

UNA APROXIMACIÓN A LOS DESCRIPTORES DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE PARA LA SEMEJANZA

Élgar Gualdrón Pinto
Departamento de Matemática
Universidad de Pamplona (Colombia)

Ángel Gutiérrez Rodríguez
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Valencia (España)

RESUMEN

El modelo de razonamiento de Van Hiele ha sido una potente estructura conceptual cuando se trata de investigaciones relacionadas con la enseñanza de la geometría. Hemos utilizado este modelo (junto con otros referentes teóricos) para diseñar una unidad de enseñanza para la semejanza de polígonos. La experimentación de dicha unidad, con estudiantes colombianos de noveno grado (14-15 años), ha dado lugar a una descripción inicial de las características de los niveles de Van Hiele específicas para la semejanza. También presentamos algunas conclusiones acerca del efecto de la experimentación en la mejora del nivel de razonamiento de los estudiantes.

ABSTRACT

Van Hiele's model of reasoning has been a powerful conceptual structure for research related with the teaching of geometry. We have used this model (with other theoretical referents) to design a teaching unit for similarity of polygons. After the experimentation of the above mentioned teaching unit, with Colombian students of ninth grade (14-15 year old), we have produced an initial description of the characteristics of Van Hiele's levels specific for similarity. Also we presented some conclusions about the effect of experimentation on the improvement of students' level of reasoning.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI

Élgar Gualdrón Pinto y Ángel Gutiérrez Rodríguez (2007). UNA APROXIMACIÓN A LOS DESCRIPTORES DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE PARA LA SEMEJANZA, pp. 369-380.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo es una síntesis de una parte de los resultados obtenidos de una investigación llevada a cabo dentro del programa de doctorado del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Valencia.

El conocimiento de conceptos, propiedades y estrategias básicos de geometría es fundamental para que los estudiantes interactúen efectivamente con su propio entorno y también para que puedan empezar a estudiar la geometría de una manera más abstracta y formal (Hershkowitz, Bruckheimer y Vinner, 1987). Por este motivo, el proceso de enseñanza-aprendizaje de temas geométricos nos demanda más investigación para conocer las formas que tienen los estudiantes de adquirir de manera adecuada y significativa los conocimientos geométricos.

La investigación que hemos realizado, y en particular los aspectos que trataremos en este trabajo, apuntan a aportar elementos a los profesores de matemáticas que les permitan mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la semejanza.

El modelo de razonamiento de Van Hiele está demostrando que es un excelente referente teórico para la organización y evaluación de la enseñanza y el aprendizaje. Un buen ejemplo de ello es N.C.T.M. (2003). En este trabajo presentamos los descriptores de niveles de Van Hiele que se pudieron constatar después de experimentar con estudiantes de noveno grado (14-15 años) de Colombia una unidad de enseñanza de la semejanza de polígonos. El planteamiento inicial de los descriptores de razonamiento se hizo teniendo en cuenta los propuestos, de forma general, para la geometría por P.M. Van Hiele y otros autores como Van Hiele (1957), Usiskin (1982), Burger y Shaughnessy (1986), Jaime (1993), Guillén (1997) y Gutiérrez y Jaime (1998).

ANTECEDENTES

Después de realizar una revisión bibliográfica, se puede constatar que es poco lo que se ha hecho respecto a la semejanza y en particular, propuestas de enseñanza basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele. Algunos de los trabajos encontrados, que incluyen el concepto de semejanza, utilizando diferentes marcos teóricos y persiguiendo diferentes objetivos, son por ejemplo, Fernández (2001), quien trabajó con estudiantes de primaria. Hart y otros (1981, 1984, 1989), quienes trabajaron con estudiantes y profesores de secundaria, al igual que Margarit y otros (2001). Escudero y Sánchez (1999) trabajaron la relación entre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de secundaria y la enseñanza práctica de la semejanza. A nivel de propuestas curriculares (propuestas orientadoras) para profesores, desde diferentes corrientes conceptuales, encontramos las del Grupo Beta (1997), Lappan y otros (1986), O'Daffer y Clemens (1977), Almató y otros (1986).

