos visualizadores y no visualizadores: *Visualizadores son los individuos que prefieren usar métodos visuales cuando se enfrentan a problemas matemáticos que pueden ser resueltos por ambos métodos, visuales y no visuales.*

Los no visualizadores son individuos que prefieren no usar métodos visuales cuando resuelven tales problemas.

Presentación visual: *Una presentación visual es una forma de enseñanza que involucra formación y uso de imágenes por el profesor o los estudiantes o por ambos*.

Visualidad en la enseñanza (VE): *La visualidad en la enseñanza de un profesor de matemáticas es el grado en que el profesor usa presentaciones visuales [dibujos, gráficos, listas, tablas, etc.] cuando enseña matemáticas*.

Profesores visuales y no visuales: *Un profesor visual es un profesor de alta visualidad en la enseñanza. Un profesor no visual es un profesor de baja visualidad en la enseñanza*.

Teniendo en cuenta la definición de Presmeg (1986a) de visualizadores y no visualizadores y la taxonomía de Krutetskii (1976), en relación a los tipos de pensamiento, planteamos una definición para clasificar a aquellos estudiantes que no es posible ubicarlos en la categoría de visualizadores o no visualizadores.

Estudiantes de pensamiento armónico: son aquellos estudiantes que no tienen una marcada inclinación por usar métodos visuales o no visuales en la resolución de problemas matemáticos que pueden ser resueltos por uno u otro método.

A modo de conclusión

A continuación mostramos un esquema que resume la relación entre los objetivos propuestos y los diferentes elementos del marco teórico.

OBJETIVOS	REFERENTES TEÓRICOS
Caracterización de elementos del desarrollo profesional del docente ante el proceso de enseñanza/aprendizaje de los estudiantes en situaciones matemáticas escolares del tema de semejanza de figuras planas que son nuevas para él.	- Conocimiento profesional. - Desarrollo profesional. - Práctica situada. - Reflexión sobre la práctica.
Caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele y el uso de elementos de visualización de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas relacionadas con la semejanza de figuras planas.	- Niveles y fases del modelo de Van Hiele (descripción inicial de niveles de Van Hiele para la semejanza, propiedades). - Visualización matemática (imágenes mentales, representaciones externas, procesos y habilidades).
Diseño e implementación de una práctica profesional sobre semejanza de figuras planas teniendo en cuenta el modelo de razonamiento de Van Hiele y aspectos relacionados con la visualización.	- Niveles y fases del modelo de Van Hiele. - Visualización matemática. - Modos de representación de la semejanza. - Tipos de problemas y/o ejercicios en la semejanza.

Esquema 2.2. Relación entre objetivos propuestos y elementos del marco teórico.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

Abordar una metodología de investigación requiere de una reflexión anticipada que ayude a dar coherencia a los objetivos planteados, a su contexto y a los instrumentos de investigación que se emplean. En el estudio que planteamos existen dos partes bien diferenciadas; por un lado, los objetivos que perseguimos en relación a la práctica del profesor, y por el otro, los objetivos en relación a la actividad de los estudiantes.

En general, no pretendemos obtener resultados que nos permitan establecer leyes generales, es decir, no buscamos abstracciones universales sino concretas y específicas universalidades (Erickson, 1989). No obstante, creemos que las descripciones que aporte este estudio y las relaciones y cuestiones que ponga de manifiesto, apoyados y contrastados con los de otros estudios, puedan ayudarnos a construir explicaciones, por una parte, sobre el desarrollo profesional del profesor, y por la otra, sobre la caracterización de los niveles de Van Hiele y elementos de visualización a partir del análisis de las actuaciones de los estudiantes en tareas de semejanza.

El capítulo lo iniciamos presentando las características generales metodológicas (3.1). Se enuncia los elementos que conforman la recogida de información (3.2.), así como criterios y procedimientos de análisis y tratamiento de datos (3.3.); y por último, se hace una descripción de la población y el contexto (3.4). Todos en relación al caso del profesor y de los estudiantes. Finalmente se da un esquema de resumen (3.5).

3.1. ELEMENTOS GENERALES METODOLÓGICOS

Explicamos los tipos de metodología empleados en cada una de las partes en que se subdivide el trabajo.

3.1.1. Sobre la práctica del profesor

La intención de hacer un seguimiento para efectuar una caracterización del desarrollo profesional con miras a efectuar y mantener un relativamente amplio campo de aspectos a observar en este desarrollo, profundizando de este modo nuestra comprensión del fenómeno, nos ha llevado a restringir nuestro estudio al caso de un profesor. Se trata, por tanto, de un estudio de casos (de un caso) (donde usamos este término con el sentido que le dan LeCompte y Preissle, 1993 refiriéndose al "número de unidades de estudio"). Coincidimos con la perspectiva de Cohen y Manion (1994), quienes atribuyen a los estudios de casos el propósito de *indagar en profundidad y analizar intensivamente el fenómeno multifacético que constituye el ciclo de vida de la unidad con vistas a establecer generalizaciones sobre la población más amplia a la que la unidad pertenece* (pág. 106). Estas generalizaciones, no obstante, tienen sus limitaciones y deben ser tratadas con cautela, apoyadas, como ya hemos señalado, en otros estudios.

La caracterización del desarrollo profesional implica "comprender" el proceso llevado a cabo por el profesor durante el estudio. Con dicha comprensión nos referimos a construir nuestra propia interpretación del suceso. Esta interpretación será una construcción del investigador, a partir de lo que éste considera que se pone de manifiesto (respecto de su desarrollo en relación con la enseñanza de la semejanza) en las actuaciones, declaraciones y documentos que el profesor produce. Esta focalización recoge las interpretaciones del propio profesor para nutrirse de ellas. Además de la consideración de los significados e intenciones que manifiesta atribuir a sus acciones y pensamientos, esto nos ha llevado en ocasiones a indagar explícitamente sobre su interpretación de los sucesos y de su propio proceso de desarrollo y a contrastar nuestras interpretaciones con las suyas. Podemos decir que *los significados inmediatos y locales de las acciones, según se definen desde el punto de vista de los actores*, han sido foco de interés en nuestro trabajo, lo que consideramos lo acerca a un enfoque interpretativo de la investigación (cuya "esencia", para Erickson, 1989, pág. 196, viene dada por el interés señalado).

3.1.2. Sobre la actividad de los estudiantes

Respecto a los estudiantes involucrados, intentar hacer un seguimiento para efectuar una caracterización de sus razonamientos desde las teorías de Van Hiele y de la visualización, con miras a efectuar y mantener un relativamente amplio campo de aspectos a observar en este sentido, profundizando de este modo en nuestra comprensión del fenómeno, nos ha llevado a restringir nuestro estudio al caso de un grupo de 27 estudiantes. Según Eisenhardt (1989) un estudio de caso debe entenderse como *una estrategia de investigación dirigida a comprender las dinámicas presentes en contextos* *singulares*, la cual podría tratarse del estudio de un único caso o de varios casos, combinando distintos métodos para la recogida de evidencia cualitativa y/o cuantitativa con el fin de describir, verificar o generar teoría. En este sentido, para nuestro estudio, se trata de un estudio de casos múltiple.

La caracterización de los razonamientos de los estudiantes requiere "comprender" el proceso llevado a cabo por los estudiantes durante el estudio. Con dicha comprensión nos referimos a construir nuestra propia interpretación del suceso. Esta interpretación será una construcción del investigador, a partir de lo que éste considera que se pone de manifiesto (respecto de sus razonamientos en relación con el aprendizaje de la semejanza) en las actuaciones, declaraciones y documentos que los estudiantes producen en relación a las tareas planteadas. De acuerdo con Yin (1989), la cuestión de generalizar a partir del estudio de casos no consiste en una *generalización estadística* (desde una muestra o grupo de sujetos hasta un universo), como en las encuestas y en los experimentos, sino que se trata de una *"generalización analítica"* (utilizar el estudio de caso único o múltiple para ilustrar, representar o generalizar a una teoría). Así, incluso los resultados del estudio de un caso pueden generalizarse a otros que representen condiciones teóricas similares. Los estudios de casos múltiples refuerzan estas generalizaciones analíticas al diseñar evidencia corroborada a partir de dos o más casos ("replicación literal") o, alternativamente, para cubrir diferentes condiciones teóricas que dieran lugar, aunque por razones predecibles, a resultados opuestos ("replicación teórica").

Por tanto, la cuestión de la generalización de los estudios cualitativos (incluido el estudio de caso) no radica en una muestra probabilística extraída de una población a la que se puedan extender los resultados, sino en el desarrollo de una teoría que puede ser transferida a otros casos. De aquí que algunos autores prefieran hablar de transferibilidad, en vez de generalización, en la investigación de naturaleza cualitativa (Maxwell, 1998).

3.2. LA RECOGIDA DE INFORMACIÓN

Los instrumentos diseñados para este estudio intentan recoger la "complejidad cognitiva" de la idea de desarrollo profesional del profesor de matemáticas en su práctica instruccional en contextos específicos (enseñanza del tópico geométrico semejanza a determinados estudiantes), y la caracterización de las formas de razonamiento de dichos estudiantes cuando se enfrentan a tareas de semejanza desde la óptica de los niveles de Van

Hiele y la visualización. En nuestro estudio hemos tenido en cuenta diferentes fuentes de información con el fin de confrontar la información obtenida como lo sugieren diversos autores (Erickson, 1986; Mathison, 1988; Schoenfeld, 2000) cuando plantean llevar a efecto la triangulación de la información, es decir, la confrontación de la información obtenida de fuentes distintas y en situaciones variadas.

Con el objeto de anticiparnos a las dificultades imprevistas que a menudo aparecen en la toma de datos y en procura de afinar los diferentes instrumentos de toma de datos, realizamos una experimentación piloto. Dicho experimento fue llevado a cabo entre los meses de octubre y noviembre del curso escolar 2007, en una institución privada de estrato medio en la ciudad de Floridablanca (Colombia), con estudiantes de grado noveno. Dicha experimentación nos permitió entre otras cosas: (a) Practicar la técnica experimental elegida e identificar problemas no esperados en el proceso de recogida de datos (grabaciones en video, observaciones de clase, etc.). (b) Afinar las preguntas de la entrevista inicial, entrevistas semiestructuradas (pre y post sesión de clase) en aspectos tales como: redacción, pertinencia (que realmente incluyeran aspectos que nos permitieran analizar los avances del profesor en su desarrollo profesional), estimación del tiempo empleado en su desarrollo. (c) Afinar las actividades de la unidad de enseñanza en aspectos como: redacción, pertinencia (que realmente incluyeran aspectos que nos permitieran "ver" las formas de razonamiento de los estudiantes), nivel de dificultad, estimación de tiempo de resolución, etc.

3.2.1. Datos del profesor

Para efectos de la triangulación que hemos hablado, varias han sido las fuentes de información que planeamos obtener: entrevista inicial (mediante cuestionarios), entrevistas semiestructuradas, grabaciones en video y observaciones de clase, las cuales comentaremos a continuación.

La entrevista inicial

Como hemos dicho, la entrevista inicial se realizó mediante dos cuestionarios (anexo 2) cuyos objetivos fueron obtener información acerca del posicionamiento inicial del profesor y establecer las concepciones y creencias que sobre la enseñanza y aprendizaje exhibe el profesor y su grado de aceptación (en el caso de la parte II), interpretando las valoraciones asignadas por el profesor. El primero, que consta de 20 preguntas, es de respuesta abierta e incluye aspectos relacionados con el desarrollo profesional (preguntas 1 a 4), la concepción de las matemáticas (preguntas 5 y 6), la enseñanza (preguntas 7 a 14), el tema de estudio (preguntas 15 a 18) y el aprendizaje (preguntas 19 y 20).

El segundo cuestionario, que consta de 12 preguntas, está basado en una escala valorativa que plantearon Gil y Rico (2003), al cual, para nuestro estudio, hemos hecho algunas adaptaciones[29] con el fin de incluir aspectos propios de los objetivos que perseguimos. Este cuestionario incluye aspectos relacionados con la práctica docente (preguntas 1 a 4), cuestiones epistemológicas sobre la enseñanza (preguntas 5 y 6), criterios para la valoración de algunos aspectos de la enseñanza (preguntas 7 a 9), y cuestiones relativas a las dificultades del aprendizaje (preguntas 10 a 12). Cada una de las preguntas presenta diversas opciones de respuesta (ítems). Los ítems en cada caso no son alternativos, expresan diferentes concepciones o creencias ante la cuestión general que las inserta. En total el cuestionario está constituido por 57 enunciados y puntuaciones de 1 a 5 (donde 1 indica "muy en desacuerdo", 2 "en desacuerdo", 3 "indiferente", 4 "de acuerdo" y 5 "muy de acuerdo"); cada uno de ellos expresa, junto con la pregunta que lo origina, una concepción o creencia sobre la enseñanza/aprendizaje.

Estos cuestionarios se aplicaron dos semanas antes de iniciar la experimentación en una reunión que sostuvieron el investigador y el profesor durante una sesión de trabajo de aproximadamente una hora y media un día no laborable en el lugar de residencia del profesor.

Las entrevistas semiestructuradas

Dentro de la variada bibliografía sobre el tema de las entrevistas, se constata que es uno de los instrumentos más empleado en investigación cualitativa. Se encuentra, también, que ha habido variadas definiciones y matices al término; por ejemplo Taylor y Bogdan (1986) sugieren el término *entrevistas cualitativas en profundidad* para referirse a los "reiterados encuentros cara a cara entre el investigador y los informantes, dirigidos hacia la comprensión de las perspectivas que tienen éstos respecto de sus vidas, experiencias o situaciones, tal como las expresan con sus propias palabras" (Taylor y Bogdan, 1986, pág. 101; citado en Escudero, 2003). Así mismo, Patton (1983; citado en Escudero, 2003) sugiere tres aproximaciones de tipos de entrevista cualitativa: *la conversación informal*, *la entrevista semiestructurada* y la *entrevista estándar de respuesta sí/no*. Patton sugiere que

[29] Adaptaciones que no modifican la esencia del mismo, dado que las hemos redistribuido y agregado dos preguntas que hacen referencia, una al papel que juegan las imágenes en el proceso enseñanza/aprendizaje, y otra en relación a la actitud asumida por el profesor cuando se enfrenta a una propuesta nueva de currículo o una nueva forma de enseñanza de un tema de matemáticas.

una característica común entre estas tres aproximaciones es que las personas pueden expresar sus perspectivas personales, es decir, expresarse con sus propias palabras.

Para nuestro estudio optamos por la entrevista semiestructurada dado que era de nuestro interés obtener información sobre determinadas cuestiones relevantes. Entendemos la entrevista semiestructurada como un diálogo informal basado en una lista de cuestiones que se quieren explorar durante el transcurso de la misma (Goetz y LeCompte, 1988). De este modo, la entrevista semiestructurada nos proporcionaba un marco dentro del cual poder plantear cuestiones pertinentes para nuestro estudio, organizarlas y secuenciarlas. Concretamente, en la práctica, optamos porque la entrevista fuera una conversación amigable y que no pareciera un interrogatorio, en la que el investigador iba planteando las cuestiones de forma tal que el profesor se sintiera libre de expresar sus opiniones.

En nuestro estudio, las entrevistas semiestructuradas (anexo 3) constan de dos momentos bien definidos durante el desarrollo de la experimentación, uno en el cual el profesor e investigador se reunían previamente a la sesión de clase (presesión) y el otro en el cual se reunían después de la sesión de clase (postsesión). En la entrevista presesión, se trataban asuntos (relacionados con la enseñanza: métodos conocidos por el profesor, aspectos relevantes a enseñar; aspectos relacionados con la organización de la enseñanza y el aprendizaje: dificultades, errores y estrategias previsibles en los estudiantes con relación al tópico estudiado) pertinentes a la sesión de clase que se desarrollaría a futuro y en la entrevista postsesión, se trataban asuntos (que principalmente tenían como objetivo contrastar lo que el profesor había respondido en la entrevista presesión, también en relación a la enseñanza y el aprendizaje del tópico estudiado) pertinentes a la sesión de clase que se acababa de desarrollar.

Un aspecto importante en la entrevista postsesión es que el profesor reflexionaba sobre aspectos de la enseñanza y el aprendizaje, y cada vez se hacía consciente de las mejoras que podía implementar a futuro. En este mismo sentido, una idea que se tuvo en cuenta en esta entrevista fue "ver" de qué manera los argumentos proporcionados por el profesor tenían relación con la conducta seguida en el aula de clase. Se propuso buscar las justificaciones a las posibles modificaciones de la práctica en relación al posicionamiento inicial del profesor. Como se comentó en un capítulo anterior, las entrevistas fueron diseñadas teniendo en cuenta el Ciclo Reflexivo de Smyth, lo cual permitió al profesor reflexionar sobre su práctica en el tópico que estaba enseñando. Dicho proceso reflexivo ha permitido al profesor y al investigador hacer explícitos algunos aspectos del desarrollo profesional del profesor en la acción.

Las grabaciones en video

Las grabaciones en video son uno de los instrumentos que con frecuencia se han utilizado en investigaciones sobre el desarrollo profesional del profesor (en relación con su práctica profesional) y sobre aspectos cognitivos de los estudiantes en relación con la resolución de determinadas tareas; todo lo anterior dada la posibilidad que ofrece de captar con gran fidelidad lo que sucede en el aula de clase y la posibilidad que ofrece de analizar, las veces que sea necesario, algún fragmento de las grabaciones que sea de interés para el investigador.

Siguiendo las indicaciones anteriormente planteadas y la experiencia que nos dejó la experimentación piloto, para las grabaciones se hizo énfasis en los siguientes puntos: (a) Teniendo en cuenta el estudio (cuyos focos eran la práctica del profesor) decidimos usar una cámara móvil en el aula de clase que siguiera todas las actuaciones del profesor durante los diferentes momentos: introducción de la actividad, orientaciones a los estudiantes, puesta en común después de finalizar cada actividad, etc. (b) Decidimos que la unidad de medida de las grabaciones debía ser durante toda la unidad didáctica y no una unidad temporal (algunas sesiones de clase por ejemplo), ya que lo que se pretendía era analizar la relación desarrollo profesional-práctica a lo largo de la unidad didáctica completa, por lo que nos interesaba tener observaciones de todos los momentos de la clase. Concretamente, se grabaron todas las sesiones de clase que empleó el profesor en la unidad didáctica de la semejanza. Con el objeto de recoger aquellos aspectos de la clase que no quedaban registrados en la grabación, se tuvo en cuenta incluir en nuestro diseño la observación de clase.

Las observaciones de clase

La necesidad de completar los datos que no pudieran ser captados por las grabaciones, nos indujo a incluir en el diseño de la investigación la *observación* como instrumento de investigación que nos permitiera complementar los datos. Dichos datos relacionados con aspectos sociales, incidentes críticos, información importante sobre sucesos de aula que fuesen relevantes para la entrevista postsesión. Como lo sugieren diferentes autores (Goetz y LeCompte, 1988; Erickson, 1992) algunas características de este instrumento hacen que la información que se recoja pueda depender mucho de la subjetividad del investigador. En relación a este posible obstáculo, debíamos ser cuidadosos con las observaciones, es decir, recoger detalladamente la información que nos interesaba.

La recogida de la información fue de manera narrativa, sin categorías predeterminadas y registrando segmentos de acontecimientos o conductas en forma escrita. Lo registrado tenía una doble intención: por un lado, realizar anotaciones de todo aquello que acontece en el aula; y por el otro, realizar reflexiones que incluyen impresiones, dudas, ideas, y demás inquietudes manifiestas en la clase.

3.2.2. Datos de los estudiantes

Con el fin de efectuar una complementación de los datos recogidos de las actuaciones de los estudiantes, dos han sido las fuentes de información que planeamos obtener: producciones escritas y grabaciones en video.

Las producciones escritas

Como se explicó con anterioridad, en la jornada escolar cada estudiante desarrollaba la actividad correspondiente y al final de la clase eran recogidas por el profesor. Este realizaba los análisis que consideraba necesarios (rendimiento de los estudiantes, formas de resolución y formas de escritura en las mismas) y posteriormente las entregaba al investigador. Toda vez que el profesor e investigador notaban que en las producciones escritas de los estudiantes no se estaban plasmando las formas de solución de manera adecuada (por ejemplo, poca información sobre el procedimiento utilizado), motivaban a estos estudiantes para que lo hicieran. En este sentido se notó por parte de un buen número de casos que se avanzó en la manera de redacción de las formas de resolución. La intención de la insistencia en la forma de escribir las formas de resolución tenía como objetivo poder “ver” los razonamientos usados por los estudiantes y poder complementar esta información con la obtenida en las grabaciones en video que realizamos con los estudiantes.

Las grabaciones en video

Este instrumento nos permitió captar con gran fidelidad lo que los estudiantes razonaban (verbalmente) al momento de solucionar las tareas planteadas, lo que nos posibilitó complementar la información obtenida en las producciones escritas. Concretamente, la complementación tiene que ver con el hecho de que los estudiantes, en ocasiones, a pesar de haber razonado sobre las posibles formas de resolución, no las escribían en sus hojas de trabajo, además, como estábamos interesados en caracterizar elementos de visualización (principalmente imágenes visuales y habilidades de visualización), las grabaciones nos permitieron “ver” las actitudes de los estudiantes en relación, por ejemplo, al movimiento de sus manos (señalando cómo podían transformar una figura). Además de la observación que pudimos hacer de las grabaciones, al mismo tiempo, íbamos transcribiendo fragmentos de las grabaciones que nos parecían interesantes para justificar las clasificaciones y posteriores caracterizaciones que pretendíamos hacer de los estudiantes.

Utilizamos dos cámaras de video, una fija y otra móvil. La cámara fija captó durante toda la experimentación a uno de los grupos (que por sugerencia del profesor, por el conocimiento que tenía de esos estudiantes, era un grupo disciplinado y tenía facilidad de verbalizar en las producciones escritas) con el fin de tener información completa de sus producciones. La cámara móvil captaba diferentes momentos durante el desarrollo en los demás grupos formados. Además, toda vez que el investigador o profesor intervenían en algún grupo, esta cámara los seguía con el fin de captar la conversación que mantenían. Los registros de las dos cámaras fueron un importante complemento de información. A mayor cantidad de registros sobre la resolución de determinada tarea más confiable la caracterización que pretendíamos realizar.

3.3. CRITERIOS Y PROCEDIMIENTOS DE ANÁLISIS DE LOS DATOS

Describiremos los criterios y procedimientos usados en el análisis de la información, tanto del profesor como de los estudiantes. Resaltamos que el análisis de los datos recogidos a través de los diferentes instrumentos se realizó, en general, en dos momentos diferentes:

Un primer análisis, que llamaríamos “informal”, surgió durante la recogida de la información. Como fruto de las reflexiones diarias del investigador, se elaboró un primer listado de ideas, conjeturas, intuiciones y preguntas sobre lo que se estaba produciendo en el aula de clase. El análisis más “formal” se hizo una vez se terminó la experimentación y se transcribieron las observaciones de clase, se editaron los videos, se transcribieron las entrevistas semiestructuradas (pre y postsesión); y, en general, se organizó la información recolectada; momento en el cual se focalizó el estudio específico de la información.

Como hemos dicho antes, hemos utilizado el método de triangulación en el que se reúnen los datos obtenidos sobre una misma situación (o sobre algunos aspectos de la misma) efectuados desde diversas perspectivas para compararlos, contrastarlos, y complementarlos.

3.3.1. Sobre el profesor

En relación a la entrevista inicial, en la primera parte (cuestionario I) hemos realizado un análisis descriptivo por bloques de preguntas[30]. De éste obtuvimos una primera aproximación acerca del posicionamiento inicial del profesor en relación al desarrollo profesional, la concepción de las matemáticas, la enseñanza del tema de estudio, y el aprendizaje. En la segunda parte (cuestionario II) de la entrevista inicial, hemos realizado un análisis cuantitativo de las respuestas a las preguntas en bloques. Así, por ejemplo, en la primera pregunta, que contiene ocho ítems (cada uno con una valoración de 1 a 5, donde 1 indica "muy en desacuerdo", 2 "en desacuerdo", 3 "indiferente", 4 "de acuerdo" y 5 "muy de acuerdo"), promediamos dichas valoraciones para obtener así una cuantificación a dicha pregunta. Dicho promedio nos indica el grado de aceptación del profesor a las opciones presentadas. Posteriormente, a la cuantificación, pregunta por pregunta, promediamos dichos resultados de las preguntas que corresponden a cada bloque. Así, por ejemplo, el primer bloque que contiene cuatro preguntas, se promediaron los resultados tomando las valoraciones por pregunta, y se obtuvo uno nuevo que indica el grado de aceptación del profesor a los planteamientos hechos en relación al desarrollo profesional.

Con base en los resultados de los dos análisis anteriores (parte I y II de la entrevista inicial) hemos realizado una integración de los mismos con el fin de obtener el posicionamiento inicial del profesor en términos de conocimiento profesional (particularmente ante la enseñanza/aprendizaje del contenido matemático semejanza).

En relación a las entrevistas semiestructuradas (pre y postsesión), depués de realizada la transcripción completa de las mismas (anexo 4), el proceso de tratamiento analítico siguió, en la práctica, los siguientes pasos:

1. Lectura de las transcripciones, delimitando o subrayando los fragmentos textuales que se referían a cada uno de los tres componentes del contenido de desarrollo profesional (matemático, didáctico y actitudinal). Al margen se iban haciendo anotaciones (códigos), para indicar a cuál de los aspectos de cada componente correspondía cada fragmento transcrito. El siguiente cuadro muestra un breve ejemplo de este paso del análisis de protocolos.

[30] Como se dijo antes, bloques de preguntas organizados en relación al desarrollo profesional, a la concepción de las matemáticas, a la enseñanza, al tema de estudio, y al aprendizaje.

PREGUNTAS (después de la sesión)	RESPUESTAS	CÓDIGOS	CARACTERÍSTICAS DE LAS RESPUESTAS
Al terminar la primera sesión de clase he echado en falta un momento final para conclusiones y que, inclusive, los estudiantes las hubieran escrito en su cuaderno de notas ¿cuál es el por qué de esta situación?	*... Como matemático, de alguna manera, siento algo parecido a la vergüenza, porque hasta hace unos días yo pensaba que todos los rectángulos eran semejantes. Al analizar este trabajo, que tú estás haciendo, tomo conciencia de que no. Pienso que esto es consecuencia de que en un 99% la enseñanza de la geometría, especialmente de la semejanza, no pasa del nivel visual.*	CAI2	En la componente comportamental, en relación a las actitudes, emociones, valores y apreciaciones, el profesor se muestra interrogativo-crítico al poner en cuestión formas de conocimiento.

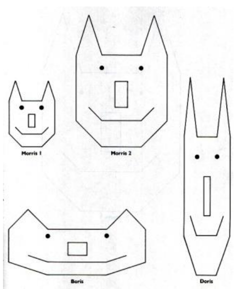
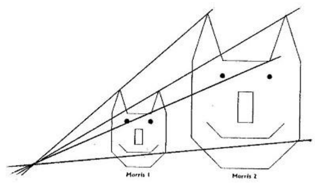
Cuadro 3.1. Ejemplo de análisis de protocolos de las entrevistas con el profesor.

2. Una vez hecha la codificación en las transcripciones, se procedió a juntar todos los fragmentos que se referían a un mismo componente. Para ello, se usan cuadros como los que se explican en el capítulo 4.

3. Con el material reunido, se procedió a interpretarlo componente a componente para, al final, caracterizar elementos del desarrollo profesional del profesor durante la experimentación utilizando los momentos *inicial*, *intermedio* y *final* del instrumento trayectoria de desarrollo profesional (TDP).

Hemos utilizado el concepto de “viñeta” (Gavilán, García, y Llinares, 2007) como un medio para organizar la información y poder, de esta forma, realizar inferencias posteriores acerca de la práctica del profesor. En nuestro estudio hemos adaptado este concepto a las fuentes de información de que disponemos y la viñeta es un informe sobre aspectos de la práctica del profesor que integra información de diferentes fuentes: posicionamiento inicial, descripción e interpretación de las entrevistas semiestructuradas (pre y postsesión), descripción e interpretación de lo que sucede en los segmentos de enseñanza (tomados de las grabaciones en video de las sesiones de clase) y las observaciones de clase. En las viñetas además se integran inferencias realizadas por el investigador con el fin de mostrar qué interpretaciones se han realizado y su vinculación con la evidencia empírica.

En nuestro estudio, la viñeta incluye: (a) el lugar cronológico en el que sucede la acción del profesor en relación con la unidad didáctica, (b) las tareas que se plantean a los estudiantes y que definen el objeto de interacción entre el profesor y los estudiantes, (c) lo que el profesor hace y dice durante la gestión a través de la transcripción del discurso y la descripción de lo que sucede en el aula, (d) la justificación que hace el profesor de la gestión realizada, y (f) la inferencia realizada por el investigador respecto al impacto del proceso reflexivo sobre la práctica en los logros demostrados por los estudiantes. Hemos usado la viñeta con el fin de reconocer características del desarrollo profesional que permiten situar al docente frente a su posicionamiento y práctica reflexiva profesional respecto al contenido matemático de semejanza. En el apartado 4.2.3. mostramos el formato y diseño correspondiente, y un ejemplo de este recurso. El siguiente cuadro muestra un breve ejemplo de este paso del análisis de protocolos.

Actividad Nº 1	**Sesión de clase Nº** 1	**Contenido matemático:** Noción intuitiva	
TAREA	**OBJETIVO Y CARACTERÍSTICAS PRIVILEGIADAS**	**COMENTARIOS Y PREGUNTAS CLAVE DEL PROFESOR (A) Y RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES (E):**	
En el dibujo aparecen las máscaras de Morris I, Morris II, Boris y Doris. ¿Cuáles de ellas tienen la “misma forma” y cuáles, simplemente, “se parecen”? Justifique su respuesta. 	• Hacer explícitas las concepciones intuitivas previas sobre tener la “misma forma” y “ser parecido”. • Reconocer e identificar figuras planas que tienen la misma forma y figuras planas que son parecidas. **Aproximación al concepto:** figuras separadas. **Tipo de problema:** problema de identificación de relaciones. **Tipo de representación:** lenguaje figurativo. **Nivel de Van Hiele:** 1. **Fase de aprendizaje:** información.	A: *No olviden que a partir de ahora, yo no les voy a decir como se hacen las cosas, ustedes deben pensar por su cuenta y tratar de desarrollar las actividades que les vamos planteando.* A: *¿Por qué has trazado los segmentos de recta que une los vértices de Morris 1 y Morris 2?* E: *Tienen la misma forma Morris 1 y Morris 2, sólo que Morris 2 está proyectada más grande, pero siempre conserva su forma original.*	

Cuadro 3.2. Ejemplo de interpretación de fragmentos relacionados de protocolos de las entrevistas con el profesor.

3.3.2. Sobre los estudiantes

Con relación a las producciones escritas, hemos realizado un análisis descriptivo de cada una de las actividades teniendo en cuenta dos aspectos; por un lado, el nivel de Van Hiele que exhibieron los estudiantes y, por el otro, los elementos de visualización que usaron en sus razonamientos. Para los análisis de las producciones escritas nos apoyamos además en las grabaciones en video (particularmente las transcripciones con todo detalle de los segmentos de aspectos que nos parecieron de interés) que se captaron durante el desarrollo de toda la unidad de enseñanza.

El análisis desde cada aspecto se hizo por separado, es decir, primero uno y luego el otro. Para el análisis teniendo en cuenta los niveles de Van Hiele, usamos la caracterización a priori que planteamos, descrita en los capítulos 1 y 2, y para el análisis teniendo en cuenta la visualización, usamos la caracterización que planteamos para las imágenes mentales y habilidades de visualización, también descrita en los capítulos 1 y 2.

La asignación de los niveles de razonamiento se realizó teniendo en cuenta, como punto de partida, la lista de descriptores de nivel que planteamos en el capítulo 2 (sección 2.3.1). Cuando no era posible asignar ningún descriptor a una respuesta de un estudiante, definíamos un descriptor emergente que añadíamos a la lista inicial. Ello nos permitió ampliar el listado inicial y obtener una caracterización más detallada de los niveles de razonamiento de los estudiantes en el contexto de las tareas de semejanzas planteadas.

Después de asignar un determinado nivel a todas las resoluciones de las tareas por cada estudiante, en algunos casos hubo dificultad para asignar un nivel de razonamiento global al estudiante. Esto coincide con lo observado por investigadores como Usiskin (1982), Burger y Shaughnessy (1986) y Fuys y otros (1988) de que, en ocasiones, un estudiante da muestras de razonamiento en dos niveles consecutivos, debido a que está transitando entre el primer y el segundo niveles que ha utilizado. Con el fin de superar esta situación, decidimos clasificar a estos estudiantes en el nivel inferior de razonamiento usado (por ejemplo, el nivel 2) con un aparente transito por el nivel superior (el nivel 3).

Al final, extrajimos las asignaciones hechas en cada caso y elaboramos un listado de características para cada nivel de Van Hiele, para las imágenes mentales y las habilidades de visualización.

En la práctica, organizamos las producciones en grupos de actividades relacionadas, posteriormente, observábamos lo que cada estudiante había realizado y le asignábamos, según fuera, alguna categoría (de los niveles de Van Hiele o de la visualización).

3.4. DESCRIPCIÓN DE LA POBLACIÓN Y EL CONTEXTO

Ya hemos enunciado que realizamos un estudio de caso único con un grupo de alumnos de grado 9 con su profesor de matemáticas. A continuación describimos sus características principales.

3.4.1. El profesor

El participante en el estudio fue un profesor de matemática de Secundaria en ejercicio, con una amplia experiencia docente, que cuando se desarrolló la investigación ejercía su enseñanza en Pamplona (Colombia) en dos centros de Enseñanza Secundaria desarrollando las matemáticas de los grados noveno a undécimo y la física de los grados décimo y undécimo. Durante los últimos ocho años (aproximadamente) no ha asistido a cursos de perfeccionamiento, ni seminarios permanentes sobre didáctica, ni jornadas y congresos de profesores; lo anterior, no porque el profesor desconozca su importancia, sino por dificultades de tiempo.

El profesor fue seleccionado teniendo en cuenta que es un profesor ampliamente conocido en el gremio de profesores de Pamplona por su experiencia docente y dedicación a su labor docente, lo cual nos indujo a dialogar con él y hablarle del proyecto de investigación que estamos desarrollando. El profesor recibió con agrado la invitación a participar en el mismo; le pareció muy importante e interesante participar en este tipo de proyectos que le puedan aportar alguna mejora en su labor profesional; de inmediato mostró su predisposición a colaborar.

El profesor (*Antonio*)[31] tenía una experiencia docente de 28 años. Después de terminar su primera Licenciatura[32] (en Matemáticas) en la Universidad de Pamplona, accedió por concurso[33] a una plaza en el magisterio colombiano como profesor de matemática. Durante la mayor parte de ese tiempo (26 años) ha estado impartiendo clase en otro colegio de bachillerato (privado)[34] de Pamplona, paralelamente con el colegio público al que fue asignado desde sus comienzos.

3.4.2. Los estudiantes

Los estudiantes seleccionados para el desarrollo de la investigación fueron los

[31] Seudónimo del profesor participante en la investigación.

[32] Posteriormente obtuvo una Licenciatura en Física en la misma universidad.

[33] Equivalente a lo que en España se denomina acceder por oposición.

[34] Colegio en el cual se desarrolló la experimentación. De ahora en adelante en la redacción se hará referencia a este colegio sin decir que fue donde se llevó a cabo dicha experimentación.

integrantes de un curso de décimo grado (14-16 años) formado por 27 estudiantes[35] (19 chicas y 8 chicos) que habían sido alumnos de *Antonio* en el curso anterior (2007) y que en el curso 2008, en el que se realizó la experimental del presente estudio, también lo eran.

A pesar de que el tema de semejanza es de noveno grado -según lo sugieren los Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación Nacional de Colombia: MEN (MEN, 1998) y la planeación curricular del colegio- este tema no alcanzó a ser desarrollado por el profesor durante el año escolar anterior; es por esto que el investigador y el profesor optaron por iniciar la geometría del grado décimo con este tema; es decir, los estudiantes no habían tenido contacto escolar previo con el tema matemático de estudio.

3.4.3. El colegio

El colegio donde se desarrolló la investigación está ubicado en un barrio de nivel socioeconómico medio y en el cual ofertan todos los niveles educativos (infantil hasta grado undécimo). El colegio fue seleccionado después de un análisis del investigador y el profesor implicado acerca de la conveniencia de realizar la investigación planeada, en uno u otro, en los que el profesor trabajaba; concluimos que el más apropiado sería el colegio privado (en la jornada de la mañana) dado que los estudiantes de décimo grado con los que se realizaría la experiencia eran más disciplinados, habría más colaboración por parte de las directivas del plantel, además porque podíamos disponer de un aula de informática, retroproyector y otros implementos que eran importantes para el desarrollo de la misma. También, en esta institución, se podría contar con otro elemento importante, controlar el ruido externo. En esta institución están culturizados todos los miembros de la comunidad a manejar niveles bajos de ruido, lo cual nos permitiría obtener mayor nitidez a la hora de realizar las grabaciones de audio.

3.5. A MODO DE RESUMEN

Como resumen, presentamos un esquema (fruto de la ampliación del que presentamos al final del capítulo 2) que relaciona los objetivos, los elementos del marco

[35] Para efecto de conservar la confidencialidad que pueda generar la participación de cualquiera de los estudiantes implicados –especialmente por ser menores de edad- se utilizarán seudónomos para el análisis de las producciones de cada uno de ellos.

teórico y los componentes metodológicos que pretendemos alcanzar mediante las estructuras teórica y metodológica seleccionadas.

OBJETIVOS	**REFERENTES TEÓRICOS**	**COMPONENTES METODOLÓGICOS**
Caracterización de elementos del desarrollo profesional del docente ante el proceso de enseñanza/aprendizaje de los estudiantes en situaciones matemáticas escolares del tema de semejanza de figuras planas que son nuevas para él.	- Conocimiento profesional. - Desarrollo profesional. - Práctica situada. - Reflexión sobre la práctica. - Componente Mat. /Epistémico. - Componente Did. /Estratégico. - Componente Comportamental/ Actitudinal.	- Estudio de caso (único). - Experimentación piloto. - Experimentación definitiva. - Entrevista inicial. - Entrevistas semiestructuradas. - Grabaciones en video y observaciones de clase. - Descriptores de los diferentes componentes. - Trayectoria de desarrollo profesional. - Viñeta.
Caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele y el uso de elementos de visualización de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas relacionadas con la semejanza de figuras planas.	- Niveles y fases del modelo de Van Hiele (descripción inicial de niveles de Van Hiele para la semejanza, propiedades). - Visualización matemática (imágenes mentales, representaciones externas, procesos y habilidades).	- Estudio de casos (múltiple). - Experimentación piloto. - Experimentación definitiva. - Producciones escritas. - Grabaciones en video. - Descriptores iniciales de Van Hiele. - Descriptores de imágenes mentales y habilidades de visualización.
Diseño e implementación de una práctica profesional sobre semejanza de figuras planas teniendo en cuenta el modelo de razonamiento de Van Hiele y aspectos relacionados con la visualización.	- Niveles y fases del modelo de Van Hiele. - Visualización matemática. - Modos de representación de la semejanza. - Tipos de problemas y/o ejercicios en la semejanza.	- Experimentación piloto. - Experimentación definitiva.

Esquema 3.1. Relación entre objetivos, marco teórico y componentes metodológicos.

CAPÍTULO 4

DISEÑO DE LA EXPERIMENTACIÓN

En este capítulo se exponen los principales aspectos tenidos en cuenta en el diseño y análisis de los materiales de recogida de información, la unidad de enseñanza, la entrevista inicial, el proceso reflexivo del profesor y la actividad de los estudiantes. Concretamente, el capítulo está dividido en apartados dedicados al experimento de enseñanza (sección 4.1), al diseño, observación y análisis del proceso reflexivo del profesor (sección 4.2) y en relación al diseño, observación y análisis de una práctica de aprendizaje (sección 4.3).

4.1. EL EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

En este apartado describimos los aspectos teóricos que hemos tenido en cuenta en el diseño de la unidad de enseñanza (incluida en el anexo 1) -la aproximación al concepto, el modelo de Van Hiele y la visualización- y cómo éstos se hacen "visibles" en la misma. Además, presentamos los aspectos relacionados con la metodología de enseñanza, los roles del profesor y estudiantes, y de los compromisos en el aula.

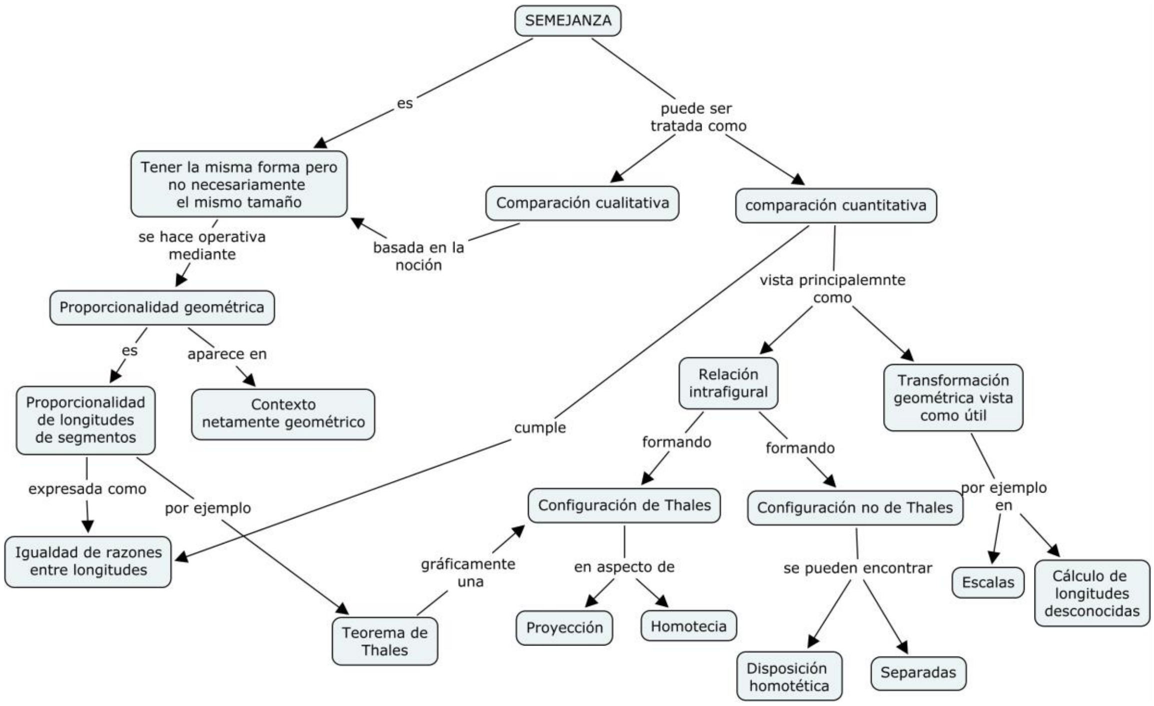
4.1.1. Sobre la aproximación al concepto

Inicialmente se pretendió que los estudiantes clarificaran y comprendieran la noción intuitiva de semejanza como la "misma forma". Posteriormente, que los estudiantes determinaran y comprendieran las condiciones suficientes y necesarias para la semejanza de figuras planas. También se indujo a los estudiantes en la comprensión y determinación de factores de semejanza.

El concepto de semejanza puede abordarse desde varias perspectivas matemáticas: Noción intuitiva, definición básica, homotecia, composición de una homotecia y un movimiento, etc. La propuesta de enseñanza que planteamos en este estudio incluye la enseñanza de la noción intuitiva y de vinculaciones de la definición general básica de semejanza con el concepto de homotecia y con el teorema de Thales en el caso particular de los triángulos. Los alumnos que participaron en la parte experimental del estudio habían estudiado el tema de la homotecia y el teorema de Thales en el curso anterior (octavo grado), lo cual nos permitió, después de introducir la definición general básica de semejanza, diseñar una serie de actividades que vinculan el concepto de semejanza con el de homotecia y con el teorema de Thales. Creemos que este enfoque llevó a los estudiantes a ampliar su conocimiento sobre el tema objeto de estudio y, sobre todo, a lograr una integración entre estos tres temas (como lo sugiere Gualdrón, 2008a, 2008b). Por ejemplo, los estudiantes podrán comprender que existen formas diferentes, a la exclusivamente visual y utilizando condiciones suficientes y necesarias, para determinar la semejanza de figuras. También, podrán comprender que pueden construir figuras semejantes no sólo utilizando factores de semejanza y condiciones suficientes-necesarias, sino que también lo podrán hacer utilizando homotecias y el teorema de Thales. Creemos que los estudiantes, después de haber comprendido las relaciones entre la semejanza y la homotecia, y el teorema de Thales, tendrán herramientas adicionales para demostrar los criterios para la semejanza de triángulos y podrán abordar un rango más amplio de problemas para su resolución.

Como se mencionó en el capitulo 1, Lemonidis (1991) identifica tres momentos históricos en el desarrollo del concepto de semejanza que se pueden usar para determinar tres aproximaciones a este concepto, dos de los cuales son adecuados para la enseñanza a los estudiantes de nuestro estudio experimental: La semejanza vista como relación intrafigural y la semejanza vista como transformación geométrica útil para aplicarla en otros contextos.

El siguiente esquema sintetiza la aproximación matemática al concepto de semejanza utilizada en la unidad de enseñanza experimental que hemos diseñado.



Esquema 4.1. Análisis matemático y aproximación al concepto de semejanza.

En la tabla 4.1 que aparece a continuación mostramos la distribución de actividades de la unidad de enseñanza de acuerdo a la aproximación al concepto. En la distribución respecto de la *relación intrafigural* hemos tenido en cuenta el tipo de dibujo que aparece en las tareas propuestas, es decir, que donde aparezcan los dibujos, cumplan las características de cada una de las posibilidades (figuras en aspecto de proyección, en aspecto de homotecia, en disposición homotética, o separadas). En la distribución respecto de la *transformación geométrica vista como útil* hemos tenido en cuenta que para la resolución de la tarea planteada sea necesario usar la semejanza, aparezca o no una figura dibujada. La tarea puede ser un problema netamente matemático o un problema en contexto.

Las actividades donde no aparecen dibujos y no corresponden a una situación donde la aproximación sea una transformación geométrica vista como útil (actividades 10, 11, 14, 22, 31, 32, 33, 34 y 43) no fueron clasificadas en esta tabla por no cumplir las características propias de la aproximación al concepto. Estas actividades aparecen sombreadas en la tabla 4.1. Las actividades donde aparece algún dibujo pero no corresponde a ninguna de las opciones de la aproximación al concepto (actividades 15, 26 y 30). Las actividades 35, 36, 37, 38, 40, 41 y 42 fueron clasificadas en la aproximación como transformación geométrica vista como útil ya que cumplen las características propias de esta aproximación.

ACTIVIDAD	RELACIÓN INTRAFIGURAL				TRANSFORMACIÓN GEOMÉTRICA (Vista como útil)
	Figuras formando parte de configuraciones de Thales		Figuras que no se consideran formando parte de una configuración de Thales		
	Aspecto de Proyección	Aspecto de homotecia	Disposición homotética	Separadas	
1				x	
2				x	
3				x	
4				x	
5				x	
6				x	
7				x	
8			x		
9			x		
10					
11					
12				x	
13				x	
14					
15					
16		x	x		
17			x		
18		x	x		
19	x				
20	x				
21	x				
22					
23		x	x		
24	x				
25			x		
26					
27		x	x		
28		x	x		
29		x	x		
30					
31					
32					
33					
34					
35					x
36					x
37					x
38					x
39		x	x		

ACTIVIDAD	RELACIÓN INTRAFIGURAL				TRANSFORMACIÓN GEOMÉTRICA (Vista como útil)
	Figuras formando parte de configuraciones de Thales		Figuras que no se consideran formando parte de una configuración de Thales		
	Aspecto de Proyección	Aspecto de homotecia	Disposición homotética	Separadas	
40					x
41					x
42					x
43					

Tabla 4.1. Distribución de actividades de acuerdo a la aproximación al concepto.

4.1.2. Sobre el tipo de representación

En la tabla 4.2 que aparece a continuación mostramos la distribución de actividades de acuerdo al tipo de representación utilizada en las diferentes actividades. Cada una de las actividades está clasificada en la categoría de lenguaje natural o en la categoría de lenguaje figurativo y, dependiendo si la actividad posee las características de la representación en lenguaje simbólico, también será clasificada en esta categoría.

Para la primera situación tenemos a modo de ejemplo la actividad 5 (clasificada en la categoría de lenguaje figurativo) la cual se presenta en lenguaje natural y las figuras incorporadas en ella son imprescindibles para la solución de la tarea, además no contiene elementos simbólicos. Para la segunda situación presentamos a modo de ejemplo la actividad 14, clasificada en la categoría de lenguaje natural (ya que ésta no incluye ningún tipo de figura) y además clasificada en la categoría de lenguaje simbólico por las expresiones que aparecen en los enunciados.

La actividad 36 también está clasificada en dos categorías, lenguaje figurativo (porque aparece el dibujo) y lenguaje simbólico (por la interpretación que se debe hacer de las longitudes y valores numéricos de los segmentos presentes).

ACTIVIDAD	Lenguaje natural	Lenguaje figurativo	Lenguaje simbólico
1		x	
2		x	
3		x	
4		x	
5		x	
6		x	
7		x	

ACTIVIDAD	Lenguaje natural	Lenguaje figurativo	Lenguaje simbólico
8		x	
9		x	
10	x		
11	x		
12		x	x
13		x	
14	x		x
15		x	
16		x	x
17		x	x
18		x	x
19		x	x
20		x	
21		x	x
22	x		
23		x	x
24		x	x
25		x	x
26	26(2), 26(3)	26(1)	26(1), 26(3)
27		x	x
28		x	x
29		x	x
30		x	x
31	x		
32	x		
33	x		33(2)
34	x		
35	35(1)	35(2)	35
36		x	x
37		x	x
38	x		x
39		x	x
40		x	x
41	x		x
42	42(1)	42(2)	
43	x		

Tabla 4.2. Distribución de actividades de acuerdo al tipo de representación utilizada.

4.1.3. Sobre el tipo de problema y/o ejercicio

En la tabla 4.3 que aparece a continuación mostramos la distribución de las actividades de acuerdo al tipo de problemas y/o ejercicios planteados en las diferentes actividades. En algunos casos se presenta una doble clasificación de la actividad; esto es debido a que, para dar respuesta a la situación planteada, es imprescindible realizar una tarea implícita. Por ejemplo, primero identificar una relación intrafigural y luego realizar una explicación convincente de una propiedad o la veracidad o falsedad de una afirmación (a modo de ejemplo la actividad 22). Otro ejemplo de doble clasificación es el que se presenta en la actividad 30, donde la tarea principal es realizar una construcción, pero el estudiante debe explicar de manera convincente cómo realizó dicha construcción y el por qué de las posibilidades que resultan.

ACTIVIDAD	Problemas de cálculo	Problemas de identificación de relaciones	Problemas de construcción	Problemas de demostración
1		x		
2		x		
3		x		
4		x		
5		x		
6		x		
7		x		
8		x		
9		x		
10			x	x
11		x		x
12	x	x		
13	x			
14	x	x		
15			x	
16		x		
17		x		
18		x		
19		x	x	
20		x		
21		x		
22		x		x
23		x		
24		x		
25		x		x
26		26(2), 26(3)	26(2), 26(3)	x
27		x		
28	x			
29		x		
30			x	x
31			x	
32		x		x
33				x
34		x		x
35	x			
36	x			
37	x			

ACTIVIDAD	Problemas de cálculo	Problemas de identificación de relaciones	Problemas de construcción	Problemas de demostración
38	x			
39	x			
40	x			
41	x			
42	42(2)		42(1)	
43		x		x

Tabla 4.3. Distribución de actividades de acuerdo al tipo de problemas y/o ejercicios.

4.1.4. Sobre el modelo de Van Hiele

En el diseño de las actividades de la unidad de enseñanza hemos tenido en cuenta el modelo de Van Hiele como se discrimina a continuación. Las primeras cuatro actividades están pensadas para desarrollarse en el nivel 1 en la *fase de información*, en la cual el profesor conversa con sus estudiantes, les proporciona información para que así conozcan el campo de estudio que se va a iniciar, los tipos de situaciones que se van a resolver, los métodos y materiales que se utilizarán y el lenguaje específico del primer nivel de razonamiento de Van Hiele. También es la oportunidad para que el profesor identifique los conocimientos previos que tienen sus estudiantes sobre el nuevo campo de estudio y su nivel de razonamiento en el mismo.

En esta fase debería quedar claro para los estudiantes que la semejanza de figuras planas puede verse, en principio, como figuras que preservan la forma, más no necesariamente el tamaño. Después, en el siguiente nivel, los estudiantes deberían comprender que la semejanza de figuras planas ya no se decide por su apariencia física (únicamente), sino que hay unas condiciones matemáticas que deben cumplirse.

En el diseño definitivo de la unidad de enseñanza tuvimos en cuenta los resultados obtenidos en una experimentación piloto[36] que llevamos a cabo unos meses antes de realizar la experimentación definitiva. La experimentación piloto nos permitió (entre otras cosas) confirmar la hipótesis de que no era necesario diseñar actividades para las fases siguientes de la de información en el nivel 1. De este modo, las actividades del bloque 5 a 9 están diseñadas para desarrollarse en la *fase de información* del nivel 2. La diferencia entre esta fase y la misma en el nivel 1, es que las actividades de nivel 1 se presentan de manera tal que las respuestas esperadas son exclusivamente visuales (aunque como se ha

[36] Se comentará más adelante en este mismo capítulo.

dicho, pueden presentarse casos de razonamientos en nivel 2 o superiores), mientras que las esperadas en el nivel 2, requieren de razonamientos "matemáticos".

El bloque de actividades comprendido entre la 10 y la 19, y las actividades 21, 32, 34 y 41 están pensadas para desarrollarse en la *fase de orientación dirigida* del nivel 2. Las tareas que se proponen están diseñadas para obtener respuestas específicas y para que los estudiantes descubran y aprendan los componentes básicos de la red de conocimientos que deben formar. Se espera que estas tareas "lleven" directamente a los resultados y propiedades que los estudiantes deben aprender.

Las actividades comprendidas entre la 23 y la 30; entre la 35 y la 40, y las actividades 33 y 42 están pensadas para desarrollarse en la *fase de orientación libre* del nivel 2, que es donde se produce la consolidación del aprendizaje realizado en las anteriores fases. Las actividades que se proponen en esta fase son diferentes de las anteriores, en las cuales los estudiantes deben utilizar los conocimientos adquiridos para resolverlas y tengan que usar nuevas formas de razonamiento en contextos nuevos. Una de las características que poseen las situaciones planteadas a los estudiantes, es que no son una simple aplicación directa de un dato o algoritmo conocido, sino que plantean nuevas relaciones o propiedades y, en general, con varias vías de resolución.

Las actividades 20, 22, 31 y 43 están pensadas para desarrollarse en la *fase de integración* del nivel 2, en la cual el profesor ayuda a los estudiantes en la síntesis de lo que han venido aprendiendo, proporcionando observaciones globales, para que puedan tener una visión global de la nueva red de objetos y relaciones. Esto les permite integrar los nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente. Las actividades que se les propone a los estudiantes no implican la aparición de nuevos conocimientos, sino sólo la organización de los ya adquiridos. En esta fase no es completamente necesario que se propongan demasiadas actividades si, al final de cada una o al final de cada bloque de actividades, el profesor sintetiza e integra los nuevos conocimientos con los ya adquiridos y aclara cualquier información que considere o que los estudiantes le soliciten.

4.1.5. Sobre los elementos de visualización

En el diseño de las actividades de la unidad de enseñanza también tuvimos en cuenta los elementos de visualización. Al igual que con la utilización del modelo de Van Hiele en el diseño de la unidad, la propuesta de diseño contiene una importante dosis de subjetividad de parte del investigador, dado que se trabaja bajo el supuesto de que los estudiantes razonen en determinados niveles (en el caso del Modelo de Van Hiele) o que utilicen determinadas imágenes mentales o habilidades de visualización en sus razonamientos (en el caso de la visualización). Esto no quiere decir que el uso elementos de visualización en el diseño no haya sido cuidadosamente tenido en cuenta.

En el caso de las imágenes mentales o representaciones externas, el diseño de las actividades tuvo en cuenta que hubiera actividades que fueran de sólo texto (con el fin de promover, por ejemplo, el uso de representaciones externas y del proceso VP – procesamiento visual de información) y también que hubiera actividades que contuvieran dibujos (con el fin de promover, por ejemplo, el uso de imágenes mentales y del proceso IFI -interpretación de información figurativa).

Los dibujos planteados en las actividades que los contienen también tienen el propósito de que los estudiantes hagan uso de las diversas habilidades de visualización como una manera de complementar sus razonamientos y así permitirles obtener soluciones óptimas a las tareas planteadas.

4.1.6 Sobre la metodología de enseñanza

En el experimento de enseñanza fue usada la metodología de enseñanza por descubrimiento guiado; esta metodología fue sugerida al profesor por parte del investigador, el cual tenía la opción de aplicarla o no según su criterio. Consideramos apropiada esta metodología dadas las características del diseño de las actividades de la unidad[37], las cuales plantean situaciones matemáticas que permiten al estudiante deducir características, propiedades y definiciones del concepto que se está estudiando.

Las actividades de la unidad se planearon en forma secuenciada y fueron entregadas una a una a cada estudiante en fotocopias. Los estudiantes del curso se organizaron en grupos de tres estudiantes, que fueron seleccionados por el profesor teniendo en cuenta el conocimiento que él tenía de ellos en aspectos tales como su estilo de trabajo, compromiso, comportamiento en clase, etc. Al iniciar cada día de clase el profesor repartía a cada estudiante la correspondiente actividad, la cual, sin recibir ninguna instrucción por parte del profesor, era desarrollada en un primer momento en forma individual y luego, en un segundo momento, en forma grupal. El profesor intervenía en la solución de inquietudes en

[37] La unidad de enseñanza fue diseñada por el investigador, la cual incluía, además de las actividades, su descripción, sugerencias y comentarios de cómo implementarlas.

cada uno de los momentos (en el trabajo individual o en el grupal), pero sólo guiando a los estudiantes en el logro del objetivo de cada actividad; es decir, el profesor no intervenía para dar explicaciones de cómo solucionar la situación planteada, en cambio sí, con insistencia, se acercaba a los estudiantes (en el momento del desarrollo) para preguntarles acerca de la resolución, y si lo consideraba necesario, pedía a los estudiantes ampliaciones de sus razonamientos, así como también les insistía que verbalizaran los mismos. El investigador asistió a cada una de las clases como observador participativo actuando de la misma manera que lo hacía el profesor, es decir, no intervenía para dar explicaciones de cómo solucionar la situación planteada pero sí observaba a los estudiantes y hablaba con ellos para obtener más información sobre su forma de resolver las actividades.

Después de transcurrido el tiempo para el desarrollo de cada actividad, todas las hojas de trabajo de los estudiantes eran recogidas por el profesor (el cual las evaluaba sin escribir nada en ellas) y luego las entregaba al investigador para los análisis correspondientes. Luego de recoger la actividad desarrollada, el profesor realizaba una puesta en común con los estudiantes acerca de las formas usadas en la resolución de la tarea con el objeto de resumir los resultados obtenidos y que los estudiantes conocieran la solución más apropiada a la misma.

Las actividades fueron planeadas para ser desarrolladas en once sesiones de 100 minutos en la propia aula de clase de los estudiantes y en el horario ordinario de la jornada escolar. Efectivamente en el desarrollo de las actividades se necesitaron 15 sesiones de clase, generalmente debido a que hubo actividades en las que los estudiantes tardaron más de lo planeado. Se desarrollaron en promedio dos sesiones de clase por semana, lo cual permitió la realización de las entrevistas anteriores y posteriores (de cada sesión) al profesor. El ambiente de trabajo en clase era distendido y el ritmo en gran medida estaba muy marcado por el profesor. No hubo incidentes de tipo disciplinario. El experimento fue llevado a cabo en el año escolar 2008 en los meses de marzo, abril y parte de mayo.

4.2. DISEÑO, OBSERVACIÓN Y ANÁLISIS DEL PROCESO REFLEXIVO DEL PROFESOR

En este apartado haremos referencia más específica (antes se habían mencionado algunos detalles en el capítulo 3) a la manera como se diseñó el cuestionario inicial para el profesor, el proceso reflexivo mediante las entrevistas semiestructuradas y la manera como se realizaron los análisis del cuestionario inicial, del proceso reflexivo y de la práctica y el contenido profesional.

4.2.1. Entrevista inicial al profesor

Como hemos dicho, la entrevista inicial se realizó utilizando dos cuestionarios (I y II) (mostrados en el anexo 2). El cuestionario I es de respuesta abierta que incluye aspectos relacionados con:

- El desarrollo profesional (preguntas 1 a 4): incluyen formación académica y experiencia en la enseñanza de la matemática del profesor, asistencia a cursos de desarrollo profesional en matemática y/o en su didáctica, e ideas sobre su vocación como profesor.
- La concepción de la matemática (preguntas 5 y 6): incluyen ideas sobre los objetivos que se buscan al estudiar matemática y sobre cómo definirla.
- La enseñanza (preguntas 7 a 14): incluyen las formas de aprender mejor matemática, relación entre enseñanza y aprendizaje de la matemática, sobre el papel de los algoritmos, las fórmulas, las demostraciones, las definiciones en la enseñanza de la matemática, cuestiones relacionadas con el conocimiento del modelo de Van Hiele.
- El tema de estudio (preguntas 15 a 18): importancia de la semejanza dentro del currículo, sobre la enseñanza del teorema de Thales y la semejanza de figuras planas, y sobre lo que conoce el profesor en relación a los errores que cometen los estudiantes cuando se les enseña la semejanza.
- El aprendizaje (preguntas 19 y 20): sobre lo más importante que deberían aprender los estudiantes de la matemática y sobre el conocimiento del modelo de razonamiento de Van Hiele.

El cuestionario II es de escala valorativa tipo Likert, e incluye preguntas relacionadas con:

- La práctica docente (preguntas 1 a 4): sobre el proceso seguido al preparar materiales para la clase de matemática, los contenidos más importantes en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, actividades del profesor más recomendables para enseñar matemática, actitud frente a nuevas propuestas curriculares para enseñar temas matemáticos.

- Cuestiones epistemológicas sobre el aprendizaje (preguntas 5 y 6): sobre las razones por las cuales los estudiantes deben estudiar matemática y sobre cómo se aprende matemática.
- Criterios para la valoración de algunos aspectos de la enseñanza (preguntas 7 a 9): sobre los hechos que hacen pensar al profesor que ha realizado un buen trabajo enseñando un tema matemático, el reconocimiento de quién es un buen estudiante de matemática, y sobre los aspectos en que podría aumentarse la cualificación profesional de los profesores de matemática.
- Cuestiones relativas a las dificultades del aprendizaje (preguntas 10 a 12): sobre las causas de las dificultades de la enseñanza de la matemática en secundaria, el papel que juegan los errores de los estudiantes en las clases de matemática, y sobre el papel que juegan las imágenes (figuras, diagramas, etc.) en la enseñanza/aprendizaje de la matemática en secundaria.

En el diseño de estos cuestionarios tuvimos en cuenta que, para cada uno de los tópicos considerados, por lo menos hubiera dos preguntas que los contuvieran. En general, son cuestionarios que se centran en los antecedentes biográficos matemáticos del profesor, los motivos que lo llevaron a la enseñanza, sus ideas sobre cómo su experiencia previa puede influir en su forma de actuar y en las decisiones que tome al momento de experimentar la planificación que se le ha entregado y sus ideas acerca de la enseñanza/aprendizaje de la matemática. Así pues, el objetivo de estos cuestionarios que componen la entrevista inicial es describir el posicionamiento inicial del profesor en términos de conocimiento profesional ante la matemática en general y ante tareas de enseñanza/aprendizaje de la semejanza en particular.

Para el análisis del cuestionario I, como se ha dicho antes, hemos realizado la transcripción y en ésta hemos delimitado o subrayado los fragmentos textuales que se refieren a cada uno de los tres componentes del contenido de desarrollo profesional (matemático, didáctico y actitudinal). Estos fragmentos se codificaban para indicar a cuál de los aspectos de cada componente correspondían. A continuación presentamos (tabla 4.4) un ejemplo del análisis realizado, mostrando fragmentos en los cuales hemos identificado alguna característica de alguno de los componentes del contenido profesional. Los códigos que aparecen en la tabla fueron definidos en el capítulo 2.

Pregunta	Respuesta	Código	Características de la respuesta
Cuando asistías a congresos o cursos específicos (referentes al desarrollo profesional en matemáticas), ¿lo hacías por el cargo (de tutor de matemática en programas académicos a distancia) o porque eras consciente de su importancia?	*Las dos cosas. Hasta más o menos el año 97-98 estaba muy interesado en aprender matemáticas, pero precisamente en el 95 fue cuando entré a distancia, fue un redescubrir del aprendizaje, usted no se imagina lo que es, por ejemplo, explicar una integral doble o un sólido de revolución por teléfono, entonces ahí tocaba hacer toda una reingeniería del proceso de explicación de matemáticas, vi la necesidad de actualizarme, entonces yo solicité la actualización y la universidad me la concedió.*	DIRI5	Sobre la instrucción, el profesor reconoce registros o formas instructivas (elementos de gestión) explicando formas diferentes (decidiendo en función de los estudiantes y su reacción).
Si tuvieras la oportunidad de cambiar de trabajo ahora ¿qué preferirías hacer?	*Soy maestro por vocación. Estoy en lo que me gusta. Si volviera a nacer sería maestro y de matemáticas.*	CAR6	En sus actitudes, emociones, valores y apreciaciones identificamos a un profesor reflexivo al considerar positivamente los cambios.
¿Cuáles son, desde tu punto de vista, los principales objetivos del estudio de la matemática?	*Precisamente, desde la perspectiva que comencé a mirar el aprendizaje de la matemática a distancia, me di cuenta que el fin principal de las matemáticas es hacer mejores hombres, hombres más pensantes, hombres más eficientes, seres humanos con mucha calidad. Pienso que ese tiene que ser el fin principal. No puedo aceptar un matemático que no tenga control sobre sus emociones, un matemático que no sea honesto. No puedo aceptar a un matemático que no sea un hombre de bien para su sociedad y para su entorno.*	CMR4	En las relaciones con el conocimiento matemático, el profesor se plantea relación con la vida.

Tabla 4.4. Ejemplo de análisis de las respuestas del profesor al cuestionario I.

El análisis del cuestionario II, como ya se dijo antes, tuvo en cuenta los promedios por pregunta y por bloque de acuerdo al aspecto sobre el cual se está indagando. Mostramos a continuación (tabla 4.5) un ejemplo de análisis de bloque (preguntas 5 y 6) el cual indaga sobre cuestiones epistemológicas sobre la enseñanza:

Pregunta	Valoración del profesor
5) ¿Por qué deben los estudiantes estudiar matemática en la enseñanza secundaria? Se debe estudiar matemática:	
– por el carácter formativo de la materia.	5
– por razones de utilidad social y profesional.	5
– por su interés dentro del propio sistema educativo.	5
Promedio	**5**
Pregunta	**Valoración del profesor**
6) ¿Cómo se aprende la matemática? La matemática se aprende:	
– mediante el esfuerzo y el trabajo personal.	5
– mediante ayudas externas, correcciones y explicaciones.	5
– por predisposición natural del alumno o por motivación.	3
– mediante incremento de algún tipo de conocimiento o capacidad.	4
– estimulando procesos cognitivos y fomentando ciertas actividades.	5
Promedio	**4.4**

Tabla 4.5. Ejemplo de análisis de las respuestas del profesor al cuestionario II.

En la pregunta 5, las puntuaciones de los ítems son las máximas, lo cual nos permite observar la valoración que el profesor tiene de la importancia que tiene la matemática en los currículos de la educación secundaria.

Entre los ítems de la pregunta 6 podemos apreciar, de acuerdo a las puntuaciones, diversas posiciones, las cuales apuntan principalmente a que la matemática se aprende mediante el esfuerzo y el trabajo personal y mediante ayudas externas.

En el capítulo 5 se presentará detalladamente el análisis de los dos cuestionarios que hemos mencionado en este subapartado.

4.2.2. Proceso reflexivo y entrevistas semiestructuradas al profesor

Partimos de la premisa de que conforme el docente va adquiriendo experiencia y se enfrenta a las distintas situaciones problemáticas que le surgen en el transcurso de la práctica, sus reflexiones van alcanzando un mayor grado de profundización (preocupación por los principios o teorías subyacentes a su práctica y a la práctica docente en su conjunto).

Al mismo tiempo, consideramos que en el proceso reflexivo el profesor reúne por lo menos dos disposiciones:

- distanciarse de la acción para dar sentido a la experiencia, y

- examinar todos los elementos que condicionan su experiencia, incluidos aquellos derivados de sus creencias e ideas implícitas.

Una forma de facilitar la reflexión es ser consciente de ella. Por esta razón, en algunos trabajos se ha relacionado la reflexión con la metacognición, es decir, con la disposición a organizar y verbalizar su actuación, por medio de un discurso coherente, que le ayude a continuar el proceso de reflexión. Con el fin de llevar cabo un proceso reflexivo con el profesor implicado en el estudio, teniendo en cuenta los aspectos comentados antes, hemos diseñado una serie de entrevistas semiestructuradas (ver anexo 3) que se corresponden con la estructura teórica del *ciclo de Smyth*.

Las entrevistas fueron diseñadas de tal manera que se pudieran realizar antes y después de cada sesión de clase: Antes de cada sesión de clase, se reunían el investigador y el profesor con el fin de desarrollar las preguntas del guión de la entrevista y cualquier otra que el investigador considerara pertinente teniendo en cuenta las respuestas dadas por el profesor. Después de terminada cada sesión de clase, se procedía de manera similar. Seguidamente comentamos las características de las preguntas planteadas para desarrollar el proceso reflexivo antes y después de cada sesión de clase.

Antes de la sesión de clase

Los siguientes aspectos nos sirvieron como guía para la reflexión:

- Objetivos de aprendizaje para los estudiantes (incluidos en el diseño de la unidad de enseñanza que se le entregó al profesor).
- Conocimiento de los estudiantes (nivel de razonamiento, intereses, etc.).
- Conocimiento del contenido (aproximación al concepto, etc.).
- Conocimiento de didáctica (formas alternativas de enseñar la clase, etc.).
- El papel del profesor en la clase.
- El rol de los estudiantes en la clase.
- Anticipación de dificultades para el profesor (en la enseñanza) y para los estudiantes (en el aprendizaje).

El propósito de esta lista es hacer explícito al profesor el conocimiento, las creencias y objetivos que dirigen la implementación de su clase. La descripción de sus ideas antes de la clase proporciona oportunidades para que el profesor active y haga explícito su conocimiento y objetivos que guían sus clases. Los anteriores aspectos los planteamos en forma de pregunta en cada una de las fases del ciclo de Smyth (descripción, información, confrontación y reconstrucción).

Descripción: Preguntas relacionadas con lo que el profesor considera más relevante en lo que enseñará, relacionadas con la opinión del profesor acerca del diseño de determinada actividad planeada para la sesión, relacionadas con otras formas de enseñanza del tópico previsto para la sesión y relacionadas con las dificultades que podrían tener los estudiantes al abordar la clase.

Información: Preguntas relacionadas con la aplicabilidad de algunos resultados de investigaciones en Didáctica de la Matemática, relacionadas con procedimientos que conoce y aplica el profesor para construir figuras semejantes, relacionadas con formas diferentes a la expresada en la entrevista inicial para aproximarse al concepto, relacionadas con el conocimiento de algún software de geometría dinámica y la manera como lo integra a la enseñanza, relacionadas con la enseñanza de criterios de semejanza de triángulos y de propiedades que tienen que ver con el perímetro y el área de figuras semejantes, y relacionadas con el planteamiento de problemas o situaciones matemáticas que requieran el concepto de semejanza para su resolución.

Confrontación: Preguntas relacionadas con la expresión "misma forma" y los diferentes significados en el lenguaje cotidiano y su opinión de la manera como podría enseñarse a los estudiantes, preguntas relacionadas con la opinión del profesor acerca de la ubicación de una determinada actividad en una determinada fase de Van Hiele, relacionadas con las figuras que utilizaba para abordar la semejanza y su opinión de lo que sucedería si inicia con otras, relacionadas con la opinión del profesor acerca de definir la semejanza como ampliación o reducción usando paralelismo con centro dado, relacionadas con la opinión del profesor acerca del reconocimiento de la semejanza por igualdad de formas mediante la homotecia, relacionadas con el estado de consciencia del profesor acerca de la conexión entre la semejanza y el teorema de Thales y entre la semejanza y la homotecia, relacionadas con el conocimiento del profesor acerca del nivel de razonamiento de Van Hiele que podrían alcanzar sus estudiantes, y relacionadas con la pertinencia de enseñar el concepto de escala a partir del de semejanza.

