Universitat Autònoma de Barcelona

Departament de Didàctica de les Ciències i les Matemàtiques

Anàlisi de les actuacions d'estudiants amb bons resultats en la resolució de problemes amb múltiples opcions de resposta i temps limitat

Doctorat en Didàctica de les Matemàtiques i de les Ciències Experimentals

Facultat de ciències de l'Educació

Universitat Autònoma de Barcelona

Tesi presentada per a l'obtenció del títol de Doctor en Didàctica de les Matemàtiques per la Universitat Autònoma de Barcelona

Autor: Marc Guinjoan Francisco

Director: Dr. Angel Gutiérrez Rodríguez

Tutor: Dr. Josep Maria Fortuny Aymemí

Bellaterra, gener de 2022

A la memòria d'en Carles,

mestre que em va fer descobrir l'apassionant món de les matemàtiques i que em va posar en el camí que ara acaba.

Agraïments

El document que presento no és fruit de cap aspiració acadèmica o professional, sinó de l'afany de formació personal i la necessitat de seguir el meu camí en l'aprenentatge de la didàctica de les matemàtiques. Haig de començar per tant amb un agraïment a tots els mestres i professors que he tingut al llarg de la meva vida (entre ells a la meva mare, pels moments viscuts tant a dins com a fora de l'aula), amb un record especial per als professors del Departament de Matemàtiques de l'Institut Manuel Blancafort de La Garriga, amb en Carles Romero al capdavant. Allà va començar el camí que acaba amb aquest treball.

En segon lloc, respectant l'ordre cronològic, haig d'agrair al meu tutor Josep Maria Fortuny la confiança que ha tingut amb mi des del primer moment on el vaig conèixer per demanar-li que m'acompanyés en aquest procés. Confiança que estranyament em continua mostrant a dia d'avui després de tots aquests anys d'alts i baixos. I li haig d'agrair també que em posés en mans de l'Angel Gutiérrez, qui ha dirigit aquesta tesi amb una paciència infinita i amb una professionalitat i rigor exemplars. Crec que he après més dels seus comentaris i observacions que del meu treball en sí. Gràcies als dos, sé que no he estat un estudiant fàcil de tutoritzar ni de dirigir.

En tercer lloc haig d'agrair també el suport, consell i ajut d'amics con en Lluís Albarracín, que hi han estat en el moment just en què els he necessitat, cadascú a la seva manera.

I per últim, una barreja d'agraïment i disculpa a la Yuri, en Martí i la Valentina. Treballar a jornada i mitja i elaborar aquesta tesi al mateix temps només ha estat possible prenent-los un temps que era seu. Aquí deixo per escrit el meu compromís que, com deia al principi, aquest sigui el final d'aquest camí.

Índex

Índex de figures

Índex de taules

Resum

El treball de tesis doctoral *Anàlisi de les actuacions d'estudiants amb bons resultats en la resolució de problemes amb múltiples opcions de resposta i temps limitat* contribueix a la recerca en Didàctica de les Matemàtiques en l'àmbit de la resolució de problemes. Aquest estudi es va iniciar per la inquietud de conèixer millor com actuen els estudiants bons resolutors de problemes quant aquests presenten les característiques pròpies del concurs matemàtic Proves Cangur, on es presenten 30 problemes amb 5 possibles opcions de resposta i 75 minuts per resoldre'n el màxim nombre possible. En particular, es pretén establir models de comportament propis de les condicions del concurs.

El marc teòric s'organitza en sis apartats. Els dos primers fan un repàs de l'evolució de l'àmbit de recerca en el camp de la resolució de problemes. Els capítol següent aborda qüestions rellevants de factors clau que cal establir per a situar la nostra recerca, com són la estratègia, la resolució i l'heurística. Els darrers tres apartats tracten els aspectes més rellevants dels conceptes de visualització, intuïció i certesa, que senten les bases de l'anàlisi de les dades que s'ha fet.

Per a de caracteritzar millor el grup de població objectiu de la recerca, s'han definit dos subgrups de població, per tal de distingir entre els *bons resolutors de problemes* i els *millors resolutors de problemes*. L'objectiu global de l'estudi és establir les diferències entre aquests dos grups de població per comprovar si els resultats obtinguts són aplicables al conjunt general dels alumnes que obtenen bons resultats a les proves, o si per contra hi ha prou diferències entre ells com per justificar una caracterització diferenciada. Per aconseguir aquest objectiu s'ha presentat un recull de problemes als dos subgrups de població, uns amb opcions de resposta i temps limitat i els altres sense aquestes característiques, i s'han analitzat els resultats obtinguts pels dos grups per separat.

Una primera exploració de les produccions dels alumnes s'ha utilitzat per establir els paràmetres amb els quals s'han analitzat després totes les resolucions presentades pels

estudiants. Aquests paràmetres s'han dividit en primer lloc en l'anàlisi de les intuïcions que utilitzen els alumnes en les seves resolucions, i com aquestes intuïcions completen processos de resolució que matemàticament no podem considerar com a prou justificats. En segon lloc s'ha analitzat l'ús que fan els estudiants de les opcions de resposta. I per últim s'han analitzat dues de les heurístiques que han aparegut amb més freqüència en les resolucions dels alumnes, com són l'ús de casos particulars i l'ús d'aproximacions en el procés de resolució.

Es conclou que els dos subgrups de població mostren comportaments prou diferents com per constatar que el grup general de població dels estudiants que obtenen bons resultats a les Proves Cangur no és prou homogeni com per extreure'n conclusions aplicables a tot el grup. Els alumnes considerats els *millors resolutors* de problemes en aquest context obtenen resultats substancialment superiors (més del que hauríem esperat per la poca diferència en la classificació d'uns i altres) als considerats *bons resolutors*, i aquests millors resultats van acompanyats de diferències importants en el comportament a l'hora de resoldre els problemes. Els alumnes millors resolutors plantegen els problemes de la mateixa manera disposin o no d'opcions de resposta, i mostren una preferència per les resolucions completes que deixin poc marge a la incertesa, utilitzant sovint les opcions de resposta com a simple comprovació del resultat obtingut en la seva resolució, obtenint millors resultats quan disposen de més temps per a resoldre els problemes encara que no disposin d'opcions de resposta. Els alumnes que no estan entre els millors resolutors, en canvi, mostren una predisposició més gran a utilitzar les opcions de resposta com a part del seu procés de resolució, i els seus resultats empitjoren bastant quan no disposen d'opcions de resposta, tot i disposar de més temps.

Summary

The doctoral thesis *Analysis of the behavior of students with good results in problem solving with multiple choice options and limited time* contributes to the research in Didactics of Mathematics in the field of problem solving. This study was initiated by the concern to know better how good problem solver students behave when these problems present the characteristics of the Math Kangaroo competition, where 30 problems are presented with 5 possible answer options and 75 minutes to solve the maximum number of them. In particular, the aim is to establish models of behavior specific to the conditions of the competition.

The theoretical framework is organized into six sections. The first two review the evolution of the field of research in problem solving. The following section address relevant issues involved in key factors that need to be established to position our research, such as strategy, resolution, and heuristics. The last three sections deal with the most relevant aspects of the concepts of visualization, intuition and certainty, which lay the foundations for the analysis of the data that has been done.

In order to better characterize the target population of the research, two subgroups of the population have been defined, in order to distinguish between the *good problem solvers* and the *best problem solvers*. The overall aim of the study is to establish the differences between these two population groups to see if the results obtained are applicable to the general set of students who get good results in the tests, or if on the contrary there are enough differences between them as to justify a differentiated characterization. To achieve this goal, a collection of problems was presented to the two population subgroups, one with limited time and answer options and the other without these characteristics, and the results obtained by the two groups were analyzed separately.

An initial exploration of the student productions has been used to establish the parameters with which all the resolutions presented by the students have been analyzed afterwards. These parameters have been divided primarily in the analysis of the intuitions that students use in their resolutions, and how these intuitions complete resolution processes that mathematically cannot be considered sufficiently justified. Second, we analyzed students' use of answer options. Finally, two of the heuristics that have appeared most frequently in student resolutions have been analyzed, such as the use of particular cases and the use of approximations in the resolution process.

It is concluded that the two population subgroups behave differently enough to find that the general population group of students who get good results in the Math Kangaroo competition is not homogeneous enough to draw conclusions applicable to the whole group. Students considered the best problem solvers in this context get substantially higher results (more than we would have expected due to the small difference in the classification between them) than those considered good solvers, and these better results are accompanied by significant differences in the problem-solving behavior. Top solving students pose problems in the same way whether or not they have answer options, and show a preference for complete resolutions that leave little room for uncertainty, often using answer options as a simple check of the result obtained in their resolution, getting better results when they have more time to solve problems even if they do not have answer options. Students who are not among the best solvers, on the other hand, show a greater predisposition to use answer options as part of their solving process, and their results get much worse when they do not have answer options even when have more time to solve them.

Capítol 1. Introducció

El 1991 va néixer a França la competició matemàtica Proves Cangur. A partir de 1994, altres països es van afegir a l'organització d'aquest concurs, creant-se al juny d'aquest any l'associació internacional Le Kangourou Sans Frontières (KSF) amb 10 membres fundadors representant entitats organitzadores dels seus països. El creixement de la popularitat d'aquest concurs ha estat molt important durant el segle XXI, en els anys que van de 2015 a 2020 s'hi ha afegit una mitjana de 4 nous països cada any.

El 2019 aquesta associació comptava amb 91 països membres de ple dret, i van participar en les Proves Cangur aproximadament sis milions d'estudiants d'Europa, Àsia, Àfrica, Austràlia, Amèrica del Nord i del Sud (Figura 1). Les dades estadístiques del 2020 i 2021 no són representatives de l'abast del concurs degut a les condicions especials que hi va haver a nivell mundial a causa de la pandèmia ocasionada pel virus SARS-CoV-2.

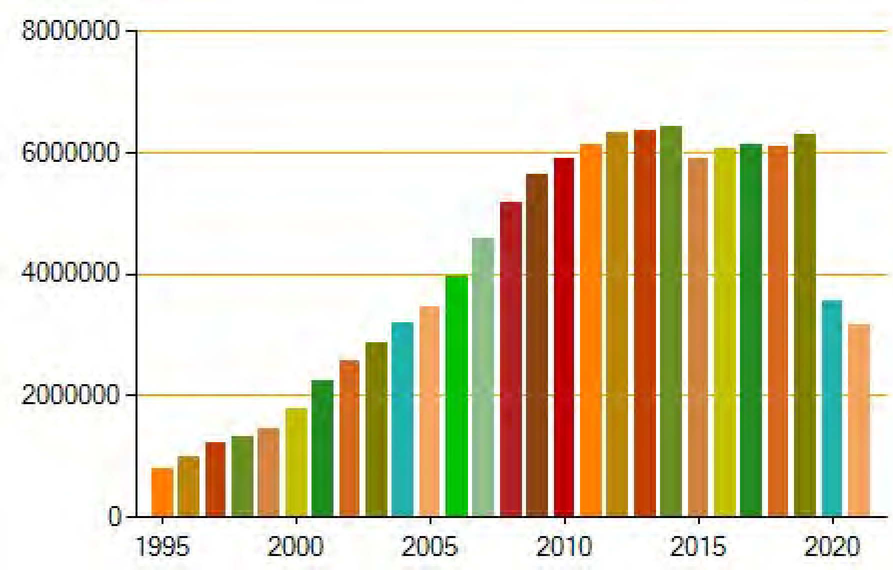


Figura 1 Participació mundial a les Proves Cangur

A Catalunya, País Valencià i Balears s'organitza aquest concurs sota el nom Proves Cangur des de 1994, sota la organització general de la Societat Catalana de Matemàtiques i amb col·laboració de la Comissió Cangur al País Valencià i la Societat Balear de Matemàtiques La participació el 2019 va ser de 157.218 estudiants de més de 1000 centres de primària i secundària (Figura 2). A l'estat espanyol organitza les proves la Asociación Canguro Matemático, que el 2019 va reunir a més de 20.000 estudiants.

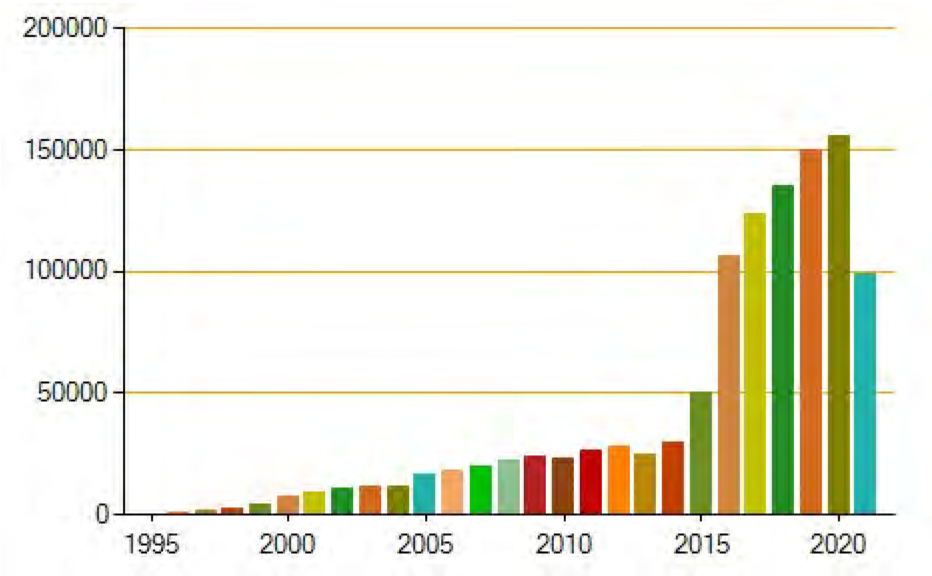


Figura 2 Participació a les Proves Cangur a Catalunya

Les Proves Cangur és un concurs amb un gran seguiment (Moliner, 2016), i és el concurs matemàtic més popular a nivell escolar de tot el món, i a nivell català també. I no només això, sinó que també és la prova matemàtica que més alumnes fan de manera simultània al nostre territori, superant les proves de selectivitat i les de competències bàsiques.

Les Proves Cangur consisteixen en donar la major quantitat possible de respostes correctes a una llista de 30 problemes, en ordre de dificultat creixent, en un temps màxim de 75 minuts (són molt pocs els estudiants que aconsegueixen respondre tots els problemes). Els problemes es presenten en el format de "problema amb resposta d'elecció múltiple", ja que cada problema ofereix cinc opcions de resposta després de l'enunciat, on una i només una d'elles és correcta. Els concursants han de marcar una sola de les cinc respostes o deixar la resposta en blanc. No se'ls demana escriure cap justificació o desenvolupament de la resolució, tot i que disposen de paper per poder dibuixar, fer càlculs, etc. No es permet l'ús de cap dispositiu electrònic (incloent calculadores), però sí d'instruments de dibuix.

Les llistes de problemes que es plantegen en cada competició s'elaboren en el si d'una comissió internacional formada per professors pertanyents a totes les organitzacions membres de KSF. Així s'aconsegueix que les proves siguin les mateixes per als estudiants de tots els països membres de l'organització. Els participants a nivell mundial s'organitzen en 6 categories diferents que abasten les edats de 6 a 18 anys. Els coneixements matemàtics necessaris per resoldre els problemes són adequats per a l'edat a la qual va dirigida la prova. Al no haver-hi uniformitat de currículums de matemàtiques a tots els països participants, i tenint en compte que no es pretén avaluar el coneixement del currículum escolar, sinó la capacitat de raonament i l'habilitat per resoldre problemes dels concursants, les eines teòriques que es necessiten per resoldre aquests problemes es corresponen amb els continguts estudiats a la classe de matemàtiques en cursos anteriors. A tal efecte s'han desenvolupat uns currículums propis de les Proves Cangur, elaborats amb consens de tots els membres participants i que volen reflectir els continguts comuns en tots els currículums estatals dels països participants, per prevenir que un alumne pugui .