Friedlander y otros (1985) realizaron un estudio en el que perseguían tres objetivos bien definidos: determinar patrones de mejoramiento en el desarrollo de los estudiantes (de 6°, 7° y 8° grados) en el concepto de semejanza, determinar los efectos de una intervención de enseñanza (en 6 clases, con una unidad de enseñanza sobre semejanza) en los tres grados, y determinar si la enseñanza de la semejanza tiene algún efecto en la habilidad general de los estudiantes para el razonamiento proporcional. A los estudiantes se les aplicó un test escrito antes y después de enseñarles el tema.

Específicamente en relación a los descriptores de nivel de razonamiento de Van Hiele en el tema de la semejanza, la revisión bibliográfica no generó ningún resultado.

MARCO TEÓRICO

Para el diseño y posterior análisis de la unidad de enseñanza de la semejanza tuvimos en cuenta el Modelo de Razonamiento de Van Hiele, algunos aspectos de la Fenomenología de Freudenthal, y los trabajos de Hart y colaboradores en cuanto a proporcionalidad y semejanza.

En este texto sólo presentaremos la parte de la investigación relacionada con el modelo de Van Hiele. Van Hiele (1957) y Van Hiele-Geldof (1957) presentaron, respectivamente, un modelo teórico de enseñanza y aprendizaje de la geometría y una aplicación concreta del modelo en algunos cursos de geometría. Según este modelo, a lo largo del proceso de aprendizaje de la geometría, el razonamiento de los estudiantes pasa por una serie de niveles que son secuenciales, ordenados y de tal manera que no se puede saltar ninguno. Cada nivel supone la comprensión y utilización de los contenidos matemáticos de una manera distinta, lo cual se refleja en una manera diferente de reconocerlos, definirlos, clasificarlos, y realizar demostraciones (Jaime, 1993).

Presentamos de manera muy resumida, las principales características del modelo de Van Hiele. Se puede encontrar un estudio más detallado, por ejemplo, en Jaime (1993).

Nivel 1 (Reconocimiento): Los estudiantes juzgan un objeto geométrico por su apariencia física y lo consideran como un todo.

Nivel 2 (Análisis): Los estudiantes identifican los componentes de las figuras geométricas y las describen por medio de sus propiedades. Las deducciones que hacen están basadas en la observación y la medición.

Nivel 3 (Deducción informal): Los estudiantes son capaces de definir y clasificar lógicamente las familias de figuras. Pueden dar argumentos deductivos informales para demostrar sus conjeturas.

Nivel 4 (Deducción formal): Los estudiantes entienden el papel de los elementos de un sistema axiomático, y pueden realizar demostraciones formales.

De las propiedades del modelo de Van Hiele, conviene mencionar la “continuidad” de los niveles. En la formulación inicial del modelo, los Van Hiele plantearon que el paso de un nivel al siguiente se produce de manera brusca, como un salto. Sin embargo, posteriores investigaciones, por ejemplo Burger y Shaughnessy (1990) y Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991) han puesto en evidencia la presencia de estudiantes que muestran características propias de dos niveles consecutivos, lo que significa que esos estudiantes se encuentran en transición de un nivel de razonamiento al siguiente. En esta investigación consideramos el carácter continuo de la transición entre niveles.

METODOLOGÍA

La muestra con la cual se llevó a cabo este trabajo estuvo formada por 34 estudiantes de dos instituciones (17 en cada una, con los cuales se formaron 5 grupos), una pública y una privada, del departamento de Santander (Colombia). Era la primera vez que estos estudiantes recibían instrucción sobre el tema de semejanza.

La unidad de enseñanza se diseñó con los objetivos, entre otros, de:

- Fortalecer la adquisición de los niveles 1 (Reconocimiento) y 2 (Análisis) de Van Hiele en el tema propuesto.

- Caracterizar los niveles de razonamiento de Van Hiele en el tema semejanza de figuras planas a partir de la experimentación.