Reconstrucción: Preguntas relacionadas con la opinión del profesor acerca de la enseñanza de la semejanza a partir de la noción intuitiva "misma forma" y contrastar esta con la noción "ser parecido" para no semejanza, relacionadas con la opinión del profesor acerca de aquellos estudiantes que realizan mediciones (cuando no aparecen los valores), que realizan recortado y comparan en las figuras dadas, relacionadas con los resultados y/o propiedades matemáticas que aprenderán los estudiantes en cada sesión.

Después de la sesión de clase

Después de terminada la sesión de clase, se le propone al profesor una reflexión sobre la clase y que además la evalúe. Durante la reunión después de clase, el profesor reflexiona sobre su práctica de enseñanza así como también sobre sus ideas y decisiones tomadas relacionadas con la práctica. El investigador anima al profesor a que lo haga hablando, ayudándole a estructurar sus ideas haciéndole preguntas (que pueden pertenecer al guión preestablecido o no). Los siguientes aspectos nos sirvieron como guía para la reflexión:

- Examinar la relación de sus ideas antes de clase, el plan de clase (entregado al profesor), y su enseñanza.
- Comparar lo que se había planeado hacer en la clase con lo que realmente hizo.
- Explicar las decisiones que lo influyeron a desviar o no los planes de clase originales; es decir se le pide explicar sus acciones de control y ajuste durante la clase.
- Evaluar sus clases enfocándose desde tres elementos: tareas, entornos de aprendizaje, y discurso.
- Considerar factores que pudieron influenciar su enseñanza.
- Considerar los factores que puede tener en cuenta para mejorar la siguiente sesión de clase.

De manera similar a la reflexión planteada antes de cada sesión de clase, los anteriores aspectos los planteamos en forma de pregunta en cada una de las fases del ciclo de Smyth.

Descripción: preguntas relacionadas con las dificultades de los estudiantes que el profesor no había previsto; por ejemplo, si hubo dificultad en los estudiantes al pasar de fotografías a figuras geométricas, dificultad con el concepto de homotecia (se había desarrollado en un curso anterior), dificultad en la interpretación de los problemas planteados.

Información: preguntas relacionadas con la opinión del profesor acerca de otros posibles enfoques para la enseñanza que hubieran disminuido las dificultades de los estudiantes, sobre la opinión del profesor acerca de aquellos estudiantes que, a pesar de tener herramientas matemáticas, siguen usando la noción intuitiva para decidir la semejanza.

Confrontación: preguntas relacionadas a la manera como el profesor pretende resolver las dificultades presentadas, relacionadas con la opinión del profesor acerca de si el tipo de situaciones planteadas fue la causa de las dificultades.

Reconstrucción: preguntas relacionadas con lo que el profesor ha aprendido en cada sesión de clase: en lo matemático, lo didáctico, lo actitudinal y, en general, sobre aspectos de la práctica que él considera debería cambiar hacia futuro, relacionadas con aspectos de la práctica que, conociéndolos, no era consciente de los mismos, relacionadas con la aplicación de lo que ha aprendido en sesiones anteriores.

Para el análisis del proceso reflexivo a partir de las entrevistas semiestructuradas, hemos realizado un análisis similar al efectuado al cuestionario I de la entrevista inicial. A continuación, a modo de ejemplo, presentamos dos tablas con fragmentos y sus respectivos códigos y análisis de las entrevistas con el profesor antes (tabla 4.6) y después (tabla 4.7) de la primera sesión de clase.

Pregunta (antes de la clase)	Respuesta	Código	Características de la respuesta
La expresión “la misma forma” tiene diferentes significados en el lenguaje cotidiano, ¿cómo hacer entender a los estudiantes esta expresión desde el punto de vista geométrico?	*... Pienso que en algún momento determinado del proceso de aprendizaje, ellos tienen que llegar a esa necesidad; que además de que se parezcan, deben cumplir algunas leyes matemáticas para así poder decir que son semejantes.*	MVS1	Desde el punto de vista matemático, dentro del tipo de representación verbal, precisa el concepto intuitivo de la “misma forma”.
¿Por qué crees que dentro del material (para los estudiantes) no aparecen hojas cuadriculadas?	*... Precisamente, la cuadricula falta para que la persona no tome decisiones con base en esas cuadrículas; de hecho, cuando uno trabaja matemáticas desde pequeñito le dicen: el cuaderno tiene que ser cuadriculado y cada número tiene que ir en un cuadrito; entonces, cuando uno hace figuras también se guía por las líneas ...*	DIF3	En la componente didáctica, sobre la instrucción, el profesor reconoce elementos funcionales de tareas educativas y estilos instructivos diversos situando el valor del trabajo dirigido.
Estamos tratando de desarrollar una secuencia de actividades pero, a lo mejor, estamos dejando de desarrollar otras que podrían valer la pena ¿qué piensas de esto?	*Bueno, pienso que tenemos un plan de trabajo, tenemos un objetivo y tenemos unas metas; creo que debemos trabajar en función de ellas. Las actividades que estamos haciendo pues sencillamente están buscando eso ...*	DIC1	Desde el punto de vista didáctico, en relación a la instrucción, el profesor considera elementos propios del currículo reconociendo finalidad y objetivos de actividades.
	... También, pienso que aunque ya tenemos un plan de trabajo no es inflexible; si vemos la necesidad de hacer alguna modificación pues la haremos, y pues cuando yo vea que se necesita hacer algo, te lo sugiero ...	CAR6	En el componente comportamental, en relación a las actitudes, emociones, valores y apreciaciones, el profesor se muestra reflexivo al considerar positivamente los cambios.
	... Por ejemplo, aquí hay una sugerencia que iba a hacerte; en la actividad del estudiante, te sugiero algunas cosas: la primera, que el estudiante produzca. Por ejemplo, en la actividad Nº 1 sólo se le hacen preguntas sobre lo dado y no se le pide que dibuje, que dibuje de su propia inspiración, dos máscaras que se parezcan o dos que tengan la misma forma ...	DPPS2	En lo didáctico, sobre la evocación de procesos interactivos y las relaciones profesor-estudiante, propone situaciones de análisis/síntesis.

	Una pregunta, ...: A los chicos les hemos dicho que para las siguientes sesiones de geometría deben llevar unos implementos, ¿cuando ellos vayan a construir, nosotros les decimos que usen esos implementos? *... tengo una pregunta. Para los estudiantes, tú sabes, la calificación es la remuneración para nosotros, y ellos están interesados y preguntan ¿Esto cuánto me va a valer? ¿Esto qué trascendencia tiene? Cada uno recibe su guía, trabajan los tres, y en la guía marcan el nombre de los tres, ¿Cogemos una y la evaluamos? Me imagino que tú llevarás para tu tesis lo del grupo que vamos a escoger, ¿Las demás las devolvemos a ellos?*	CAI3	En la componente comportamental, sobre actitudes, emociones, valores y apreciaciones, el profesor pregunta, debate, negocia.
	... nosotros lo que hacemos en clase es manejar un segundo idioma. Entonces, al pedirle que justifique su respuesta, lo haga en español y luego lo escriba en inglés. Como te decía hay algunos que manejan un buen nivel de inglés incluso, superior al de los docentes ...	DPPS3	En lo didáctico, sobre la evocación de procesos interactivos y las relaciones profesor-estudiante, el profesor explicita el progreso que desea para el estudiante.
	... Estamos también estudiando la inteligencia emocional de Goleman. En alguna partecita allá dice que: "Hay una parte del cerebro que se comunica inconscientemente con todo lo demás" y si vamos un poquito más allá, o sea trascender; estamos hablando de la comunicación directa con Dios: Si somos capaces de estimular ese pedacito del cerebro, de alguna manera, comenzamos a volvernos más eficientes en las premociones ...	DANM2	En relación a la componente didáctica, sobre el aprendizaje, establece o muestra conexiones interdisciplinarias.

Tabla 4.6. Ejemplo de análisis de las respuestas del profesor en la entrevista previa a una clase.

Pregunta (antes de la clase)	Respuesta	Código	Características de la respuesta
La expresión “la misma forma” tiene diferentes significados en el lenguaje cotidiano, ¿cómo hacer entender a los estudiantes esta expresión desde el punto de vista geométrico?	*... Pienso que en algún momento determinado del proceso de aprendizaje, ellos tienen que llegar a esa necesidad; que además de que se parezcan, deben cumplir algunas leyes matemáticas para así poder decir que son semejantes.*	MVS1	Desde el punto de vista matemático, dentro del tipo de representación verbal, precisa el concepto intuitivo de la “misma forma”.
¿Por qué crees que dentro del material (para los estudiantes) no aparecen hojas cuadriculadas?	*... Precisamente, la cuadricula falta para que la persona no tome decisiones con base en esas cuadrículas; de hecho, cuando uno trabaja matemáticas desde pequeñito le dicen: el cuaderno tiene que ser cuadriculado y cada número tiene que ir en un cuadrito; entonces, cuando uno hace figuras también se guía por las líneas ...*	DIF3	En la componente didáctica, sobre la instrucción, el profesor reconoce elementos funcionales de tareas educativas y estilos instructivos diversos situando el valor del trabajo dirigido.
Estamos tratando de desarrollar una secuencia de actividades pero, a lo mejor, estamos dejando de desarrollar otras que podrían valer la pena ¿qué piensas de esto?	*Bueno, pienso que tenemos un plan de trabajo, tenemos un objetivo y tenemos unas metas; creo que debemos trabajar en función de ellas. Las actividades que estamos haciendo pues sencillamente están buscando eso ...*	DIC1	Desde el punto de vista didáctico, en relación a la instrucción, el profesor considera elementos propios del currículo reconociendo finalidad y objetivos de actividades.
	... También, pienso que aunque ya tenemos un plan de trabajo no es inflexible; si vemos la necesidad de hacer alguna modificación pues la haremos, y pues cuando yo vea que se necesita hacer algo, te lo sugiero ...	CAR6	En el componente comportamental, en relación a las actitudes, emociones, valores y apreciaciones, el profesor se muestra reflexivo al considerar positivamente los cambios.
	... Por ejemplo, aquí hay una sugerencia que iba a hacerte; en la actividad del estudiante, te sugiero algunas cosas: la primera, que el estudiante produzca. Por ejemplo, en la actividad Nº 1 sólo se le hacen preguntas sobre lo dado y no se le pide que dibuje, que dibuje de su propia inspiración, dos máscaras que se parezcan o dos que tengan la misma forma ...	DPPS2	En lo didáctico, sobre la evocación de procesos interactivos y las relaciones profesor-estudiante, propone situaciones de análisis/síntesis.

Pregunta (después de la clase)	Respuesta	Código	Características de la respuesta
En clase, has dicho a los estudiantes que en esta experiencia deben trabajar de manera diferente a lo habitual; es decir, antes las conclusiones y justificaciones las escribían de manera grupal; pero que ahora, discuten grupalmente y que cada uno escribe sus propias conclusiones y justificaciones ¿consideras que es más útil esta forma de trabajo que la que venías utilizando? ¿Por qué?	*... Yo normalmente no recibía los razonamientos individuales de cada uno, sino que tomaba los del grupo. Es más, cada uno trabajaba y tenía su copia, y yo cogía cualquier copia y la calificación o la evaluación era para todos. En este momento, pues claro, el trabajo para el docente se multiplica. Tengo que analizar uno por uno y mirar cuáles son los razonamientos que hacen ...*	DPNS3	En relación a la componente didáctica, sobre la evocación de procesos interactivos, el profesor identifica elementos que articulan la negociación de significados separando el papel del grupo y los individuos.
	... Si hablamos de los procesos de mejoramiento,.. dependiendo de lo que ellos me escriban, yo tengo que generar procesos de acercamiento y de mejoramiento por que si veo que, por ejemplo, un estudiante, definitivamente, está desenfocado del asunto; entonces tengo que indagar, primero: ¿Por qué lo está haciendo?, y segundo: ¿Qué voy a hacer para mejorar eso? Entonces, normalmente uno lo que hace es que trabaja con el grupo para…me da pena decirlo, pero es para ahorrar trabajo, esa es la idea.	DIRI9	Por otro lado, en la componente didáctica, sobre la instrucción, el profesor reconoce registros o formas instructivas (elementos de la gestión) argumentando y fundamentando decisiones instructivas.
Al terminar la primera sesión de clase he echado en falta un momento final para conclusiones y que, inclusive, los estudiantes las hubieran escrito en su cuaderno de notas ¿cuál es el por qué de esta situación?	*... Como matemático, de alguna manera, siento algo parecido a la vergüenza, porque hasta hace unos días yo pensaba que todos los rectángulos eran semejantes. Al analizar este trabajo, que tú estás haciendo, tomo conciencia de que no. Pienso que esto es consecuencia de que en un 99% la enseñanza de la geometría, especialmente de la semejanza, no pasa del nivel visual.*	CAI2	En la componente comportamental, en relación a las actitudes, emociones, valores y apreciaciones, el profesor se muestra interrogativo-crítico al poner en cuestión formas de conocimiento.
	... Cuando uno ya empieza a mirar las condiciones matemáticas, cuando uno empieza a hacer variar las longitudes de los lados, entonces es cuando se presenta la situación. Normalmente, la enseñanza del tema no pasa de una simple presentación; a veces, la semejanza no dura más de un período de clase ...	DIRI6	En respuesta a la misma pregunta, en la componente didáctica, sobre la instrucción, el profesor reconoce registros o formas instructivas (elementos de gestión) al comparar o analizar modelos de trabajo.
	... Por ejemplo, tomé conciencia de que cuando hacemos movimientos en el plano: rotaciones, reflexiones, etc. también se produce la semejanza. Aunque, yo lo había manejado muchas veces, no tenía conciencia de eso.	DIC9-MGC2	Análogamente, en la componente didáctica, sobre la instrucción, el profesor considera los elementos propios del currículo estableciendo relaciones instructivas asociadas a diversas

Pregunta (después de la clase)	Respuesta	Código	Características de la respuesta
	También, y lo más importante, lo de las relaciones que existen entre las figuras homotéticas y la semejanza era completamente inconsciente para mí ...		facetas del concepto. Por otro lado, en la componente matemática, desde el tipo de representación gráfica, el profesor explicita conexiones entre la semejanza y la homotecia.
¿Qué has aprendido hasta ahora?	*... Nunca había hecho esta experiencia que hicimos, que discutan y luego cada uno por su lado. Me gustó porque cada uno está aportando ...*	DIRI6	En la componente didáctica, sobre la instrucción, el profesor reconoce registros o formas instructivas (elementos de gestión) al comparar o analizar modelos de trabajo.
	... yo casi siempre doy una explicación del tema que vamos a trabajar. Ahora, ellos arrancan sin ninguna explicación. Sinceramente, yo tenía una expectativa respecto a eso porque yo nunca lo había experimentado. Estoy viendo que comenzó a funcionar ...	DIC1	Desde el punto de vista didáctico, en relación a la instrucción, el profesor considera elementos propios del currículo reconociendo finalidad y objetivos de las actividades.

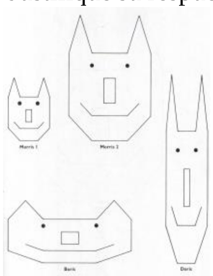
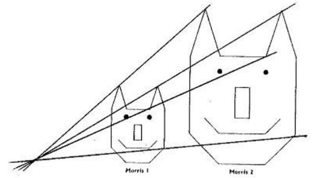
Tabla 4.7. Ejemplo de análisis de las respuestas del profesor en la entrevista posterior a la clase.

4.2.3. Instrumentos de análisis de la práctica: Viñeta y trayectoria

El instrumento que usamos con el fin de reconocer características del desarrollo profesional, que permiten situar al docente frente a su posicionamiento y práctica reflexiva profesional respecto al contenido matemático de la semejanza de figuras planas, fue la viñeta. Hemos elaborado diversas viñetas con la información pertinente, una de las cuales mostramos en este apartado. El análisis, resultado de la viñeta, aparece en la misma a partir de las inferencias realizadas por el investigador.

Por otro lado, con el fin de realizar afirmaciones del estado de formación del profesor desde los aspectos del conocimiento profesional del profesor (matemático, didáctico y actitudinal) utilizamos la noción de trayectoria de desarrollo profesional (TDP). Comparamos y analizamos diferentes momentos de la experimentación (inicial, intermedio y final) con el fin de confirmar el estado de formación en cuanto al desarrollo profesional del profesor de matemáticas.

A partir de las observaciones realizadas, se infieren resultados que se discuten con el equipo investigador. Estas observaciones se realizan una vez que se realizó toda la secuencia, y no se discuten con el docente, que quizás podría apropiarse de un mayor número de observaciones, e incluso podría indicarnos su acuerdo o desacuerdo. Pero no se tienen esos comentarios en la investigación. La tabla siguiente muestra un ejemplo.

<table>
<tr><td>Actividad Nº 1</td><td colspan="2">Sesión de clase Nº 1</td><td>Contenido matemático: Noción intuitiva</td></tr>
<tr>
<td>Tarea:
En el dibujo aparecen las máscaras de Morris I, Morris II, Boris y Doris. ¿Cuáles de ellas tienen la “misma forma” y cuáles, simplemente, “se parecen”? Justifique su respuesta.
</td>
<td>Objetivo y características privilegiadas:
• Hacer explícitas las concepciones intuitivas previas sobre tener la “misma forma” y “ser parecido”.
• Reconocer e identificar figuras planas que tienen la misma forma y figuras planas que son parecidas.
Aproximación al concepto: Figuras separadas
Tipo de problema: Problema de identificación de relaciones
Tipo de representación: Lenguaje figurativo
Nivel de Van Hiele: 1
Fase de aprendizaje: Información</td>
<td>Comentarios y preguntas clave del profesor (A) y respuestas de los estudiantes (E):
A: No olviden que a partir de ahora, yo no les voy a decir como se hacen las cosas, ustedes deben pensar por su cuenta y tratar de desarrollar las actividades que les vamos planteando.
A: ¿Por qué has trazado los segmentos de recta que une los vértices de Morris 1 y Morris 2?
E: Tienen la misma forma Morris 1 y Morris 2, sólo que Morris 2 está proyectada más grande, pero siempre conserva su forma original.</td>
<td></td>
</tr>
<tr><td colspan="4">Justificación que hace el profesor de la gestión realizada:
- Una dificultad detectada por el profesor fue el hecho de que los estudiantes, en su mayoría pensaron que todas las figuras se parecían: yo esperaba que ellos escogieran las figuras que se parecen por un lado y las figuras que tienen la misma forma por otro. Nunca pensé, la verdad no pensé, que ellos fueran a escoger que “Todas la figuras se parecen”.
- El profesor justifica que la metodología usada en el desarrollo de la clase le parece más adecuada que la que venía usando: me gusta este enfoque, porque es que estamos arrancando de algo que los chicos están viendo, lo están sintiendo como suyo. Cosa que no pasa con el concepto matemático o con la cualidad matemática.
- El profesor notó que los estudiantes trabajaron de manera integrada, cosa que no había visto antes en ellos en sus clases regulares: Es un proceso que yo nunca había aplicado. De hecho, estoy viendo que... como te decía antes, que todo el mundo está metido en el cuento.
- La metodología que usa el profesor es tradicionalista, lo cual obstaculizó en parte su buen desempeño; es decir cambiar a una metodología por descubrimiento guiado: Leyendo la…lo que vamos a hacer para la próxima clase, ya como que se ve con más claridad. Sé qué cosas decirles a ellos para que arranquen... yo casi siempre doy una explicación del tema que vamos a trabajar. Ahora, ellos arrancan sin ninguna explicación.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Inferencias realizadas por el investigador:
A través del discurso generado, Antonio intenta centrar la atención de los estudiantes en la nueva forma de trabajo. Por otro lado, una de las escasas intervenciones que el profesor hizo en los grupos de trabajo, fue por su inquietud del por qué un estudiante había trazado los segmentos que se muestran en la producción del estudiante. El profesor reconoce que él consideraba que los estudiantes resolverían la tarea propuesta de manera más ágil; según lo expresó en varias ocasiones, la enseñanza que el utilizaba se hacía ágil en todo sentido ya que él daba la información y los estudiantes, prácticamente, sabían qué responder ante sus preguntas o planteamientos.
En síntesis, se notó que el profesor estuvo muy inseguro en la manera como debía desarrollar la clase con la metodología sugerida. A pesar de esto, el profesor reconoció las bondades del uso de dicha metodología, por ejemplo que el trabajo en grupo de los estudiantes fue más integrado, y que los estudiantes se ven “obligados” a realizar sus propias producciones.</td></tr>
</table>

4.3. DISEÑO, OBSERVACIÓN Y ANÁLISIS DE UNA PRÁCTICA DE APRENDIZAJE

En este apartado haremos referencia más específica a la manera como se diseñaron las actividades de la unidad de enseñanza y cómo se realizó el análisis de las producciones de los estudiantes en algunas de ellas, mostrando un par de ejemplos para su comprensión (antes se habían mencionado algunos detalles en el capítulo 3).

4.3.1. Cuestionario para los estudiantes

En relación a la actividad de los estudiantes, la principal fuente de información obtenida a este respecto fueron las producciones escritas fruto del planteamiento de las diferentes actividades a los mismos. En este subapartado ampliaremos la información de la manera como se diseñaron dichas actividades, usando para ello dos ejemplos, las actividades 3 y 29.

En investigaciones del tipo como la que estamos abordando, los referentes teóricos a tener en cuenta son un factor imprescindible en la elaboración de los instrumentos de recogida de información.

Como se ha dicho antes, las actividades de la unidad de enseñanza[38] se elaboraron teniendo en cuenta principalmente el modelo de razonamiento de Van Hiele y elementos de visualización así como también, y no menos importante, los bloques de contenidos, los tópicos de la aproximación al concepto, los tipos de representación y los tipos de problema y/o ejercicios.

Los bloques de contenidos son la organización que hemos planteado para la enseñanza de la semejanza y sus temas relacionados; parten de la noción intuitiva de semejanza, pasando por la determinación de condiciones suficientes y necesarias para su establecimiento; así como también, el establecimiento de relaciones entre la semejanza y homotecia, y la semejanza y el teorema de Thales. En los contenidos también se incluyen la construcción de figuras semejantes, criterios de semejanza de triángulos, razón de perímetros y áreas de figuras semejantes, para finalizar con el uso de la semejanza en la resolución de situaciones.

[38] La unidad de enseñanza completa aparece en el anexo 1.

Varios fueron los criterios que tuvimos en cuenta al momento del diseño de las actividades; los enunciaremos a continuación, sin que necesariamente se hayan dado en este orden:

- Definidos los bloques de contenidos, consideramos que en cada uno de ellos debía haber una o más actividades que los desarrollara.
- Consideramos que los bloques de contenidos debían estar en consonancia con el nivel de Van Hiele que deseábamos potenciar. Por ejemplo, el desarrollo de la noción intuitiva debía pertenecer al nivel 1 de Van Hiele.
- En el proceso de construcción se debía tener en cuenta que cada actividad debía pertenecer a un nivel de Van Hiele[39] (en el sentido de que lo potenciara), al igual que a una determinada fase de aprendizaje de Van Hiele.
- Los diferentes elementos de visualización[40] debían evidenciarse en las actividades, es decir, que el diseño debía tener en cuenta que la redacción de la tarea permitiera exhibir (por parte de los estudiantes) algún o algunos de dichos elementos. Por ejemplo, que la actividad contuviera dibujos de figuras o no, que dichos dibujos estuvieran puestos en diferentes posiciones, etc.
- Las actividades que decidimos que incluyeran dibujos de figuras, debían tener en cuenta los diferentes elementos de la aproximación al concepto. Por ejemplo, que el dibujo correspondiera a una configuración de Thales en aspecto de homotecia, o que el dibujo no se correspondiera con una configuración de Thales en donde las figuras presentadas estén separadas, etc.
- El tipo de representación debía evidenciarse al momento del diseño de las actividades. La información que debía aparecer en cada una de ellas debía pertenecer al lenguaje natural, o al figurativo o al simbólico.
- En relación al tipo de problema o ejercicio, es decir, el enfoque que cada actividad debía poseer, también fue otro elemento a tener en cuenta. El diseño preveía que cada actividad debía tener la connotación de ser un problema de cálculo, o de identificación de relaciones, o de construcción o de demostración.

[39] Utilizamos la caracterización de niveles de Van Hiele para la semejanza que planteamos a priori. Esto no quiere decir que los estudiantes no puedan o intenten resolver las tareas planteadas en un nivel de Van Hiele inferior o superior al que el investigador usó en su diseño.

[40] Como lo hemos dicho antes, la intención del investigador (bajo la subjetividad que esto supone), al diseñar las tareas, es promover el uso de elementos de visualización. Como lo señalan diversos estudios, los estudiantes pueden resolver tareas matemáticas sin hacer uso de ninguno de los mismos.

En síntesis, usamos los diferentes referentes teóricos planteados para nuestro estudio: el modelo de Van Hiele como organizador de la enseñanza y el aprendizaje, la visualización como elemento potenciador del aprendizaje y también el análisis de la semejanza como objeto de enseñanza/aprendizaje realizado a través de la perspectiva epistemológica y didáctica. A continuación listamos los referentes usados:

i) Nivel de razonamiento y fase de aprendizaje de Van Hiele.

ii) Elemento de visualización que potencian:
   - Tipo de imagen mental: concreta, desde la memoria, cinética y dinámica,
   - Representación externa,
   - Proceso de visualización: procesamiento visual de información (VP) e interpretación de información figurativa (IFI),
   - Habilidad de visualización: identificación visual (IV), rotación mental (RM), conservación de la percepción (CP), reconocimiento de posiciones en el espacio (RP), reconocimiento de relaciones espaciales (RR), memoria visual (MV) y discriminación visual (DV).

iii) Ubicación en el bloque de contenido: noción intuitiva, polígonos semejantes, factores de semejanza, semejanza y homotecia, semejanza y teorema de Thales, construcciones geométricas, semejanza de triángulos, razón de perímetros y áreas en figuras semejantes, y uso en situaciones.

iv) Aproximación al concepto: como relación intrafigural y como transformación geométrica vista como útil.
   - Como relación intrafigural: formando configuración de Thales (en aspecto de proyección y en aspecto de homotecia) y no formando configuración de Thales (figuras en disposición homotética o figuras separadas),
   - Como transformación geométrica vista como útil: en escalas y cálculo de longitudes desconocidas.

v) Tipos de representación: lenguaje natural, lenguaje figurativo y lenguaje simbólico.

vi) Tipos de problema o ejercicio: problema de cálculo, problema de identificación de relaciones, problema de construcción y problema de demostración.

En la tabla 4.8 siguiente se pueden observar, a modo de ejemplo, los referentes teóricos aplicados en el diseño de la actividad 3 de la unidad de enseñanza.

Actividad 3	**Elementos teóricos inmersos**
La fachada de un edificio tiene el aspecto que se muestra en la foto. a) ¿En cuáles de las fotos la fachada tiene la “misma forma” a la dada? b) ¿En cuáles de las fotos la fachada “se parece” a la dada? c) Plantee, con sus propias palabras, que entiende por figuras que: • tienen la “misma forma” • “se parecen”. Justifique sus respuestas.   Foto 1  Foto 2  Foto 3  Foto 4	Nivel de Van Hiele: Promueve el nivel 1. Fase de aprendizaje de Van Hiele: Fase de información. Tipo de imágenes: Potencia imagen dinámica. Representación externa: No potencia. Proceso de visualización: Potencia el proceso IFI. Habilidades de visualización: Potencia las habilidades RP y DV. Bloque de contenido: Noción intuitiva. Aproximación al concepto: No configuración de Thales: figuras separadas. Modo de representación: Lenguaje figurativo. Tipo de problema y/o ejercicio: Problema de identificación de relaciones.

Tabla 4.8. Ejemplo de análisis teórico de una actividad de la unidad de enseñanza.

El diseño de la unidad de enseñanza incluía para el profesor una descripción de la actividad (además de los objetivos de aprendizaje y tiempo sugerido para su desarrollo), algunas observaciones, sugerencias y comentarios. Por ejemplo, con esta actividad se espera que los estudiantes escriban con sus propias palabras lo que entienden por criterios de comparación la “misma forma” y “ser parecido”. Se espera que con esto y las anteriores actividades, los estudiantes consoliden dichos criterios; esto permitirá que los estudiantes, por ejemplo, no piensen que todos los rectángulos tienen la misma forma y que por lo tanto todos son semejantes.

A continuación, mostramos (tabla 4.9) otro ejemplo de distribución de referentes teóricos, los correspondientes a la actividad 29.

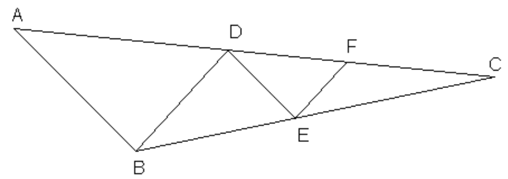
<table>
<tr><th>Actividad 29</th><th>Elementos teóricos inmersos</th></tr>
<tr><td>Identifique todas las posibles relaciones de semejanza entre los triángulos que se forman en la figura. Sabiendo que el segmento DE es paralelo al segmento AB, y el segmento BD es paralelo a EF. Justifique cada una de las respuestas.
</td><td><u>Nivel de Van Hiele</u>: Promueve nivel 2.
<u>Fase de aprendizaje de Van Hiele</u>: Fase de orientación libre.
<u>Tipo de imágenes</u>: Potencia imagen desde la memoria.
<u>Representación externa</u>: No potencia.
<u>Proceso de visualización</u>: Potencia el proceso IFI.
<u>Habilidades de visualización</u>: Potencia las habilidades IV, MV.
<u>Bloque de contenido</u>: Semejanza y homotecia. Semejanza y teorema de Thales.
<u>Aproximación al concepto</u>: En configuración de Thales: aspecto de homotecia.
No configuración de Thales: disposición homotética.
<u>Modo de representación</u>: Lenguaje figurativo. Lenguaje simbólico.
<u>Tipo de problema y/o ejercicio</u>: Identificación de relaciones.</td></tr>
</table>

Tabla 4.9. Ejemplo de análisis teórico de una actividad de la unidad de enseñanza.

El objetivo de esta actividad es que los estudiantes sigan consolidando las relaciones que se establecen entre el teorema de Thales, la homotecia y la semejanza de figuras planas, en particular la semejanza de triángulos.

En esta actividad resultan diversas relaciones de semejanza de triángulos. Por ejemplo, los estudiantes pueden plantear que los triángulos ABC y DEC son semejantes usando la propiedad que se verificó en la actividad 22 (4 ó 5), o diciendo que dichos triángulos pertenecen a una configuración de Thales en aspecto de homotecia. También los estudiantes podrían plantear que los triángulos BDC y EFC son semejantes por la misma justificación anterior.

Se sugiere al profesor que motive a los estudiantes, si no lo están, a que verifiquen la semejanza de los triángulos ABD y DEF y, de manera análoga, que verifiquen la semejanza de los triángulos ABC y BDE.

4.3.2. Contenido matemático de la unidad de enseñanza

En el capítulo 1 presentamos algunos detalles de las tres últimas propuestas curriculares emanadas del MEN (subapartado 1.2.1) y un sucinto análisis de algunos libros de texto de matemáticas (subapartado 1.2.2) que corresponden a las cuatro últimas décadas (uno por cada década). Lo anterior, junto con resultados de investigaciones que incluyen la semejanza como tema de estudio y la experimentación piloto de la unidad de enseñanza, nos ha permitido elaborar una secuencia de contenidos en relación a la enseñanza de la semejanza, la cual tuvimos en cuenta en la elaboración definitiva de la unidad de enseñanza y que a continuación presentamos:

Noción intuitiva:

- Reconocimiento de características físicas propias de las figuras semejantes: "conservan la forma", no necesariamente conservan el tamaño, no necesariamente conservan la posición.
- Adquisición y uso de lenguaje específico en torno a la semejanza: factor de semejanza, ampliación, reducción, congruencia, homotecia, etc.
- Identificación de elementos correspondientes (lados, vértices y ángulos) de dos figuras semejantes.

Polígonos semejantes:

- Determinación de las condiciones suficientes y necesarias para la semejanza de figuras planas.
- Algunos usos de estas condiciones.
- Utilización de isometrías como herramienta de construcción o demostración.

Factor de semejanza:

- Determinación y clasificación (ampliaciones, reducciones y congruencias) de factores de semejanza.
- Utilización de factores de semejanza en la construcción de figuras semejantes (cualquier factor o factor dado).

Semejanza y homotecias:

- Relación entre semejanza y homotecia.
- Configuraciones en forma de mariposa y pico.
- Configuraciones en las cuales las rectas paralelas son cortadas por rectas secantes y el punto de intersección de éstas es visible y no.
- Configuraciones entremezcladas.

Semejanza y teorema de Thales:

- Relación entre semejanza de triángulos y teorema de Thales.
- Configuraciones en forma de mariposa y pico.
- Configuraciones en las cuales las rectas paralelas son cortadas por rectas secantes y el punto de intersección de éstas es visible o no.

- Configuraciones entremezcladas.

Construcciones geométricas de figuras semejantes:

- Utilizando homotecias.
- Utilizando el teorema de Thales (caso de los triángulos).
- Utilizando isometrías como herramienta de construcción o demostración (si se presenta el caso).

Semejanza de triángulos:

- Criterios: AAA, LLL y LAL.
- Semejanza en triángulos rectángulos.
- Utilizando isometrías como herramienta de construcción o demostración (si se presenta el caso).

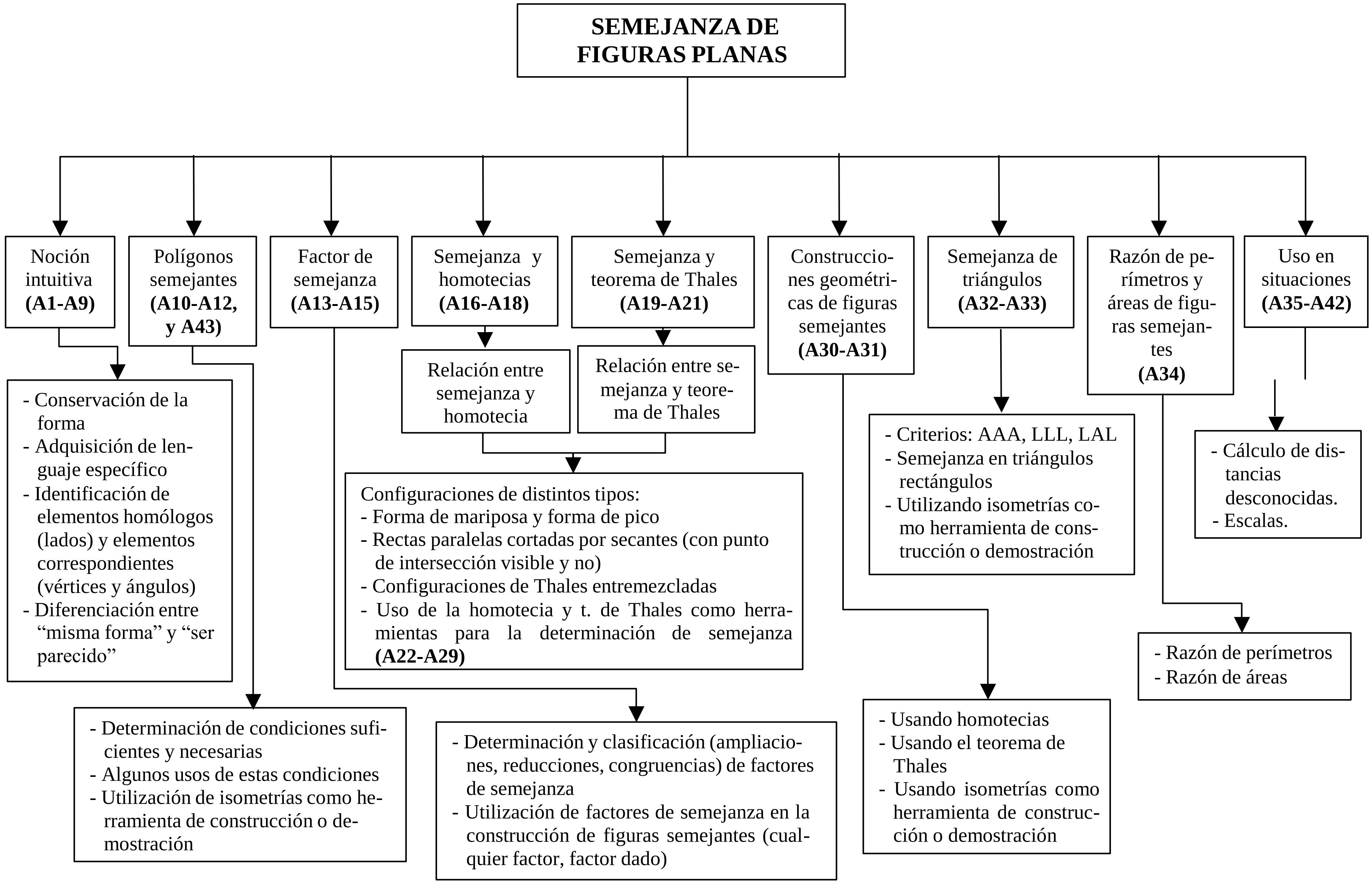
Razón de perímetros y áreas de figuras semejantes:

- Razón entre perímetros.
- Razón entre áreas.

Uso en situaciones:

- Cálculo de distancias desconocidas.
- Escalas.

A continuación presentamos un diagrama que resume los contenidos y tópicos relacionados con la semejanza de figuras planas que nos propusimos desarrollar en la unidad de enseñanza. Además, se muestra la manera como dichos contenidos están inmersos en la organización de las actividades.


SEMEJANZA DE FIGURAS PLANAS
Noción intuitiva (A1-A9)
Polígonos semejantes (A10-A12, y A43)
Factor de semejanza (A13-A15)
Semejanza y homotecias (A16-A18)
Semejanza y teorema de Thales (A19-A21)
Construcciones geométricas de figuras semejantes (A30-A31)
Semejanza de triángulos (A32-A33)
Razón de perímetros y áreas de figuras semejantes (A34)
Uso en situaciones (A35-A42)
Relación entre semejanza y homotecia
Relación entre semejanza y teorema de Thales
- Conservación de la forma
- Adquisición de lenguaje específico
- Identificación de elementos homólogos (lados) y elementos correspondientes (vértices y ángulos)
- Diferenciación entre "misma forma" y "ser parecido"
Configuraciones de distintos tipos:
- Forma de mariposa y forma de pico
- Rectas paralelas cortadas por secantes (con punto de intersección visible y no)
- Configuraciones de Thales entremezcladas
- Uso de la homotecia y t. de Thales como herramientas para la determinación de semejanza (A22-A29)
- Criterios: AAA, LLL, LAL
- Semejanza en triángulos rectángulos
- Utilizando isometrías como herramienta de construcción o demostración
- Cálculo de distancias desconocidas.
- Escalas.
- Razón de perímetros
- Razón de áreas
- Determinación de condiciones suficientes y necesarias
- Algunos usos de estas condiciones
- Utilización de isometrías como herramienta de construcción o demostración
- Determinación y clasificación (ampliaciones, reducciones, congruencias) de factores de semejanza
- Utilización de factores de semejanza en la construcción de figuras semejantes (cualquier factor, factor dado)
- Usando homotecias
- Usando el teorema de Thales
- Usando isometrías como herramienta de construcción o demostración

4.3.3. Análisis desde el modelo de Van Hiele

En el subapartado 3.3.2 hemos realizado una descripción generalizada de la metodología usada para el análisis de las producciones para el caso de los estudiantes. En este subapartado lo haremos de manera más detallada, utilizando algunos ejemplos para ofrecer mayor claridad en el procedimiento.

Recordemos que se realizó un primer análisis ("informal") surgido durante la recogida de la información. Además, como resultado de las reflexiones diarias del investigador, se elaboró un primer listado de ideas, conjeturas, intuiciones y preguntas sobre lo que se estaba produciendo en el aula de clase. El segundo análisis (más "formal") se hizo una vez se terminó la experimentación y se transcribieron las observaciones de clase, se editaron los videos y, en general, se organizó la información recolectada; momento en el cual se profundizó y estudió con detenimiento la información.

Los datos en los que nos apoyamos para realizar las descripciones e interpretaciones que aparecen en este apartado fueron obtenidos básicamente a través de las hojas de trabajo de los estudiantes y los diálogos que, durante el desarrollo de las actividades, mantuvieron el investigador y el profesor con los estudiantes.

De cada uno de los estudiantes se reunió la información proveniente de los distintos instrumentos y se reagrupó de tal forma que pudiésemos dar cuenta de los aspectos en los que estamos interesados.

El proceso que llevamos a cabo tuvo un carácter cíclico, y contó con los siguientes pasos:

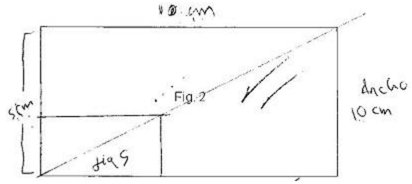
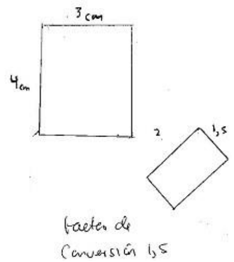
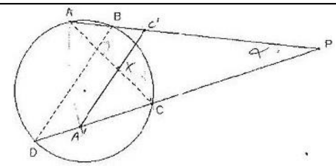
- Elaboración de un listado inicial de las características de cada nivel de razonamiento (comentado en el subapartado 2.3.1), lo más particularizada posible para la semejanza. Esta caracterización está formada por listas de descriptores específicos de elementos de cada nivel.

- Análisis de las respuestas de los estudiantes identificando los niveles de razonamiento que reflejaron, lo cual nos permitió depurar y perfeccionar el listado inicial de descriptores, además de caracterizar las respuestas de los estudiantes para describir el avance de sus destrezas de razonamiento. Este análisis nos proporcionó nuevas ideas sobre las características de los niveles de razonamiento en la semejanza, lo cual nos obligó a revisar de nuevo las respuestas ya analizadas por si los nuevos descriptores modifican el análisis hecho. Recordemos que se trata de un proceso cíclico.

En la práctica, empezamos por hacer un listado de los descriptores disponibles para cada nivel de razonamiento, numerándolos teniendo en cuenta el nivel y el orden en que aparecen (por ejemplo, 1.1 representa el descriptor 1 del nivel 1). Luego, revisamos las respuestas de los estudiantes a las diferentes tareas planteadas en las actividades de la unidad de enseñanza y tratamos de asignarles un nivel de razonamiento en base a su similitud con alguno(s) de los descriptores. En el caso de respuestas largas, las hemos dividido en partes (por ejemplo porque responden a diferentes partes de la misma actividad) para considerar cada parte de forma independiente. Para cada respuesta (o fragmento) analizada, tomamos nota del nivel de razonamiento y de los códigos de los descriptores en los que nos hemos basado para hacer la asignación. Esto nos fue muy útil cuando teníamos que revisar las respuestas asociadas a algún descriptor, o para buscar ejemplos representativos y poderlos incluir en esta memoria.

También creamos una tabla en la que pusimos junto a cada descriptor algún ejemplo de respuesta asociada a ese descriptor y añadimos algunos comentarios y/o justificaciones. Además, consideramos conveniente explicar las diferencias entre dos descriptores cuando estos eran muy similares, y también explicar por qué una respuesta correspondía a un descriptor cuando la relación entre ambos era poco clara. Esto nos ayudó a mantener los criterios constantes y evitar contradicciones.

En la tabla 4.10 siguiente presentamos algunos ejemplos de actividades junto al análisis realizado de las respuestas dadas por algunos estudiantes, lo que nos permitió posteriormente realizar una consolidación y/o confirmación de la caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele para la semejanza, además de poder realizar una caracterización de la evolución del razonamiento de los estudiantes.

Actividad	Nivel	Descriptor	Ejemplo	Justificación
3	1	1.3. Empiezan a percibir algunas características matemáticas de la semejanza, pero aún lo hacen de manera aislada.	Plantea que las figuras de la misma forma *se pueden diferenciar en sus diferentes escalas a la original o a la dada*.	Pensamos que Adriana percibe una de las características matemáticas de la semejanza. Es el hecho de relacionarla con el concepto de escala.
5	1	1.4. Pueden identificar, utilizando argumentos de tipo visual, la semejanza entre figuras cuando pertenecen a una configuración de Thales (aspecto de proyección o aspecto de homotecia) o están en disposición homotética.	*La figura 2 respecto a la 5 pueden tener la misma forma…esto se puede observar rigurosamente en la realización de operaciones que se encuentra una relación.* 	Adriana superpone la figura 5 sobre la figura 2 y traza una recta entre vértices correspondientes. Hay un indicio de que la estudiante (inconscientemente) hace uso de la homotecia, es decir "ver" los polígonos en disposición homotética.
10	2	2.2. Determinar aspectos matemáticos específicos de las figuras semejantes, tales como la proporcionalidad de longitudes de los segmentos y la igualdad de las medidas de los ángulos, así que pueden inducir las condiciones necesarias para que las figuras sean semejantes. 2.7. Relacionar la semejanza de polígonos con polígonos en disposición homotética.	*Es necesaria una constante de proporcionalidad y los ángulos se deben comparar y deben tener congruencia.*  *También, podemos concluir que la homotecia puede ser un proceso de ayuda determinante para saber si son semejantes.*	El dibujo muestra un ejemplo de figuras semejantes creado por Adriana, en el cual deja claro que hay una razón de semejanza y que las figuras pueden tener deferente posición.
26(1)	3	3.5. Demostrar informalmente algunas propiedades relacionadas con la semejanza de figuras		Carlos utiliza la homotecia para justificar la semejanza. Es decir, justifica primero por qué se presenta la homotecia y luego, la utiliza para justificar la semejanza.

Capítulo 4: Diseño de la experimentación

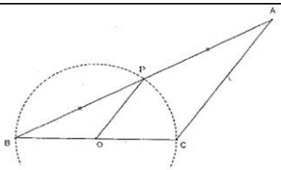
Actividad	Nivel	Descriptor	Ejemplo	Justificación
			1). translandando la distancia $\overline{PC}$ sobre $\overline{PA}$ y la distancia $\overline{PA}$ sobre $\overline{PD}$ tenemos un triangulo $PA'C'$ semejante al ΔDPB ya que con esto el proceso que se realiza es simplemente voltear la figura. Con esto podriamos establecer una homotecia con centro P, ya que los vertices correspondientes y P son colineales $\overline{PC'} \parallel \overline{PA}$. $\overline{PA'} \parallel \overline{PD}$, y para probar que $\overline{A'C'} \parallel \overline{BD}$, utilizan que, como $\angle BAC$ y $\angle BDC$ estan inscritos en el mismo arco, tenemos que son congruentes, y como tengo una recta $\overline{PD}$, a la cual, dos rectas diferentes la cortan formando el mismo ángulo, entonces las dos rectas serán paralelas y como estas rectas son $\overline{BD}$ y $\overline{C'A'}$ tenemos probada la última condición necesaria para la homotecia. como $\overline{Bo} = \overline{Po} = \overline{oC}$, entonces $\overline{BC} = \overline{CA}$, pues $\overline{Bo}$ correspondiente a $\overline{BC}$, y $\overline{OP}$ correspondiente a $\overline{CA}$: si $\overline{Bo} = \overline{oC}$, $\overline{BC}$ debe ser igual a $\overline{CA}$	
39	3	3.5. Demostrar informalmente algunas propiedades relacionadas con la semejanza de figuras.	 Lo primero que nos dice el esquema es que la medida entre $\overline{BP}$ y $\overline{PA}$ es la misma con P como punto centro. Por el teorema de tales a la inversa, como $\frac{\overline{Bo}}{\overline{oC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PA}} = 1$, porque $\overline{Bo} = \overline{oC}$ y $\overline{BP} = \overline{PA}$. podemos deducir que $\overline{Po}$ y $\overline{AC}$ son paralelos, y por tanto los figuras semejantes. $\Delta BPO \cong \Delta BAC$ como $\overline{Bo} = \overline{Po} = \overline{oC}$, entonces $\overline{BC} = \overline{CA}$, pues $\overline{Bo}$ correspondiente a $\overline{BC}$, y $\overline{OP}$ correspondiente a $\overline{CA}$: si $\overline{Bo} = \overline{oC}$, $\overline{BC}$ debe ser igual a $\overline{CA}$	Francisco utiliza el teorema de Thales para justificar la semejanza de los triángulos dispuestos en la figura. Luego, utiliza una correspondencia adecuada, entre figuras semejantes, para justificar que los segmentos BC y AC son iguales.

Tabla 4.10. Ejemplo de análisis de respuestas de estudiantes a diversas actividades.

Los ejemplos mostrados corresponden a las producciones de Adriana, de Carlos y de Francisco. La producción de Adriana muestra en principio el intento de percibir algunas características matemáticas de la semejanza, pero aún de manera aislada. Posteriormente, se pudo notar que alcanza un nivel 2 de razonamiento el cual consolida hasta finalizar la experimentación.

Las producciones de Carlos y Francisco fueron similares a la de Adriana hasta que lograron mostrar un nivel 2 de razonamiento. Carlos y Francisco dieron muestras, en sus producciones, de características de nivel 3 de razonamiento mediante una rápida transición entre niveles.

En cuanto a la evolución del nivel de razonamiento de estos tres estudiantes, se nota lo siguiente:

- En el caso de Adriana, muestra su avance empezando por el nivel 1 de Van Hiele (sus realizaciones tenían características de dicho nivel) y luego, a partir de la actividad 10, sus razonamientos se consolidan en el nivel 2 de razonamiento de Van Hiele mediante una rápida transición entre niveles.

- En el caso de Carlos y Francisco, muestran casi desde el inicio de la experimentación un nivel de razonamiento importante. Después de aproximadamente la mitad de la experimentación, ya dieron muestras de razonamiento en nivel 3 de Van Hiele. Incluso podemos decir que la metodología usada, por lo menos en lo que tiene que ver con la insistente motivación por parte del profesor e investigador para que los estudiantes verbalizaran y escribieran sus razonamientos, surgió efecto.

4.3.4. Análisis desde la visualización

Este subapartado contiene una descripción (más detallada que la hecha en el apartado 3.3) en relación al análisis de los datos, particularmente en lo que tienen que ver con las producciones de los estudiantes y el referente teórico visualización. El análisis se realizó, como se comentó antes, en dos momentos: uno de manera informal durante la recogida de la información y otro más formal hecho una vez terminó la experimentación.

Se hizo un análisis descriptivo de cada una de las actividades teniendo en cuenta el uso de imágenes mentales y habilidades de visualización[41] que exhibieron los estudiantes en la resolución de las tareas propuestas en las actividades que componen la unidad de

[41] Consideramos que no era necesario realizar un análisis de las representaciones externas y los procesos de visualización, dado que siempre están presentes en la resolución de las tareas.

enseñanza. Usamos una caracterización que planteamos (en el apartado 2.4) teniendo en cuenta los referentes teóricos sobre este constructo. Como en el caso del análisis desde el modelo de Van Hiele, el análisis desde la visualización estuvo apoyada además en las grabaciones en video (particularmente las transcripciones con todo detalle de los segmentos de aspectos que nos parecieron de interés) que se captaron durante el desarrollo de toda la unidad de enseñanza.

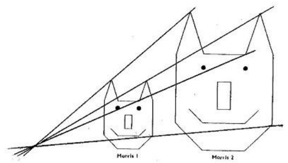
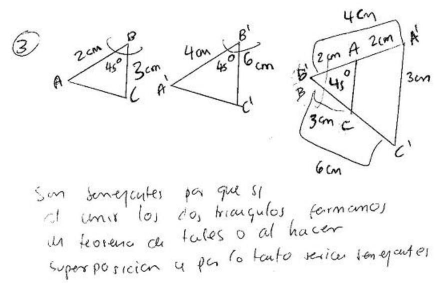
En la práctica, para este análisis organizamos las producciones en grupos de actividades y, posteriormente, observábamos lo que cada estudiante había realizado y le asignábamos, según fuera necesario, la categoría correspondiente (tipo de imagen mental y habilidad de visualización). Como lo habíamos previsto, hubo producciones en las cuales los estudiantes no exhibieron el uso de ninguna imagen mental, ni habilidad de visualización. Al final, extrajimos las asignaciones y elaboramos un listado de características particularizadas para los tipos de imágenes mentales y habilidades de visualización encontradas en las producciones de los estudiantes.

La caracterización del uso que hacen los estudiantes de elementos de visualización, como se dijo antes, depende en buena medida de la subjetividad del investigador dadas las particularidades del estudio. Hemos intentado por todos los medios minimizar dicha subjetividad mediante el análisis de las diferentes fuentes de información de que dispusimos.

En cuanto a las imágenes mentales (*concretas, desde la memoria, cinéticas* y *dinámicas*), nuestra intención fue identificarlas en las producciones de los estudiantes y luego presentar una caracterización de las mismas en la forma como aparecieron.

En relación a las habilidades de visualización (*identificación visual, rotación mental, conservación de la percepción, reconocimiento de posiciones en el espacio, reconocimiento de relaciones espaciales, memoria visual,* y *discriminación visual*), logramos identificar una importante variedad de las mismas, principalmente al momento en que el estudiante intentaba transformar la imagen mental creada para la solución de la tarea planteada.

A continuación presentamos (tabla 4.11) algunos ejemplos de actividades con el respectivo análisis realizado.

Actividad	Tipo de imagen	Habilidad de visualización	Ejemplo (P: Profesor)	Justificación
1	Dinámica	- Rotación mental (RM). - Conservación de la percepción (CP). - Reconocimiento de posiciones en el espacio (RP).	 *P: ¿Por qué has trazado estas líneas?* [señala en el dibujo los segmentos que unen vértices en las máscaras]. *Miguel: Para guiarme.* *P: ¿Guiarte para qué?* *Miguel: Me da la impresión que puedo encajar la pequeña en la grande.* *P: ¿Qué quieres decir con darte la impresión?* *Miguel: Me imagino que las máscaras encajan.* *P: No veo cómo encajan.* *Miguel: Ah…bueno es un decir. O sea, Morris 1 es la misma Morris 2, pero más pequeña. Algo así como poner Morris 1 sobre Morris 2.* *P: ¿Imaginaste algún movimiento o sólo lo crees?* *Miguel: Lo he hecho en la cabeza.*	Inferimos que Miguel imagina a Morris 1 y Morris 2 superpuestos para, de esta manera, plantear que una máscara es la ampliación de la otra. Miguel dota de movimiento (en su mente) a Morris 1 para imaginarla superpuesta en Morris 2. Miguel ha hecho uso de la habilidad rotación mental (RM) al mover mentalmente a Morris 1 para imaginarla superpuesta en Morris 2; en este sentido, por ejemplo dice: *"Lo he hecho en la cabeza"* [para explicar que ha imaginado la superposición]. También, usó la conservación de la percepción (CP) cuando reconoce que Morris 1 mantiene su forma: "*... Morris 1 es la misma Morris 2, pero más pequeña"*. Además, usó el reconocimiento de relaciones espaciales (RP) al identificar que Morris 1 podría encajar en Morris 2: "*Me imagino que las máscaras encajan"*.
32(3)	Cinética	- Rotación mental (RM). - Reconocimiento de relaciones espaciales (RR).	 *P: Explícame el procedimiento que usaste para hacer estos dibujos* [señala los contenidos en la figura]. *Adriana: OK. Primero, dibujé dos triángulos que cumplieran las condiciones del problema.*	Asumimos que Adriana usó una *imagen cinética* en el análisis de la posible solución a la situación planteada. Su razonamiento se basó en el movimiento de un triángulo hasta hacerlo coincidir con el otro, ayudándose con las manos, para buscar una configuración de Thales. En el uso y transformación de dicha imagen mental creemos que intervinieron la rotación mental y el reconocimiento de relaciones espaciales. La rotación mental (RM) se hizo evidente al mover mentalmente el primer triángulo para superponerlo en el segundo. El reconocimiento de relaciones espaciales (RR) se evidenció en la búsqueda que hizo de la relación de semejanza entre los triángulos mediante el uso del teorema de Thales.

Actividad	Tipo de imagen	Habilidad de visualización	Ejemplo (P: Profesor)	Justificación
			Luego,...pensé cómo justificar su semejanza. Entonces, eh… *P: Dime por qué hiciste este dibujo* [señala el dibujo de la derecha]. *Adriana: Más o menos lo mismo de antes, ... imaginé éste sobre éste* [muestra una trayectoria curvilínea entre los triángulos ABE y A'B'C'; el video muestra que Adriana, en su razona-miento, usó el movimiento de sus manos para "llevar" el triángulo ABE hasta el triángulo A'B'C'.] *para ver si podía tener el teorema de Thales. A mí me parece que sí, entonces ahí se da la semejanza de esos triángulos.* *P: ¿Te parece o puedes confirmarlo?* *Adriana: A ver, ... por lo menos encajan por que el ángulo es el mismo. También, ... los lados que lo forman en cada uno son proporcionales ...* *P: ¿Que más?* *Adriana: Bueno, si los lados son proporcionales, el lado AC y A'C' son paralelos* [duda de su respuesta].	

Tabla 4.11. Ejemplo de análisis de diálogos entre profesor y estudiantes.

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA DEL PROFESOR

En la enseñanza de la matemática, los profesores combinan conocimiento desde diferentes dominios para interpretar la actividad matemática y usan las respuestas de sus estudiantes para planificar intervenciones futuras. En estas situaciones los maestros generan actividades cognitivas de análisis e interpretación de las situaciones de enseñanza de las matemáticas para tomar decisiones de acción (Llinares, 1998, 1999; Ponte y Chapman, 2006). En este sentido, la posibilidad de mejorar la práctica pasa por desarrollar en los profesores la competencia en realizar estas actividades. Así, ayudar a los maestros a desarrollar competencias en interpretar las producciones matemáticas de sus estudiantes y en planificar la enseñanza se ha convertido en el foco de recientes propuestas en los programas de formación de profesores (Borko, 2004; Wilson y Berne, 1999). Las intervenciones en formación de profesores dirigidas a estos objetivos han puesto de manifiesto la importancia de la colaboración entre los profesores y la constitución de comunidades de práctica.

Sin embargo, conseguir estos objetivos ha sido difícil debido a que los maestros tienen pocas oportunidades de analizar conjuntamente la enseñanza y el aprendizaje matemático de los estudiantes (Llinares y Krainer, 2006). De ahí que se genera la necesidad de crear oportunidades para que los profesores puedan compartir sus experiencias y reflexionar sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de manera conjunta como una forma de desarrollar su competencia en analizar, interpretar y tomar decisiones de acción en relación a la enseñanza de las matemáticas.

Lo anterior justifica, por lo menos en parte, la puesta en marcha de estudios que tengan en cuenta dichas dificultades. Por ejemplo, que los profesores de matemática participen en actividades colectivas (profesores activos y profesores expertos) con el fin de que evolucionen en el desarrollo de competencias profesionales que les permita un mejor abordamiento de su práctica docente. En este sentido, el estudio que abordamos pretende realizar aportes a la manera como los profesores pueden adquirir dichas competencias al estar comprometidos en el desarrollo de un proyecto como el que estamos llevando a cabo.

Este capítulo está dedicado a la presentación de los resultados del análisis de la práctica del profesor. Para explicar estos resultados y la organización de su presentación consideramos conveniente repasar someramente cómo se ha realizado el análisis.

Para hacer un seguimiento del proceso de desarrollo profesional, analizamos cronológicamente la información que obtuvimos de él. De este modo, por un lado, analizamos y caracterizamos el posicionamiento inicial del docente en términos de conocimiento profesional ante tareas de enseñanza y de aprendizaje de la semejanza; por otro, observamos cómo va reflexionando sobre su práctica modificándola y, por último, qué aspectos se perciben de su desarrollo.

En cada uno de los apartados en que dividimos este capítulo iremos presentando descriptivamente ejemplos representativos de la actividad del profesor, que se corresponden con los descriptores previstos en cada una de las etapas de este análisis. Así, comenzamos por describir el posicionamiento inicial del docente en la práctica, analizando las transcripciones de cada una de las sesiones de entrevista semiestructurada -antes y después de cada sesión de clase- (sección 5.1). Reconocemos el componente matemático-epistémico a lo largo del proceso y resultados del análisis por fases (sección 5.2), resultados correspondientes a lo didáctico-estratégico y análisis por fases (sección 5.3), y análogamente en lo actitudinal/comportamental y análisis por fases (sección 5.4). Por último, describimos el papel del profesor en las situaciones de cambio (sección 5.5).

Los instrumentos teórico-metodológicos usados para el análisis fueron básicamente la *trayectoria de desarrollo profesional* y la *viñeta*. Usar y analizar la trayectoria nos permitió realizar afirmaciones del estado de formación del profesor desde los aspectos del conocimiento profesional del profesor (matemático, didáctico y actitudinal). Usar y analizar viñetas, permitió reconocer características del desarrollo profesional que posibilitan situar al docente frente a su posicionamiento y práctica reflexiva profesional respecto al contenido matemático de la semejanza de figuras planas, así como elementos que permiten que regule el análisis de aprendizajes de los estudiantes. Usamos el formato de relato estructurado, que nos permite identificar el tipo de prácticas personales en tres componentes de contenido profesional.

Finalmente, presentamos las conclusiones que resultaron del análisis y que dan respuesta a los objetivos (en relación a la práctica del profesor) que nos propusimos en el desarrollo de esta tesis.

5.1. POSICIONAMIENTO INICIAL DEL PROFESOR

El análisis del desarrollo de las entrevistas correspondientes al cuestionario I nos ha permitido obtener información general sobre aspectos del desarrollo profesional del profesor, su concepción de las matemáticas, su enseñanza, sobre el tema de estudio y sobre el aprendizaje. Asumimos la concepción de un profesor sobre la matemática (o su enseñanza) en el sentido de Carrillo (1996), como "el conjunto de creencias y posicionamientos sobre la matemática (o su enseñanza) que supone el investigador, posee el profesor, tras el análisis de sus opiniones y de las respuestas a preguntas sobre su práctica respecto a temas relativos a la naturaleza de la matemática (o de la enseñanza de la matemática)".

5.1.1. El docente y el desarrollo profesional

Antonio es un profesor con dos titulaciones de licenciatura, una en matemáticas y otra en física, y con postgrados en computación y en catequesis. Posee una amplia experiencia en la enseñanza de la matemática y de la física (28 años). Ha enseñado matemáticas en el grado noveno[42] desde hace aproximadamente 15 años. En los últimos 8 años no ha participado en cursos de capacitación y/o actualización en matemáticas o su didáctica. Antes de este tiempo lo hizo porque su trabajo como tutor de estudios a distancia en matemáticas se lo exigía para lograr, según él, ser más eficiente en su trabajo. *Antonio* confiesa ser un profesor por vocación y nunca ha pensado en cambiar de profesión.

En síntesis, una observación inicial nos permite caracterizar al profesor como un docente suficientemente experimentado que, a pesar de considerar su labor con alta dosis vocacional, sólo ha asistido a cursos de capacitación en matemáticas o su enseñanza por que lo consideró necesario dada la responsabilidad que iba asumir en la educación a distancia. Su identidad profesional se concentra en el compromiso ético-personal, pero no tiene experiencia contrastada de hacer análisis de su práctica. Se puede evidenciar que prácticamente en la última década no lo ha considerado necesario para su principal actividad realizada en educación secundaria.

[42] Curso en el cual la semejanza aparece como tema de estudio de manera amplia y en detalle.

5.1.2. El docente y su concepción de la matemática

Antonio considera que el objetivo del estudio de las matemáticas es “hacer mejores hombres”, “hombres más pensantes”, “hombres más eficientes” “seres humanos con mucha calidad”, “no puedo aceptar un matemático que no tenga control sobre sus emociones”, “un matemático que no sea honesto”, “no puedo aceptar un matemático que no sea un hombre de bien para su sociedad y para su entorno”; por otro lado, define la matemática como “una ciencia que estudia las relaciones entre entes”, “como una forma de vida para adquirir una mayor evolución espiritual, una mayor evolución intelectual”.

En síntesis, el profesor considera que la asignatura posee un carácter formativo, con objeto de servir de instrumento para un cambio actitudinal del estudiante (con respecto al aprendizaje y la vida), así como para la adquisición de valores racionales que le permitan conformar una actitud lógica ante los problemas cotidianos.

5.1.3. El docente y la enseñanza de la matemática

El profesor explícitamente manifiesta no enseñar de la manera como le enseñaron a él, por el contrario, enseña “modos, modelos, maneras, formas de enfrentar las situaciones matemáticas”. Agrega también que enseña siguiendo un patrón específico: “doy el referente conceptual, lo que el estudiante necesita saber del tema,... muestro algunos modelos [ejemplos] y, finalmente, hago la transferencia de esos modelos a la aplicación de problemas prácticos”. Considera que el papel que desempeñan los algoritmos y las fórmulas en la enseñanza son muy importantes, por ejemplo, en relación a los algoritmos expresa: “... si todo lo lográramos reducir a un algoritmo... la vida sería más sencilla” y, en relación a las fórmulas: “... en una fórmula se condensa todo lo que... lo que hay que decir”. Al final concluye que: “... me parece que se hace mucho más fácil el aprendizaje a través de los algoritmos y de las fórmulas”.

Las demostraciones en la enseñanza no son importantes para el profesor, puesto que considera que “... lo importante es que el proceso funcione, no entender por qué el proceso funciona”. Agrega además que si un estudiante se interesa por las demostraciones, él le indica donde buscarlas para que las lea. Las definiciones en la enseñanza son importantes para el profesor, porque las considera un punto de referencia para el desarrollo de las temáticas. Además, exige que los estudiantes las aprendan para, de esta manera, entenderse con los estudiantes.

El profesor expresa que no tiene en cuenta el razonamiento de los estudiantes al momento de enseñar, argumentando que generalmente las clases son de cuarenta estudiantes aproximadamente y esto no le permite tener en cuenta las individualidades. Continúa explicando que, a pesar de ello, intenta algunas acciones como, por ejemplo, entregar trabajos adicionales a los estudiantes más aventajados académicamente. Por otra parte, el profesor reconoce que nunca ha leído ni escuchado hablar acerca de las fases del modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele.

En síntesis, el profesor puede catalogarse en la tendencia tradicional (Ernest, 1991) que se caracteriza por el uso de la exposición magistral como técnica habitual y sin hacer crítica de un supuesto reconocimiento base de las raíces epistemológicas del contenido que enseña. El profesor sigue una programación prescrita de antemano, externa a él y rígida, sin plantearse relaciones entre las unidades. La asignatura está orientada básicamente a la adquisición de conceptos, otorgándole una finalidad exclusivamente informativa, es decir, se pone en conocimiento de los estudiantes un cierto “panorama matemático” que se espera que aprendan; presupone que dicho aprendizaje se realiza, utilizando la memoria como casi único recurso, por superposición de unidades de información. El estudiante se hace con los conocimientos por el simple hecho de que el profesor se los presente, manteniendo éste como dinamizador ideal del aprendizaje la estructura de la propia asignatura, plasmada en la programación.

5.1.4. El docente y el tema de estudio

Antonio considera que la importancia del tema de semejanza dentro del currículo es la aplicación que tiene en problemas de la física y del cálculo. Podemos deducir de lo que hemos visto en otros momentos, que enseña el teorema de Thales presentándolo, analizándolo (lo que el teorema quiere decir numéricamente) y, luego, muestra ejemplos de aplicación. Enseña el tema de semejanza planteando la definición, presentando ejemplos y contraejemplos, usando figuras planas típicas (cuadrados, triángulos, rectángulos, trapecios) y, luego, plantea a los estudiantes que construyan figuras semejantes a una dada o que decidan si dos figuras dadas son semejantes o no. *Antonio* reconoce que sólo se limita al tratamiento visual del tema sin poner mucha atención a las propiedades matemáticas.

Por último, el profesor explicita desconocer dos de las diferentes formas de “ver” la semejanza como objeto de enseñanza, específicamente la transformación geométrica vista como objeto matemático y transformación geométrica vista como útil. Inferimos que el profesor no fue consciente en el momento de la entrevista de lo que abarcaba cada uno de los enfoques en que puede "verse" la semejanza. Y, por supuesto, no parece ser muy consciente de los diversos significados de la noción de semejanza.

En síntesis, lo expresado por el profesor concuerda con la tendencia tradicional que pretende identificar el contenido de forma estructuralista, basado en definiciones y argumentos unívocos. Es decir, desarrolla la semejanza y el teorema de Thales planteando la definición (caso de la semejanza) o enunciando el teorema (caso del teorema de Thales), planteando ejemplos (y/o contraejemplos) y, para finalizar, ejercicios que pretenden la reproducción del mismo procedimiento usado por el profesor en los ejemplos desarrollados. Asume una posición que podríamos denominar autoritaria no dialogada (Mortimer y Scott, 2002). La comprensión consciente del profesor sobre el tema es limitada, por ejemplo, en ningún momento hizo referencia al posible establecimiento de conexiones entre la semejanza, el teorema de Thales (para el caso de los triángulos) y la homotecia. Por otro lado, el desarrollo del tema lo limita prácticamente a la identificación visual de la semejanza entre figuras sin poner énfasis en las propiedades matemáticas de la misma. Aunque es cierto que no sabemos si eso es por algún motivo especial.

5.1.5. El docente y el aprendizaje

El profesor considera que lo más importante de aprender las matemáticas es la aplicación que los estudiantes pueden hacer a su propia vida. Por otro lado, el profesor expresa que nunca ha leído ni escuchado hablar de los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele. El profesor reconoce que el aprendizaje de las matemáticas tiene como un fin último que el estudiante las pueda adaptar a su vida. En términos de aprendizaje, nunca cuestionó que un proceso de estudio pudiera estructurarse en base a una configuración didáctica o que pudiera recibir influencias del propio análisis de resultados de aprendizaje. El profesor desconoce completamente las posibilidades que le podrían ofrecer el conocimiento y la aplicación del modelo de Van Hiele que le mostramos.

5.1.6. El docente y su posición frente al contenido profesional por componentes

El análisis del cuestionario I (cuestionario incluido en el anexo 2) también nos ha permitido obtener información en relación a los diferentes componentes del desarrollo profesional del profesor; es decir, los aspectos declarados por el profesor como intencionales pretendidos y personales (en el sentido de Godino y Batanero, 1994) y que pudieron clasificarse como matemáticos, didácticos y actitudinales/identitarios (que incluye sus posicionamientos curriculares).

Encontramos en el **componente matemático-epistémico** que el profesor, a pesar de habérsele dado la oportunidad de expresarlo, hace muy poca o prácticamente nula alusión a descriptores del mismo. Así, al hacer alusión a la manera como aborda la enseñanza de la semejanza, identificamos que interpreta la semejanza como igualdad de ángulos y proporcionalidad de lados correspondientes.

Análogamente, en el **componente didáctico-estratégico**, el profesor hace muy poca referencia a elementos propios de este componente. Encontramos que hizo referencia a aspectos relacionados con el aprendizaje (1 vez) y a aspectos relacionados con la gestión/ instrucción (4 veces):

- En cuanto al **aprendizaje** sólo identificamos evidencias de elementos relacionados con la evocación de nociones matemáticas y no encontramos rasgos correspondientes a elementos de diseño. Ante todo, hablando del establecimiento de conexiones interdisciplinarias: *... desde hace más o menos unos 7 años estamos trabajando en aplicar los procesos matemáticos a la solución de problemas psicológicos...* interpretados como pensar que influye como piensa un estudiante. Nos fijamos que usa la expresión “aplicar” sin mayor índice de profundidad, como tampoco indica cómo se aplica, y qué quiere decir para él “solución”.

- En cuanto a la **instrucción**:

Respecto a los elementos curriculares, identifica referencias explícitas oficiales: ... *las definiciones sí exijo que todo el mundo las conozca. Como te decía, ya no manejamos memoria... las pruebas, precisamente, que está manejando el Estado Colombiano* [llamadas pruebas de estado ICFES] *hacen referencia a eso, a manejar la información en un contexto. En conclusión, ese es el papel que yo le doy a las definiciones. O sea, meternos en un contexto para que todos hablemos el mismo idioma.* Es decir, contexto es casi sinónimo de forma de lenguaje, que el docente interpreta como común.

Respecto al reconocimiento del significado y valor de los registros instructivos, explicitando formas diferentes (decidiendo en función de los estudiantes y su reacción): *Hasta más o menos el año 97-98 estaba muy interesado en aprender matemáticas, pero precisamente en el 95 fue cuando entré a distancia* [a trabajar en una facultad de estudios a distancia]*, fue un redescubrir del aprendizaje, usted no se imagina lo que es, por ejemplo, explicar una integral doble o un sólido de revolución por teléfono, entonces ahí tocaba hacer toda una reingeniería del proceso de explicación de matemáticas, vi la necesidad de actualizarme, entonces yo solicité la actualización y la universidad me la concedió.*

Y, por otro lado, teniendo en cuenta la diversidad del grupo: ... *Uno llega y ve el grupo* [la clase] *en esos 3 subgrupos: los avanzados, los normales y los que no dan… Entonces, ¿qué es lo que uno hace? Pues cambiar los niveles de exigencia para cada uno de ellos....*

Realmente, no hemos conseguido saber qué entiende por niveles de exigencia, porque parece ser una "expresión para indicar que el docente acepta que haya estudiantes que no obtienen buenos resultados, y asume que es porque son diferentes" (conjetura del grupo investigador).