Un repte a què s'enfronta la comissió internacional és la decisió del nivell de dificultat de cada problema. Aquesta decisió es pren per la intuïció dels propis membres de la comissió després d'analitzar les possibles resolucions que pot admetre un problema, però no tenen en compte les estratègies que els estudiants puguin usar en el context del concurs. Aquest fet ha estat una de les motivacions per a portar a terme la investigació que presentem. Els problemes proposats a la comissió els resolen els seus membres però no en les condicions específiques del concurs, sinó d'una manera més "clàssica", com el resoldrien ells si fessin el problema però sense les opcions de resposta ni amb el temps limitat. Sovint després de discutir sobre la idoneïtat d'un problema durant una llarga estona, analitzar les diferents resolucions presentades per diferents membres de la comissió, el problema s'acaba descartant quan algú planteja la pregunta de quant de temps s'estima que pot necessitar un estudiant de l'edat que pertoqui per a resoldre aquell problema. La situació plantejada pot ser molt original, el problema molt interessant, la resolució molt elegant... però és tant o més important que aquest encaixi amb el context de les Proves Cangur, tant pel que fa a la limitació de temps que tenen els estudiants com a l'ús que poden fer de les opcions de resposta. La comissió té en compte les opcions de resposta sobretot pel seu paper com a "distractors", és a dir, que les opcions continguin resultats que puguin concordar amb els errors més comuns que es preveu que puguin fer els estudiants en cada problema. Però no es té en compte l'ús que aquests estudiants poden fer de les opcions de resposta com a instrument actiu del procés de resolució, i com poden afectar aquestes opcions a les resolucions previstes per la mateixa comissió. Els resultats que presentem esperem que puguin contribuir a entendre millor el comportament dels estudiants en el context del concurs, si més no els dels estudiants més talentosos, i que això ajudi a poder establir amb més fiabilitat el nivell de dificultat d'un problema i a preveure vies alternatives de resolució que fins ara no es contemplen.

La investigació sobre resolució de problemes ha donat lloc a una gran quantitat de publicacions. En elles s'estudien diferents elements que tenen a veure amb el procés de resolució o amb l'èxit dels resolutors, com elements dels enunciats, estratègies de resolució, coneixements dels resolutors, processos metacognitius, influència de factors afectius com l'ansietat o la confiança, etc. No obstant això, no hem trobat cap estudi que informi sobre com actuen els estudiants amb més talent matemàtic i més expertesa en resolució de problemes a l'enfrontar-se a problemes en les condicions particulars del concurs Proves Cangur, és a dir, amb respostes d'elecció múltiple i amb temps limitat. Conjecturem com a punt de partida que motiva la nostra recerca, respecte d'aquest tipus d'estudiants, que:

- A l'incloure en l'enunciat opcions de resposta, es pot induir l'ús d'estratègies de resolució o d'heurístiques específiques basades en elles.
- Disposar o no de temps limitat per a resoldre els problemes pot provocar:
    - Diferències en l'ús de la intuïció (en el sentit de Fischbein, 1987) i les conjectures, amb menor rigor matemàtic en els processos de resolució quan el temps és limitat.
    - Diferències en la confiança (seguint de manera inicial el model de Foster, 2016) dels estudiants en les seves respostes, amb menor confiança quan el temps és limitat.
- Els estudiants amb bons resultats a les Proves Cangur basen el seu èxit en un ús hàbil de les opcions de resposta que els permet trobar respostes correctes sense desenvolupar un procés de resolució complet.

Per descriure adequadament el context de la nostra investigació, cal introduir unes precisions terminològiques:

- Seguint a Kantowski (1977), distingirem entre un *problema*, la forma de resolució del qual no és evident i on es requereix utilitzar la informació de manera no rutinària i un cert nivell de raonament de l'alumne, i un *exercici*, quan per a la resolució només es necessita utilitzar dades recordades o aplicar directament un algoritme conegut, sense més processos de raonament.

- A més, seguint el model de Puig (1996), distingirem entre *resultat* (o resposta), *solució* i *resolució* d'un problema. Acceptem "el terme resultat per indicar el que contesta a la pregunta del problema, ja sigui un número, una fórmula, una expressió algebraica, una construcció geomètrica, una derivació lògica, etc. El terme solució el farem servir per indicar la presentació final del conjunt de passos que condueixen de les dades a la incògnita [...]. Finalment, farem servir el terme resolució per indicar el conjunt de les accions del resolutor durant el procés, que poden conduir a obtenir la solució o no" (Puig, 1996, pàg. 34).

No coneixem resultats anteriors que puguin confirmar o rebatre aquestes conjectures, de manera que l'estudi experimental que presentem en aquest estudi és de tipus exploratori i el seu objectiu és recollir informació que ens permeti donar resposta, encara que sigui parcial i limitada, a les conjectures anteriors i assentar unes bases inicials de dades empíriques sobre les quals avançar en la formulació de respostes a qüestions concretes. Els resultats del nostre estudi poden ser d'especial interès tant per a la comissió internacional encarregada de dissenyar les Proves Cangur, com per al professorat que utilitzi aquest tipus de problemes a les classes de matemàtiques, propiciant un millor coneixent del comportament que cal esperar dels seus alumnes en aquest context, com també als investigadors en educació matemàtica interessats en la resolució de problemes dels estudiants amb altes capacitats matemàtiques.

1.1 Objectiu general

L'objectiu general d'aquest estudi és caracteritzar les diferències de comportament entre els estudiants amb bons resultats i millors resultats en les Proves Cangur a l'hora de resoldre problemes d'opció múltiple i temps limitat.

1.2 Objectius específics

Com a objectius específics destaquem:

- Establir uns nivells de certesa, basats en l'ús que fan els estudiants de la intuïció al resoldre els problemes, que ens permetin classificar les seves produccions.
- Analitzar l'ús de conjectures en les resolucions dels estudiants que obtenen bons resultats en el context de les Proves Cangur.
- Analitzar l'ús de les opcions de resposta dels estudiants que obtenen bons resultats en les Proves Cangur en el procés de resolució de problemes en el context del concurs.
- Analitzar l'ús de les aproximacions en els càlculs i l'ús de casos particulars en la resolució de problemes per part dels estudiants que obtenen bons resultats a les Proves Cangur.
- Establir les diferències més rellevants entre les resolucions de problemes amb i sense les condicions específiques de les Proves Cangur dels estudiants que obtenen bons resultats en el concurs.

Per a treballar en aquests objectius hem dissenyat un experiment en què diversos estudiants han resolt problemes en condicions similars a les de les Proves Cangur i també els mateixos problemes sense aquestes condicions especials. Aquesta recollida de dades s'ha fet en dues fases diferenciades, en la primera hi han participat 10 estudiants classificats a les Proves Cangur del 2012 entre els percentils 99,75% i 100% (grup A), i en la segona 10 estudiants classificats el 2015 entre els percentils 95% i 96% (grup B). D'aquesta manera es vol també estudiar les diferències existents entre estudiants amb bons resultats per comprovar si s'observen grans diferències dins del grup d'estudiants classificats en els percentils 95%-100%.

L'anàlisi de les dades obtingudes ens ha permès identificar eines heurístiques (Puig, 1996), que apareixen en la resolució dels problemes, avaluar el nivell de confiança que tenen els estudiants respecte de les seves respostes i estudiar el paper de les intuïcions descrites per Fischbein (1987) en el desenvolupament de les resolucions dels problemes. A partir d'aquesta informació, hem comparat les dades corresponents als problemes de cada tipus.

1.3 Estructura de la memòria

Aquesta memòria consta de vuit capítols i quatre annexos. En el primer capítol introduïm el context de la recerca i la motivació que ens ha portat a la recerca que presentem. En ell parlem de les Proves Cangur i el tipus de problemes que presenten aquestes proves als estudiants i presentem els objectius que pretenem aconseguir.

En el segon capítol presentem una revisió de la literatura existent que considerem més rellevant en referència a dos dels pilars on es basa la nostra investigació: la resolució de problemes i els alumnes amb talent matemàtic.

En el tercer capítol desenvolupem el marc teòric que hem elaborat per fixar les idees que guien la recerca. Iniciem aquest capítol amb dos apartats dedicats a la resolució de problemes, el primer per estudiar l'evolució de la recerca en aquest àmbit i el segon per presentar les principals idees expressades per Pólya (1945) i Schoenfeld (1985) referents als factors que intervenen en la resolució d'un problema. El tercer apartat d'aquest capítol versa sobre les definicions d'estratègia, resolució i heurística basades en les idees de Puig (1996) que utilitzarem en aquest treball. Els tres últims apartats aborden els conceptes de visualització, intuïció i certesa que ens ajudaran a interpretar les produccions dels alumnes.

En el quart capítol descrivim els aspectes metodològics de la recerca. S'hi descriu la població objecte d'estudi, es presenta el qüestionari que s'ha utilitzat per recollir les dades i els diferents aspectes que s'han valorat per tal d'analitzar-les.

En el cinquè capítol presentem l'anàlisi de les respostes dels alumnes segons les categories descrites en el capítol anterior.

En el sisè capítol mostrem els resultats de la recerca relacionant l'anàlisi de dades del capítol cinquè amb els resultats que ens seran útils per a l'elaboració de les conclusions.

En el setè capítol presentem les conclusions del nostre estudi, responent als objectius plantejats al primer capítol. Reflexionem també sobre les implicacions didàctiques d'aquestes conclusions i exposem les limitacions de la recerca i possibles perspectives de futur en el camp en què hem treballat.

Per últim llistem al capítol vuit les referències bibliogràfiques que hem utilitzat en la nostra investigació.

Capítol 2. Revisió de la literatura existent

2.1 En relació als concursos matemàtics

Els concursos de resolució de problemes de matemàtiques han estat estudiats des del punt de vista de la recerca des de fa anys. Una gran part dels textos escrits en les últimes dècades del segle XX parteixen de les bases que va proposar Pólya en els seus llibre "How to solve it" (Pólya 1945), "Mathematics and plausible reasoning" (Pólya 1954) i "Mathematical discovery" (Pólya 1962). En particular s'han estudiat les estratègies de resolució de problemes en el context de concursos com l'Olimpíada Matemàtica Internacional (IMO per les seves sigles en anglès).

Pak-Hong Cheung en el seu article "Problem solving Strategies: Research findings from Mathematics Olympiads" (Cheung, 1992) identifica una sèrie d'estratègies de resolució que identifica amb les heurístiques de Pólya (1945), exemplificant cadascuna d'aquestes estratègies amb problemes concrets de la IMO però sense entrar a analitzar produccions dels participants.

En aquest sentit, la International Mathematical Olympiad concentra gairebé tota la literatura referent als concursos de matemàtiques del segle XX, i no és fins els primers anys del segle XXI que es comencen a escriure de manera més freqüent articles sobre concursos matemàtics que no siguin la IMO.

La literatura sobre els alumnes matemàticament talentosos és molt àmplia, però és poca la que fa referència directa al comportament d'aquests alumnes en la resolució de problemes en el context de concursos matemàtics. Tot i això, s'han escrit articles interessants, com "When do gifted high school students use geometry to solve geometry problems?" de Boris Koichu i Abraham Berman (2005), on s'analitzen les produccions de diversos estudiants que han destacat en la IMO, amb una metodologia semblant en alguns punts amb la seguida en el nostre estudi. S'analitza el comportament dels estudiants en la resolució de problemes de geometria amb entrevistes pre i post resolució per mirar d'establir patrons de comportament.

Pel que fa al context específic de les Proves Cangur, trobem una de les primeres referència de l'any 2006 als Proceedings of the Twenty Eight Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education en una referència a un pòster presentat per Stefan Halverscheid (2006), "Problems that make a difference to Kangaroos" on es fa un estudi de la selecció de problemes que porta a terme la Comissió Internacional del KSF i els resultats de la prova a Alemanya, i apunta a uns resultats parcials que indiquen que davant dels problemes amb múltiples opcions de resposta, els estudiants més joves són menys propensos a donar respostes en blanc, i a mida que passen cursos cada vegades són més previnguts i opten amb més freqüència per abstenir-se de respondre per prevenir una penalització si no tenen un mínim de certesa en la seva resposta.

Altres autors com Jiang i Xiong (2021) en el seu recent article de 2021 "Analyze the quality of Math Kangaroo Problems with a content analysis" també fan un estudi de la selecció i dels problemes en sí que s'utilitzen a les Proves Cangur, però tampoc s'analitza el comportament dels estudiants a l'hora de resoldre problemes. Els autors conclouen que els problemes presentats al concurs no requereixen un coneixement extens del currículum de matemàtiques escolars però sí un coneixement profund de les eines bàsiques, així com una bona capacitat per analitzar els problemes, i que la resolució d'aquest tipus de problemes ajuden a millorar la capacitat dels estudiants per raonar lògicament

Un autor que els darrers anys ha publicat articles amb referències específiques a les Proves Cangur i el comportament dels estudiants en aquest concurs des de diferents punts de vista és Mark Applebaum, amb el seu article de 2017 titulat "Spatial Abilities as a predictor to success in the Kangaroo contest" (Applebaum 2017) i el de 2019 publicat juntament amb Roza Leikin, "Girl's performance in the Kangaroo contest" (Applebaum i Leikin, 2019) on s'enfoca amb una perspectiva de gènere el comportament de nens i nenes en el context de les competicions matemàtiques. En el primer d'aquests articles Applebaum conclou que la visualització espacial és un factor clau en l'èxit dels alumnes a l'hora de resoldre aquest tipus de problemes, i que els estudiants que mostren habilitat per aquest tipus de visualització des d'edats primerenques tenen més probabilitats de ser en el futur bons resolutors de problemes de matemàtiques.

Cap d'aquests articles aborda directament l'objectiu de la nostra recerca, i els més propers s'han publicat els darrers anys, amb posterioritat a la recollida i anàlisi de dades que mostrem en aquest text. En particular, no hem trobat literatura directament relacionada amb la resolució de problemes matemàtics amb opcions múltiples de resposta en un context de concurs, ni hem trobat literatura existent que estudiï quins comportaments particulars desenvolupen els estudiants talentosos en aquest tipus de situacions. Aquest fet ha comportat que s'hagi hagut d'establir les diferents categories per a analitzar les produccions dels estudiants, fet que en sí mateix és un dels resultats d'aquest estudi.

2.2 En relació als alumnes talentosos en matemàtiques

Les matemàtiques tenen un ampli àmbit d'ús que va des del disseny de les màquines més senzilles fins als dispositius electrònics més complexos, des de la construcció d'una petita joguina fins a un transbordador espacial. La qualitat de la millora de la ciència i la tecnologia d'una societat depèn de la formació i el suport de la seva gent. En aquest sentit, la formació i el suport als estudiants dotats és especialment important. Se sap que els estudiants talentosos tenen habilitats especials per a les matemàtiques i tenen un major potencial per convertir-se en científics (Assouline i Lupkowski-Shoplik, 2005). Els individus i les societats que puguin utilitzar les matemàtiques de manera eficaç podrien trobar més oportunitats per donar forma al seu futur (NCTM, 2000). Segons Gagne (2005) la intel·ligència és innata, però només pot ser una habilitat si es millora. Per aquest motiu, cal definir i desenvolupar sistemàticament les variables que prediuen les habilitats matemàtiques dels alumnes talentosos. D'aquesta forma, les característiques cognitivo-afectives que afecten l'assoliment de les matemàtiques esdevenen el centre de les investigacions en aquest camp en els darrers anys (Bilican, Demirtasli i Kilmen, 2011).

A la literatura s'han tractat diversos fenòmens que tenen a veure amb l'alt rendiment en matemàtiques. Durant dècades, la superdotació es va equiparar amb el concepte d'intel·ligència o coeficient intel·lectual (Renzulli, 2005; Brown, Renzulli, Gubbins, Siegle, Zhang, i Chen, 2005; Coleman i Cross 2005). Terman (1925) va afirmar que els individus dotats són aquells que puntuen entre l'1% més alt de la població a la prova de Stanford-Binet. Aquesta comprensió de la superdotació ha sobreviscut fins als nostres dies en algunes concepcions. Tanmateix, la majoria dels investigadors veuen ara la superdotació com un concepte més polifacètic en què la intel·ligència només és un dels diversos aspectes (Renzulli, 2005). Un exemple és el model de superdotació de tres anells de Renzulli (1986). En un intent de capturar les múltiples facetes de la superdotació, Renzulli va presentar la superdotació com una interacció entre la capacitat superior a la mitjana, la creativitat i el compromís amb la tasca. Va passar a separar la superdotació en dues categories: la superdotació escolar i la superdotació productiva creativa. El primer fa referència a la facilitat per adquirir coneixements i fer proves estandarditzades. El segon implica la creació de nous productes i processos, que Renzulli pensava que sovint es passava per alt a l'escola. Molts investigadors donen suport a aquesta idea que la creativitat s'ha d'incloure en la concepció de la superdotació en qualsevol àrea (Miller, 2012).

Csikszentmihalyi (2000) va assenyalar el caràcter dependent del camp del concepte de superdotació. A causa de la manca de claredat conceptual sobre la superdotació i l'heterogeneïtat de la població superdotada, tant en general com en matemàtiques, la identificació dels estudiants superdotats ha variat (Kontoyianni, Kattou, Pitta-Pantazi i Christou, 2011). En canvi, a la literatura de recerca es troben característiques destacades de la superdotació en matemàtiques. Krutetskii (1976) en la seva investigació sobre els estudiants de matemàtiques talentosos va trobar una sèrie de trets característics: capacitat de pensament lògic respecte a les relacions quantitatives i espacials, els símbols de nombres i lletres; la capacitat de generalització ràpida i àmplia de relacions i operacions matemàtiques; flexibilitat dels processos mentals; i la memòria matemàtica. Altres investigadors han proposat característiques similars de la superdotació matemàtica (vegeu per exemple Sriraman, 2005).