En el diseño de las actividades hubo dos aspectos que se tuvieron presentes: Uno fue el tipo de papel sobre el cual se presentarían las tareas a los estudiantes, y otro, el tipo de figura sobre la que los alumnos deberían trabajar. De esta forma, las tareas fueron escogidas o diseñadas para que los estudiantes trabajaran sobre hojas de papel blanco o cuadriculado y manipularan diversas superficies poligonales (entre otras, figuras no estándar), tanto cóncavas como convexas. También tuvimos cuidado con las medidas de las longitudes de dichas superficies y sus posiciones en la hoja y en relación a las demás figuras de la misma actividad (figuras en posición no estándar). En este sentido Jaime, Chapa y Gutiérrez (1992), teniendo en cuenta las teorías de Van Hiele y Vinner, plantean que un estudiante comienza a construir su imagen mental de un concepto de manera global, a partir de ejemplos concretos, sin realizar un análisis matemático de los elementos o propiedades del concepto, sino usando destrezas básicamente visuales. Además plantean que un método adecuado de introducción de nuevos conceptos es la inclusión de ejemplos y contraejemplos. De esta manera pretendíamos eliminar estereotipos, que son muy habituales en la enseñanza de la geometría, que limitan la adquisición de conocimiento de los estudiantes y que, en algunos, casos inducen a determinados errores como es el uso generalizado de formas típicas, como el cuadrado, el rectángulo o el triángulo, y de posiciones estándar de las mismas (Jaime, Chapa y Gutiérrez, 1992).

Cada actividad fue diseñada para ser presentada en hojas individuales, y sobre las cuales el estudiante debía justificar cada uno de los procesos que lo conducían hacia la respuesta (numérica y/o gráfica y/o verbal). Para el desarrollo de cada una de las actividades el estudiante podía utilizar reglas, escuadras o cartabones, compás, transportador, tijeras y calculadora, entre otros elementos auxiliares.

Metodología de trabajo en clase:

En las dos clases, la experimentación comenzó con la aplicación de un pretest a la muestra seleccionada. En uno de los colegios estuvieron presentes la profesora titular y el investigador. Éste asistió a todas las clases en calidad de observador participativo, observando la actividad de los alumnos y, al mismo tiempo, colaborando con la profesora en las tareas de asesoramiento y orientación a los alumnos durante las sesiones de clase. En la otra institución, fue el investigador quien hizo las veces de profesor. Al finalizar la experimentación, se aplicó un postest a los estudiantes que participaron, en una jornada de clase supervisada por el investigador y la profesora titular, que intervenían para clarificar palabras o frases, pero no para guiar las respuestas de los estudiantes.

Las actividades de la unidad de enseñanza se plantearon de forma secuenciada y fueron entregadas una a una a cada estudiante en fotocopias. Algunas tareas planteadas requerían para su realización de un material didáctico adecuado, material que les fue proporcionado en cada caso a los grupos y que se detalla junto a la exposición de las tareas. El medio escolar en el que se llevaron a cabo las experimentaciones de la unidad de enseñanza fue el aula de clase, cuyas características físicas permitieron el trabajo en pequeños grupos de los estudiantes. Todas las actividades fueron realizadas dentro de la jornada escolar.

En total la experimentación se compuso de nueve sesiones de 100 minutos cada una y duró 8 semanas. El tiempo transcurrido entre las aplicaciones del pretest y del postest fue de 9 semanas.

En lo que respecta a la organización del aprendizaje, se tuvieron en cuenta las fases de aprendizaje que plantea el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele.

Recogida de información:

Los medios utilizados para la recogida de información en los grupos experimentales fueron:

- Respuesta de los estudiantes en el pretest y el postest.
- Material desarrollado por los estudiantes en cada una de las actividades.
- Grabaciones en video tomadas de cada una de las actividades desarrolladas.
- Las notas tomadas por el investigador durante el desarrollo de las actividades.

Las grabaciones se realizaron haciendo seguimiento a dos de los grupos (en cada institución), los cuales fueron formados por las profesoras titulares teniendo en cuenta la empatía que existía entre los miembros del grupo hacia el trabajo en estas condiciones. También se grabaron las intervenciones de la docente titular en un caso y del investigador en el otro.

RESULTADOS

A continuación presentamos algunos de los aspectos que nos han parecido más relevantes. En este análisis, se tendrá en cuenta lo planteado en el marco teórico referente al Modelo de Razonamiento de Van Hiele. Presentaremos el efecto que tuvo la unidad de enseñanza en el fortalecimiento y adquisición de los niveles 1 y 2 de Van Hiele. También presentamos la caracterización de éstos en el tema de la semejanza.

Las diferentes estrategias de resolución de las actividades usadas por los estudiantes en cada nivel de razonamiento son las siguientes:

Razonamiento de nivel 1:

E 1: Usan una estrategia visual.

Razonamiento de nivel 2:

E 2: Usan mediciones.