Finalmente, en el **componente implicativo-comportamental**, categorizamos al profesor en una posición quasi-reflexiva (en el sentido de Miller y Baker, 2002), principalmente en cuanto que reconoce los aspectos estratégicos, pedagógicos y relaciones de poder que se producen en un proceso de enseñanza/aprendizaje:

- Dice pensar que el docente es la autoridad, pero considera que los intereses de los estudiantes en cuanto a la motivación son intrínsecos y quizás inamovibles ante cualquier tarea que se le presente: *Yo pienso que puede estar el mejor maestro al frente, con una enseñanza impecable, pero si el estudiante no quiere aprender, no aprende.* Es decir, plantea un proceso de estudio basado sólo en lo epistémico, desligado del aprendizaje del estudiante.

- Manifiesta el valor del uso de sistemas de gestión para ayudar a los estudiantes a independizarse: ... *lo importante no es tanto que el muchacho maneje memoria, maneje conocimientos, que recite una cantidad de fórmulas y principios matemáticos, sino presentarle el problema y que él utilice los principios, el conocimiento para resolverlo....*

- Al estar de acuerdo con que la escuela es el lugar para buscar mejores formas de ayudar a los estudiantes a aprender, pero las interpreta siempre como centradas en la matemática misma: ... *Me di cuenta que el estudio de la matemática se podía utilizar para que cualquier persona que estudie matemáticas se haga más eficiente. Pienso que el fin* *último de la matemática es el funcionamiento eficiente del cerebro, y la única manera de hacerlo es a través del aprendizaje de las matemáticas...*

- Al explicitar que el saber matemáticas permite acceder a otras cosas: ... *lo más importante de la matemática no es la matemática en sí, sino la transferencia que hacemos de la matemática a la vida real...*, pero entendemos que aplicar significa para el docente que se apliquen cálculos y procedimientos, pero no que el propio contenido se vea sumergido de significados que vengan de prácticas del mundo real.

- Al justificar una pedagogía concreta que ha seleccionado: ... *generalmente se da la definición del tema, se analiza, se trata de entender qué es lo quiere decir. Después, se muestran modelos de aplicación y luego tratamos de hacerle transferencia a problemas prácticos.*

En síntesis, vemos que el profesor muestra tendencias hacia la posición reflexiva respecto a los aspectos estratégicos, pedagógicos y relaciones de poder, seguramente como posición propia de un docente con experiencia. Sólo en ocasiones se muestra interrogativo y en algunos de sus comentarios y acciones iniciales lo caracterizamos como conformista.

5.1.7. Aportes del cuestionario Likert inicial

El análisis del cuestionario II (cuestionario incluido en el anexo 2) nos ha permitido obtener información que complementa los resultados en relación a los diferentes componentes del desarrollo profesional del profesor.

El docente y su posicionamiento frente la práctica docente: Este aspecto agrupa las cuatro primeras preguntas, en las cuales se refleja que la acción que más frecuentemente realiza el profesor es la de tratar de cumplir unas condiciones generales fijadas previamente, acompañada esta acción de la búsqueda de ejercicios, ejemplos y actividades de motivación lo que representa consecuentemente la práctica más apreciable. El pedir información a los compañeros profesores de matemáticas aparece como una de las acciones que menos valora; esto puede indicar que se da poca importancia a la colaboración entre los compañeros a la hora de enfrentar la tarea docente.

El profesor valora muy positivamente la importancia de los contenidos matemáticos por su utilidad para la vida real y por los aspectos procedimentales que éstos permitan desarrollar. De manera análoga, destaca el planteamiento de ejercicios y prácticas para adquirir destrezas con los algoritmos como actividades adecuadas para enseñar matemáticas.

Inferimos que el profesor incurre en algunas inconsistencias al momento de responder, por ejemplo, en relación a las preguntas 1 y 4. En la pregunta 1 detectamos que no comparte con sus colegas ideas sobre la preparación de materiales para la clase (dada la baja valoración) y, en la pregunta 4, plantea con una alta valoración que posee una actitud de compromiso con sus colegas de la institución por estudiar y valorar propuestas de nuevos currículos o nuevas formas de enseñar.

En síntesis, se puede apreciar que el profesor tiende a pertenecer al paradigma tradicional, en donde su actividad se basa en el cumplimiento del desarrollo de unas temáticas (pertenecientes a un listado de contenidos prefijado), donde la enseñanza tiene como característica que se basa en aspectos procedimentales y algorítmicos. En donde además, el profesor no da muestras de compartir con sus colegas de matemáticas de la institución asuntos relacionados con la práctica docente.

Sobre cuestiones epistemológicas de la enseñanza: Las respuestas a las preguntas 5 y 6 contienen información relacionada a la creencia del profesor del por qué se debe estudiar matemática y cómo se aprende. En la primera de estas situaciones, las diferencias entre las puntuaciones otorgadas a los ítems son lo suficientemente altas para que podamos decir que la ordenación que surge es clara. En primer lugar que el profesor valora el carácter formativo de la materia; en segundo lugar, su utilidad social; y finalmente la utilidad para otras disciplinas del currículo.

En la segunda de las situaciones, el profesor da una alta valoración a la creencia que las matemáticas se aprenden mediante el esfuerzo y el trabajo personal. Esta creencia prioriza el trabajo del estudiante frente a otros factores que intervienen en el proceso de aprendizaje, como lo es la acción del profesor, que queda relegada a un segundo plano. En esta misma vía, el profesor le da mucha importancia a la creencia que las matemáticas se aprenden mediante ayudas externas, correcciones y explicaciones, lo cual parece indicar la complementariedad con la idea anterior, para ratificar que al profesor es posible ubicarlo dentro del paradigma tradicional.

En síntesis, inferimos que el profesor tiene muy arraigada la concepción formativa de la matemática, y que esta es la principal justificación para permanecer en los currículos de la educación secundaria. Además, se evidencia nuevamente que el profesor ejerce su labor enmarcado dentro del paradigma tradicional, en este caso principalmente por que el profesor considera que el estudiante es quien debe esforzarse por aprender basándose en la fundamentación conceptual y de ejemplos que él le brinda dentro del aula de clase.

Sobre criterios para la valoración de algunos aspectos de la enseñanza: Las valoraciones otorgadas por el profesor a los distintos ítems de las preguntas 7, 8 y 9 son altas y permiten realizar una ordenación de las respuestas. Estas preguntas contienen aspectos relacionados con la valoración de su propio trabajo, las características de un buen estudiante y sobre la cualificación de los profesores.

En la primera, se puede inferir que el profesor valora suficientemente su trabajo por el avance en el aprendizaje de sus estudiantes y, por el contrario, no le da suficiente importancia al interés y la participación de los estudiantes en el aula; esto está en concordancia con la posición tradicional de la enseñanza que el profesor ha reflejado en diversos momentos de la entrevista inicial.

En la segunda de las cuestiones, los rasgos que caracterizan a un buen estudiante de matemáticas principalmente son aquellos que poseen ciertas cualidades humanas como son el ser responsable, solidario y participativo. Las valoraciones, siguiendo el orden, se corresponden con la conjugación de la motivación y la capacidad de trabajo frente a otras cualidades intelectuales o humanas.

En la última de las cuestiones, el profesor asigna la máxima valoración a todos los ítems, lo cual podría interpretarse como que el profesor se siente inseguro en su trabajo cotidiano, manifestando implícitamente la falta de una formación más sólida en aspectos matemáticos, didácticos y relacionados con su propia práctica. Es en la respuesta a esta pregunta que el profesor evidencia que puede aumentar su cualificación profesional mediante la comunicación y el intercambio de experiencias con otros colegas de matemáticas; contrario a lo que sugirieron respuestas anteriores. Otra posible interpretación a las valoraciones dadas a esta pregunta es el hecho que en el colectivo de profesores se tenga la idea de que en la profesión siempre es posible mejorar, dado que, posiblemente, en su formación inicial le quedaron vacíos que son necesarios completar. Un aspecto que llama la atención es que a pesar que el profesor es un profesional experimentado (28 años), sus respuestas sugieren la necesidad de capacitación en los aspectos ya mencionados.

En conjunto, el profesor valora como perfil de un buen estudiante el de la persona que se esfuerza y realiza todas las actividades que se le proponen sin dejar por ello de valorar otros aspectos como son sus capacidades intelectuales o sus cualidades humanas. Por otra parte, llama la atención que el profesor valora ampliamente las cualidades personales de sus estudiantes, lo cual está en concordancia con lo expresado por el profesor en el cuestionario I, donde expresaba que considera la matemática como una posibilidad de mejora en aspectos humanos del ser. Finalmente, sus respuestas sugieren, a pesar de haber expresado lo contrario anteriormente, que el profesor necesita de la comunicación e intercambio de experiencias con otros colegas como un medio para mejorar en su actividad profesional.

Sobre cuestiones relativas a las dificultades de aprendizaje: Este subapartado abarca las tres últimas preguntas del cuestionario. En la primera de este bloque (la número 10), podemos distinguir como ítem más valorado aquél que afirma que las dificultades en la enseñanza son debidas a los profesores, lo cual es un indicio de toma de consciencia de parte del docente, dado que la mayoría de profesores consideran que ellos son los últimos responsables de las dificultades de los estudiantes. En su orden, el ítem que hace referencia a la responsabilidad del sistema educativo y el currículo tiene menos peso, por no decir, le es indiferente. Los dos siguientes ítems se corresponden con las respuestas menos valoradas, es decir, considera que los estudiantes y la materia no son en ninguna medida los responsables de las dificultades de la enseñanza de la matemática como sí lo es el gestor y organizador de todo el proceso de enseñanza.

En la pregunta 11, las distintas opciones muestran diferencias significativas en la valoración dada. Los ítems ampliamente valorados hacen referencia a que los errores de los estudiantes sirven para diagnosticar el conocimiento y corregir deficiencias como una condición para el aprendizaje; creencias que están en consonancia con posiciones constructivistas sobre el error, al que consideran como condición para el aprendizaje. Por otro lado, el profesor no le presta importancia al error como elemento para valorar y reconsiderar la planificación, ni lo usa para realizar algún tipo de clasificación de los estudiantes. Esta última parte poco coincidente con lo que muchos profesores hacen con los errores de los estudiantes, realizar algún tipo de clasificación de los mismos.

En la última pregunta del cuestionario, sobre la utilidad de las representaciones externas (dibujos, figuras, diagramas, etc.), el profesor da la máxima valoración a que éstas facilitan el proceso de enseñanza y son una condición necesaria para el aprendizaje; un asunto que hasta este momento del desarrollo del trabajo no habíamos podido evidenciar, es decir, si realmente en su práctica docente estimula la creación, uso y transformación de diferentes representaciones externas. Por otro lado, con menos puntuación, pero igual las considera importantes, las imágenes sirven para diagnosticar el conocimiento y las habilidades de dibujo de los estudiantes.

En síntesis, de esta sesión de preguntas, se resalta la idea de que el profesor es el principal responsable de las dificultades en la enseñanza, que los errores de los estudiantes les sirven a los profesores para diagnosticar el conocimiento y como una condición para el aprendizaje, y que las representaciones externas principalmente facilitan el proceso de enseñanza y son una condición para el aprendizaje.

5.2. POSICIONAMIENTO DEL PROFESOR EN EL COMPONENTE MATEMÁTICO-EPISTÉMICO A LO LARGO DEL PROCESO

En este apartado pretendemos dar respuesta a los aspectos matemáticos-epistémicos del conocimiento profesional que logramos evidenciar durante el proceso reflexivo que realizó el profesor mediante las sucesivas entrevistas, teniendo en cuenta la identificación de descriptores (planteados para este componente) que se muestra en el anexo 8. Este anexo presenta extractos de respuestas del profesor a diferentes preguntas que se le hicieron acompañados de los correspondientes códigos de los descriptores del componente matemático/epistémico. El análisis parte de la trayectoria de desarrollo profesional que resulta de la identificación de dichos descriptores; es decir, el análisis nos ha permitido identificar momentos de cambio del profesor durante la trayectoria. A continuación exponemos los resultados producto del análisis (en cada una de las fases de la trayectoria) de lo que el profesor expresó y el equipo investigador interpretó y logró evidenciar en la actividad del profesor en cada una de las sesiones de entrevista.

<u>Resultado 1</u>. En la **fase inicial**, el profesor reconoce sólo algunas lagunas en aspectos del contenido.

En efecto, nos indica que realiza la enseñanza de la semejanza mediante el uso de la definición intuitiva (básicamente realizando identificación visual). El efecto positivo que tuvo la diferenciación planteada ("misma forma" y "parecidos") en la enseñanza de la noción intuitiva de semejanza en figuras planas. Que no conocía otra manera de plantear proporciones entre figuras semejantes que usando la constancia de razones externas.

<u>Resultado 2</u>. A lo largo del desarrollo en la **fase intermedia**, el profesor asume conflictos vinculados con el contenido matemático y sus conexiones. Asume que su mapa de contenidos no era completo. Y reconoce que falta asociar ejemplos y propiedades correctamente al esquema.

En efecto, identifica un aspecto del cual no era consciente, que los polígonos regulares del mismo número de lados son siempre semejantes. Expresa que no era consciente de la conexión entre la semejanza y la homotecia, y que la considera importante para la enseñanza del tema. Reconoce que la enseñanza de la semejanza era limitada al tema de los triángulos. Identifica que las condiciones matemáticas para la semejanza son importantes (congruencia de ángulos y proporcionalidad de lados correspondientes), dado que como sólo trabajaba con triángulos, le era suficiente la congruencia de ángulos. Además, con respecto a lo mismo, el profesor se hizo consciente que esto lo indujo a cometer errores, tales como pensar que todos los rectángulos son semejantes. No es consciente que la ampliación o reducción de una figura no necesariamente es resultado de una transformación homotética. Presenta algunas dificultades en el manejo de terminología propia del tema de estudio y de las cuales da muestras de ser consciente. Identifica elementos en el concepto de homotecia de los cuales no era consciente, por ejemplo, que los lados correspondientes en las figuras homotéticas son paralelos. Reconoce la importancia de la conexión entre la semejanza y temas relacionados (por ejemplo, la homotecia y el teorema de Thales); conexión de la que no era consciente. Reconoce y se hace consciente de una mala comprensión del teorema de Thales, lo que se hizo evidente al intentar usar el teorema de Thales en configuraciones gráficas que sólo exhibían cuadriláteros. Reconoce que aún tiene dificultades en el manejo de lenguaje propio de la semejanza y sus temas relacionados, por lo que expresa que está trabajando para mejorar. Reconoce que no era consciente que podía encontrar configuraciones gráficas del teorema de Thales diferentes a las típicas (en forma de pico y de mariposa, con punto de intersección entre transversales visible). Lo anterior implica que dichas configuraciones no las contempla en la enseñanza del tema.

Resultado 3. En la **fase final**, el profesor da muestras de aceptar los efectos positivos de la reflexión realizada en cuanto el contenido matemático, y sus dificultades ante el reconocimiento de propiedades.

En efecto, nos dice que muestra mayor claridad y facilidad de expresar la terminología propia de la semejanza y los temas relacionados. Se hace consciente de diversas maneras de construir figuras semejantes a una dada. Reconoce que sólo enseña una, la que hace referencia al trazado de una paralela a un lado de un triángulo. Reconoce que cometía algún error en la definición de la semejanza de triángulos rectángulos (todos los triángulos rectángulos son semejantes puesto que tienen un ángulo de 90º). También reconoce que no enseña la propiedad de las áreas y perímetros de figuras semejantes, dado que no le parece importante en la medida que no ha encontrado problemas concretos para su aplicación. Reconoce que no enseña el concepto de escala y se hace consciente que éste está relacionado con la semejanza. Y no reconocía todos los criterios de semejanza posibles.

5.3. POSICIONAMIENTO DEL PROFESOR EN EL COMPONENTE DIDÁCTICO-ESTRATÉGICO DE LA TRAYECTORIA DE ENSEÑANZA

De manera análoga al apartado anterior, en este se presentan los resultados del análisis de las entrevistas (antes y después de cada sesión) practicadas al profesor desde el componente didáctico-estratégico. El análisis nos ha permitido caracterizar al profesor en dicho componente y, de manera general, los procesos de cambio en términos de su desarrollo profesional. Seguimos la misma estructura que en la sección anterior de este capítulo, es decir, presentamos, para el componente didáctico-estratégico, los resultados del análisis de las entrevistas antes y después de cada sesión de clase. Los resultados se presentan en cada una de las tres fases de la trayectoria. Este análisis se basa en los descriptores presentados en el anexo 9 mediante unas tablas que incluyen ejemplos de extractos de las entrevistas con el profesor en los cuales se ha identificado el correspondiente descriptor del componente didáctico-estratégico.

Resultado 4. En la **fase inicial**, el profesor reconoce en términos de aprendizaje, instrucción y evocación de procesos interactivos que la mayor preocupación del profesor es el desarrollo de contenidos, lo que se traduce en un control permanente y exhaustivo del tiempo. El permanente control del tiempo lo lleva a tratar los temas de una manera muy superficial, a no realizar conexión entre temas relacionados, a no preocuparse por el rendimiento individual de sus estudiantes, a no realizar una recapitulación de temas desarrollados, a no complementar la enseñanza de la geometría con, por ejemplo, SGD, a no plantear tareas matemáticas que se enfoquen en el desarrollo del razonamiento de los estudiantes.

En efecto, indica que al momento de enseñar el tema, cuando plantea actividades a los estudiantes, no les permite desarrollar su razonamiento puesto que él mismo les indica el procedimiento a utilizar en la resolución de la tarea. Después de enterarse de los aspectos de la planeación propuesta por el investigador, no es suficiente el contenido programático que planea para la enseñanza del tema. Presenta las definiciones de conceptos y no permite que los estudiantes las construyan. La metodología usada y el tipo de actividades (propuesta por el investigador) son un factor importante de motivación para los estudiantes. No verifica el aprendizaje de cada uno de sus estudiantes, es decir, simplemente se hace una idea global de todo el curso. Indica que por razones de tiempo, no puede realizar procesos de mejoramiento de manera individualizada, tiene que hacerlos de manera generalizada. La enseñanza que hace del tema es muy limitada, sólo se enfoca en la noción intuitiva. No permite el trabajo colectivo de sus estudiantes durante el desarrollo de las clases. Habla de la importancia de que los estudiantes avancen en su nivel de razonamiento usando como medio fundamental el diseño adecuado de actividades sobre el tema de estudio. Que hasta este momento no se ha apropiado de la metodología sugerida por el investigador. Que no usa un momento final en sus clases para realizar una puesta en común de lo desarrollado en la misma. Identifica y reconoce que el planteamiento de los criterios de semejanza de triángulos son importantes en la enseñanza del tema, pero no como lo hacía en el pasado (únicamente enunciarlos si el desarrollo de alguna clase lo requería). Concretamente, es consciente de la importancia que los estudiantes los "descubran" mediante adecuadas actividades. Sugiere que es importante incluirlo dentro de planificaciones futuras.

En la medida que fue transcurriendo la experimentación, el profesor se fue haciendo consciente de que debía replantear muchos aspectos de su práctica en términos del componente didáctico-estratégico. El investigador infiere que la concientización del profesor por los aspectos antes mencionados le permitirá, por lo menos en parte, mejorar su práctica docente.

Resultado 5. En la **fase intermedia**, el profesor se apropia de la metodología propuesta, dando voz al alumnado, asumiendo el valor de representaciones y recursos e identifica elementos claves en la instrucción que pretenden mejorar el nivel de razonamiento de los estudiantes. Es capaz de reflexionar sobre conflictos cognitivos que surgen de manuales escolares.

En efecto, reconoce la importancia de permitir que los estudiantes participen y aporten ideas al desarrollo de las clases. Aún insiste en que debe manejar mejor el tiempo, dado que debe desarrollar otros tópicos. Reconoce que está cambiando su metodología, traducido esto en que está esforzándose por apropiarse de la nueva. Asume la importancia de iniciar el estudio de la semejanza mediante dibujos que no necesariamente representan figuras geométricas. Reconoce el papel de ciertas tareas matemáticas que son claves para el desarrollo del tema de estudio y que además posibilitan el desarrollo del razonamiento del estudiante. Reconoce la importancia de profundizar en el tema de estudio. Habla con cierto grado de propiedad de elementos pertenecientes al modelo de Van Hiele, el cual era completamente desconocido para él. Compara formas instructivas y reconoce que el modelo de Van Hiele es un buen organizador de la enseñanza que permite mejores aprendizajes. Muestra interés por fusionar metodologías de enseñanza (la que usa y la que el investigador le está proponiendo). Se conciencia de la importancia del uso, por parte de los estudiantes, de instrumentos de geometría en sus clases. Se conciencia de la necesidad de cambiar su práctica en el aspecto que tiene que ver con la metodología de enseñanza y confiesa que la metodología que está usando en la experimentación ofrece buenos resultados, en términos de calidad de las formas de razonamiento de los estudiantes. Desconoce los SGD, pero tiene conocimiento de la importancia que tienen como mediadores instrumentales del aprendizaje. Reconoce la importancia de enseñar diversas representaciones de un concepto. Considera importantes otras formas de enseñar la semejanza.

Expresa que los libros de texto actuales presentan el teorema de Thales de una manera muy somera y no incluyen aspectos importantes como lo son las diversas configuraciones gráficas. Se conciencia de la importancia que tiene realizar una recapitulación de aspectos claves de la clase. Reconoce la importancia de proponer diversas tareas educativas a los estudiantes, como medio posible de mejorar el aprendizaje. Reconoce que la metodología usada durante la experimentación ha permitido a algunos estudiantes, que tenían una aparente fobia por la matemática, mejorar en su motivación por el estudio de la misma.

Resultado 6. En la **fase final**, el profesor valora la experiencia realizada, desde una perspectiva interrogativa, en cuanto el modelo de Van Hiele permite reducir conflictos y valora dar voz al alumnado.

En efecto, reconoce la importancia de dedicar el tiempo suficiente para la enseñanza de la semejanza y sus temas relacionados. Interpreta que la manera como se planeó enseñar la semejanza es mucho mejor que como lo hacía; considera que de este modo los estudiantes adquieren más y mejores formas de análisis y argumentación de las tareas relacionadas con la semejanza. Reflexiona sobre la pertinencia o no de la aparición de ciertos elementos en las tareas que se proponen a los estudiantes. Se conciencia de que la clasificación de estudiantes, usando los niveles de Van Hiele, es importante como medio para el diseño de estrategias que le permitan, en cualquier caso, mejorar el nivel de razonamiento de sus estudiantes.

Identifica elementos del diseño de aprendizaje que considera favorables y que suponemos ha interiorizado para usarlos en futuras planeaciones. Reconoce la importancia que tiene el desarrollo de ciertas propiedades matemáticas del concepto (que no contempla en sus planes de clase). Reconoce que el tema de escala no lo enseña y que no era consciente de su relación con el concepto de semejanza. Identifica resultados positivos en la experimentación, en la medida que observa en los estudiantes un nivel alto de razonamiento de Van Hiele. Reconoce que al hacer una comparación de resultados obtenidos antes y después de la experimentación, ha constatado que tanto las actividades diseñadas como la metodología usada permitieron aprendizajes significativos en los estudiantes.

5.4. POSICIONAMIENTO DEL PROFESOR EN EL COMPONENTE ACTITUDINAL-COMPORTAMENTAL

De manera análoga a los apartados anteriores, en este se presentan los resultados del análisis de las entrevistas realizadas al profesor (antes y después de cada sesión) desde el componente actitudinal-comportamental y de identidad profesional. Dicho análisis nos ha permitido caracterizar sus actuaciones en dicho componente y, de manera general, los procesos de cambio del profesor en términos de su desarrollo profesional. A continuación exponemos los resultados después de analizar la actividad del profesor en cada una de las tres fases de la trayectoria. En el anexo 10 presentamos los diferentes descriptores del componente actitudinal-comportamental junto a extractos de las entrevistas con el profesor en los cuales se han identificado dichos descriptores. Los resultados del análisis indican que en el componente actitudinal (en relación con el conocimiento matemático, con los aspectos estratégicos y con sus actitudes), el profesor, a pesar de haber mostrado algunas creencias bastante arraigadas, expresa que las ha modificado fruto de su participación en este estudio; por ejemplo, que ya no es su mayor motivación el cubrimiento de contenidos (siguiendo estrictamente lo sugerido por los documentos del MEN) en el menor tiempo posible sin importar la calidad de la enseñanza y del aprendizaje.

Resultado 7. En la **fase inicial**, el profesor considera que la matemática es un medio para enfrentar situaciones de la vida cotidiana. Por otro lado, muestra una fuerte inclinación a ver la matemática como una herramienta que permite acceder al manejo eficiente de la solución de problemas cotidianos, contrastando esto con su fuerte inclinación por ser un transmisor de conocimientos, sin permitirle al estudiante participación en las clases.

Muestra interés por la participación en el estudio y expresa que está dispuesto a hacer sugerencias si es el caso. Sigue estrictamente los documentos oficiales como elementos reguladores de la enseñanza, es decir, los asume como un guión que debe seguir. A pesar de las sugerencias planteadas por el investigador en asuntos metodológicos, sugiere que desea seguir manteniendo, al menos en parte, alguna de sus creencias; por ejemplo, que los estudiantes realicen figuras geométricas sin implementos, con el fin que los estudiantes desarrollen la “premonición”.Plantea la necesidad de seguir siendo el actor principal en el proceso de enseñanza-aprendizaje; es decir, seguir siendo un transmisionista del conocimiento, sin permitir que el estudiante participe del proceso.

Resultado 8. En la **fase intermedia**, el profesor valora el análisis de las dificultades del alumnado. La evolución del profesor en el transcurso de la experimentación sugiere que ha pasado de ser un profesor con características de conformista/reflexivo a ser un profesor con características de reflexivo/interrogativo.

En efecto, en cuanto a los aspectos cognitivos, reconoce la importancia de tener en cuenta otras maneras de organizar la enseñanza (el caso del modelo de Van Hiele), en lo que tiene de basarse en un análisis cognitivo en el que influye el aprendizaje, como un intento por cambiar la que usa actualmente en su práctica (de tendencia tradicional exclusivamente). Valora el análisis de las dificultades del alumnado. Identifica obstáculos que perjudican el fin último de la enseñanza de la matemática, es decir, considera que su estilo no permite la suficiente motivación de los estudiantes y la consecución de aprendizajes significativos. En cuanto lo epistemológico, reconoce que los planes de clase que usaba en la enseñanza no le permitían hacerse consciente de posibles relaciones (conexiones) entre temas. Aunque no identifica elementos concretos de la conexión matemática que se han visto mejorados. Identifica que los estudiantes se deben rotar (intercambiar) cuando se detecta que no existe empatía al trabajar en pequeños grupos.

En cuanto a lo estratégico, identifica el valor de los materiales y recursos en los procesos de estudio, aunque no los asocia completamente a procesos de construcción semiótica en cuanto asumir registros más completos y diversos, ver el papel de las representaciones diferentes en cada contenido, etc. Después de haber reconocido que no sabe nada acerca de Cabri, se ha interesado por aprender a manejarlo y por buscar la manera de incorporarlo en la enseñanza. A priori expresa que el software le permitiría, entre otras cosas, desarrollar la creatividad de sus estudiantes. Pero no concreta en qué aspectos. Reconoce el valor de planificación sugerido en cuanto le permiten una auténtica motivación en sus estudiantes y considera que de esto depende un buen aprendizaje. Además, sugiere que la motivación de los estudiantes es de tal grado, que inician las tareas planteadas sin esperar que el profesor sea el actor principal. Plantea la necesidad de lograr un equilibrio entre el desarrollo de contenidos (que en un principio era su principal motivación) y el uso de la metodología propuesta por el investigador. Reconoce que, a pesar de haber constatado las bondades de los planes de clase sugeridos, aún le cuesta trabajo apartarse de su estilo de enseñanza (el cual ha reconocido que no es el adecuado para la enseñanza). Muestra cambios en su forma de concebir la enseñanza con cierto grado de interrogación; reconoce que el estudiante también es un actor importante en el proceso (por ejemplo, considera importante que los estudiantes reflexionen y conjeturen sobre diversas situaciones matemáticas). Reconoce la importancia de que sean los mismos estudiantes los que construyan el conocimiento, lo que les permitirá enfrentarse a diversas tareas y obtener soluciones óptimas. Pero no vincula este principio con un proceso de construcción de significados.

Reconoce que puede mejorar su práctica mediante el proceso reflexivo que está realizando con ayuda del investigador, lo que le permite hacerse consciente de situaciones puntuales. Por ejemplo, otorga un papel diferente al estudiante. Se hace consciente de la necesidad que los estudiantes participen más en el proceso, es decir establecer una negociación como forma de relación pedagógica en la que los papeles de profesor y estudiantes sean menos desiguales.

<u>Resultado 9</u>. En la **fase final**, el profesor considera importante conocer el avance de sus estudiantes en términos de la calidad de sus razonamientos, con miras a mantener controlado el proceso de enseñanza-aprendizaje. Parece que aún no acepta sobrepasar el sentido de control de la práctica matemática. Valora el hecho de disponer de un marco teórico que le permite justificar actualmente la práctica, pero no le otorga aún un valor epistémico. En cuanto al nivel de implicación, reconoce la importancia de compartir experiencias con sus colegas sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Se sienten cambios en la concepción epistémica/matemática que se integra con lo cognitivo. En este momento de la experimentación, reconoce (y ha dado muestras) que se ha apropiado de la metodología de enseñanza propuesta y que, de este modo, los estudiantes han adquirido importantes formas de razonamiento.

Sobre la gestión y lo estratégico, reconoce que su participación en el estudio le ha permitido ser más creativo en su práctica instruccional. Así mismo, le ha permitido ser consciente que todos los estudiantes tienen capacidades intelectuales para aprender matemáticas; se requiere de una buena planeación y ejecución de los mismos (teniendo siempre presente que los estudiantes deben ser actores como lo es el profesor en las clases). Reconoce que el grado de motivación de los estudiantes es tal, que participan en el proceso sin preocuparse por obtener una nota (calificación).

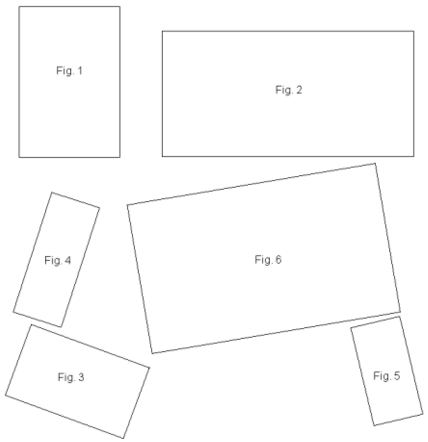
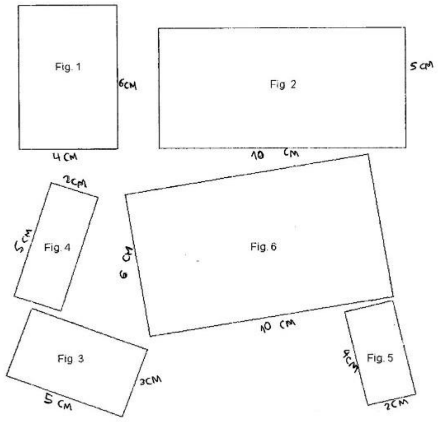
5.5. PAPEL DEL PROFESOR EN LAS SITUACIONES DE CAMBIO

En este apartado mostramos características del desarrollo profesional, que permiten situar al profesor frente a su posicionamiento y práctica reflexiva profesional respecto al contenido matemático de la semejanza de figuras planas, así como también elementos que permiten el análisis del papel del profesor en las situaciones de cambio (mejoramiento) de aprendizajes de los estudiantes. Como se ha dicho antes, hemos usado el instrumento denominado viñeta, la cual permitió recoger información desde diversas fuentes (unidad de enseñanza, entrevistas al profesor, observaciones de clase, producciones escritas de los estudiantes, etc.) y con la cual el investigador realizó una triangulación de dicha información para obtener los resultados que aquí presentamos.

A continuación mostramos ante todo algunos ejemplos de viñetas, que contienen, entre otras informaciones, inferencias realizadas por el investigador a una parte o todo el conjunto de las mismas. En algunos casos, podemos decir que justifican con más profundidad algunas de las afirmaciones realizadas anteriormente, y en otros casos, las matizan.

El análisis de las diferentes viñetas, en términos de lo que expresa el profesor y el investigador pudo observar, muestran diversas características del desarrollo profesional que nos permiten situar al profesor frente a su posicionamiento y práctica reflexiva. Por otro lado, nos han permitido el análisis del papel del profesor en las situaciones de cambio de aprendizajes de los estudiantes, el cual es fruto de lo que el profesor expresa, dado que es él quien conoce a sus estudiantes y de esta manera puede dar cuenta de las mejoras que sus estudiantes han tenido.

Ante todo, globalmente, observamos la predisposición positiva a introducir no sólo cambios en su forma de hacer, sino asumir la reflexión que implica su uso mediante el diálogo con el productor de la propuesta (en este caso el investigador). El profesor al haber asumido la planificación sugerida (incluye tareas que abordan de manera amplia temas relacionados y sugerencias metodológicas para su ejecución) inició un proceso de aprendizaje de aspectos que él no conocía o de los cuales no era consciente. De acuerdo con lo que ha expresado y se pudo observar, a medida que fue transcurriendo la experimentación, el profesor fue haciendo suya la planeación.

Actividad Nº 5	**Sesión de clase Nº 2**	**Contenido matemático: Noción intuitiva**	
Tarea: ¿Cuáles de los siguientes rectángulos tienen la misma forma? Justifique su elección. 	**Objetivo y características privilegiadas:** • Comprender que no todos los rectángulos tienen la misma forma a pesar de que la percepción insinúe lo contrario. • Reconocer e identificar figuras planas que tienen la misma forma. **Aproximación al concepto:** Figuras separadas **Tipo de problema:** Identificación de relaciones **Tipo de representación:** Lenguaje figurativo **Nivel de Van Hiele:** 2 **Fase de aprendizaje:** Información	**Comentarios y preguntas clave del profesor y respuestas de los estudiantes (E):** Carlos justifica la elección de las figuras semejantes planteando: E: P*rimero tomé la medida de los lados y luego busqué las figuras que cumplían que los lados del uno sean iguales a los de otro multiplicado por una constante... tomando esto como referencia puedo afirmar que las figuras 3 y 6 tienen la misma forma ...* Esta respuesta se complementa con la que el estudiante le dio al investigador cuando le preguntó que si lo que había escrito era suficiente para justificar la semejanza; Carlos planteó: E: *En el caso de los rectángulos no hay problema porque los ángulos en todas las figuras eran iguales, todos son de 90* [grados].	

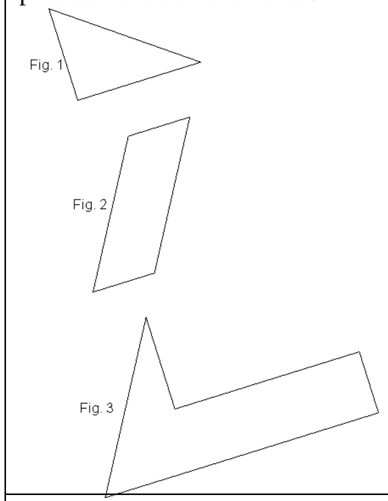
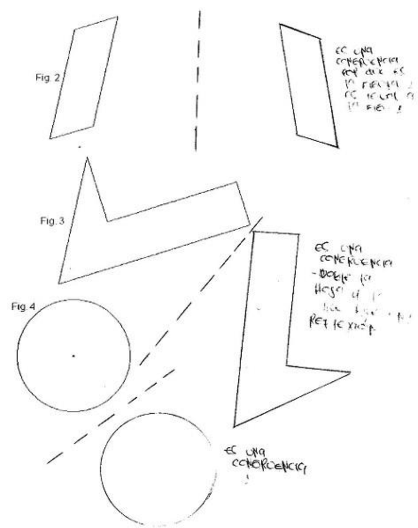
Justificación que hace el profesor de la gestión realizada:

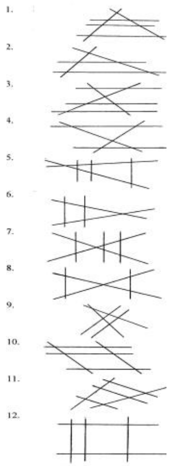
- La metodología que se le ha propuesto al profesor comienza a ser vista como un elemento que genera motivación en los estudiantes: ... *Ayer, una de las cosas que me impresionó muchísimo fue un grupo. El grupo de Laura. Ese grupo me impresionó porque están reaccionando de una manera que con el método que yo les expongo no lo hacen. Es más, yo pensaba que no les gustaban las matemáticas y que tenían un razonamiento más bien medio o tirando a bajo. Lo que yo vi que hicieron en la experiencia pasada, me dejó impresionado.*
- Antonio justifica, por lo menos en parte, el avance de los estudiantes como resultado de la planeación propuesta: ... *Yo, definitivamente, de semejanza no tenía nada. Yo, simplemente, miraba la semejanza solo por la parte visual y luego buscaba los casos canónicos de la semejanza y los aplicaba. Con esta programación se empieza a notar que los estudiantes piensan mejor.*

Inferencias realizadas por el investigador:

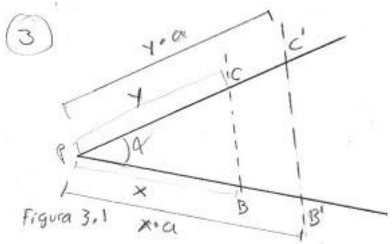
El profesor reconoce que la planeación que está ejecutando tiene sus bondades: por un lado, estudiantes que eran apáticos a aprender matemáticas se han logrado motivar y tener producciones que el mismo profesor se ha sorprendido; por otro, había previsto que a los estudiantes había que decirles como desarrollar esta actividad porque de lo contrario no serían capaces, lo cual no fue así, un buen grupo de estudiantes logró iniciar y culminar satisfactoriamente la tarea propuesta.

En síntesis, se notó que el profesor, en la medida en que se apropia de los aspectos que contempla la planeación propuesta, da participación al estudiante haciéndoles preguntas que les permiten avanzar en su razonamiento; inferimos que esto es resultado de su proceso reflexivo que está llevando a cabo.

<table>
<tr><td colspan="4">Actividad Nº 15   Sesión de clase Nº 4   Contenido matemático: Factor de semejanza</td></tr>
<tr>
<td>Tarea:
Dibuje al frente de cada figura otra que sea semejante a ella. Describa el proceso usado en cada caso.
</td>
<td>Objetivo y características privilegiadas:
• Aplicar las ideas aprendidas, en las anteriores actividades, en la justificación de sus respuestas.
• Comprender que no sólo se decide la semejanza de figuras planas, sino que también se pueden construir figuras semejantes a otra.
Aproximación al concepto: Ningún tipo
Tipo de problema: Problema de construcción
Tipo de representación: Lenguaje figurativo
Nivel de Van Hiele: 2
Fase de aprendizaje: Orientación dirigida</td>
<td>Comentarios y preguntas clave del profesor y respuestas de los estudiantes:
Una estudiante encontró una manera “ingeniosa” para dibujar figuras semejantes a las dadas. Ella dobló la hoja (por donde aparecen las líneas a trazos), marcó puntos coincidentes entre los vértices de cada una de las figuras y luego los unió. Cuando el profesor le preguntó qué significaban las líneas a trazos, ella respondió:
E: ... eso funciona como un eje de reflexión...</td>
<td></td>
</tr>
<tr><td colspan="4">Justificación que hace el profesor de la gestión realizada:
- El profesor manifiesta satisfacción por los resultados que está observando en sus estudiantes: La actividad Nº 15 de verdad fue la que más me produjo satisfacción en esta sesión, porque vi unas propuestas muy interesantes para la construcción de las figuras semejantes, no tan elementales como las de medir y trasladar, sino vi, por ejemplo, reflexiones a través de dobleces de hojas, vi rotaciones; o sea, me pareció interesante que ellos ya están manejando las isometrías como un proceso auxiliar para construir figuras semejantes; aunque, probablemente, ellos todavía no lo hacen consciente, pero lo están haciendo.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Inferencias realizadas por el investigador:
La metodología que Antonio está usando le está permitiendo, entre otras cosas, observar los avances de los estudiantes en términos de formas de razonamiento; lo cual no podía observar con su práctica habitual ya que, como se ha dicho antes, era el protagonista principal en la actividad docente.
Según lo planteado en la última frase, Antonio aún no reconoce que sus estudiantes estén razonando de la manera como lo están haciendo transcurrido el primer tercio de la experimentación. Creemos que esta es una manera de dudar que la planeación que está ejecutando pueda seguir dando buenos resultados.</td></tr>
</table>

Actividad Nº 20	**Sesión de clase Nº 6**	**Contenido matemático: Semejanza y teorema de Thales**	
Tarea: Los segmentos de recta que “parecen” ser paralelos, lo son. A) Identifique en cuáles de los dibujos se presentan las características del teorema de Thales. Justifique sus respuestas. B) En cuáles se forman figuras semejantes. Justifique sus respuestas. 	**Objetivo y características privilegiadas:** • Reconocer y comprender diferentes configuraciones gráficas del teorema de Thales. • Identificar semejanza de polígonos en diferentes configuraciones gráficas. **Aproximación al concepto:** Aspecto de proyección **Tipo de problema:** Problema de identificación de relaciones **Tipo de representación:** Lenguaje figurativo **Nivel de Van Hiele:** 2 **Fase de aprendizaje:** Integración	**Comentarios y preguntas clave del profesor (P) y respuestas de los estudiantes (E):** P: *¿Podrías explicarme más explícitamente tu respuesta?* E: *A ver… yo recuerdo de la clase con Cabri, que las configuraciones donde se forma la semejanza son las de forma triangular.* P: *¿Qué quieres decir con recordar?* E: *Sí, es como si las diferentes configuraciones que hicimos en esa clase las tuviera en mi mente y ahora lo que trato es de verlas para usarlas.* P: *Por ejemplo, ¿dónde ves lo triangular?* E: *Pues aquí, mire* [señala los triángulos que se forman en cada una de las configuraciones desde la 1 hasta la 9]. P: *OK. ¿Entonces cómo hiciste la elección de la respuesta?* E: *Digamos ... esa es como la idea que tengo en la mente, entonces busco las configuraciones que sean así.*	Las configuraciones gráficas donde se forman figuras semejantes son *Del número 1 al 9 porque son triangulares, mientras que de la 10 a la 12 son cuadriláteros y no podemos afirmar nada.*
Justificación que hace el profesor de la gestión realizada: - El profesor optó por realizar esta actividad usando Cabri y observó que esta herramienta es muy favorable para el aprendizaje: *... entregarles las cosas en el tablero, ellos no pueden manipular los elementos como en Cabri, por ejemplo, coger la recta, moverla, cambiar el punto de intersección de las transversales, cambiar la longitud de los segmentos, y mirar que se mantienen las relaciones, esto para ellos es impresionante y claro, más fácil.* - El profesor reconoce la importancia del uso del Cabri: Cabri es una herramienta formidable, formidable porque se puede aplicar en muchos, en muchos de los temas que estoy viendo, por ejemplo, en geometría analítica, en trigonometría, en cálculo, entonces pienso que es una herramienta que debo utilizar todo el tiempo.			
Inferencias realizadas por el investigador:			

Antonio asumió el reto de aprender el manejo básico del Cabri para poder implementar esta actividad mediante su uso. Observamos que le pareció muy fácil su manipulación e implementación; además, comprobó el avance que tuvieron los estudiantes en términos de su mejoramiento en las formas de razonar.

Actividad Nº 32(3)	**Sesión de clase Nº 9**	**Contenido matemático: Semejanza de triángulos**	
Tarea: ¿Dos triángulos que tienen un ángulo congruente y los lados que los forman proporcionales son semejantes? Si lo son, ¿podrían ser semejantes los triángulos cuyos lados proporcionales no son ambos del ángulo congruente, sino que uno es el lado opuesto? Justifique sus respuestas.	**Objetivo y características privilegiadas:** • Comprender, plantear y demostrar los criterios de semejanza de triángulos AA, LLL y LAL a partir de herramientas desarrolladas tales como la homotecia y teorema de Thales. **Aproximación al concepto:** Ningún tipo **Tipo de problema:** Problema de identificación de relaciones **Tipo de representación:** Lenguaje natural **Nivel de Van Hiele:** 2 **Fase de aprendizaje:** Orientación dirigida	**Comentarios y preguntas clave del profesor (P) y respuestas de los estudiantes (E):** P: *He observado lo que has escrito, me parece que es una buen justificación. ¿También es posible usar el teorema de Thales a cambio de la homotecia?* E: *Um... yo pienso que sí, por ejemplo, usándolo a la inversa y algunas propiedades.* P: *¿Cómo así?* E: *Como se tiene la proporcionalidad, los lados correspondientes son paralelos entre sí y los ángulos sobre el lado opuesto a "alfa" son correspondientemente congruentes.* P: *¿Y?* E: *Y ya, los triángulos son semejantes por la definición.*	 Como comparten el ángulo, yo los puedo organizar de la siguiente manera (ver figura 3.1 y aquí resulta evidente que con centro homotético P, y razón a, un triángulo es la homotecia del otro por lo que son semejantes

Justificación que hace el profesor de la gestión realizada:

- Los criterios de semejanza de triángulos eran enunciados por el profesor (cuando se presentaba algún problema matemático que lo requiriera), ahora opina: ... *definitivamente el aprendizaje es mucho más efectivo cuando se hace a través de la metodología por descubrimiento guiado. El estudiante construye su propio conocimiento. También, con respecto a la metodología, antes los chicos en situaciones matemáticas complicadas dependían mucho de mi; ahora, con esta metodología, los chicos van avanzando por sus propios méritos hasta el punto que casi todo les parece fácil.*
- El profesor expresa asombro por los resultados favorables observados en las producciones de los estudiantes, en términos de la calidad de sus justificaciones y formas de razonamiento: *... yo nunca pensé que los estudiantes lograran alcanzar estas formas de razonamiento, definitivamente estoy asombrado.*

Inferencias realizadas por el investigador:

Por un lado, el profesor sigue observando que la planificación que está desarrollando ofrece más y mejores posibilidades de aprendizajes en el tema de estudio, y por otro, el investigador está observando que el profesor efectivamente está ejecutando la planificación propuesta.

Actividad Nº 43 **Sesión de clase Nº 11** **Contenido matemático: Uso en situaciones**

Tarea:3
Complete la siguiente tabla utilizando una "X" donde corresponda. Debe argumentar, para cada ítem, su respuesta. Puede utilizar argumentos de todo tipo (gráficos, analíticos, verbales, etc.).

Ítem	¿Son semejantes?	Siempre	A veces	Nunca	No lo se
1	Dos cuadrados				
2	Dos triángulos isósceles				
3	Dos triángulos congruentes				
4	Un rectán-gulo y un cuadrado				
5	Un rectán-gulo y un triángulo				
6	Dos rectángulos				
7	Dos triángulos equiláteros				
8	Dos cuadriláteros, cada uno teniendo todos lo lados de longitud 1				
9	Dos triángulos rectángulos				
10	Dos hexágonos regulares				

Argumentaciones:

Objetivo y características privilegiadas:
Aproximación al concepto: Ningún tipo
Tipo de problema: Identificación de relaciones y de demostración
Tipo de representación: Lenguaje natural
Nivel de Van Hiele: 2
Fase de aprendizaje: Integración

Comentarios y preguntas clave del profesor (P) y respuestas de los estudiantes (E):

P: *Me doy cuenta que has dicho que los triángulos equiláteros son siempre semejantes y has justificado esto mediante el criterio AAA ¿si los triángulos no son equiláteros qué sucede?*

E: *Um... tocaría mirar si los ángulos correspondientes son congruentes.*

P: *¿Sólo con este criterio determinas la semejanza de triángulos?*

E: *Ah... no profe lo que pasa es que con los equiláteros si pasa eso, pero se podría usar otras cosas, por ejemplo... los otros criterios LLL, LAL.*

P: *¿Sólo esas maneras?*

E: *Um... podría ser mirando si los triángulos forman una configuración de Thales o si forman parte de una homotecia.*

P: *OK. Y ¿por qué con los rectángulos no se puede mirar la semejanza sólo con una condición?*

E: *Es que la cuestión de las condiciones cambia según el caso, por ejemplo para los triángulos es suficiente mirar la igualdad de ángulos, en cambio en los rectángulos no es suficiente, to-*

... dos triángulos equiláteros son semejantes siempre porque sólo con saber que los ángulos, en los dos, son iguales lo puedo afirmar, este es el criterio AAA.

En otro ejemplo, plantea que *dos rectángulos a veces son semejantes dado que por los ángulos no hay problema (todos son de 90* [grados]*), pero por los lados si puede haber problema, los lados deben ser proporcionales*.

		caría mirar también la proporcionalidad de los lados.	

Justificación que hace el profesor de la gestión realizada:

- Antes de la sesión de *clase*, el profesor consideró que los estudiantes tendrían dificultades en la interpretación de los problemas: ... *Cuando ellos tienen un problema, inicialmente, tienen una especie de vacío mental, como que no saben para dónde coger. Probablemente, tenga que utilizar una estrategia para llevarlos poco a poco a que planteen la relación de semejanza apropiada.* Después de la sesión de clase el profesor expresó: ... *Yo había pensado que ellos iban a tener problemas en la interpretación de los problemas, pero resulta que no se presentó esa dificultad.*
- Se observa que el profesor está comprometido con una gestión de la clase acorde con la planificación sugerida, en términos de supervisar el trabajo realizado por sus estudiantes, lo cual es un indicio de la apropiación de elementos propios de la práctica que no tenía en cuenta: ... *Lo único que vi fue un grupito de estudiantes que insistentemente me preguntaban ¿voy bien?, o sea cierta inseguridad, pero después que interactué con ellos me di cuenta que estaban entendiendo bien el problema.*
- El profesor expresa satisfacción por la labor realizada y por los resultados satisfactorios en términos de aprendizaje de los estudiantes: ... *déjame decirte, pues hombre me sorprendí, por que me he dado cuenta que no hay jóvenes malos, lo que pasa es que hay jóvenes que no saben que son buenos* [el profesor se refiere a aspectos académicos, particularmente, en matemáticas], *y ¿sabes qué? Me he sentido muy satisfecho por que todos los chicos entienden lo que hacen, aplican lo que hemos desarrollado.*

Inferencias realizadas por el investigador:

En esta que es la última sesión de clase, se pudo observar a un profesor comprometido con muchos de los elementos sobre los cuales se estuvo reflexionando. Además, se muestra muy satisfecho con los resultados obtenidos por los estudiantes, en términos de la calidad del aprendizaje y las diversas formas de razonamiento que adquirieron los estudiantes.

A partir de las observaciones realizadas en las viñetas, podemos afirmar que el proceso reflexivo le fue mostrando aspectos de los cuales no era consciente o no le interesaba incluir en su práctica cotidiana, a saber:

1) **Elementos matemáticos-epistémicos**.

Que la semejanza puede verse no sólo desde la noción intuitiva (“misma forma”), sino que también su estudio puede plantearse desde sus propiedades matemáticas. Que la semejanza puede conectarse con temas relacionados como son la homotecia, el teorema de Thales y el concepto de escala.

2) **Elementos estratégicos**.

Asume que la metodología de corte tradicionalista usada, no permitía una verdadera motivación a los estudiantes para aprender y no permitía a sus estudiantes desarrollar potentes razonamientos que pudieran aplicar en la resolución de problemas matemáticos sobre la semejanza.

Valora en la enseñanza realizar un seguimiento del avance (en su aprendizaje) de cada uno de los estudiantes, con miras a programar acciones de mejoramiento, en los casos que sea necesario. Del mismo modo, comprendió que conocer ampliamente las formas de razonar de los estudiantes es clave para realizar la preparación de sus clases, conclusión a la que llegó con base a la metodología usada en el experimento.

Identifica cierta concepción competencial de la enseñanza/aprendizaje. En cuanto asume que es posible implementar actividades de clase mediante el uso del Cabri, se conciencia que los estudiantes se motivan y mejoran sus formas de razonamiento. Interpreta que el trabajo en pequeños grupos de estudiantes es productivo en la medida que, de dicho trabajo colaborativo, los estudiantes se pueden integrar y es un foco de posibles mejoras de los aprendizajes de sus integrantes. Valora que más que enseñar temas en un determinado lapso de tiempo, debe primar la calidad de la enseñanza con miras a que los estudiantes tengan verdaderos aprendizajes. Asume que es posible motivar a los estudiantes para que, además de aprender los desarrollos teóricos del tema de estudio, puedan diseñar materiales didácticos usando los elementos teóricos desarrollados. Y piensa que es importante llevar a cabo un proceso de autorreflexión o reflexión con otros pares sobre la práctica.

En cuanto lo normativo. Asume que los estudiantes mejoran su autoestima matemática en la medida que sienten que entienden las tareas matemáticas propuestas por el profesor. Los estudiantes sienten que hacen parte del proceso de enseñanza y de aprendizaje cuando el profesor usa una metodología por descubrimiento guiado. Es posible motivar a los estudiantes durante el proceso de enseñanza y de aprendizaje de manera tal que aprendan sin tener que pensar en una calificación; es decir, aprender sólo por interés personal.

3) En cuanto a **lo implicativo e identidad profesional.**

Asume un nuevo papel del profesor en situaciones de cambio de aprendizaje de los estudiantes, teniendo en cuenta que sólo es posible determinarlas mediante lo que el profesor expresa por el conocimiento que tiene de sus estudiantes.

A partir de lo observado, se pudo constatar cambios en lo siguiente:

- Los estudiantes al estar motivados en las clases de matemáticas están más dispuestos a comprender y aprender lo que el profesor les imparte.
- Los estudiantes pueden desarrollar más y mejores formas de razonamiento usando actividades apropiadas, combinándolas con una metodología de trabajo adecuada.
- Los estudiantes constataron que el uso del Cabri en las clases de geometría son un importante elemento mediador en sus aprendizajes.
- Los estudiantes se motivaron hasta el punto de plantear el diseño de materiales didácticos que complementaran sus aprendizajes.
- Los estudiantes de “bajo rendimiento” en matemáticas, comprendieron que su estudio es más fácil de lo que creían; es decir, con la implementación adecuada de planes de clase por parte del profesor, es posible mantener motivados a los estudiantes y obtener lo mejor de sus capacidades intelectuales.

CAPÍTULO 6

ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD DE LOS ESTUDIANTES

Uno de los objetivos en Educación Matemática es aportar ideas que puedan aclarar el complejo mundo de la enseñanza y del aprendizaje. Dar cuenta de este mundo, por lo menos en parte, implica conocer dentro de lo posible la trayectoria de aprendizaje seguida por los estudiantes que están inmersos en un sistema escolar. En este sentido, particularmente desde nuestra investigación, en esta memoria hacemos un aporte a la caracterización de los procesos de aprendizaje de la semejanza prestando atención a dos componentes descritos en el marco teórico (capítulo 2): los modos de razonamiento utilizados por los estudiantes, que identificaremos mediante los niveles de Van Hiele, y los elementos de visualización que ponen los estudiantes en juego durante la resolución de tareas, que identificaremos mediante los tipos de imágenes, procesos y habilidades de visualización. El presente capítulo está dedicado al análisis de dichos componentes y elaboración de resultados y conclusiones, basándonos en los criterios utilizados para determinar el nivel de razonamiento de los estudiantes y el uso de elementos de visualización en la resolución de las tareas matemáticas que explicamos con detalle en el capítulo 3. En la sección 6.1 describimos y analizamos las formas de razonamiento mostradas por los estudiantes que participaron en la fase experimental de nuestra investigación. En la sección 6.2 describimos y analizamos el uso de los elementos de visualización mostrado por dichos estudiantes. Las metodologías de trabajo son bastante similares en ambas secciones, pues en ambos casos hemos analizado las actuaciones de los estudiantes en cada una de las actividades y tareas de la unidad de enseñanza.

Para conseguir estos objetivos, hemos considerado que podía resultar demasiado limitado analizar sólo a los tres estudiantes a quienes se hizo un seguimiento continuo durante toda la experimentación, pues podía ocurrir que estos no mostraran suficientes indicios de lo que se pretendía observar. Por lo tanto, hemos decidido analizar las producciones escritas de todos los estudiantes del curso, las grabaciones en video de las diferentes interacciones que hubo entre los estudiantes y el profesor o el investigador, las notas de campo del investigador y las entrevistas al profesor.

Para analizar las actuaciones de los estudiantes nos hemos centrado fundamentalmente en su actividad cognitiva, aunque a la hora de interpretar los resultados también hemos tenido en cuenta su actividad matemática durante la resolución de las tareas. Es decir, más que ver si los estudiantes encontraban o no las respuestas correctas, hemos hecho énfasis en observar y analizar las vías de resolución de las tareas. Lo anterior obedece a que, en últimas, estamos caracterizando los niveles de razonamiento y los elementos de visualización utilizados en la resolución de tareas relacionadas con la semejanza. En este sentido, se animaba a los estudiantes a que verbalizaran lo que pensaban, se les hacía énfasis en la escritura de los procedimientos utilizados en la resolución de las tareas. Tanto el profesor como el investigador insistieron a los estudiantes que no les dirían si los procesos o respuestas que realizaban eran correctos o no.

6.1. CARACTERIZACIÓN DEL NIVEL DE RAZONAMIENTO DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES

En esta sección presentamos los análisis de diversas resoluciones de las actividades de semejanza por los estudiantes, como ejemplos del conjunto de datos obtenidos que nos ha permitido identificar características específicas al contexto de la semejanza de los niveles de razonamiento de Van Hiele. Dicho análisis se centró en la asignación del nivel de razonamiento predominante durante la resolución hecha por un estudiante en una actividad. Como hemos indicado en el capítulo 3, esta asignación se realizó a partir de la lista inicial de descriptores presentada en el capítulo 2 (sección 2.3.1) y añadiendo las definiciones de nuevos descriptores emergentes cuando era necesario.

En la sección 6.1.1 presentamos ejemplos de respuestas de estudiantes que ilustran, por una parte, las respuestas dadas a una determinada tarea y, al mismo tiempo, los diferentes descriptores de los niveles de Van Hiele en la semejanza relacionados con dichas respuestas. En la sección 6.1.2 presentamos una síntesis del análisis hecho en la sección anterior y algunas conclusiones destacables. Finalmente, en la sección 6.1.3 presentamos la lista de descriptores de los niveles de Van Hiele para la semejanza del plano obtenida como resultado del análisis de las respuestas de los estudiantes, que es una de las aportaciones de esta investigación al conocimiento del modelo de Van Hiele.

6.1.1. Caracterización de las respuestas de los estudiantes. Avance en su nivel de razonamiento

A continuación, hacemos un recorrido por las actividades de la unidad de enseñanza mostrando los principales tipos de respuestas obtenidas y analizándolas desde la óptica de los niveles de razonamiento empleados. Los textos completos de las actividades se encuentran en el anexo 1.

Para facilitar la presentación de los datos y el análisis correspondiente, hemos agrupado las actividades por bloques de actividades similares, tal como muestra el diagrama de la sección 4.3.2. En la mayoría de los casos, estos bloques coinciden con las sesiones de clase de la experimentación realizada, por lo que, en la práctica, presentamos las actividades agrupadas en las 11 sesiones de clase que hubo. No hemos incluido respuestas de cada actividad ya que algunas actividades de cada bloque son similares a otras del mismo bloque y, por tanto, los estudiantes producen los mismos tipos de respuestas en las actividades similares.

Actividades 1 a 4 (Sesión 1)

Una característica común que tiene este bloque de actividades es que en ellas aparecen dibujos y fotografías, sobre los cuales los estudiantes deben responder a las preguntas planteadas, mientras que en las posteriores (no en todas), ya se les da la oportunidad de dibujar sus propias figuras.

En términos generales, los estudiantes realizaron las actividades sin mayor dificultad, a excepción de la actividad 1, en la cual a los estudiantes les costó trabajo comprender qué quería decir el profesor con "misma forma" y "se parecen". Después de la primera actividad los estudiantes fueron desarrollando las demás con mayor agilidad.

- <u>Actividad 1</u>

En el análisis del desarrollo de esta actividad encontramos el caso de María que justifica la respuesta dada planteando que *Morris 1 y Morris 2 tienen la misma forma pero diferente tamaño*. Además, plantea, aunque de manera incompleta, que los casos en que se presenta la característica de ser parecidos es en *Morris 1 y Boris porque Boris es más ancho que Morris 1*.

Identificamos en la primera respuesta un razonamiento que relacionamos con el **descriptor 1.1** dado que reconoce la semejanza de las máscaras basándose en la apariencia de ellas y, en la segunda respuesta, un razonamiento que recoge el **descriptor 1.2** ya que visualiza las máscaras como un todo y se refiere a ellas con términos como "más ancho", "más largo", etc.

Otro caso interesante de mostrar es el de Miguel, que justificó su elección dibujando segmentos de recta en las máscaras Morris 1 y Morris 2 a manera de una proyección de la una sobre la otra (ver figura 6.1). En su explicación expresa que *Tienen la misma forma, sólo que Morris 2 está proyectada más grande, pero siempre conserva su forma original*. Asignamos al razonamiento detectado en esta producción el **descriptor 1.4** debido a que, aunque de manera inconsciente, usó el concepto de homotecia al dibujar los segmentos de recta y verificar que todos los vértices correspondientes coincidían partiendo siempre de un punto fijo.

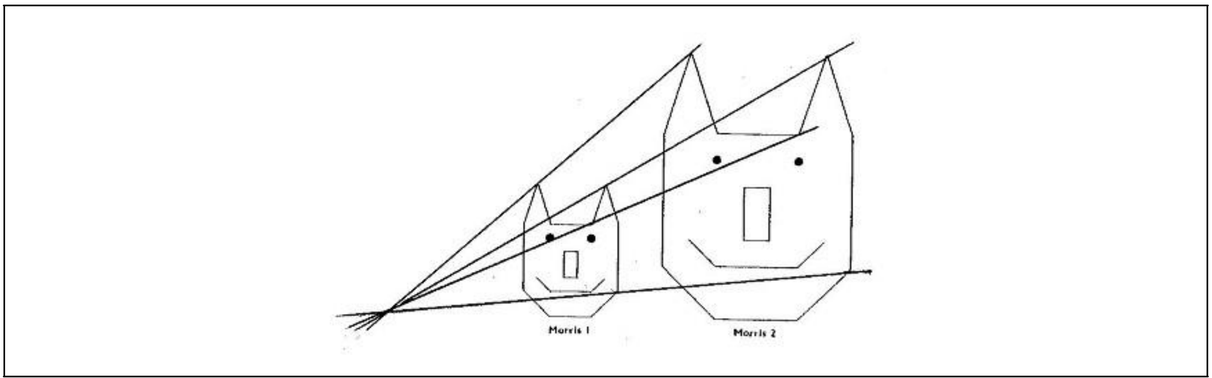


Figura 6.1. Transformación que hizo Miguel al dibujo dado en la actividad 1.

- Actividad 2

En la producción de Daniela se constata que la elección hecha de las figuras semejantes a la dada son la 3 y la 5 justificando que *éstas poseen la misma forma porque se observa que sólo varía su tamaño*. Por otro lado, Daniela afirma:

Daniela: *En las figuras que no son semejantes existen cambios de largo o ancho y dan un efecto visual muy diferente, estéticamente hay una deformación en unas de sus características.*

Hemos asignado el **descriptor 1.1** a este razonamiento puesto que la estudiante realiza la elección de las figuras semejantes basándose únicamente en la apariencia de ellas.

- Actividad 3

La justificación que Andrés presenta a la elección hecha de las fotos que son semejantes a la dada es que *las fotos 3 y 4 son semejantes a la dada ya que éstas guardan* *la proporción respecto a la inicial, en cambio las otras se desproporcionan*. En este caso asignamos el **descriptor 1.3** en vista de que el estudiante realiza la elección teniendo en cuenta la percepción de una característica matemática de la semejanza, su proporcionalidad.

Actividades 5 a 9 (Sesión 2)

En esta sesión las actividades siguen teniendo la misma característica de la sesión anterior, es decir, se presentan los dibujos sobre los cuales los estudiantes deben responder a las preguntas planteadas.

Al iniciar el desarrollo de este bloque de actividades, varios grupos de estudiantes intentaron resolverlas, únicamente, haciendo uso de razonamiento visual. En vista de lo que sucedía, el profesor los motivó a utilizar otro tipo de estrategia para la determinación de la semejanza. Algunos grupos tomaron medidas de los lados de las figuras y las usaron adecuadamente, mientras que otros no supieron qué hacer con ellas.

- <u>Actividad 5</u>

Carlos justifica la elección de las figuras semejantes planteando:

Carlos: *primero tomé la medida de los lados y luego busqué las figuras que cumplían que los lados del uno sean iguales a los de otro multiplicado por una constante ... tomando esto como referencia puedo afirmar que las figuras 3 y 6 tienen la misma forma ...*

Esta respuesta se complementa con la que el estudiante le dio al investigador cuando le preguntó que si lo que había escrito era suficiente para justificar la semejanza:

Carlos: *En el caso de los rectángulos no hay problema porque los ángulos en todas las figuras eran iguales, todos son de 90* [grados].

Ante estas respuestas, a su razonamiento, le hemos asignado el **descriptor 2.2**, ya que Carlos determina las características matemáticas específicas que poseen las figuras semejantes. El estudiante muestra explícitamente que las figuras semejantes deben cumplir estas dos características matemáticas, es decir, proporcionalidad de lados e igualdad de ángulos correspondientes.

En el análisis de la producción de Lady encontramos una correcta identificación de las figuras semejantes y, adicionalmente, una justificación que resalta un razonamiento propio de segundo nivel:

Lady: *Las figuras 3 y 6 tienen la misma forma, o sea son semejantes porque la una es el doble de la otra y los ángulos son iguales ... También se puede decir que las posiciones donde están y como están no importa para la semejanza.*

Identificamos el **descriptor 2.3** en vista de que la estudiante plantea la irrelevancia que tiene la posición de las figuras para la determinación de la semejanza entre las figuras dadas. En la misma respuesta identificamos un razonamiento que no se relaciona con ningún descriptor que teníamos en el listado inicial, un razonamiento que hace referencia a la justificación de la semejanza mediante las transformaciones ampliación o reducción de una figura respecto a otra. Este nuevo descriptor lo definimos como sigue:

Descriptor 2.14: Identificar la semejanza de figuras relacionándola con las transformaciones ampliación y reducción de una figura respecto de otra.

- <u>Actividad 6</u>

Andrés en su producción plantea:

Andrés: *primero me dí cuenta que todos los triángulos son triángulos rectángulos, entonces al dividir los catetos de cada figura nos damos cuenta que las figuras 4 y 8 no tienen la misma relación que las demás; las demás figuras, o sea la 1,2, 3, 5, 6 y 7, poseen la misma relación luego que la división de los catetos da 1,3. Es decir, que estas poseen la misma forma, son semejantes.*

A este razonamiento asignamos el **descriptor 2.5** puesto que el estudiante resalta que la semejanza se da en triángulos rectángulos si el cociente entre las medidas de los catetos de la misma figura se mantiene constante en todas, es decir, el cociente de las razones internas (en términos de Freudenthal) de los catetos en cada rectángulo es el mismo entre los que son semejantes.

En esta misma actividad encontramos la justificación que hizo Adriana de la elección para presentar la respuesta:

Adriana: [se refiere al dibujo que ha realizado (figura 6.2)] *Se puede ver cómo unos triángulos son ampliación de otros. Además, plantea que ... las figuras 1, 3, 5 y 6 cuyas dimensiones no son iguales, mantienen la forma debido a que hay una constante de proporcionalidad al dividir y comparar cada uno de sus lados.*

Este es un ejemplo adicional que muestra el razonamiento explicitado mediante el **descriptor emergente 2.14**.

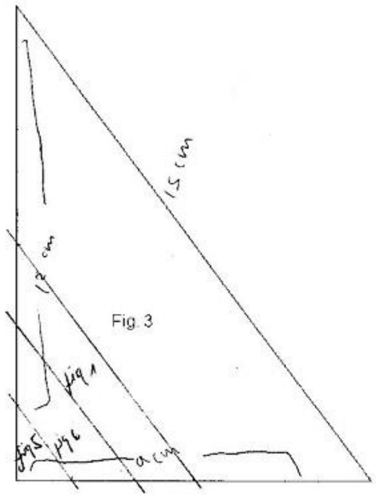


Figura 6.2. Transformación que hizo Adriana al dibujo dado en la actividad 6.

- Actividad 7

Yanán, en la producción realizada, expresa que es en la figura 5 donde las figuras del interior son semejantes a la del exterior; justifica su elección de esta manera:

Yanán: *En la figura 5 todas tienen la misma forma porque todas se ven como zapatos, o sea todas son como la grande; en cambio en las otras figuras hay combinaciones entre zapatos, botas y plataformas.*

En esta producción notamos que la estudiante retrocedió en su nivel razonamiento, se sintió más segura justificando su respuesta con un argumento de nivel 1; le hemos asignado el **descriptor 1.5** al usar sólo argumentos de tipo visual para justificarse.

En el desarrollo de esta actividad también se presentaron razonamientos de nivel 2, por ejemplo, el caso de Adriana, quien justifica la elección de la figura 5 explicitando que tomó las medidas de las longitudes de los lados de las figuras (interiores y la que las contiene) y observó que en esta figura los cocientes entre dichas medidas son constantes. Escribió que los ángulos en todas las figuras formadas en la número 5 son iguales. Todo lo anterior le permitió afirmar que en la figura 5 las figuras internas y la que las contienen son semejantes. También observó y concluyó que las figuras del interior están reducidas a la mitad respecto de la que las contiene. Los razonamientos planteados por Adriana nos permitieron asignar el **descriptor 2.2** en la primara parte y el **descriptor 2.14** en la parte final de su producción.

- Actividad 9

En la revisión de las producciones encontramos la de Lady, quien identifica los rectángulos semejantes usando las características propias del concepto: proporcionalidad de lados e igualdad de ángulos correspondientes; además identificamos un razonamiento que no habíamos descrito en el listado inicial; en esta vía, Lady plantea que los rectángulos 1, 3, 4 y 5 son semejantes porque éstos coinciden en un vértice que comparten una diagonal. Esto se hizo evidente, además de lo escrito, por la manipulación que realizó del dibujo en la tarea (ver figura 6.3). Lo anterior nos permitió identificar un nuevo descriptor y ampliar el listado de descriptores inicial. Este nuevo descriptor lo definimos como sigue:

Descriptor 2.15: Comprender que los rectángulos coincidentes en un vértice y que comparten una misma diagonal son semejantes.

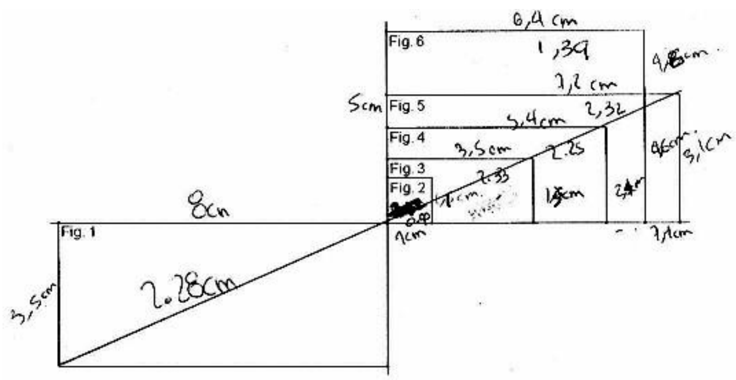


Figura 6.3. Transformación que hizo Lady al dibujo dado en la actividad 9.

Actividades 10 a 12 (Sesión 3)

Con las actividades 10 y 11 queremos que los estudiantes se enfrenten a tareas sin un dibujo dado. El objetivo es que los estudiantes expresen sus ideas respecto de la semejanza y que además empiecen a realizar sus propios dibujos. Por el contrario, en la actividad 12, los estudiantes deben utilizar el afianzamiento que hayan alcanzado con el desarrollo de las actividades anteriores. Con la actividad 11 se espera que los estudiantes terminen de consolidar la noción de semejanza de figuras planas y, de esta manera, la puedan aplicar con mayor seguridad en la resolución de las diferentes situaciones que se presentan después.

- Actividad 10

En el desarrollo de esta actividad, Adriana plantea que una manera de determinar la semejanza entre figuras es verificando si una figura es la homotética de la otra; Adriana aclara que este criterio no siempre funciona, dado que las figuras pueden ser semejantes y no ser homotéticas:

Adriana: *... podemos concluir que la homotecia puede ser un proceso de ayuda determinante, aunque no siempre, para saber si son semejantes* [dos figuras]*; y digo no siempre porque las figuras pueden ser semejantes y no pertenecer a una homotecia.*

Asignamos a este razonamiento el **descriptor 2.6**, ya que la estudiante comprende que la figura resultante al aplicar una homotecia es semejante a la figura dada.