Un altre aspecte relacionat amb el talent matemàtic és la creativitat. Tot i així, un dels principals reptes a l'hora d'investigar la creativitat matemàtica és la manca d'una definició clara i acceptada del terme creativitat matemàtica i de la pròpia creativitat. Revisions prèvies de la literatura han conclòs que no hi ha una definició universalment acceptada ni de creativitat ni de creativitat matemàtica (Sriraman, 2005; Mann, 2005). Treffinger, Young, Selby i Shepardson (2002) observen que hi ha més de 100 definicions contemporànies de la creativitat matemàtica. No obstant això, hi ha certs paràmetres consensuats a la literatura que ajuden a acotar el concepte de creativitat. La majoria de les investigacions de la creativitat prenen una de dues direccions: la creativitat extraordinària o la creativitat quotidiana (Kaufman i Beghetto 2009). Mirar la creativitat com a construcció tant social com personal obre una distinció entre diferents tipus de creativitat (Leikin i Pitta-Pantazi, 2013). Jaime i Gutiérrez (2017) atribueixen als estudiants amb altes capacitats matemàtiques característiques típiques com la originalitat dels procediments i el seguiment de camins no estàndard per a la resolució d'un problema. A més de la creativitat i la originalitat, aquests estudiants amb altes capacitats matemàtiques poden mostrar una gran varietat d'habilitats de resolució de problemes (Gutiérrez i Jaime, 2013), recolzant la hipòtesis que els estudiants amb altes capacitats matemàtiques mostren uns comportaments davant la resolució de problemes clarament diferents al de la resta d'estudiants que no mostren quest talent especial.

Tant si la creativitat és específica d'un domini com si és general, o si ens fixem en la creativitat ordinària o extraordinària, la majoria de les definicions de creativitat inclouen algun aspecte d'utilitat i novetat (Sternberg, 1999; Plucker i Beghetto, 2004; Mayer, 1999). El que és útil i nou depèn del context del procés creatiu d'un individu, en especial en contextos escolars on l'estudiant interpreta segons el coneixement que té el que per a ell pot ser útil i nou. Els criteris d'utilitat i novetat en les arts professionals diferirien significativament del que es considera útil i nou en una classe de matemàtiques de primària o secundària. Hi ha, doncs, un factor relatiu a la creativitat que mereix ser tingut molt en compte. Per a un artista professional, una tècnica, producte o procés nou i innovador que canviï el seu camp d'alguna manera significativa seria creatiu, però per a un estudiant de matemàtiques de secundària una solució inusual a un problema podria ser creativa. La creativitat matemàtica en un entorn escolar es pot definir com el procés que dona lloc a una solució o idea nova, a un problema matemàtic o la formulació de noves preguntes (Sriraman, 2005).

Sovint, la capacitat matemàtica s'ha vist com l'equivalent a l'assoliment matemàtic; i fins a cert punt hi ha certa veritat en aquesta noció. Hi ha una relació estadística entre el rendiment acadèmic en matemàtiques i l'alta capacitat matemàtica (Benbow i Arjmand, 1990). En canvi, Ching (1997) va descobrir que el talent ocult passa molt desapercebut a les aules convencionals i Kim et al. (2003) afirmen que les proves tradicionals poques vegades identifiquen la creativitat matemàtica. Hong i Aqui (2004) van comparar les característiques cognitives i motivacionals dels estudiants de secundària que tenien un talent acadèmic en matemàtiques, un talent creatiu en matemàtiques i un no dotat. Els autors van trobar que els estudiants amb talent creatiu utilitzaven més estratègies cognitives que els estudiants dotats acadèmicament. Aquestes troballes indiquen que la capacitat matemàtica i l'assoliment matemàtic en un entorn d’ensenyament obligatori no són necessàriament sinònims.

Capítol 3. Marc Teòric

La resolució de problemes és un dels camps centrals en la recerca en Educació Matemàtica. En aquest document no pretenem elaborar un recull exhaustiu de la literatura existent, sinó recollir els conceptes clau que intervenen en la resolució de problemes. Primerament, presentem un breu resum de la recerca efectuada en les darreres dècades sobre resolució de problemes i, posteriorment, abordem els diferents aspectes teòrics relacionats amb el nostre estudi. En concret, ens interessa tot allò relacionat amb els processos de resolució d'un problema, així com establir quines tasques de caire matemàtic entenem com a problemes.

Per altra banda, presentem també el que indiquen estudis recents que ens serviran de referència per a explicar alguns dels comportaments observats en els estudiants, sobretot mitjançant la intuïció i la visualització.

3.1 Evolució de l'àmbit de recerca en resolució de problemes

La resolució de problemes és un camp estretament lligat a la pràctica matemàtica i un dels aspectes centrals en la recerca en Educació Matemàtica. Un dels autors més importants en aquest camp i precursor de gran part de les investigacions posteriors en aquest camp és George Pólya, que en el seu llibre How to solve it (Pólya, 1945) proposa els passos a seguir en la resolució de problemes. Aquests quatre passos que descriu Descartes són, essencialment, els mateixos que recull Pólya (1945) i són els següents: la comprensió del problema, l'elaboració d'un pla, l'execució d'aquest pla i una mirada retrospectiva final. Pólya (1945) és la primera gran referència per entendre l'evolució de la recerca contemporània en resolució de problemes. A partir de la publicació dels seus llibres sobre resolució de problemes, altres autors han portat a terme un gran nombre d'estudis que han fet avançar l'àrea.

La resolució de problemes és un camp que va despertar un gran interès en les dècades de 1970 i 1980, en les que es van produir una gran quantitat de recerques al respecte, però que va veure com aquest interès minvava a mitjans de la dècada de 1990 (Lester, 1994), en la que l'atenció es va desplaçar a altres àrees de l'Educació matemàtica. A partir de 1990, es van introduir nous currículums escolars als Estats Units, que tenen una gran rellevància sobre els continguts que inclouen els currículums a nivell internacional. El debat sobre la conveniència d'incloure la resolució de problemes i la forma en la que es concreta resta obert, tal i com es recull a Schoenfeld (2007).

La resolució de problemes és un camp que ha generat molta literatura i que encara és de plena rellevància. Els estudis més rellevants entre 1970 i 1994 es troben al recull elaborat per Lester (1994) sobre l'estat de la recerca existent en resolució de problemes en aquest període. L'autor del recull planteja les quatre àrees específiques en les que hi ha hagut un major progrés per a aquest període. En primer lloc, destaca les recerques dirigides a identificar els elements que fan que un problema sigui difícil per als estudiants. Inicialment es van estudiar aquelles variables que feien que un problema fos difícil, com ara el seu context, l'estructura, la sintaxi utilitzada i les heurístiques necessàries. Posteriorment es va considerar que la dificultat d'un problema no es troba en les tasques que cal desenvolupar, sinó en les característiques del propi resolutor (Kilpatrick, 1985), tals com la capacitat de visualització o la seva disposició enfront la tasca a realitzar.

En segon lloc, Lester (1994) destaca els estudis que miren de diferenciar els bons dels mals resolutors, i observa un fet rellevant per a qualsevol aproximació didàctica a la resolució de problemes: que és possible caracteritzar els processos de resolució que utilitzen els bons resolutors (Charles i Silver, 1989) però es posa de manifest que comprimir aquestes formes de treballar i aplicar-les als mals resolutors o resolutors novells no proporciona, en general, els resultats esperats (Lesh, 1985).

En tercer lloc, Lester (1994) identifica determinats progressos sobre l'ensenyament de la resolució de problemes. Inicialment, la recerca es va centrar en la instrucció per adquirir i utilitzar destreses i estratègies heurístiques, tot i que posteriorment es va centrar en la pràctica de la resolució, l'adquisició de mètodes generals i la reflexió sobre les tasques. Finalment, Lester (1994) posa un gran èmfasi en la rellevància de la metacognició com a força directriu de la resolució de problemes. Lester (1994) afirma que el procés de resolució compta amb aspectes metacognitius i un ampli espectre d'altres aspectes no-cognitius, com les creences i actituds del resolutor (Lester, Garofalo i Kroll, 1989; Schoenfeld 1987).

En el mateix document, Lester (1994) afirma que la recerca sobre resolució de problemes va ser molt productiva durant la dècada de 1970 i la primera part de la dècada de 1980, però que a partir de finals de la dècada de 1980 es va anar perdent interès per aquest camp. El motiu que destaca per explicar aquesta disminució en l'interès per la recerca sobre resolució de problemes és s'observa que la resolució de problemes és molt més complexa del que es pensava inicialment i és necessari obrir l'espectre de recerques en en aspectes també rellevants, com ara l'avaluació o aspectes socio-culturals.

Schoenfeld (2007) presenta un nou recull a partir de la recerca ressenyada per Lester (1994) i actualitza l'estat de la recerca en resolució de problemes i les seves conseqüències sobre el sistema educatiu als Estats Units. En aquest article es centra en la influència de diferents recerques portades a terme en el camp de l'Educació Matemàtica sobre els currículums de 1990 i en les conseqüències de l'aplicació d'aquests. Destaca el fet que el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1980) va proposar que el "problem solving must be the focus of school mathematics in the 1980s" (pàg. 1) i que aquesta associació va elaborar una llista amb diverses recomanacions sobre resolució de problemes, que encara avui serien apropiades, però que no es van portar a terme amb èxit. De fet, Schoenfeld (2007) afirma que els llibres de text van canviar poc tot i les reformes curriculars i que no havien incorporat els nous coneixements obtinguts provinents de la recerca.

Schoenfeld comparteix la visió de Lester sobre la disminució de l'interès de la recerca en la resolució de problemes a partir del final de la dècada de 1980, donant mostres dels camins que es van prendre en recerques posteriors en el camp de l'Educació Matemàtica. A la dècada del 2000, es comença a interpretar l'aprenentatge de les matemàtiques com a un instrument per dotar de significat el nostre entorn. A partir d'aquest moment es realitzen aportacions al camp basades en els fonaments de la resolució de problemes amb l'objectiu d'aprofundir en fets com la comprensió dels conceptes per part dels alumnes, la seva competència en resolució de problemes, el desenvolupament de la seva pròpia autonomia com a estudiants o el creixement personal de l'alumne (Lampert, 2001; Boaler, 2002; Senk i Thompson, 2003).

La resolució de problemes ha seguit com a un dels camps de recerca més rellevants a l'Educació Matemàtica fons a l'actualitat. A l'ICME d'Hamburg del 2016 es va donar lloc a un dels darrers reculls més rellevants al respecte. El llibre de Liljedahl i Santos-Trigo (2019) destaca els aspectes més destacats a l'actualitat. En primer lloc, es constaten encara esforços en refinar el marc el marc de Pólya (Tjoe, 2019), caracteritzant de nou les fases de resolució de problemes que apareixen en els intents de resolució dels estudiants i es centra a buscar nous enfocs per fomentar entre els alumnes diferents formes de resoldre problemes.

Tjoe (2019) observa que els estudiants mostren poc interès per trobar resolucions alternatives a les que han desenvolupat en primera instància. D'aquesta forma, la recomanació que es deriva és que els estudiants discuteixin explícitament al llarg de la instrucció la importància de trobar múltiples mètodes de solució per abordar qualsevol tipus de problema. Serà, doncs, tasca del professorat promoure que els seus alumnes es centrin en la fase de retrospectiva i trobar diferents aproximacions per resoldre el mateix problema. Maciejewski (2019) amplia aquesta visió i proposa reconceptualitzar els processos de resolució de problemes matemàtics per incloure nous elements, els que ell anomena previsió matemàtica i la importància del pensament futur a l'hora d'abordar una situació de resolució de problemes.

Respecte a l'ús de tecnologia, Carreira i Jacinto (2019) conclouen que la inclusió d'elements tecnològics digitals a la resolució de problemes ofereix a l'estudiant la possibilitat de participar en diferents formes de raonament, incloent l'exploració, la manipulació, l'observació, la conjectura, la formulació, l'explicació i la validació. Santos-Trigo (2019) presenta un marc per caracteritzar el raonament que podria desenvolupar un resolutor de problemes com a resultat de l'ús de la tecnologia digital per resoldre problemes matemàtics. En fer-ho, il·lustra com les possibilitats de la tecnologia poden donar forma a la reconstrucció de figures que sovint estan incrustades en el problema. Aquest ús de la tecnologia és clau també en el desenvolupament d'habilitats de visualització com les descrites per Presmeg (1986) que els estudiants apliquen més tard en la resolució de problemes encara que no disposin d'aquests elements tecnològics en el moment de la resolució.

Finalment, al Departament de Didàctica de la Matemàtica i les Ciències Experimentals s'han desenvolupat també en els darrers anys recerques relacionades amb la resolució de problemes, seguint algunes d'aquestes vessants actuals. Com la metacognició (Deulofeu i Vilallonga, 2018; Torregrosa, Deulofeu i Albarracín, 2020), la resolució grupal de problemes de geometria (García-Honrado, Fortuny, Ferrer i Morera, 2016) o la modelització matemàtica com a branca de la resolució de problemes en les que els contextos reals són rellevants (Ortega, Puig i Albarracín, 2019; Cárcamo, Fortuny i Gómez, 2017). Aquesta tesi s'emmarca en aquesta tradició i continua investigant sobre la resolució de problemes, afegint més coneixement sobre un tipus de resolució poc estudiat, el dels problemes de resposta tancada en el context de concurs Cangur.

3.2 Factors que intervenen en la resolució d’un problema

Si ens centrem en les darreres dècades, veiem que s'han elaborat diversos estudis sobre diferents aspectes relacionats amb la forma en que es pot resoldre un problema. La primera referència en l'àmbit de l'Educació Matemàtica són els llibres publicats per Pólya sobre resolució de problemes, en els que es centra en les estratègies a seguir per un resolutor.

Pólya (1945) estableix un model dividit en quatre fases per a la resolució d'un problema. Aquestes fases són les següents: a) Comprensió del problema; b) Elaboració d'un pla; c) Execució del pla, d) Mirada retrospectiva. A partir de la introspecció, Pólya examina el comportament d'un resolutor que podríem anomenar ideal, i que és capaç d'autogestionar la seva tasca. Aquest recorre linealment les quatre fases descrites i passa a la següent només quan l'anterior ha estat finalitzada. El model presentat per Pólya (1945) va acompanyat d'un conjunt de preguntes que el resolutor es pot plantejar per avançar en la seva tasca. La gran majoria d'aquestes preguntes són variacions de la pregunta coneixes un problema relacionat? amb el que l’experiència prèvia en resolució de problemes sembla ser el motor de la resolució de problemes per a Pólya.

El detall sobre la naturalesa de cadascuna d’aquestes fases de resolució (Pólya, 1945) és el següent. La primera fase consisteix en la identificació, definició i comprensió del problema. En aquesta fase es reconeix l'existència d'un problema per part del resolutor, així com i la necessitat de resoldre'l. La definició del problema consisteix en la conversió de l'enunciat a una representació mental en forma d'un esquema coherent que pugui ser útil al resolutor. La segona fase de la resolució es centra en la planificació de la resolució. Es tracta de dissenyar l'actuació a seguir i identificar els objectius a complir després d'examinar les possibles estratègies generals que es poden aplicar al problema. La tercera fase és l'execució real del pla que dissenyat prèviament, portant a terme les accions particulars que s'han planificat i regulant l'actuació amb l'objectiu que aquesta s'ajusti al pla fixat inicialment. La quarta fase de la resolució és la retrospecció final, en la que es porta a terme una verificació de la tasca i de les decisions preses anteriorment, així com la validació de la solució i dels resultats obtinguts a partir del pla inicial.

Schoenfeld continua l'obra de Pólya sobre mètodes heurístics. Schoenfeld (1985) considera insuficients les estratègies que considera Pólya i sosté que el procés de resolució d'un problema és encara més complex i que inclou altres elements no considerats, com ara aspectes de caràcter emocional i afectiu propis de cada resolutor. En la seva recerca, Schoenfeld va afegint diferents components a cada estudi que implementa, i podem entendre que cada element que introdueix és el resultat d'intentar explicar per què els elements anteriors no són suficients, també per explicar per què els resolutors tenen dificultats per resoldre problemes. A partir de les dificultats i mancances dels resolutors, considera aspectes cognitius com les heurístiques, la gestió de l'activitat de resolució de problemes (metacognició), els recursos i els sistemes de creences propis. Schoenfeld (1985) considera les creences un aspecte transversal de la resolució de problemes, enteses com un conjunt d'idees o percepcions que els estudiants tenen sobre les matemàtiques, l'activitat matemàtica i els processos relacionats amb el seu ensenyament i aprenentatge. Les creences que documenta en el seu treball són: i) les matemàtiques són de caràcter abstracte i no es relacionen amb la vida quotidiana o la realitat; ii) els problemes de matemàtiques s'han de resoldre ràpidament, si no es pot, és que no tenen solució; iii) només els genis poden descobrir o crear matemàtiques per ells mateixos.