E 3: Usan definición o criterio relacionado con la semejanza de figuras.

E 4: Deducen propiedades empíricamente.

E 5: Usan cuadrícula y localización de partes que componen la figura.

E 6: Amplían o reducen multiplicando las medidas.

E 7: Usan razón interna.

E 8: Usan razón externa.

E 9: Usan regla de tres.

E 10: Deducen criterio nuevo para la semejanza.

Otras respuestas:

(E 11): Responden, o justifican, o concluyen erróneamente sin exhibir un nivel en concreto.

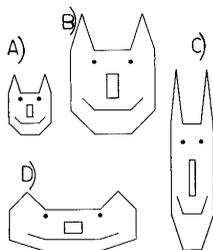
En la tabla 1 se resumen las diferentes estrategias de resolución de las actividades usadas por los estudiantes en cada nivel de razonamiento.

	Nivel 1	Nivel 2									Otras res- puestas
	E 1	E 2	E 3	E 4	E 5	E 6	E 7	E 8	E 9	E 10	E 11
Actividad 1	10										
Actividad 2	10										
Actividad 3	9	1									
Actividad 4	9	1									
Actividad 5	8	2									
Actividad 6	2			6							2
Actividad 7					10						
Actividad 8	4(8d)		6(8d)			10(8a-c)					
Actividad 9			10								
Actividad 10							2	6	1		1
Actividad 11							4	1	5		
Actividad 12							8	1	1		
Actividad 13							4	6			
Actividad 14							1	2	6		1
Actividad 15				8							2
Actividad 16				8							2
Actividad 17	1(17a-b)		6(17a-b)							8(17c)	2(17a-b) 1(17a-c) 1(17c)
Actividad 18			8(18a-b) 2(18b)								2(18a)
Actividad 19	2(19a) 1(19b) 2(19a-b)		4(19a) 3(19b) 1(19a-b)							1(19a) 3(19b)	
Actividad 20	3									7	
Actividad 21			6(21a-b)							6(21c) 1(21a-c)	3(21a-c)
Actividad 22			1(22a-b) 1(22e)							8(22a-e)	1(22c-d) 1(22a-e)

Tabla 1. Nivel de razonamiento y estrategias de resolución exhibidas por los 10 grupos de estudiantes

A continuación se presentan algunos ejemplos de respuestas. Las estrategias están directamente relacionadas con los aspectos que tuvimos en cuenta para el diseño de la unidad de enseñanza.

En la *actividad 1* se presentaban cuatro figuras¹. Los estudiantes debían decidir cuáles de ellas tienen “la misma forma” y justificar su elección.



El grupo (IEA, 1) respondió: *La A y la B, porque su tamaño disminuye pero la figura no se altera, [además] sus ángulos son iguales pero sus longitudes varían.*

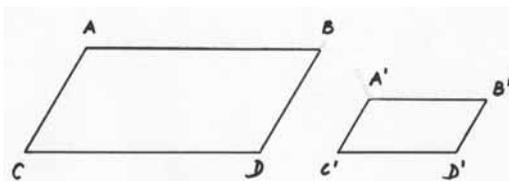
El grupo (FCUIS, 1) respondió: *Las caras más parecidas son la A y la B, ya que la B es el doble de la A y mantiene las proporciones, mientras que la C es alargada y angosta, y en la D su nariz está volteada y el ángulo de la sonrisa aparentemente es distinto.*

El primer grupo responde utilizando argumentos de tipo visual al decir “más pequeño” o “más grande”. Mencionan la igualdad de ángulos pero, parece ser que, lo plantean por simple observación, ya que no aparece ningún intento de medición. El segundo grupo menciona una estrategia multiplicativa (el doble) y expresiones como “alargada” y “angosta” pero, al igual que con el primer grupo, no hay indicios de que hayan tomado medidas ni hecho operaciones. Esto quiere decir que los estudiantes se basaron en consideraciones de tipo visual (estrategia E1), lo cual confirma que su razonamiento en estas respuestas fue del nivel 1.

En la *actividad 3* se pedía seleccionar cuáles de los 9 triángulos dados tenían “la misma forma”, además de solicitar los criterios que se tuvieron en cuenta para dar la respuesta.