Actividades 13 a 15 (Sesión 4)

La característica que reúne las actividades de este bloque es la aplicación del concepto en la construcción y en la determinación de figuras semejantes, y en la ampliación y reducción de figuras planas. En las actividades 13 y 15 aparecen dibujos sobre los cuales los estudiantes deben inferir las respuestas a los planteamientos hechos, mientras que en la actividad 14, sólo aparecen los enunciados sin ningún dibujo.

- Actividad 14(1)

Adriana en su producción escrita plantea que el rectángulo de dimensiones 14 cm y 21 cm es semejante al rectángulo dado (de dimensiones 2 cm y 3 cm) porque es una ampliación del dado. Lo interesante de la respuesta de Adriana es que realiza un dibujo de los rectángulos en cuestión (ver figura 6.4) y plantea que también puede verse la semejanza de los rectángulos si al dibujarlos con un vértice común, una diagonal es común para ellos. Con relación al dibujo, el profesor le pregunta por qué el rectángulo grande no lo dibujó con las dimensiones dadas, a lo cual ella responde que por comodidad, pero que ella está segura que en los rectángulos semejantes siempre se cumple lo que se ve en el dibujo.

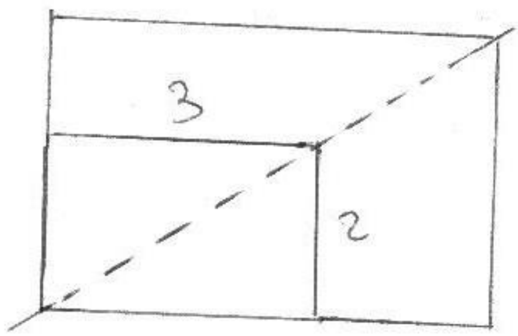


Figura 6.4. Dibujo que hizo Adriana en la actividad 14(1).

A los razonamientos mostrados por Adriana le asignamos el **descriptor 2.15**, el cual recoge claramente sus planteamientos. Una vez más se muestra la pertinencia de este descriptor, que no habíamos previsto inicialmente.

- Actividad 15

En la producción de Katherine encontramos el dibujo que se muestra a continuación (ver figura 6.5), el cual representa la construcción de una figura semejante a una dada (el caso de la figura 2). Katherine usó una simetría con un eje que ella misma estableció. Transcribimos un diálogo que sostuvo con el investigador:

I (investigador): *¿Explícame cómo hiciste este dibujo?*

Katherine: *Bueno ... esta liniecita* [señala la línea recta a trazos] *es como un eje de simetría y me sirvió para hacer el dibujo.*

I: *¿Eso significa que una simetría produce figuras semejantes?*

Katherine: *Um ... de lo que yo me acuerdo, sí.*

I: *¿No tiene nada que ver que la figura te quedó de iguales dimensiones?*

Katherine: *Ups ... ya, lo que pasa es que en las simetrías las figuras son iguales, pero aquí no pasa nada, igual son semejantes.*

I: *¿Recuerdas como se llaman las figuras que son iguales o idénticas?*

Katherine: *Si no estoy mal, se llaman congruentes.*

I: *¿Podríamos concluir que las figuras congruentes también son semejantes?*

Katherine: *Claro ... este es un ejemplo para mostrar eso.*

I: *OK.*

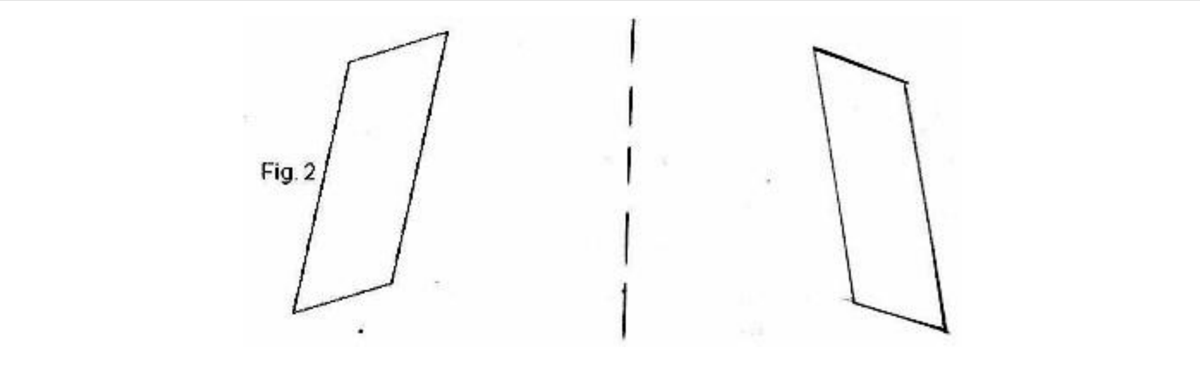


Figura 6.5. Dibujo que hizo Katherine en la actividad 15.

Al razonamiento usado por Katherine le asignamos el **descriptor 2.4** el cual relaciona la congruencia de figuras planas con la semejanza. En los demás casos de la misma actividad, la estudiante usó el mismo concepto, es decir, usó simetrías para generar figuras semejantes a la dada.

Otra producción que refleja un descriptor previsto es la de Yurley. La construcción de una figura semejante a la dada (el caso de la figura 1) la realiza usando exclusivamente elementos matemáticos de la definición (ver figura 6.6). De este modo, hemos asignado el **descriptor 2.1**, el cual resume el razonamiento usado en su producción.

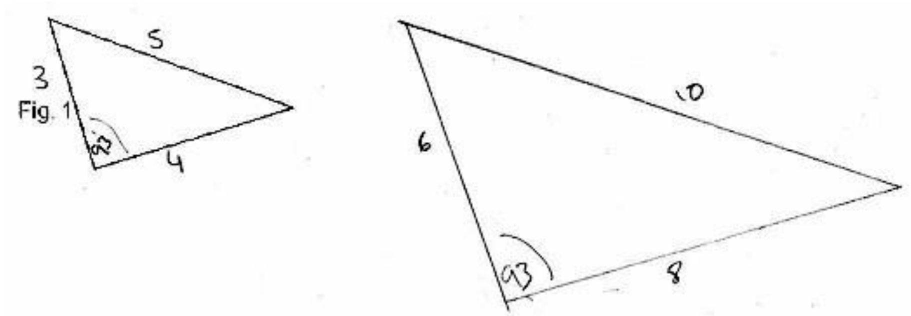


Figura 6.6. Dibujo que hizo Yurley en la actividad 15.

Actividades 16 a 18 (Sesión 5)

El estudio de la homotecia es la principal característica que comparten las actividades de este bloque. La idea es repasar los principales aspectos de dicho concepto e iniciar a los estudiantes en la vinculación de este tema con la semejanza.

- <u>Actividad 16</u>

Carlos después de transformar la figura dada (ver figura 6.7), escribe algunos comentarios:

Carlos: *Ambos triángulos comparten el segmento Aa; por el trazo que hice con el compás pude darme cuenta que el triángulo más pequeño es una reducción a la mitad del más grande y que P y c yacen del mismo punto ... Si coloco el triángulo abc dentro del grande ABC se puede observar que se forma el teorema de Thales, lo que confirma otra vez que hay semejanza entre ellos.*

La producción de Carlos permite inferir que su razonamiento está relacionado con el **descriptor 2.7**, puesto que el estudiante relaciona la semejanza de triángulos con el teorema de Thales. Consideramos que su razonamiento no pertenece al **descriptor 2.8** dado que no usa la configuración de triángulos en posición de Thales para demostrar la semejanza, sólo para mostrar que en el dibujo existe dicha relación.

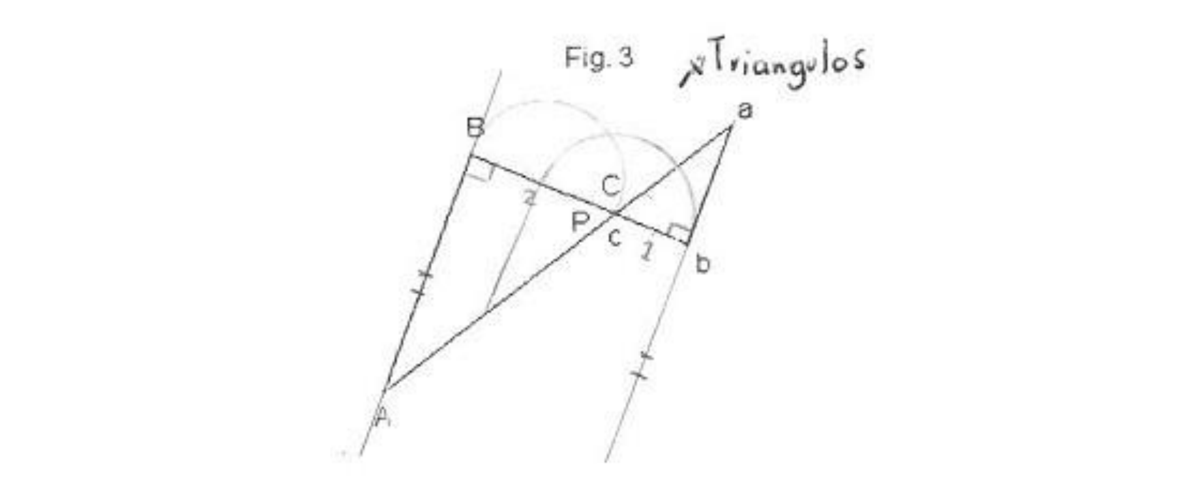


Figura 6.7. Transformación que hizo Carlos al dibujo dado en la actividad 16.

- Actividad 18

A la pregunta de si se aprecian en las diferentes relaciones que se pueden establecer entre el triángulo ABC y los demás triángulos las características identificadas en la actividad 14, Carlos respondió que sí. Plantea que todos los triángulos son semejantes al triángulo ABC, puesto que los triángulos abc, a’b’c’ y a’’b’’c’’ son resultado de aplicar alguna homotecia al triángulo ABC (ver figura 6.8):

Carlos: *Tomando como base el triángulo ABC tenemos que las razones para los triángulos abc y a’’b’’c’’ son positivas y para a’b’c’ negativa.*

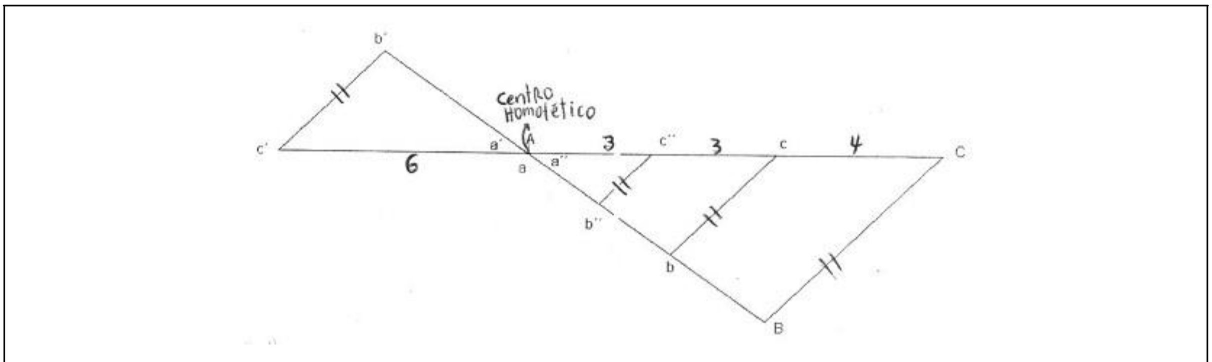


Figura 6.8. Transformación que hizo Carlos al dibujo dado en la actividad 18.

Este razonamiento está representado en el **descriptor 2.8**. El estudiante usó la homotecia para justificar la semejanza de los triángulos en cuestión.

Actividades 19 a 21 (Sesión 6)

Dada la estrecha relación entre el teorema de Thales y la semejanza de triángulos, se contempló, en este bloque de actividades, estudiar los principales aspectos del teorema de Thales. La idea fundamental es que los estudiantes comprendan, entre otras cosas, que el teorema de Thales se convierte en una herramienta para la justificación y construcción de triángulos semejantes.

- Actividad 20(B)

En cada una de las configuraciones gráficas presentadas en la actividad (ver figura 6.9) se pedía identificar las que contuvieran figuras semejantes. Adriana plantea:

Adriana: *Las figuras 10, 11, y 12 son las únicas que no muestran figuras semejantes porque a pesar de presentar el Teorema de Thales los dibujos internos no son semejantes ... mejor dicho, el teorema de Thales sólo es para triángulos ... en cambio, en las figuras de la 1 a la 9, todos los triangulitos que se forman en cada una si son semejantes.*

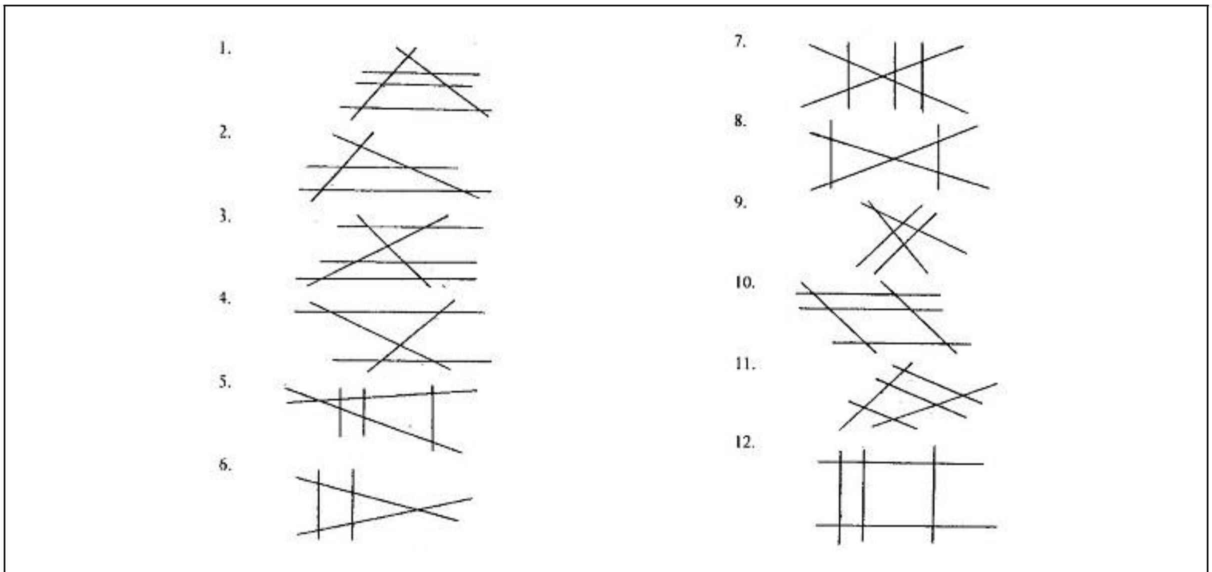


Figura 6.9. Configuraciones gráficas presentadas en la actividad 20.

A este razonamiento le hemos asignado el **descriptor 2.11** puesto que la estudiante identifica, con la argumentación correspondiente, en cuales de las figuras presentadas se da la semejanza de figuras.

Actividades 22 a 29 (Sesión 7)

En este bloque de actividades, en su mayoría, aparecen los dibujos sobre los cuales los estudiantes deben extractar información para resolver los planteamientos hechos. Dada la importancia de los triángulos en la geometría, y en general en la matemática, optamos por plantear, en la mayoría de las actividades de este bloque, dibujos en los que éstos estén presentes.

Los tipos de configuraciones de Thales, que con mayor frecuencia se presentan en forma de pico o encajados, en forma de mariposa y configuraciones entremezcladas, son de particular importancia cuando se aborda la relación entre el teorema de Thales y la semejanza para su enseñanza. Con este bloque de actividades buscamos que los estudiantes las reconozcan e identifiquen en los diferentes dibujos que se presentan.

- Actividad 24

Transcribimos a continuación la producción de Carlos en la justificación de las relaciones de semejanza que estableció, dada la figura 6.10 (los nombres de los ángulos fueron agregados por el estudiante).

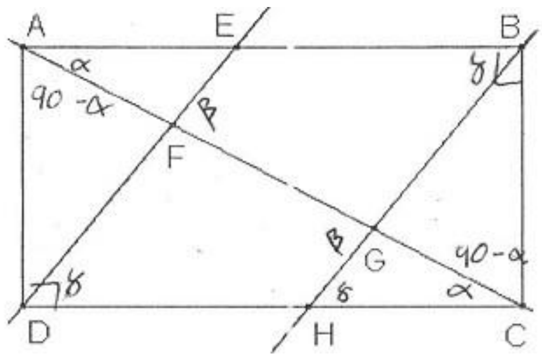


Figura 6.10. Figura transformada por Carlos en la actividad 24.

Carlos: *Para la justificación, primero establezco que AD // BC y AB // DC ya que ABCD es un rectángulo, y cualesquiera segmentos sobre las rectas respectivamente también lo son. Por construcción tenemos que DE // BH y cualesquier segmento sobre estas también lo son ... Se sabe también que los ángulos establecidos son iguales ... Teniendo en cuenta que los pares de triángulos con lados correspondientes paralelos son semejantes tengo que: ∆AFG~∆CGH, ∆AGB~∆CFD; por las mismas razones: ∆ABC~∆CDA y ∆ADE~∆BCH y, finalmente, ∆AFD~∆CGB.*

Encontramos que el razonamiento de Carlos se ajusta a las características generales del nivel 3, pero no está representado en ninguno de los descriptores que habíamos planteado inicialmente, por lo que debimos plantear un nuevo descriptor de este nivel de razonamiento, definido de la siguiente manera:

Descriptor 3.4: Demostrar informalmente situaciones matemáticas relacionadas con la semejanza de figuras planas.

La producción de Carlos en este momento de la experimentación empieza a dar indicios de transición de nivel 2 al 3.

- Actividad 25

Otra producción que muestra un razonamiento relacionado con el **descriptor 3.4** fue la de Francisco. A continuación mostramos la figura 6.11, que transformó para ampliar su argumentación, y transcribimos la justificación que hizo de la respuesta.

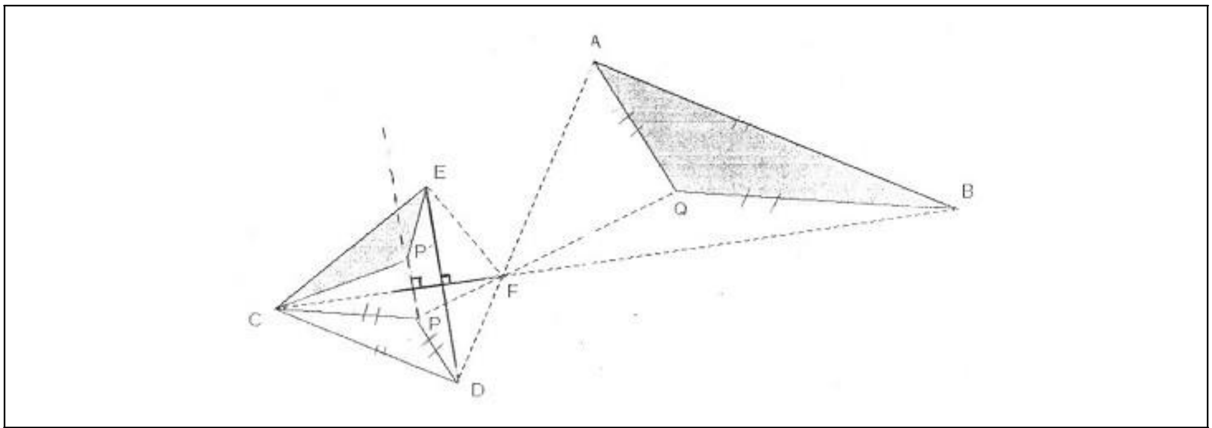


Figura 6.11. Figura transformada por Francisco en la actividad 25.

Francisco: [Los triángulos AQB y CP'E son semejantes,] *pues teniendo en cuenta que el triángulo AQB es semejante a el triángulo DPC porque tienen sus lados correspondientes paralelos ... ahora como CF es un eje de simetría, tenemos que el triángulo CEF es semejante al triángulo CDF, y por la misma simetría, el triángulo CP'E es semejante al triángulo CPD y como el triángulo CPD es semejante al triángulo BQA, obtenemos que el triángulo CP'E y el triángulo BQA son semejantes.*

Este razonamiento es otro ejemplo de la característica del razonamiento recogida por el descriptor 3.4, de que el estudiante muestre solvencia en la demostración de situaciones matemáticas relacionadas con la semejanza.

- Actividad 26(2)

En la producción de Carlos encontramos un razonamiento propio de nivel 3. A continuación transcribimos su producción escrita y un dibujo que hizo (ver figura 6.12) cuando se le pidió que dibujara un triángulo cualquiera y desde cada vértice trazara una recta paralela al lado opuesto y formara otro triángulo; la tarea culmina pidiendo que justifique por qué los dos triángulos son semejantes.

Carlos: *Como los lados del triángulo grande* [A'B'C'] *son paralelos a los del pequeño* [ABC] *(los correspondientes) y sabiendo que si los lados correspondientes son paralelos se pueden alinear para completar una homotecia y confirmar la semejanza, tenemos una demostración completa de la semejanza.*

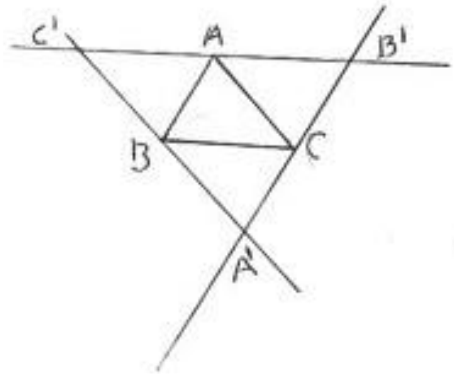


Figura 6.12. Dibujo de Carlos en la actividad 26(2).

Este razonamiento se corresponde con el **descriptor 3.4**, el estudiante demuestra informalmente una propiedad de la semejanza en triángulos.

- Actividad 27

Francisco justifica sus respuestas mostrando dos formas diferentes de razonamiento. A continuación transcribimos su producción escrita y el dibujo resultado de transformar la figura dada en la actividad (ver figura 6.13).

Francisco: *Como tengo estos lados paralelos, tengo que cualquier par de segmentos correspondientes sobre los lados paralelos también los son ... O sea tengo que el ΔABC y el ΔDBE; el ΔEFD y el ΔHFG; el ΔADG y el HEC son todos semejantes entre si, ya que sus lados correspondientes son paralelos ...*

Otra forma es decir que, como DE es paralelo a AC, con centro en B, una homotecia me garantiza la semejanza entre BDE y BAC, igualmente, por los lados que están sobre rectas paralelas tengo que, con centro en G y en H, una homotecia me garantiza la semejanza entre ADG y HFG; y HFG y HEC respectivamente. Por transitividad, ΔADG es semejante a ΔHEC; igualmente, con centro en C tengo que por homotecia ΔHEC es semejante al ΔABC, con centro en F tengo que ΔFGH es *semejante al Δ FDE, y por transitividad tengo que, otra vez; los seis triángulos mencionados anteriormente son semejantes.*

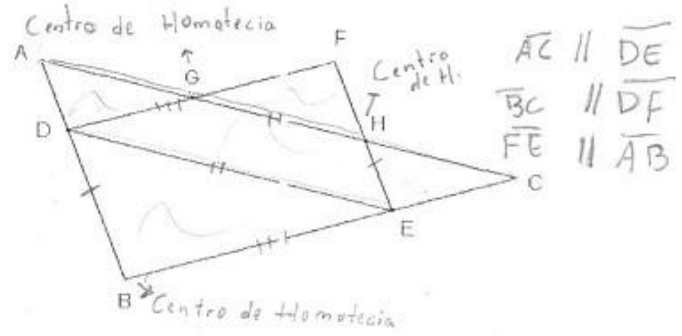


Figura 6.13. Figura transformada por Francisco en la actividad 27.

La producción de Francisco muestra dos argumentos deductivos informales diferentes que apuntan a justificar las relaciones de semejanza que visualizó entre diferentes triángulos de la configuración gráfica presentada. La respuesta de este estudiante muestra un razonamiento más avanzado de nivel 3, que admite la posibilidad de demostrar un mismo resultado de varias formas. Esta forma de razonamiento no encaja con ninguno de los descriptores del nivel 3 definidos hasta este momento, por lo que planteamos un nuevo descriptor, definido de esta manera:

Descriptor 3.5: Plantear más de una demostración informal de propiedades o situaciones matemáticas relacionadas con la semejanza de figuras planas.

- Actividad 28

En esta actividad se pedía encontrar las longitudes de los segmentos DF y DE, para lo cual Adriana descompuso el dibujo dado (ver figura 6.14) en dos partes (ver figura 6.15). Teniendo en cuenta las características del dibujo, la estudiante planteó que las figuras resultantes son representaciones de configuraciones gráficas de Thales y, por lo tanto, los triángulos en las dos configuraciones son semejantes. Con base en esto, planteó las proporciones que le permitieron encontrar las longitudes pedidas.

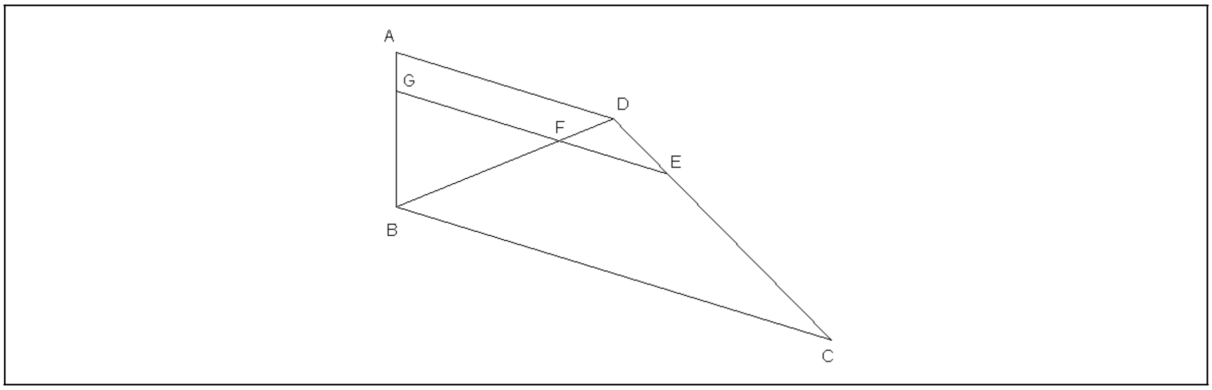


Figura 6.14. Figura dada en la actividad 28.

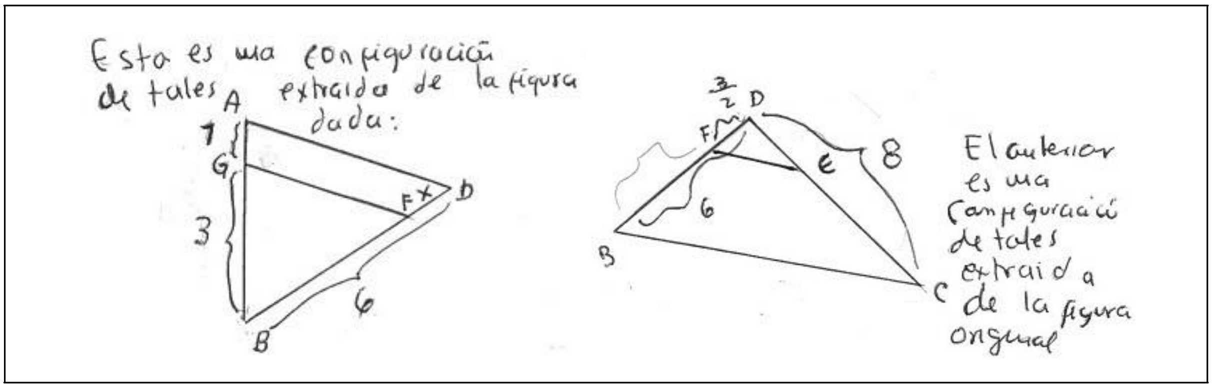


Figura 6.15. Descomposición realizada por Adriana a la figura en la actividad 28.

A este tipo de razonamiento que le permitió resolver la situación planteada le asignamos el **descriptor 2.13**. De acuerdo con su producción escrita, Adriana usó la proporcionalidad de lados correspondientes en los triángulos semejantes de cada configuración gráfica.

Actividades 30 y 31 (Sesión 8)

Una característica de este bloque de actividades es que están diseñadas para que los estudiantes plasmen en sus hojas de trabajo representaciones externas. En este caso, que realicen dibujos a partir de unos dados o a partir de su propia creatividad. Cuando diseñamos este bloque de actividades pensamos que después que las desarrollasen, los estudiantes deben estar en capacidad de comprender que la homotecia es una herramienta que, entre otras cosas, se puede utilizar en la construcción de figuras semejantes a una dada. De forma análoga, pensamos que deben estar en capacidad de comprender que el teorema de Thales es una herramienta que además se puede utilizar en la construcción de triángulos semejantes.

- Actividad 30(2)

En esta actividad se pedía la construcción de un polígono semejante al polígono ABCD, que tenga como uno de sus vértices el punto A'; además, se preguntaba cuántas posibilidades hay para dicha construcción. Angélica realizó el dibujo (ver figura 6.16) especificando que usó una homotecia con centro en el punto P y deduciendo que existen infinitas maneras de hacerlo ya que el punto P puede estar en cualquier lugar.

El razonamiento de la estudiante se puede representar mediante el **descriptor 2.9**, particularmente por el uso de una homotecia en la construcción de figuras semejantes a una dada.

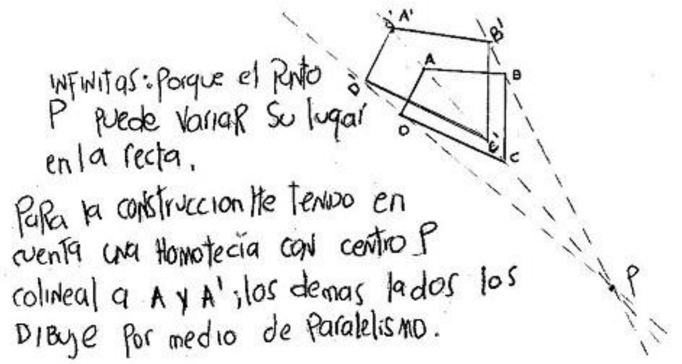


Figura 6.16. Figura transformada por Angélica en la actividad 30(2).

Actividades 32 y 33 (Sesión 9)

Este bloque de actividades está diseñado teniendo en cuenta una característica común, que en ellas no aparecen dibujos; la idea es que los estudiantes dibujen y hagan uso de representaciones externas, es decir, utilicen en su análisis y justificaciones herramientas adquiridas durante el desarrollo de la experimentación.

Las tareas que planteamos en la actividad 32 están diseñadas para obtener respuestas específicas y para que los estudiantes descubran y aprendan los criterios de semejanza de triángulos, los cuales son un componente básico de la red de conocimientos que deben formar. Análogamente, la actividad 33 está diseñada con el fin de consolidar el aprendizaje alcanzado, principalmente, en la actividad anterior. Las tareas que se proponen son tales que los estudiantes deben utilizar los conocimientos adquiridos para resolverlas y tienen que usar nuevas formas de razonamiento en contextos nuevos.

- Actividad 32(3)

En el ítem 3 de esta actividad se pedía justificar si dos triángulos que tienen un ángulo congruente y los lados que los forman proporcionales son semejantes. En la producción escrita de Carlos (ver figura 6.17) encontramos una demostración informal de esta propiedad.

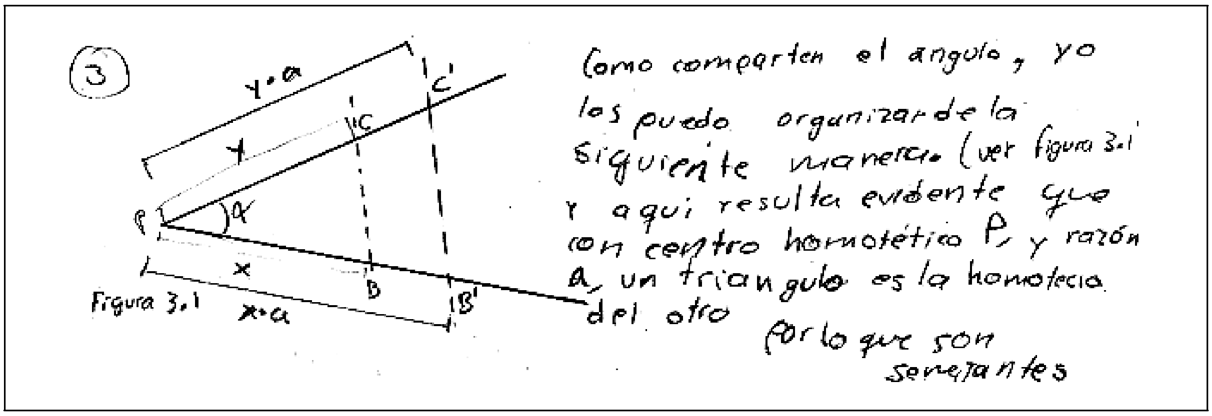
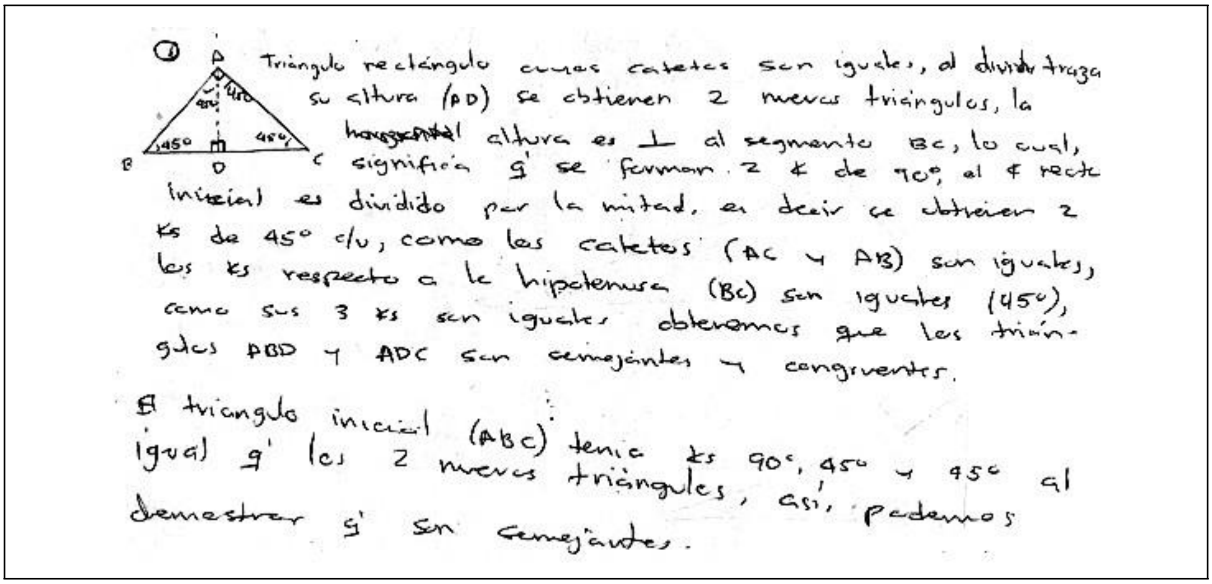


Figura 6.17. Dibujo de Carlos en la actividad 32(3).

La producción de Carlos muestra una justificación deductiva informal de condiciones suficientes para la semejanza de triángulos; razonamiento que relacionamos con el **descriptor 3.1**.

- Actividad 33(2)

Esta actividad pretende que el estudiante establezca en qué tipo de triángulos se cumple que una de sus alturas divide al triángulo en otros dos que son semejantes entre sí y semejantes también al triángulo original. En la producción escrita de Miguel (ver figura 6.18) encontramos el establecimiento de los triángulos rectángulos isósceles como aquellos que cumplen dicha característica. El estudiante realizó una demostración informal para un caso particular, sin tener en cuenta que la propiedad planteada la cumple cualquier triángulo rectángulo. Por la razón anterior, asignamos a este tipo de razonamiento el **descriptor 2.12**.


① Triangulo rectángulo cuyos catetos son iguales, al ~~dividir~~ traza su altura (AD) se obtienen 2 nuevos triangulos, la ~~horizontal~~ altura es ⊥ al segmento BC, lo cual, significa q' se forman 2 ∢ de 90°, al ∢ recto inicial es dividido por la mitad, es decir se obtienen 2 ∢s de 45° c/u, como los catetos (AC y AB) son iguales, los ∢s respecto a la hipotenusa (BC) son iguales (45°), como sus 3 ∢s son iguales obtenemos que los triangulos ABD y ADC son semejantes y congruentes.

El triangulo inicial (ABC) tenia ∢s 90°, 45° y 45° al igual q' los 2 nuevos triangules, así, podemos demostrar q' son semejantes.

Figura 6.18. Dibujo y planteamiento de Miguel en la actividad 33(2).

Actividad 34 (Sesión 10)

Esta actividad se plantea como parte de la fase de orientación dirigida del nivel 2. Está diseñada para que los estudiantes descubran y aprendan las propiedades relacionadas con el perímetro y el área figuras semejantes, las cuales son un componente básico de la red de conocimientos que deben formar. Se espera que estas tareas guíen hacia las propiedades que los estudiantes deben aprender. Al finalizar esta actividad los estudiantes deben estar en capacidad de comprender y relacionar el perímetro, y área de figuras semejantes.

En el análisis del desarrollo de esta actividad encontramos el caso de Diego quien, para determinar la relación existente entre los perímetros de figuras semejantes, realizó un par de ejemplos concretos, uno de los cuales se muestra en la figura 6.19. El estudiante determinó que el cociente de los perímetros es igual al factor de semejanza entre las figuras.

Diego realizó una demostración informal para casos particulares, sin tener en cuenta que la propiedad planteada la cumple cualquier par de figuras semejantes. Por tal razón, asignamos a este tipo de razonamiento el **descriptor 2.12**.

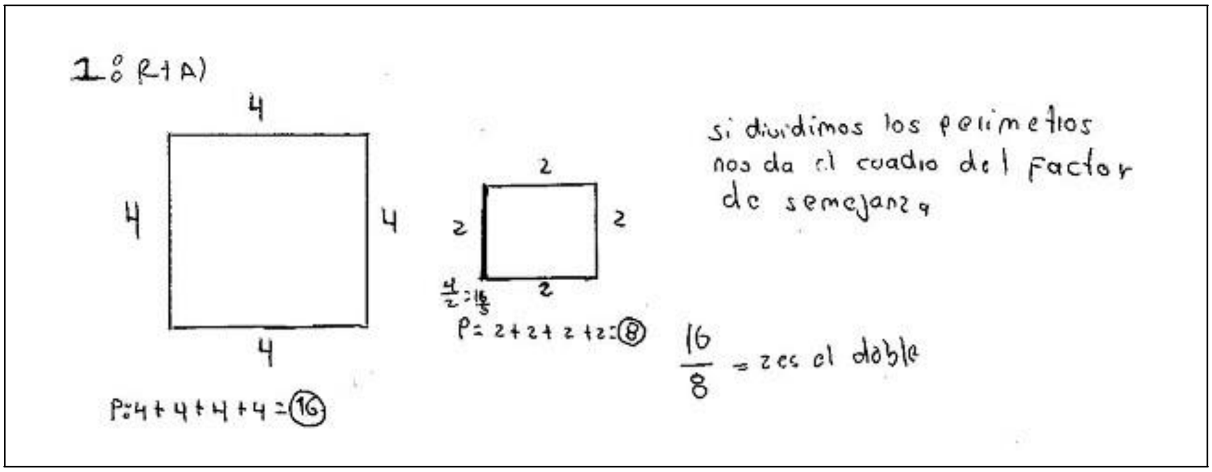
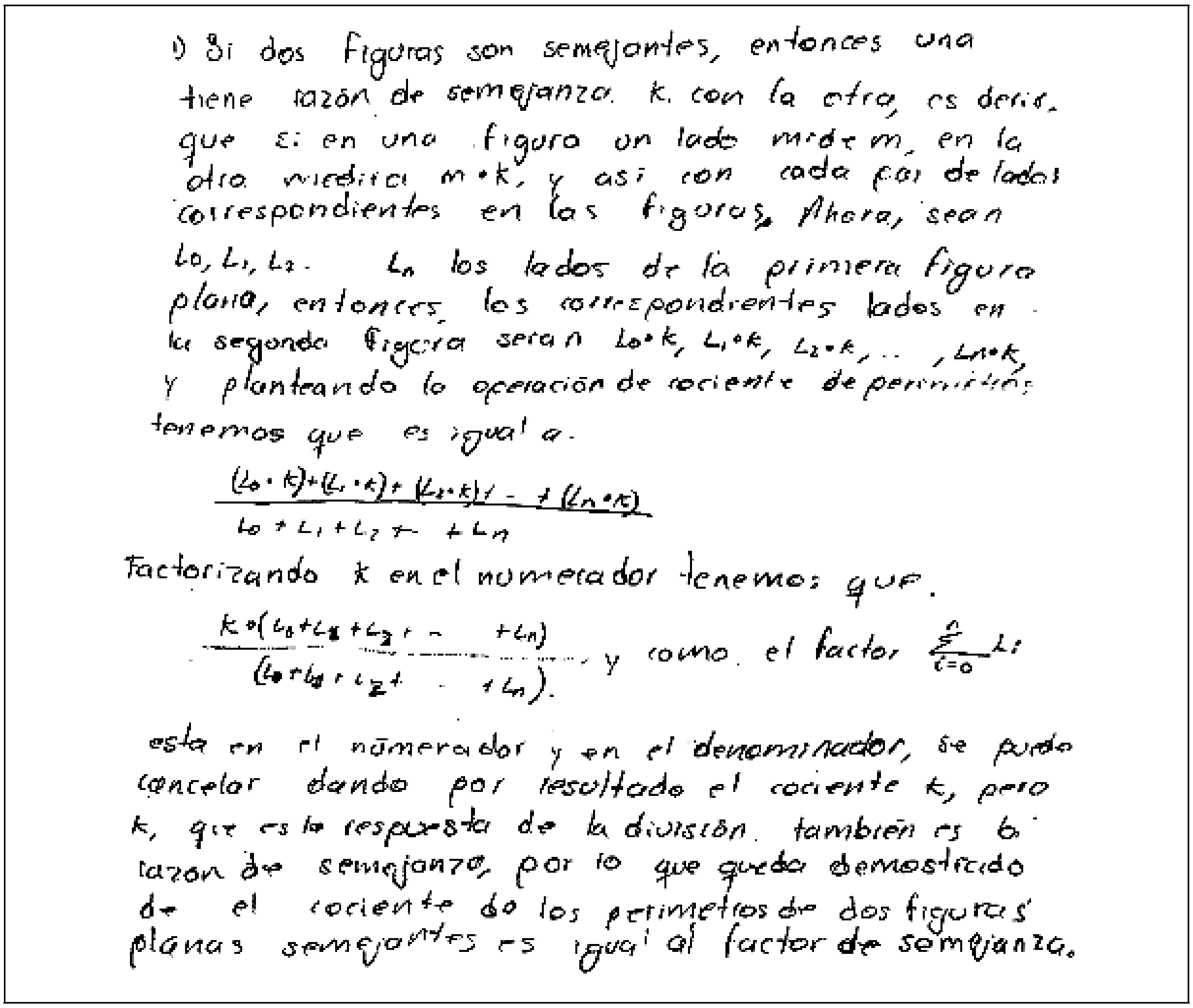


Figura 6.19. Parte de la producción de Diego en la actividad 34.

Otro caso encontrado es el de Carlos, quien realizó una demostración informal de la cuestión planteada (figura 6.20). El razonamiento de Carlos se puede catalogar con el **descriptor 3.3.**


1) Si dos figuras son semejantes, entonces una tiene razón de semejanza k con la otra, es decir, que si en una figura un lado mide m, en la otra medirá m·k, y así con cada par de lados correspondientes en las figuras, Ahora, sean $L_0, L_1, L_2 \ldots L_n$ los lados de la primera figura plana, entonces los correspondientes lados en la segunda figura seran $L_0 \cdot k, L_1 \cdot k, L_2 \cdot k, \ldots, L_n \cdot k$, y planteando la operación de cociente de perimetros tenemos que es igual a.

$$\frac{(L_0 \cdot k)+(L_1 \cdot k)+(L_2 \cdot k)+ \ldots +(L_n \cdot k)}{L_0 + L_1 + L_2 + \ldots + L_n}$$

Factorizando k en el numerador tenemos que.

$$\frac{k \cdot (L_0+L_1+L_2+ \ldots +L_n)}{(L_0+L_1+L_2+ \ldots +L_n)}$$ y como el factor $\sum_{i=0}^{n} L_i$

esta en el numerador y en el denominador, se pudo cancelar dando por resultado el cociente k, pero k, que es la respuesta de la división, también es la razon de semejanza, por lo que queda demostrado de el cociente de los perimetros de dos figuras planas semejantes es igual al factor de semejanza.

Figura 6.20. Parte de la producción de Carlos en la actividad 34.

Actividades 35 a 43 (Sesión 11)

Las tareas planteadas en las actividades 35 a 40 y la actividad 42 están diseñadas con el fin de consolidar el aprendizaje alcanzado con el desarrollo de las anteriores actividades. Las tareas que se proponen son diferentes de las anteriores, en las cuales los estudiantes deben utilizar los conocimientos adquiridos para resolverlas y tienen que usar nuevas formas de razonamiento en contextos nuevos.

Las tareas planteadas en la actividad 41 están diseñadas para que los estudiantes descubran y aprendan la relación entre el concepto de escala y la razón de semejanza, la cual es un componente básico de la red de conocimientos que proponemos formar.

El planteamiento de la actividad 43 tiene como objetivo que los estudiantes sinteticen lo que han aprendido y que tengan una visión global de la nueva red de objetos y relaciones entre la semejanza, la homotecia y el teorema de Thales.

Las actividades 35(2), 36, 37, 39 y 40 contienen dibujos que contextualizan la situación planteada; las demás (excepto la 42, que presenta una fotografía) sólo plantean las situaciones de manera únicamente verbal.

- <u>Actividad 36</u>

Suly, en su intento por justificar la semejanza de los triángulos identificados en la figura dada, usa dos criterios. Primero plantea que los triángulos son semejantes por que tienen dos ángulos correspondientes iguales:

Suly: *Primero nos podemos percatar de que estos 2 triángulos son semejantes (CBA y EDA) pues los dos poseen un ángulo de 90º y comparten el ángulo del vértice A.*

Después, planteando que los triángulos pueden pertenecer a una configuración de Thales en aspecto de homotecia, continúa con su argumento:

Suly: *Además, vemos que se puede tratar de una homotecia con centro homotético en A, ya que sus ángulos son congruentes y sus lados correspondientes, además de ser proporcionales, (como se demostró en un ejercicio anterior) son paralelos.*

Estos razonamientos dan muestra de un acercamiento al nivel 4, particularmente expresados en el **descriptor 4.1**, donde la estudiante muestra que comprende y usa definiciones equivalentes de semejanza de triángulos y realiza un razonamiento abstracto sin apoyo de ejemplos.

- Actividad 39

En esta actividad se pedía comparar los segmentos BC y AC en el dibujo dado (ver figura 6.21). En las producciones escritas a esta actividad encontramos la de Carlos como ejemplo de un razonamiento interesante, característico de nivel 4.

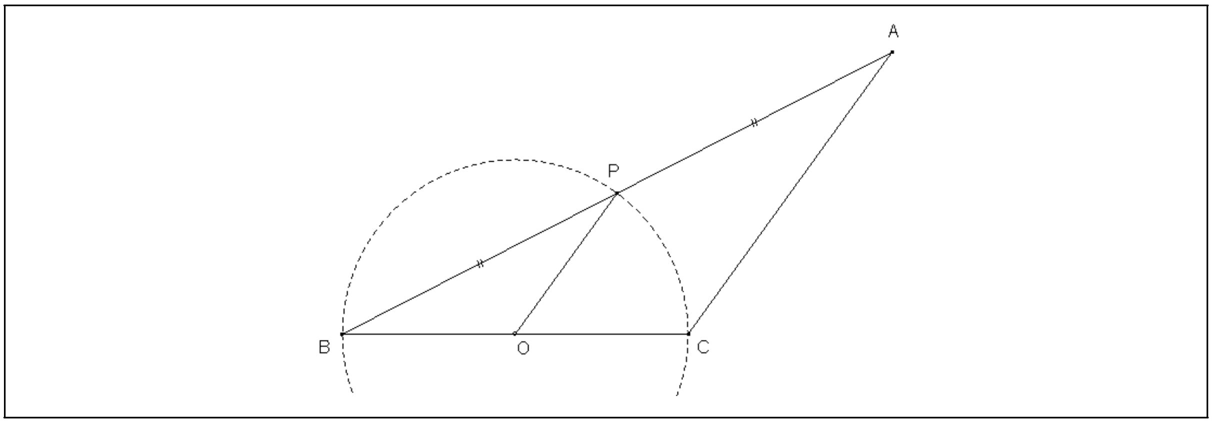


Figura 6.21. Dibujo dado en la actividad 39.

Transcribimos la demostración que usó en la justificación de su respuesta:

Carlos: *Primero, se establece que $\Delta BPO \sim \Delta BAC$ por criterio LAL, ya que* $\frac{BP}{BA} = \frac{BO}{BC} = \frac{1}{2}$ *y comparten el ángulo PBO, por esto, cualquier propiedad de ΔBAC se cumplirá en ΔBPO. Ahora como en Δ BPO BO=OP ya que los dos son radios de la circunferencia, y como BO es correspondiente a BC y OP correspondiente a AC, tenemos entonces que BC=AC.*

Aunque la tarea no era una demostración de semejanza propiamente dicha, para dar la respuesta se debía justificar primero la semejanza de los triángulos presentes en el dibujo. Este fue el procedimiento que usó Carlos, en el cual realiza un razonamiento deductivo en la justificación de la semejanza de los triángulos en cuestión. El razonamiento usado por el estudiante en la resolución de la tarea está relacionado con el **descriptor 4.2**.

- Actividad 41(1)

En la producción escrita de Francisco identificamos la comprensión que tiene sobre la relación entre la escala y la razón de semejanza. Francisco plantea que como *la escala es la proporción de aumento o reducción de una figura*, puede usar la presentada en la tarea para establecer la altura de la torre; al final esto le permitió realizar los cálculos pertinentes para encontrar correctamente su altura.

El razonamiento usado por el estudiante está expresado en el **descriptor 2.10**, el cual hace referencia a la comprensión de que la escala es la razón de semejanza entre una reproducción y la realidad que representa dicha reproducción.

- Actividad 43

En la producción de Adriana hemos encontrado algunas justificaciones que hace de la semejanza de ciertos grupos de figuras. Por ejemplo:

Adriana: *Dos triángulos equiláteros son semejantes siempre porque sólo con saber que los ángulos, en los dos, son iguales lo puedo afirmar, este es el criterio AAA. En otro ejemplo, plantea que dos rectángulos a veces son semejantes dado que por los ángulos no hay problema (todos son de 90* [grados]*), pero por los lados si puede haber problema, los lados deben ser proporcionales.*

Particularmente ante estos razonamientos de Adriana el profesor entabló un diálogo que transcribimos a continuación:

P (profesor): *Me doy cuenta que has dicho que los triángulos equiláteros son siempre semejantes y has justificado esto mediante el criterio AAA ¿si los triángulos no son equiláteros qué sucede?*

Adriana: *Um ... tocaría mirar si los ángulos correspondientes son congruentes.*

P: *¿Sólo con este criterio determinas la semejanza de triángulos?*

Adriana: *Ah ... no profe lo que pasa es que con los equiláteros si pasa eso, pero se podría usar otras cosas, por ejemplo ... los otros criterios LLL, LAL.*

P: *¿Sólo esas maneras?*

Adriana: *Um ... podría ser mirando si los triángulos forman una configuración de Thales o si forman parte de una homotecia.*

P: *OK. Y ¿por qué con los rectángulos no se puede mirar la semejanza sólo con una condición?*

Adriana: *Es que la cuestión de las condiciones cambia según el caso, por ejemplo para los triángulos es suficiente mirar la igualdad de ángulos, en cambio en los rectángulos no es suficiente, tocaría mirar también la proporcionalidad de los lados.*

P: *OK. Gracias.*

La producción escrita y el diálogo que sostuvieron Adriana y el profesor permiten inferir que la estudiante distingue entre condiciones suficientes y necesarias para la semejanza de figuras. Los razonamientos de la estudiante se relacionan con el **descriptor 3.3**.

6.1.2. Síntesis y conclusiones

Después de haber analizado cada una de las respuestas de los estudiantes, a continuación presentamos un resumen de los resultados más interesantes y las conclusiones producto de dicho análisis.

Las diferentes manifestaciones de formas de razonar de los estudiantes indican que, dependiendo del diseño de tarea, los procesos matemáticos de pensamiento (reconocimiento, definición -uso y formulación-, clasificación y demostración) están presentes es sus producciones. Por ejemplo, en la actividad 16 el reconocimiento, en la actividad 10 la formulación de definiciones, en la actividad 11 el uso de definiciones, en la actividad 5 la clasificación y en la actividad 32 la demostración.

El diseño de las actividades cumplió su objetivo principal, promover el desarrollo de razonamientos en diferentes niveles (principalmente en los niveles 1 y 2) y confirmar las características de los descriptores planteados inicialmente. Por otra parte, el desarrollo de algunas actividades permitió plantear nuevos descriptores que no se habían previsto.

Inicialmente los estudiantes mostraron algunas dificultades de tipo comprensivo al tratar con las relaciones “se parecen” y “misma forma” en la clasificación de figuras. Se pudo constatar que, luego de que los estudiantes las comprendieron, la diferenciación entre ellas fue altamente positiva en la consecución primaria de la noción de semejanza, lo cual se convierte en un importante aporte para tratar el inconveniente que han reportado diversos estudios, en los cuales, por ejemplo, los estudiantes creen que todos los rectángulos tienen la misma forma.

Se presentaron algunas situaciones paradigmáticas que se han detectado en otros estudios. Concretamente, el caso de tareas que fueron diseñadas para promover razonamientos característicos de nivel 2, fueron desarrolladas usando razonamientos propios de nivel 1 (el caso de Yanán en la actividad 7) y, al contrario, tareas que promueven razonamientos de nivel 2, fueron desarrolladas usando razonamientos característicos de nivel 3 e incluso nivel 4 (el caso de Carlos en las actividades 24 y 39).

Se pudo constatar que la conexión entre la semejanza y la homotecia y el teorema de Thales fue altamente positiva para el desarrollo de razonamientos que permiten a los estudiantes tener mayores herramientas de justificación al abordar tareas de semejanza. Lo anterior es una confirmación más de lo observado durante la experimentación piloto que se hizo de la unidad de enseñanza diseñada para este estudio y que fue presentada en Gualdrón (2008).

En relación al nivel de razonamiento alcanzado por los estudiantes, encontramos variadas situaciones. Casos como el de Carlos y Francisco que a nuestro criterio alcanzaron completamente el nivel 3, dado que desde aproximadamente la mitad de la experimentación dieron muestras de razonamientos propios de dicho nivel y lo mantuvieron hasta el final de la misma. Otros casos como los de Adriana, Andrés y Suly quienes dieron muestras de haber alcanzado completamente el nivel 2 de razonamiento y estar en transición hacia el nivel 3. En términos generales, la mayoría de estudiantes se ubicó en nivel 2 de razonamiento, lo cual era previsible dado que, como se dijo antes, el diseño de las actividades pretendía como mínimo la consecución de este nivel de razonamiento.

Las sesiones donde la mayoría de estudiantes mostró razonamientos propios de nivel 2 fueron las 8, 10 y 11. Inferimos que en la sesión 8, por ejemplo, los estudiantes tuvieron mayor desenvolvimiento puesto que la homotecia y el teorema de Thales fueron temas desarrollados en el curso anterior y, además, fueron repasados en algunas actividades previas. En la sesión 10, la mayoría de estudiantes logró establecer la relación entre perímetros y áreas de figuras semejantes planteando únicamente ejemplos en casos particulares de figuras muy conocidas (triángulos, cuadrados y rectángulos). Por último, en la sesión 11, creemos que hubo un gran número de estudiantes en nivel 2, ya que contenía un importante número de actividades y era la última sesión de la experimentación, es decir, los estudiantes tuvieron la oportunidad de consolidar los razonamientos propios del nivel y aplicar muchas de las herramientas adquiridas previamente.

Algunos casos aislados, como los de Suly (en la actividad 36) y de Carlos (en la actividad 39), dieron muestras de razonamiento propios de nivel 4. Estos casos muestran ciertas habilidades de razonamiento que son poco comunes en los estudiantes; como se ha confirmado en diversos estudios, los razonamientos de este nivel son propios de algunos estudiantes de facultad de matemáticas y que los estudiantes de secundaria están lejos de alcanzar.

A continuación mostramos una tabla que recoge el máximo nivel alcanzado por los estudiantes en cada sesión de actividades. En cada celda aparece la cantidad de estudiantes y, entre paréntesis, su correspondiente porcentaje.

Sesión	Sin nivel	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
1	2 *(7,4%)*	25 *(92,6%)*	0	0	0
2	1 *(3,7%)*	12 *(44,4%)*	14 *(51,9%)*	0	0
3	0	11 *(40,7%)*	16 *(59,3%)*	0	0
4	1 *(3,7%)*	11 *(40,7%)*	15 *(55,6%)*	0	0
5	0	9*(33,3%)*	18*(66,7%)*	0	0
6	3 *(11,1%)*	5 *(18,5%)*	19 *(70,4%)*	0	0
7	1 *(3,7%)*	4 *(14,8%)*	18 *(66,7%)*	4 *(14,8%)*	0
8	0	2 *(7,4%)*	22 *(81,5%)*	3 *(11,1%)*	0
9	1 *(3,7%)*	3 *(11,1%)*	19 *(70,4%)*	4 *(14,8%)*	0
10	3 *(11,1%)*	2 *(7,4%)*	20 *(74,1%)*	2 *(7,4%)*	0
11	0	0	21 *(77,8%)*	3 *(11,1%)*	3 *(11,1%)*

Tabla 6.1. Máximo nivel de razonamiento alcanzado por los estudiantes en cada sesión.

Por último, otra importante conclusión es que hemos logrado confirmar la mayoría de descriptores de nivel de razonamiento que planteamos a priori y, además, logramos plantear algunos otros que resultaron de la experimentación. En el siguiente subapartado presentamos el listado completo de los descriptores confirmados y los emergentes.

6.1.3. Caracterización emergente de los niveles de Van Hiele en la semejanza de figuras planas

Para terminar esta sección, detallamos a continuación la relación de descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos para la semejanza del plano que hemos elaborado y verificado en la presente experimentación. Esta relación de descriptores es una aportación de nuestra investigación, que forma uno de los objetivos de la presente memoria de tesis.

Para cada nivel de razonamiento, enunciamos aquellos descriptores iniciales (sección 2.3.1) que han sido validados por las respuestas de los estudiantes y los descriptores emergentes obtenidos en la experimentación. Los descriptores marcados con un asterisco son los descriptores emergentes.

<u>Nivel 1 (Reconocimiento)</u>

Los estudiantes perciben la semejanza de figuras de manera global, por lo que:

1.1 Reconocen figuras semejantes basándose en la apariencia de ellas, es decir, utilizando únicamente estrategias de tipo visual. Pueden presentarse casos en que no reconozcan la semejanza entre dos figuras porque alguna esté girada.

1.2 Ven las figuras como un todo y describen las diferencias y similitudes entre ellas usando términos como "más grandes", "más pequeños", "estirados", "ampliados". Por ejemplo, cuando un estudiante esté decidiendo sobre la semejanza de dos rectángulos, podría decir "este rectángulo no es tan largo como éste". También pueden incluir atributos irrelevantes en las descripciones que hacen.

1.3 Empiezan a percibir algunas características matemáticas de la semejanza, pero aún lo hacen de manera aislada. Por ejemplo, algunos pueden tomar medidas de los ángulos y darse cuenta que en las figuras semejantes estas son iguales, sólo que no lo ven como una condición necesaria para la semejanza.

1.4 Pueden identificar, utilizando argumentos de tipo visual, la semejanza entre figuras cuando pertenecen a una configuración de Thales (aspecto de proyección o aspecto de homotecia) o están en disposición homotética.

1.5 Pueden identificar y explicar, utilizando argumentos de tipo visual, la semejanza de figuras en mosaicos.

<u>Nivel 2 (Análisis)</u>

La consideración de la semejanza de figuras a través de sus elementos y propiedades permite a los estudiantes:

2.1 Construir o dibujar figuras semejantes a una figura dada teniendo en cuenta explícitamente aspectos matemáticos tales como la medida de los ángulos o las longitudes de los lados.

2.2 Determinar aspectos matemáticos específicos de las figuras semejantes, tales como la proporcionalidad de longitudes de los segmentos y la igualdad de las medidas de los ángulos, así que pueden inducir las condiciones necesarias para que las figuras sean semejantes.

2.3 Descubrir que la posición de las figuras semejantes es irrelevante, es decir, que no es necesario que las figuras semejantes tengan la misma posición.

2.4 Entender que la congruencia de figuras planas es un caso particular de la semejanza de figuras planas.

2.5 Inducir algunas propiedades relacionadas con la semejanza en triángulos rectángulos.

2.6 * Comprender que la figura resultante al aplicar una homotecia es semejante a la figura dada.

2.7 Relacionar la semejanza de triángulos con el teorema de Thales, comprendiendo que los triángulos en posición de Thales son semejantes.

2.8 Utilizar configuraciones de triángulos en posición de Thales o en disposición homotética (con centro de homotecia en un vértice) para demostrar relaciones de semejanza entre ellos.

2.9 Realizar construcciones o dibujos de figuras semejantes al darles el factor de semejanza y además predecir si la figura resultante será una ampliación, una reducción o una figura idéntica a la dada. También pueden realizar construcciones o dibujos de figuras semejantes usando homotecias y teorema de Thales.

2.10 Relacionar la razón de semejanza con las escalas. Es decir, comprender que la escala es la razón de semejanza entre una reproducción (foto, mapa, plano, etc.) y la realidad que representa dicha reproducción.

2.11 Identificar relaciones de semejanza en figuras planas complejas (dos o más figuras planas entrecruzadas).

2.12 Demostrar propiedades que tienen que ver con la semejanza de figuras verificando que se cumplen en algunos casos.

2.13 Utilizar la definición de semejanza para la solución de situaciones matemáticas, por ejemplo determinar longitudes accesibles o inaccesibles.

2.14 * Identificar la semejanza de figuras relacionándola con las transformaciones ampliación y reducción de una figura respecto de otra.

2.15 * Comprender que los rectángulos coincidentes en un vértice y que comparten una diagonal son semejantes.

Nivel 3 (Abstracción)

Al establecer relaciones entre las propiedades y comprender planteamientos generales, los estudiantes consiguen:

3.1 Determinar empíricamente y justificar de manera deductiva informal las condiciones suficientes para la semejanza de rectángulos y triángulos (incluyendo criterios AA, LLL, LAL).

3.2 Distinguir entre condiciones suficientes y necesarias para la semejanza de figuras. Por ejemplo, ellos reconocen que, en los triángulos, es suficiente que dos ángulos correspondientes sean iguales para que sean semejantes, mientras que en los demás polígonos no es suficiente dicha condición, pero sí es necesaria.

3.3 Demostrar informalmente algunas propiedades relacionadas con la semejanza de figuras planas.

3.4 * Demostrar informalmente situaciones matemáticas relacionadas con la semejanza.

3.5 * Plantear más de una demostración informal de propiedades o situaciones matemáticas relacionadas con la semejanza.

<u>Nivel 4 (Deducción)</u>

Se puede razonar de manera formal prescindiendo de todo soporte concreto, por lo que los estudiantes pueden:

4.1 Comprender y utilizar definiciones equivalentes de la semejanza.

4.2 Razonar deductivamente en la justificación de la semejanza de figuras.

Como era previsible, el nivel 4 apenas ha estado presente entre los alumnos participantes en nuestra experimentación. Para completar la descripción de las formas de razonamiento propias de los niveles 3 y 4 hecha en esta memoria de tesis, será necesario realizar otra investigación con estudiantes de grados educativos superiores que sean capaces de utilizar dichos niveles de razonamiento.

6.2. CARACTERIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS DE VISUALIZACIÓN EN LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES

La presente sección está dedicada al análisis de los elementos de visualización (imágenes, procesos, habilidades y formas de representación) empleados por los estudiantes que participaron en la fase experimental de nuestro estudio. En la sección 6.2.1 presentamos ejemplos de respuestas de estudiantes que ilustran su actuación en cada una de las actividades (en las que se evidenció el uso de elementos de visualización) de las diferentes sesiones de clase en que se dividió la unidad de enseñanza. Una dificultad que hemos encontrado para llevar a cabo este análisis ha sido la imposibilidad, en algunos casos, de inferir qué tipo de actividad de visualización realizó un determinado estudiante debido a la falta de información objetiva sobre este aspecto en los textos de este estudiante. La sección 6.2.2 incluye la síntesis resultante del análisis sobre el uso que hicieron los estudiantes de los diferentes elementos de visualización en la resolución de las tareas matemáticas, junto a algunas conclusiones destacables. Por último, en la sección 6.2.3 presentamos las caracterizaciones de los diferentes tipos de imágenes mentales y los diferentes tipos de habilidades espaciales usadas para resolver problemas de semejanza del plano, surgidas como resultado del análisis de las respuestas de los estudiantes, que es otra aportación de esta investigación al conocimiento de los procesos de visualización en matemáticas.

6.2.1. Caracterización de los elementos de visualización en las respuestas de los estudiantes

De acuerdo con la discusión hecha en los capítulos 1 y 2, identificamos cuatro componentes principales de la actividad de visualización en matemáticas: Imágenes mentales, procesos de visualización, habilidades de visualización y representaciones externas. El análisis que hemos realizado, cuyos resultados presentamos en este capítulo, se centra específicamente en el uso de las imágenes mentales y de las habilidades de visualización. En cuanto a los procesos de visualización, consideramos que no es necesario hacer un análisis detallado de su uso, dado que sólo son dos, siempre están presentes en la resolución de las tareas y su identificación hay que hacerla por medio de las habilidades o las representaciones externas empleadas. Por otra parte, analizar las relaciones entre representaciones externas y los tipos de imágenes o habilidades es un planteamiento interesante, pero no lo hemos abordado en esta memoria porque desborda nuestra disponibilidad de tiempo. Por ejemplo, un estudiante, después de leer el enunciado de una actividad propuesta, puede intentar dibujar un gráfico, bosquejo, etc. (representaciones externas) para entenderlo, lo cual conlleva el procesamiento visual de la información (VP) para crear imágenes mentales. Más adelante, tendrá que describir algún procedimiento empleado durante la resolución o que justificar las deducciones hechas o conclusiones obtenidas, para lo cual necesitará realizar el proceso de interpretación de información figurativa (IFI) para generar información (otra representación externa) a partir de sus imágenes mentales.

Así pues, nos centramos en la caracterización específica de los componentes de la visualización ya mencionados -imágenes mentales y habilidades de visualización- para cada bloque de actividades de la unidad de enseñanza. Partimos de las definiciones generales de imagen mental y de habilidad de visualización así como de los diferentes tipos de imágenes y de habilidades particularizadas para la semejanza que planteamos en el marco teórico (capítulo 2). Durante el análisis de las producciones de los estudiantes, encontramos algunas actividades en las cuales las respuestas no eran lo suficientemente “ricas” como para fundamentar con suficiente validez nuestras interpretaciones sobre qué imágenes o habilidades habían empleado los estudiantes durante la resolución; es por esto que en el análisis que presentamos no aparecen algunas actividades.

Para mayor claridad en la presentación del análisis, lo haremos de manera integrada, es decir, las diferentes imágenes mentales usadas por los estudiantes junto con las respectivas habilidades de visualización que usaron para formarlas o transformarlas, pues separar unas de las otras provoca una pérdida de significado de las acciones de los estudiantes. Presentaremos el análisis actividad por actividad en cada bloque e incluimos ejemplos de respuestas de estudiantes representativas de las respuestas dadas por la clase, que muestran algunas tendencias que nos han permitido realizar inferencias.

Actividades 1 a 4 (Sesión 1)

- Actividad 1

Presentamos la transcripción de un diálogo que Miguel sostuvo con su profesor y la figura 6.22 que hace parte de su producción.

P: *¿Por qué has trazado estas líneas?* [señala en el dibujo los segmentos que unen vértices en las máscaras].

Miguel: *Para guiarme.*

P: *¿Guiarte para qué?*

Miguel: *Me da la impresión que puedo encajar la pequeña en la grande.*

P: *¿Qué quieres decir con darte la impresión?*

Miguel: *Me imagino que las máscaras encajan.*

P: *No veo cómo encajan.*

Miguel: *Ah ... bueno es un decir. O sea, Morris 1 es la misma Morris 2, pero más pequeña. Algo así como poner Morris 1 sobre Morris 2.*

P: *¿Imaginaste algún movimiento o sólo lo crees?*

Miguel: *Lo he hecho en la cabeza.*

P: *OK.*

En esta actividad identificamos el uso de una imagen **dinámica**. Inferimos que Miguel imagina a Morris 1 y Morris 2 superpuestos para, de esta manera, plantear que una máscara es la ampliación de la otra. Miguel dota de movimiento (en su mente) a Morris 1 para imaginarla superpuesta en Morris 2.

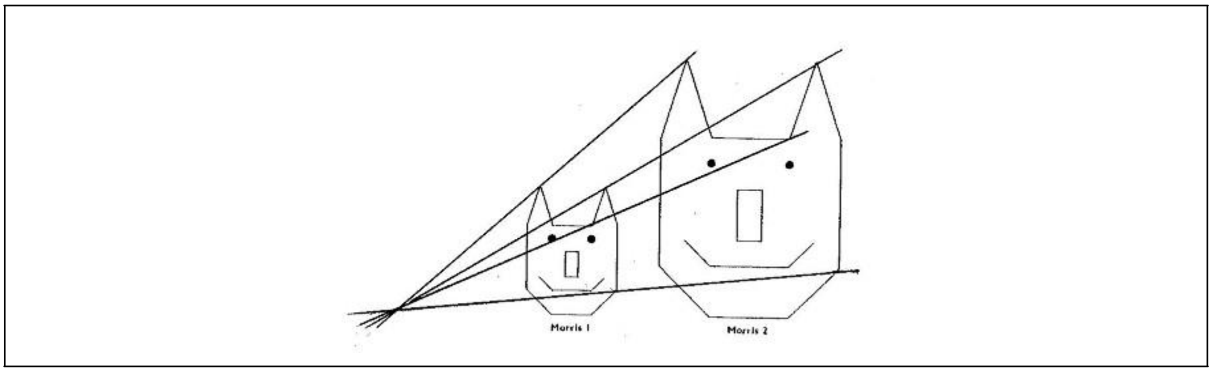


Figura 6.22. Parte de la producción de Miguel en la actividad 1.

Miguel hizo uso de la habilidad rotación mental (**RM**) al mover mentalmente a Morris 1 para imaginarla superpuesta en Morris 2. También, usó la habilidad conservación de la percepción (**CP**) cuando reconoce que Morris 1 mantiene su forma. Además, usó el reconocimiento de posiciones en el espacio (**RP**) al identificar que Morris 1 podría encajar en Morris 2.

- Actividad 4

Esta es la trascripción de un diálogo que sostuvieron Adriana y su profesor:

P: *¿Por qué planteas que las fotos 2 y 3 tienen la misma forma?*

Adriana: *Um ... si uno desplaza la foto original y la foto 2 para colocarlas encima de la foto 3, se puede observar algo en común.*

P: *¿Qué quieres decir con esto?*

Adriana: *Pues que ... por ejemplo, las fotos 1 y 4 no encajarían. Las que le digo sí.*

P: *¿Qué quieres decir con encajar?*

Adriana: *Encajar es como ver unas encima de las otras, y unas más grandes que las otras sin perder la forma.*

P: *OK.*

Inferimos que Adriana hizo uso de una imagen **dinámica** al visualizar globalmente el conjunto de las fotos (ver figura 6.23) e identificar las que son semejantes usando movimiento mental de las mismas. Adriana, en su intento por dar respuesta a la pregunta planteada, ha mirado el conjunto de las figuras y ha identificado la semejanza de tres de las fotos (la original, la 2 y la 3), y la no semejanza entre las restantes. Después, se imagina cómo justificar su respuesta y lo hace planteando la superposición. A diferencia de Miguel en la actividad 1, Adriana adopta una mirada global de las figuras.