3.3 Estratègia, resolució i heurística

Es consideraran en aquest estudi les estratègies de resolució dels estudiants, és a dir aquelles actuacions que els permeten establir un pla d'acció per aconseguir un objectiu clar. Aquestes estratègies sorgeixen quan l'alumne es veu davant la situació d'haver de prendre decisions i prendre un o altre camí en la resolució del problema. En el context dels problemes amb resposta d'elecció múltiple, un exemple d'estratègia és l'ús de les opcions de resposta: es poden utilitzar aquestes respostes per comprendre millor l'enunciat, per comprovar la validesa d'un resultat obtingut, per trobar la resposta per eliminació , etc.

D'altra banda, com hem indicat en la introducció, distingim entre resolució, solució i resultat (o resposta) en el sentit de Puig (1996).

Pel que fa a les heurístiques, farem servir aquest terme per referir-nos a les preguntes generals que l'estudiant pot fer-se per dur endavant la seva resolució del problema segons l'estratègia que hagi decidit seguir. Distingirem (Puig, 1996) entre

- Suggerència heurística - buscar un problema anàleg, amb la mateixa incògnita o premissa per demostrar, introduir una figura auxiliar, entre d'altres-.
- Eina heurística, entesa com a element per transformar la situació inicial, com pot ser considerar un cas.
- Destresa amb potencial heurístic, que difereix principalment de l'eina heurística amb el fet de no tenir el caràcter de transformadora del problema.

3.4 Visualització

Les matemàtiques requereixen un tipus de pensament abstracte i general (Krutetskii, 1976), on un espera que l'habilitat per a percebre imatges mentals clares sigui un avantatge, ja que són l'element bàsic central en totes les concepcions de la percepció visual (Gutiérrez, 1991), no necessàriament lligades a figures geomètriques sinó també a patrons o fórmules (Presmeg 1986). Al resoldre problemes, aquesta habilitat pot resultar decisiva per a la presa de decisions i estratègies que un alumne utilitzarà en el seu desenvolupament. Segons Giardino (2010), l'apel·lació a aquest tipus de visualització no és directa, ja que depèn en gran mesura de l'experiència prèvia.

Prendrem les següents definicions derivades de Presmeg (1986):

- Imatge visual: Una imatge visual és un esquema mental que descriu informació visual o espacial.
- Mètodes visuals de resolució de problemes matemàtics: Aquells mètodes en què intervenen imatges visuals com a part essencial del mètode de resolució, encara que apareguin també mètodes algebraics o de raonament, els considerarem mètodes visuals.

La visualització matemàtica d'un individu es refereix a la preferència que aquest mostra cap als mètodes visuals sobre els no visuals quan resol un problema que es pot abordar amb tots dos mètodes (Presmeg 1986).

3.5 Intuïció

Com hem mostrat al capítol 2, la definició del terme intuïció és discutida per molts autors, però nosaltres adoptem la donada per Fischbein (1987) quan parla d'intuïció en termes de coneixement intuïtiu: "El coneixement intuïtiu és coneixement immediat; és a dir, una forma de cognició que sembla presentar-se com evident per si mateixa". Fischbein estableix una diferència clara entre intuïció i percepció. Encara que les dues són cognicions immediates, la intuïció va més enllà dels fets, implica una extrapolació a partir de la simple observació. Per exemple, podem percebre que hi ha dos objectes sobre la taula, i podem intuir que un d'ells és més pesat que l'altre. El primer cas és una simple observació de fets, en el segon hi ha un raonament més enllà del que perceptible.

Quan el coneixement matemàtic no es completa amb coneixement intuïtiu, l'alumne no serà capaç d'aplicar aquest coneixement a situacions similars, ni de veure la relació existent entre coneixements que ja formen part del seu conjunt de recursos. Un alumne pot conèixer un teorema, fins i tot estar convençut que és cert i comprendre la seva demostració, però això no vol dir automàticament que sigui capaç de comprendre el seu significat més enllà del formalisme. Afegint, per exemple, algun tipus de visualització a aquest coneixement, l'alumne pot crear-se una imatge mental que l'ajudi a comprendre d'una manera més intuïtiva aquest resultat, facilitant la seva adaptació a altres situacions on pot "veure" reflectit aquest patró. Per entendre millor la relació entre la visualització i les intuïcions que es generen en la resolució de problemes, és important abordar la perspectiva semiòtica en la caracterització d'aquestes intuïcions (Andra, Santi, 2011).

Per altra banda Hersch (1997), usant la concepció d’intuïció de Fischbein, descriu la intuïció com un substitut “il·legítim” de la demostració rigorosa, i considera diversos contextos on s’usa la paraula intuïció en matemàtiques:

- Intuïtiu com el contrari de rigorós, tot i que el que és o no rigorós és difícil d’establir.
- Intuïtiu és visual, quan prescindim de conceptes generals o abstractes i ens centrem en aspectes com els descrits en l’apartat anterior.
- Intuïtiu com a convincent en absència d’una demostració, és a dir el que considerem raonable basant-nos en la pròpia experiència en situacions similars.

- Intuïtiu com a incomplet, on alguns buits en la cadena lògica de raonament s'ometen, o s'omplen amb arguments no rigorosos.
- Intuïtiu com a basat en models físics o en exemples concrets que s'extrapolen sense demostració formal prèvia.
- En aquest estudi, seguint a Fischbein (1987), caracteritzem les intuïcions en:
- *Intuïcions d'afirmació*, que són representacions o interpretacions de certs fets acceptades com certes, evidents per si mateixes i consistents.
- *Intuïcions conjecturals*, associades a la sensació de certesa, per exemple "Estic segur que seràs un gran arquitecte".
- *Intuïcions d'anticipació*, que també són conjectures però que pertanyen explícitament a la resolució de problemes. Una intuïció d'anticipació és la visió preliminar de la resposta a un problema, que antecedeix a l'anàlisi i al desenvolupament complet del problema. No totes les hipòtesis són intuïcions, només aquelles que s'associïn des de l'inici amb alguna sensació de certesa o evidència.
- *Intuïcions de conclusió*, que resumeixen les idees essencials de la solució d'un problema prèviament resolt. Això afegeix a la construcció formal i analítica una sensació de certesa directa i intrínseca.
- *Excés de confiança*: Els indicis favorables a la intuïció es prenen com a més rellevants o importants que aquells contraris a aquesta intuïció.

3.6 Certesa

Per tal d'establir el nivell de rigor en la resolució d'un problema, ens hem de referir al que en matemàtiques anomenem *prova* o *demostració*. Hersh (1997) diferencia dos significats del terme demostració. Per una banda estableix un significat pràctic, informal, imprecís, on entenem per demostració allò que fem per convèncer-nos els uns als altres que les nostres afirmacions o teoremes són certs. Per altra banda, una demostració matemàtica teòrica és més formal. És la transformació de certes seqüències de símbols (frases formals) d'acord amb unes certes normes lògiques. Una seqüència de passos, on cadascun és una deducció estrictament lògica. Això dona una idea de formalització, idealització, reconstrucció racional de la idea de demostració.

Segons el mateix treball de Hersh (1997) sobre intuïció i certesa, la certesa és la creença sense dubtes en la veritat d'una afirmació. Estar absolutament segur d'alguna cosa és no acceptar que el contrari pot ser cert. En matemàtiques professionals, aquesta idea de certesa s'associa a demostracions amb el segon sentit que hem establert en el paràgraf anterior, els matemàtics només accepten una afirmació com a certa una vegada que s'ha demostrat. No obstant això, en contextos no matemàtics o d'acord amb les creences d'alguns estudiants, algunes afirmacions poden acceptar-se amb certesa sense la necessitat d'aquesta prova matemàtica, en un sentit de demostració més proper al primer descrit en el paràgraf anterior. Els alumnes amb bones aptituds matemàtiques seguiran un procés que els portarà de proves empíriques bàsiques a la comprensió de demostracions deductives més complexes (Fiallo i Gutiérrez, 2017).

Quan els estudiants de secundària resolen problemes de matemàtiques, encara no se'ls ha format en el concepte formal de demostració, no és un concepte que tinguin clar des d'un punt de vista matemàticament rigorós, i per tant es mouen en el terreny de la certesa, és a dir de l'autoconvenciment, a partir d'experiències prèvies o de la informació proporcionada per l'enunciat del problema, de que un fet o resultat és prou evident.

Capítol 4. Metodologia

Aquest és un estudi exploratori, ja que no coneixem cap publicació que informi sobre el comportament dels estudiants en competicions similars a les Proves Cangur. Per això, la nostra metodologia d'investigació s'ajusta al tipus de recollida d'informació (Gutiérrez, 1991) qualitativa basada en un estudi de casos. La informació recollida serà organitzada en un conjunt de categories emergents suggerides per les pròpies dades.

4.1 Població

Hem ordenat els estudiants que van participar a les Proves Cangur de Catalunya segons la puntuació obtinguda en el concurs. La població objecte de l'experiment són els estudiants de dos segments de percentils, identificats en aquest estudi com a grups A i B.

El grup A el formen 10 estudiants escollits d'entre els 15 que van obtenir millors resultats en els nivells 1 i 2, corresponents a 3r i 4t d'ESO respectivament l'any 2012. El total d'estudiants que es van presentar a Catalunya al concurs va ser de 7256 en el nivell 1 i de 6164 en el nivell 2, i per tant estan entre el 0,25% d'estudiants millor classificats. Així doncs, entre els percentils 99,75% i 100%, considerats experts resolutors en el context propi del concurs. Tots els estudiants havien estat entrenats d'alguna manera en la resolució de problemes amb resposta d'elecció múltiple mitjançant problemes d'edicions anteriors del concurs. La majoria d'ells havien rebut formació en resolució de problemes en els seus centres o en centres externs fora de l'horari escolar, preparant-se no només per a les Proves Cangur sinó també per a altres concursos matemàtics com les Olimpíades Matemàtiques. Aquesta formació la van rebre professors experts fora de les seves escoles i inclouen formació específica en estratègies de resolució de problemes que altres estudiants no coneixen.

El grup B està format per estudiants que van obtenir bons resultats, però no tan bons com el grup A, això és, els estudiants entre els percentils 95% i 96% en la prova del 2015, també en els nivells 1 i 2 del Cangur, per tant d'edats similars als estudiants del grup A. Els estudiants que formen aquest grup havien practicat la resolució de problemes d'edicions anteriors del MKC amb l'ajut d'alguns professors de la seva escola, però no van rebre formació específica per preparar la seva participació. Cap d'ells no va assistir a cap curs fora de l'escola ni tenia previst participar a l'Olimpíada Matemàtica Internacional, de manera que suposem que no tenen cap coneixement més enllà del que s'inclou al currículum escolar estàndard.

Creiem que haver observat estudiants que van participar a les Proves Cangur en dos anys diferents no suposa una pèrdua de validesa, ja que els problemes plantejats cada any es poden considerar similars, atès que estan elaborats per la mateixa comissió i seguint els mateixos criteris de dificultat (vegeu l'annex 1). Les dades es van recollir el mateix any que els estudiants van participar a les Proves Cangur en els dos casos, per tant ambdós grups d'estudiants tenien la mateixa edat en el moment de recollir les dades. En el període 2012 a 2015 tampoc no hi ha hagut cap canvi en el currículum oficial ni en les lleis educatives que facin pensar que la formació rebuda pels dos grups pugui ser diferent.

4.2 Instrument de recollida de dades

L'instrument dissenyat per a la recollida de dades està basat en 16 problemes, cadascun dels quals està redactat en dos formats, com a problema amb resposta d'elecció múltiple i com a problema obert (sense proposar resultats possibles). Tots dos formats de problemes són idèntics llevat que un inclou les opcions de resposta i l'altre no les inclou. A cada estudiant se li van plantejar els 16 problemes, la meitat en cada format. La distribució dels problemes entre tots dos formats es va fer de manera que fos diferent per a cada estudiant, però que tots els problemes haguessin estat plantejats la mateixa quantitat de vegades amb cada format. Atès que els problemes plantejats a tots els estudiants van ser els mateixos, la seva dificultat per a cada estudiant va ser la mateixa.

4.2.1 Disseny del qüestionari

Els problemes s'han extret d'una col·lecció de problemes descartats en l'elaboració final de les Proves Cangur d'edicions anteriors. D'aquesta forma s'aconsegueix ser fidel als tipus de problemes que es plantegen en el concurs però, al mateix temps, es minimitza la possibilitat que algun problema hagi estat resolt pels estudiants en algun moment del seu entrenament. D'aquests 16 problemes, 8 són de geometria i 8 d'aritmètica. Aquestes dues temàtiques són les més habituals en totes les anteriors edicions de les Proves Cangur. Pel que fa a la dificultat dels problemes, s'han triat d'un nivell mitjà o mitjà alt respecte a la dificultat mitjana de la prova, evitant aquells que requereixen de coneixements específics del currículum d'un determinat curs, tenint en compte que participen en l'estudi alumnes de diferents cursos. La dificultat d'un problema no és mesurable en una escala exacta però, al seleccionar-los, s'ha tingut en compte el criteri que va establir la comissió internacional per a cada un dels problemes.

4.2.2 Anàlisi dels problemes seleccionats

A continuació presentem els problemes que es van seleccionar per al qüestionari de recollida de dades (que es pot consultar a l'annex 2), amb l'anàlisi que se'n va fer prèviament per tal d'estudiar les diferents estratègies de resolució que podíem esperar dels estudiants. A banda de les possibles resolucions, s'ha analitzat cada problema per tal d'establir quins d'ells eren susceptibles de presentar resolucions on es mostressin alguns dels comportaments que poden ajudar a respondre els objectius de la recerca. Aquesta classificació dels problemes es va fer de manera prèvia a recollir les produccions dels alumnes, però s'ha revisat posteriorment per comprovar que s'ajustava a les resolucions obtingudes. Cal remarcar que aquesta no és la classificació amb la què s'han analitzat les produccions dels alumnes, sinó que només s'ha usat per tal de seleccionar els problemes que formen part de l'instrument de recollida de dades. És una valoració personal basada en la pròpia experiència dels investigadors i per tant subjectiva, però cal remarcar que no ha estat necessari replantejar la classificació dels problemes segons els ítems que presentarem ja que les dades es van ajustar correctament a la valoració feta a priori.

Els aspectes que s'han valorat en cada problema són els següents:

- *Algunes de les respostes proposades es poden descartar comprovant-ne la seva validesa directament?* En aquest punt valorem si hi ha alguna opció de resposta que es pugui comprovar per tal de determinar si és la correcta o no sense necessitat de resoldre el problema. L'etiqueta que posarem en aquest punt és *Comprovació de respostes.*
- *El problema admet diverses estratègies de resolució?* Mirem si el problema es pot resoldre utilitzant més d'una estratègia amb les eines que preveiem que tenen els estudiants, sense comptar possibles estratègies basades en l'ús opcions de resposta. L'etiqueta que posarem en aquest punt és *Diferents estratègies.*
- *És possible utilitzar les respostes per a la resolució del problema?* Tractem de preveure tots els possibles usos de les opcions de resposta per identificar aquells problemes en què el fet de disposar d'aquestes opcions no suposa a priori un avantatge per poder resoldre el problema. L'etiqueta que posarem en aquest punt és *Ús de respostes.*
- *És possible deduir quina ha de ser aproximadament la resposta correcta?* Notem si l'enunciat del problema conté prou elements per poder restringir la resposta correcta a un interval possible. L'etiqueta que posarem en aquest punt és *Resposta aproximada.*
- *És possible intuir una resposta al problema?* Analitzem si és possible fer-se una idea de quina pot ser la resposta correcta abans de resoldre el problema. L'etiqueta que posarem en aquest punt és *Intuir resposta.*
- *És possible donar una resposta al problema basada en la prova de casos particulars?* Estudiem si el problema admet la comprovació de casos particulars que puguin anticipar una resposta a un problema més general. L'etiqueta que posarem en aquest punt és *Casos particulars.*
- *El problema admet estratègies diferents en la resolució segons si es presenta amb o sense opcions de resposta?* Les opcions de resposta es poden utilitzar de diverses maneres, però no totes fan variar l'estratègia de resolució. En aquest punt hi incloem els problemes on això sí és possible. L'etiqueta que posarem en aquest punt és *Canvi d'estratègia amb opcions.*

Presentem a continuació els problemes seleccionats, recordant que la classificació segons els criteris anteriors s'ha fet sense una justificació formal i basant-se en l'experiència dels propis investigadors, sense que això tingui cap efecte en l'anàlisi posterior de les produccions dels estudiants. Les possibles resolucions als problemes es poden consultar a l'annex 3:

1. (NA) Si $n^4 - n^3 - n^2 = 2009$, essent n un enter positiu, llavors n és igual a

(A)5 (B)7 (C)9 (D)41 (E)No hi ha cap n que sigui solució

- Comprovació de respostes: Sí (totes)
- Diferents estratègies: Sí. Es pot resoldre factoritzant 2009 i traient factor comú de l'expressió, pel mètode de Ruffini, provant possibles solucions.
- Ús de respostes: Sí. El problema es pot resoldre comprovant les respostes.
- Resposta aproximada: No
- Intuir resposta: No
- Casos particulars: No (es poden provar nombres, però no ajuden a trobar una estratègia de resolució ni a inferir una resposta correcta)
- Canvi d'estratègia amb opcions: Sí

2. (NB) Quin és el valor de $444445^2 + 111111 - 444444^2$?