La respuesta del grupo (FCUIS, 2) aparece en el cuadro 1 (página siguiente). Esta respuesta corresponde al nivel 2 y a la estrategia E2, ya que los estudiantes utilizaron argumentaciones diferentes a las estrictamente visuales, por ejemplo al realizar una superposición (realizando mediciones) de los triángulos *f*, *g* y *a* y plantear que sus ángulos se mantienen y las medidas de los lados son proporcionales. Similar sucedió con los triángulos *i* y *h*.

En la *actividad 12* se pedía usar la figura dada ABCD para dibujar otra, sabiendo que por cada 7 unidades en ABCD debe haber 3 unidades en la figura nueva. Durante el desarrollo de esta actividad, el grupo (IEA, 2) había dibujado la nueva figura A'B'C'D' cuando llegó el profesor. Transcribimos parte de su diálogo (P denota profesor y E estudiante):



¹ Inspirado en una actividad de Lappan (1986).

P: ¿Tuvieron en cuenta los ángulos para hacer el dibujo?

E: Sí.

P: ¿Cuáles?

E: Éste [señala el ángulo A] por ejemplo mide 135 grados.

P: Entonces en la nueva figura ¿alguno mide 135 grados?

E: Sí, éste [señala el ángulo A'].

P: ¿Y éste ángulo cuánto mide? [Señalando el ángulo C].

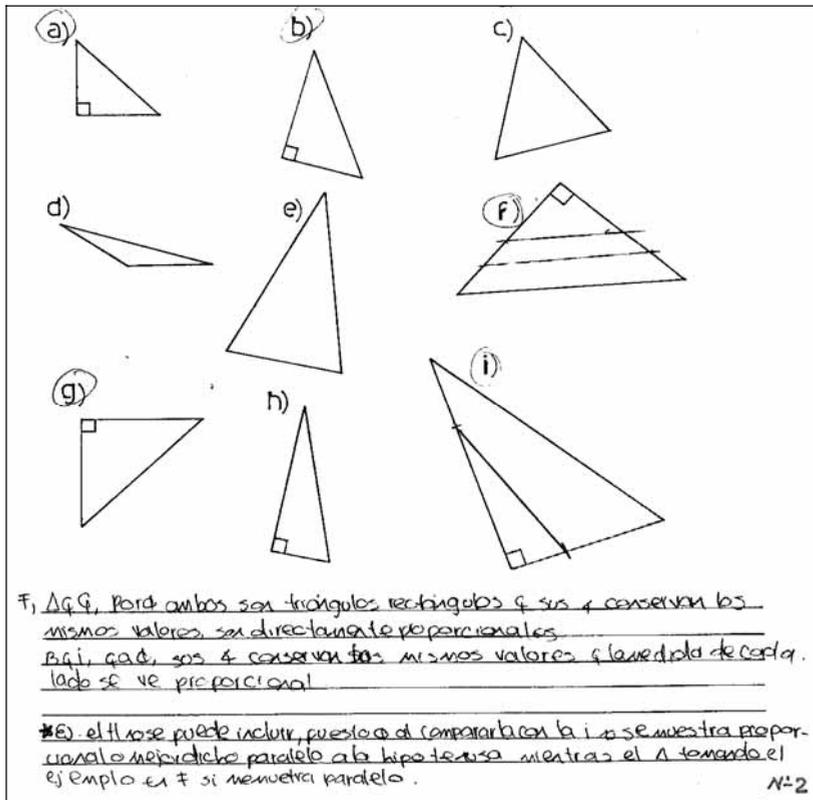
E: 45 grados.

P: En la nueva figura ¿alguno mide 45 grados?

E: Sí, éste [Señalando el ángulo C'].

P: ¿Era importante tener en cuenta la medida de los ángulos?

E: Pienso que sí, por que si no, resultaría cualquier figura.



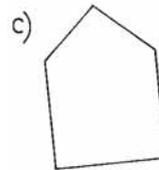
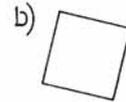
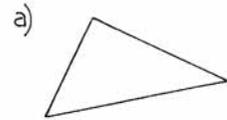
Cuadro 1. Respuesta dada por el grupo (FCUIS, 2) a la actividad 3

Esta respuesta corresponde al Nivel 2 y a la estrategia E7, ya que mostraron la importancia de tener en cuenta la medida de los ángulos al dibujar una figura semejante a otra dada, es decir, que no es suficiente con ampliar o reducir las medidas de sus lados. Otro aspecto que tuvimos en cuenta en su clasificación fue el desarrollo planteado en su hoja de trabajo.