Figura 6.23. Fotos presentadas en la actividad 4.

Inferimos que las habilidades usadas por Adriana en la creación de dicha imagen fueron rotación mental (**RM**) -que le permitió dotar de movimiento algunas fotos para compararlas con otras- reconocimiento de posiciones en el espacio (**RP**) -que le permitió identificar la semejanza entre la foto dada y las fotos 2 y 3- y discriminación visual (**DV**) -que le permitió comparar las fotos para identificar sus semejanzas y diferencias visuales.

Otro ejemplo de uso de imágenes en esta actividad fue el de Yanán. Ella planteó que las fotos 2 y 4 tienen la misma forma que la original ya que *las fotos 2 y 4 tienen también forma cuadrada como la dada ... y todos los cuadrados tienen la misma forma*. Deducimos que hizo uso de una imagen **desde la memoria**. Observó el conjunto de las figuras e identificó la semejanza entre las figuras que menciona con la ayuda de esta imagen. Es decir, recordó que todos los cuadrados tienen la misma forma. Inferimos que usó las habilidades reconocimiento de posiciones en el espacio (**RP**) al identificar las relaciones de semejanza entre las fotos presentadas y discriminación visual (**DV**) al realizar la comparación entre las mismas para identificar las semejantes.

Actividades 5 a 9 (Sesión 2)

- Actividad 5

La transcripción del siguiente diálogo muestra una conversación que sostuvieron Adriana e Ingrid (compañera de su grupo de trabajo) al momento de desarrollar la actividad. También se muestra en la figura 6.24 parte de la producción de Adriana.

Adriana: ... *Yo creo que las figuras 2 y 5 tienen la misma forma, lo mismo que la 3 y la 6.*

Ingrid: *¿Por qué lo dices?*

Adriana: *Imagínese que traes la 5 y la pones aquí* [con sus manos muestra un recorrido curvilíneo para pasar de la 5 a la 2]. *Haz lo mismo con la 3, ponla aquí* [sobre la figura 6]. *Verás que guardan las proporciones.*

Ingrid: *¿Cómo así?*

Adriana: *Sí, las medidas. O sea, ... se ve que los lados aumentan como proporcionalmente. Dibujémoslas para ver si cuadran ...*

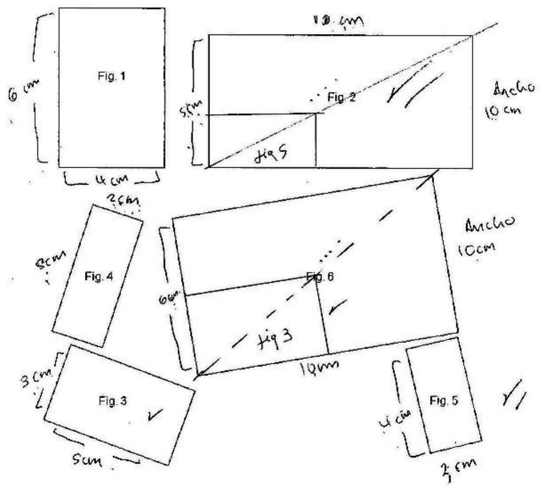


Figura 6.24. Parte de la producción de Adriana en la actividad 5.

En esta actividad creemos que Adriana hizo uso de una imagen **cinética**. Adriana mueve la figura mentalmente y luego muestra -con sus manos, para comunicar su idea- el recorrido de la figura para superponerla en la otra. Adriana identifica (mentalmente) los posibles rectángulos que cumplen la característica y los dota de movimiento con sus manos.

Deducimos que Adriana hizo uso de las habilidades reconocimiento de relaciones espaciales (**RR**) y discriminación visual (**DV**). Inferimos que usó el reconocimiento de relaciones espaciales al identificar una relación de proporcionalidad entre los lados de los rectángulos y que usó discriminación visual para reconocer los rectángulos semejantes mediante la comparación entre ellos. No parece que use rotación mental porque no hay evidencia de que haya hecho mentalmente el movimiento.

- <u>Actividad 6</u>

Nuevamente, Adriana usó una imagen **cinética**. Su conversación, esta vez con otro estudiante, Camilo, nos permite inferir que utilizó una estrategia parecida a la que usó en la actividad anterior.

En los dos casos, Adriana intenta "ver" alguna característica o propiedad que le permita argumentar la respuesta elegida. Esta vez identifica (mentalmente) los triángulos de la misma forma y luego menciona que ... *parece que los triángulos tienen hipotenusas paralelas*. Por ejemplo, le muestra a Camilo, con sus manos, usando un movimiento curvilíneo, cómo relacionar las figuras 1, 5 y 6 (figura 6.25).

Inferimos que usó reconocimiento de relaciones espaciales (**RR**) al intuir que los triángulos con igual forma y colocados como los dibujó tienen la característica de paralelismo entre las hipotenusas. De manera análoga como en la actividad anterior, también usó discriminación visual (**DV**) al identificar los triángulos semejantes mediante la comparación entre figuras.

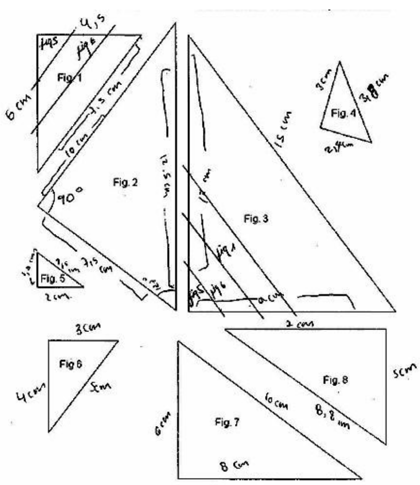


Figura 6.25. Parte de la producción de Adriana en la actividad 6.

- <u>Actividad 7</u>

Presentamos el caso de Ángela que "vio" en la figura 5 (ver figura 6.26) un objeto físico representado en las partes en las que está dividida:

Ángela: ... *La fig. 5 la asimilé con un zapato y así fue más fácil ver que las figuras pequeñas también lo eran* ["vio" la figura como un zapato al igual que las partes en que está dividida].

Ángela también plantea, al contrario de la figura 5, que en las demás figuras "vio" -dentro de éstas- botas, zapatos y zapatos de plataforma:

Ángela: *... en las otras figuras encontré botas y zapatos, zapatos de plataforma.*

Inferimos de los planteamientos de Ángela que usó imágenes **concretas**, es decir, usó los objetos físicos conocidos para guiarse hacia la elección correcta

Creemos que Ángela usó la habilidad identificación visual (**IV**) al reconocer una figura concreta aislándola de su contexto. Además, pensamos que usó reconocimiento de posiciones en el espacio (**RP**) cuando identifica que dentro de la figura 5 también hay zapatos, es decir, identificó una relación de igualdad de formas entre la figura y los elementos de su interior.

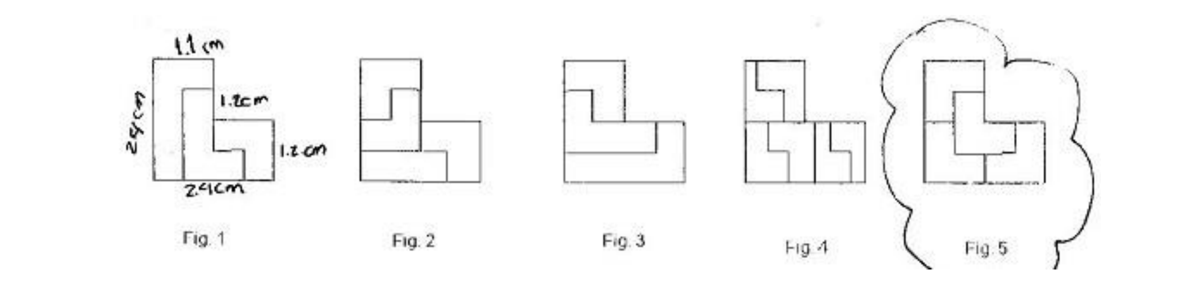


Figura 6.26. Parte de la producción de Ángela en la actividad 7.

Actividades 10 a 12 (Sesión 3)

- Actividad 10

El profesor, mediante el siguiente diálogo, indaga por qué María eligió los ejemplos puestos para mostrar la semejanza de figuras planas.

P: *¿Por qué has dibujado esa escuadra de medir?*

María: *OK. Para mí la escuadra es como un triángulo, entonces le busqué algo semejante. Por eso dibujé una ventana cuyo vidrio* [cristal] *es triangular.*

P: *¿Cualquier triángulo hubiera servido como semejante a la escuadra?*

María: *Um ... No. Tiene que ser uno que tenga sus catetos iguales* [de igual medida].

P: *¿Este dibujo qué representa?* [el profesor señala el rectángulo de la derecha].

María: *Un tablero* [una pizarra].

P: *Explícame por qué lo dibujaste.*

María: *Más o menos por lo mismo que la escuadra. Un tablero es como un rectángulo, por eso lo pongo semejante con un rectángulo.*

P: *¿Qué quieres decir con que el tablero es como un rectángulo?*

María: *O sea ... Um ... En mi mente el tablero es como un rectángulo.*

P: *Y, ¿con relación a la escuadra?*

María: *Pues lo mismo. Me imagino un triángulo en la escuadra.*

P: *¿Cualquier rectángulo hubiera servido como semejante al tablero?*

María: *No claro, por eso los dibujé proporcionales.*

P: *¿Eso es suficiente para mirar la semejanza?*

María: *Pues ... no, lo que sucede es que en este caso los ángulos son iguales.*

P: *Una última pregunta. ¿Por qué escuadra, tablero?*

María: *Um ... Supongo que es porque los veo casi a diario y los relaciono con figuras de la geometría.*

P: *OK.*

En esta actividad la producción de María (ver figura 6.27) refleja el uso de imágenes **concretas**. María usó imágenes concretas al realizar representaciones concretas (pizarra y escuadra de medir) de objetos matemáticos (rectángulo y triángulo respectivamente). Inferimos que María imagina algunas figuras geométricas en algunas representaciones de objetos concretos.

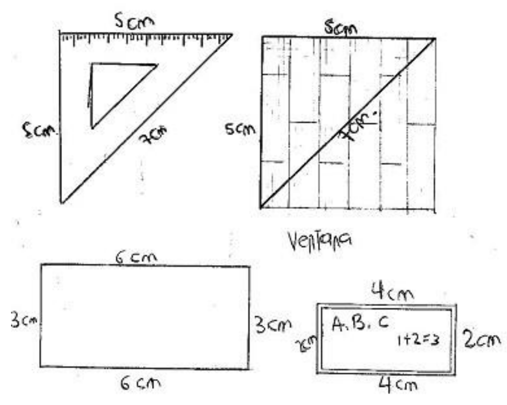


Figura 6.27. Parte de la producción de María en la actividad 10.

Pensamos que María usó estas imágenes por la relación que ha establecido entre figuras geométricas y algunos objetos de su entorno. Deducimos también que María usó la habilidad de reconocimiento de relaciones espaciales (**RR**), la cual se hace evidente cuando menciona la relación de semejanza entre las escuadras y los triángulos, y los tableros con los rectángulos. En el diálogo, ella muestra que tiene claro cuáles son las características matemáticas que deben cumplir las figuras semejantes.

Actividades 13 a 15 (Sesión 4)

- Actividad 13(3)

Las inferencias al respecto de la imagen mental y habilidades usadas por Adriana se apoyan en el siguiente diálogo que sostuvo con el investigador después de haber desarrollado la actividad.

I: *¿Por qué planteas que las figuras en el apartado 3 no representan ampliación ni reducción?*

Adriana: *Um ... Son dos razones. La primera, porque medí los lados de las figuras y miden lo mismo. La segunda, es que a mí se me hace que la figura 2 está rotada y trasladada con respecto a la primera.*

I: *Respecto a la segunda razón, ¿qué quieres decir con que se te hace?*

Adriana: *Mire, yo me imaginé esto: si uno gira un poquito la figura 1 y luego la mueve a la derecha obtiene la figura 2, o sea es la misma.* [hace la muestra de los movimientos -giro y traslación- con sus manos].

I: *OK. Entiendo la primera razón, pero la segunda no mucho. ¿Qué tiene que ver que la figura 2 sea el producto de una rotación y una traslación de la figura 1?*

Adriana: *Ah ... ya, es que las figuras que se trasladan o se rotan no cambian su forma; incluso, aunque no estoy segura, las combinaciones de ellas tampoco cambian su forma.*

I: *OK.*

Adriana usó una imagen **cinética** al visualizar que la figura 2 es una composición de isometrías del plano de la figura 1 (ver figura 6.28), además de utilizar el movimiento de sus manos para comunicar su idea. Adriana primero imaginó los movimientos de la figura 1 hasta "convertirla" en la figura 2. Luego, para comunicar esta idea al investigador, utilizó las manos como apoyo.

Adriana usó la habilidad rotación mental (**RM**) al dotar de movimiento la figura 1. También hizo uso de la conservación de la percepción (**CP**) al reconocer que la figura, a la que dotó de movimiento, mantiene su forma y propiedades matemáticas aunque la haya cambiado de posición. En esta misma línea, Adriana usó reconocimiento de relaciones espaciales (**RR**) al identificar la semejanza entre las dos figuras.

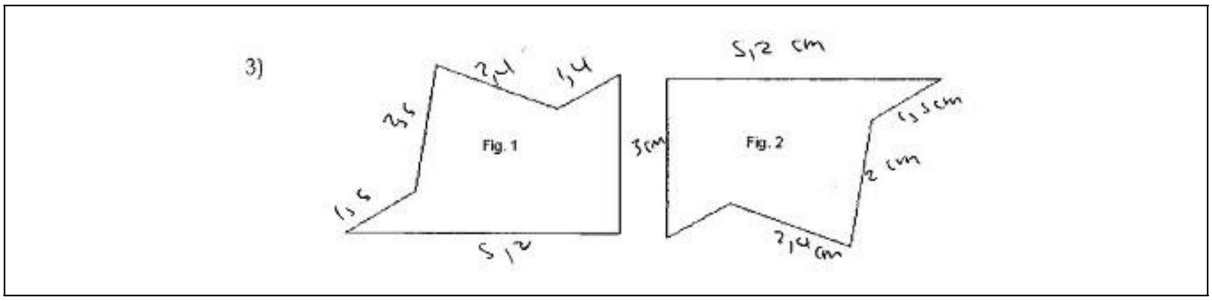


Figura 6.28. Parte de la producción de Adriana en la actividad 13(3).

- <u>Actividad 15</u>

Durante el desarrollo de esta actividad Ingrid realizó algunos dibujos como se muestra en la figura 6.29. Además, transcribimos a continuación el diálogo que ella sostuvo con el investigador.

I: *¿Qué has tenido en cuenta para hacer los dibujos?*

Ingrid: *Um ... primero, imaginé cómo quedarían las nuevas figuras con ampliación o reducción, luego ... me pareció más fácil desplazar las figuras usando paralelismo y utilizar un factor de reducción en el primero y de ampliación en el segundo.*

I: *¿Ampliación en el segundo?*

Ingrid: *Sí, como dice aquí* [señala las medidas de la figura inferior derecha], *de 2 cm. pasó a 6 cm., y de 5 cm. pasó a 15 cm.*

I: *Pero la figura de la derecha se ve igual a la original.*

Ingrid: *Ah ..., sí ... lo que pasó es que no me cabía en la hoja con esas medidas.*

I: *OK.*

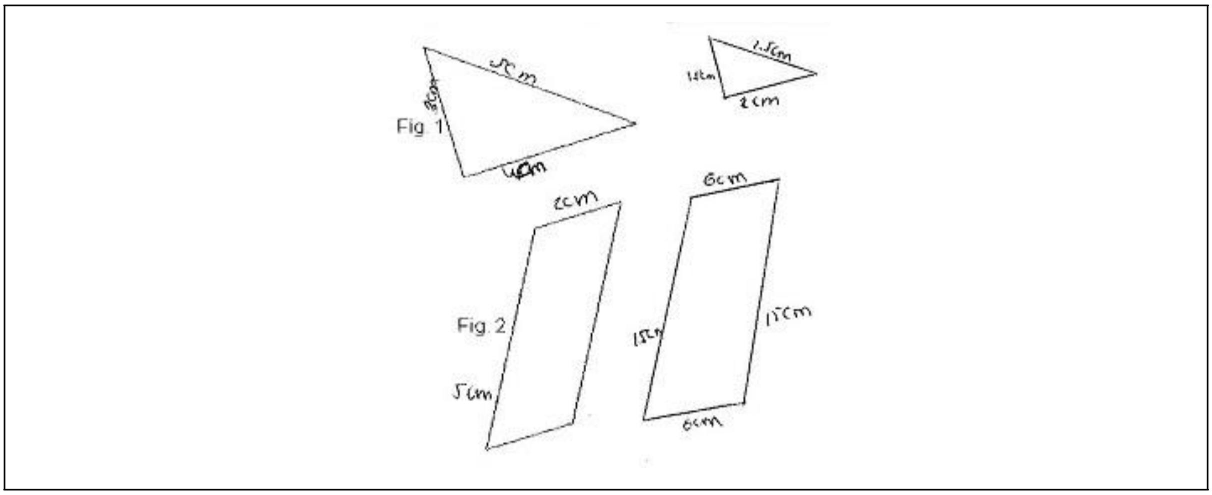


Figura 6.29. Parte del dibujo realizado por Ingrid en la actividad 15.

De acuerdo al diálogo, inferimos que Ingrid usó imágenes **dinámicas**. Ella primero imaginó cómo quedarían las figuras ampliadas o reducidas para luego dibujarlas. La habilidad usada por Ingrid fue la rotación mental (**RM**) al imaginar, primero, cómo quedarían las nuevas figuras y luego, cómo sería más fácil construirlas. Ella eligió dibujar las nuevas figuras desplazando las figuras dadas y, a su vez, usar diferentes razones de semejanza.

También, destacamos el caso de Katherine quien encontró una manera "ingeniosa" para dibujar figuras semejantes a las dadas. Ella dobló la hoja (por donde aparecen las líneas a trazos en la figura 6.30), marcó puntos coincidentes entre los vértices de cada una de las figuras y luego los unió. Cuando el profesor le preguntó qué significaban las líneas a trazos, ella respondió ... *eso funciona como un eje de reflexión*. Katherine usó imágenes **dinámicas** al imaginar cómo y dónde quedarían las figuras resultantes después de la reflexión aplicada en cada caso. Esto se hizo evidente cuando, a la pregunta ¿conocías este procedimiento o lo ensayaste ahora?, respondió:

Katherine: *Pues, ... no recuerdo si me lo habían enseñado antes ... Para este problema tengo la idea que funciona ... Una de las cosas que hice fue imaginar cómo y dónde quedaría cada figura al doblar la hoja ...*

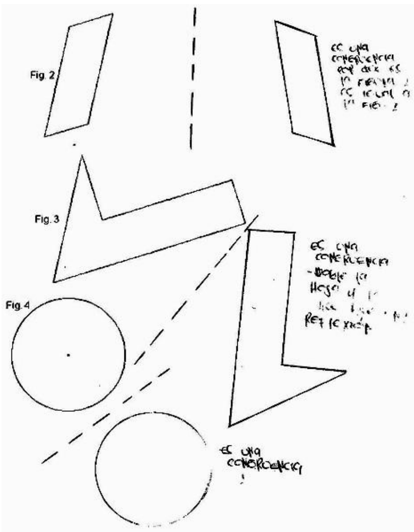


Figura 6.30. Dibujo realizado por Katherine en la actividad 15.

Pensamos que Katherine usó una rotación mental (**RM**) al dotar de movimiento (mentalmente) la figura dada para imaginar una nueva que resultaría de la reflexión sobre el eje demarcado en cada caso. Realizó, primero, la reflexión y luego relacionó esta con una imagen ya establecida. Para ella la figura reflejada es semejante a la original, aunque ella no tenía completa certeza de que esto era matemáticamente correcto.

Actividades 16 a 18 (Sesión 5)

- Actividad 16

Al revisar las producciones de los estudiantes en esta actividad, hemos encontrado el caso de Diego, concretamente en la figura 3. Diego plantea: *La figura ABba la puedo ver como dos triángulos, y si volteamos el triángulo pequeño se puede tener la semejanza*. Inferimos, con esta información y la transformación que realizó del dibujo (ver figura 6.31) que utilizó una imagen **dinámica** al dotar de movimiento en la mente al triángulo *abc*.

La habilidad de visualización que Diego usó fue la rotación mental (**RM**). Él imaginó el triángulo *abc* invertido y en el interior del triángulo ABC.

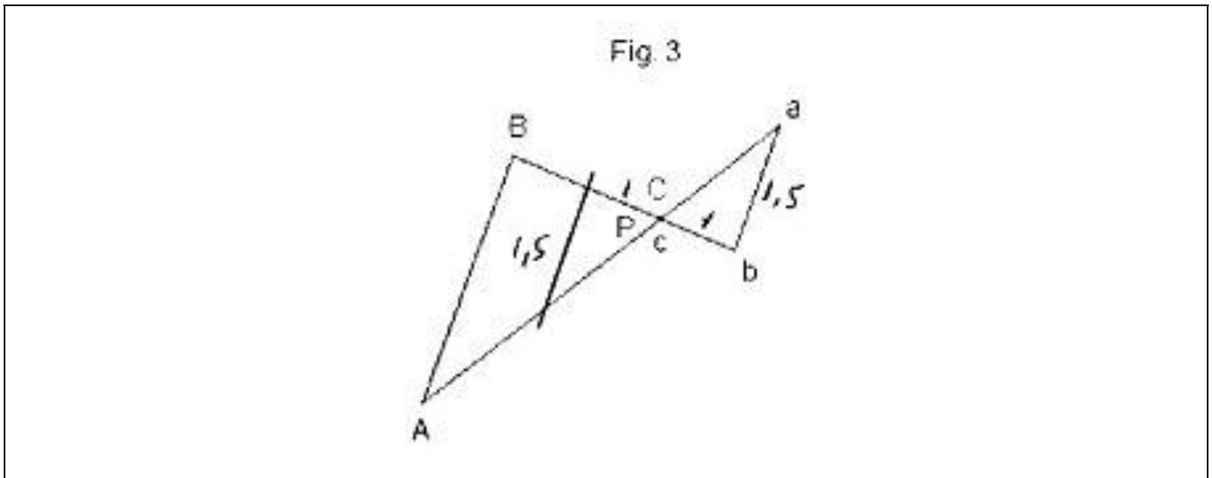


Figura 6.31. Parte de la producción de Diego en la actividad 16.

- Actividad 18

Encontramos el caso de Laura que imaginó un eje de reflexión que pasa por el punto A (que denominó centro de homotecia), “vio” que el triángulo *a’b’c’* lo puede llevar hasta el triángulo abc mediante una simetría axial -usando el eje imaginario- y, posteriormente, otra simetría respecto al segmento c’C (ver figura 6.32). En su producción escribió:

Laura: *Se podría decir que si imaginamos una línea que pasa por el centro de homotecia, el triángulo abc se puede obtener haciendo una reflexión sobre esta línea del triángulo a’b’c’ y luego otra sobre la línea c’C.*

Inferimos que Laura utilizó una imagen **dinámica** en la elaboración de su argumentación. Es decir, para argumentar la semejanza de dicho par de triángulos. El uso que hizo Laura de dicha imagen estuvo acompañado de la habilidad rotación mental (**RM**), la cual fue ejecutada cuando intenta "llevar" el triángulo *a'b'c'* hasta el triángulo *abc*.

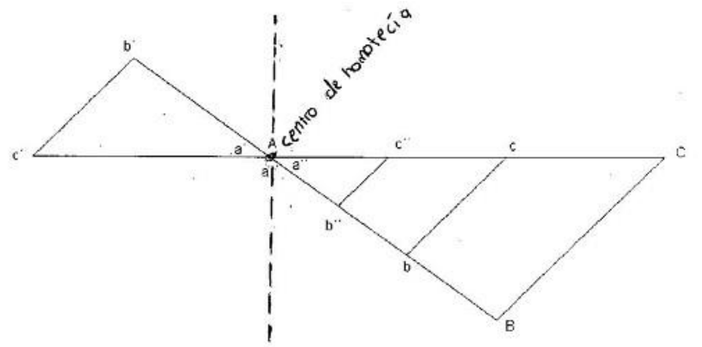


Figura 6.32. Parte de la producción de Laura en la actividad 18.

Actividades 19 a 21 (Sesión 6)

- Actividad 20(B)

Yanán empieza verbalizando una respuesta a la actividad y, a continuación, el profesor indaga más acerca de esta respuesta, como se muestra en el siguiente diálogo:

Yanán: [Se forman figuras semejante] *del número 1 al 9 porque son triangulares, mientras que de la 10 a la 12 son cuadriláteros y no podemos afirmar nada* [ver figura 6.33].

P: *¿Podrías explicarme más explícitamente tu respuesta?*

Yanán: *A ver ... yo recuerdo de la clase con Cabri, que las configuraciones donde se forma la semejanza son las de forma triangular.*

P: *¿Qué quieres decir con recordar?*

Yanán: *Sí, es como si las diferentes configuraciones que hicimos en esa clase las tuviera en mi mente y ahora lo que trato es de verlas para usarlas.*

P: *Por ejemplo, ¿dónde ves lo triangular?*

Yanán: *Pues aquí, mire* [señala los triángulos que se forman en cada una de las configuraciones desde la 1 hasta la 9].

P: *OK. ¿Entonces cómo hiciste la elección de la respuesta?*

Yanán: *Digamos ... esa es como la idea que tengo en la mente, entonces busco las configuraciones que sean así.*

P: *OK.*

La producción de Yanán nos permite inferir que ella usó imágenes **desde la memoria**, concretamente de diagramas. Inferimos que Yanán "vio" en su mente las configuraciones donde se forman triángulos semejantes. Esto le permitió identificar las configuraciones gráficas del tipo "triangular" que, según ella, son las que generan figuras semejantes. Pensamos que Yanán hace referencia a las configuraciones gráficas de Thales en las cuales la intersección de las rectas secantes es visible.

Deducimos que el uso que hizo de dichas imágenes estuvo acompañado de memoria visual (**MV**); Yanán recordó las características visuales que tienen las configuraciones gráficas de Thales tratadas anteriormente en la clase con Cabri. Por otro lado, creemos que usó la discriminación visual (**DV**) para identificar semejanzas y diferencias entre dichas configuraciones. Por último, creemos que también usó el reconocimiento de relaciones espaciales (**RR**) al identificar las características de las configuraciones, es decir, las de forma triangular y las que tienen forma de cuadrilátero.

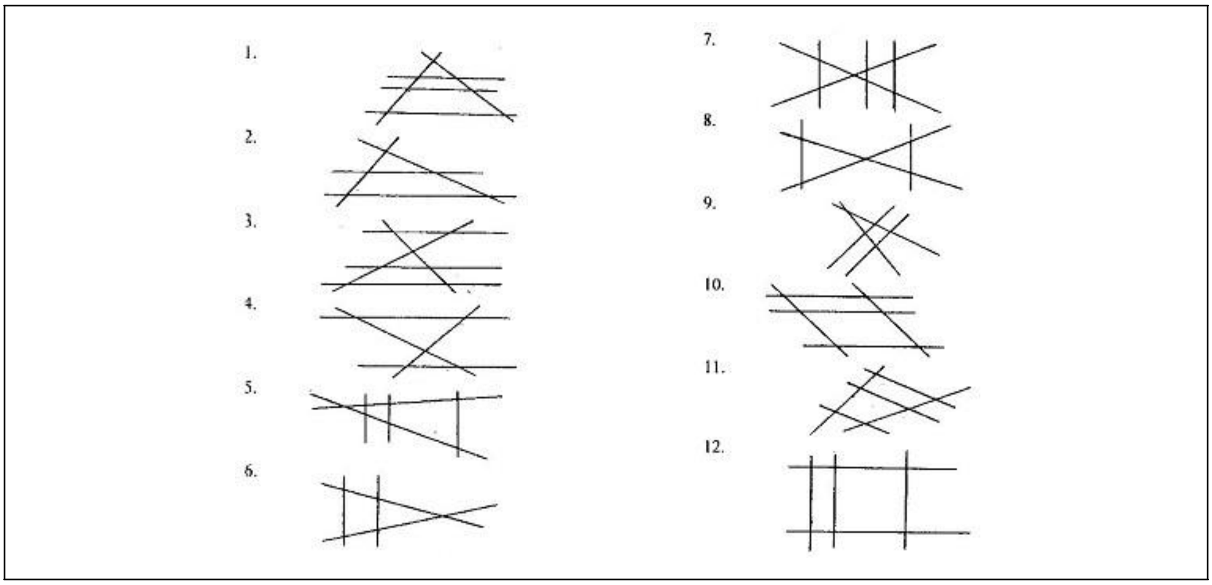


Figura 6.33. Configuraciones gráficas presentadas en la actividad 20(B).

Actividades 22 a 29 (Sesión 7)

- Actividad 22(5)

En parte de la producción de Katherine encontramos que dibujó dos triángulos separados con lados correspondientes paralelos (ver figura 6.34) y escribió:

Katherine: *El triángulo pequeño A'B'C', con una transformación adecuada, lo superpongo en el triángulo ABC. Con esto queda una homotecia o una configuración de Thales, por lo tanto los triángulos son semejantes.*

Con base en esto, el investigador le hace algunas preguntas sobre su razonamiento:

I: *¿Qué te hizo pensar que superponiendo los triángulos obtendrías homotecia o una configuración de Thales?*

Katherine: *Primero los dibujé haciendo que cumplieran la condición, después, me puse a pensar en cómo podría justificar la semejanza ... Me di cuenta que si los superponía haciéndolos coincidir en una punta los veía como en homotecia o en configuración.*

I: *¿Lo pensaste y luego dibujaste la superposición?*

Katherine: *Sí, así fue.*

I: *OK. Gracias.*

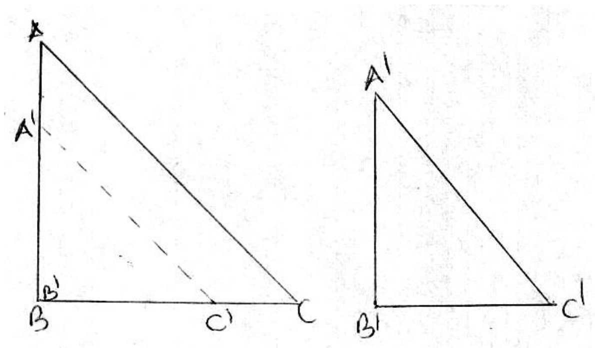


Figura 6.34. Dibujo realizado por Katherine en la actividad 22(5).

En la producción escrita y la conversación con Katherine encontramos que usó una imagen **dinámica**. Katherine dibujó los triángulos y luego “imaginó” cómo justificar su semejanza haciendo un movimiento mental de superposición del triángulo pequeño en el grande. En la creación de esta imagen, Katherine usó una rotación mental (**RM**) para darse cuenta que las figuras dispuestas así forman una configuración de Thales o una homotecia. Por otro lado, usó memoria visual (**MV**) la cual se hizo evidente al recordar las características visuales y de posición que tienen los triángulos en configuración de Thales o en aspecto de homotecia. Concluimos que para Katherine las figuras dispuestas así son una imagen mental establecida.

- <u>Actividad 24(1)</u>

  Andrés sostuvo el siguiente diálogo con el investigador:

I: *OK. ¿Por qué has dibujado esta flecha?* [señala la línea que va del triángulo AEF al triángulo CHG, ver figura 6.35].

Andrés: *Ah ... eso tiene que ver con algo que estaba pensando.*

I: *Explícame eso.*

Andrés: *A ver, me estaba haciendo la idea de que el triángulo este* [señala el triángulo CHG] *encajaba bien encima de este* [señala el triángulo AEF].

I: *¿Con eso llegaste a alguna conclusión?*

Andrés: *Eso me sirvió para tratar de buscar el por qué. Claro, encajan bien porque son homotéticos e iguales.*

I: *¿Qué quieres decir con eso del por qué?*

Andrés: *Um ... ya, para saber por qué encajan y por qué son semejantes.*

I: *OK.*

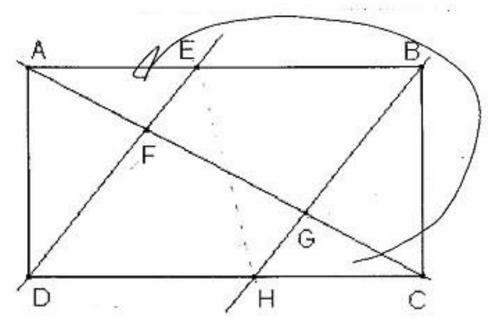


Figura 6.35. Manipulación que hizo Andrés al dibujo dado en la actividad 24(1).

Inferimos del análisis a la producción de Andrés que usó una imagen **dinámica**. Andrés imaginó primero si los triángulos CHG y AEF "encajan", es decir, si los puede superponer. De acuerdo con el dibujo, concretamente en relación a la flecha, pensamos que realizó un movimiento continuo para llevar mentalmente un triángulo sobre el otro.

Creemos que usó identificación visual (**IV**) para extraer los triángulos CHG y AEF del contexto en el que se encuentran. También, rotación mental (**RM**) al dotar de movimiento mental al triángulo CHG con el fin de visualizar la superposición de la que ya hemos hablado. Además, inferimos que al plantear la homotecia entre los triángulos, usó reconocimiento de posiciones en el espacio (**RP**); dado que identificó, por lo que se pudo apreciar, dicha relación.

- Actividad 25

Esta actividad fue asignada por el profesor para ser desarrollada como trabajo extraclase. En la siguiente sesión de clase los estudiantes hicieron entrega al profesor de sus producciones. Posteriormente, el investigador las recibió y de un análisis de respuestas seleccionó la hoja de Yanán y la convocó para que en un rato libre explicara apartes de su producción escrita. Particularmente, al investigador le pareció interesante indagar al respecto de las líneas que dibujó (ver figura 6.36). Presentamos la trascripción del diálogo que sostuvieron.

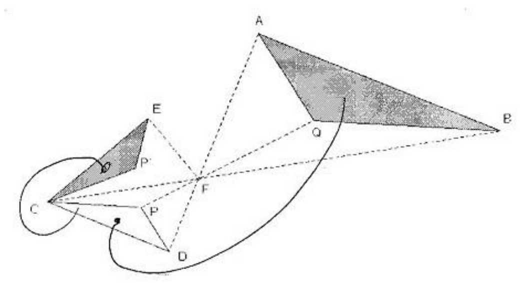


Figura 6.36. Manipulación que hizo Yanán al dibujo dado en la actividad 25.

I: *Has escrito al final de tu trabajo que los triángulos AQB y EP'C son semejantes. Explícame tus razones.*

Yanán: *Bueno. Pienso que estos dos triángulos* [señala los triángulos AQB y DPC] *son semejantes mediante alguna transformación. Luego ... estos dos* [señala los triángulos DPC y EP'C] *son iguales por la simetría dada.*

I: *¿No te falta algo en tu explicación?*

Yanán: *Um ... ah, sí. Luego apliqué una especie de transitividad.*

I: *¿O sea?*

Yanán: *O sea, el primero es al segundo, el segundo es al tercero, y entonces el primero es con el tercero.*

I: *OK. Tengo otra pregunta. ¿Por qué dibujaste estas líneas?* [señala las líneas curvas que aparecen en el dibujo].

Yanán: *Ah ... ya, esas las hice cuando estaba pensando en la posible solución. Pensando así se me ocurrió lo de la transitiva.*

I: *OK. Gracias Yanán.*

Inferimos de la ampliación que hizo Yanán a su producción escrita que usó una imagen **dinámica** y una imagen **concreta**. La imagen dinámica se evidenció cuando Yanán realiza el movimiento mental (en saltos) de los triángulos para luego plantear que la semejanza de los triángulos AQB y EP'C se puede justificar utilizando transitividad. Por otro lado, el uso de la imagen concreta se hizo evidente al utilizar la expresión *el primero es al segundo, el segundo es al tercero, y entonces el primero es con el tercero*, la cual le permitió establecer el orden en la composición de movimientos.

Del diálogo y de su producción escrita creemos que usó rotación mental (**RM**) al dotar de movimiento mental los triángulos AQB y DPC con el fin de visualizar la posible composición de movimientos y, de esta forma, justificar la semejanza mediante transitividad. Además, inferimos que al plantear la semejanza de los triángulos, utilizó reconocimiento de posiciones en el espacio (**RP**), dado que identificó las posibles relaciones de semejanza entre los triángulos presentados. Por último, Yanán usó conservación de la percepción (**CP**) al reconocer que el triángulo EP’C mantiene su forma luego haberse aplicado una simetría al triángulo DPC.

- Actividad 26

En el desarrollo de esta actividad hemos identificado la producción de Andrés, sobre la cual el profesor, al ver el dibujo planteado (ver figura 6.37), indagó más a cerca de su elaboración. A continuación presentamos la trascripción de parte del diálogo.

P: *Háblame del dibujo, ¿por qué lo has transformado?*

Andrés: *La idea mía es que el triángulo ACP lo puedo voltear y encajarlo ahí mismo.*

P: *¿Lo imaginaste antes de dibujarlo?*

Andrés: *Claro profesor, primero lo pensé. Fíjese que así los triángulos quedan en posición de Thales. Se pueden ver las transversales y los lados paralelos.*

P: *OK.*

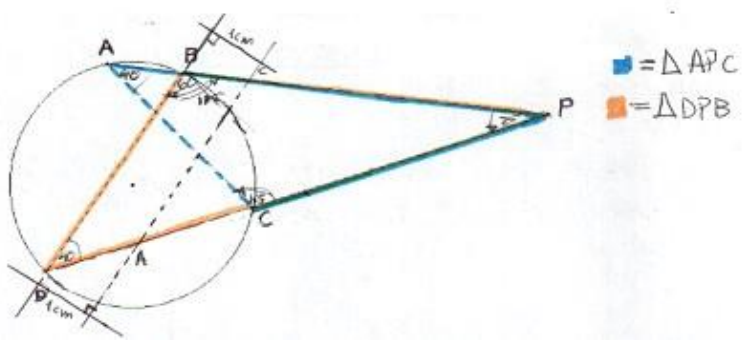


Figura 6.37. Manipulación que hizo Andrés al dibujo dado en la actividad 26.

Inferimos en la producción de Andrés el uso de una imagen **dinámica**. Andrés visualizó que el triángulo ACP podía ser movido de tal forma que al superponerlo sobre el triángulo DBP coincidían (en parte) y podía “ver” una configuración de Thales.

En nuestro análisis identificamos el uso de varias habilidades de visualización en la formación y transformación de dicha imagen mental. Por ejemplo, rotación mental (**RM**) cuando se imagina la acción de voltear el triángulo ABP y así realizar un reconocimiento de relaciones espaciales (**RR**), es decir, identificar características matemáticas de relaciones entre los triángulos resultantes (características de dos triángulos en configuración de Thales).

- <u>Actividad 29</u>

A continuación trascribimos un diálogo que el investigador sostuvo con Adriana y presentamos la figura 6.38 que contiene parte de su producción.

I: *¿Adriana por qué has hecho estos dibujos?* [señala las configuraciones gráficas de la figura 6.38]. *Cuéntame con detalles.*

Adriana: *A ver ... primero, miré los triángulos que se forman, ... hay varios* [señala algunos de ellos]. *Luego, ... me puse a pensar cómo justificar la semejanza de algunos de ellos. La idea mía era utilizar los dibujos del teorema de Thales o de las homotecias, que es lo que ustedes nos han enseñado. Um ...*

I: *¿Qué más?*

Adriana: *Eh ... esos triángulos sueltos no los puedo utilizar, me tocó pensar como en configuraciones, o sea que estuvieran pegados* [los triángulos].

I: *¿Qué quieres decir con pegados?*

Adriana: *Eh ... es que yo veo en mi mente las configuraciones* [según lo dicho antes por ella: configuraciones de Thales en aspecto de proyección o de homotecia].

I: *¿Qué más?*

Adriana: *Entonces, me puse a pensar en cuáles serían las configuraciones ... Ahí resultaron, por ejemplo, estas dos* [señala las de la figura 6.38].

I: *OK.*

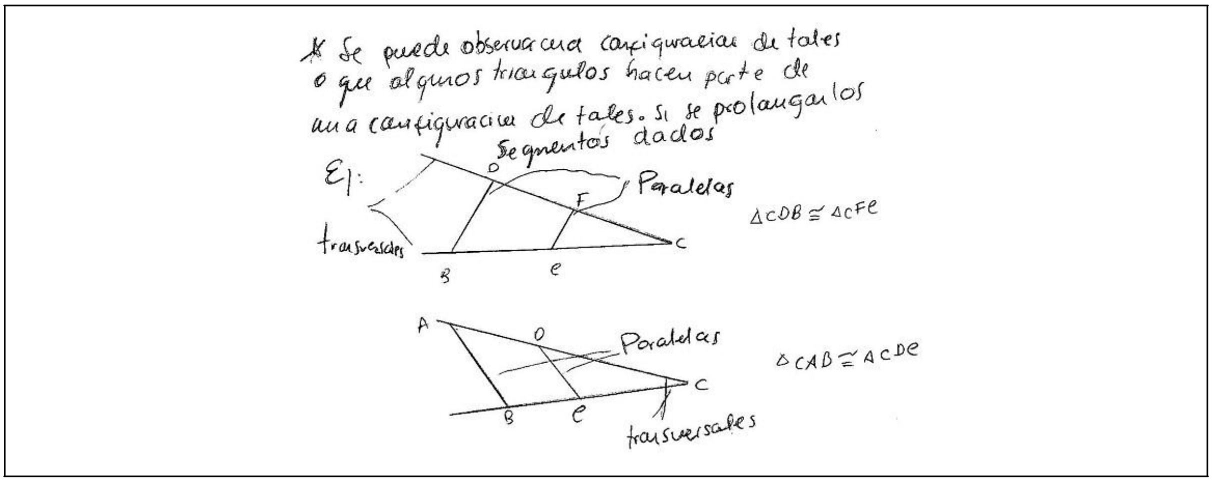


Figura 6.38. Descomposición que hizo Adriana del dibujo dado en la actividad 29.

Concluimos que Adriana usó imágenes **desde la memoria**, concretamente de diagramas. Ella usó algún diagrama que recordó de sus clases previas y creemos que esto le permitió extraer de la figura dada las configuraciones que dibujó.

Inicialmente, Adriana identificó en el dibujo los triángulos que se forman, haciendo uso de identificación visual (**IV**). Luego, inferimos que usó memoria visual (**MV**) al recordar las características visuales que tienen las configuraciones gráficas de Thales tratadas anteriormente en la clase. También creemos que usó reconocimiento de posiciones en el espacio (**RP**) al identificar, en las configuraciones establecidas, la semejanza de triángulos.

Actividades 30 y 31 (Sesión 8)

- Actividad 30(2)

Esta actividad contiene dos partes: una, pide construir un polígono semejante a uno dado a partir de un vértice dado y, la otra, justificar cuántas posibilidades hay de construir tal polígono. Por ejemplo, Katherine justificó su construcción (ver figura 6.39) escribiendo:

Katherine: *Para la construcción he tenido en cuenta una homotecia con centro en P y puntos colineales C y C'. Los lados los dibujé por medio de paralelismo.*

Con respecto al número de posibilidades respondió:

Katherine: *Hay infinitas posibilidades por que el punto P puede ocupar cualquier lugar en la recta.*

Después de analizar las respuestas de Katherine, el investigador la invita a ampliarlas, y tiene lugar el siguiente diálogo:

I: *Katherine, explícame un poco más el procedimiento que usaste para hacer este dibujo* [señala la figura 6.39].

Katherine: *Al principio no fue fácil, tuve que pensar por varios minutos ... Recordé las homotecias, ... lo que estudiamos unos días atrás. Antes de dibujar hice varios intentos, ... al final resultó este dibujo.*

I: *No los veo, ¿borraste esos intentos?*

Katherine: *Realmente no los borré, fueron intentos en la cabeza ... Casi no me gusta borrar.*

I: *Explícame un poco más eso.*

Katherine: *Me imaginaba cómo y dónde quedaría la nueva figura ... También, pensaba dónde debía colocar el punto P.*

I: *OK. Gracias*

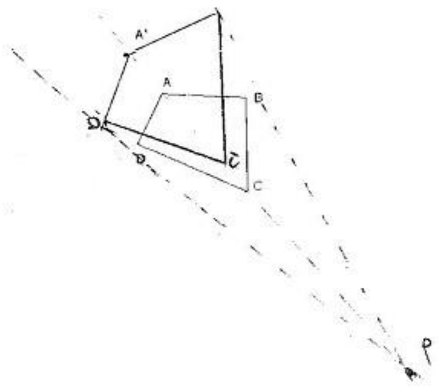


Figura 6.39. Dibujo que hizo Katherine en la actividad 30(2).

Con todo lo anterior, concluimos que usó una imagen **dinámica** al dotar de movimiento al polígono dado para visualizar una homotecia y, a partir de aquí, justificar la semejanza entre el polígono dado y el resultante. Dicha imagen le permitió darse cuenta, por ejemplo, de dónde ubicar el punto P.

En cuanto a habilidades de visualización, inferimos que usó rotación mental (**RM**) al producir imágenes mentales dinámicas y visualizar una configuración gráfica en movimiento -los diferentes polígonos que formó en su mente-. También creemos que hizo uso de reconocimiento de posiciones en el espacio (**RP**) al identificar las relaciones de semejanza entre sus imágenes mentales y el polígono dado.

- <u>Actividad 31(1)</u>

En esta actividad los estudiantes debían dibujar una figura y construir una semejante mediante una homotecia. En este sentido, trascribimos un diálogo que Ingrid sostuvo con el profesor para explicarle la manera como realizó la construcción (ver figura 6.40).

P: *Explícame cómo has construido este cuadrado* [señala el cuadrado A'B'C'D'].

Ingrid: *No sé si hice bien. Yo me imaginé lo que hice en la clase que tuvimos con Cabri para las homotecias ... Yo en el computador movía el punto P* [el centro de homotecia] *y me dí cuenta de la infinidad de posibilidades que existen y las diferentes formas que van apareciendo.*

P: *¿Eso cómo lo usaste aquí?*

Ingrid: *O sea, me hice la idea de cómo quedaría mi cuadrado* [señala el cuadrado ABCD] *al aplicarle una homotecia recordando esa clase.*

P: *Explícame más eso.*

Ingrid: *¿Cómo me hice esta idea?*

P: *Sí. Cuéntame con detalle.*

Ingrid: *O sea, me puse a pensar en diferentes posiciones en las que podría quedar el homotético ... Lo hice como por partecitas.*

P: *OK. Gracias.*

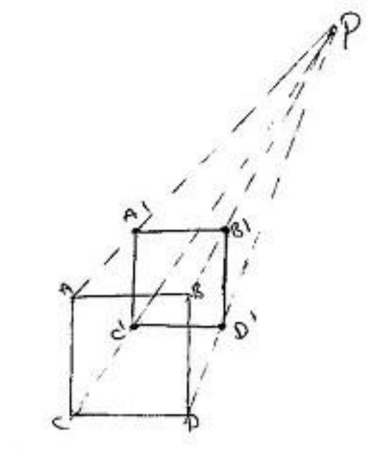


Figura 6.40. Construcción de Ingrid en la actividad 31(1).

De este diálogo asumimos que Ingrid utilizó una imagen **dinámica** realizando movimientos en saltos del cuadrado dibujado (A'B'C'D'). Imaginó en diferentes posiciones dicho cuadrado para visualizar un homotético y así justificar la semejanza de éstos.

Inferimos que en la trasformación de dicha imagen usó rotación mental (**RM**), es decir, dotó de movimiento al cuadrado para visualizar las posibles posiciones en que quedaría el homotético A'B'C'D'. Creemos que no hizo uso explícito de la conservación de la percepción (**CP**) al no haber evidencia de ello.

Actividades 32 y 33 (Sesión 9)

- Actividad 32(3)

Presentamos a continuación la trascripción de un diálogo que Adriana sostuvo con el profesor durante el desarrollo de esta actividad.

P: *Explícame el procedimiento que usaste para hacer estos dibujos* [señala los contenidos en la figura 6.41].

Adriana: *OK. Primero, dibujé dos triángulos que cumplieran las condiciones del problema. Luego, ... pensé cómo justificar su semejanza. Entonces, eh ...*

P: *Dime por qué hiciste este dibujo* [señala el dibujo de la derecha].

Adriana: *Más o menos lo mismo de antes, ... imaginé éste sobre éste* [moviendo las manos para mostrar una trayectoria curvilínea entre los triángulos ABE y A'B'C'] *para ver si podía tener el teorema de Thales. A mí me parece que sí, entonces ahí se da la semejanza de esos triángulos.*

P: *¿Te parece o puedes confirmarlo?*

Adriana: *A ver, ... por lo menos encajan por que el ángulo es el mismo. También, ... los lados que lo forman en cada uno son proporcionales ...*

P: *¿Que más?*

Adriana: *Bueno, si los lados son proporcionales, el lado AC y A'C' son paralelos* [duda de su respuesta].

P: *OK. Gracias.*

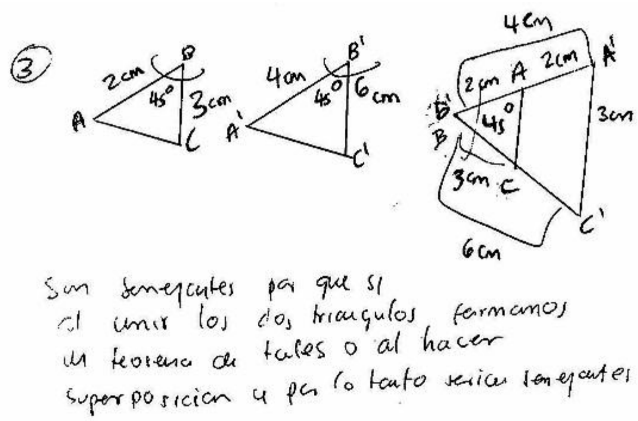


Figura 6.41. Dibujo que hizo Adriana en la actividad 32(3).

El video de esta sesión de clase muestra que Adriana, en su razonamiento, usó el movimiento de sus manos para "llevar" el triángulo ABE hasta el triángulo A'B'C', por lo que Adriana usó una imagen **cinética** en el análisis de la posible solución a la situación planteada. Su razonamiento se basó en el movimiento de un triángulo hasta hacerlo coincidir con el otro, ayudándose con las manos, para buscar una configuración de Thales.

En el uso y transformación de dicha imagen mental creemos que intervinieron la rotación mental y el reconocimiento de relaciones espaciales. La rotación mental (**RM**) se hizo evidente al mover mentalmente el primer triángulo para superponerlo en el segundo. El reconocimiento de relaciones espaciales (**RR**) se evidenció en la búsqueda que hizo de la relación de semejanza entre los triángulos mediante el uso del teorema de Thales.

- **Actividad 34 (Sesión 10)**

En el desarrollo de esta actividad, todos los estudiantes a excepción de Carlos y Francisco, que realizaron una demostración informal sin usar dibujos, realizaron demostraciones mediante ejemplificaciones en casos particulares, usando figuras geométricas como cuadrados, rectángulos y triángulos. Por esta razón, el investigador indagó con algunos miembros de los grupos de trabajo cuál era la razón de usar dichas figuras, a lo cual respondieron en su totalidad que eran las figuras que más recordaban porque eran fáciles de dibujar y de calcular su área y perímetro.

Inferimos que los estudiantes usaron imágenes **desde la memoria**, ya que recordaron algunas propiedades de figuras geométricas que habían estudiado con anterioridad tales como cuadrado, rectángulo y triángulo. Esto también permite inferir que los estudiantes emplearon la habilidad memoria visual (**MV**) en el uso y transformación de dichas imágenes.

Actividades 35 a 43 (Sesión 11)

- Actividad 35(1)

En el diálogo que transcribimos a continuación, el investigador amplía la información que Andrés plasmó en su hoja de trabajo. Cuando se presentó este diálogo Andrés ya había realizado el dibujo en cuestión (ver figura 6.42).

I: *¿Por qué has realizado este dibujo?* [señala la figura 6.42] *¿En qué pensaste?*

Andrés: *A ver ... Cuando estaba leyendo el problema me fui imaginado la situación. Eh ... esto me permitió darme cuenta que podía formar triángulos para buscar el teorema de Thales, o mejor dicho, ... una configuración de Thales. En eso pensé.*

I: *¿Cómo es eso de buscar una configuración de Thales?*

Andrés: *Sí, al imaginarme los triángulos que resultan del enunciado del problema, también los vi en configuración de Thales ... O sea, miré los triángulos que forman la configuración: el AB'C' y el ABC* [señala los triángulos en la figura 6.42].

I: *Y ... ¿por qué hiciste el dibujo si ya lo habías visto en tu mente?*

Andrés: *Um ... realmente, después de imaginarme el dibujo, lo hice ... es mejor para uno guiarse.*

I: *OK.*

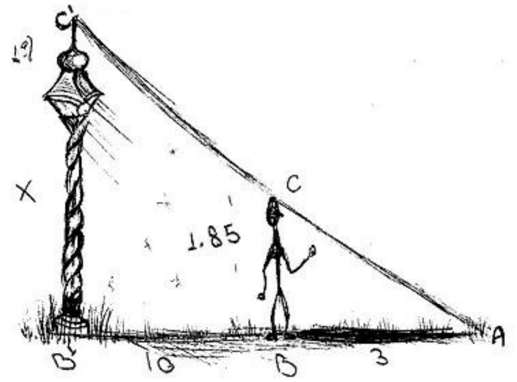


Figura 6.42. Dibujo que hizo Andrés en la actividad 35(1).

A nuestro juicio, inferimos que Andrés usó una imagen **desde la memoria**, que le permitió realizar el dibujo que bosqueja la situación planteada. Creemos que Andrés utilizó en la solución una representación concreta de la situación, es decir, "vio" que podía representar la situación mediante triángulos que forman parte de una configuración de Thales y que relacionó con lo visto antes.

Por otro lado, deducimos que Andrés hizo uso de reconocimiento de relaciones espaciales (**RR**). Esta habilidad le permitió orientar la resolución de la situación, que había visualizado mentalmente, hacía el dibujo que planteó.

- Actividad 36

En relación al desarrollo de esta actividad encontramos la producción de Adriana que, siendo la primera en finalizar la actividad, fue abordada por el investigador para indagar acerca del procedimiento usado por ella en la resolución. A continuación trascribimos el diálogo que sostuvieron y, además, mostramos en la figura 6.43 el dibujo realizado en su hoja de trabajo.

I: *¿En qué pensaste cuando elaboraste estos dos dibujos?* [señala los dibujos de la figura 6.43].

Adriana: *Realmente, la figura 1 es la misma de la hoja que repartieron, la hice aquí para tenerla a la vista ... Ahora, para la segunda ... eh ... el proceso empieza imaginándome cómo buscar una herramienta de las que hemos visto, ... yo vi una configuración de Thales. Um ...*

I: *Explícame eso que imaginaste.*

Adriana: *Sí, la figura* [1] *como está no muestra una configuración, entonces me puse a pensar cómo encontrarla. Este triangulito* [señala el triángulo interior] *me imagino que lo puedo sobreponer aquí* [señala el vértice C].

I: *¿Por qué supones esto?*

Adriana: *Eh ... por los ángulos; ambos* [los triángulos que se forman] *tienen dos ángulos comunes.*

I: *OK.*

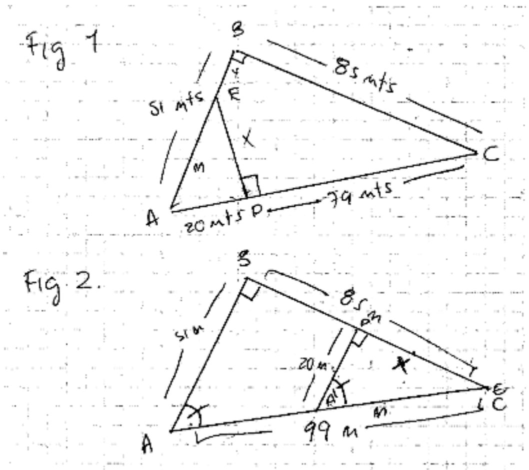


Figura 6.43. Dibujo que hizo Adriana en la actividad 36.

Hemos relacionado la producción de Adriana con el uso de una imagen **dinámica**. Ella lleva a cabo la acción identificando el triángulo ADE en el interior de la figura 1 e imaginando cómo debería moverlo para lograr obtener lo que para ella representa una configuración gráfica de Thales. Efectivamente, en su escrito mostró una adecuada utilización de la figura 2 en la resolución de la situación.

En la creación y trasformación de dicha imagen, creemos que utilizó el reconocimiento de relaciones espaciales (**RR**) para identificar el teorema de Thales en la configuración gráfica de la figura 1. Previamente, Adriana había usado la identificación visual (**IV**) para identificar el triángulo interior en el dibujo dado. También, inferimos el uso de rotación mental (**RM**) en la creación de dicha imagen, la cual se hace evidente al imaginar el movimiento utilizado para visualizar la configuración gráfica de la que habla. Por otro lado, respecto de la conservación de la percepción (**CP**), no tuvimos evidencia de su utilización.

- Actividad 37

La situación presentada en el desarrollo de esta actividad fue similar a la presentada en la actividad anterior, en tanto que se presentaron las mismas imágenes y habilidades de visualización.

Lo acontecido en el desarrollo de la actividad está relacionado con un diálogo que sostuvo el investigador con Ingrid aprovechando que ya había finalizado. La intención fue indagar acerca del procedimiento usado en la resolución de la tarea. Trascribimos el diálogo sostenido y su producción escrita en la figura 6.44.

I: *Explícame por qué dices que se forma una configuración de Thales.*

Ingrid: *OK. Los tres triángulos que se ven en el dibujo tienen al menos dos ángulos iguales y ... bueno, por lo menos este triángulo* [señala el triángulo CDE] *lo puedo trasladar aquí* [señala el mismo triángulo en la nueva figura]. *También, eh ...*

I: *¿Por qué lo puedes trasladar?*

Ingrid: *Bueno, como había dicho, estos triángulos tienen al menos dos ángulos en común, entonces ... los puedo ... um ... encajar, superponer así como me quedó aquí* [muestra la nueva figura].

I: *¿Pensaste esto antes de escribirlo o con sólo mirar el dibujo tomaste decisiones?*

Ingrid: *La verdad es que ... claro, primero hice la superposición de este triángulo* [CDE] *en la cabeza. Después, hice la figura completa.*

I: *OK.*

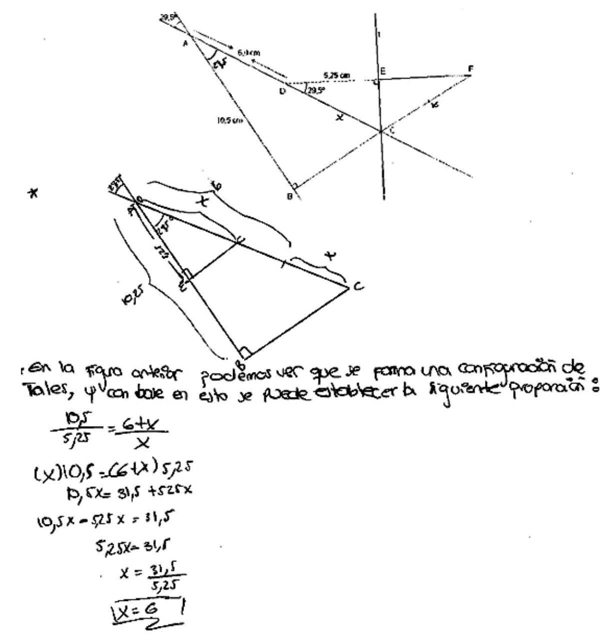


Figura 6.44. Desarrollo presentado por Ingrid en la actividad 37.

Concluimos que Ingrid usó una imagen **dinámica**. La explicación dada por Ingrid nos permite interpretar que convirtió el triángulo CDE en su imagen dinámica con el fin de confirmar si éste "encajaba" y podía verlo como una configuración gráfica de Thales, que fue lo que al final representó gráficamente.

En la creación y trasformación de su imagen, inferimos que utilizó el reconocimiento de relaciones espaciales (**RR**) para identificar el teorema de Thales en la configuración gráfica dada. También inferimos el uso de rotación mental (**RM**) en la creación de dicha imagen al realizar un movimiento imaginario para visualizar la configuración gráfica de la que habla. Deducimos que de las habilidades que hemos hablado fueron ejecutadas después del uso de la identificación visual (**IV**) al identificar los triángulos en el dibujo dado.

- Actividad 39

Nos pareció de particular interés una frase que escribió Diosa en su hoja de trabajo en referencia al desarrollo de esta actividad: *Grande es a pequeño como grande es a pequeño*. Esto motivó al profesor a entablar el siguiente diálogo con Diosa, el cual trascribimos y mostramos junto con su producción escrita en la figura 6.45.

P: *¿Esta frase es algo que guardas en tu mente?*

Diosa: *Ah ... ya, esta es una frase que usaba mi profesor de matemáticas cuando vimos las proporciones.*

P: *¿Por qué la usaste aquí?*

Diosa: *La uso porque me guía para armar* [plantear] *la proporción. ¿Me entiendes?*

P: *Sí, pero explícame cómo la usaste.*

Diosa: *OK. Antes ya había explicado por qué esta figura es una configuración de Thales*[43]*, entonces ... son semejantes los triángulos, entonces ... puedo plantear proporciones entre los lados correspondientes de los dos triángulos. Ahí fue donde la usé, mire* [señala la proporción en el cuadro de la derecha]*: X es del grande, R es del pequeño; aquí lo mismo: 2R es del grande y R es del pequeño.*

P: *OK.*

[43] Se refiere a una conversación previa en la que dijo que ... *los triángulos ABC y PBO forman una configuración de Thales porque los lados correspondientes son proporcionales* [AB con PB y CB con OB].

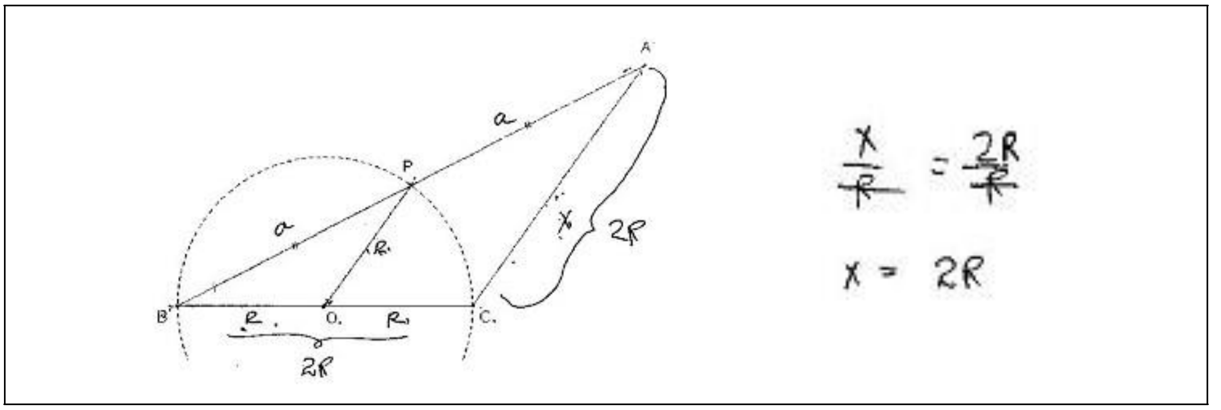


Figura 6.45. Parte de la producción de Diosa en la actividad 39.

A nuestro juicio, de acuerdo con el extracto anterior, concluimos que Diosa usó una imagen **concreta**. Ella utilizó una representación concreta de un procedimiento en el planteamiento de la proporción, dado que conocía la semejanza entre los triángulos.

En la trasformación de esta imagen, creemos que usó reconocimiento de relaciones espaciales (**RR**) al identificar las características de tipo matemático que tienen los triángulos en cuestión.

- Actividad 43

Con el objeto de corroborar, por lo menos en parte, el nivel de apropiación del concepto de semejanza y, además, poder tener un elemento de comparación del avance en la comprensión del concepto por parte de los estudiantes, planteamos finalizar la experimentación con la misma actividad 11. Como se dijo en su momento, esta actividad permite conocer la comprensión y la justificación que hacen los estudiantes de la semejanza de figuras planas.

Al revisar la hoja de trabajo de Katherine, el profesor notó que la mayor parte de las justificaciones que dio hacían referencia a configuraciones de Thales y disposiciones homotéticas. Con base en esto, al final de la actividad, el profesor invitó a Katherine a sostener un diálogo que transcribimos a continuación.

P: *¿Por qué has utilizado en casi todas tus argumentaciones las configuraciones de Thales y las disposiciones homotéticas?*

Katherine: *Es que ... ahora cuando me piden justificar la semejanza siempre pienso primero en configuraciones y disposiciones.*

P: *¿Es algo que guardas en tu mente?*

Katherine: *Sí claro. Hace tiempo me dí cuenta que es mucho más fácil buscar la semejanza por ahí.*

P: *¿Qué es lo que guardas en tu mente?*

Katherine: *Pues que ... siempre que me pidan si dos figuras son semejantes, me imagino las configuraciones de Thales y las disposiciones homotéticas.*

P: *¿Qué imaginas?*

Katherine: *Los dibujos de configuraciones de Thales ... para los triángulos y ... las disposiciones homotéticas ... Um ... para cualquier figura.*

P: *¿Si no las encuentras?*

Katherine: *Eh ... entonces miro las condiciones de la semejanza. Pero siempre miro o me imagino de dónde las puedo sacar.*

P: *OK.*

Inferimos de lo anterior que Katherine usó una imagen **concreta**. Para ella las configuraciones de Thales y las disposiciones homotéticas son una imagen que representa un objeto matemático en concreto. Creemos que Katherine "ve" las configuraciones gráficas de Thales y las representaciones gráficas de figuras en disposición homotética como fotografías que puede usar para justificar la semejanza en un momento dado. Asumimos que al usar dicha imagen se puso en juego la memoria visual (**MV**). En el momento de activar la imagen recuerda las características visuales y de posición que tienen las configuraciones gráficas de Thales y las figuras en disposición homotética.

Teniendo en cuenta lo que dice Katherine en el diálogo, concluimos que no usó el reconocimiento de relaciones espaciales (**RR**) puesto que ella asocia un dibujo a las configuraciones de Thales y a las figuras en disposición homotética; es decir, no las identifica mediante las características matemáticas de cada una de ellas.

6.2.2. Síntesis y Conclusiones

En este subapartado queremos dar respuesta a uno de los objetivos de nuestra investigación: Caracterizar el uso de elementos de visualización de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas relacionadas con la semejanza de figuras planas.

Las imágenes dinámicas involucran habilidad para mover y transformar imágenes en la mente. Por su parte, las imágenes cinéticas son creadas, transformadas o comunicadas con ayuda de movimientos físicos. Por otra parte, la rotación mental (RM) tiene que ver con la habilidad para producir imágenes mentales dinámicas y visualizar una configuración en movimiento. A nuestro juicio, consideramos que la misma constitución de las imágenes dinámicas y cinéticas requiere de la rotación mental, es decir, en la formación y uso de dichas imágenes se hace presente de manera privilegiada tal habilidad; esto lo hemos constatado en el análisis de las producciones de los estudiantes que participaron en el estudio.

El uso de imágenes dinámicas predominó en el desarrollo de las actividades que hacen parte de las sesiones 1, 3, 4, 5, 7, 10 y 11; mientras que en las demás, estuvo presente aunque en menor medida. Creemos que esto concuerda con el diseño mismo de las actividades que, en últimas, propicia o inhibe el uso de este tipo de imagen. Por otro lado, suponemos que el alto componente gráfico presente en el tema de estudio hizo que este tipo de imágenes fuera usado con frecuencia.

Llaman la atención los casos de algunos alumnos (Adriana, Ángela, Diosa, Yanán, Katherine y Andrés) que hicieron uso frecuente de variadas imágenes mentales, es decir, usaron métodos visuales en la resolución de las tareas planteadas. En este sentido, creemos que el uso de imágenes mentales se relaciona con la producción de estrategias de resolución a las diferentes situaciones planteadas. Esto nos confirma que las imágenes mentales son un componente importante en la actividad matemática de estos estudiantes. Otro caso de particular importancia fue el de Ingrid quien usó únicamente y, de manera frecuente, imágenes dinámicas en la solución de las tareas. Esto concuerda con las observaciones que realizamos de Ingrid durante la experimentación; por un lado, que es una estudiante que se siente más a gusto trabajando individualmente durante el desarrollo de las tareas matemáticas, al no usar, por ejemplo, las imágenes cinéticas (principalmente usadas por los estudiantes para comunicar ideas); por otro, que no trabaja con imágenes mentales concretas y desde la memoria que le permiten, por ejemplo, recordar procedimientos (usados anteriormente en situaciones análogas) para la resolución de tareas matemáticas.

El uso de imágenes cinéticas se aprecia en estudiantes como Adriana, Andrés, Ángela y Diosa quienes las usaron abundantemente. Somos conscientes de que su uso, en estos estudiantes, no es un indicador del cual podamos hablar demasiado, ya que es probable que al ser estudiantes con perfil de líderes tuvieron más oportunidades de comunicar sus ideas, sus intuiciones, sus imaginaciones, etc.

Desde nuestro punto de vista, consideramos que Adriana, Ángela, Diosa, Yanán, Katherine y Andrés poseen un grado importante de visualidad matemática (VM) dado que usaron frecuentemente diferentes imágenes mentales cuando resolvían las tareas matemáticas. Por otra parte, inferimos que estos mismos estudiantes fueron los visualizadores de la clase. En general, de acuerdo al análisis de sus producciones, consideramos que la visualización desempeña un papel importante en sus procesos de pensamiento cuando resuelven problemas matemáticos.

Adriana, Yanán, Katherine y Andrés son considerados por sus profesores como "buenos estudiantes"; ellos obtienen altas calificaciones con mucha frecuencia. En este sentido, constatamos que en estos casos existe una correlación positiva entre el uso de imágenes mentales y el hecho de ser "buenos estudiantes". Aunque encontramos casos en los que dicha correlación es negativa, por ejemplo, los casos de Carlos, Francisco y Suly, es decir, son considerados "buenos estudiantes" e hicieron un escaso uso de imágenes mentales. Estos casos mencionados los consideramos no visualizadores, dado que el uso que hicieron de imágenes mentales en la resolución de las tareas planteadas fue muy escaso.

Presentamos a continuación la tabla 6.2, que muestra la frecuencia de uso de imágenes en las diferentes sesiones en que se dividió la unidad de enseñanza.

Tipos de imagen / **Sesión**	**Concretas**	**Desde la memoria**	**Cinéticas**	**Dinámicas**
1	10	20	10	24
2	15	14	16	13
3	14	14	15	17
4	13	12	16	19
5	14	18	14	20
6	16	17	15	16
7	13	16	16	21
8	6	16	8	12
9	8	12	8	10
10	2	6	6	16
11	20	16	14	22

Tabla 6.2. Frecuencia de uso de imágenes por los estudiantes en cada sesión.

En definitiva, en relación a las imágenes mentales, se pudo constatar que un considerable número de estudiantes tuvo dificultad para construirlas y usarlas. Esto evidencia la complejidad que existe entre la capacidad de construir y usar imágenes mentales al momento de resolver tareas matemáticas. Deducimos que el poco uso por parte de algunos estudiantes de imágenes mentales está relacionado con el frecuente planteamiento, por parte de los profesores, de problemas que potencian procedimientos rutinarios en los cuales, por ejemplo, simplemente se debe aplicar algún algoritmo o fórmula. En este sentido, consideramos que las actividades de la sesión 11, la última de la unidad de enseñanza, permitieron un importante uso de diversas imágenes en la resolución de las tareas planteadas allí. Estas actividades plantean situaciones que promueven razonamientos que permiten "reinventar" y usar el concepto objeto de estudio.

6.2.3. Caracterización emergente del uso de imágenes mentales y de habilidades de visualización en la semejanza de figuras planas

Las diversas manifestaciones, por parte de los estudiantes, de uso de imágenes mentales al resolver las situaciones planteadas en las distintas actividades, que hemos ejemplificado en la sección 6.2.1, nos han permitido realizar la tabla 6.3, en la que mostramos las caracterizaciones de cada tipo de imágenes mentales en las diferentes actividades de cada sesión en las que hemos identificado dichas imágenes mentales.

Tipos de imagen / **Sesión**	**Concretas**	**Desde la memoria**	**Cinéticas**	**Dinámicas**
1		A4: Determinar la semejanza entre fotografías usando la semejanza entre figuras geométricas conocidas.		A1: Superponer dos fotos para visualizar una ampliación o reducción de una respecto a la otra.
2	A7: "Ver" una figura geométrica como un objeto físico conocido para identificar la semejanza entre figuras de su misma especie.		A5: Superponer dos o más figuras usando un vértice común para visualizar la semejanza, ayudándose del movimiento de las manos para comunicar la idea.	
3	A10: "Ver" objetos físicos como figuras geométricas para identificar la semejanza entre ellos.			