(A)10^3 (B)10^4 (C)10^5 (D)10^6 (E)10^7

- Comprovació de respostes: No
- Diferents estratègies: Sí. Es pot resoldre fent les operacions sense descomposar el quadrat com a la solució proposada, però el temps de càlcul necessari només ho fa possible en el cas de temps no limitat.
- Ús de respostes: Sí (amb les respostes podem veure que només cal saber quantes xifres té el nombre)
- Resposta aproximada: Sí
- Intuir resposta: Si el problema presenta opcions de resposta.
- Casos particulars: No
- Canvi d'estratègia amb opcions: Sí

3. (NC) La suma i el producte de tres nombres enters consecutius dóna el mateix. Quantes tripletes existeixen amb aquesta propietat? (A)1 (B)2 (C)3 (D)4 (E)5

- Comprovació de respostes: No
- Diferents estratègies: Sí. Aquest és un problema admet diferents resolucions algebraiques completes, l'equació que en resulta es resol de manera diferent segons l'aproximació escollida. També es pot arribar a la resposta per encert i error.
- Ús de respostes: No
- Resposta aproximada: No
- Intuir resposta: No
- Casos particulars: Sí (provant alguns casos es pot veure per exemple que la resposta no pot tenir més d'una xifra)
- Canvi d'estratègia amb opcions: No

4. (ND) Cinc nenes tenen una certa quantitat de caramels cadascuna. Sabem que no n'hi ha dues que tinguin la mateixa quantitat de caramels i que qualsevol grup de tres té més caramels que les altres dues juntes. Quin és el mínim nombre de caramels que poden tenir entre les cinc? (A)20 (B)25 (C)30 (D)35 (E)40

- Comprovació de respostes: No
- Diferents estratègies: Sí. Apart de la solució proposada, es pot resoldre representant gràficament els possibles conjunts de caramels i equilibrant les quantitats sense recórrer a l'àlgebra.
- Ús de respostes: No
- Resposta aproximada: No
- Intuir resposta: No.
- Casos particulars: Sí (es poden provar diferents configuracions del nombre de caramels i això pot portar a trobar un patró que porti a la resolució completa del problema)
- Canvi d'estratègia amb opcions: No

5. (NJ) Si $p \geq 5$ és un nombre primer, per quins valors de p la divisió de $p^2 - 1$ entre 24 és exacta?

(A)mai (B)en més de tres casos però no sempre (C)sempre (D)només quan $p = 5$ (E)cap de les anteriors

- Comprovació de respostes: No (l'única resposta que es pot comprovar és D, però com que per p=5 és vàlid, no es pot descartar que no sigui l'únic)
- Diferents estratègies: Sí. Admet una resolució completa raonant sobre els divisors de (p+1) i (p-1), i també es pot arribar a la resposta correcta provant casos particulars de manera ordenada.
- Ús de respostes: No
- Resposta aproximada: No
- Intuir resposta: Sí (a partir de la prova de casos particulars)
- Casos particulars: Sí (tot i que no porten a una estratègia completa de resolució, permeten fer-se una idea del resultat que s'ha de buscar.
- Canvi d'estratègia amb opcions: No

6. (NK) Per quants nombres primers p es compleix que $p^3 + p^2$ és un quadrat perfecte?

(A)0 (B)1 (C)2 (D)més de 2 (E)no es pot saber

- Comprovació de respostes: No
- Diferents estratègies: Sí. Admet una resolució algebraica completa i també es pot arribar a la resposta correcta provant casos de manera ordenada.
- Ús de respostes: No
- Resposta aproximada: No
- Intuir resposta: Sí
- Casos particulars: Sí
- Canvi d'estratègia amb opcions: No

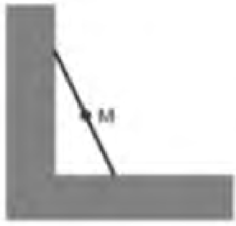
7. (NH) Si a, b i c són tres nombres enters consecutius i $a > b > c$, llavors $(a-b)(a-c)(b-c) = ...$ (A)1 (B)2 (C)0 (D)-2 (E)-1

- Comprovació de respostes: No
- Diferents estratègies: Sí. Hi ha diferents maneres de plantejar el problema algebraicament, es pot deduir el valor de les restes sense necessitat d'àlgebra, i es pot generalitzar a partir d'un cas particular.
- Ús de respostes: Sí (el fet que no hi hagi una resposta del tipus "hi ha diverses respostes possibles" fa que n'hi hagi prou trobant-ne una)
- Resposta aproximada: No
- Intuir resposta: No
- Casos particulars: Sí (aquest problema es pot resoldre directament provant qualsevol cas particular en el cas de tenir opcions, en cas contrari cal comprovar si hi ha diferents respostes possibles, però la prova de casos ens pot portar a inferir que el resultat sempre és el mateix)
- Canvi d'estratègia amb opcions: Sí

8. (NE) En Pere i en Bernat tenen 18 euros entre els dos. En Bernat i en Joan tenen 16 euros, en Joan i la Núria 10 euros i la Núria i en Pere 14 euros. Quants euros tenen entre tots?   (A)28 (B)30 (C)29 (D)58 (E)la situació que es planteja és impossible

- Comprovació de respostes: No
- Diferents estratègies: Sí. Es pot plantejar el problema algebraicament i també fent una representació gràfica per arribar al repartiment.
- Ús de respostes: No
- Resposta aproximada: No
- Intuir resposta: No
- Casos particulars: Sí (hi ha diferents configuracions possibles que porten a la mateixa resposta)
- Canvi d'estratègia amb opcions: No

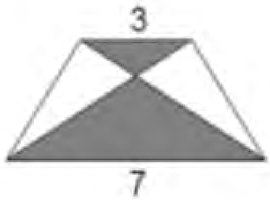
1. $_{(GA)}$ Una escala es recolza en una paret i va caient poc a poc. Durant tota l'estona, la part superior de l'escala està en contacte amb la paret i la part inferior amb el terra. Quina es la corba que descriu el punt mitjà M de l'escala?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

- Comprovació de respostes: Sí
- Diferents estratègies: Sí. Aquest problema s'ha seleccionat bàsicament per la possibilitat de resoldre'l visualment. Admet també una solució completa com la proposada a l'annex utilitzant àlgebra.
- Ús de respostes: Sí
- Resposta aproximada: Sí, utilitzant eines de visualització.
- Intuir resposta: Sí
- Casos particulars: No
- Canvi d'estratègia amb opcions: Sí

2. $_{(GB)}$El trapezi de la figura té els seus costats paral·lels de longituds 3 i 7 centímetres. Quin és el percentatge de la superfície que cobreix la part blanca?

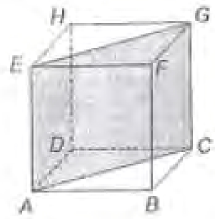


(A)$37,5\%$ (B)42% (C)48% (D)50% (E)$52,5\%$

- Comprovació de respostes: No
- Diferents estratègies: Sí. Assignant un valor variable a l'altura del trapezi, o generalitzant a partir d'un cas concret. També s'arriben a plantejaments diferents convertint el trapezi en trapezi rectangle desplaçant el costat superior mantenint les àrees constants.
- Ús de respostes: No

- Resposta aproximada: Si
- Intuir resposta: Sí (alguns factors d'intuïció poden portar a pensar que la resposta és un 50%)
- Casos particulars: Sí (es pot provar amb diferents altures del trapezi)
- Canvi d'estratègia amb opcions: No

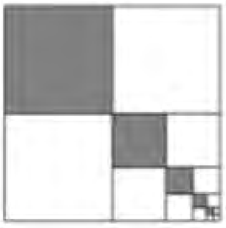
3. *(GC)* ABCDEFGH és un cub. L'àrea del rectangle ACGE és de $16\sqrt{2}cm^2$. Quin és el volum del cub?



(A) $27cm^3$ (B)$32cm^3$ (C)$48cm^3$ (D)$54cm^3$ (E)$64cm^3$

- Comprovació de respostes: No
- Diferents estratègies: No
- Ús de respostes: Sí (el fet que les respostes siguin enteres pot condicionar el plantejament del problema)
- Resposta aproximada: No
- Intuir resposta: No
- Casos particulars: Sí (es pot plantejar el problema invers, donat un cub d'aresta coneguda trobar l'àrea del rectangle)
- Canvi d'estratègia amb opcions: Sí

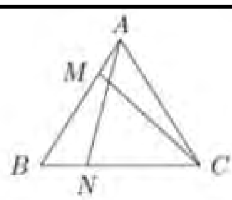
4. $_{(GD)}$Un quadrat d'àrea $54cm^2$ es divideix en quatre quadrats. La part superior esquerra s'acoloreix de gris. La part inferior dreta es torna a dividir en quatre quadrats i així successivament. Si repetim aquest procés infinitament, quin serà el percentatge de l'àrea total que quedarà acolorit de gris?



(A)28% (B)32,5% (C)$33\frac{1}{3}$% (D)35% (E)36%

- Comprovació de respostes: No
- Diferents estratègies: Sí. Per proporció de quadrats blancs i grisos, plantejant la suma infinita d'una sèrie i per recursivitat.
- Ús de respostes: No
- Resposta aproximada: Sí, calculant l'àrea dels quadrats més grans es té una suma cada vegada més aproximada al valor real.
- Intuir resposta: Sí
- Casos particulars: Sí (el resultat no depèn de l'àrea del quadrat)
- Canvi d'estratègia amb opcions: Sí, les estratègies d'aproximació són més adients en aquest cas si tenim les opcions de resposta.

5. $_{(GE)}$Si $AB = AC = BC$, $BM = CN$, llavors la mesura de l'angle més petit que formen els segments CM i AN és igual a

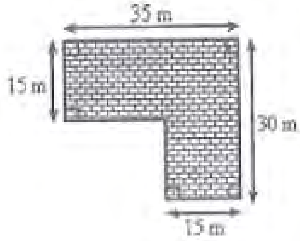


(A)60° (B)45° (C)90° (D)30° (E)75°

- Comprovació de respostes: Sí (prenent el dibuix com a representació a escala correcta, algunes respostes es poden comprovar visualment)
- Diferents estratègies: Sí, hi ha diferents maneres d'arribar a l'angle en qüestió, utilitzant diferents propietats com els angles oposats pel vèrtex, suma d'angles d'un triangle, etc.
- Ús de respostes: No
- Resposta aproximada: Sí

- Intuir resposta: Sí
- Casos particulars: No
- Canvi d'estratègia amb opcions: No

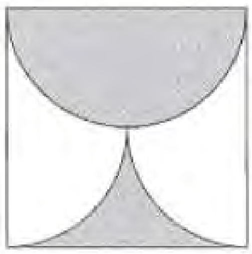
6. *(GF)* Un plànol de la casa vist des de dalt es mostra a la figura. Troba el temps mínim que necessita una persona per donar la volta a la casa a una velocitat de $4m/s$.



(A)$1min$ (B)$45s$ (C)$37,5s$ (D)$35s$ (E)$30s$

- Comprovació de respostes: Sí (algunes es poden descartar, no totes)
- Diferents estratègies: No
- Ús de respostes: Sí (es pot convertir el temps a metres i passar a trobar el perímetre mínim)
- Resposta aproximada: Sí
- Intuir resposta: No
- Casos particulars: No
- Canvi d'estratègia amb opcions: Sí

7. *(GG)*Calcula l'àrea de la copa ombrejada que es veu a la figura inscrita en un quadrat de costat a.

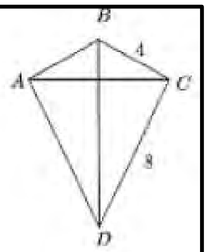


(A)$\frac{\pi a^2}{8}$ (B)$\frac{a^2}{2}$ (C)$\frac{\pi a^2}{2}$ (D)$\frac{a^2}{4}$ (E)$\frac{\pi a^2}{2}$

- Comprovació de respostes: Sí
- Diferents estratègies: Sí, es pot resoldre visualment completant mig quadrat, i es pot resoldre algebraicament fent el càlcul de l'àrea de les diferents parts.

- Ús de respostes: No
- Resposta aproximada: Sí
- Intuir resposta: Sí
- Casos particulars: Sí (provant amb diferents mides de costat del quadrat per calcular l'àrea ombrejada analíticament)
- Canvi d'estratègia amb opcions: No

8. (GG) $ABCD$ és un estel amb $AB = BC = 4cm$ i $CD = DA = 8cm$. Quina és l'àrea màxima que pot tenir l'estel en cm^2?



(A)24 (B)$16\sqrt{2}$ (C)$16\sqrt{3}$ (D)32 (E)64

- Comprovació de respostes: No
- Diferents estratègies: Sí, depenent de les eines que tinguin disponibles els alumnes. Es pot resoldre senzillament visualitzant el triangle descrit a les solucions proposades (annex 3) però també trigonomètricament.
- Ús de respostes: No
- Resposta aproximada: Sí
- Intuir resposta: No
- Casos particulars: Sí
- Canvi d'estratègia amb opcions: No

En la taula següent presentem un resum de l'anàlisi previ que va ajudar a seleccionar els problemes:

	Comprovació de respostes	Diferents estratègies	Ús de respostes	Resposta aproximada	Intuir resposta	Casos particulars	Canvi d'estratègia amb opcions
NA (1)	Sí	Sí	Sí	No	No	No	Sí
NB (2)	No	Sí	Sí	Sí	Sí	No	Sí
NC (3)	No	Sí	No	No	No	Sí	No
ND (4)	No	Sí	No	No	No	Sí	No
NJ (5)	No	Sí	No	No	Sí	Sí	No
NK (6)	No	Sí	No	No	Sí	Sí	No
NH (7)	No	Sí	Sí	No	No	Sí	Sí
NE (8)	No	Sí	No	No	No	Sí	No
GA (1)	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	No	Sí
GB (2)	No	Sí	No	Sí	Sí	Sí	No
GC (3)	No	No	Sí	No	No	Sí	Sí
GD (4)	No	Sí	No	Sí	Sí	Sí	Sí
GE (5)	Sí	Sí	No	Sí	Sí	No	No
GF (6)	Sí	No	Sí	Sí	No	No	Sí
GG (7)	Sí	Sí	No	Sí	Sí	Sí	No
GH (8)	No	Sí	No	Sí	No	Sí	No

Taula 1 Resum de l'anàlisi dels problemes seleccionats.

4.3 Procés de recollida de dades

Les dades recollides en aquest estudi són resolucions escrites de problemes i entrevistes orals a l'acabar com s'explica amb més detall més endavant. Aquestes dades es van obtenir en els mateixos centres on estudiaven els alumnes en el moment de la recollida, per tant en un entorn familiar per a ells. Això va ser possible gràcies a la col·laboració de la direcció i al professorat de matemàtiques de tots els centres on es va sol·licitar portar l'estudi. Els estudiants van accedir voluntàriament a participar en l'estudi, i no es va haver de recórrer a cap suplent ja que tots els estudiants seleccionats en primera opció van acceptar la invitació.

Els estudiants participants van respondre els qüestionaris per escrit. Cada estudiant va respondre dos qüestionaris, incloent entre tots dos els setze problemes, un amb el format de les Proves Cangur i un altre sense les opcions de resposta. Els qüestionaris es van distribuir als estudiants de manera que cada problema ha estat resolt la mateixa quantitat de vegades en cada format.

En primer lloc es va presentar un qüestionari amb vuit problemes en el format d'elecció múltiple i un màxim de 30 minuts per resoldre'ls (temps similar a què tindrien en el concurs real per aquesta quantitat de problemes i la seva dificultat).