Vamos a ampliar estas figuras en la fotocopidora; ampliamos el original y después la fotocopia (los estudiantes recibieron tres folios, las figuras originales y las dos ampliaciones).

- a) Observa cada una de las figuras del original y toma las medidas de sus lados y anótalas.
- b) Haz lo mismo con las de las fotocopias.
- c) Compara los cocientes de las medidas de los lados correspondientes del original con las de la primera copia y las de ésta con las de la segunda.
- d) ¿Qué observas? Anótalo.
- e) Toma las medidas de los ángulos del original y las dos copias, anótalas.
- f) Compara las mediciones del ítem anterior.
- g) ¿Qué observas? Anótalo.

Resume las observaciones que has hecho.



Resume las observaciones que has hecho.

* ¿Qué en la original y en copias mantienen su forma

$$\textcircled{1} \frac{5}{7,5} = \frac{3}{4,5} = \frac{4}{6}$$

\Downarrow \Downarrow \Downarrow
 0,6 0,6 0,6

$$\textcircled{2} \frac{5}{10} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$$

\Downarrow \Downarrow \Downarrow
 0,5 0,5 0,5

conclusión =

- * Sus cocientes son iguales, la original con la primera copia
- * Sus cocientes son iguales, la original con la segunda copia
- * Los ángulos de una forma serán constantes así esta forma varíe su tamaño

Cuadro 2. Respuesta dada por el grupo (IEA, 2) a la actividad 6.

En la actividad 6, que aparece a continuación, el grupo (IEA, 2) respondió como aparece en el cuadro 2.

La respuesta dada por este grupo fue clasificada en el Nivel 2 y la estrategia E4, ya que los estudiantes deducen empíricamente una forma de determinar cuándo dos figuras planas son semejantes (como se pudo constatar, además, en la transcripción de uno de los videos).

IDENTIFICACIÓN INICIAL DE LOS DESCRIPTORES DE LOS NIVELES DE VAN HIELE

Los resultados sugieren que la formulación inicial de los descriptores de los niveles 1 y 2 de Van Hiele que propusimos para la semejanza se confirmó en su mayoría, es decir que el análisis de los resultados de la experimentación evidenció dichos descriptores. A continuación presentamos los descriptores que resultaron:

Nivel 1 (Reconocimiento)

Reconocen figuras semejantes basándose principalmente en la apariencia de ellas.

En este nivel los estudiantes ven las figuras como un todo y describen las diferencias y semejanzas de ellas usando términos como, más grande, más pequeño, estirado, ampliado. Por ejemplo, cuando un estudiante esté decidiendo sobre la semejanza de dos dibujos, podría decir, “la cabeza es demasiado grande, si se compara con el tronco”, o “este rectángulo no es tan largo como éste”. Además de incluir atributos irrelevantes en las descripciones que hacen.

Los estudiantes empiezan a percibir algunas características matemáticas de la semejanza, pero aún lo hacen de manera aislada.

Nivel 2 (Análisis)

Los estudiantes se centran en aspectos matemáticos específicos de las figuras tales como las longitudes de los segmentos y las medidas de los ángulos, así que pueden inducir cuáles son las condiciones necesarias para que las figuras sean semejantes.

Las transformaciones usadas en semejanza, las ampliaciones y reducciones, son centrales en todas las actividades en las cuales los estudiantes crean figuras semejantes.

La orientación de las figuras semejantes es vista como irrelevante.

Pueden realizar construcciones de figuras semejantes al darles el factor de semejanza y además predecir si la figura resultante será una ampliación, una reducción o una figura idéntica a la dada.

Realizan la deducción de propiedades matemáticas mediante experimentación y generalización. Además, generalizan dichas propiedades a otros tipos de figuras.

Realizan demostraciones de propiedades que tienen que ver con la semejanza de figuras verificando que se cumplen en algunos casos.

ALGUNAS CONCLUSIONES

Después de experimentar la unidad de enseñanza, se pudo constatar que las actividades 1 a 5 y las 6 a 22 fueron desarrolladas por la mayoría de los estudiantes en los niveles 1 y 2 de razonamiento, respectivamente. Además, ningún grupo de estudiantes dio muestras de acercamiento al tercer nivel de razonamiento.