Tipos de imagen / Sesión	Concretas	Desde la memoria	Cinéticas	Dinámicas
4			A13(3): Imaginar una composición de isometrías del plano para justificar la semejanza entre dos figuras. Además, utiliza el movimiento de las manos para comunicar este razonamiento.	A15: Imaginar la ampliación o reducción de una figura antes de dibujarla.
5				A16: Imaginar la superposición de dos triángulos para visualizar su semejanza. A18: Imaginar una composición de transformaciones para justificar la semejanza de triángulos.
6		A20(B): Imaginar configuraciones gráficas de Thales en las cuales la intersección entre las rectas secantes es visible, con el objeto de justificar la semejanza entre triángulos.		
7				A22(5): Imaginar la superposición de dos triángulos para visualizar su semejanza utilizando homotecia o configuración de Thales.
8				A30(2): Dado un polígono, imaginarlo en movimiento para visualizar uno homotético y así justificar la semejanza entre ellos.

Tipos de imagen / Sesión	Concretas	Desde la memoria	Cinéticas	Dinámicas
9			A32(3): Imaginar la superposición de dos triángulos con el objeto de visualizar -mediante una configuración de Thales- su semejanza. Además, utiliza el movimiento de las manos para comunicar este razonamiento.	
10		A34: Imaginar figuras geométricas conocidas (cuadrados, rectángulos, triángulos) como aquellas a las que se puede hallar con facilidad su área y perímetro.		
11	A35(1): "Ver" una configuración de Thales como representación de una situación matemática de tipo verbal. A39: Plantear una proporción (dada una semejanza) a partir de imaginar una representación concreta de un procedimiento. A43: "Ver" las configuraciones gráficas de Thales y las representaciones gráficas de figuras en disposición homotética como fotografías que se pueden usar para justificar la semejanza.			

Tabla 6.3. Caracterizaciones de las imágenes mentales.

En términos generales, y en relación con las habilidades, sobre la base de nuestra evidencia, constatamos el abundante uso de las habilidades rotación mental y reconocimiento de relaciones espaciales. Deducimos que fue el mismo diseño de las tareas matemáticas que influyó en el uso frecuente de las mismas. En la rotación mental, por ejemplo, los estudiantes la usaron principalmente para “ver” la figura dada o la situación planteada de otra manera y así ampliar las posibilidades de enfrentar la situación planteada. En el reconocimiento de relaciones espaciales, por ejemplo, los estudiantes permanentemente debían identificar relaciones de semejanza entre objetos y situaciones matemáticas planteadas.

Otro hecho que pudo constatarse fue la estrecha relación entre el uso de imágenes concretas y desde la memoria con la habilidad memoria visual (MV), es decir, casi en la totalidad de los casos en que se usaron dichas imágenes, los estudiantes usaron también dicha habilidad. Creemos que la misma constitución, tanto de las imágenes como de la habilidad, permite constatar dicha relación.

Consideramos que las habilidades de visualización permiten establecer un puente entre la nueva información (en nuestro trabajo, la semejanza) y el conocimiento previo de los estudiantes, el cual les permite dar sentido al nuevo material (en nuestro trabajo, la unidad de enseñanza).

En relación al uso que hicieron los estudiantes de habilidades de visualización en la resolución de las situaciones planteadas, a continuación presentamos la tabla 6.4, que recoge la caracterización de cada una de las habilidades en las diferentes sesiones de la unidad de enseñanza donde fueron identificadas.

Élgar Gualdrón

Habilidad / Sesión	Identificación visual (IV)	Rotación mental (RM)	Conservación de la percepción (CP)	Reconocimiento de posiciones en el espacio (RP)	Reconocimiento de relaciones espaciales (RR)	Memoria visual (MV)	Discriminación visual (DV)
1		A1: Mover una figura para imaginarla superpuesta a otra.	A1: Reconocer que una figura no cambia su forma así cambie de posición.	A1: Imaginar que dos figuras "encajan". A4: Identificar figuras semejantes a partir de una dada.			A4: Comparar fotos visualmente para determinar su semejanza.
2	A7: Reconocer en una figura compuesta una figura geométrica concreta.			A7: Identificar relación de igualdad de formas entre una figura compuesta y los elementos que la conforman.	A5: Reconocer entre varios rectángulos los que son semejantes. A6: Reconocer entre varios triángulos los que son semejantes.		A5: Comparar rectángulos visualmente para identificar su semejanza. A6: Comparar triángulos visualmente para identificar su semejanza.
3					A10: Identificar la semejanza entre objetos concretos y triángulos o rectángulos.		

Habilidad / Sesión	Identificación visual (IV)	Rotación mental (RM)	Conservación de la percepción (CP)	Reconocimiento de posiciones en el espacio (RP)	Reconocimiento de relaciones espaciales (RR)	Memoria visual (MV)	Discriminación visual (DV)
4		A13(3): Mover una figura para compararla con otra similar. A15: Mover una figura usando siempre la misma dirección y sentido para visualizar otra semejante a ella. A15: Mover una figura usando una reflexión para visualizar otra semejante a ella.	A13(3): Reconocer que una figura no cambia su forma así cambie de posición.		A13(3): Identificar la semejanza entre dos figuras geométricas.		
5		A16 y A18: Mover una figura para imaginarla superpuesta a otra.					
6					A20(B): Identificar características de configuraciones gráficas de Thales	A20(B): Recordar las características visuales y de posición de las configuraciones gráficas de Thales.	A20(B): Comparar configuraciones gráficas de Thales para identificar semejanzas y diferencias entre ellas.

Habilidad / Sesión	**Identificación visual (IV)**	**Rotación mental (RM)**	**Conservación de la percepción (CP)**	**Reconocimiento de posiciones en el espacio (RP)**	**Reconocimiento de relaciones espaciales (RR)**	**Memoria visual (MV)**	**Discriminación visual (DV)**
7	A24(1): Reconocer en una figura compuesta una figura geométrica concreta. A29: Reconocer entre varios triángulos los que son semejantes.	A22(5), A24(1), A25 y A26: Mover una figura para imaginarla superpuesta a otra.	A25: Reconocer que una figura no cambia su forma así cambie de posición.	A24(1): Identificar triángulos homotéticos en una configuración gráfica. A25: Identificar figuras semejantes a partir de una dada. A29: Identificar triángulos semejantes en una configuración gráfica dada.	A26: Identificar el teorema de Thales en una configuración gráfica.	A22(5): Recordar las características visuales y de posición de las configuraciones gráficas de Thales. A29: Recordar las características visuales y de posición de las configuraciones gráficas de Thales.	
8		A30(2) y A31(1): Mover una figura para compararla con otra similar.		A30(2): Identificar figuras semejantes a partir de una dada.			
9		A32(3): Mover una figura para imaginarla superpuesta a otra.			A32(3): Identificar el teorema de Thales en una configuración gráfica.		
10						A34: Recordar las características visuales de figuras geométricas, tales como cuadrados, rectángulos y triángulos.	

Habilidad / Sesión	Identificación visual (IV)	Rotación mental (RM)	Conservación de la percepción (CP)	Reconocimiento de posiciones en el espacio (RP)	Reconocimiento de relaciones espaciales (RR)	Memoria visual (MV)	Discriminación visual (DV)
11	A36: Reconocer en una figura compuesta una figura geométrica concreta. A37: Reconocer entre varios triángulos los que son semejantes.	A36 y A37: Mover una figura para imaginarla superpuesta a otra.			A35(1), A36, A37: Identificar el teorema de Thales en una configuración gráfica. A39: Reconocer entre varios rectángulos los que son semejantes.	A43: Recordar las características visuales y de posición de las configuraciones gráficas de Thales y las figuras en disposición homotética.	

Tabla 6.4. Caracterización de habilidades de visualización.

Un hecho aislado que pudo ser constatado es la estrecha relación que existe entre los problemas de identificación de relaciones y las habilidades de memoria visual (MV), identificación visual (IV) y discriminación visual (DV). Dependiendo de la situación planteada, los estudiantes usaron unas u otras para crear o transformar las imágenes que usaron.

Somos concientes de que el uso de imágenes y habilidades son una actividad mental. En este sentido, intentar analizar las producciones de los estudiantes se convierte en una actividad compleja. Por esta razón, para el análisis de la información obtenida, hemos sido cuidadosos al hacerlo con todas las fuentes que tuvimos a nuestra disposición.

Estamos de acuerdo con Presmeg (2006) cuando plantea la preocupación urgente de investigar la didáctica efectiva que pueda mejorar el uso y el potencial de la visualización en Educación Matemática. Creemos que desde las aulas de clase de matemáticas, los profesores podrían gradualmente involucrar en sus intervenciones más y mejores actividades en las cuales se tenga en cuenta una mayor atención a la visualización.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES GLOBALES, LIMITACIONES E IMPLICACIONES

En cada uno de los capítulos de esta memoria se han venido presentando conclusiones parciales relacionadas con cada uno de los objetivos de nuestra investigación propuestos, en particular en los capítulos 5 y 6. Consideramos oportuno presentar en este capítulo conclusiones globales y, además, comentar las limitaciones detectadas en el desarrollo del estudio para finalmente, comentar las implicaciones que los resultados del estudio puedan tener para futuras investigaciones. Las conclusiones se presentan indicando la parte del estudio a las que corresponden y las limitaciones e implicaciones se relacionan en apartados al final del capítulo.

Para finalizar esta introducción sobre los resultados, creemos conveniente destacar que esta investigación ha cumplido los objetivos planteados (enumerados en la introducción inicial): estudiar, analizar y caracterizar la enseñanza y el aprendizaje de la semejanza de figuras planas. El trabajo ha aportado información sobre los dos aspectos centrales en todo proceso de formación, la actividad del profesor y la actividad de los estudiantes, a partir de la observación coordinada de un profesor específico y de sus alumnos trabajando en un tópico específico. Esta forma de abordar el estudio (profesor y sus alumnos) sugiere que, si se quiere llegar a una mayor comprensión del proceso de enseñanza y de aprendizaje, es conveniente que se tengan en cuenta conjuntamente los dos protagonistas, es decir, que podrían evidenciarse resultados más amplios al realizar estudios teniendo en cuenta los dos aspectos al tiempo y no por separado.

7.1. SOBRE EL ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA DEL PROFESOR

La metodología usada para el análisis de la práctica del profesor se convierte en un punto de partida fructífero en la formación de profesores de matemáticas de secundaria, en la medida que presenta las características de replicabilidad que hace que pueda ser usado en otras investigaciones, lo cual constituye una aportación para futuros estudios en el campo. Aunque sólo se estudió el caso de un profesor, consideramos que el planteamiento ha dado muestras de su potencial. En concreto, en relación con el objetivo O1 de la investigación (introducción) se ha conseguido:

- Que el profesor se cuestione sobre algunas de sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática.
- Que el profesor haya adquirido actitudes positivas y de cambio en las creencias sobre la enseñanza de la semejanza y de la matemática en general.
- Que el profesor se muestre receptivo ante nuevos planteamientos que surgen de propuestas externas (diseños curriculares) y estar deseoso de saber cómo traducirlas en prácticas reales.

La entrevista inicial y las entrevistas semiestructuradas al profesor mostraron que la entrevista posee características únicas como instrumentos de obtención de información sobre el profesor, ya que:

- Hacen hincapié en el aprendizaje profesional y el mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje.

- Permiten reflexionar sobre la práctica.

- Permiten la revisión del diseño y la promulgación de nuevas acciones.

- Permiten que el profesor sistematice permanentemente los resultados de la ejecución de sus planes instruccionales.

- Permiten examinar la enseñanza de la semejanza de figuras planas como un todo integrado y obtener una mayor comprensión de la práctica instruccional y las cogniciones del profesor asociadas.

En general se concluye que el proceso llevado a cabo con el profesor ha resultado ser una vía importante para iniciar un desarrollo profesional en el profesor participante que, con seguridad, continuará de manera autónoma. El modo en que se propicia la reflexión del profesor y la movilización de sus ideas sobre la materia, el tema de estudio, su enseñanza y aprendizaje, sus características y necesidades profesionales y, sobre todo, la propia consciencia y decisión sobre su proceso de desarrollo profesional avalan que el profesor se ha implicado en la investigación y lo haya hecho en un proceso personal de desarrollo profesional.

Uno de los resultados del análisis de la práctica del profesor ha permitido confirmar que la amplia experiencia profesional de un profesor no necesariamente implica que su desempeño profesional sea óptimo. Su práctica, a pesar de la amplia experiencia, está determinada por sus creencias y concepciones, que son, en últimas, las que determinan las condiciones propicias para que se dé un proceso de enseñanza y de aprendizaje con resultados favorables.

Es conveniente destacar que estas conclusiones no son generalizables para todo el profesorado y estudiantado. No fue éste uno de los objetivos, ni la naturaleza del estudio de casos lo permite. Las historias del profesor Antonio y de los 27 estudiantes son estudios de casos (de caso único del profesor, y de caso múltiple de los estudiantes) que proporcionan problemas y situaciones reales que ocurren en un aula de clase de matemáticas y que podrían ser valiosas, ya que incluyen un extenso abanico de posibilidades para que tanto investigadores/formadores, como profesores (inquietos por su práctica) reflexionen sobre los sucesos que se han presentado. A través del análisis y la discusión, éstos podrían proponer soluciones viables que sirvan para mejorar la propia práctica educativa.

Los resultados obtenidos en este estudio constituyen evidencias empíricas que aportan información tendiente, por una parte, a dar explicaciones sobre el desarrollo profesional del profesor de matemáticas y, por otra, a comprender las formas de razonamiento de los estudiantes desde la óptica de los niveles de Van Hiele y de los elementos de visualización, a partir de la implementación de una secuencia instruccional sobre el concepto de semejanza de figuras planas.

7.2. SOBRE LA ACTIVIDAD DE LOS ESTUDIANTES

Las actuaciones de los estudiantes nos han permitido realizar caracterizaciones de sus formas de razonar al resolver las tareas que se les propusieron como parte de la unidad de enseñanza experimental, que corresponden a los objetivos O2 y O3 de la investigación (introducción). A continuación se sintetizan los logros para el objetivo O2:

- Se confirmó en gran medida y amplió el listado inicial de descriptores de nivel de razonamiento Van Hiele para la semejanza de figuras planas.
- Se evidenciaron diferentes maneras de razonar de los estudiantes para procesar información, las cuales pueden ser usadas como “modelo” en el diseño de secuencias instruccionales en el tópico matemático de semejanza de figuras planas. Los estudiantes al principio de la experimentación se sentían inseguros al usar ciertas formas de razonamiento (que el profesor anteriormente no les permitía experimentar, dada su metodología de enseñanza tradicional), pero que, a medida que fue transcurriendo la experimentación, fueron haciendo suyas.

Y los siguientes son los logros para el objetivo O3:

- Se identificaron características del razonamiento de los estudiantes desde la óptica de las imágenes mentales y las habilidades de visualización empleadas.
- Se evidenció que para un buen número de estudiantes el uso de imágenes mentales y habilidades de visualización son componentes importantes de la actividad matemática que desarrollan. Lo anterior permite sugerir que el diseño de las tareas matemáticas (no solamente en el tópico de la semejanza) dirigidas a los estudiantes debe permitir que ellos las exhiban y así posibilitarles que desarrollen más y mejores formas de pensamiento.

Además de lo anterior, y aunque el interés del estudio no fue observar específicamente el efecto de la aplicación de la unidad de enseñanza en el aprendizaje de los estudiantes, el profesor, conocedor de sus estudiantes, expresó que indudablemente obtuvieron mejores resultados, comparados con los que obtenían antes con un tipo de enseñanza tradicional. Es decir que, según el profesor, en el tema de semejanza de figuras planas, la mayoría de los estudiantes exhibían razonamiento del primer nivel de Van Hiele y sólo unos pocos del segundo nivel, pero, después de la experimentación, los estudiantes exhibieron razonamiento del segundo nivel y una cantidad significativa de ellos alcanzaron el tercer nivel de Van Hiele.

Por último, el desarrollo de este estudio permite sugerir que, dada la importancia del razonamiento visual en la comprensión y la creación matemática de los estudiantes, sería deseable que los profesores tengan en cuenta estos aspectos al momento de diseñar sus planes de clase, al mismo tiempo, que dichas iniciativas estén complementadas con el uso de nuevas tecnologías.

7.3. SOBRE LA UNIDAD DE ENSEÑANZA

La unidad de enseñanza diseñada y usada para el estudio fue el principal medio de recolección de información, tanto sobre la práctica del profesor, como sobre la actividad de los estudiantes. En relación con el objetivo O4 de la investigación (introducción), el diseño y la experimentación de la unidad de enseñanza nos permitieron identificar su potencial en términos de:

- La conexión de la semejanza con temas relacionados como son la homotecia y el teorema de Thales, la cual permitió que los estudiantes adquirieran una comprensión global del tema, así como más y mejores formas de razonamiento y, como consecuencia, potentes herramientas de argumentación. Lo anterior viéndose reflejado en, por ejemplo, que los estudiantes pudieran demostrar los criterios para la semejanza de triángulos y pudieran abordar un rango más amplio de problemas para su resolución.

- El desarrollo secuencial y detallado del tema, que permite "llevar" al estudiante desde la noción intuitiva, pasando por las propiedades matemáticas de la definición, factor de semejanza, semejanza y homotecia, semejanza y teorema de Thales, semejanza y escalas, construcciones geométricas de figuras semejantes, semejanza de triángulos, razones de perímetros y áreas entre figuras semejantes y, finalmente, uso de la semejanza en la resolución de problemas matemáticos.
- Su organización, presentando bloques de contenido en donde, a medida que se avanza en su diseño, se percibe un grado de dificultad ascendente y la relación entre los diferentes bloques.
- La descripción, observaciones, comentarios y sugerencias metodológicas que se le plantearon al profesor.
- Los objetivos que pretende alcanzar el desarrollo de cada una de las actividades propuestas.
- La conexión entre el modelo de razonamiento de Van Hiele y los elementos de visualización tenidos en cuenta en el planteamiento de las tareas matemáticas.

Por último, los resultados del estudio permiten afirmar que es posible diseñar unidades didácticas en el tópico matemático de semejanza de figuras planas con actividades y enfoques diferentes a los que ofrecen los libros de texto actuales.

7.4. LIMITACIONES DEL TRABAJO REALIZADO

Como en todas las investigaciones de este tipo, ésta ha reflejado algunas limitaciones que principalmente están determinadas por el tiempo que requerían para su desarrollo. Las que se consideran pertinentes para comentar son:

- No haber podido realizar la evaluación de los niveles de razonamiento de Van Hiele saliéndonos del paradigma tradicional. Por ejemplo, habría sido interesante usar la metodología planteada por Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991).

- No haber incluido en la unidad de enseñanza más actividades que se apoyaran en el uso de Cabri. Aunque, como se dijo antes, no desconocemos su potencial como mediador instrumental del aprendizaje de la geometría.

- No haber explorado con mayor profundidad los motivos por los cuales los estudiantes prefieren unas estrategias de resolución de tareas matemáticas más que otras.

Una limitación inevitable de las investigaciones que involucran individuos es el control de variables externas como son los estados de ánimo, la adecuación del aula de clase con cámaras de video y camarógrafos, el nivel de conocimiento previo de los estudiantes sobre el tema, la temperatura ambiente, entre otras.

Una minuciosa revisión bibliográfica sobre los tópicos que competen para el desarrollo de esta investigación nos permitió constatar que se había dedicado poco esfuerzo, por parte de los investigadores en didáctica de la matemática, a estudiar problemas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la semejanza de figuras planas analizando de manera conjunta lo que logran los estudiantes en relación con el desarrollo profesional de sus profesores (Gualdrón, 2006). Aún así, el estudio realizado, no ha conseguido establecer una relación directa entre lo que aprenden los estudiantes y los avances correspondientes del docente. Esto resulta complicado, dado que en las entrevistas el docente reconoce muchos aspectos nuevos pero no establece relaciones directas con los aprendizajes. Por otra parte, eso requeriría un diseño en el que se mostraran al docente pedazos de video sobre la práctica y se discutiera sobre ellos. Y eso no se hizo porque algunos de los análisis sobre la práctica no se realizaron inmediatamente después de la propia práctica. No descartamos un nuevo estudio con ese objetivo.

7.5. IMPLICACIONES EDUCATIVAS

Desde la investigación realizada se ponen de manifiesto una serie de aportaciones, implicaciones y consideraciones para futuros estudios como las que se plantean a continuación:

- Proponer la aplicación del proceso llevado a cabo con el profesor como punto de partida y como modelo de formación de profesores en ejercicio en el tópico de estudio y, posiblemente, trasladable a cualquier otro tema de las matemáticas escolares. En este sentido, se considera de especial importancia el trabajo conjunto de pequeños grupos de profesores e investigadores/formadores en un proceso común de investigación sobre desarrollo profesional.

- Proponer incentivar el desarrollo de elementos de visualización como una herramienta para mejorar y facilitar los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

- Proponer la realización de estudios tendientes a lograr caracterizaciones de nivel de Van Hiele en diversos tópicos de la geometría (como los ya alcanzados para los polígonos, las isometrías, los poliedros y la semejanza), lo que permitiría complementar sus diseños instruccionales.

- El estudio realizado permite avanzar en la caracterización del desarrollo profesional del profesor de matemáticas de secundaria, identificando elementos clave en la toma de decisiones. Estos elementos clave aportan información tanto a las investigaciones que se ocupan del análisis del desarrollo como a las de modelización cognitiva, que tratan la búsqueda de modelos para explicar la práctica del profesor.

- De manera similar, el estudio permite avanzar en la caracterización del razonamiento de los estudiantes de secundaria, particularmente en edades comprendidas entre los 14-15 años, identificando elementos clave en el aprendizaje de tópicos geométricos. Dichos elementos aportan información a aquellas investigaciones que se dedican al análisis de modelos que buscan explicar cómo los estudiantes aprenden determinados objetos geométricos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AAMT (2002). *Standards for Excellence in Teaching Mathematics in Australian Schools.* Adelaide South Australia. http://www.aamt.edu.au

Adler, J. (2000). Conceptualizing resources as a theme for mathematics teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 3(3), 205-224.

Albertí, M. (2007). *Interpretación matemática situada de una práctica artesanal*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Artzt, A. (1999). A structure to enable preservice teachers of mathematics to reflect on their teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2, 143-166.

Azcárate, P. (1999). El conocimiento profesional: Naturaleza, fuentes, organización y desarrollo. *Quadrante,* 8, 111-138.

Badillo, E., Giménez, J., Vanegas, Y. (2010). Desarrollo de competencias en un contexto artístico: Construyendo significados sobre la forma. En E. Badillo, L. García, A. Marbà y M. Briceño (Eds.), *El Desarrollo de Competencias en las Clases de Ciencias y Matemáticas*. Mérida: Fondo Editorial Mario Briceño Iragorry.

Bairral, M.A. (1996). *Buscando semelhanças encontramos mais do que meras coincidências.* Tesis Maestría. Universidad Santa Úrsula, Brasil.

Bairral, M.A. (2002) *Desarrollo profesional docente en geometría: Análisis de un proceso de formación a distancia.* Tesis Doctoral. Universidad de Barcelona, España.

Ball, D. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education,* 51, 241-247.

Baquero, R. (2002). Del experimento escolar a la experiencia educativa. La transmisión educativa desde una perspectiva psicológica situacional. *Perfiles Educativos,* 24(96-97), 57-75.

Barbé, J., Bosh, M., Espinoza, L. y Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: The case of limits of functions in Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics,* 59(1-3), 235-268.

Barrat, E.S. (1953). An analysis of verbal reports of solving spatial problems as an aid in defining spatial factors. *Journal of Psychology,* 36, 17-25.

Ben-Chaim, D., Lappan, G. y Houang, R.T. (1989). The role of visualization in the middle school mathematics curriculum. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 11, 49-60.

Bishop, A.J. (1973). Use of structural apparatus and spatial ability: A possible relationship. *Research in Education,* 9, 43-49.

Bishop, A.J. (1980). Spatial abilities and mathematics education: A review. *Educational Studies in Mathematics,* 11, 257–269.

Bishop, A.J. (1983). Space and geometry. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pág. 176-203). New York: Academic Press.

Bishop, A.J. (1986). What are some obstacles to learning geometry? En R. Morris (Ed.), *Studies in Mathematical Education. Teaching of Geometry* (pág. 141-160). UNESCO.

Bishop, A.J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 11(1), 7-15.

Borko, H. (2004). Professional development and teacher learning: Mapping the terrain. *Educational Researcher*, 33(8), 3-15.

Brink, J. van den y Streefland, L. (1979). Young children (6-8) – ratio and proportion. *Educational Studies in Mathematics*, 10, 403-420.

Britt, M., Irwin, K. y Ritchie, G. (2001). Professional conversations and professional growth. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 4, 29-53.

Bromme, R. y Tillema, H. (1995). Fusing experience and theory: The structure of professional knowledge. *Learning and Instruction*, 5(4), 261-267.

Brown, S. y McIntyre, D. (1986). An investigation of teachers' professional craft knowledge. En D. McIntyre (Ed.), *Teachers´ Professional Craft Knowledge* (Stirling Educational Monographs, Nº 16). University of Stirling.

Brown, D. y Presmeg, N.C. (1993). Types of imagery by elementary and secondary school students in mathematical reasoning. En I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu y F.L. Lin (Eds.), *Proceedings of the 17th PME Conference,* 2, 137-144.

Brown, D. y Wheatley, G. (1989). Relationship between spatial ability and mathematical knowledge. En C.A. Maher, G.A. Goldin y R.B. Davis, *Proceedings of the 11th PME-NA Conference,* 1, 143-148.

Buchman, M. (1984). The priority of knowledge and understanding in teaching. *Advances in Teacher Education,* 1, 29-50.

Burger, W.F. y Shaughnessy, J.M. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17(1), 31-48.

Burger, W.F., y Shaughnessy, J.M. (1990). *Assessing children's intellectual growth in geometry*. (Final report of the Assessing Children's Intellectual Growth in Geometry Project). Corvallis, EE.UU.: Oregon State University.

Burgués, C. (2005). *La formació inicial de matemátiques per a mestres de primària: Del trencament de les concepcions prèvies a l'actuació professional.* Tesi doctoral. Universidad de Barcelona, España.

Burgués, C. y Giménez, J. (2006). Las trayectorias hipotéticas de formación inicial (TRHIFI) como instrumento para el análisis del desarrollo profesional. Análisis de un caso en la formación de futuros docentes de Primaria en matemáticas. En I. Escudero, C. Penalva y D. Barba (Eds.), *Conocimiento, Entornos de Aprendizaje y Tutorización para la Formación del Profesorado de Matemáticas: Construyendo Comunidades de Práctica* (pág. 49-67), España: Proyecto Sur.

Burgués, C. y Giménez, J. (2007). Formación de maestros en matemáticas: Un análisis desde la investigación. *La Gaceta de la RSME*, 10(1), 129-143.

Butt, R., Raymond, D. y Yamagishi, L. (1988). Autobiographic praxis: Studying the formation of teachers' knowledge. *Journal of Curriculum Theorizing*, 7(4), 87-164.

Carlsen, W. (1987). Why do you ask? The effects of science teacher subject matter knowledge on teacher questioning and classroom discourse. En *Annual Meeting of the American Educational Research Association.* EE.UU.: AERA.

Carrillo, J. (1996). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones.* Tesis doctoral. Universidad de Sevilla, España.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. y Muñoz, M.C. (2007). Un modelo cognitivo para interpretar el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. Ejemplificación en un entorno colaborativo. *Enseñanza de las Ciencias*, 25(1), 33-44.

Chazan, D. (1988). Similarity: *Exploring the understanding of a geometric concept. Technical report* (pág. 88-15). Cambridge, MA: Education Development Center.

Christiansen, B. y Walter, G. (1986). Task and activity. En B. Christiansen, A.G. Howson y M. Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education* (pág. 243–307). Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Clandinin, J. (1986). *Classroom practice. Teacher images in action.* London: Falmer Press.

Clements, D.H. (1998). *Geometric and spatial thinking in young children.* Arlington, VA, EE.UU.: National Science Foundation.

Clements, D.H. (2001). Teaching and learning geometry. En J. Kilpatrick, W.G. Martin y D. Schifter (Eds.), *Research Companion to the NCTM Standards for Mathematics.* Reston, VA, EE.UU.: NCTM.

Clements, D.H. y Battista, M.T. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pág. 420-464). New York: MacMillan Publishing Company.

Clements, D.H., Battista, M.T. y Sarama, J. (2001). Logo and geometry. *Journal for Research in Mathematics Education,* Monograph Nº 10.

Clements, M.A. (1981). Visual imagery and school mathematics (1). *For the Learning of Mathematics,* 2(3), 33-39.

Clements, M.A. (1982). Visual imagery and school mathematics (2). *For the Learning of Mathematics,* 2(2), 2-9.

Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso.* Tesis doctoral. Universidad de Huelva, España.

Cohen, L. y Manion, L. (1994). *Research methods in education.* London: Routledge.

Connors, J.M. y Serbin, L.A. (1985). Visual spatial skill: Is it important for mathematics? Can it be taught? En S.F. Chipman, L.K. Brush y D.M. Wilson (Eds.), *Women and Mathematics: Balancing the Equation* (pág. 151-174). Hillsdale, NJ, EE.UU.: Lawrence Erlbaum Associates.

Cooney, T.J. (1994). Research and teacher education: In search of common ground. *Journal for Research in Mathematics Education,* 25(6), 608-636.

Cooney, T.J. y Krainer, K. (1996). Inservice mathematics teacher education: The importance of listening. En A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education,* (pág. 1155-1185). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cooney, T.J. y Wilson, M.R. (1993). Teachers' thinking about functions: Historical and research perspectives. En T.A. Romberg, E. Fennema, y T.P. Carpenter (Eds.), *Integrating Research of the Graphical Representation of Functions* (pág. 131-158). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Corberán R. y otros (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en la ESO basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele.* Madrid: MEC.

Cordier, F. y Cordier, J. (1991). L'application du théorème de Thales. Un exemple du rôle des représentations typiques comme biais cognitifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 11(1), 45-64.

Crowley, M.L. (1987). The Van Hiele Model of the development of geometric thought. En N.C.T.M. (Ed.), *Learning and Teaching Geometry, K-12* (1987 Yearbook) (pág. 1-16). Reston, VA: NCTM.

Cröker, R. (1986). Los paradigmas funcionales de los profesores. *Revista de Investigación e Innovación Educativa,* 1, 53-63.

Darling-Hammond, L. (1998). Teacher learning that supports student learning. *Educational Leadership,* 55(5), 6-11.

Day, C. (1995). Qualitative research, professional development and the role of teacher educators: Fitness for purpose. *British Educational Research Journal,* 21, 357-369.

Day, C. (1997). Being a professional in schools and universities: Limits, purposes and possibilities for development. *British Educational Research Journal,* 23, 193-208.

Day, C. (1999). Professional development and reflective practice: Purposes, processes and partnerships. *Pedagogy, Culture and Society,* 7(2), 221-233.

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher,* 37(6), 14-20.

Denis, M. (1991). Imagery and thinking. En C. Carnoldi y M. McDaniel (Eds.), *Imagery and Cognition.* New York: Springer-Verlag.

De Villiers, M.D. (1987). *Research evidence on hierarchical thinking, teaching strategies and the Van Hiele theory: Some critical comments.* Stellenbosch, SA: RUMEUS.

Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos.* Barcelona: Paidós (texto original publicado en 1933).

Díaz Barriga, F. (2003). Cognición situada y estrategias para el aprendizaje significativo. *Revista Electrónica de Investigación Educativa,* 5(2). http://redie.ens.uabc.mx/vol5no2/contenido-arceo.html

Díaz Barriga, F. y Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista* (2ª Edición). México: McGraw Hill.

Dörfler, W. (1991). Meaning: Image schemata and protocols'. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME Conference,* 1, 17-32.

Duperret, J.C. (1996). Por un Thales dinámico. En E. Barbin y R. Douady (Coord.), *La Enseñanza de las Matemáticas: Puntos de Referencia entre los Saberes, los Programas y la Práctica.* Grenoble: IREM.

Duval, R. (1996). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Traducción realizada en el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN (México), de "Registres de représentation sémiotique et functionnemente cognitif de la pensée", *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* 5, 37-65 (1993).

Eisenhardt, K.M. (1989). Building theories from case study research. *Academy of Management Review*, 14(4), 532-550.

Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: A study of practical knowledge.* London: Croom-Helm.

Elmore, R. y Burney, D. (1999). Investing in teacher learning: Staff development and instructional improvement. En L. Darling-Hammond y G. Sykes (Eds.), *Teaching as the Learning Profession: Handbook of Policy and Practice* (pág. 263–291). San Francisco: Jossey-Bass.

Engeström, Y. y Cole, M. (1997). Situated cognition: In search of an agenda. En D. Kirshner y J.A. Whitson (Eds.), *Situated Cognition: Social, Semiotic and Psychological Perspectives* (pág. 301-309). London: Lawrence Erlbaum Associates.

English, L. (1997). Analogies, metaphors, and images: Vehicles for mathematical reasoning. En L. English (Ed.), *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images* (pág. 3-18). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Eraut, M. (1994). *Developing professional knowledge and competence.* London: Falmer Press.

Eraut, M. (1995). Developing professional knowledge within a client-centred orientation. En T.R. Guskey y M. Huberman (Eds.), *Professional Development in Education: New Paradigms and Practices.* New York: Teachers College Press.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. En M.C. Witrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching.* New York: MacMillan Publishing Company.

Erickson, F. (1989). Métodos cualitativos de investigación sobre la enseñanza. En M.C. Witrock (Ed.), *La Investigación de la Enseñanza, II. Métodos Cualitativos y de Observación.* Barcelona: Paidós Educador- M.E.C.

Erickson, F. (1992). Ethnographic microanalysis of interaction. En M.D. LeCompte, W.L. Millroy y J. Preissle (Eds.), *The Handbook of Qualitative Research in Education* (pág. 201-223). New York: Academic Press.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press.

Escudero, I. (2003). *La relación entre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de enseñanza secundaria y su práctica. La semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje.* Tesis doctoral. Universidad de Sevilla, España.

Escudero, I. (2005). Un análisis del tratamiento de la semejanza en los documentos oficiales y textos escolares de matemáticas en la segunda mitad del siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias,* 25(3), 379-392.

Escudero, I. y Sánchez, V. (1999). The relationship between professional knowledge and teaching practice: The case of similarity. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME Conference,* 2, 305-312.

Escudero, I. y Sánchez, V. (2007). How do domains of knowledge integrate into mathematics teachers' practice? *Journal of Mathematical Behavior,* 26, 312-327.

Fennema, E. y Loef, M. (1992). Teachers' knowledge and its impact. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pág. 147-163). New York: MacMillan Publishing Company.

Fennema, E. y Sherman, J. (1977). Sex-related differences in mathematics achievement, spatial visualization and affective factors. *American Educational Research Journal,* 14, 51-71.

Fennema, E. y Tartre, L. (1985). The use of spatial visualization in mathematics by girls and boys. *Journal for Research in Mathematics Education,* 16(3), 184-206.

Fernández, A. (2001). *Precursores del razonamiento proporcional: Un estudio con alumnos de primaria.* Tesis doctoral. Universidad de Valencia, España.

Ferrández, A. (1989a). El formador y su formación. *Herramientas*, 3, 39-53.

Ferrández, A. (1989b). Formación de formadores: El modelo contextual-crítico. *Herramientas,* 4, 35-45.

Fiol, M.L. (1992). *Marco de desarrollo del razonamiento proporcional en alumnos de 12 a 14 años: Visualización y computación.* Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Flores, P. (1998). Formación inicial de profesores de matemáticas como profesionales reflexivos. *UNO Revista de Didáctica de la Matemática,* 17, 37-48.

Flores, P. (2004). Profesores de matemáticas reflexivos: Formación y cuestiones de investigación. En E. Castro y E. De la Torre (Eds.), *Investigación en Educación Matemática VIII. Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* Coruña, Universidad de A Coruña: 26-41.

Franke, M.L., Kazemi, E. y Battey, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice in mathematics. En F.K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pág. 225-256). Charlotte, NC: Information Age Publishers.

Freudenthal, H. (1983a). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1983b). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas (textos seleccionados).* (Traducción parcial al español de L. Puig). México, D.F.: Departamento de Matemática Educativa-CINVESTAV (2001).

Freudenthal, H. (1983c). En todos los niveles: ¡Geometría! En *Actas de las III Jornadas Sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.* Zaragoza: España.

Fullan, M. (1993). *Change forces: Probing the depths of educational reform.* London: Falmer Press.

Fuys, D., Geddes, D. y Tischler, R. (1988). The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education*, Monograph nº 3.

Galton, F. (1883). *Inquiries into human faculty and its development.* New York: MacMillan Publishing Company.

García, M. (1997). *El conocimiento profesional del profesor de matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje*. Sevilla: GIEM-KRONOS.

Gavilán, J. (2005). *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva.* Tesis doctoral. Universidad de Sevilla, España.

Gavilán, J., García, M.M. y Llinares, S. (2007). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 25(2), 157-170.

Gil, F. y Rico, L. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias,* 21(1), 27-47.

Giménez, J. (1991). *Innovación metodológica de la didáctica especial del número racional positivo. Diagnosis cognitiva y desarrollo metodológico*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Giménez, J. (Coord.) y otros (1999). *El discurs del professorat a la classe de Matemàtiques.* Barcelona: Departament de Didáctica de les CCEE i de la Matemàtica. Universitat de Barcelona.

Gimeno, J. y Pérez, A.I. (1993). *Comprender y transformar la enseñanza.* Barcelona: Morata.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.

Goetz, J.P. y LeCompte, M.D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa.* Madrid: Morata.

Goldin, G.A. (1982). Mathematical language and problem solving. *Visible Language,* 16(3), 221-238.

Goldin, G.A. (1987). Cognitive representational systems for mathematical problem solving. En C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pág. 125-145). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Goldin, G. (1998). Representations and the psychology of mathematics education (2). *Journal of Mathematical Behaviour,* 17(2), 135-165.

Goldin, G. y Kaput, J.J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. En L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin y B. Greer (Eds.), *Theories of Mathematical Learning* (pág. 397- 430). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Grossman, P. (1990). *The making of a teacher. Teacher knowledge and teacher education.* New York: Teacher College Press.

Grossman, P, Wilson, S. y Shulman, L. (1989). Teachers of substance: Subject matter knowledge for teaching. En M. Reynolds (Ed.), *Knowledge Base for the Beginning Teacher* (pág. 60-72). New York: Pergamon Press.

Grupo Beta (1997). *Proporcionalidad geométrica y semejanza.* (Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje). Madrid: Editorial Síntesis.

Gualdrón, É. (1997). *Una propuesta didáctica para la enseñanza del cálculo en el año previo al ingreso a carreras de ciencias e ingenierías.* Tesis de maestría. Universidad Industrial de Santander, Colombia.

Gualdrón, É. (2006). *Los procesos de aprendizaje de la semejanza por estudiantes de 9º grado.* Memoria de investigación. Universidad de Valencia, España.

Gualdrón, É. (2008a). Improving the ways of reasoning in similarity in 14 and 15 years old students. En O. Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of de PME 20th and PME-NA 32nd Conference,* 1, 266.

Gualdrón, É. (2008b). Conexión entre la semejanza, la homotecia y el teorema de Thales: Una experiencia con estudiantes de 14-15 años. En *Actas del Noveno Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, Colombia.

Gualdrón, É. y Gutiérrez, A. (2006). Estrategias correctas y erróneas en tareas relacionadas con la semejanza. En *Actas del Décimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (Grupos de investigación), España.

Gualdrón, É. y Gutiérrez, A. (2007). Una aproximación a los descriptores de nivel de Van Hiele para la semejanza. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI. Décimo primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* Tenerife, Universidad de la Laguna: 369-380.

Gudmundsdottir, S. y Shulman, L. (1987). Pedagogical content knowledge in social studies. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 31(2), 59-70.

Guillén, G. (1997). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje.* Tesis doctoral. Universidad de Valencia, España.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference*, 1, 3-19.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 20(2-3), 27-46.

Gutiérrez, A., Jaime, A. y Fortuny, J.M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education,* 22(3), 237-251.

Hargreaves, D. (1994). The new professionalism: The synthesis of professional and institutional development. *Teaching and Teacher Education*, 10(4), 423-438.

Hart, K.M. y otros. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16.* London: John Murray Ltd.

Hart, K.M. (1984). *Ratio: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics projects.* London: NFER-Nelson.

Hart, K.M. (1988). Ratio and proportion. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pág. 198-219). Reston, VA, EE.UU.: NCTM y Lawrence Erlbaum Associates.

Hart, K.M. y otros. (1989). *Children's mathematical frameworks 8-13: A study of classroom teaching.* Windsor, G.B.: NFER-Nelson.

Hashweh, M. (1987). Effects of subject matter knowledge in the teaching of biology and physics. *Teaching and Teacher Education,* 3(2), 109-120.

Hatton, N. y Smith, D. (1995). Reflection in teacher education: Towards definition and implementation. *Teaching and Teaching Education,* 11(1), 33-49.

Hegarty, M. y Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology,* 91, 684-689.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition* (pág. 70-95). Cambridge, G.B.: Cambridge U.P.

Hoffer, A. (1977). *Mathematics resource project: Geometry and visualization.* Palo Alto, EE.UU.: Creative Publications.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *The Mathematics Teacher,* 74(1), 11-18.

Huerta, P.M. (1999). Los niveles de Van Hiele y la taxonomía SOLO: Un análisis comparado, una integración necesaria. *Enseñanza de las Ciencias,* 17(2), 291-309.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento.* Tesis doctoral. Universidad de Valencia, España.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares y M.V. Sánchez (Eds.), *Teoría y Práctica en Educación Matemática* (pág. 295-384). Sevilla: Alfar.

Kaput, J. y Maxwell-West, M. (1994). Missing value proportion problems: Factors affecting proportional reasoning patterns. En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pág. 237-287). New York: SUNY Press.

Karplus, R., Adi, H. y Lawson, A.E. (1981). Intellectual development beyond elementary school: Proportional, probabilistic, and correlational reasoning. *School Science and Mathematics,* 80, 673-683.

Karplus, R., Karplus, E.F., Formisano, M. y Paulsen, A-CH. (1977). A survey of proportional reasoning and control of variables in seven countries. *Journal of Research in Science Teaching,* 14, 411-417.

Karplus, R. y Peterson, R.W. (1970). Intellectual development beyond elementary school II: Ratio, a survey. *School Science and Mathematics,* 70(9), 813-820.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E.K. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of Mathematics Concepts and Processes* (pág. 45-90). New York: Academic Press.

Kelchtermans, G. (1995). A utilizaçäo da biografia na formaçao de professores. *Aprender,* 28, 5-20.

Kosslyn, S.M. (1980). *Image and mind.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Kosslyn, S.M. (1990). Mental imagery. En D.N. Osherson; S.M. Kosslyn y J.M. Hollerbach (Eds.), *An Invitation to Cognitive Science: Visual Cognition and Action* (Vol. 2) (pág. 73-97). Cambridge, MA: MIT Press.

Krutetskii, V.A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children.* Chicago: University of Chicago Press.

Lamon, S.J. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education,* 24(1), 41-61.

Lean, G. y Clements, M.A. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics,* 12(3), 267-299.

LeCompte, M.D. y Preissle, J. (1993). *Ethnography and qualitative design in educational research* (2nd Edition). New York: Academic Press.

Lehrer, R., Strom, D. y Confrey, J. (2002). Grounding metaphors and inscriptional resonance: Children's emerging understanding of mathematical similarity. *Cognition and Instruction,* 20(3), 359-398.

Leinhardt, G. (1989). Math lessons: A contrast of novice and expert competence. *Journal for Research in Mathematics Education,* 20(1), 52-75.

Leinhardt, G. (1992). What research on learning tell us about teaching. *Educational Leadership,* 49(7), 20-25.

Leinhardt, G. y Greeno, J.G. (1986). The cognitive skill of teaching. *Journal of Educational Psychology,* 78(2), 75-95.

Leinhardt, G. y Smith, D.A. (1985). Expertise in mathematics instruction: Subject matter knowledge. *Journal of Educational Psychology,* 77(3), 247-271.

Lemonidis, C. (1990). *Conception, réalisation et résultats d'une expérience d'enseignement de l'homothétie.* Tesis doctoral. Université Louis Pasteur, France.

Lemonidis, C. (1991). Analyse et réalisation d'une expérience d'enseignement de l'homothétie. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 11(23), 295-324.

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1989). Proportional reasoning. En M. Behr y J. Hiebert (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pág. 93-118). Reston, VA: NCTM.

Lo, J.-J., Cox, D., y Mingus, T. (2006). A conceptual-based curricular analysis of the concept of similarity. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz y A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th PME-NA Conference,* 2, 221-228.

Lowrie, T. y Kay, R. (2001). Relationship between visual and nonvisual solution methods and difficulty in elementary mathematics. *Journal of Educational Research,* 94(4), 248-255.

Llinares, S. (1994). La enseñanza de las matemáticas. Perspectivas, tareas y organización de la actividad. En L. Sántaló, S. Llinares, V. Sánchez y otros (Eds.), *La Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Intermedia* (pág. 249-295). Madrid: Rialp.

Llinares, S. (1996). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: Conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. En J.P. Ponte y otros (Eds.), *Desenvolvimento Profissional des Professores de Matemática de Formaçao* (pág. 47-82). Lisboa: Sociedad de Portuguesa de Ciencias de Educaçao.

Llinares, S. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *UNO Revista de Didáctica de la Matemática,* 17, 51-63.

Llinares, S. (1999). Preservice elementary teachers and learning to teach mathematics. Relationship among context, task and cognitive activity. En N. Ellerton (Ed.), *Mathematics Teacher Development: International Perspectives* (pág. 107-119). West Perth, Australia: Meridian Press.

Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pág. 429-459). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Martin, T., Soucy, S., Wallace, M. y Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics,* 60(1), 95-124.

Mason, M.M. y Schell, V. (1988). Geometric understanding and misconceptions among preservice and inservise mathematics teachers. En M. Behr, C. Lacampagne y M. Montague (Eds.), *Proceedings of the 10th PME-NA Conference,* 1, 290-296.

Mathison, S. (1988). Why triangulate? *Educational Researcher,* 17(2), 13-17.

Maxwell, J.A. (1998). Designing a qualitative study. En L. Bickman y D.S. Rog (Eds.), *Handbook of Applied Social Research Method* (pág. 69-100). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Mayberry, J. (1983). The Van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for Research in Mathematics Education,* 14(1), 58-69.

McDiarmid, G., Ball, D. y Anderson, Ch. (1989). Why staying one chapter ahead doesn't really work: Subject-specific pedagogy. En M. Reynolds (Ed.), *Knowledge Base for the Beginning Teacher* (pág. 193-205). New York: Pergamon Press.

McGee, M.G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin* 86(5), 889-918.

McNamara, D. (1990). Research on teachers' thinking: Its contribution to educating student teachers to think critically. *Journal of Education for Teaching,* 16(2), 147-160.

M.E.N. (1998). *Lineamientos curriculares: Matemáticas.* Bogotá: Libros y Libros S.A.

M.E.N. (2003). *Estándares básicos de matemáticas y lenguaje.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Meredith, A. (1995). Terry's learning some limitations of Shulman's pedagogical content knowledge. *Cambridge Journal of Education,* 25(2), 175-187.

Mesquita, A. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behavior,* 17(2), 183-195.

Mewborn, D.S. (1999). Reflective thinking among preservice elementary mathematics teacher. *Journal for Research in Mathematics Education,* 30, 316-341.

Miller, K. y Baker, D. (2001). Mathematics and science as social practices: Investigating primary student teacher responses to a critical epistemology, *Ways of Knowing Journal,* 1(1), 39-46.

Mistretta, R.M. (2000). Enhancing geometric reasoning. *Adolescence,* 35(138), 365-379.

Mortimer, E. F. y Scott, P. (2002). Atividade discursiva nas salas de aula de ciências: Una ferramenta sociocultural para analisar e planejar o ensino. *Investigações em Ensino de Ciências,* 7(3), 283-306.

Moses, B.E. (1977). *The nature of spatial ability and its relationship to mathematical problem solving.* Tesis doctoral. EE.UU.: Indiana University.

N.C.T.M. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Nespor, J. (1987). The role of beliefs in the practice of teaching. *Journal of Curriculum Studies.* 19, 317-328.

Ogborn, J., Kress, G., Martins, I. y McGillcuddy, K. (1996). *Explaining science in the classroom.* Buckingham: Open University Press.

Owens, K. (1993). *Spatial thinking processes employed by primary school students engaged in mathematical problem solving.* Tesis doctoral. Deakin University, Australia.

Owens, K. y Clements, M.A. (1998). Representations in spatial problem solving in the classroom. *Journal of Mathematical Behavior,* 17(2), 197-218.

Paivio, A. (1969). Mental imagery in associative learning and memory. *Psychological Review,* 76(3), 241-263.

Paivio, A. (1970). On the functional significance of imagery. *Psychological Bulletin,* 76(6), 385-392.

Paivio, A. (1971). *Imagery and verbal processes.* New York: Holt, Rinehart y Winston.

Pajares, M.F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research,* 62(3), 307-332.

Parsons, R.R. Stack, R. y Breen (1998). Writing and computers: Increasing geometric content based knowledge using the Van Hiele model. En R. Wood, C. Hoag y G. Zalud (Eds.), *Proceedings of the 6th Annual Conference Curriculum and Instruction Research Symposium,* 1, 77-93.

Patton, M. (1983). *Qualitative evaluation methods*. London: Sage Publications.

Pegg, J. y Davey, G. (1998). Interpreting student understanding in geometry: A synthesis of two models. En R. Lehrer y D. Chazan (Eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space* (pág. 109-135). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Pehkonen, E. y Törner, G. (1996). Mathematical beliefs and different aspects of their meaning. *International Review on Mathematical Education (ZDM),* 28, 101-108.

Perry, P., Guacaneme, E., Andrade, L. y Fernández, F. (2003). *Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: un hueso duro de roer.* Bogotá: Una Empresa Docente.

Pfaff, N. (1997-98). Le rôle de l'analyse des taches pour un enseignant. *Petit x,* 48, 23-35.

Piaget, J. y Inhelder, B. (1948). *La représentation de l'espace chez l'enfant.* Paris: P.U.F.

Piaget, J. y Inhelder, B. (1971). *Mental imagery in the child.* London: Routledge y Kegan Paul.

Pittalis, M., Mousoulides, N. y Christou, C. (2007). Spatial ability as a predictor of students' performance in geometry. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the 5th CERME Conference*, 1072-1081.

Plasencia, I. (2000). *Análisis del papel de las imágenes en la actividad matemática. Un estudio de casos.* Tesis doctoral. Universidad de la Laguna, España.

Ponte, J.P. (1992). Concepções dos professores de matemática e processos de formação. En J.P. Ponte (Ed.), *Educação Matemática: Temas de Investigação* (pág. 185-239). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J.P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En J.P. Ponte y J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th PME Conference,* 1, 195-210.

Ponte, J.P. (1999). Teachers' beliefs and conceptions as a fundamental topic in teacher education. En K. Krainer y F. Goffree (Eds.), *On Research in Teacher Education: From a Study of Teaching Practices to Issues in Teacher Education* (pág. 43-50). Osnabrück: Forschungsintitut für Mathematikdidaktik.

Ponte, J.P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pág. 461-494). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Presmeg, N.C. (1985). *The role of visually mediated processes in high school mathematics: A classroom investigation.* Tesis doctoral. Cambridge University, England.

Presmeg, N.C. (1986a). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6(3), 42-46.

Presmeg, N.C. (1986b). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 297-311.

Presmeg, N.C. (1997). Generalization using imagery in mathematics. En L.D. English (Ed.). *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images* (pág. 299-312). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Presmeg, N.C. (1998). Metaphoric and metonymic signification in mathematics. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17(1), 25-32.

Presmeg, N.C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pág. 205-235). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Pylyshyn, Z. (1973). What the mind's eye tell the mind's brain: A critique of mental imagery. *Psychological Bulletin*, 80(1), 1-24.

Pylyshyn, Z. (1981). The imagery debate: Analog media versus tacit knowledge. *Psychological Review*, 86(4), 383-394.

Ray, D. (2000). *Developing students´ understanding of similar figures: A perceptual approach.* Tesis doctoral. Louisiana State University, EE.UU.

Reynolds, A. (1991). Getting to the core of the apple: A theoretical view of the knowledge base of teaching. En *Annual Meeting of the American Educational Research Association*. EE.UU.: AERA.

Reynolds, A. (1992). What is competent beginning teaching? A review of the literature. *Review of Educational Research*, 62(1), 1-35.

Rokeach, M. (1968). *Beliefs, attitudes, and values: A theory of organization and change.* San Francisco: Jossey-Bass.

Romberg, T.A., Lamon, S. y Zarinnia, A. (1988). *The essential features of the mathematical domain: Ratio and proportion.* Madison: University of Wisconsin.

Rowland, T., Martyn, S., Barber, P. y Heal, C. (2001) Investigating the mathematics subject matter knowledge of pre-service elementary school teachers. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 23rd PME Conference*, 4, 121-128.

Sáez A. (1999). *De la representació a la realitat. Propostes d'anàlisi del discurs mediàtic.* Barcelona: Dèria.

Scherer, P. y Steinbring, H. (2006). Noticing children's learning processes-teachers jointly reflect on their own classroom interaction for improving mathematics teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 157-185.

Schoenfeld, A.H. (2000). Purposes and methods of research in mathematics education. *Notices of the American Mathematical Society*, 47(6), 641-649.

Schön, D.A. (1983). *The reflective practitioner. How professionals think in action.* London: Temple Smith.

Schön, D.A. (1992). *Formación de profesionales reflexivos.* Barcelona: Paidós.

Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Numbers Concepts and Operations in the Middle Grades* (pág. 41-52). Reston, VA: NCTM.

Scribner, S. (2002). La mente en acción: Una aproximación funcional al pensamiento. En M. Cole, Y. Engeström y O. Vásquez (Eds.), *Mente, Cultura y Actividad.* Traducción del original inglés de 1997 por Carlos Eduardo González Hernández. Oxford University Press.

Shepard, R.N. (1978). The mental image. *American Psychologist,* 33, 125-137.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher,* 15(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review,* 57(1), 1-22.

Shulman, L. (1992). Ways of seeing, ways of knowing, ways of teaching, ways of learning about teaching. *Journal of Curriculum Studies,* 1, 393-396.

Shulman, L. y Grossman, P.L. (1988). *Knowledge growth in teaching: A final report to the Spencer Foundation*. Standford, CA: Standford University.

Shulman, L. y Shulman, J. (2004). How and what teachers learn: A shifting perspective. *Journal of Curriculum Studies,* 36, 257-271.

Shulman, L. y Sykes, G. (1986). *A national board for teaching? In search of a bold standard. A report for the task force on teaching as a profession.* New York: Carnegie Corporation.

Simon, S. y Brown, M. (1996). Teacher beliefs and practices in primary mathematics. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference,* 1, 200. Smyth, J. (1991). Una pedagogía crítica de la práctica en el aula. *Revista de Educación,* 294, 275-300.

Sowder, J.T. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F.K. Lester, Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pag. 157-223). Charlote, NC: NCTM.

Stenhouse, L. (1984). *Investigación y desarrollo del currículum.* Madrid: Morata.

Stodolsky, S.S. (1988). *The subject matters. Classroom activity in math and social studies.* Chicago: University of Chicago Press.

Suwarsono, S. (1982). *Visual imagery in the mathematical thinking of seventh grade students.* Tesis doctoral. Monash University, Australia.

Swoboda, E., y Tocki, J. (2002). How to prepare prospective teachers to teach mathematics: Some remarks. En *Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)* (pág. 1-10), Greece.

Sykes, J. (1999). Library resource sharing and discovery: Catalogues for the future. *Sconul Newsletter,* 17 (Summer), 25-30.

Tartre, L.A. (1990). Spatial orientation skill and mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(3), 216-229.

Taylor, S.L. y Bogdan, R. (1986). *Introducción a los métodos cualitativos en investigación.* Barcelona: Paidós.

Tejada, J. (1999). Acerca de las competencias profesionales (1). *Herramientas,* 56, 20-30.

Thomas, N. y Mulligan, J. (1995). Dynamic imagery in children's representations of number. *Mathematics Education Research Journal,* 7 (1), 5-25.

Thomas, N., Mulligan, J. y Goldin, G.A. (2002). Children's representation and structural development of the counting sequence 1-100. *Journal of Mathematical Behavior,* 21, 117-133.

Thompson, A. (1992). Teacher's beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En D. A. Grouws, (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* (pág. 127-146). New York: Macmillan.

Ticha, M. y Hospesova, A. (2006). Qualified pedagogical reflection as a way to improve mathematics education. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 9, 129-156.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry.* Columbus, EE.UU.: ERIC.

Van den Brink, J. y Streefland, L. (1979). Young children (6-8) - Ratio and proportion. *Educational Studies in Mathematics,* 10, 403-420.

Van Garderen, D. (2006). Spatial visualization, visual imagery, and mathematical problem solving of students with varying abilities. *Journal of Learning Disabilities,* 39(6), 496-506.

Van Garderen, D. y Montague, M. (2003). Visual-spatial representation, mathematical problem solving, and students of varying abilities. *Learning Disabilities Research and Practice,* 18(4), 246-254.

Van Hiele-Geldof, D. (1957). *The didactics of geometry in the lowest class of Secondary School.* Tesis doctoral. University of Utrecht, Holanda. (Traducción al inglés en Fuys, Geddes y Tischler, 1984, pág.1-206).

Van Hiele, P.M. (1957). *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría).* Tesis doctoral. University of Utrecht, Holanda. (Traducción al español). http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/aprengeom/archivos2/VanHiele57.pdf

Van Manen, M. (1998). *El tacto pedagógico.* Barcelona: Morata.

Vasco, C.E. (1998). Dynamic geometry in the Colombian school curriculum. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI study* (pág. 243-248). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of Mathematics Concepts and Processes* (pág. 127-174). New York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Numbers Concepts and Operations in the Middle Grades* (pág. 141-161). Reston, VA: NCTM.

Wheatley, G.H. (1997). Reasoning with images in mathematical activity. En L.D. English (Ed.), *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images* (pág. 281-297). Hillsdale, NJ, EE.UU.: Lawrence Erlbaum Associates.

White, K.D., Ashton, R. y Brown, R.M. (1977). The measurement of imagery vividness: Normative data and their relationship to sex, age, and modality differences, *British Journal of Psychology*, 68, 203-211.

Wilson, S. y Berne, J. (1999). Teacher learning and the acquisition of professional knowledge: An examination of research on contemporary professional development. *Review of Research in Education*, 24, 173-209.

Wilson, S., Shulman, L. y Richert, A. (1987). 150 different ways of knowing: Representation of knowledge in teaching. En J. Calderhead (Ed.), *Exploring Teachers' Thinking* (pág. 104-124). London: Cassell Publisher.

Wirszup, I. (1976). Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry. En J.L. Martin y D.A. Bradbard (Eds.), *Space and Geometry* (pág. 75-97). Columbus, EE.UU.: ERIC.

Wood, T. (2001).Learning to teach mathematics differently: Reflection matters. En M. Van Den Heuvel (Ed.), *Proceedings of the 25th PME Conference*, 4, 431-438.

Wragg, E., Bennett, S. y Carre, C. (1989). Primary teachers and the National Curriculum, *Research Papers in Education*, 4(3), 17-37.

Yakimanskaya, I.S. (1991). *The development of spatial thinking in schoolchildren* ("Soviet Studies in Mathematics Education" v. 3). Reston, VA, EE.UU.: NCTM.

Yin, R.K. (1989). *Case study research: Design and methods, applied social research methods series.* Newbury Park, CA, EE.UU.: Sage Publications.

ANEXO 1.

LA UNIDAD DE ENSEÑANZA

ACTIVIDADES 1-4

Objetivos de aprendizaje:

- Comprender la noción intuitiva de semejanza "misma forma" a partir de la visualización y análisis de las diferentes situaciones planteadas.
- Comprender la noción intuitiva de no semejanza "ser parecido" a partir de la visualización y análisis de las diferentes situaciones planteadas.
- Familiarizarse con el lenguaje propio del primer nivel de razonamiento de Van Hiele.
- Promover la participación y la discusión como formas de comprensión de los conceptos y propiedades de las figuras que tienen la misma forma (semejantes), de las figuras parecidas (no semejantes), y de los procesos de razonamiento de Van Hiele y visualización.
- Inducir la necesidad de la justificación como medio de razonamiento y de convicción en la resolución de situaciones matemáticas y de la vida diaria.

Las primeras cuatro actividades están pensadas para desarrollarse en la *fase de información (Nivel 1)* en donde el profesor conversa con sus estudiantes, les proporciona información para que así conozcan el campo de estudio que se va a iniciar, los tipos de situaciones que se van a resolver, los métodos y materiales que se utilizarán y el lenguaje específico del primer nivel de razonamiento de Van Hiele. También es la oportunidad para que el profesor identifique los conocimientos previos que tienen sus estudiantes sobre el nuevo campo de estudio y su nivel de razonamiento en el mismo.

En esta fase debería quedar claro para los estudiantes que la semejanza de figuras planas puede verse, en principio, como figuras que preservan la forma, más no necesariamente el tamaño; también, que la no semejanza está relacionada con la noción intuitiva de ser parecido. Después, en el siguiente nivel, los estudiantes deberán comprender que la semejanza de figuras planas ya no se decide por su apariencia física (únicamente), sino que hay unas condiciones matemáticas que deben cumplirse.

Una característica común en estas primeras cuatro actividades es que a los estudiantes se les presentan los dibujos o fotografías de las figuras sobre los cuales deben responder a las preguntas planteadas, mientras que en las posteriores (no en todas), ya se les da la oportunidad para que dibujen sus propias figuras. El fin de esta situación es promover que los estudiantes hagan uso de sus habilidades de visualización en los dos contextos.

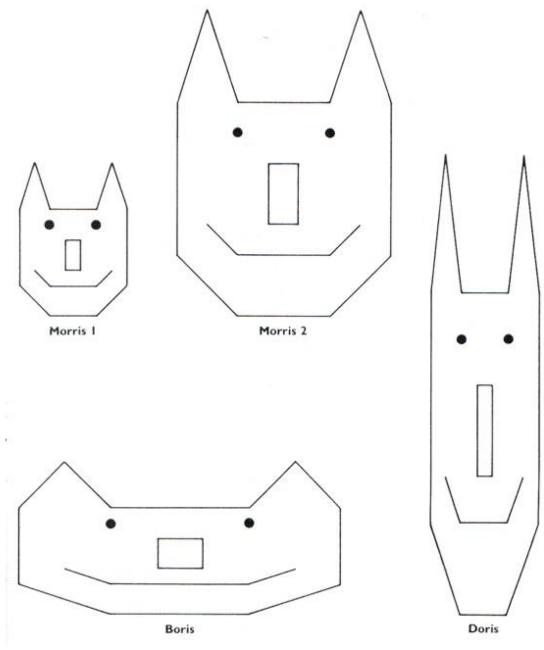
En estas actividades aparecen diferentes contextos en los que hay objetos con la "misma forma" (es decir, semejantes) y objetos "parecidos" (es decir, no semejantes). Una sugerencia para el profesor es que se discuta con los estudiantes sobre por qué unos objetos tienen la misma forma y otros no; de esta manera, por ejemplo, se puede sentar una base para que ellos entiendan por qué no todos los rectángulos tienen la "misma forma" y qué significado tiene esta expresión en matemáticas (realmente, todos los rectángulos tienen la misma forma, porque todos tienen forma de rectángulo). Es importante que los estudiantes verbalicen estas reflexiones y sus criterios de comparación.

ACTIVIDAD 1. (Nivel 1- Fase de información)

Tiempo estimado para su desarrollo: 15 minutos.

Objetivos de la actividad

- Hacer explícitas las concepciones intuitivas previas sobre tener la “misma forma” y “ser parecido”.
- Reconocer e identificar figuras planas que tienen la misma forma y figuras planas que son parecidas.

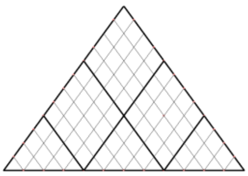
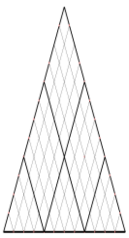
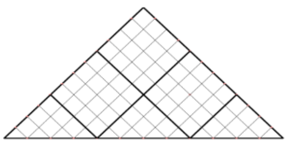
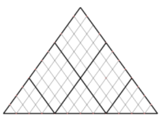
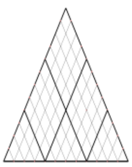
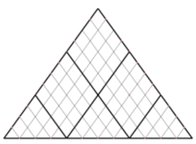
ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
En el dibujo aparecen las máscaras de Morris I, Morris II, Boris y Doris. ¿Cuáles de ellas tienen la “misma forma” y cuáles, simplemente, “se parecen”? Justifique su respuesta. 	Es una actividad que permite a los estudiantes ser conscientes y reflexionar sobre términos cotidianos, como lo es la “misma forma” y “ser parecido”, y contextualizarlos en la matemática. Es importante que el profesor promueva en los estudiantes la verbalización de estas reflexiones y los criterios de comparación. Los estudiantes pueden resolver esta actividad planteando que todas las máscaras tienen la misma forma (“orejas”, “ojos”, “nariz”, etc.). El profesor debe insistir a los estudiantes, aunque en cierto sentido lo es, en que realmente Morris 1 y Morris 2 mantienen la forma (no se desforman), mientras que Boris y Doris se desforman (es decir, se parecen). Algunas de las expresiones que los estudiantes pueden utilizar para justificar que las máscaras de Boris y Doris no tienen la misma forma es, por ejemplo, que la de Boris se contrae y la de Doris se alarga respecto a las de Morris 1 y 2.

ACTIVIDAD 2. (Nivel 1- Fase de información)

Tiempo estimado para su desarrollo: 15 minutos.

Objetivos de la actividad

- Reflexionar sobre las nociones intuitivas “misma forma” y “ser parecido”.
- Reconocer e identificar figuras planas que tienen la misma forma y figuras planas que son parecidas.

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
La siguiente figura muestra una representación de la vista frontal de la pirámide en la entrada al museo del Louvre en París. a) Seleccione la o las figuras que tienen la “misma forma” a la representación dada. b) Seleccione la o las figuras que “se parecen” a la representación dada. Justifique sus respuestas.    Fig. 1 Fig. 2  Fig. 3   Fig. 5 Fig. 4	Es una actividad que permite a los estudiantes seguir reflexionando sobre los criterios de comparación la “misma forma” y “ser parecido”. Nuevamente, se espera que el profesor promueva en los estudiantes la verbalización de estas reflexiones y los criterios de comparación. Se debe seguir insistiendo en que a pesar de que aunque, aparentemente, todas las representaciones se parecen (tienen forma triangular), sólo tienen la misma forma aquellas que no se deforman respecto de la dada (fig. 3 y fig. 4). A las demás (fig. 1, fig. 2 y fig. 5) se les dice que se parecen a la dada.

ACTIVIDAD 3. (Nivel 1- Fase de información)

Tiempo estimado para su desarrollo: 15 minutos.

Objetivos de la actividad

- Reflexionar y consolidar las nociones intuitivas “misma forma” y “ser parecido”.
- Reconocer e identificar figuras planas que tienen la misma forma y figuras planas que son parecidas.

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
La siguiente foto muestra la torre Eiffel. ¿Cuáles de las demás fotos tienen la “misma forma” y cuáles, simplemente, “se parecen” a la dada? Justifique sus respuestas.    Foto 1 Foto 2    Foto 3 Foto 4 Foto 5	Es una actividad que permite a los estudiantes seguir reflexionando (y consolidar) los criterios de comparación la “misma forma” y “ser parecido”. Nuevamente, se espera que el profesor promueva en los estudiantes la verbalización de estas reflexiones y los criterios de comparación. Se debe seguir insistiendo en que a pesar de que aunque, aparentemente, todas las fotos muestran la torre (se parecen), sólo tienen la misma forma aquellas que no se deforman respecto de la dada (Fotos 3 y 4). A las demás (fotos 1,2 y 5) se les dice que se parecen a la dada.

ACTIVIDAD 4. (Nivel 1- Fase de información)

Tiempo estimado para su desarrollo: 15 minutos.

Objetivos de la actividad

- Reflexionar, consolidar y plantear las nociones intuitivas “misma forma” y “ser parecido”.
- Reconocer e identificar figuras planas que tienen la misma forma y figuras planas que son parecidas.

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
La fachada de un edificio tiene el aspecto que se muestra en la foto. a) ¿En cuáles de las fotos la fachada tiene la “misma forma” a la dada? b) ¿En cuáles de las fotos la fachada “se parece” a la dada? c) Plantee, con sus propias palabras, que entiende por figuras que: • tienen la “misma forma” • “se parecen”. Justifique sus respuestas.    Foto 1 Foto 2   Foto 3 Foto 4	Con esta actividad se espera que los estudiantes escriban, con sus propias palabras, lo que entienden por los criterios de comparación la “misma forma” y “ser parecido”. Hasta aquí, se espera que los estudiantes hayan consolidado los criterios de comparación “misma forma” y “ser parecido”. Esto permitirá, eso se espera, por ejemplo, que los estudiantes no piensen que todos los rectángulos tienen la misma forma y que por lo tanto todos son semejantes.

ACTIVIDADES 5-9

Objetivos de aprendizaje:

- Familiarizarse con el lenguaje propio del segundo nivel de razonamiento de Van Hiele.
- Comprender que la semejanza es una relación que se establece entre dos o más figuras planas cualesquiera.
- Identificar elementos homólogos (lados) y elementos correspondientes (vértices y ángulos) en figuras semejantes.
- Promover la participación y la discusión como formas de comprensión de los conceptos y propiedades de las figuras que tienen la misma forma (semejantes), de las figuras parecidas (no semejantes), y de los procesos de razonamiento de Van Hiele y visualización.
- Inducir la necesidad de la justificación como medio de razonamiento y de convicción en la resolución de situaciones matemáticas y de la vida diaria.

Este bloque de actividades está pensado para desarrollarse en la *fase de información (Nivel 2)* en donde el profesor conversa con sus estudiantes, les proporciona información para que así conozcan el campo de estudio que se va a iniciar, los tipos de situaciones que se van a resolver, los métodos y materiales que se utilizarán y el lenguaje específico del segundo nivel de razonamiento de Van Hiele. También es la oportunidad para que el profesor identifique los conocimientos previos que tienen sus estudiantes sobre el nuevo campo de estudio y su nivel de razonamiento en el mismo.

En este nivel, los estudiantes deberán comprender que la semejanza de figuras planas ya no se decide por su apariencia física (únicamente), sino que hay unas condiciones matemáticas que deben cumplirse. Es decir, no basta con decir que dos figuras son semejantes porque tienen la misma forma, sino que deben verificarse unas condiciones matemáticas.

Una característica común en estas actividades es que a los estudiantes se les presenta los dibujos de las figuras sobre los cuales deben responder a las preguntas planteadas, mientras que en las posteriores (no en todas), ya se les da la oportunidad para que dibujen sus propias figuras. El fin de esta situación es promover que los estudiantes hagan uso de sus habilidades de visualización en los dos contextos.

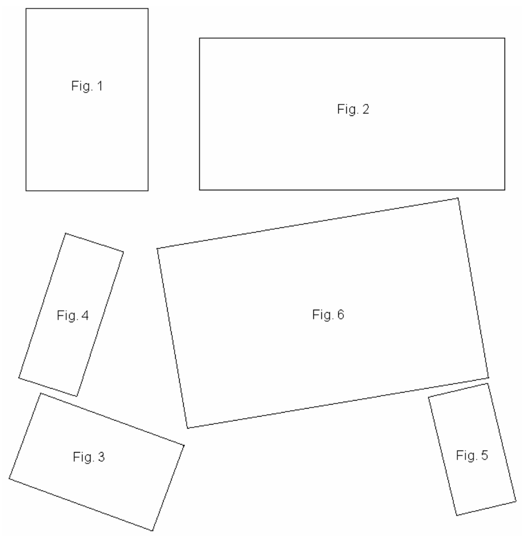
Puede presentarse el caso en el cual algún estudiante, al realizar la toma de medidas en las figuras y compararlas, decida la semejanza utilizando la estrategia aditiva (estrategia errónea). Es importante que el profesor aproveche esta situación y aclare que la proporcionalidad, entre las medidas de los lados de las figuras, está relacionada con una estrategia multiplicativa y no, con una estrategia aditiva. Cualquier otra estrategia errónea, de igual manera, debe ser aprovechada por el profesor para aclarar, desde el principio del desarrollo del tema, este tipo de situaciones.

ACTIVIDAD 5. (Nivel 2- Fase de información)

Tiempo estimado para su desarrollo: 20 minutos.

Objetivos de la actividad

- Comprender que no todos los rectángulos tienen la misma forma a pesar de que la percepción insinúe lo contrario.
- Reconocer e identificar figuras planas que tienen la misma forma.