Després dels 30 minuts, es va realitzar una entrevista amb cada estudiant centrada en el qüestionari que acabaven de respondre, perquè l'estudiant comentés els aspectes que en cada problema puguin no quedar clars només amb el que han escrit, o per corroborar que la interpretació de l'investigador del que ha fet l'estudiant és correcta.

A continuació els vam presentar un altre qüestionari amb els restants 8 problemes en el format sense opcions de resposta i temps il·limitat. Per tal d'alterar el mínim el comportament que tindrien els estudiants en un context real de competició, es van donar indicacions als estudiants perquè resolguessin els problemes sense tenir en compte aspectes formals. En particular se'ls va indicar que no havien de preocupar-se de la presentació de les seves produccions, ni d'escriure explicacions o justificacions per al corrector, sinó únicament d'escriure el que necessitessin per arribar a un resultat, com farien amb els seus esborranys durant el concurs real.

Després d'acabar el segon qüestionari es va realitzar una altra entrevista amb cada estudiant amb objectius i estructura similars als de l'entrevista anterior.

Les produccions escrites dels alumnes es van enregistrar amb un aparell de gravació de text en forma de bolígraf, que permet a l’estudiant realitzar la prova en paper però que al mateix temps enregistra un document en format pdf que permet als investigadors reproduir en temps real el que els estudiants han anat escrivint. D’aquesta manera es facilita l’anàlisi del comportament d’aquests estudiants per part dels investigadors, podent observar l’ordre en què s’ha escrit la resolució, el temps dedicat a cada problema i a cada pas del problema, etcètera.

Així doncs, les produccions de cada estudiant a analitzar consten de:

- Produccions escrites en paper mitjançant els esborranys que van utilitzar per resoldre els problemes.
- Registre en format pdf de les produccions escrites pels alumnes en temps real.
- Anotacions de l'investigador amb els comentaris que els estudiants han volgut fer durant l'entrevista (immediatament després de resoldre cada qüestionari) per millorar la comprensió dels seus esborranys.
- Registre d'àudio de les entrevistes realitzades als estudiants a l'acabar cada qüestionari, per aclarir aspectes del seu raonament que no hagin quedat per escrit.

4.4 Classificació de conductes relacionades amb la intuïció i la certesa

Basant-nos en les definicions donades per Fischbein (1987) i Hersh (1997), hem establert una classificació que ens permet identificar certs tipus de comportaments relacionats amb la intuïció que mostren els estudiants en resoldre problemes, i la certesa que aquests estudiants mostren sobre la veritat de les seves afirmacions basades en la intuïció:

Les *intuïcions d'afirmació* són representacions o interpretacions de certs fets acceptats com a veritables, evidents per si mateixos i coherents.

Les *intuïcions conjecturals* s'associen al sentiment de certesa; per exemple, "Estic segur que la figura és un triangle equilàter".

Les *intuïcions d'anticipació* són conjectures que pertanyen explícitament a la resolució de problemes. Són una vista preliminar de la resposta a un problema, que precedeix l'anàlisi i el desenvolupament complet de la resolució. No totes les hipòtesis són intuïtives, sinó només aquelles associades des del principi a cert sentiment de certesa o evidència.

Les *intuïcions de conclusió* resumeixen les idees essencials de la resolució d'un problema resolt anteriorment. Afegeixen una sensació de certesa directa i intrínseca a la construcció formal i analítica.

Hi ha una relació entre l'ús d'intuïcions per part dels estudiants i la certesa dels estudiants sobre la veracitat de les seves intuïcions. Fischbein (1987) va etiquetar com a confiança excessiva un cas particular d'aquesta relació en què les indicacions a favor una intuïció es consideren més rellevants o importants que les contràries a aquesta intuïció.

4.5 Categorització de les dades obtingudes

Per analitzar les dades, s'ha fet una primera anàlisi exploratòria de totes les resolucions i respostes dels estudiants, identificant diversos indicadors que apareixen un nombre representatiu de vegades en les nostres dades i que han donat lloc a les categories. Per caracteritzar alguns d'aquests elements s'han tingut en compte les estratègies i heurístiques de resolució (Schoenfeld, 1985 i Puig, 1996), el concepte d'intuïció (Fischbein, 1987) i el concepte de visualització (Presmeg, 1986). Els aspectes analitzats, junt amb les subcategories de cada un, són:

- Tipus de resultats donats
    - Correctes
    - Incorrectes
    - No es respon (en blanc o resultats no vàlids)
- Ús d'aproximacions en els càlculs
    - Es realitzen càlculs aproximats
    - Es realitza una aproximació del resultat obtingut a una de les opcions ofertes
    - Es realitzen càlculs exactes
- Prova de casos particulars
    - S'usen casos particulars
    - No s'usen casos particulars
- Completesa de les solucions donades
    - El resultat es deriva de solucions completes
    - El resultat es deriva de solucions incompletes o de conjectures, amb diferents nivells de certesa i confiança dels estudiants
- Ús de les opcions de resposta (en els problemes del tipus Proves Cangur)
    - Rebuig d'opcions
    - Eliminació o descart d'opcions
    - Altres procediments

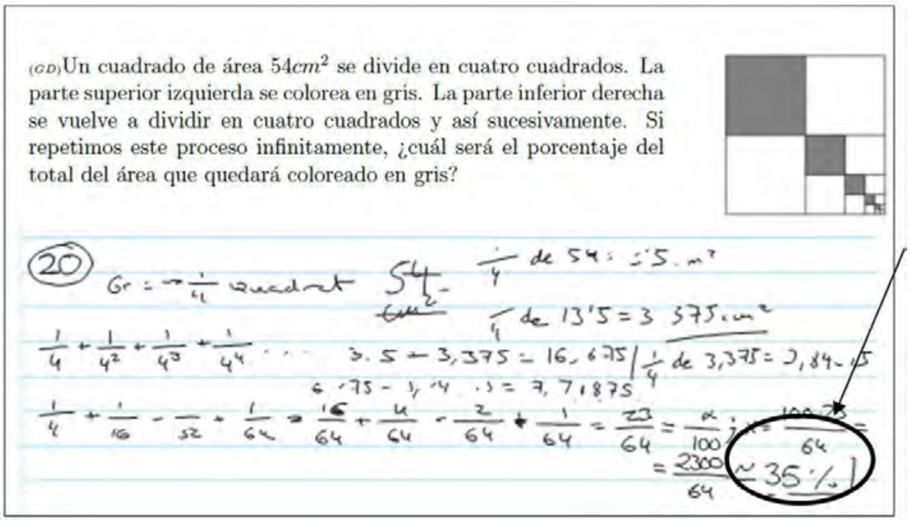
A les pàgines següents presentem i analitzem exemples de respostes dels estudiants corresponents a les diferents categories.

4.5.1 Tipus de resultats

En aquest capítol només es valora si el resultat és correcte o no, amb independència del procés seguit per arribar a la resposta, i el percentatge de respostes en blanc.

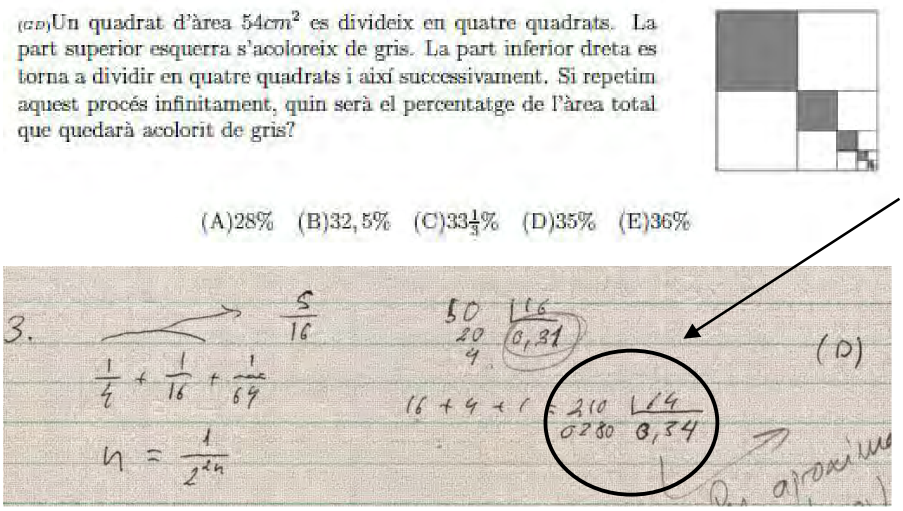
4.5.2 Us d'aproximacions en els càlculs

Hem considerat que un estudiant utilitza aproximacions en la resolució del problema si ho fa en qualsevol moment del seu raonament com a part de la solució, no només en el resultat final. D'aquesta manera, s'identifiquen les resolucions on s'és fidel a l'exactitud del resultat, encara que sigui complicant els càlculs (Figura 5) i aquelles resolucions on s'opta pel càlcul amb aproximacions (Figura 3). Altres resolucions que s'inclouen en aquesta categoria són aquelles on el resultat no coincideix amb cap de les opcions de resposta donades, però l'estudiant atribueix aquest fet a un possible error menor de càlcul, prenent com a resposta l'opció el valor s'aproxima més al seu (Figura 4) .



El resultat exacte del càlcul és 35,9375%. Al no disposar de calculadora, l'estudiant calcula una aproximació del resultat i la dona com a resposta. El fet que els resultats enters es considerin més plausibles forma part del sistema de creences de l'estudiant descrit per Schoenfeld (1985).

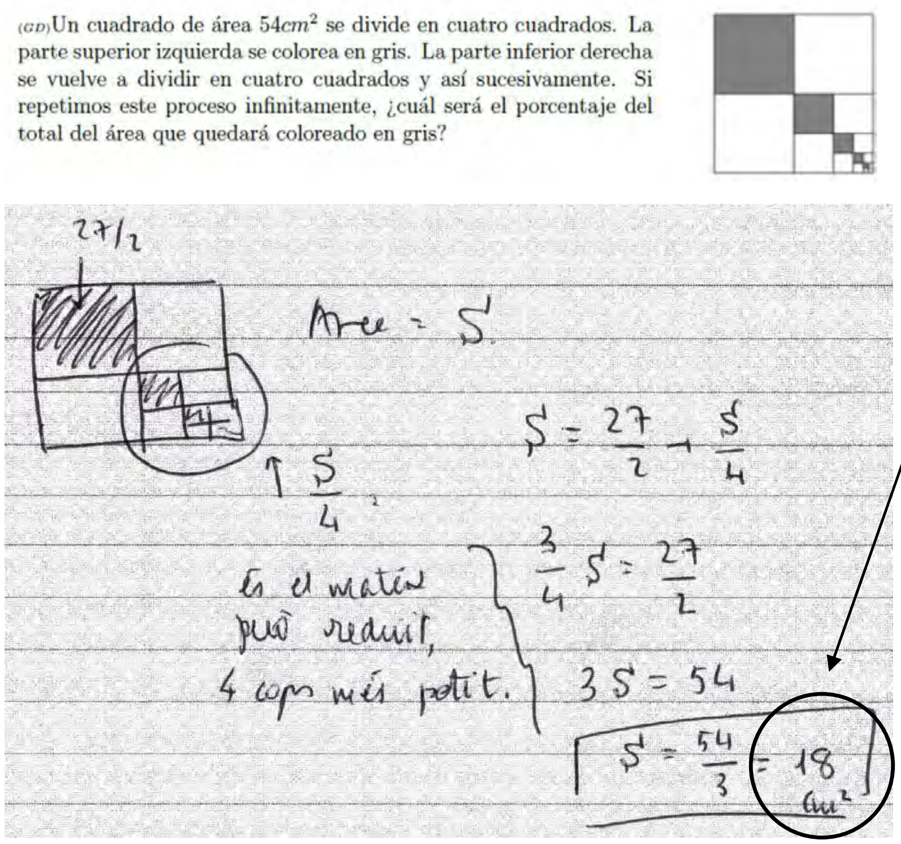
Figura 3 Càlculs aproximats



L'estudiant fa un seguit de càlculs temptatius, s'adona que la suma és infinita però el que fa és sumar les primeres tres fraccions. A l'entrevista posterior explica que al no tenir temps de fer més comprovacions i a la vista de l'aproximació obtinguda, estava dubtant entre dues respostes (no especifica quines) i tria l'opció D.

També esmenta que en el Cangur, si es dubta entre dues opcions el millor és arriscar-se (la penalització és ¼ del valor de la pregunta).

Figura 4 Aproximació a una de les respostes donades



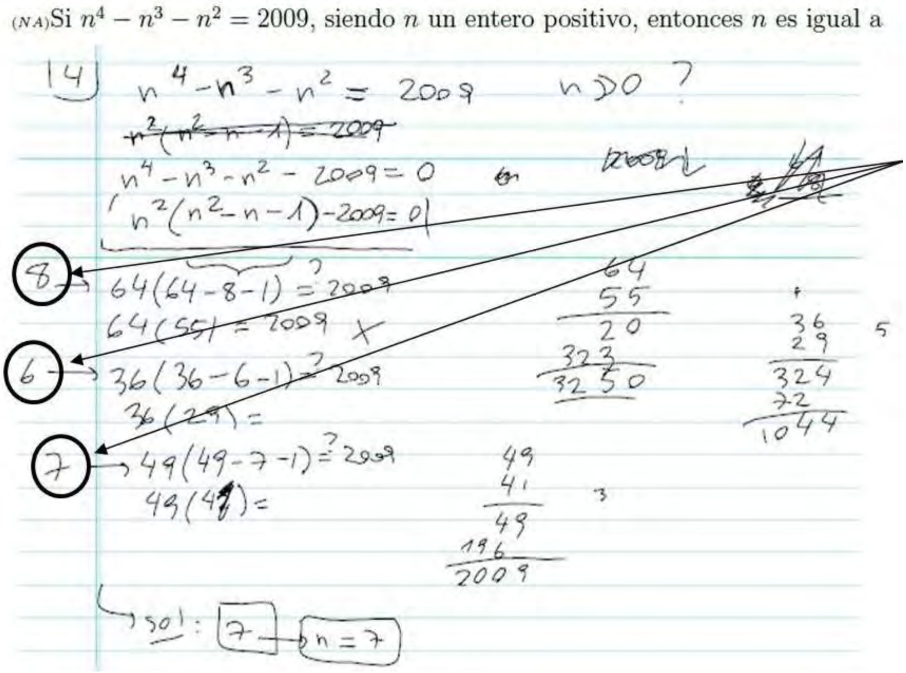
L'estudiant troba una estratègia que li permet resoldre el problema sense recórrer a la suma d'una sèrie infinita com en la majoria de les resolucions, i d'aquesta manera evita recórrer a aproximacions en els càlculs.

La resposta no és del tot correcta perquè l'enunciat demana un percentatge i no el valor de l'àrea, però la resolució és vàlida i completa.

Figura 5 Resolució sense aproximació en els càlculs

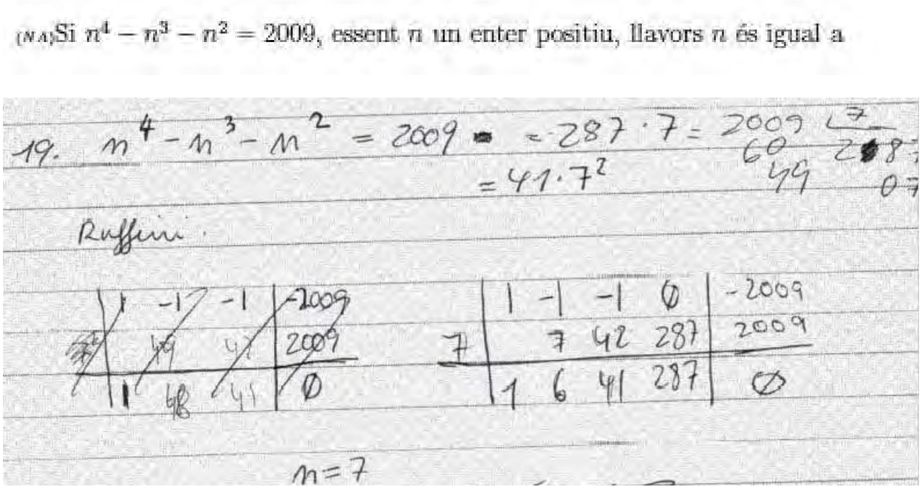
4.5.3 Prova de casos particulars

En aquesta categoria incloem els problemes en què l'estudiant ha utilitzat l'heurística de provar casos particulars per trobar un camí cap a la solució del problema (Figura 6). Es classifiquen res resolucions en aquesta categoria si aquesta prova de casos particulars forma part de la resolució, i no quan per exemple l'alumne ho utilitza per comprovar una resposta, o com a fase exploratòria quan la resolució posterior no contempla aquestes proves.



L'estratègia utilitzada en aquest cas consisteix a provar possibles solucions a l'equació fins a trobar-ne una de correcta. No hi ha un plantejament algebraic ni un intent de generalització o de plantejament de solucions alternatives.