En ninguno de los grupos se presentó el intento, por parte de los estudiantes, de demostrar alguna conjetura, ni siquiera en las actividades donde lo habíamos previsto. Pensamos que probablemente esto sucedió porque ninguna actividad o ítem en particular lo pedía explícitamente.

Se observa en la mayoría de los estudiantes el progreso en la adquisición del segundo nivel de razonamiento y su consolidación durante la experimentación. Esto parece indicar que la mayoría de ellos alcanzó el segundo nivel de razonamiento.

Para futuros trabajos se podría tener en cuenta otro enfoque para la semejanza de figuras, por ejemplo la presentación de ésta a partir de configuraciones homotéticas y verificar qué caracterización de niveles de Van Hiele resulta. Además verificar el resultado de la enseñanza, desde esta perspectiva, con el marco de referencia usado en esta investigación.

REFERENCIAS

- Almató, A., Fiol, M. L., Fortuny, J. M., Hosta, I., y Valldaura, J. (1986). *Proposta didàctica per treballar la proporcionalitat* (vol. 2). Barcelona: Universidad Politècnica de Catalunya.
- Burger, W. F., y Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17, 1, 31-48.
- Burger, W. F., y Shaughnessy, J. M. (1990). *Assessing children's intellectual growth in geometry* (Reporte final). Corvallis, USA: Oregon State University.
- Escudero, I., y Sánchez, V. (1999). The relationship between professional knowledge and teaching practice: The case of similarity. *Proceedings of the 23th PME Conference*, 2, 305-312.
- Fernández, A. (2001). *Precursores del razonamiento proporcional: Un estudio con alumnos de primaria*. Tesis doctoral no publicada. Valencia: Universidad de Valencia.
- Freudenthal, H. (2001). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures (L. Puig, Trans.). En E. Sánchez (Ed.), *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas (Textos seleccionados)* (2ª edición). México D.F.: Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV.
- Friedlander, A., Lappan, G., y Fitzgerald, W. M. (1985). The Growth of similarity concepts over the middle grades (6, 7, 8). *Proceedings of the 7th PME-NA.*, 86-92.
- Grupo-Beta. (1997). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Guillén, G. (1997). *EL Modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje*. Tesis doctoral no publicada. Valencia: Universidad de Valencia.
- Gutiérrez, Á., y Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20, 2 y 3, 27-46.
- Hart, K. (1984). *Ratio: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. Windsor, Inglaterra: The NFER-NELSON.
- Hart, K., y otros (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16* (1 ed.). Londres, Inglaterra: John Murray.
- Hart, K., y otros (1989). *Children's mathematical frameworks 8-13: A study of classroom teaching*. Windsor, Inglaterra: The NFER-NELSON.
- Hershkowitz, R., Bruckheimer, M., y Vinner, S. (1987). Activities with teachers based on cognitive research. In N.C.T.M. (Ed.), *Learning and teaching geometry, K-12* (pp. 222-235): Reston-VA.
- Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. Tesis doctoral no publicada. Valencia: Universidad de Valencia.
- Jaime, A., Chapa, F., y Gutiérrez, Á. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: Errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B. *Epsilon*, 23, 49-62.
- Lappan, G., Fitzgerald, W., Winter, M. J., y Phillips, E. (1986). *Similarity and Equivalent Fractions*. Michigan: Addison-Wesley.
- Margarit, J., Gómez, B., y Figueras, O. (2001). Ratio comparison: Performance on ratio in similarity tasks. *Proceedings of the 25th PME Conference*, 1, 340.
- N.C.T.M. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas Thales.
- O'Daffer, P. G., y Clemens, S. R. (1977). *Geometry: An Investigative Approach*. Illinois, USA: Addison-Wesley.

- Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry*. Columbus, USA: ERIC.
- Van Hiele-Geldof, D. (1957). *The didactics of geometry in the lowest class of Secondary School*. Tesis doctoral no publicada. Utrecht, Holanda: Universidad de Utrecht. (Traducción al inglés en Fuys, Geddes, Tischler, 1984, pp.1-206).
- Van Hiele, P. M. (1957). *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría)*. Tesis doctoral no publicada. Utrecht, Holanda: Universidad de Utrecht. (Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991).