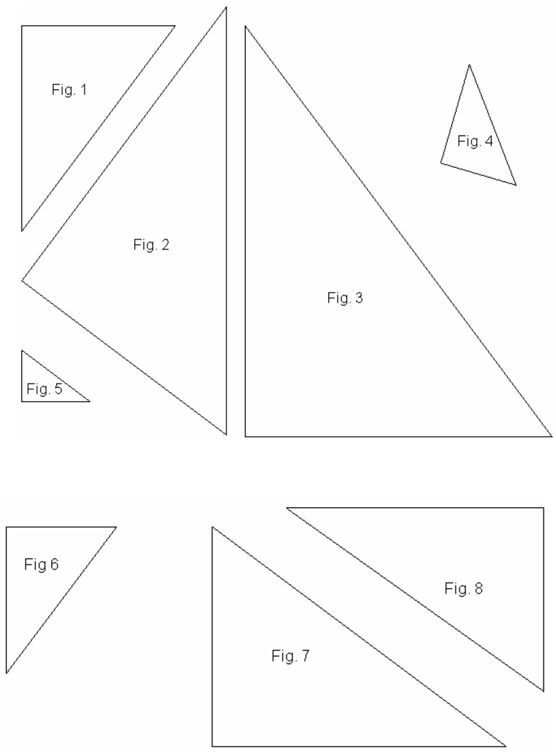
ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
¿Cuáles de los siguientes rectángulos tienen la misma forma? Justifique su elección. 	Es una actividad que puede ser resuelta por los estudiantes básicamente de las siguientes maneras. Una forma es seleccionando los rectángulos que tengan la misma forma usando, exclusivamente, visualización. Puede haber estudiantes que hagan una primera selección utilizando visualización y, posteriormente, confirmen su elección tomando medidas de las longitudes de los lados y de los ángulos para luego compararlas. Otra forma de solución, por parte de los estudiantes, es utilizando únicamente herramientas de comparación de medidas de longitudes de los lados y comparación de medidas de ángulos. Una última manera de posible solución es la de recortar los rectángulos y superponerlos (desde un vértice común) para luego trazar, a partir de dicho vértice, segmentos de recta que pasen por los vértices opuestos. Dichos segmentos de recta que pasen por más de tres vértices, mostrarán grupos de rectángulos que tienen la misma forma. Esta forma de solución puede ser aprovechada por el profesor para ir introduciendo la relación entre la semejanza (en este momento de la clase la "misma forma") y las figuras en disposición homotética. Es importante que el profesor insista a los estudiantes en que a pesar de que los rectángulos, aparentemente, tienen la misma forma, realmente no es así. Incluso lo puede hacer dibujando dos rectángulos en el tablero uno, muy largo y poca anchura y otro, con anchura y alto similares.

ACTIVIDAD 6. (Nivel 2- Fase de información)

Tiempo estimado para su desarrollo: 20 minutos.

Objetivos de la actividad

- Comprender que no todos los triángulos tienen la misma forma a pesar de que la percepción insinúe lo contrario.
- Reconocer e identificar figuras planas que tienen la misma forma.

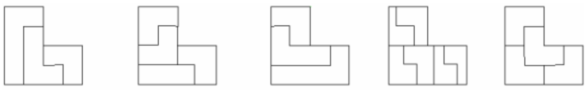
ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
¿Cuáles de los siguientes triángulos tienen la misma forma? Justifique su elección. 	Es una actividad que puede ser resuelta por los estudiantes básicamente de las siguientes maneras. Una forma es seleccionando los triángulos que tengan la misma forma usando, exclusivamente, visualización. Puede haber estudiantes que hagan una primera selección utilizando visualización y, posteriormente, confirmen su elección tomando medidas de las longitudes de los lados y de los ángulos para luego compararlas. Otra forma de solución, por parte de los estudiantes, es utilizando únicamente herramientas de comparación de medidas de longitudes de los lados y comparación de medidas de ángulos. Una última manera, de posible solución, es la de recortar los triángulos y superponerlos (desde un vértice común) para luego observar si el tercer lado de los triángulos que coinciden, teniendo en cuenta los lados que forman el ángulo del vértice común, es paralelo. Estos triángulos así dispuestos tienen la misma forma. Esta forma de solución puede ser aprovechada por el profesor para ir introduciendo la relación entre la semejanza (en este momento de la clase la “misma forma”) y las figuras en disposición homotética.

ACTIVIDAD 7. (Nivel 2- Fase de información)

Tiempo estimado para su desarrollo: 20 minutos.

Objetivos de la actividad

- Reconocer e identificar figuras que tienen la misma forma en mosaicos y comprender que esta relación no es exclusiva de figuras separadas.

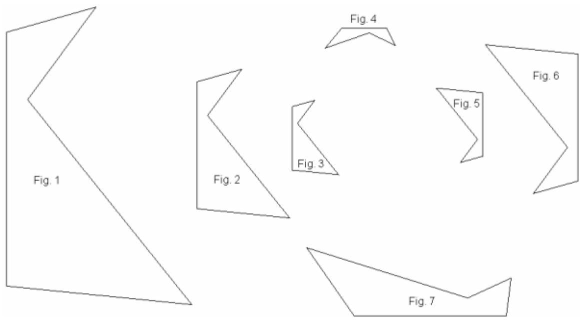
ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
¿Cuál de las siguientes figuras está dividida en figuras más pequeñas que tengan la misma forma que la figura grande? Justifique su elección.  Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5	La idea con esta actividad es que los estudiantes se den cuenta que no es necesario que las figuras estén separadas para establecer la relación de semejanza entre ellas. Se espera que los estudiantes en esta actividad ya no decidan la semejanza de figuras a la ligera, por ejemplo, que decidan que las figuras 1, 3, 4 y 5 es la respuesta ya que la figura grande tiene forma de "L" y las partes, en que se dividió cada una, también. Si no es así, el profesor debe seguir insistiendo a los estudiantes en que hay que fijarse en otros aspectos para decidir la semejanza. Esto permitirá, además, ir "llevando" a los estudiantes a que concluyan las condiciones suficientes y necesarias para la semejanza de figuras. Los estudiantes pueden intentar resolver esta actividad recortando las figuritas, en que se dividió cada una de las figuras, he intentar hacer superposición como en las actividades anteriores para dar la respuesta.

ACTIVIDAD 8. (Nivel 2- Fase de información)

Tiempo estimado para su desarrollo: 20 minutos.

Objetivos de la actividad

- Comprender que la relación tener la "misma forma" que se establece entre dos o más figuras planas no solamente se presenta en figuras geométricas tradicionales.
- Permitir al estudiante que establezca vínculo entre la semejanza de figuras planas y la homotecia.
- Reconocer e identificar figuras planas que tienen la misma forma.

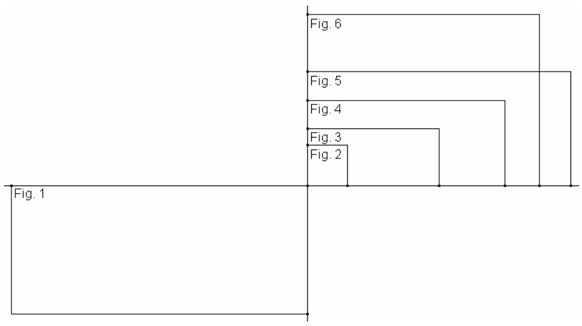
ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
¿Cuáles de las siguientes figuras NO tiene la misma forma que las demás? Justifique su elección.  	Es una actividad que puede ser resuelta por los estudiantes básicamente de las siguientes maneras. Una forma es seleccionando las figuras que tengan la misma forma usando, exclusivamente, visualización. Puede haber estudiantes que hagan una primera selección utilizando visualización y, posteriormente, confirmen su elección tomando medidas de las longitudes de los lados y de los ángulos para luego compararlas. Otra forma de solución, por parte de los estudiantes, es utilizando únicamente herramientas de comparación de medidas de longitudes de los lados y comparación de medidas de ángulos. También puede haber estudiantes que "vean" las figuras 1, 2, 3, 5 y 6 como que están en disposición homotética (por ejemplo, uniendo con segmentos de recta los vértices correspondientes y notar que se cortan, todos los segmentos, en un punto común) y que por tanto éstas son semejantes y las restantes (figuras 4 y 7) no lo son. Una última manera de posible solución es la de recortar las figuras, superponerlas (desde un vértice común) y observar, en las figuras, que coinciden teniendo en cuenta los lados que forman el ángulo del vértice común, si los lados restantes son paralelos. Estas figuras así dispuestas tienen la misma forma, las demás no la tienen. Las dos últimas formas de solución pueden ser aprovechadas por el profesor para ir introduciendo la relación entre la semejanza (en este momento de la clase, la "misma forma") y las figuras en disposición homotética.

ACTIVIDAD 9. (Nivel 2- Fase de información)

Tiempo estimado para su desarrollo: 20 minutos.

Objetivos de la actividad

- Consolidar la noción intuitiva de la misma forma en figuras planas.
- Reconocer e identificar figuras planas que tienen la misma forma.
- Aplicar ideas aprendidas en las anteriores actividades.

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
¿Cuáles de las siguientes figuras tienen la misma forma? Justifique su elección. 	Es la última actividad antes de plantear la que servirá para que los estudiantes planteen las condiciones suficientes y necesarias para la semejanza de figuras planas. Esta es una actividad que puede ser resuelta por los estudiantes básicamente de las siguientes maneras. Una forma es seleccionando las figuras que tengan la misma forma usando, exclusivamente, visualización. Puede haber estudiantes que hagan una primera selección utilizando visualización y, posteriormente, confirmen su elección tomando medidas de las longitudes de los lados y de los ángulos para luego compararlas. Otra forma de solución, por parte de los estudiantes, es utilizando únicamente herramientas de comparación de medidas de longitudes de los lados y comparación de medidas de ángulos. También puede haber estudiantes que "vean" las figuras 1, 3, 4 y 5 como que están en disposición homotética (por ejemplo, uniendo con un segmento de recta los vértices correspondientes) y que por tanto éstas son semejantes y las restantes (figuras 2 y 6) no lo son. Esta forma de solución puede ser aprovechada por el profesor para ir introduciendo la relación entre la semejanza (en este momento de la clase, la "misma forma") y las figuras en disposición homotética.

ACTIVIDADES 10-12

Objetivos de aprendizaje:

- Determinar las condiciones suficientes y necesarias para la semejanza de figuras planas.
- Familiarizarse con el lenguaje propio del segundo nivel de razonamiento de Van Hiele.
- Utilizar las condiciones suficientes y necesarias en la determinación de figuras semejantes.
- Comprender la manera más adecuada de justificar, en este nivel de razonamiento, la semejanza de figuras planas.
- Promover la participación y la discusión como formas de comprensión de los conceptos y propiedades de las figuras que son semejantes, y de los procesos de razonamiento de Van Hiele y visualización.
- Utilizar isometrías como herramienta de construcción o demostración en las diferentes situaciones presentadas.
- Comprender la necesidad de la justificación como medio de razonar y de convicción en la resolución de situaciones matemáticas y de la vida diaria.
- Observar, analizar, comprender y justificar los casos semejanza de figuras planas que se deciden con condición suficiente a través de la exploración y visualización de los casos presentados.

Este bloque de actividades está pensado para desarrollarse en la *fase de orientación dirigida (Nivel 2).* Las tareas que se proponen están diseñadas para obtener respuestas específicas y para que los estudiantes descubran y aprendan los componentes básicos de la red de conocimientos que deben formar. Se espera que estas tareas "lleven" directamente a los resultados y propiedades que los estudiantes deben aprender.

El planteamiento de las actividades, entre otros aspectos, también permite que los estudiantes exhiban y apliquen sus conocimientos relacionados con las isometrías del plano (traslación, giro y simetría) en la resolución de las diferentes situaciones planteadas.

Es el momento de insistir, con mayor frecuencia, a los estudiantes en la importancia de la exploración y visualización de las diferentes posibilidades que se puedan presentar en la resolución de las situaciones planteadas.

Se espera que con la actividad 11 los estudiantes terminen de consolidar la noción de semejanza de figuras planas y, de esta manera, la puedan aplicar con mayor seguridad en la resolución de las diferentes situaciones que se seguirán planteando.

ACTIVIDAD 10. (Nivel 2- Fase de orientación dirigida)

Tiempo estimado para su desarrollo: 20 minutos.

Objetivos de la actividad

- Definir la semejanza de figuras planas a partir del trabajo previo.
- Aplicar las ideas aprendidas, en las anteriores actividades, en la justificación de sus respuestas.

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
Teniendo en cuenta que dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma más no necesariamente el mismo tamaño ¿Cuáles considera que son las características matemáticas que se deben cumplir para poder decir que dos figuras son semejantes? Justifique su respuesta y dé tres ejemplos gráficos de semejanza de figuras planas.	Puede haber estudiantes que planteen que dos figuras son semejantes si tienen la misma forma. Es decir, estos estudiantes se han quedado en un primer nivel de razonamiento de Van Hiele. Es aquí donde el profesor debe insistir en que ya no es suficiente con fijarse en la apariencia física de las figuras para decidir la semejanza de ellas, si no que además de esto, hay condiciones matemáticas que se deben cumplir. Puede ocurrir que algunos estudiantes utilicen las isometrías del plano como herramienta en la construcción de ejemplos o en la justificación de su respuesta. Si esto ocurre puede ser un buen momento para que el profesor integre los dos temas: isometrías del plano y semejanza de figuras planas. Se sugiere que el profesor esté pendiente de los ejemplos que planteen los estudiantes para animarlos a que realicen figuras de diversos tipos. Además de las ya trabajadas en las actividades anteriores (rectángulos, triángulos, figuras cóncavas) dibujen otras, por ejemplo, figuras regulares, figuras convexas, etc.

ACTIVIDAD 11. (Nivel 2- Fase de orientación dirigida)

Tiempo estimado para su desarrollo: 25 minutos.

Objetivos de la actividad

- Aplicar las ideas aprendidas, en las anteriores actividades, en la justificación de sus respuestas.
- Analizar, comprender y justificar la semejanza, de algunos casos típicos, de figuras planas.

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
Complete la siguiente tabla utilizando una "X" donde corresponda. Debe argumentar, para cada ítem, su respuesta. Puede utilizar argumentos de todo tipo (gráficos, analíticos, verbales, etc.).	El profesor puede aprovechar esta actividad para insistir a los estudiantes en las diferentes formas para justificar la respuesta. Es de particular interés observar y analizar el tipo de representación que usan los estudiantes en sus justificaciones. Por tal motivo es imprescindible que el profesor esté atento a que los estudiantes no sólo marquen la respuesta que consideren, sino que además la justifiquen.

Ítem	¿Son semejantes?	Siempre	A veces	Nunca	No lo se
1	Dos cuadrados				
2	Dos triángulos isósceles				
3	Dos triángulos congruentes				
4	Un rectángulo y un cuadrado				
5	Un rectángulo y un triángulo				
6	Dos rectángulos				
7	Dos triángulos equiláteros				
8	Dos cuadriláteros, cada uno teniendo todos lo lados de longitud 1				
9	Dos triángulos rectángulos				
10	Dos hexágonos regulares				

Argumentaciones:

Esta es una actividad que permite estudiar la semejanza de (algunas) figuras planas sin tener su dibujo previamente. La intención es que los estudiantes se animen (o los anime el profesor) a realizar los dibujos de las 10 figuras planteadas como parte de su razonamiento.

Se sugiere que el profesor esté atento al tipo de dibujos que realizan los estudiantes. Esto con el fin de motivarlos a que planteen dibujos diferentes a los típicos en posición estándar, con el objeto de avanzar en la eliminación de estereotipos que son muy habituales en la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Además, se puede sugerir a los estudiantes que apliquen sus conocimientos relacionados con las isometrías del plano en las argumentaciones que deben presentar.

El profesor también puede aprovechar la actividad para hablar de los casos de semejanza de figuras planas que se pueden decidir con condición suficiente (por ejemplo, los rectángulos), a través de la exploración y visualización de los casos presentados y de los que el profesor considere.

Es importante que el profesor plantee a los estudiantes explorar y visualizar las posibilidades que se puedan presentar en la solución de los ítems planteados.

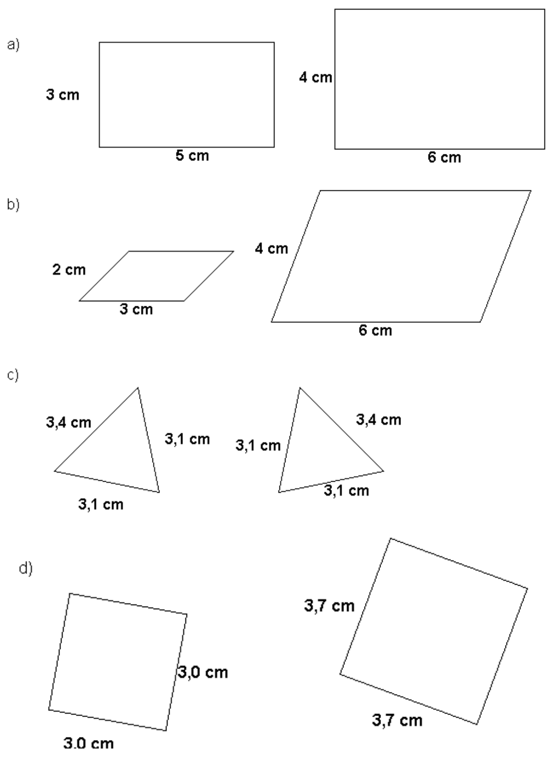
ACTIVIDAD 12. (Nivel 2- Fase de orientación dirigida)

Tiempo estimado para su desarrollo: 20 minutos.

Objetivos de la actividad

- Aplicar las ideas aprendidas, en las anteriores actividades, en la justificación de sus respuestas.
- Utilizar las condiciones suficientes y necesarias en la determinación de figuras semejantes.
- Observar, analizar y determinar si los estudiantes utilizan alguna estrategia errónea en la resolución de la situación planteada.

<table>
<tr><th>ACTIVIDAD</th><th>DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS</th></tr>
<tr><td>Determine cuáles de los siguientes pares de polígonos son semejantes. Justifique, en cada caso, porque sí o porque no lo son.


</td><td>Esta es una actividad que permite observar, analizar y determinar si los estudiantes utilizan alguna estrategia errónea en la resolución de la situación planteada. Es importante que el profesor aclare e insista a los estudiantes en lo erróneo de las estrategias que se presenten.

La intensión con esta actividad es que los estudiantes perciban que ya no es suficiente la apariencia física de las figuras para decidir la semejanza, sino que se hace necesario verificar las condiciones matemáticas que deben cumplirse.

Se han planteado diversos casos de semejanza y no semejanza. Por ejemplo, en a) se puede presentar la estrategia aditiva, en b) lados proporcionales pero ángulos no congruentes, en c) figuras congruentes, y en d) figuras semejantes no congruentes.

Es importante que el profesor plantee a los estudiantes explorar y visualizar las posibilidades que se puedan presentar en la solución de los ítems planteados.</td></tr>
</table>

ACTIVIDADES 13-15

Objetivos de aprendizaje:

- Determinar y clasificar los factores de semejanza de figuras planas por su efecto al aplicarlos a una figura.
- Utilizar los factores de semejanza en la construcción de figuras semejantes.
- Familiarizarse con el lenguaje propio del segundo nivel de razonamiento de Van Hiele.
- Promover la participación y la discusión como formas de comprensión de los conceptos y propiedades de las figuras que son semejantes, y de los procesos de razonamiento de Van Hiele y visualización.
- Comprender la necesidad de la justificación como medio de razonar y de convicción en la solución de situaciones matemáticas y de la vida diaria.
- Analizar y comprender que siempre que sea necesaria una ampliación no es sólo duplicar y que, cuando sea necesario reducir una figura no es sólo reducir a la mitad.

Este bloque de actividades está pensado para desarrollarse en la *fase de orientación dirigida (Nivel 2).* Las tareas que se proponen están diseñadas para obtener respuestas específicas y para que los estudiantes descubran y aprendan los componentes básicos de la red de conocimientos que deben formar. Se espera que estas tareas "lleven" directamente a los resultados y propiedades que los estudiantes deben aprender.

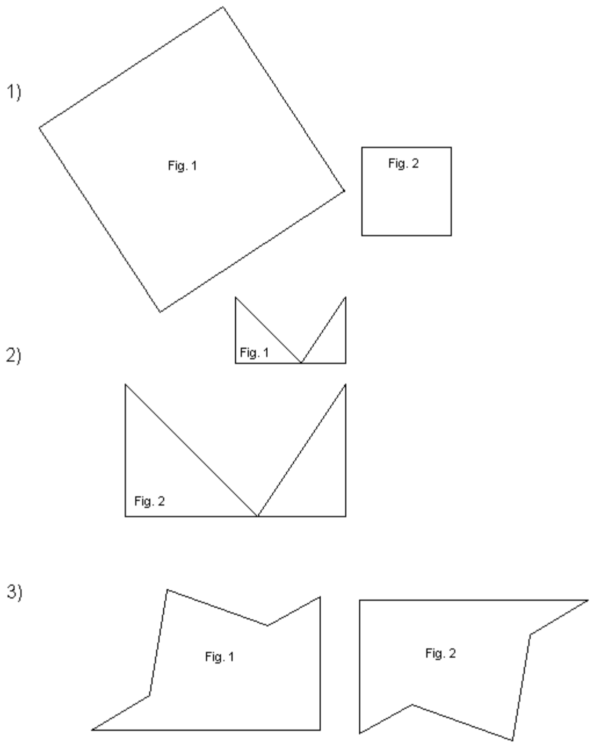
Una de las estrategias erróneas más comunes, denominada "doble y mitad", consiste en que los estudiantes creen que cuando se pide ampliar una figura, duplican, y cuando se pide reducir una figura, dividen entre 2. En este bloque de actividades, especialmente, es importante que el profesor esté atento a aclarar esta situación en caso de que se presente.

ACTIVIDAD 13. (Nivel 2- Fase de orientación dirigida)

Tiempo estimado para su desarrollo: 15 minutos.

Objetivos de la actividad

- Reconocer y comprender cuándo una figura es una ampliación de otra ó cuándo una figura es reducción de otra.
- Determinar el factor de semejanza dadas una figura y su ampliación ó dadas una figura y su reducción ó dadas una figura y su idéntica.
- Comprender que la congruencia de figuras planas es un caso particular de semejanza de figuras planas.

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
La figura 2 respecto de la figura 1, ¿fue ampliada o reducida? ¿Cuál es el valor que se usó para esa ampliación o reducción? 	La idea fundamental es que los estudiantes reconozcan e identifiquen cuándo una figura fue ampliada, reducida o no se modifica. Esto relacionado con los factores de semejanza. Es decir, que al aplicarle a una figura un factor de semejanza menor que 1, la figura se reduce, que al aplicarle a una figura un factor de semejanza mayor que 1, la figura se amplía, y que al aplicarle a una figura el factor de semejanza 1, la figura no se modifica. Otro aspecto que contempla esta actividad es que el profesor induzca a los estudiantes a que comprendan cómo determinar el factor de semejanza dadas dos figuras semejantes. Se sugiere que el profesor haga caer en la cuenta a los estudiantes en que la congruencia es un caso particular de la semejanza. Por ejemplo, utilizando el tercer dibujo de la actividad.

ACTIVIDAD 14. (Nivel 2- Fase de orientación dirigida)

Tiempo estimado para su desarrollo: 10 minutos.

Objetivos de la actividad

- Aplicar las ideas aprendidas, en las anteriores actividades, en la justificación de sus respuestas.
- Decidir la semejanza y determinar el factor de semejanza en una situación matemática planteada.

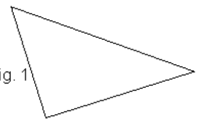
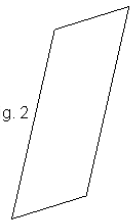
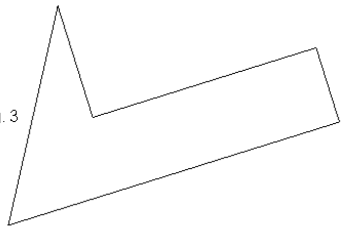
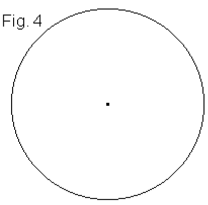
ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
Las dimensiones de un rectángulo son 2 cms y 3 cms. **1)** ¿Es semejante este rectángulo a otro de dimensiones 14 cms y 21 cms? Si son semejantes, ¿cuál es el factor de semejanza? Justifique sus respuestas. **2)** ¿Es semejante este rectángulo a otro de dimensiones 4 cms y 5 cms? Si son semejantes, ¿cuál es el factor de semejanza? Justifique sus respuestas.	Una de las diferencias de esta actividad y la anterior es que aquí no se presenta el dibujo de las figuras. La idea es motivar a los estudiantes a que se apoyen en un dibujo como medio importante para visualizar y comprender mejor la situación planteada. Es importante insistir a los estudiantes en la exploración y visualización de las diferentes posibilidades que se puedan presentar. La actividad permite, nuevamente, observar, analizar y determinar si los estudiantes aún utilizan la "estrategia aditiva" (estrategia errónea) en la solución de las situaciones planteadas. De presentarse, es importante que el profesor haga "ver" a los estudiantes lo erróneo de la estrategia. Por ejemplo, mostrando casos con figuras diferentes a rectángulos. En esta actividad se ponen a prueba ideas aprendidas en anteriores actividades, esto permite que el profesor se percate del nivel de evolución de los aprendizajes. Por ejemplo, el estudiante ya debería tener claro que hay casos en los que la semejanza se puede decidir con condición suficiente. Es el caso de los rectángulos. Otro aspecto que se consolida y se verifica su comprensión, con esta actividad, es el que tiene que ver con los factores de semejanza.

ACTIVIDAD 15. (Nivel 2- Fase de orientación dirigida)

Tiempo estimado para su desarrollo: 15 minutos.

Objetivos de la actividad

- Aplicar las ideas aprendidas, en las anteriores actividades, en la justificación de sus respuestas.
- Comprender que no sólo se decide la semejanza de figuras planas, sino que también se pueden construir figuras semejantes a otra.

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
Dibuje al frente de cada figura otra que sea semejante a ella. Describa el proceso usado en cada caso. Fig. 1  Fig. 2  Fig. 3  Fig. 4 	La actividad permite que los estudiantes comprendan que no sólo se decide la semejanza entre figuras dadas, sino que también se pueden construir figuras semejantes a una dada. En esta actividad se ponen a prueba ideas aprendidas en anteriores actividades, esto permite que el profesor se percate del nivel de evolución de los aprendizajes. Por ejemplo, el estudiante ya debería tener claro que la estrategia aditiva es errónea, o que las figuras que va a construir deben cumplir unas condiciones matemáticas. Otro aspecto que se consolida y se verifica su comprensión es el que tiene que ver con los factores de semejanza, en la medida en que los estudiantes los utilicen en la construcción de figuras semejantes. Es importante insistir a los estudiantes en la exploración y visualización de las diferentes posibilidades que se puedan presentar. Por ejemplo, en el uso de diferentes factores de semejanza y dibujo de figuras semejantes en diferentes posiciones.

ACTIVIDADES 16-18

Objetivos de aprendizaje:

- Recordar algunos aspectos que tienen que ver con la homotecia de figuras planas que serán necesarios para establecer su relación con la semejanza de figuras planas.
- Comprender que la homotecia de figuras planas es una herramienta para la justificación y construcción de figuras semejantes.
- Familiarizarse con el lenguaje propio del segundo nivel de razonamiento de Van Hiele.
- Promover la participación y la discusión como formas de comprensión de los conceptos y propiedades de las figuras que son semejantes, y de los procesos de razonamiento de Van Hiele y visualización.
- Comprender la necesidad de la justificación como medio de razonar y de convicción en la resolución de situaciones matemáticas y en la resolución de situaciones planteadas en contextos cotidianos no matematizados.

Este bloque de actividades está pensado para desarrollarse en la *fase de orientación dirigida (Nivel 2).* Las tareas que se proponen están diseñadas para obtener respuestas específicas y para que los estudiantes descubran y aprendan los componentes básicos de la red de conocimientos que deben formar. Se espera que estas tareas "lleven" directamente a los resultados y propiedades que los estudiantes deben aprender.

Dada la estrecha relación entre la homotecia y la semejanza de figuras planas, se contempla, en este bloque de actividades, repasar los principales aspectos del concepto de homotecia de figuras planas. La idea fundamental es que los estudiantes comprendan que la homotecia de figuras planas se convierte en una herramienta para la justificación y construcción de figuras semejantes, principalmente en el caso de los triángulos.

La semejanza como objeto matemático puede ser vista, principalmente, como *relación intrafigural* y como *transformación geométrica vista como útil*. Dentro de la relación intrafigural encontramos dos posibilidades: Figuras que se encuentran formando parte de configuraciones de Thales y figuras que no se encuentran formando parte de configuraciones de Thales. Dentro de esta segunda, encontramos figuras que se encuentran en disposición homotética y figuras separadas. En este bloque de actividades abordaremos lo que tiene que ver con las figuras en disposición homotética y figuras vistas en aspecto de homotecia. En el siguiente diagrama se resume globalmente la manera de aproximarse al concepto.

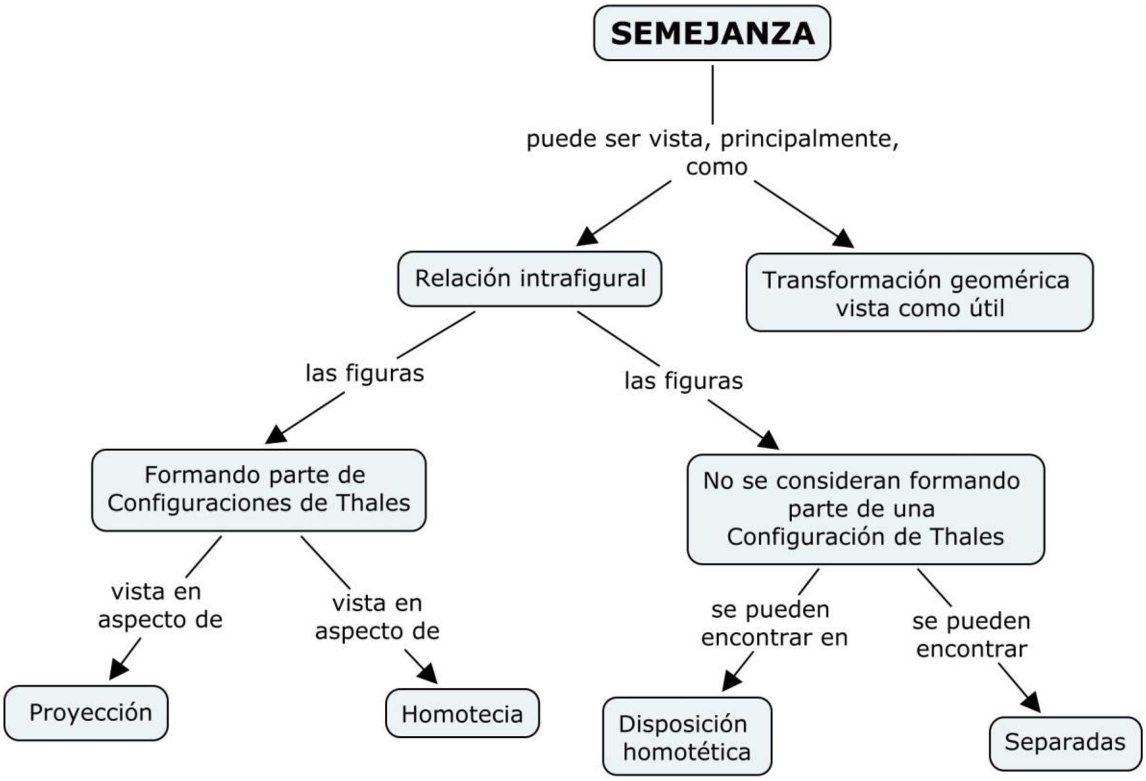


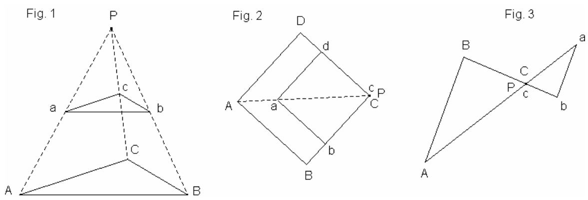
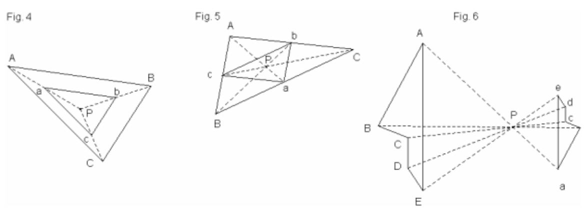
Diagrama 1. Principales aspectos que involucra la aproximación al concepto de semejanza.

ACTIVIDAD 16. (Nivel 2- Fase de orientación dirigida)

Tiempo estimado para su desarrollo: 20 minutos.

Objetivos de la actividad

- Recordar algunos aspectos relacionados con la homotecia de figuras planas, tales como el centro de homotecia, razón de homotecia y algunas de sus propiedades.
- Relacionar la homotecia de figuras planas con la semejanza de figuras planas.

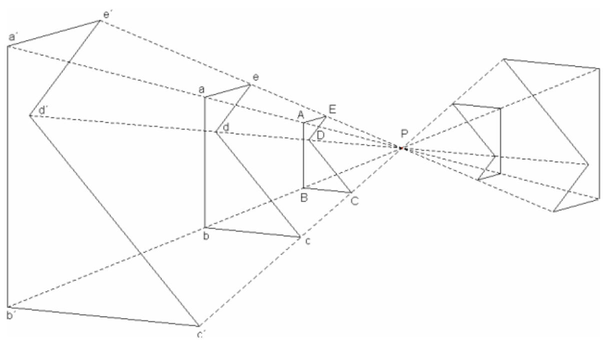
ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
1) ¿Qué caracteriza a cada par de polígonos, en cada una de las figuras? **2)** ¿Qué características comunes tienen todas las figuras?   **3)** ¿Por qué al punto P se le llama centro de homotecia?	La actividad permite que los estudiantes recuerden algunos aspectos relacionados con la homotecia de figuras planas. Por ejemplo, la terminología propia del tema (centro de homotecia, razón de homotecia, etc.). Un aspecto que es importante resaltar en la actividad es el efecto que producen las razones de homotecia mayores que 1, las mayores que 0 pero menores que 1, e iguales a 1. Combinándolos con diferentes posiciones del centro de homotecia y razones de semejanza positivas y negativas. Se sugiere que el profesor plantee a los estudiantes explorar y visualizar los diferentes casos que se presentan. Particularmente, las figuras que involucran triángulos (figuras 1, 3, 4 y 5). Una de las conclusiones a la que los estudiantes podrían llegar es que los lados homólogos, en los polígonos de cada figura, son paralelos. En todo caso, estaría bien que los estudiantes verbalizaran las diferentes maneras que conocen de verificar si las figuras son homotéticas y que luego (en actividades posteriores) vean cuáles pueden usar y cuáles no. El profesor no debe darles soluciones (por lo menos no al principio, sino después de que ellos lo hayan intentado), sino fomentar que ellos mismos mejoren sus argumentos.

ACTIVIDAD 17. (Nivel 2- Fase de orientación dirigida)

Tiempo estimado para su desarrollo: 15 minutos.

Objetivos de la actividad

- Consolidar algunos aspectos relacionados con la homotecia de figuras planas, tales como el centro de homotecia, razón de homotecia y algunas de sus propiedades.

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
1) Coloque nombre a cada uno de los vértices de los dos polígonos de la derecha, teniendo en cuenta los vértices del polígono ABCDE. Justifique sus respuestas. **2)** Las características identificadas en la actividad anterior, ¿se aprecian en las diferentes relaciones que se establecen entre el polígono ABCDE y los demás? Justifique sus respuestas. 	La actividad permite que los estudiantes consoliden algunos aspectos relacionados con la homotecia de figuras planas. Por ejemplo, la terminología propia del tema (centro de homotecia, razón de homotecia, etc.). Un aspecto que es importante que se consolide con la actividad es el efecto que producen las razones de homotecia mayores que 1, las mayores que 0 pero menores que 1, e iguales a 1. Combinándolos con diferentes posiciones del centro de homotecia y razones de semejanza positivos y negativos. Las conclusiones obtenidas en la actividad anterior deben ser confirmadas por los estudiantes (ayudados por el profesor).

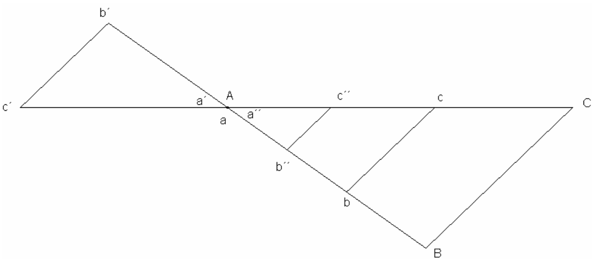
ACTIVIDAD 18. (Nivel 2- Fase de orientación dirigida)

Tiempo estimado para su desarrollo: 15 minutos.

Objetivos de la actividad

- Analizar y comprender que los triángulos, así dispuestos, son siempre semejantes.

<table>
<tr><th>ACTIVIDAD</th><th>DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS</th></tr>
<tr><td>Las características identificadas en la actividad Nº 16, ¿se aprecian en las diferentes relaciones que se establecen entre el triángulo ABC y los demás triángulos? [Los segmentos de recta b´c´, b´´c´´, bc y BC son paralelos]. Justifique sus respuestas.


</td><td>La intención de la actividad es que los estudiantes analicen y comprendan que los triángulos así dispuestos son semejantes. Por ejemplo, “ver” que los triángulos abc, a`b`c` y a``b``c`` son homotéticos (con centro de homotecia en uno de sus vértices y razones de homotecia positivas y negativas) del triángulo ABC; lo cual implica que ellos son semejantes.<br><br>La actividad también puede ser aprovechada para resaltar que los segmentos b`c`, b``c``, bc y BC son paralelos, y los segmentos b`B y c`C son transversales que los cortan. Esto con el objeto de preparar el terreno para el estudio del teorema de Thales.

Se sugiere que el profesor plantee a los estudiantes explorar y visualizar las diferentes situaciones que se pueden presentar. Principalmente, en la visualización de triángulos homotéticos, con centro de homotecia en uno de sus vértices y razones de homotecia positivos y negativos.

El profesor puede guiar a los estudiantes a que concluyan que la homotecia de figuras planas se convierte en una herramienta para la justificación y construcción de triángulos semejantes.</td></tr>
</table>

ACTIVIDADES 19-21

Objetivos de aprendizaje:

- Comprender y familiarizarse con el teorema de Thales usando Software de Geometría Dinámica (SGD) *Cabri*.
- Comprender las diferentes formulaciones del teorema de Thales.
- Comprender el teorema de Thales como una condición necesaria y suficiente.
- Comprender la relación entre el teorema de Thales y la semejanza de triángulos.
- Comprender que el teorema de Thales es una herramienta para la justificación y construcción de triángulos semejantes.
- Familiarizarse con el lenguaje propio del segundo nivel de razonamiento de Van Hiele.
- Promover la participación y la discusión como formas de comprensión de los conceptos y propiedades de las figuras que son semejantes, y de los procesos de razonamiento de Van Hiele y visualización.
- Comprender la necesidad de la justificación como medio de razonar y de convicción en la resolución de situaciones matemáticas y de la vida diaria.

Este bloque de actividades está pensado para desarrollarse en la *fase de orientación dirigida (Nivel 2*), excepto la actividad Nº 20 que está diseñada para ser desarrollada en la *fase de integración (Nivel 2).*

Las tareas que se proponen en la *fase de orientación dirigida* están diseñadas para obtener respuestas específicas y para que los estudiantes descubran y aprendan los componentes básicos de la red de conocimientos que deben formar. Se espera que estas tareas "lleven" directamente a los resultados y propiedades que los estudiantes deben aprender.

En la *fase de integración* el profesor ayuda a los estudiantes en la síntesis de lo que han aprendido, proporcionando observaciones globales, para que puedan tener una visión global de la nueva red de objetos y relaciones. Esto les permite integrar los nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente. Las actividades que se les propone a los estudiantes no implican la aparición de nuevos conocimientos, sino sólo la organización de los ya adquiridos. En esta fase no es completamente necesario que se propongan demasiadas actividades si, al final de cada una o al final de cada bloque de actividades, el profesor sintetiza e integra los nuevos conocimientos con los ya adquiridos y aclara cualquier información que considere o que los estudiantes le soliciten.

Dada la estrecha relación entre el teorema de Thales y la semejanza de triángulos, se contempla, en este bloque de actividades, estudiar los principales aspectos del teorema de Thales. La idea fundamental es que los estudiantes comprendan, entre otras cosas, que el teorema de Thales se convierte en una herramienta para la justificación y construcción de triángulos semejantes.

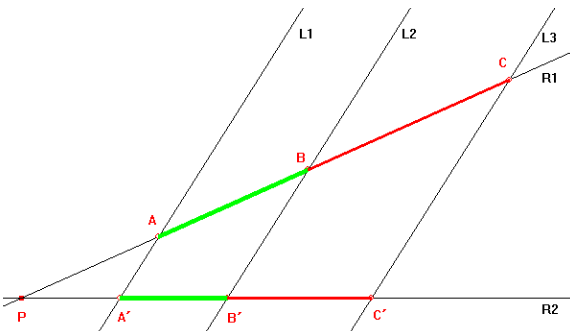
La semejanza como objeto matemático puede ser vista, principalmente, como *relación intrafigural* y como *transformación geométrica vista como útil*. Dentro de la relación intrafigural encontramos dos posibilidades: Figuras que se encuentran formando parte de configuraciones de Thales, y figuras que no se encuentran formando parte de configuraciones de Thales. Dentro de esta primera, encontramos figuras vistas en aspecto de proyección y en aspecto de homotecia. En este bloque de actividades abordaremos lo que tiene que ver con las figuras en aspecto de proyección (para mayor claridad puede verse el diagrama 1 del bloque de actividades 16-18).

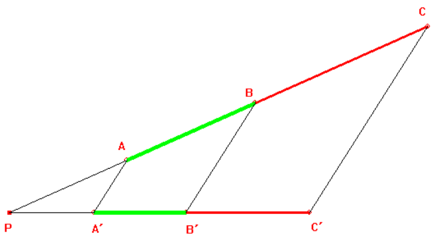
ACTIVIDAD 19. (Nivel 2- Fase de orientación dirigida)

Tiempo estimado para su desarrollo: 15 minutos.

Objetivos de la actividad

- Inducir en los estudiantes el planteamiento del teorema de Thales.
- Comprender el teorema de Thales con todos los elementos involucrados.
- Iniciar el estudio de la relación entre el teorema de Thales y la semejanza.

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
1) Elabore un dibujo de iguales características al dado, utilizando *Cabri*. • L1, L2 y L3 son rectas paralelas • R1 y R2 son rectas transversales a las rectas paralelas Con la herramienta calculadora halle los siguientes cocientes: a) AB/A´B´ *y* BC/B´C´ b) A´B´/B´C´ *y* AB/ BC Con la herramienta de arrastre mueva el punto P. ¿Qué sucede con los resultados obtenidos en a) y b)? Las características del dibujo construido y las características que has observado con respecto al cociente de los segmentos que se forman (AB, BC, A´B´ y B´C´) permiten plantear el ***teorema de Thales***. Enuncie dicho teorema con base en las conclusiones obtenidas.  **2)** ¿Es posible establecer alguna relación de semejanza entre los polígonos que se forman en la figura? Justifique sus respuestas.	Es una actividad que tiene por objeto que los estudiantes establezcan y comprendan, por medio de su propia experiencia con Cabri, el teorema de Thales. Dada la potencia del teorema de Thales se sugiere que el profesor guíe la actividad desde varios frentes. Por una parte, que lo formule de varias maneras diferentes, dependiendo de la configuración geométrica. Por otra parte, al ser el teorema una condición necesaria y suficiente, aunque lo habitual en la enseñanza secundaria es que sólo se trabaje una parte (paralelas y transversales implican proporcionalidad), se sugiere trabajar la otra parte, proporcionalidad implica paralelismo. Con respecto a la segunda pregunta, la intensión es ir estableciendo la relación entre el teorema de Thales y la semejanza, específicamente, en el caso de los triángulos. Se puede presentar el caso en que algunos estudiantes planteen, por ejemplo, que los cuadriláteros ABB´A´ y BCC´B´ son semejantes. Se presente o no el caso, el profesor debería aclarar este error. También, los estudiantes pueden establecer relación entre la homotecia y teorema de Thales (de no presentarse así, el profesor puede plantear la pregunta de si se presenta esta relación). Es decir, que los triángulos PAA´, PBB´ y PCC´ (figura inferior), además de pertenecer a una configuración de Thales, son homotéticos.

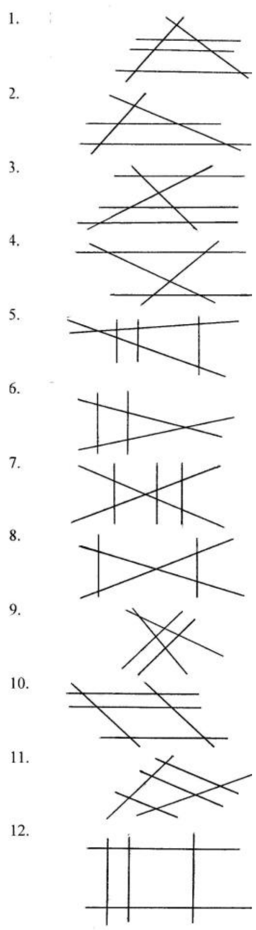
	 Se sugiere al profesor que pregunte a los estudiantes si dada la proporcionalidad se presenta el paralelismo. Esto completará el teorema como una condición suficiente y necesaria, es decir, dadas las transversales que cortan a las paralelas, se da la proporcionalidad, y, dada la proporcionalidad, se da el paralelismo.

ACTIVIDAD 20. (Nivel 2- Fase de integración)

Tiempo estimado para su desarrollo: 20 minutos.

Objetivos de la actividad

- Reconocer y comprender diferentes configuraciones gráficas del teorema de Thales.
- Identificar semejanza de polígonos en diferentes configuraciones gráficas.

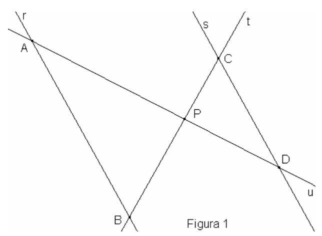
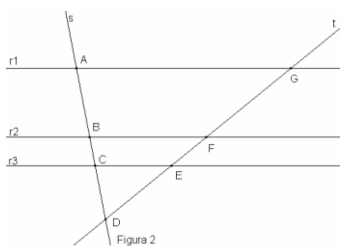
ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
Los segmentos de recta que "parecen" ser paralelos, lo son. A) Identifique en cuáles de los dibujos se presentan las características del teorema de Thales. Justifique sus respuestas. B) En cuáles se forman figuras semejantes. Justifique sus respuestas. 	La actividad permite a los estudiantes reconocer diferentes configuraciones gráficas del teorema de Thales. En dichas configuraciones, los estudiantes podrán observar diferentes posibilidades en las que encontramos el teorema, por ejemplo, dos o tres rectas paralelas, y punto de intersección de las rectas secantes ubicado entre las paralelas y fuera de ellas. Se presenta dos casos poco usuales (figura 10 y 12), en los cuales las rectas que, con frecuencia, llamamos secantes, son paralelas. Se sugiere al profesor prestar atención especial a estos casos, es decir, de ser necesario, guiar a los estudiantes para que confirmen el resultado del teorema. Se sugiere que el profesor plantee a los estudiantes explorar y visualizar las diversas posiciones y formas en las que puede aparecer el dibujo. Por ejemplo, que las rectas paralelas pueden aparecer dibujadas en forma vertical, horizontal y oblicua. Esto con el fin de eliminar posibles estereotipos que pueden formar los estudiantes, muy comunes en el aprendizaje de la geometría.

ACTIVIDAD 21. (Nivel 2- Fase de orientación dirigida)

Tiempo estimado para su desarrollo: 15 minutos.

Objetivos de la actividad

- Relacionar el teorema de Thales con la semejanza de triángulos.

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
En la figura 1, las rectas **r** y **s** son paralelas que cortan a las rectas transversales **t** y **u**. En la figura 2, las rectas **r1**, **r2** y **r3** son paralelas que cortan a las transversales **s** y **t**. Escriba las posibles relaciones que se pueden establecer entre los triángulos que se forman, con las rectas dibujadas, en las dos figuras. Justifique sus respuestas.  Figura 1  Figura 2	La idea es que los estudiantes comprendan que los triángulos así distribuidos son semejantes. Los estudiantes pueden justificar su respuesta (en el caso de la figura 1) diciendo que los triángulos APB y CPD son semejantes porque son homotéticos o que están dibujados en aspecto de homotecia. De manera análoga (en la figura 2), pueden decir que los triángulos ADG, BDF y CDE son semejantes. Se sugiere que el profesor guíe a los estudiantes para que logren establecer el vínculo entre el teorema de Thales y la semejanza de triángulos. Es decir, las figuras dibujadas así cumplen las condiciones del teorema de Thales y como ya se justificó que los triángulos que se forman así son semejantes (por homotecia), se concluye la relación.

ACTIVIDADES 22-29

Objetivos de aprendizaje:

- Consolidar la relación entre la homotecia, el teorema de Thales, y la semejanza de figuras planas.
- Identificar, comprender y justificar relaciones de semejanza de figuras planas en diversas situaciones planteadas.
- Reconocer e identificar los diferentes tipos de configuraciones de Thales que con mayor frecuencia se presentan: Forma de mariposa, forma de pico, y configuraciones entremezcladas.
- Promover la participación y la discusión como formas de comprensión de los conceptos y propiedades de las figuras que son semejantes, y de los procesos de razonamiento de Van Hiele y visualización.
- Comprender la necesidad de la justificación como medio de razonar y de convicción en la resolución de situaciones matemáticas y de la vida diaria.

Este bloque de actividades está pensado para desarrollarse en la *fase de orientación libre (Nivel 2)*, excepto la actividad 22 que está pensada para desarrollarse en la *fase de integración (Nivel 2).*

En la *fase de orientación libre* es donde se produce la consolidación del aprendizaje realizado en las anteriores fases. Las actividades que se proponen en esta fase son diferentes de las anteriores, en las cuales los estudiantes deben utilizar los conocimientos adquiridos para resolverlas y tengan que usar nuevas formas de razonamiento en contextos nuevos. Una de las características que poseen las situaciones planteadas a los estudiantes, es que no son una simple aplicación directa de un dato o algoritmo conocido, sino que plantean nuevas relaciones o propiedades y, en general, con varias vías de resolución.

En la *fase de integración* el profesor ayuda a los estudiantes en la síntesis de lo que han aprendido, proporcionando observaciones globales, para que puedan tener una visión global de la nueva red de objetos y relaciones. Esto les permite integrar los nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente. Las actividades que se les propone a los estudiantes no implican la aparición de nuevos conocimientos, sino sólo la organización de los ya adquiridos. En esta fase no es completamente necesario que se propongan demasiadas actividades si, al final de cada una o al final de cada bloque de actividades, el profesor sintetiza e integra los nuevos conocimientos con los ya adquiridos y aclara cualquier información que considere o que los estudiantes le soliciten.

Dada la importancia de los triángulos en la geometría, y en general en la matemática, se optó por plantear, en la mayoría de las actividades de este bloque, dibujos en los que éstos están presentes.

Los tipos de configuraciones de Thales, que con mayor frecuencia se presentan, en forma de pico o encajados, en forma de mariposa, y configuraciones entremezcladas, son de particular importancia cuando se aborda la relación entre el teorema de Thales y la semejanza para su enseñanza. Se busca que los estudiantes las reconozcan e identifiquen en los diferentes dibujos que se presentan en las actividades de este bloque. En el diagrama 2 se muestran ejemplos de las diferentes configuraciones.

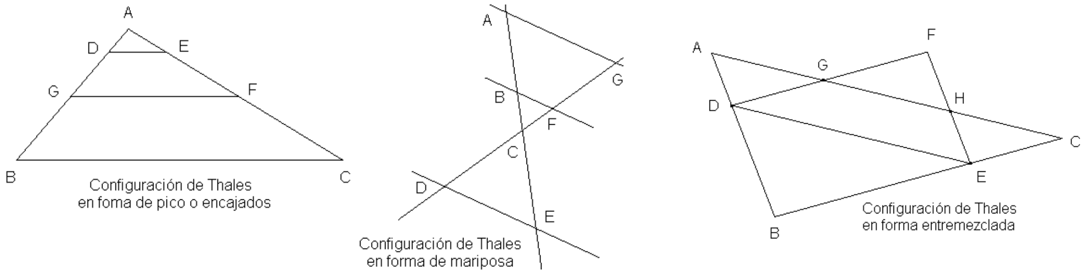


Diagrama 2. Diferentes tipos de configuraciones de Thales.

ACTIVIDAD 22. (Nivel 2- Fase de integración)

Tiempo estimado para su desarrollo: 20 minutos.

Objetivos de la actividad

- Sintetizar e integrar los nuevos conocimientos con los ya adquiridos, particularmente en lo que tiene que ver con las relaciones entre el teorema de Thales, la homotecia, y la semejanza de figuras planas.

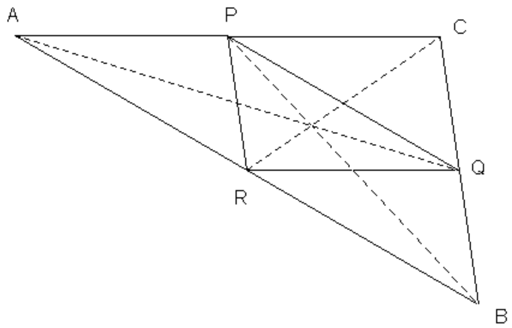
ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
1) ¿Los polígonos en disposición homotética son siempre semejantes? Justifique su respuesta y dé ejemplos diferentes. **2)** ¿Los polígonos semejantes están siempre en disposición homotética? Justifique su respuesta y dé ejemplos diferentes. **3)** ¿Los polígonos en posición de Thales son siempre semejantes? Justifique su respuesta y dé ejemplos diferentes. **4)** ¿Los triángulos en posición de Thales son siempre semejantes? Justifique su respuesta y dé ejemplos diferentes. **5)** ¿Dos triángulos cuyos lados son paralelos respectivamente son semejantes? Justifique su respuesta y dé ejemplos diferentes.	La actividad pretende que los estudiantes recuerden los temas que ya se han trabajado en actividades anteriores para así lograr, con ayuda del profesor, sintetizarlos e integrarlos. Los polígonos en disposición homotética hacen referencia a los que se forman de un polígono y sus respectivos polígonos homotéticos (usando diferentes razones de homotecia y el mismo centro de homotecia). El objeto de las preguntas 1 y 2 es el de sintetizar e integrar un concepto anterior (homotecia) y el nuevo, la semejanza de figuras planas. De manera análoga, el objetivo de las preguntas 3 y 4 es sintetizar e integrar el teorema de Thales con la semejanza de figuras planas. La pregunta 5 puede ser justificada por los estudiantes haciendo referencia a que los triángulos con dicha característica o pertenecen a una configuración de Thales en aspecto de homotecia, o a triángulos en disposición homotética. También puede darse el caso de los estudiantes que utilicen isometrías en el plano, para trasladar, girar o reflejar y luego decir que los triángulos pertenecen a una configuración de Thales en aspecto de homotecia, o a triángulos en disposición homotética. Se sugiere que el profesor invite a los estudiantes a explorar y visualizar las posibles situaciones que se pueden presentar, sobre todo en la pregunta 5.

ACTIVIDAD 23. (Nivel 2- Fase de orientación libre)

Tiempo estimado para su desarrollo: 15 minutos.

Objetivos de la actividad

- Identificar, comprender y justificar relaciones de semejanza de triángulos.

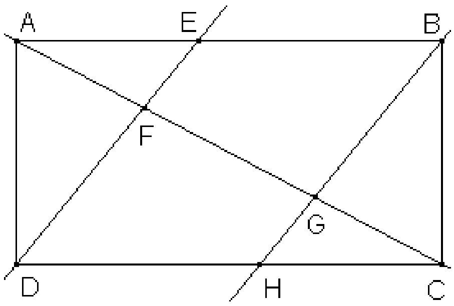
ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
Los puntos P, Q y R son los puntos medios de los segmentos AC, CB y BA respectivamente. Identifique todas las posibles relaciones de semejanza, entre los diferentes triángulos que se forman, en la figura dada. Justifique sus respuestas. 	La actividad requiere que los estudiantes conozcan la propiedad que plantea que *el segmento trazado desde los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado.* En caso de que los estudiantes no la hayan trabajado antes o no la recuerden, se hace necesario que el profesor tenga preparada una actividad complementaria, para introducirla si se da este caso, en la que los estudiantes induzcan la propiedad a partir de ejemplos (y la ayuda del profesor si es necesario), con el fin de que los estudiantes la puedan utilizar. Conocida o recordada la propiedad, por los estudiantes, están en capacidad de iniciar a plantear relaciones de semejanza entre los diferentes triángulos que se forman en el dibujo. Por ejemplo, pueden decir que los triángulos ACB y PCQ son semejantes porque forman parte de una configuración de Thales vista en aspecto de homotecia. De manera análoga podrían justificar la semejanza de los triángulos ACB y APR, y los triángulos ACB y RQB. El profesor podría adicionalmente, si los estudiantes no lo visualizan, pedir a los estudiantes que estudien la semejanza de las parejas de triángulos PQR y BQR, PCQ y PRQ, y APR y QRP. Se sugiere que el profesor invite a los estudiantes a explorar, visualizar y plantear las posibles relaciones que se presentan.

ACTIVIDAD 24. (Nivel 2- Fase de orientación libre)

Tiempo estimado para su desarrollo: 15 minutos.

Objetivos de la actividad

- Identificar, comprender y justificar relaciones de semejanza de triángulos.
- Identificar, comprender y justificar relaciones de semejanza de figuras planas.

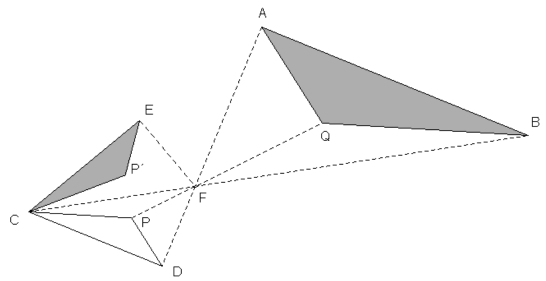
ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
Los segmentos DE y BH son paralelos. ABCD es un rectángulo. AC es una diagonal del rectángulo ABCD. **1)** Identifique todas las relaciones de semejanza entre triángulos en la figura. Justifique sus respuestas. **2)** Identifique todas las relaciones de semejanza entre polígonos (diferentes a triángulos) en la figura. Justifique sus respuestas.  	El objetivo de la actividad es que los estudiantes sigan consolidando las relaciones que se establecen entre el teorema de Thales, la homotecia, y la semejanza de figuras planas, en particular la semejanza de triángulos. Dadas las condiciones de la actividad, los estudiantes pueden plantear por ejemplo que los triángulos AEF y ABG son semejantes porque forman parte de una configuración de Thales vista en aspecto de homotecia. Los estudiantes también pueden observar y justificar, por ejemplo, que los cuadriláteros EFBG y HGDF son congruentes y que por lo tanto son semejantes. El profesor podría adicionalmente, si los estudiantes no lo visualizan, pedir a los estudiantes que estudien la semejanza de las parejas de triángulos ADE y CBH, AFD y CGB, y ABC y CDA. Se sugiere que el profesor invite a los estudiantes a explorar, visualizar y plantear las posibles relaciones que se presentan.

ACTIVIDAD 25. (Nivel 2- Fase de orientación libre)

Tiempo estimado para su desarrollo: 15 minutos.

Objetivos de la actividad

- Comprender y justificar relaciones de semejanza de triángulos.

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
El segmento AQ es paralelo al segmento PD. El segmento QB es paralelo al segmento CP. El segmento AB es paralelo al segmento CD. El triángulo CEF es el resultado de una simetría con respecto al segmento CF del triángulo CDF. ¿Son semejantes los triángulos AQB y CP´E? Justifique su respuesta. 	El objetivo de la actividad es que los estudiantes sigan consolidando las relaciones que se establecen entre el teorema de Thales, la homotecia, y la semejanza de figuras planas, en particular la semejanza de triángulos. Una manera que los estudiantes aborden esta actividad es visualizando que, dadas las condiciones de paralelismo, los triángulos AQB y CPD son homotéticos con centro de homotecia en F (por tanto son semejantes), y que los triángulos ABF y CDF son semejantes porque pertenecen a una configuración de Thales en aspecto de homotecia. Lo que permite concluir, parcialmente, que los triángulos ABF y CEF son semejantes (ya que CDF y CEF son simétricos). Ahora bien, con lo concluido hasta aquí, los estudiantes podrían concluir definitivamente que los triángulos AQB y CP´E son semejantes (quedando pendiente justificar que P´ es el simétrico de P bajo el segmento CF. Otra posible manera de solución es que los estudiantes determinen la semejanza de los triángulos en cuestión basándose en argumentos visuales y métricos, es decir, que utilicen la definición de semejanza (midiendo las longitudes de los lados homólogos y midiendo los ángulos correspondientes). Se sugiere que el profesor invite a los estudiantes a explorar, visualizar y plantear las posibles relaciones de semejanza que se presentan en el dibujo, con el fin de que la justificación que den a su respuesta no sea la exclusivamente visual-métrica. Es una manera de motivar a los estudiantes a que mejoren e incrementen su nivel de razonamiento.

ACTIVIDAD 26. (Nivel 2- Fase de orientación libre)

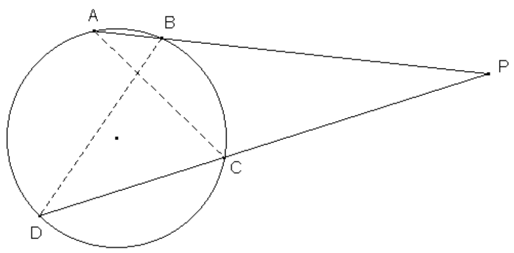
Tiempo estimado para su desarrollo: 20 minutos.

Objetivos de la actividad

- Comprender y justificar relaciones de semejanza de polígonos.

<table>
<tr><th>ACTIVIDAD</th><th>DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS</th></tr>
<tr><td>

1) Los segmentos AP y DP pertenecen a rectas secantes que se cruzan en el punto P y, a su vez, cortan a la circunferencia como aparece en la figura. Justifique por qué los triángulos APC y DPB son semejantes.



2) Dibuje un triángulo cualquiera y, desde cada vértice, trace una recta paralela al lado opuesto. De esta manera obtiene un triángulo más grande ¿El nuevo triángulo es semejante al inicial? Justifique su respuesta.

3) Dibuje un cuadrado ABCD cualquiera y, en su interior, trace un segmento A´B´ paralelo al segmento AB (que no pase por el punto medio de los lados). De esta manera el cuadrado original queda dividido en dos rectángulos ¿Los rectángulos son semejantes? Justifique su respuesta.

</td><td>

El objetivo de la actividad es que los estudiantes sigan consolidando las relaciones que se establecen entre el teorema de Thales, la homotecia, y la semejanza de figuras planas, en particular la semejanza de triángulos.

Una manera que los estudiantes aborden la pregunta 1 de esta actividad es visualizando, en principio, que al triángulo APC se puede aplicar una simetría con respecto al segmento PD y luego, al triángulo resultante aplicarle una rotación (en sentido de las agujas del reloj) respecto al punto P, un ángulo equivalente al ángulo APD. Esto hace que los triángulos APC y DPB queden superpuestos y, al menos visualmente, darse cuenta que los segmentos AC y BD son paralelos. Podrían para concluir plantear que los triángulos así ubicados forman parte de una configuración de Thales en aspecto de homotecia y por lo tanto son semejantes.

Otra manera de justificar que dichos triángulos son semejantes es utilizando la definición de semejanza (midiendo las longitudes de los lados homólogos y midiendo los ángulos correspondientes).

Con respecto a la pregunta 2, los estudiantes pueden visualizar que los dos triángulos que así resultan tienen los lados homólogos paralelos y, en la actividad 20, se había justificado que estos triángulos son semejantes.

Si no recuerdan esta propiedad o no recurren al uso de isometrías, probablemente se inclinen por utilizar la definición de semejanza (midiendo las longitudes de los lados homólogos y midiendo los ángulos correspondientes).

Con la pregunta 3, se pretende que a los estudiantes les quede claro que, no necesariamente, el paralelismo conduce a una semejanza.

Se sugiere que el profesor plantee a los estudiantes la importancia que tiene el utilizar herramientas diferentes a la exclusivamente visual-métrica. Es una manera de motivar a los estudiantes a que mejoren e incrementen su nivel de razonamiento.

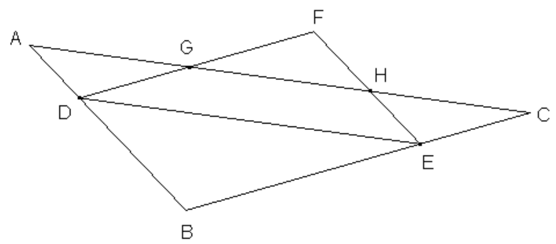
</td></tr>
</table>

ACTIVIDAD 27. (Nivel 2- Fase de orientación libre)

Tiempo estimado para su desarrollo: 15 minutos.

Objetivos de la actividad

- Identificar, comprender y justificar relaciones de semejanza de triángulos.

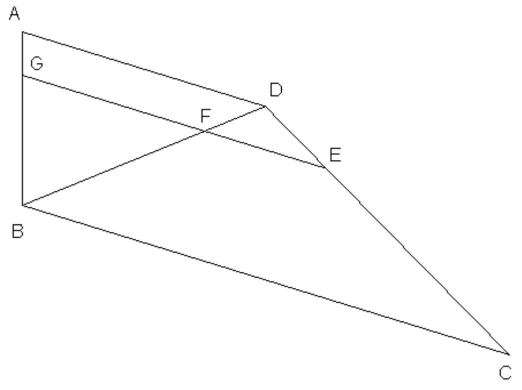
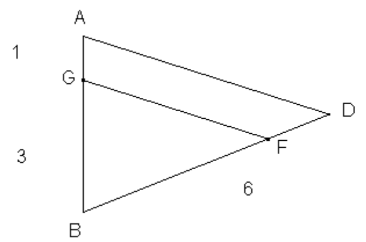
<table>
<tr><th>ACTIVIDAD</th><th>DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS</th></tr>
<tr><td>Identifique todas las posibles relaciones de semejanza entre los triángulos que se forman en la figura, sabiendo que el segmento DE es paralelo a AC, el segmento DF es paralelo a BC, y el segmento EF es paralelo a AB. Justifique cada una de las respuestas.

</td><td>El objetivo de la actividad es que los estudiantes sigan consolidando las relaciones que se establecen entre el teorema de Thales, la homotecia, y la semejanza de figuras planas, en particular la semejanza de triángulos.
En esta actividad resultan diversas relaciones de semejanza de triángulos. Por ejemplo, los estudiantes pueden plantear que los triángulos ABC y DEF son semejantes usando la propiedad que se verificó en la actividad 22 (5).
También los estudiantes podrían plantear que las parejas de triángulos ADG, HFG y CEH, GFH son semejantes puesto que pertenecen a configuraciones de Thales en aspecto de homotecia.
Se espera que en este momento del desarrollo de la unidad de enseñanza, los estudiantes justifiquen más la semejanza de triángulos utilizando herramientas diferentes a la definición de semejanza (midiendo las longitudes de los lados homólogos y midiendo los ángulos correspondientes). Esto permite al profesor ir evaluando el progreso de sus estudiantes en cuanto al nivel de razonamiento.</td></tr>
</table>

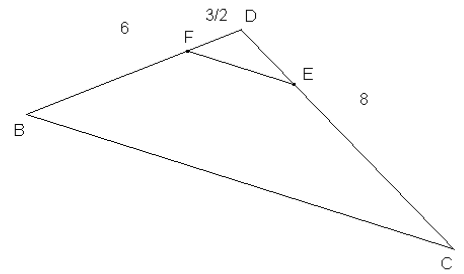
ACTIVIDAD 28. (Nivel 2- Fase de orientación libre)

Tiempo estimado para su desarrollo: 15 minutos.

Objetivos de la actividad

- Resolver situaciones matemáticas haciendo uso, preferiblemente, de la semejanza y sus propiedades desarrolladas en sesiones de clase anteriores.

<table>
<tr><th>ACTIVIDAD</th><th>DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS</th></tr>
<tr><td>Determinar las longitudes de los segmentos DF y DE, dado que: ABCD es un trapecio, el segmento EG es paralelo al segmento BC. Además de la siguiente información: (AG/AB)=1/4, BD=6 y DC=8. Escriba el procedimiento que lo conduce a la respuesta.

</td><td>El objetivo de esta actividad es inducir a los estudiantes a que utilicen las diferentes herramientas que se han venido desarrollando en la resolución de la situación planteada.
Una posible forma de solución es que los estudiantes visualicen en el dibujo dos configuraciones de Thales en aspecto de homotecia (en forma de pico) como se muestra a continuación.




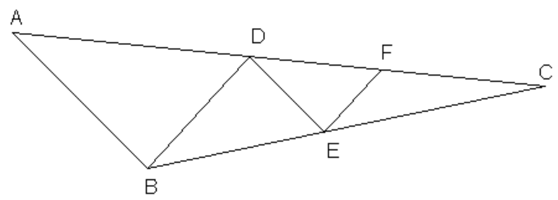
Por ejemplo, en la primera configuración pueden plantear (1/3)=DF/(6-DF). Luego, utilizando la segunda configuración pueden plantear, por ejemplo, la equivalencia de razones externas 6/(3/2)= 8/DE.
Se sugiere que el profesor plantee a los estudiantes explorar, visualizar y plantear las distintas maneras que puede haber para solucionar las situaciones planteadas. Es una manera de motivar a los estudiantes a que mejoren e incrementen su nivel de razonamiento.</td></tr>
</table>

ACTIVIDAD 29. (Nivel 2- Fase de orientación libre)

Tiempo estimado para su desarrollo: 15 minutos.

Objetivos de la actividad

- Identificar, comprender y justificar relaciones de semejanza de triángulos.

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
Identifique todas las posibles relaciones de semejanza entre los triángulos que se forman en la figura. Sabiendo que el segmento DE es paralelo al segmento AB, y el segmento BD es paralelo a EF. Justifique cada una de las respuestas.  	El objetivo de la actividad es que los estudiantes sigan consolidando las relaciones que se establecen entre el teorema de Thales, la homotecia, y la semejanza de figuras planas, en particular la semejanza de triángulos. En esta actividad resultan diversas relaciones de semejanza de triángulos. Por ejemplo, los estudiantes pueden plantear que los triángulos ABC y DEC son semejantes usando la propiedad que se verificó en la actividad 22 (4 o 5), o diciendo que dichos triángulos pertenecen a una configuración de Thales en aspecto de homotecia. También los estudiantes podrían plantear que los triángulos BDC y EFC son semejantes por la misma justificación anterior. El profesor puede inducir a los estudiantes, si ellos no lo visualizan, a que verifiquen la semejanza de los triángulos ABD y DEF. Se sugiere que el profesor plantee, si los estudiantes no lo han hecho, la verificación de algunos otros casos de semejanza, como por ejemplo, que verifiquen si son semejantes los triángulos ABC y BDE.

ACTIVIDADES 30-31

Objetivos de aprendizaje:

- Construir figuras semejantes haciendo uso de homotecias y teorema de Thales.
- Promover la participación y la discusión como formas de comprensión de los conceptos y propiedades de las figuras que son semejantes, y de los procesos de razonamiento de Van Hiele y visualización.
- Comprender la necesidad de la justificación como medio de razonar y de convicción en la resolución de situaciones matemáticas y de la vida diaria.

Este bloque de actividades está pensado para desarrollarse en dos fases. La actividad 30 en la *fase de orientación libre (Nivel 2)* y la actividad 31 en la *fase de integración (Nivel 2).*

En la *fase de orientación libre* es donde se produce la consolidación del aprendizaje realizado en las anteriores fases. La actividad que se propone en esta fase es diferente de las anteriores, en las cuales los estudiantes deben utilizar los conocimientos adquiridos para resolverlas y tengan que usar nuevas formas de razonamiento en contextos nuevos. Una de las características que posee la situación planteada a los estudiantes, es que no es una simple aplicación directa de un dato o algoritmo conocido, sino que plantea nuevas relaciones o propiedades y, en general, con varias vías de resolución.