Figura 6 Prova de casos particulars.



En aquest cas es presenta un exemple de resolució al mateix problema que el de la Figura 6 amb una resolució completa sense necessitat de provar casos particulars per trobar la resposta correcta.

Figura 7 Resolució sense prova de casos particulars

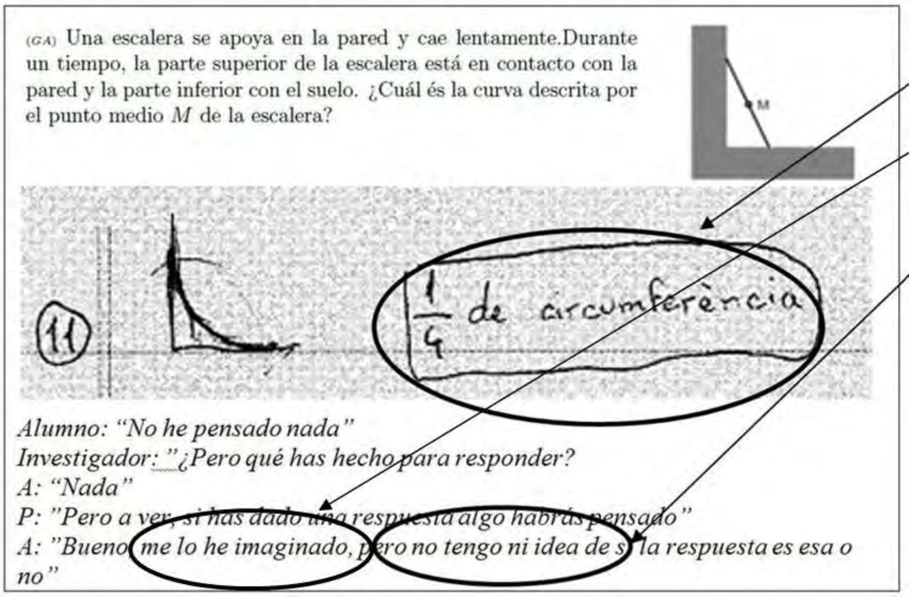
4.5.4 Completesa de les solucions donades i certesa dels estudiants

Es considera que un estudiant dona una solució completa quan en la resolució del problema no hi ha llacunes de raonament i, per tant, la resposta s'obté necessàriament del procés seguit. En cas contrari, quan l'estudiant ha formulat afirmacions no justificades o basades parcial o purament en la seva intuïció, considerem que en aquest problema ha realitzat algun tipus de conjectura, i direm que es tracta d'una solució incompleta, amb un grau que caldrà determinar.

Quan la resolució d'un problema té llacunes o inclou conjectures, és interessant avaluar el grau de certesa que l'estudiant té de la seva resolució. D'altra banda, quan els estudiants acaben de resoldre un problema, tant si han donat una solució completa com incompleta, mostren un determinat nivell de confiança en que la seva resposta és correcta. Els conceptes de certesa i confiança estan relacionats, però no són equivalents, ja que fan referència a aspectes diferents del comportament de l'estudiant. La certesa avalua fins a quin punt l'estudiant està segur que la resposta obtinguda és una conclusió necessària de la informació que ha utilitzat, mentre que la confiança és el grau de seguretat que té l'estudiant que la resposta que ha donat és correcta. Per exemple, un estudiant pot fer una afirmació que no es sustenta en dades objectives sinó en una intuïció (baixa certesa) però, a el mateix temps, l'estudiant pot estar molt segur que el que ha dit és cert (alta confiança).

Hem dissenyat una escala de cinc nivells per poder agrupar els diferents casos en què apareix una conjectura. A causa de la diversitat de problemes i temàtiques, no hem establert criteris uniformes i aplicables a tot problema, sinó que hem agrupat els diferents criteris que han fet que un problema estigui classificat en un o altre nivell. Aquesta classificació es deriva de l'anàlisi detallada de l'argumentació seguida en cadascuna de les resolucions, de la caracterització de la intuïció i dels mecanismes que han participat en la generació d'aquestes intuïcions segons el descrit per Fischbein (1987), i considerant també els aspectes de visualització (Presmeg, 1986) que hagin estat rellevants en la generació d'aquestes intuïcions. Un cop identificats tots els casos en què l'estudiant ha utilitzat algun tipus de conjectura, s'han agrupat en diferents nivells amb la intenció de descriure un major o menor grau de certesa que tenen les afirmacions que fa l'estudiant. A la secció de resultats mostrem com aquesta graduació es correspon amb el nivell d'encerts que obtenen els estudiants: Com més gran és el grau de certesa en la nostra escala, major és la probabilitat que la resolució sigui correcta. Identifiquem els següents nivells de certesa dels estudiants:

- Nivell 1: *Certesa molt baixa*. Hi ha un mínim nivell d'evidència, i l'estudiant ni tan sols mostra tenir certesa. Es mostren intuïcions d'anticipació que no són comprovades amb un mínim d'anàlisi ni desenvolupament (Figura 8). Apareixen factors d'immediatesa com la visualització o la disponibilitat (Fischbein, 1987). No es tracta de mètodes visuals de resolució del problema, sinó de simples imatges visuals, generades intuïtivament, que no s'acompanyen de raonament, ni escrit ni expressat durant l'entrevista.



Resultat sense justificació escrita.

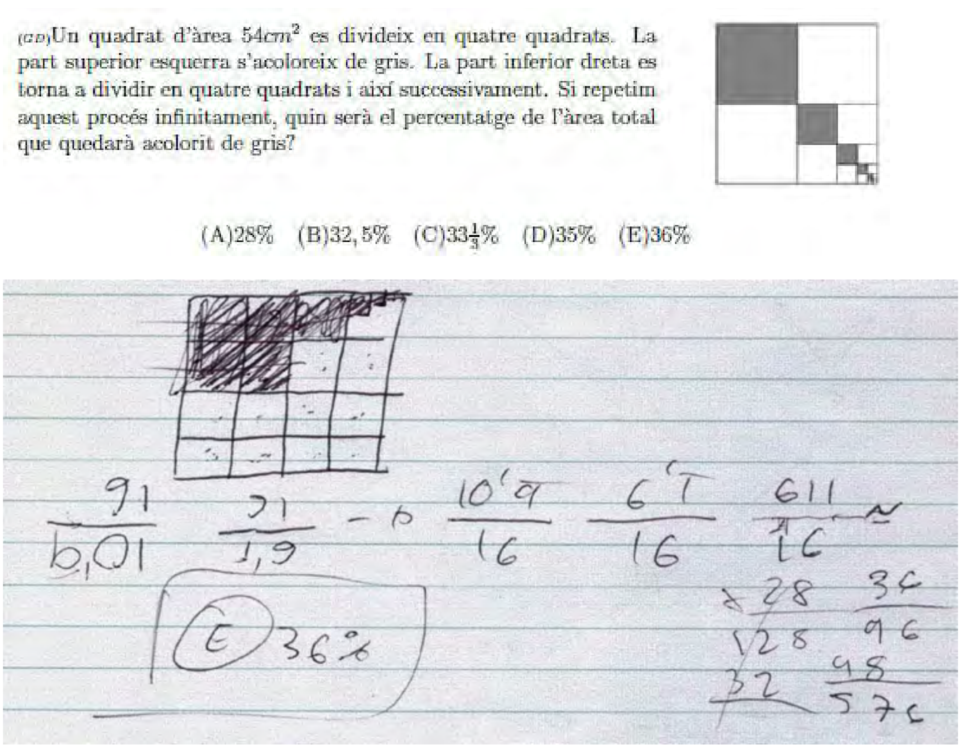
Visualització mental del problema i la seva solució.

En l'entrevista manifesta no tenir cap justificació per al seu resultat.

És una clara intuïció d'anticipació segons la classificació de Fischbein, generat per un excés de confiança amb clausura prematura.

Figura 8 Resposta sense certesa.

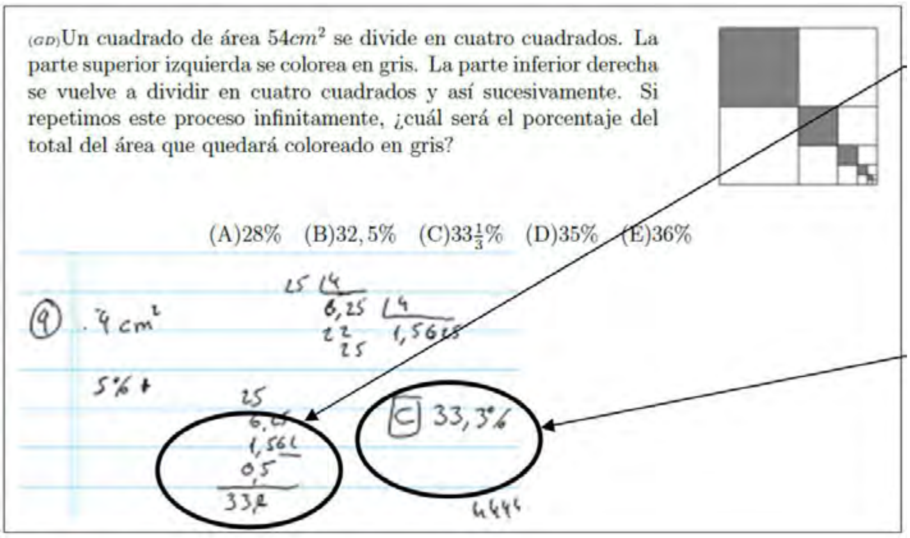
- Nivell 2: *Certesa baixa*. Encara que amb un nivell baix d'evidència, l'estudiant expressa una certa certesa intrínseca en el seu resultat. Apareixen mecanismes de cloenda molt prematura i apareixen factors d'immediatesa com la disponibilitat, l'ancoratge i la representativitat. La visualització apareix mitjançant mètodes visuals de resolució molt senzills. Els casos que s'han agrupat en aquest nivell són:
    - Fa algun raonament de caràcter aproximatiu i respon segons aquesta aproximació (Figura 9).



Un seguit d'estimacions visuals molt simplistes donen lloc a uns càlculs amb dades obtingudes per aproximació que porten a un resultat igualment aproximat

Figura 9 Resolució basada en aproximacions que no justifiquen la resposta.

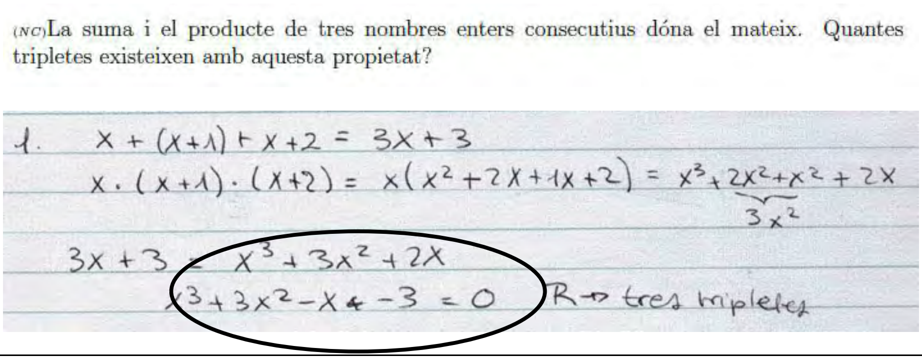
- Obté una resposta diferent a totes les opcions que se li ofereixen com a possibles i tria la que més s'assembla a la seva (Figura 10).



Davant d'una sèrie infinita, l'estudiant calcula la suma dels primers termes per obtenir una aproximació del resultat.
Tot i que l'opció B també s'aproxima al seu resultat, tria l'opció C perquè, segons el seu sistema de creences, li sembla una opció més plausible.
Que la solució sigui un nombre racional simple com 1/3 constitueix un factor d'ancoratge i representativitat que preval sobre l'altre resultat aproximat.

Figura 10 Ús de factors d'ancoratge i representativitat.

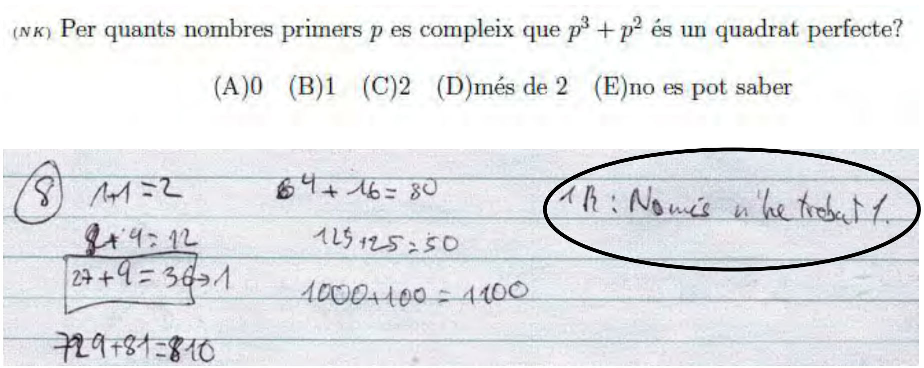
- Planteja una equació però no la resol, suposa una solució però tampoc la comprova (Figura 11).



Segueix un raonament correcte per arribar a una equació que hauria de donar la resposta correcta, però suposa que hi haurà tres solucions perquè l'equació és de tercer grau. És un exemple de cas d'anticipació per disponibilitat.

Figura 11 Equació sense resolució.

- Intenta trobar la resposta per tempteig i, com que no la troba, conjectura que no hi haurà solució (Figura 12).

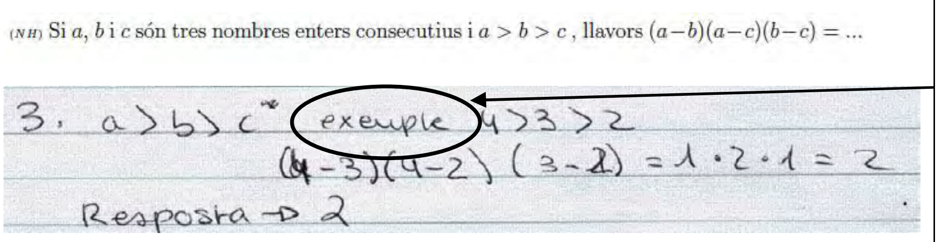


L'estudiant no troba més solucions i respon que només hi ha un cas. En la seva resposta queda palès el baix nivell de certesa, ja que no respon "només n'hi ha un" sinó "només n'he trobat un".

Figura 12 Conjectura que no hi ha més solucions.

- Nivell 3: *Certesa mitjana*. L'estudiant no només mostra un nivell acceptable de certesa, sinó que també mostra una mica d'evidència, és a dir, que les seves intuïcions li apareixen com a certes per si mateixes, de manera que no veu la necessitat de justificar la seva resposta més enllà del que s'ha fet. Apareixen aquí intuïcions com les descrites per Fischbein (1987) d'anticipació, i mecanismes com l'excés de confiança i l'efecte de primacia. La representativitat és el factor d'immediatesa més comú en aquesta categoria. Aquí hem inclòs els següents casos:

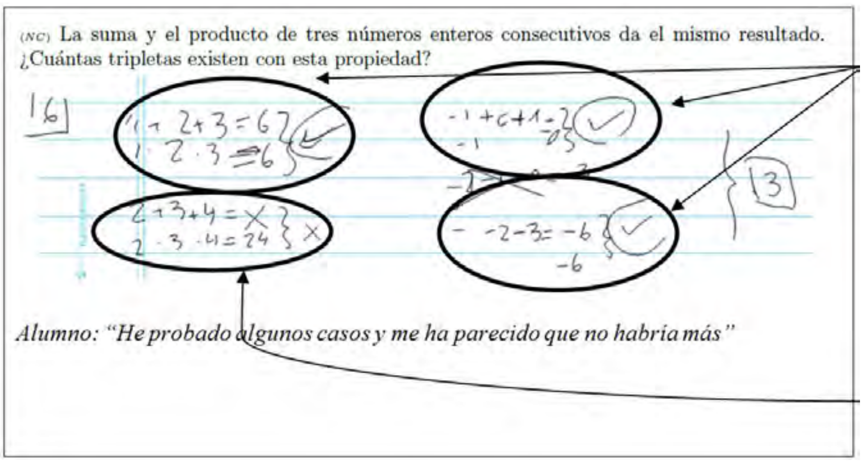
  - Prova casos inconnexos (o un únic cas) i conjectura una solució general que s'adapti a aquests casos(Figura 13).



L'estudiant agafa un únic exemple i conjectura que serà la solució general, sense plantejar-se si hi ha més opcions possibles.

Figura 13 Conjectura de la solució a partir d'un únic cas particular.

- Prova casos de manera bastant aleatòria però no busca un patró per raonar inductivament (Figura 14).