En la *fase de integración* el profesor ayuda a los estudiantes en la síntesis de lo que han aprendido, proporcionando observaciones globales, para que puedan tener una visión global de la nueva red de objetos y relaciones. Esto les permite integrar los nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente. La actividad que se les propone a los estudiantes no implica la aparición de nuevos conocimientos, sino sólo la organización de los ya adquiridos. En esta fase no es completamente necesario que se propongan demasiadas actividades si, al final de cada una o al final de cada bloque de actividades, el profesor sintetiza e integra los nuevos conocimientos con los ya adquiridos y aclara cualquier información que considere o que los estudiantes le soliciten.

Al finalizar este bloque de actividades los estudiantes deben estar en capacidad de comprender que la homotecia es una herramienta que, entre otras cosas, se puede utilizar en la construcción de figuras semejantes a una dada. De forma análoga, deben estar en capacidad de comprender que el teorema de Thales es una herramienta que, entre otras cosas, se puede utilizar en la construcción de triángulos semejantes.

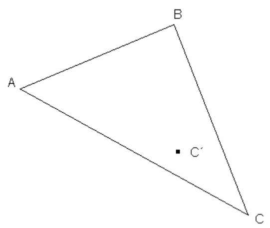
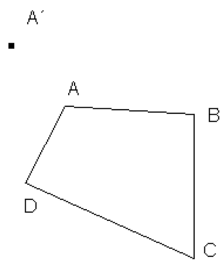
El planteamiento de las actividades también permite que los estudiantes apliquen sus conocimientos relacionados con las isometrías del plano (traslación, giro y simetría) en la construcción y/o demostración de polígonos semejantes.

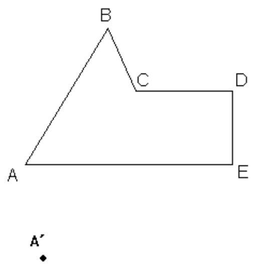
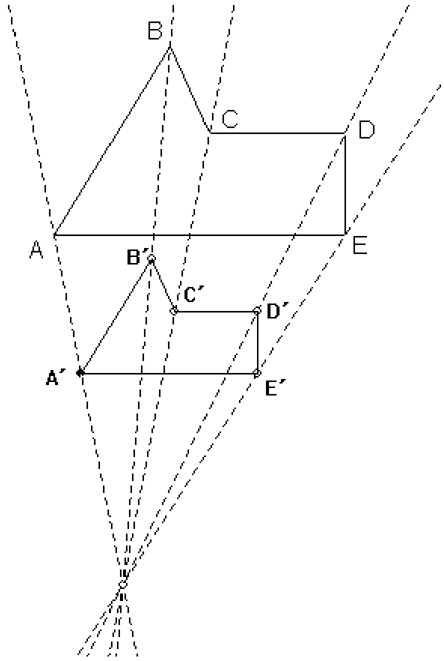
ACTIVIDAD 30. (Nivel 2- Fase de orientación libre)

Tiempo estimado para su desarrollo: 20 minutos.

Objetivos de la actividad

- Construir polígonos semejantes a un polígono dado utilizando homotecias.

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
1) Construya un triángulo semejante al triángulo ABC, el cual tenga como uno de sus vértices el punto **C´**. ¿Cuántas posibilidades tienes de hacerlo? Justifique sus respuestas.  **2)** Construya un polígono semejante al polígono ABCD, el cual tenga como uno de sus vértices el punto **A´**. ¿Cuántas posibilidades tienes de hacerlo? Justifique sus respuestas.  **3)** Construya un polígono semejante al polígono ABCDE, el cual tenga como uno de sus vértices el punto **A´**. ¿Cuántas posibilidades tienes de hacerlo? Justifique sus respuestas.	La idea con esta actividad es inducir a los estudiantes a que utilicen la homotecia en la construcción de triángulos semejantes (parte 1) y de polígonos semejantes (parte 2 y 3). Las preguntas planteadas en esta actividad son el principio de una serie que el profesor les puede plantear a los estudiantes. Por ejemplo, dado el mismo triángulo de la parte 1, plantearles que dibujen otros semejantes al dado, pero utilizando como centro de homotecia el vértice A, o el B, o el C y diferentes razones de homotecia (tanto positivas como negativas). Algunos estudiantes, en principio, pueden seguir insistiendo en la construcción de figuras semejantes utilizando, solamente, un factor y la definición de semejanza. El profesor puede resaltar lo fácil que, en este caso, resulta utilizar la homotecia para la construcción de polígonos semejantes. Con respecto a la pregunta: ¿cuántas posibilidades tienes de hacerlo?, su objetivo es el que los estudiantes se percaten que existe más de una manera de dibujar triángulos (parte 1) y polígonos (parte 2 y 3) semejantes en este caso particular. Una forma de resolver las partes de esta actividad es trazando una línea que una los puntos C y C´, A y A´, y sobre éstas ubicar un punto (que sería un centro de homotecia). Posteriormente, trazar rectas desde este centro hasta cada uno de los vértices de la figura. Finalmente, utilizando paralelismo y las rectas auxiliares construidas dibujar la figura semejante a la dada. La intención es afianzar el papel de la visión geométrica de la semejanza como sustituto de la pura proporcionalidad aritmética, por ejemplo, en la parte3 medir OA y OA’, calcular la razón, medir OB, multiplicar este valor por la razón, etc.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>

Se sugiere que el profesor plantee a los estudiantes explorar, visualizar y plantear las diferentes posibilidades de semejanza que se presentan en los dibujos, con el fin de que la justificación que den a sus respuestas no sea única. Es una manera de motivar a los estudiantes a que mejoren e incrementen su nivel de razonamiento. También, que insista a los estudiantes en la importancia que tiene el utilizar herramientas diferentes a la exclusivamente visual-métrica.</td>
</tr>
</table>

ACTIVIDAD 31. (Nivel 2- Fase de integración)

Tiempo estimado para su desarrollo: 20 minutos.

Objetivos de la actividad

- Construir polígonos semejantes a un polígono, dibujado por los estudiantes, utilizando homotecias.
- Construir triángulos semejantes a un triángulo, dibujado por los estudiantes, utilizando el teorema de Thales.

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
1) Dibuje una figura plana y mediante una homotecia construya una semejante a ésta. **2)** Dibuje un triángulo y usando el teorema de Thales construya uno semejante a éste.	El objetivo de esta actividad es inducir a los estudiantes a que utilicen la homotecia en la construcción de polígonos semejantes (parte 1) y que utilicen el teorema de Thales en la construcción de triángulos semejantes (parte 2). El profesor puede resaltar lo fácil que, en este caso, resulta utilizar la homotecia en la construcción de polígonos semejantes. De manera análoga, resaltar lo fácil que resulta utilizar el teorema de Thales en la construcción de triángulos semejantes. Al terminar esta actividad se espera que los estudiantes tengan claro el uso que pueden hacer de la homotecia en la construcción de figuras semejantes a una dada y del teorema de Thales en la construcción de triángulos semejantes a uno dado. Se sugiere que el profesor plantee a los estudiantes explorar, visualizar y plantear las distintas posibilidades que tienen para dibujar las figuras semejantes. Por ejemplo, en la parte 1, utilizar diferentes razones de homotecia y diferentes centros de homotecia. En la parte 2, utilizar diversos tipos de configuraciones de Thales (ver diagrama 2 del bloque de actividades 22-28). Es una manera de motivar a los estudiantes a que mejoren e incrementen su nivel de razonamiento.

ACTIVIDADES 32-33

Objetivos de aprendizaje:

- Comprender, plantear y demostrar los criterios de semejanza de triángulos AA, LLL y LAL.
- Analizar y comprender algunas propiedades relacionadas con la semejanza en triángulos rectángulos.
- Utilizar isometrías como herramienta de construcción o demostración en las diferentes situaciones presentadas.
- Promover la participación y la discusión como formas de comprensión de los conceptos y propiedades de las figuras que son semejantes, y de los procesos de razonamiento de Van Hiele y visualización.
- Comprender la necesidad de la justificación como medio de razonar y de convicción en la resolución de situaciones matemáticas y de la vida diaria.

En este bloque de actividades se plantea desarrollar la actividad 32 en la *fase de orientación dirigida (Nivel 2)* y la actividad 33 en la *fase de orientación libre (Nivel2).*

Las tareas planteadas en la actividad 29 están diseñadas para obtener respuestas específicas y para que los estudiantes descubran y aprendan los criterios de semejanza de triángulos, los cuales son un componente básico de la red de conocimientos que deben formar. Se espera que estas tareas "lleven" directamente a los criterios y propiedades que los estudiantes deben aprender.

Las tareas planteadas en la actividad 30 están diseñadas con el fin de consolidar el aprendizaje realizado, principalmente, en la anterior actividad. Las tareas que se proponen son diferentes de las anteriores, en las cuales los estudiantes deben utilizar los conocimientos adquiridos para resolverlas y tengan que usar nuevas formas de razonamiento en contextos nuevos.

Al finalizar este bloque de actividades los estudiantes deben estar en capacidad de comprender que existen criterios para decidir la semejanza de triángulos, los cuales son adicionales a las herramientas que ya se han desarrollado y aprendido antes. Adicionalmente, deben estar en capacidad de comprender algunas de las propiedades de la semejanza en triángulos rectángulos.

El planteamiento de las actividades también permite que los estudiantes apliquen sus conocimientos relacionados con las isometrías del plano (traslación, giro y simetría) en la construcción de triángulos semejantes y en la demostración de criterios de semejanza de triángulos.

ACTIVIDAD 32. (Nivel 2- Orientación dirigida)

Tiempo estimado para su desarrollo: 25 minutos.

Objetivos de la actividad

- Comprender, plantear y demostrar los criterios de semejanza de triángulos AA, LLL y LAL a partir de herramientas desarrolladas tales como la homotecia y teorema de Thales.

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
1) ¿Dos triángulos que tienen sus lados proporcionales son semejantes? Si lo son, ¿podrían ser semejantes los triángulos que tienen sólo dos pares de lados proporcionales? Justifique sus respuestas. **2)** ¿Dos triángulos que tienen sus tres ángulos respectivamente congruentes son semejantes? Si lo son, ¿podrían ser semejantes los triángulos que tienen sólo dos ángulos respectivamente congruentes? Justifique sus respuestas. **3)** ¿Dos triángulos que tienen un ángulo congruente y los lados que los forman proporcionales son semejantes? Si lo son, ¿podrían ser semejantes los triángulos cuyos lados proporcionales no son ambos del ángulo congruente, sino que uno es el lado opuesto? Justifique sus respuestas.	La idea con esta actividad es inducir a los estudiantes a que utilicen las herramientas que se han venido trabajando (homotecia, teorema de Thales, e incluso isometrías) en la demostración de los criterios de semejanza de triángulos. Con la segunda pregunta, en cada una de las tres partes, se pretende generar discusión y desarrollo de argumentaciones por parte de los estudiantes. Se sugiere que el profesor motive a los estudiantes a intentar realizar una demostración, no necesariamente formal, de tal manera que tengan un acercamiento a este tipo de actividad matemática. También, que el profesor plantee a los estudiantes explorar, visualizar y plantear las distintas posibilidades que tienen para dibujar triángulos semejantes. Por último, que induzca a los estudiantes a que planteen algunas de las distintas maneras que tienen para justificar las respuestas de cada una de las partes que componen la actividad.

ACTIVIDAD 33. (Nivel 2- Orientación libre)

Tiempo estimado para su desarrollo: 20 minutos.

Objetivos de la actividad

- Analizar, comprender y demostrar algunas propiedades de la semejanza de triángulos rectángulos.

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
1) Establezca en qué tipo de triángulos se cumple que una de sus alturas divide al triángulo en otros dos que son semejantes entre sí y semejantes también al triángulo original. Justifique el procedimiento utilizado. **2)** Establezca en qué tipo de triángulos se cumple que dados dos triángulos, uno con un ángulo de 30º y otro con un ángulo de 60º, con estas características son semejantes. Justifique el procedimiento utilizado.	Uno de los objetivos de la actividad es que los estudiantes utilicen los criterios de semejanza de triángulos en la justificación y explicación de las respuestas. Se sugiere al profesor que plantee a los estudiantes la exploración, visualización y planteamiento de las distintas posibilidades que se pueden presentar en la justificación de los diferentes enunciados de la actividad.

ACTIVIDAD 34

Objetivos de aprendizaje:

- Comprender y demostrar las propiedades relacionadas con el perímetro y el área de figuras semejantes.
- Promover la participación y la discusión como formas de comprensión de los conceptos y propiedades de las figuras que son semejantes, y de los procesos de razonamiento de Van Hiele y visualización.
- Comprender la necesidad de la justificación como medio de razonar y de convicción en la resolución de situaciones matemáticas y de la vida diaria.

Esta actividad se plantea desarrollar en la *fase de orientación dirigida (Nivel 2).* Está diseñada para que los estudiantes descubran y aprendan las propiedades relacionadas con el perímetro y el área figuras semejantes, las cuales son un componente básico de la red de conocimientos que deben formar. Se espera que estas tareas guíen a las propiedades que los estudiantes deben aprender.

Al finalizar esta actividad los estudiantes deben estar en capacidad de comprender y relacionar el perímetro, y área de figuras semejantes.

ACTIVIDAD 34. (Nivel 2- Orientación dirigida)

Tiempo estimado para su desarrollo: 20 minutos.

Objetivos de la actividad

- Comprender y demostrar la relación entre los perímetros de figuras semejantes.
- Comprender y demostrar la relación entre las áreas de figuras semejantes.

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
1) ¿Qué relación se podrá establecer entre los perímetros de dos figuras planas semejantes? Justifique el procedimiento utilizado. **2)** ¿Qué relación se podrá establecer entre las áreas de dos figuras planas semejantes? Justifique el procedimiento utilizado.	Uno de los objetivos de esta actividad es inducir a los estudiantes a que utilicen las herramientas que se han venido trabajando (homotecia, teorema de Thales, e incluso isometrías) en la demostración de las relaciones resultantes. Otro de los objetivos de esta actividad es que el profesor motive a los estudiantes a intentar realizar una demostración, no necesariamente formal, de tal manera que tengan un acercamiento a este tipo de actividad matemática. Se sugiere que el profesor plantee a los estudiantes explorar, visualizar y plantear diferentes formas, distintas a la exclusiva verificación en algunos casos, de demostración de las propiedades.

ACTIVIDADES 35-43

Objetivos de aprendizaje:

- Aplicar las herramientas que ofrece el concepto de semejanza de figuras planas en la resolución de situaciones de la vida práctica y en situaciones en contexto netamente matemático.
- Consolidar e integrar las diferentes relaciones que se establecieron en torno al concepto de semejanza de figuras planas.
- Comprender la importancia del concepto de semejanza de figuras planas en la resolución de situaciones matemáticas.
- Utilizar isometrías como herramienta de construcción o demostración en las diferentes situaciones presentadas.
- Promover la participación y la discusión como formas de comprensión de los conceptos y propiedades de las figuras que son semejantes, y de los procesos de razonamiento de Van Hiele y visualización.
- Comprender la necesidad de la justificación como medio de razonar y de convicción en la resolución de situaciones matemáticas y de la vida diaria.

En este bloque de actividades se plantea desarrollar la actividad 41 en la *fase de orientación dirigida (Nivel 2)*, las actividades 35 a 40 y la actividad 42 en la *fase de orientación libre (Nivel 2)*, y la actividad 43 en la *fase de integración (Nivel 2)*.

Las tareas planteadas en la actividad 41 están diseñadas para obtener respuestas específicas y para que los estudiantes descubran y aprendan la relación entre el concepto de *escala* y el *factor de semejanza*, la cual es un componente básico de la red de conocimientos que deben formar. Se espera que estas tareas conduzcan directamente a las relaciones y propiedades que los estudiantes deben aprender.

Las tareas planteadas en las actividades 35 a 40 y la actividad 42 están diseñadas con el fin de consolidar el aprendizaje realizado en las anteriores actividades. Las tareas que se proponen son diferentes de las anteriores, en las cuales los estudiantes deben utilizar los conocimientos adquiridos para resolverlas y tengan que usar nuevas formas de razonamiento en contextos nuevos.

El planteamiento de algunas de las actividades de este bloque también permite que los estudiantes apliquen sus conocimientos relacionados con las isometrías del plano (traslación, giro y simetría) en la construcción y/o demostración de relaciones de semejanza.

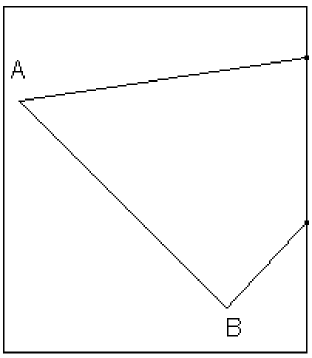
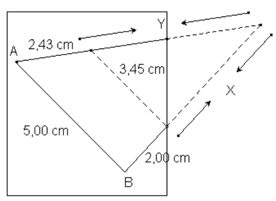
Al finalizar este bloque de actividades se espera que los estudiantes consoliden la comprensión de la importancia del concepto de semejanza y todos sus elementos relacionados en la resolución de situaciones de la vida práctica y en situaciones en contexto netamente matemático.

ACTIVIDAD 35. (Nivel 2- Fase de orientación libre)

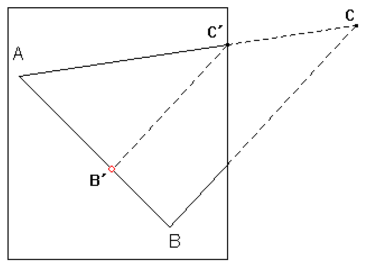
Tiempo estimado para su desarrollo: 20 minutos.

Objetivos de la actividad

- Resolver situaciones de la vida práctica haciendo uso, preferiblemente, de la semejanza y sus propiedades desarrolladas en sesiones de clase anteriores.

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
1) Un hombre de 1,85 mts de estatura se encuentra a 10 mts del pie de un poste, que tiene una lámpara, la cual proyecta sobre el suelo una sombra del hombre de 3 mts. Determine la altura de la lámpara. Escriba el procedimiento utilizado. **2)** Camila había dibujado un triángulo (ABC) en dos hojas; una aparece abajo y la otra la perdió. Camila desea determinar las longitudes de los lados de este triángulo sin dibujarlo nuevamente. ¿Qué le sugeriría que haga? Escriba el procedimiento. 	El objetivo de esta actividad es inducir a los estudiantes a que utilicen las diferentes herramientas que se han venido desarrollando en la resolución de las situaciones planteadas. En la parte 1 se espera que los estudiantes realicen un dibujo que resuma la situación planteada y de esta manera visualizar las posibles formas de abordar la solución. Una posible forma de solución es que los estudiantes visualicen una relación de semejanza entre los triángulos rectángulos que se forman y posteriormente planteen las razones correspondientes. Por ejemplo, pueden plantear la equivalencia de razones internas (3/1,85)= (13/*X)* o pueden plantear la equivalencia de razones externas (3/13)= (1,85/*X*). En la parte 2 se espera que los estudiantes resuelvan la actividad sin hacer uso de la medición de los lados del triángulo (si completan el dibujo). Una posibilidad es que busquen una relación de semejanza entre el triángulo dado y otro que puedan formar con medidas que ellos puedan tomar como lo muestra el siguiente dibujo.  La actividad termina planteando la equivalencia de razones adecuada, de tal forma que se puedan calcular los valores de X e Y y así completar la respuesta. Otra forma, más fácil e intuitiva de resolver la

<table>
<tr>
<td></td>
<td>situación es trazando por C´ un segmento paralelo a BC. De esta manera no hay que hacer tantos cálculos, pues los tres lados del triángulo semejante AB´C´ se pueden medir directamente.



Se sugiere que el profesor plantee a los estudiantes explorar, visualizar y plantear las distintas maneras que puede haber para solucionar las situaciones planteadas. Es una manera de motivar a los estudiantes a que mejoren e incrementen su nivel de razonamiento.</td>
</tr>
</table>

ACTIVIDAD 36. (Nivel 2- Fase de orientación libre)

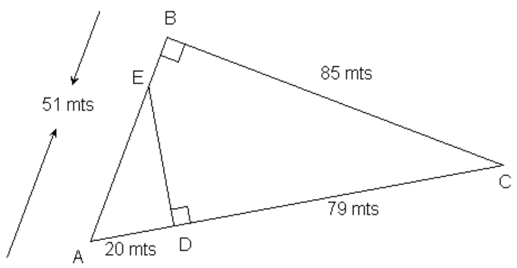
Tiempo estimado para su desarrollo: 15 minutos.

Objetivos de la actividad

- Resolver situaciones de la vida práctica haciendo uso, preferiblemente, de la semejanza y sus propiedades desarrolladas en sesiones de clase anteriores.
- Utilizar isometrías como herramienta de construcción o demostración en la situación presentada.

<table>
<tr><th>ACTIVIDAD</th><th>DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS</th></tr>
<tr><td>

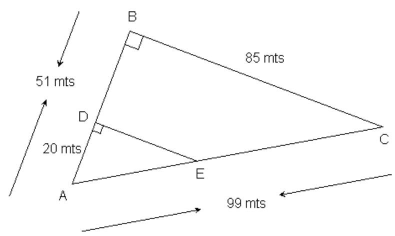
A un pintor le han encargado pintar la habitación BCDE, que tiene 3 m. de altura. Si el pintor cobra 2000 pesos por m² de pared, ¿cuánto cuesta pintar la habitación? Justifique el procedimiento utilizado.



</td><td>

El objetivo de esta actividad es inducir a los estudiantes a que utilicen las diferentes herramientas que se han venido desarrollando en la resolución de la situación planteada.

Una posible forma de solución es que los estudiantes visualicen una relación de semejanza entre los triángulos rectángulos ADE y ABC, y después demostrarlo (por ejemplo cambiando la posición de ADE mediante una simetría de eje la bisectriz del ángulo A y justificando que DE queda paralelo a BC).



Posteriormente planteen las razones correspondientes. Por ejemplo, pueden plantear la equivalencia de razones internas (20/DE)= (51/85*)* o pueden plantear la equivalencia de razones externas (20/51)= (DE/85).

Utilizando teorema de Thales adecuadamente, los estudiantes pueden calcular la longitud del segmento CE y así completar las longitudes de la pared.

Se sugiere que el profesor plantee a los estudiantes explorar, visualizar y plantear las distintas maneras que puede haber para solucionar la situación planteada. Es una manera de motivar a los estudiantes a que mejoren e incrementen su nivel de razonamiento.

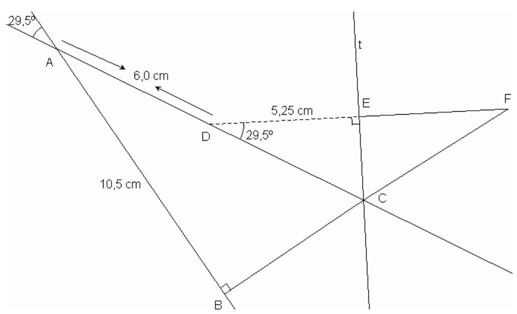
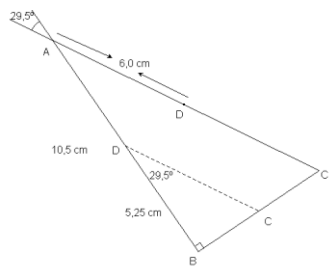
</td></tr>
</table>

ACTIVIDAD 37. (Nivel 2- Fase de orientación libre)

Tiempo estimado para su desarrollo: 15 minutos.

Objetivos de la actividad

- Resolver situaciones matemáticas haciendo uso, preferiblemente, de la semejanza y sus propiedades desarrolladas en sesiones de clase anteriores.
- Utilizar isometrías como herramienta de construcción o demostración en la situación presentada.

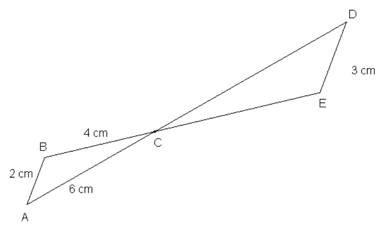
ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
Determine la longitud de la hipotenusa del triángulo CEF, sabiendo que el triángulo CDF es isósceles. Justifique el proceso que lo condujo a la respuesta.  	El objetivo de esta actividad es inducir a los estudiantes a que utilicen las diferentes herramientas que se han venido desarrollando en la resolución de la situación planteada. Una posible forma de solución es que los estudiantes visualicen una relación de semejanza entre los triángulos rectángulos (ABC y CDE) del dibujo, efectuando las transformaciones geométricas adecuadas y replanteando el dibujo dado como aparece a continuación.  Es decir, se formó una configuración de Thales en aspecto de homotecia (en forma de pico) entre los dos triángulos rectángulos. De esta manera pueden plantear, por ejemplo, la equivalencia de razones externas 10,5/5,25= (6+CD)/CD. Como el triángulo CDF es isósceles entonces el segmento CD es congruente a CF que es el valor de la hipotenusa pedido. Se sugiere que el profesor plantee a los estudiantes explorar, visualizar y plantear las distintas maneras que puede haber para solucionar la situación planteada. Es una manera de motivar a los estudiantes a que mejoren e incrementen su nivel de razonamiento.

ACTIVIDAD 38. (Nivel 2- Fase de orientación libre)

Tiempo estimado para su desarrollo: 15 minutos.

Objetivos de la actividad

- Resolver situaciones matemáticas haciendo uso, preferiblemente, de la semejanza y sus propiedades desarrolladas en sesiones de clase anteriores.

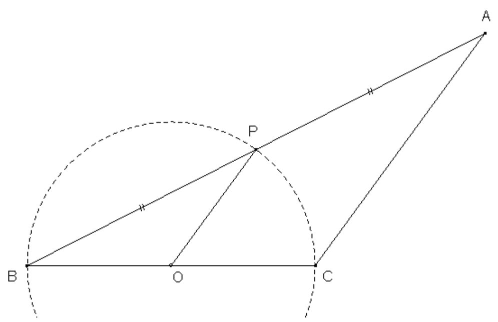
ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
1) Un triángulo rectángulo tiene catetos que miden 2 cms y 3 cms. ¿Qué dimensión debe tener un cateto de un triángulo semejante si el otro cateto mide 10 cms? Justifique sus respuestas. **2)** Dos triángulos ABC y CDE comparten el vértice C. Los lados AC y CD pertenecen a una misma recta, al igual que los lados BC y CE. Los lados opuestos al vértice común son paralelos y miden AB=2 cms; DE= 3 cms. Los otros dos lados del triángulo ABC miden 4cms y 6cms. Determine las longitudes de los lados CE y CD. Justifique el procedimiento utilizado.	El objetivo de esta actividad es inducir a los estudiantes a que utilicen las diferentes herramientas que se han venido desarrollando en la resolución de las situaciones planteadas. En la primera parte de la actividad se espera que los estudiantes realicen un dibujo que bosqueje la situación planteada, la cual, se espera, los induzca a plantear las dos diferentes posibilidades de solución. Por ejemplo, que planteen la equivalencia de razones externas $2/X=3/10$ ó la otra posibilidad, la equivalencia de las razones externas $2/10= 3/X$. En la parte 1, el profesor debe saber que hay dos soluciones y tener preparado una estrategia para el caso en que no surjan ambas de manera espontánea en las soluciones de los estudiantes. En la segunda parte de la actividad, de igual manera, se espera que los estudiantes elaboren un dibujo que los oriente en el planteamiento de la solución. El siguiente dibujo bosqueja la situación.  Los estudiantes pueden percatarse de que el dibujo, con sus características, corresponde a una configuración de Thales en aspecto de homotecia (en forma de mariposa). Tal configuración permite plantear, por ejemplo, las siguientes equivalencias de razones externas 2/3=4/CE y 2/3=6/CD. Se sugiere que el profesor plantee a los estudiantes explorar, visualizar y plantear las distintas maneras que puede haber para solucionar las situaciones planteadas. Es una manera de motivar a los estudiantes a que mejoren e incrementen su nivel de razonamiento.

ACTIVIDAD 39. (Nivel 2- Fase de orientación libre)

Tiempo estimado para su desarrollo: 15 minutos.

Objetivos de la actividad

- Resolver situaciones matemáticas haciendo uso, preferiblemente, de la semejanza y sus propiedades desarrolladas en sesiones de clase anteriores.

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
Compare los segmentos BC y AC. Justifique su respuesta.  	El objetivo de esta actividad es inducir a los estudiantes a que utilicen las diferentes herramientas que se han venido desarrollando en la resolución de la situación planteada. Una forma que, en principio, podrían usar los estudiantes es tomar las medidas de los segmentos BC y AC y comprobar por este medio que los dos segmentos son iguales. Esta forma de solución, en este momento del desarrollo del tema, no debe ser aceptada por el profesor como completa. Es decir, los estudiantes deben intentar escribir una demostración al menos de manera informal. Otra forma de solución, es que los estudiantes visualicen y justifiquen que los triángulos BOP y BCA pertenecen a una configuración de Thales en aspecto de homotecia (en forma de pico) y que por lo tanto dichos triángulos son semejantes. Esto permite plantear la equivalencia de razones externas BC/BO=AC/OP. Lo cual implica que BC=AC ya que BO y OP son iguales por ser radios de la misma circunferencia. Si los estudiantes empiezan a resolver el problema midiendo, y esto les convence hasta el punto de dar sólo una respuesta métrica, el profesor debe estar preparado para seguir la estrategia (típica de los entornos de Cabri) de cambiar su postura y pedirles demostrar la igualdad. Se sugiere que el profesor plantee a los estudiantes explorar, visualizar y plantear las distintas maneras que puede haber para solucionar las situaciones planteadas. Es una manera de motivar a los estudiantes a que mejoren e incrementen su nivel de razonamiento.

ACTIVIDAD 40. (Nivel 2- Fase de orientación libre)

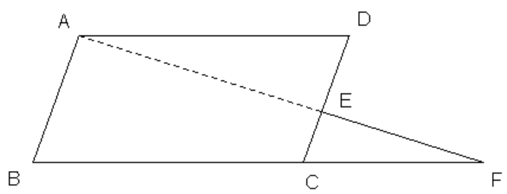
Tiempo estimado para su desarrollo: 15 minutos.

Objetivos de la actividad

- Resolver situaciones de la vida diaria haciendo uso, preferiblemente, de la semejanza y sus propiedades desarrolladas en sesiones de clase anteriores.

<table>
<tr><th>ACTIVIDAD</th><th>DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS</th></tr>
<tr><td>

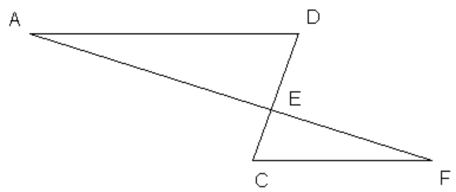
Un terreno para la agricultura tiene forma de paralelogramo (ABCD) y las longitudes de sus lados son 30 mts y 60 mts. El propietario de dicho terreno ha delimitado un terreno adjunto para construir un gallinero de forma triangular (CEF) y desea saber cuál es la mínima cantidad de metros de malla para encerrar el gallinero. El propietario conoce también las longitudes desde el punto A hasta E (56,5 mts) y desde el punto C al F (40 mts). Escriba un procedimiento para ayudar a resolver esta situación.

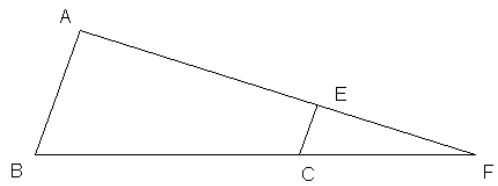


</td><td>

El objetivo de esta actividad es inducir a los estudiantes a que utilicen las diferentes herramientas que se han venido desarrollando en la resolución de la situación planteada.

Una forma de posible solución que pueden usar los estudiantes es visualizar dos configuraciones de Thales entremezcladas como aparece a continuación.





En la primera configuración (en forma de mariposa) los estudiantes podrían plantear la equivalencia de razones internas 60/56,5=40/EF.

Después de obtener el valor de EF (37,66 mts) y utilizándolo en la segunda configuración (en forma de pico) los estudiantes podrían plantear la equivalencia de razones externas 30/CE=100/40.

Obtenidos los valores de EF y CE los estudiantes ya pueden completar la solución a la situación.

Se sugiere que el profesor plantee a los estudiantes explorar, visualizar y plantear las distintas maneras que puede haber para solucionar las situaciones planteadas. Es una manera de motivar a los estudiantes a que mejoren e incrementen su nivel de razonamiento.

</td></tr>
</table>

ACTIVIDAD 41. (Nivel 2- Fase de orientación dirigida)

Tiempo estimado para su desarrollo: 15 minutos.

Objetivos de la actividad

- Analizar, comprender y aplicar el concepto de *escala* basados en los trabajos previos sobre semejanza de figuras planas.

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
Sabemos que las fotografías, mapas, planos y maquetas, etc. son semejantes a la realidad que representan. Por eso suelen hacer referencia a la ***escala*** con la que se han construido. ***Escala*** es el cociente entre cada longitud de la representación (foto, mapa, plano, maqueta) y la correspondiente longitud en la realidad. Es, por tanto, el **factor de semejanza** entre la reproducción y la realidad. **1)** En una fotografía tomada a la torre Eiffel de París, ésta midió 12 cms de altura. Si la fotografía representa una escala de 1: 2500, ¿cuál es la altura de la torre? **2)** En un mapa a escala 1:1 000000 la distancia entre Bucaramanga y Pamplona es de 12,4 cms. ¿Cuál es la distancia real en las dos ciudades? La distancia real entre Pamplona y Cúcuta es de 75 kms. ¿A qué distancia estarán en el mismo mapa?	El objetivo de esta actividad es que los estudiantes analicen, comprendan y apliquen el concepto de escala, basados en los trabajos previos de semejanza de figuras planas. Un aspecto en el cual el profesor debe insistir es en la comprensión del concepto de *escala* como equivalente al concepto de *factor de semejanza*. El estudiante debe comprender las posibilidades en las que se puede encontrar la aplicación del concepto de escala. Por ejemplo, en la segunda situación aparecen dos: una, dada la escala y una medida en el mapa otra, dada la escala y una medida en la realidad. Se sugiere que el profesor plantee a los estudiantes explorar, visualizar y plantear las distintas maneras que puede haber para solucionar las situaciones planteadas. Es una manera de motivar a los estudiantes a que mejoren e incrementen su nivel de razonamiento.

ACTIVIDAD 42. (Nivel 2- Fase de orientación libre)

Tiempo estimado para su desarrollo: 30 minutos.

Objetivos de la actividad

- Resolver situaciones de la vida diaria haciendo uso, preferiblemente, de la semejanza y sus propiedades desarrolladas en sesiones de clase anteriores.

ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS
1) Realice un dibujo a escala del campo de básquetbol (incluyendo las líneas reglamentarias) del colegio. El campo debe quedar completamente dibujado en esta hoja. **2)** En la fotografía a continuación aparece el Obelisco de la Plazuela Almeyda ¿En qué escala aparece el Obelisco? Justifique el procedimiento utilizado. 	El objetivo de esta actividad es inducir a los estudiantes a que utilicen el concepto de escala y las diferentes herramientas que se han venido desarrollando en la resolución de las situaciones planteadas. El profesor con anticipación debe sugerir a los estudiantes que lleven al aula de clase un elemento de medición como puede ser un decámetro o un metro. Además, con anticipación, debe conocer la disponibilidad del campo de básquetbol de tal manera que los estudiantes puedan realizar la actividad allí. En la parte 1, la idea de proponerles que el dibujo a escala quede dibujado en la hoja de trabajo, es que los estudiantes escojan la escala que prefieran pero adecuada. En la parte 2, al tener disponible sólo las dimensiones del Obelisco en la foto, los estudiantes deberán calcular alguna dimensión del monumento real, para lo cual deberán usar algún procedimiento de semejanza estudiado en el curso. Se sugiere que el profesor plantee a los estudiantes explorar, visualizar y plantear las distintas maneras que puede haber para solucionar las situaciones planteadas. Es una manera de motivar a los estudiantes a que mejoren e incrementen su nivel de razonamiento.

ACTIVIDAD 43. (Nivel 2- Fase de integración)

Tiempo estimado para su desarrollo: 25 minutos.

Objetivos de la actividad

- Analizar, comprender y justificar la semejanza de figuras planas.
- Comprender el nivel de aprendizaje global en el tema de estudio.

<table>
<tr><th>ACTIVIDAD</th><th>DESCRIPCIÓN, OBSERVACIONES, SUGERENCIAS Y COMENTARIOS</th></tr>
<tr><td>
Complete la siguiente tabla utilizando una “X” donde corresponda. Debe argumentar, para cada ítem, su respuesta. Puede utilizar argumentos de todo tipo (gráficos, analíticos, verbales, etc.).
<table>
<tr><th>Ítem</th><th>¿Son semejantes?</th><th>Siempre</th><th>A veces</th><th>Nunca</th><th>No lo se</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Dos cuadrados</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>Dos triángulos isósceles</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>Dos triángulos congruentes</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>Un rectángulo y un cuadrado</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>Un rectángulo y un triángulo</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>Dos rectángulos</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>Dos triángulos equiláteros</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>Dos cuadriláteros, cada uno teniendo todos lo lados de longitud 1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td>Dos triángulos rectángulos</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td>Dos hexágonos regulares</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
Argumentaciones:
</td><td>
El objetivo de esta actividad es inducir a los estudiantes a que utilicen las diferentes herramientas que se han venido desarrollando en el transcurso de la unidad de enseñanza.

El profesor puede aprovechar esta actividad para insistir a los estudiantes en las diferentes formas para justificar la respuesta. Es de particular interés observar y analizar el tipo de representación que usan los estudiantes en sus justificaciones. Por tal motivo es imprescindible que el profesor esté atento a que los estudiantes no sólo marquen la respuesta que consideren, sino que además la justifiquen.

Esta es una actividad que permite al profesor verificar el avance que han alcanzado los estudiantes en el tema estudiado, por ejemplo, comparando los resultados con los obtenidos en la actividad 11.

Se sugiere que el profesor esté atento al tipo de dibujos que realizan los estudiantes. Esto con el fin de motivarlos a que planteen dibujos diferentes a los típicos en posición estándar, con el objeto de avanzar en la eliminación de estereotipos que son muy habituales en la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Es importante que el profesor plantee a los estudiantes explorar y visualizar las posibilidades que se puedan presentar en la solución de los ítems planteados.
</td></tr>
</table>

ANEXO 2.

GUIÓN DE LA ENTREVISTA INICIAL CON EL PROFESOR (CUESTIONARIOS I Y II)

CUESTIONARIO I

1) ¿Cuál es tu formación académica?

2) ¿Cuántos años de experiencia tienes en la enseñanza de la matemática? ¿Cuántos en este grado?

3) ¿Asiste a cursos de desarrollo profesional específicos en matemáticas y/o en su didáctica? ¿Por qué? ¿Con qué frecuencia?

4) Si tuvieras la oportunidad de cambiar de trabajo ahora, ¿Qué preferirías hacer?

5) ¿Cuáles son, desde tu punto de vista, los principales objetivos del estudio de la matemática?

6) ¿Cómo definirías la matemática? (conjunto de hechos, conjunto de ideas, procesos mentales, etc.)

7) ¿En tu práctica de enseñanza intentas, conscientemente, imitar la forma como tus profesores te enseñaron?

8) ¿Cómo crees que puede aprenderse mejor la matemática, es decir, cuál estimas que es la mejor vía para aproximarse al conocimiento matemático?

9) ¿De una buena enseñanza se obtiene necesariamente un buen aprendizaje? Si no es así, ¿qué puede explicar que no ocurra?

10) ¿Qué papel desempeñan para ti los algoritmos y fórmulas dentro de la enseñanza de la matemática?

11) ¿Qué papel desempeñan para ti las demostraciones dentro de la enseñanza de la matemática?

12) ¿Qué papel desempeñan para ti las definiciones dentro de la enseñanza de la matemática?

13) ¿Tienes en cuenta el nivel de razonamiento de los estudiantes al enseñar? ¿De qué manera?

14) ¿Conoces las fases del modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele? ¿Qué conoces?

15) ¿Qué importancia crees que tiene la semejanza de figuras planas dentro del currículo?

16) ¿Cómo abordarías la enseñanza: a) del teorema de Thales?
b) de la semejanza de figuras planas?

17) Describa los errores que, desde tu punto de vista, cometen tus estudiantes con más frecuencia cuando se les enseña la semejanza de figuras planas.

18) La semejanza como objeto de enseñanza puede verse, principalmente, como relación intrafigural, como transformación geométrica vista como objeto matemático, y como transformación geométrica vista como útil. ¿Qué conoces de estas formas de ver la semejanza?

19) ¿Qué es lo más importante que deberían aprender los estudiantes de la matemática?

20) ¿Conoces los niveles del modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele? ¿Qué conoces?

CUESTIONARIO II

1) *¿Qué proceso sigues al preparar materiales para la clase de matemáticas?*

Cuando preparo materiales para la clase de matemáticas:

– trato de cumplir unas condiciones generales fijadas previamente	1 2 3 4 5
– reflexiono sobre el currículo	1 2 3 4 5
– reflexiono sobre el proceso de aprendizaje	1 2 3 4 5
– busco información en libros y otros materiales disponibles	1 2 3 4 5
– busco listas de ejercicios, ejemplos y actividades de motivación	1 2 3 4 5
– pido información a los compañeros	1 2 3 4 5
– elaboro listas de problemas, ejercicios y actividades	1 2 3 4 5
– elaboro documentos sobre contenidos y otros materiales	1 2 3 4 5

2) *¿Qué contenidos son los más importantes en la enseñanza-aprendizaje de la matemática?*

Los contenidos matemáticos más importantes son:

– aquéllos que potencian la abstracción, la simbolización o algún otro rasgo específico del conocimiento matemático	1 2 3 4 5
– los útiles para la vida real	1 2 3 4 5
– los que tienen implicaciones curriculares posteriores	1 2 3 4 5
– los pertenecientes a determinadas disciplinas matemáticas	1 2 3 4 5
– los conceptuales	1 2 3 4 5
– los procedimentales	1 2 3 4 5
– los actitudinales	1 2 3 4 5

3) ¿Qué actividades del profesor son más recomendables para enseñar matemática?

En la enseñanza secundaria, las actividades más adecuadas para enseñar matemática son las que destacan:

– el trabajo intelectual de los estudiantes razonando, analizando	1 2 3 4 5
– la dinámica de trabajo de los estudiantes	1 2 3 4 5
– la utilidad y conexión de las temáticas con situaciones reales	1 2 3 4 5
– el planteamiento de ejercicios y prácticas para adquirir destreza con los algoritmos	1 2 3 4 5

– la inducción en los estudiantes de la motivación y el interés por la matemática 1 2 3 4 5

4) *¿Qué actitud tomas ante la propuesta de un nuevo currículo o una nueva forma de enseñanza de un tema de matemáticas?*

La actitud debería ser de:

– mente abierta y tratar de valorarla y experimentarla 1 2 3 4 5

– compromiso con sus colegas de la institución para estudiarla, valorarla, experimentarla, proponer sugerencias, etc. 1 2 3 4 5

– ignorarla en vista de que la que utiliza actualmente da buenos resultados 1 2 3 4 5

5) *¿Por qué deben los estudiantes estudiar matemática en la enseñanza secundaria?*

Se debe estudiar matemática:

– por el carácter formativo de la materia 1 2 3 4 5

– por razones de utilidad social y profesional 1 2 3 4 5

– por su interés dentro del propio sistema educativo 1 2 3 4 5

6) *¿Cómo se aprende la matemática?*

La matemática se aprende:

– mediante el esfuerzo y el trabajo personal 1 2 3 4 5

– mediante ayudas externas, correcciones y explicaciones 1 2 3 4 5

– por predisposición natural del alumno o por motivación 1 2 3 4 5

– mediante incremento de algún tipo de conocimiento o capacidad 1 2 3 4 5

– estimulando procesos cognitivos y fomentando ciertas actividades 1 2 3 4 5

7) *¿Qué hechos te hacen pensar que has realizado un buen trabajo enseñando un tema de matemáticas?*

Me siento satisfecho de mi trabajo cuando:

– observo un buen ambiente en el aula 1 2 3 4 5

– aprecio interés y participación de los estudiantes en el aula 1 2 3 4 5

– hay avance en el aprendizaje de los estudiantes 1 2 3 4 5

– los estudiantes obtienen buenos resultados en la evaluación 1 2 3 4 5

8) *¿Quién piensas que es un buen estudiante de matemáticas?*

Para mí un buen estudiante es:

– quien tiene buenas capacidades intelectuales 1 2 3 4 5

– el que se esfuerza y trabaja; aunque no obtenga buenas calificaciones 1 2 3 4 5

– quien está motivado por la matemática 1 2 3 4 5

– el que es responsable, solidario, participativo 1 2 3 4 5

9) *¿En qué aspectos podría aumentarse la cualificación profesional de los profesores de matemáticas de secundaria?*

La cualificación de los profesores podría aumentarse:

– al mejorar en el conocimiento de la matemática 1 2 3 4 5

– al profundizar el conocimiento didáctico 1 2 3 4 5

– en la formación práctica y el conocimiento de recursos 1 2 3 4 5

– mediante la comunicación y el intercambio de experiencias 1 2 3 4 5

10) *¿A qué son debidas las dificultades de la enseñanza de la matemática en la secundaria?*

Las principales dificultades en la enseñanza de la matemática son debidas:

– a los estudiantes 1 2 3 4 5

– a la materia 1 2 3 4 5

– a los profesores 1 2 3 4 5

– al sistema educativo y el currículo 1 2 3 4 5

11) *¿Qué papel juegan los errores de tus estudiantes en tus clases de matemática?*

Los errores sirven:

– para diagnosticar el conocimiento y corregir deficiencias 1 2 3 4 5

– como factor o condición para el aprendizaje 1 2 3 4 5

– para valorar y reconsiderar la planificación o programación 1 2 3 4 5

– para realizar algún tipo de clasificación en los estudiantes 1 2 3 4 5

– ninguno 1 2 3 4 5

12) *¿Qué papel juegan las imágenes (figuras, diagramas, etc.) en la enseñanza-aprendizaje de la matemática en secundaria?*

Las imágenes sirven:

– como factor o condición necesario para el aprendizaje	1 2 3 4 5
– para diagnosticar el conocimiento de los estudiantes	1 2 3 4 5
– para facilitar el proceso de enseñanza	1 2 3 4 5
– para valorar las habilidades de dibujo de los estudiantes	1 2 3 4 5

ANEXO 3.

GUIÓN DE LAS ENTREVISTAS SEMIESTRUCTURADAS CON EL PROFESOR

SESIÓN Nº	PRE y POST-SESIÓN
1	**Antes de la sesión**
(Act. 1 - 4) ***Nivel 1*** ***Fase de Información***	***Descripción:*** En la entrevista preliminar has dicho que enfocas la enseñanza del tema usando la noción intuitiva de figuras que tienen la misma forma. ¿Deseas agregar algo más al respecto? ***Información:*** ¿Cuál crees que es el sentido de este enfoque? ***Confrontación:*** La expresión la "misma forma" tiene diferentes significados en el lenguaje cotidiano, ¿cómo hacer entender a los estudiantes esta expresión desde el punto de vista geométrico? ¿Por qué crees que dentro del material (para los estudiantes) no aparecen hojas cuadriculadas? Estamos tratando de desarrollar una secuencia de actividades pero, a lo mejor, nos estamos dejando de desarrollar otras que pudieran valer la pena ¿Qué piensas de esto? ***Reconstrucción:*** ¿Qué opinas del siguiente planteamiento respecto de la enseñanza del tema? Plantear la noción intuitiva de la "misma forma" para figuras semejantes y "ser parecidos" para figuras no semejantes. Posteriormente, guiar el descubrimiento de las condiciones matemáticas para la semejanza.
	Después de la sesión
	Descripción: ¿Qué dificultades has visto en los estudiantes que no habías previsto antes? ***Información:*** ¿Crees que otro enfoque de enseñanza hubiera disminuido las dificultades de los estudiantes? ¿Cuál? ***Confrontación:*** ¿Un mejor enfoque de enseñanza hubiera sido el que presentan muchos libros de texto, empezar por las condiciones matemáticas para semejanza de figuras planas? En clase, has dicho a los estudiantes que en esta experiencia deben trabajar de manera diferente a lo habitual, es decir, las conclusiones y justificaciones las escriben de manera grupal; pero que ahora, discuten grupalmente y que cada uno escribe sus propias conclusiones y justificaciones ¿Consideras que es más útil esta forma de trabajo que la que venías utilizando? ¿Por qué? Al

SESIÓN Nº	PRE y POST-SESIÓN
	terminar la primera sesión de clase he echado en falta un momento final para conclusiones y que, inclusive, los estudiantes las hubieran escrito en su cuaderno de notas ¿Cuál es el por qué de esta situación? ***Reconstrucción:*** ¿Qué te queda ahora más claro respecto de la sesión anterior? ¿Qué has aprendido? ¿Qué aspectos de tu práctica crees que se deben cambiar en las siguientes sesiones de clase?
2 **(Act. 5 - 9)** ***Nivel 2*** ***Fase de Información***	**Antes de la sesión**
	Descripción: ¿Qué consideras que es lo más relevante de lo que enseñarás en la siguiente sesión? ***Información:*** ¿Por qué lo consideras? ***Confrontación:*** Las actividades planteadas para esta sesión están clasificadas en la Fase de Información (Nivel 2) ¿Estás de acuerdo con esto? ***Reconstrucción:*** ¿Qué opinas de aquellos estudiantes que intentarán realizar mediciones en las figuras dadas? y ¿De los que intentarán recortar y comparar? ¿Es conveniente? ¿Es un avance en su aprendizaje?
	Después de la sesión
	Descripción: ¿Qué dificultades has visto en los estudiantes que no habías previsto antes? ¿Tuvieron dificultad los estudiantes al pasar de fotografías a figuras geométricas? ¿Cómo se hubiera podido evitar esto? ***Información:*** ¿Crees que otro enfoque de enseñanza hubiera disminuido las dificultades de los estudiantes? ¿Cuál? ***Confrontación:*** En la entrevista preliminar planteaste que enseñas el tema partiendo de la noción intuitiva "misma forma" y luego, planteas ejemplos y ejercicios. La propuesta de esta sesión incluye el descubrimiento guiado de las condiciones matemáticas de la semejanza ¿Consideras acertado este planteamiento? ¿Por qué? Nuevamente, he echado en falta un momento final para conclusiones y que, inclusive, los estudiantes las escriban en su cuaderno de notas ¿Cuál es el por qué de esta situación? ***Reconstrucción:*** ¿Qué te queda ahora más claro respecto de la

SESIÓN Nº	PRE y POST-SESIÓN
	sesión anterior? ¿Qué has aprendido?
3 **(Act. 10 - 12)** ***Nivel 2*** ***Fase de Orientación Dirigida***	**Antes de la sesión**
	Descripción: ¿Qué consideras que es lo más relevante de lo que enseñarás en la siguiente sesión? ¿Qué opinión tienes acerca del diseño de la actividad Nº 11? ¿Cambiarías algo? ¿Agregarías algo? ***Información:*** Has recibido información de mi parte respecto a las estrategias, dificultades y errores de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas relacionadas con la semejanza ¿Esta información tiene alguna aplicabilidad en tu práctica? ¿Cómo? ¿Los resultados de investigaciones en Didáctica de la Matemática sirven a los profesores para algo? ***Confrontación:*** ¿Con cuáles figuras empezabas a abordar la semejanza? ¿Cuál era la razón de esto? ¿Qué sucedería si empiezas con otras figuras? ***Reconstrucción:*** ¿Qué resultados y/o propiedades matemáticas aprenderán los estudiantes en esta sesión de clase?
	Después de la sesión
	Descripción: ¿Qué dificultades has visto en los estudiantes que no habías previsto antes? ***Información:*** ¿En la clase hubo estudiantes que decidieron la semejanza usando la noción intuitiva "misma forma"? ¿Qué opinas de este suceso? ¿En posteriores sesiones de clase reforzarías algún aspecto de la enseñanza respecto a este suceso? ***Confrontación:*** ¿Crees que otro enfoque de enseñanza hubiera disminuido las dificultades de los estudiantes? ¿Cuál? ¿Qué planteas como forma de avanzar en el razonamiento de los estudiantes al presentarse este suceso? Debe haber un momento en el que se da un "salto" entre el reconocimiento puramente visual de las propiedades de la semejanza y la verificación matemática de dichas propiedades ¿Eres consciente de este "salto"? ¿De qué manera te haces consciente? He notado que algunos estudiantes aún tienen dificultad en el reconocimiento de la relación "misma forma" en rectángulos, es decir, piensan que todos

SESIÓN Nº	PRE y POST-SESIÓN
	los rectángulos tienen la misma forma ¿Cuál crees que es la razón de esto? ¿Qué propones para que estos estudiantes avancen en su nivel de razonamiento? ¿Por qué has decidido dejar a los estudiantes las actividades 8 y 12 como trabajo de casa? ***Reconstrucción:*** ¿Qué te queda ahora más claro respecto de la sesión anterior? ¿Qué has aprendido?
4 **(Act. 13 - 15)** ***Nivel 2*** ***Fase de Orientación Dirigida***	**Antes de la sesión**
	Descripción: ¿Qué procedimientos conoces para la construcción de figuras semejantes a otra? ¿Qué procedimientos conoces para determinar el factor de semejanza dada una figura y su ampliación o reducción? ***Información:*** De los procedimientos que conoces (para construir figuras semejantes a otra y para determinar el factor de semejanza dada una figura y su ampliación o reducción) ¿Cuáles has enseñado a tus estudiantes? ¿En cursos anteriores, tus estudiantes han tenido buenos resultados con estos procedimientos? ***Confrontación:*** Las actividades planteadas para esta sesión están clasificadas en la fase de Orientación Dirigida (Nivel 2 de Van Hiele) ¿Estás de acuerdo con esto? ¿Sugieres alguna organización diferente? ¿Consideras que el concepto de paralelismo debería usarse antes que el de proporcionalidad al momento de desarrollar la semejanza? ¿Qué opinas de enseñar a los estudiantes a reconocer la semejanza como ampliación-reducción de una forma respecto a la otra? ¿Qué opinas de definir la semejanza como ampliación o reducción usando paralelismo con centro dado? ***Reconstrucción:*** ¿Qué resultados y/o propiedades matemáticas aprenderán los estudiantes en esta sesión de clase?
	Después de la sesión
	Descripción: ¿Qué dificultades has visto en los estudiantes que no habías previsto antes? ¿Hubo dificultades o errores sobre los cuales ya se había trabajado? ***Información:*** ¿Cómo solventarás esta situación?

SESIÓN Nº	PRE y POST-SESIÓN
	Confrontación: ¿Reconocer el paralelismo dada la proporcionalidad es algo que se observa con evidencia visual o es fruto de un proceso deductivo? Explica. En desarrollo de alguna actividad noté que usas términos diferentes para referirte a una misma cosa, por ejemplo, factor de semejanza, factor de elongación, factor de reducción, factor de proporcionalidad ¿Crees que esto favorece el aprendizaje? ***Reconstrucción:*** ¿Qué cambiarías de lo que hemos usado en el desarrollo de las actividades hasta el momento? ¿Qué has aprendido al participar en este proyecto respecto de la planificación? ¿Qué has aprendido o de qué te has hecho consciente (en aspectos diferentes a la planificación)?
5	**Antes de la sesión**
(Act. 16 - 18) ***Nivel 2*** ***Fase*** ***Orientación*** ***Dirigida***	***Descripción:*** ¿Qué consideras que es lo más relevante de lo que enseñarás en la siguiente sesión? ¿Por qué? ¿Qué dificultades crees que tendrán los estudiantes? ***Información:*** ¿Conoces una manera diferente (a la expresada en la primera sesión de entrevista) de aproximación al concepto de semejanza? Si la respuesta es sí ¿La has usado antes? ¿Qué relación entre segmentos es fundamental para entender el concepto de homotecia? ***Confrontación:*** De acuerdo con el diagrama 1 (información que te he entregado en la descripción de las actividades 16-18) ¿Qué importancia crees que tiene "ver" la semejanza de triángulos como formando parte de una configuración de Thales en aspecto de homotecia? ¿Qué importancia crees que tiene "ver" la semejanza de figuras planas (que no forman parte de una configuración de Thales) en disposición homotética? ¿La colocación del centro de homotecia piensas que puede influir en que los estudiantes reconozcan ciertas relaciones, por ejemplo, relación con las isometrías del plano, relación con la ampliación y reducción de figuras? ¿Qué opinas de que tu no deberías darles soluciones (por lo menos no al principio, sino después de que ellos lo hayan intentado), sino fomentar que los mismos estudiantes mejoren sus argumentos? ¿Es relevante en la enseñanza reconocer la semejanza por la igualdad de formas mediante homotecia? ¿Por qué? ¿Eres

SESIÓN Nº	PRE y POST-SESIÓN
	consciente de la conexión entre la semejanza y la homotecia? ¿Cómo? **_Reconstrucción:_** ¿Qué resultados y/o propiedades matemáticas aprenderán los estudiantes en esta sesión de clase?
	Después de la sesión
	Descripción: A los estudiantes ya se les había enseñado la homotecia en un curso anterior ¿Los estudiantes recordaban el concepto? ¿Con qué profundidad? ¿Qué dificultades has visto en los estudiantes que no habías previsto antes? **_Información:_** ¿Crees que otro enfoque de enseñanza hubiera disminuido las dificultades de los estudiantes? ¿Cuál? **_Confrontación:_** ¿Un mejor enfoque de enseñanza de la homotecia hubiera sido el que tú has venido utilizando en cursos anteriores? Después de esta sesión de clase, con lo que sabían y con lo que recordaron ¿Consideras que los estudiantes verbalizaron las diferentes maneras de verificar si dos o más figuras son homotéticas? Si la respuesta es sí, justifícalo. Si la respuesta es no ¿Cómo se podría lograr? ¿Qué consideras que es mejor: empezar por "ver" el paralelismo entre lados homólogos y el centro de homotecia, y después reconocer las figuras semejantes por la igualdad de formas o al revés? ¿Los estudiantes lograron comprender la conexión entre la semejanza y la homotecia? Justifícalo. **_Reconstrucción:_** ¿Qué te queda ahora más claro (matemáticamente, didácticamente, respecto de la gestión de la clase) respecto de la sesión anterior? ¿Qué has aprendido? ¿Qué aspectos de tu práctica crees que se deben cambiar en las siguientes sesiones de clase?
6	**Antes de la sesión**
(Act. 19 - 21) **_Act. 19 y 21: Nivel 2 Fase Orientación Dirigida_**	**_Descripción:_** ¿Qué consideras que es lo más relevante de lo que enseñarás en la siguiente sesión? ¿Por qué lo consideras? **_Información:_** ¿Conoces algún Software de Geometría Dinámica (SGD)? ¿Cuál? ¿Lo integras a tu actividad ordinaria de enseñanza? ¿Cómo? Si no lo integras ¿Por qué? **_Confrontación:_** La actividad 19 está diseñada para ser desarrollada con Cabri (SGD) ¿Cuál es tu opinión acerca del diseño? ¿Acerca de su

SESIÓN Nº	PRE y POST-SESIÓN
Act. 20: ***Nivel 2*** ***Fase de Integración***	alcance? ¿Qué opinas acerca del uso de la tecnología en la enseñanza de la semejanza? ¿En la enseñanza de la geometría? ¿Es relevante en la enseñanza reconocer la semejanza por la igualdad de formas mediante configuración de Thales con centro explícito? ¿Por qué? ¿Eres consciente de la conexión entre la semejanza y el teorema de Thales? ¿Cómo? ***Reconstrucción:*** ¿Qué resultados y/o propiedades matemáticas aprenderán los estudiantes en esta sesión de clase?
	Después de la sesión
	Descripción: ¿Qué dificultades has visto en los estudiantes que no habías previsto antes? ***Información:*** ¿Crees que otro enfoque de enseñanza hubiera disminuido las dificultades de los estudiantes? ¿Cuál? ***Confrontación:*** ¿Crees que la manera como enfocabas la enseñanza del teorema de Thales, en tu actividad ordinaria, hubiera disminuido las dificultades de los estudiantes? Justifícalo ¿Consideras que los estudiantes verbalizaron mejor el teorema de Thales por haber realizado la actividad 19 con Cabri? ¿Por qué? ¿Habías visto o imaginado diferentes configuraciones gráficas del teorema de Thales como aparecen en la actividad 20? ¿Crees que es importante que los estudiantes reconozcan y comprendan dichas configuraciones gráficas del teorema de Thales? ¿Por qué? ¿Los estudiantes lograron comprender la conexión entre la semejanza y el teorema de Thales? Justifícalo. ***Reconstrucción:*** ¿Qué te queda ahora más claro respecto de la sesión anterior? ¿Qué has aprendido? ¿Qué aspectos, de tu práctica, crees que se deben cambiar en las siguientes sesiones de clase?
7 **(Act. 22 - 29)** ***Act. 23 - 29:*** ***Nivel 2*** ***Fase Orientación Libre***	**Antes de la sesión** ***Descripción:*** ¿Qué consideras que es lo más relevante de lo que enseñarás en la siguiente sesión? ¿Por qué lo consideras? ***Información:*** En el diagrama 2 de la descripción que te he entregado aparecen tres tipos de configuración de Thales que con mayor frecuencia se presentan ¿Los conocías? ¿Los resaltas en la enseñanza?

SESIÓN Nº	PRE y POST-SESIÓN
Act. 22: Nivel 2 Fase de Integración	¿Por qué? ***Confrontación:*** La actividad 22 está diseñada con el fin de sintetizar las conexiones entre la homotecia, el teorema de Thales, y la semejanza ¿Cuál es tu opinión acerca del diseño? ¿Acerca de su alcance? ¿Qué importancia crees que tiene que los estudiantes conozcan los diferentes tipos de configuraciones de Thales? ¿Qué importancia das a los diferentes elementos que intervienen (o pueden intervenir) en la resolución de las actividades 23 y 24: Exploración visual de las figuras dadas, identificación de figuras semejantes, búsqueda analítica de relaciones entre las figuras o sus elementos, y justificación (demostración) de la veracidad de las relaciones enunciadas? Las actividades 23 y 24 se basan en una o dos implicaciones que se pueden plantear de manera abstracta aunque estén basadas en la visualización y el ejemplo específico propuesto ¿Consideras que las justificaciones de algunos estudiantes (los mejores) podrían apuntar al Nivel 3 de Van Hiele, es decir, apuntar a una demostración en este nivel? ***Reconstrucción:*** ¿Qué resultados y/o propiedades matemáticas aprenderán los estudiantes en esta sesión de clase?
	Después de la sesión
	Descripción: ¿Qué dificultades has visto en los estudiantes que no habías previsto antes? ***Información:*** ¿Crees que otro enfoque de enseñanza hubiera disminuido las dificultades de los estudiantes? ¿Cuál? ***Confrontación:*** ¿Crees que es importante que los estudiantes reconozcan y comprendan algunos de los diferentes tipos de configuraciones de Thales? ¿Por qué? ***Reconstrucción:*** ¿Qué te queda ahora más claro respecto de la sesión anterior? ¿Qué has aprendido? ¿Qué aspectos, de tu práctica, crees que se deben cambiar en las siguientes sesiones de clase?
8	**Antes de la sesión**
(Act. 30 - 31)	***Descripción:*** ¿Qué consideras que es lo más relevante de lo que

<table>
<tr><th>SESIÓN Nº</th><th>PRE y POST-SESIÓN</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Act. 30:
Nvel 2
Fase
Orientación
Libre

Act. 31:
Nivel 2
Fase de
Integración</td><td>enseñarás en la siguiente sesión? ¿Por qué lo consideras? ¿Qué dificultades crees que tendrán los estudiantes?
Información: ¿Qué método(s) conoces para construir figuras semejantes a una dada? ¿Cuáles enseñas? ¿Por qué?
Confrontación: ¿Los métodos (para construir figuras semejantes a una dada) que enseñarás en este bloque de actividades te parecen pertinentes? ¿Consideras que para los estudiantes es suficiente con que aprendan uno sólo? ¿Por qué? Si esta actividad la hicieras en Cabri, al poner O (ó P) como punto libre perteneciente a la recta CC’ (ó AA’), se obtiene una interacción interesante al mover O (ó P) sobre la recta ¿Qué opinas de este planteamiento? ¿Es relevante? ¿Los estudiantes comprenderán mejor lo que persigues? ¿Por qué? En la actividad 30, parte 3, una idea para afianzar el papel de la visión geométrica de la semejanza como sustituto de la pura proporcionalidad aritmética es medir OA y OA’, calcular la razón, medir OB, multiplicar este valor por la razón, etc. ¿Qué opinas de este planteamiento? ¿Vale la pena inducirlo en los estudiantes (de no presentarse de manera espontánea)? ¿Por qué?
Reconstrucción: ¿Qué resultados y/o propiedades matemáticas aprenderán los estudiantes en esta sesión de clase?</td></tr>
<tr><td>Después de la sesión</td></tr>
<tr><td>Descripción: ¿Qué dificultades has visto en los estudiantes que no habías previsto antes?
Información: ¿Crees que otro enfoque de enseñanza hubiera disminuido las dificultades de los estudiantes? ¿Cuál?
Confrontación: ¿Crees que los estudiantes comprendieron los métodos enseñados? ¿Por qué? ¿Cambiarías algo en el planteamiento de las actividades? ¿Qué? ¿Por qué? Si el profesor desarrolla (ó no) la actividad[1] 30 con Cabri se le pregunta ¿Por qué has (no has) desarrollado la actividad 30 con Cabri?
Reconstrucción: ¿Qué te queda ahora más claro respecto de la</td></tr>
</table>

[1] El profesor decide desde la administración de su gestión si es o no pertinente desarrollarla con Cabri.

SESIÓN Nº	PRE y POST-SESIÓN
	sesión anterior? ¿Qué has aprendido? ¿Qué aspectos, de tu práctica, crees que se deben cambiar en las siguientes sesiones de clase? ¿Qué aspectos de tu práctica, en este momento, puedes decir que has cambiado, replanteado y que, principalmente, estén relacionados con lo que en otras entrevistas has mencionado que has aprendido?
9	**Antes de la sesión**
(Act. 32 - 33) ***Act. 32: Nivel 2 Fase Orientación Dirigida*** ***Act. 33: Nivel 2 Fase de Orientación Libre***	***Descripción:*** ¿Qué consideras que es lo más relevante de lo que enseñarás en la siguiente sesión? ¿Por qué lo consideras? ***Información:*** ¿Enseñas los criterios de semejanza de triángulos? Si la respuesta es sí, ¿De qué manera lo haces? ¿Enseñas alguna (s) propiedad (es) relacionadas con la semejanza en triángulos rectángulos? Si la respuesta es sí, ¿De qué manera lo haces? ***Confrontación:*** Las actividades planteadas para esta sesión están clasificadas en la fase de Orientación Dirigida (Act. 32) y Orientación Libre (Act. 33) en Nivel 2 ¿Estás de acuerdo con esto? ¿Sugieres alguna organización diferente[2]? Has recibido una clasificación (momentánea) de las respuestas de los estudiantes de acuerdo a su nivel de razonamiento ¿Qué te pareció? ¿Crees que es útil esta clasificación? ¿Para qué? ***Reconstrucción:*** ¿Qué resultados y/o propiedades matemáticas aprenderán los estudiantes en esta sesión de clase?
	Después de la sesión
	Descripción: ¿Qué dificultades has visto en los estudiantes que no habías previsto antes? ***Información:*** ¿Crees que otro enfoque de enseñanza hubiera disminuido las dificultades de los estudiantes? ¿Cuál? ***Confrontación:*** ¿Habría sido mejor el enfoque de enseñanza de los criterios de semejanza de triángulos que tú has venido utilizando en cursos

[2] Si el profesor sugiere alguna organización diferente de estas actividades, esto sólo servirá para analizar el progreso en el mejoramiento de su práctica. Es decir, la respuesta no producirá alguna reacción en el investigador.

SESIÓN Nº	PRE y POST-SESIÓN
	anteriores? ¿Por qué? ¿Consideras importante que los estudiantes aprendan los criterios de semejanza de triángulos? ¿Por qué? ***Reconstrucción:*** ¿Qué te queda ahora más claro (matemáticamente, didácticamente, respecto de la gestión de clase) respecto de la sesión anterior? ¿Qué has aprendido? ¿Qué aspectos de tu práctica crees que se deben cambiar en las siguientes sesiones de clase? Recordemos lo que has dicho, en entrevistas anteriores, que debes cambiar en las sesiones siguientes ¿Lo has tenido en cuenta?
10 **(Act. 34)** ***Nivel 2*** ***Fase Orientación Dirigida***	**Antes de la sesión**
	Descripción: ¿Qué consideras que es lo más relevante de lo que enseñarás en la siguiente sesión? ¿Por qué lo consideras? ¿Cuáles consideras que son las dificultades con las que se encontrarán los estudiantes? ***Información:*** ¿Enseñas las propiedades relacionadas con el perímetro y el área de figuras semejantes? Si la respuesta es sí, ¿De qué manera lo haces? ***Confrontación:*** De acuerdo con lo que has reflexionado y aprendido durante el desarrollo de esta investigación ¿Crees que la manera como está planteada esta actividad es una manera apropiada? ¿Por qué? ¿Cuál sería otra manera apropiada de plantear esta actividad? ¿Cuál crees que es el sentido (el objeto) de enseñar estas propiedades? ***Reconstrucción:*** ¿Qué resultados y/o propiedades matemáticas aprenderán los estudiantes en esta sesión de clase?
	Después de la sesión
	Descripción: ¿Qué dificultades has visto en los estudiantes que no habías previsto antes? ***Información:*** ¿Crees que otro enfoque de enseñanza hubiera disminuido las dificultades de los estudiantes? ¿Cuál? ***Confrontación:*** ¿Un mejor enfoque de enseñanza de las propiedades relacionadas con el perímetro y el área de figuras semejantes hubiera sido el que presentan algunos libros de texto: primero, enuncian

SESIÓN Nº	PRE y POST-SESIÓN
	las dos propiedades y luego agregan una lista de ejercicios relacionados con éstas? ¿Consideras importante que los estudiantes aprendan las propiedades relacionadas con el perímetro y el área de figuras semejantes? ¿Por qué? ***Reconstrucción:*** ¿Qué te queda ahora más claro (matemáticamente, didácticamente, respecto de la gestión de clase) respecto de la sesión anterior? ¿Qué has aprendido? ¿Qué aspectos de tu práctica crees que se deben cambiar en las siguientes sesiones de clase?
11 **(Act. 35 - 43)** ***Act. 35 - 40 y 42:*** ***Nivel 2*** ***Fase Orientación Libre*** ***Act. 41:*** ***Nivel 2*** ***Fase de Orientación Dirigida*** ***Act. 43:*** ***Nivel 2*** ***Fase de Integración***	**Antes de la sesión** ***Descripción:*** ¿Qué consideras que es lo más relevante de lo que enseñarás en la siguiente sesión? ¿Por qué lo consideras? ¿Cuáles consideras que son las dificultades con las que se encontrarán los estudiantes? ***Información:*** ¿Planteas a tus estudiantes problemas o situaciones matemáticas que requieran del concepto de semejanza para su resolución? ¿De qué tipo? ¿Enseñas a tus estudiantes el concepto de escala? ¿Cómo? ***Confrontación:*** ¿Consideras pertinente enseñar el concepto de escala a partir del de semejanza? ¿Por qué? Si planteas a tus estudiantes problemas o situaciones matemáticas que requieran del concepto de semejanza para su resolución ¿Por qué lo haces? Si enseñas a tus estudiantes el concepto de escala ¿Por qué lo haces? ***Reconstrucción:*** ¿Qué resultados y/o propiedades matemáticas aprenderán los estudiantes en esta sesión de clase? **Después de la sesión** ***Descripción:*** ¿Qué dificultades has visto en los estudiantes que no habías previsto antes? La dificultad que habías previsto (dificultad en la interpretación de problemas) ¿Se presentó? Si no fue así ¿Por qué crees que no se presentó? ***Información:*** ¿Crees que el tipo de situaciones planteadas fue la causa de las dificultades de los estudiantes? ¿Qué tipo se situaciones hubiera disminuido las dificultades de los estudiantes?

SESIÓN Nº	PRE y POST-SESIÓN
	Confrontación: ¿Una mejor manera de enseñar la aplicación del concepto de semejanza hubiera sido plantear situaciones en contexto netamente matemático? ¿Por qué? ¿Consideras importante que los estudiantes aprendan maneras de utilizar la semejanza en la resolución de problemas y situaciones matemáticas? ¿Por qué? ¿Consideras importante que los estudiantes aprendan maneras de utilizar la semejanza en la resolución situaciones no matemáticas (es decir no abstractas)? ¿Por qué? ¿Los estudiantes lograron notar la relación entre el concepto de escala y el de semejanza? ¿Por qué lo crees? ***Reconstrucción:*** ¿Qué te queda ahora más claro respecto de la sesión anterior? ¿Qué has aprendido? ¿Qué aspectos de tu práctica crees que debes cambiar en posteriores cursos? Habiendo terminado las sesiones de clase ¿Podrías hacer un resumen de los aspectos más relevantes, que tú crees, que has aprendido después de participar en este proyecto (relacionados con la matemática, con su didáctica, y la gestión de la clase)?