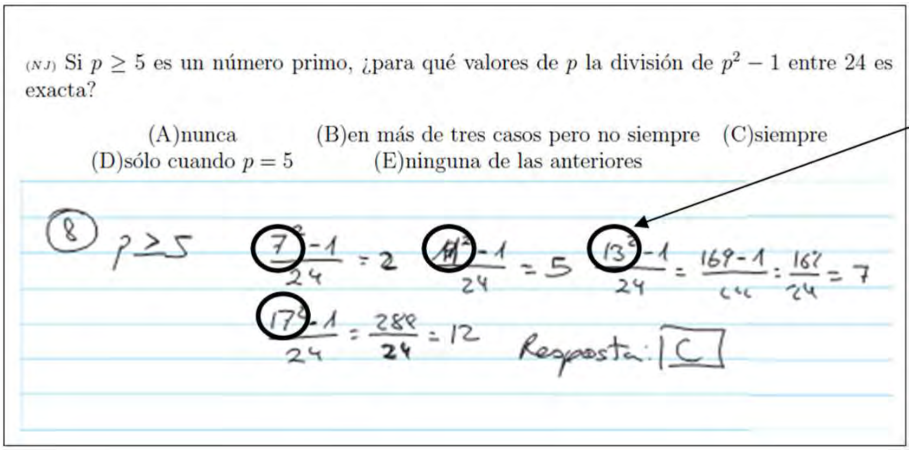
L'estudiant prova casos amb nombres petits que compleixen les condicions del problema.

Prova un cas amb nombres grans, veu que no compleixen les condicions de l'enunciat i conjectura a partir d'aquest resultat que ja no hi pot haver més solucions possibles.

Figura 14 Prova de casos sense patró inductiu.

- Nivell 4: *Certesa alta*. La solució plantejada per l'estudiant apareix amb un alt grau d'evidència. Està convençut que el seu resultat és correcte i que la seva resolució no necessita més justificació perquè és evident per si mateixa. Les intuïcions mostrades apareixen com estables i resistents a interpretacions alternatives. Apareixen factors de globalitat en les intuïcions. La solució aconseguida bàsicament amb arguments visuals (conjectures basades en una imatge mental del problema, visualització de casos particulars) no té un paper rellevant en la resolució d'aquests problemes. Els casos que han respost a aquesta descripció s'agrupen en:

  - Prova casos seguint un cert ordre per obtenir un patró i conjectura un comportament inductiu (Figura 15).

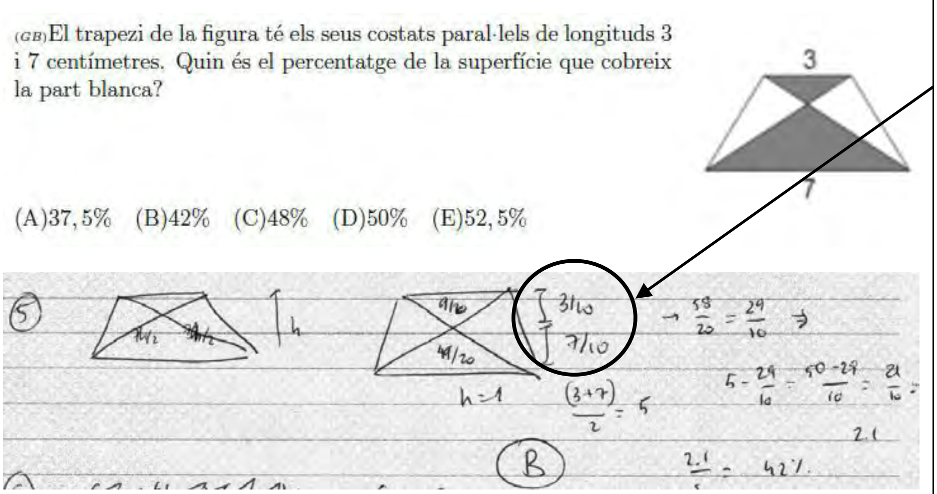


L'estudiant prova casos provant els nombres primers més grans que cinc en ordre i conjectura un comportament inductiu.

La manca de temps fa que no es plantegi la recerca d'una solució completa, anticipant el resultat.

Figura 15 Ús de certesa alta.

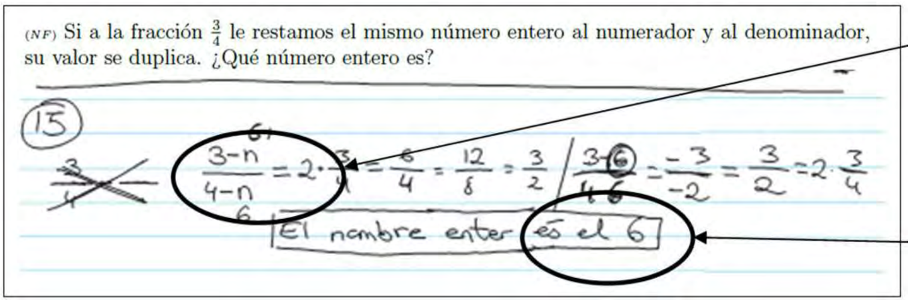
- Resol el problema de manera completa restringint-ho a un únic cas particular i conjectura que la solució obtinguda per a aquest cas serà general (Figura 16).



L'estudiant resol el problema de manera completa per al cas on l'alçada del trapezi és 1, i conjectura que es mantindrà la proporcionalitat per als altres casos.

Figura 16 Solució completa per a un cas particular.

- Nivell 5: *Certesa molt alta*. L'estudiant mostra una certesa gran no només en la seva resposta sinó també en la seva resolució. No deixa marge a les intuïcions de manera conscient, però pot presentar algun mecanisme com la clausura prematura que el porta a anticipar el resultat (Figura 17 i 18).

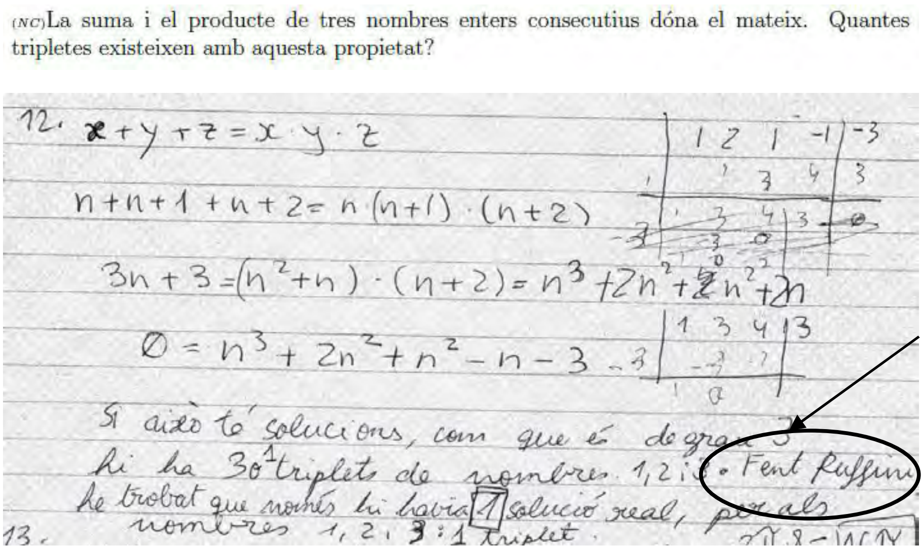


L'estudiant planteja una equació que condueix a la solució correcta

S'adona de quina és la solució abans de resoldre-la sense considerar si hi ha més solucions

En aquest cas es donen factors de disponibilitat i globalitat, l'anticipació que fa l'estudiant es correspon amb la seva facilitat per detectar que es troba davant d'una equació de primer grau i és capaç d'anticipar la seva solució. Aquest problema procedeix d'una fase prèvia a la selecció final de problemes, però serveix com a exemple de la categoria que volem mostrar.

Figura 17 Ús de certesa molt alta.



Presentem aquest exemple com a contraposició a l'exemple de la figura 11 . És una situació semblant, però en aquest cas l'alumne fa un raonament complet per poder afirmar que l'equació de tercer grau només té una solució.
La resposta és incorrecta perquè fa un error a l'hora de posar els coeficients per aplicar el mètode de Ruffini.

Figura 18 Ús de certesa molt alta (2)

Així doncs, treballarem amb aquests 5 nivells de certesa definits en aquesta secció, que de manera resumida podem expressar de la següent manera :

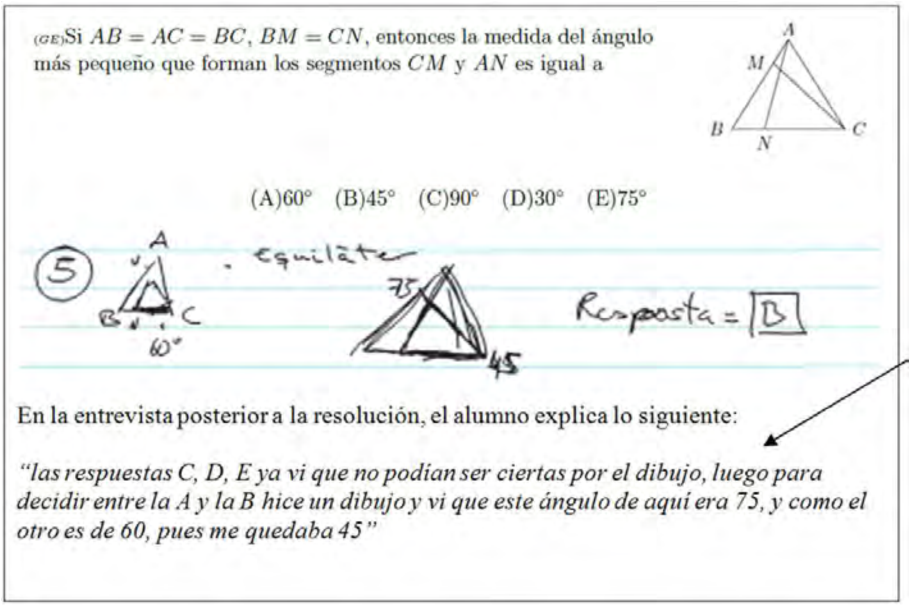
- Certesa molt baixa: L' estudiant veu molt possible que la seva resposta sigui errònia
- Certesa baixa: L'estudiant creu que la seva resposta pot ser correcta tot i no tenir un raonament que ho suporti.
- Certesa mitjana: L'estudiant creu que la seva resposta és correcta i no veu la necessitat de justificar-ho, tot i que des d'un punt de vista professional el raonament és incomplet.

- Certesa alta: L'estudiant està convençut que el seu resultat és correcte i creu que el resultat es deriva directament de la resolució tot i entendre que el procediment pot ser incomplet.
- Certesa molt alta: L'estudiant està convençut no només de la validesa de la resposta sinó també d'haver fet una resolució completa.

4.5.5 Ús de les opcions de resposta

En els problemes resolts en les condicions de les Proves Cangur, considerem que un problema pertany a aquesta categoria si, en qualsevol moment del procés de resolució, l'estudiant utilitza les opcions de resposta d'alguna manera. En aquesta categoria general s'inclouen les següents subcategories:

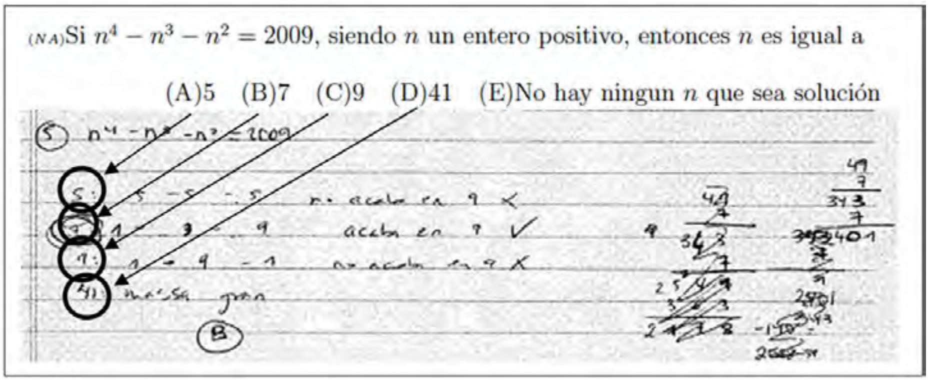
- Rebuig d'opcions: L'estudiant analitza les opcions de resposta del problema i en descarta algunes d'elles per considerar-les impossibles sense comprovar que realment no són respostes al problema. L'estudiant es basa per a això en algun raonament que no escriu o en alguna imatge mental (Figura 19).



L'estudiant descarta tres de les opcions sense cap càlcul que ho justifiqui, es basa només en la seva visualització mental del problema.

Figura 19 Ús de rebuig d'opcions.

- Eliminació o descart d'opcions: L'estudiant resol el problema comprovant les possibles respostes fins que troba una resposta correcta. A diferència de la categoria anterior, en aquest cas no hi ha un raonament previ per descartar una resposta, l'estudiant no pressuposa si una opció és correcta o no fins que la comprova (Figura 20).



L'estudiant comprova totes les opcions fixant-se en l'última xifra de cada sumand, veu que només n'hi ha una que acabi en 9.

Figura 20 Ús de l'eliminació o descart d'opcions

- Altres usos: En aquesta categoria agrupem altres situacions on l'estudiant utilitza les opcions de resposta d'alguna manera diferent a les descrites anteriorment. Aquests usos són utilitzar les opcions per comprovar si la resposta obtinguda és correcta, i en cas de detectar algun error revisar els càlculs, observar alguna regularitat en les opcions que permeti obtenir alguna pista útil per al plantejament del problema, descartar una resolució a mig camí per creure que no pot acabar en cap de les respostes disponibles, rebutjar l'opció de respondre que un problema no es pot resoldre amb les dades proporcionades degut a que no es troba entre les possibles opcions correctes, prendre com a resposta la opció intermèdia entre les mostrades. Aquests usos apareixen molt poques vegades cadascun i per això no creiem convenient analitzar-ne de manera individual l'aparició en cadascun dels grups de població i han estat agrupades en aquesta categoria d'altres usos (Figura 21).

•

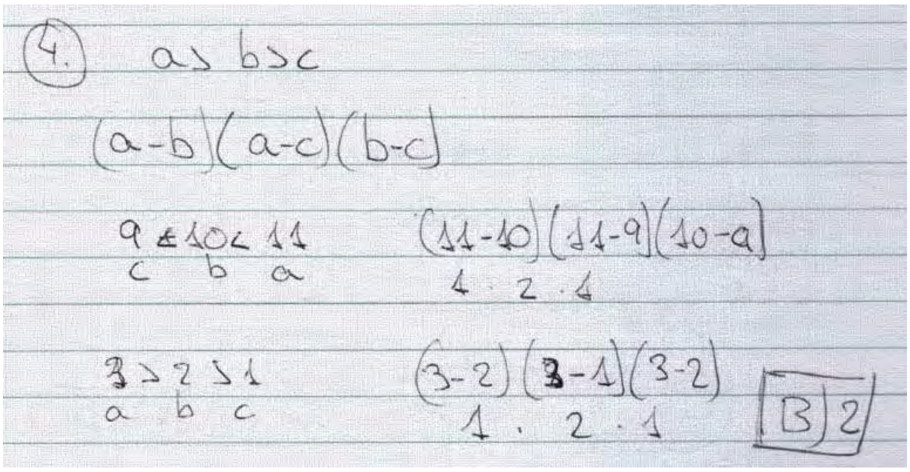
(NH) Si a, b i c són tres nombres enters consecutius i $a > b > c$, llavors $(a-b)(a-c)(b-c) = \ldots$ (A)1 (B)2 (C)0 (D)-2 (E)-1 	En l'entrevista posterior l'alumne explica que prova un exemple i veu que li dona 2. Com que no hi ha cap opció de resposta del tipus "hi ha diversos resultats possibles", conclou que la resposta només pot ser 2. Fa un segon exemple per comprovar que efectivament també li dona 2.

Figura 21 Altres usos de les opcions de resposta

Capítol 5. Anàlisi de dades

En aquest capítol analitzem les resolucions dels estudiants segons els paràmetres establerts en els capítols anteriors. Cadascuna de les resolucions dels alumnes ha estat classificada segons cadascuna de les variables, i els resultats d'aquesta classificació s'han estudiat segons el grup de població dels resolutors, posant en relleu les diferències més importants que s'han observat. Les resolucions dels alumnes i les gravacions de les entrevistes es poden consultar a shorturl.at/ghxzN.

5.1 Grup A

5.1.1 Sobre encerts i errors

Al comparar les respostes als problemes en condicions de Prova Cangur i en condicions de temps il·limitat, ens trobem davant d'uns resultats poc esperats. En el primer bloc de problemes (amb respostes d'elecció múltiple i amb temps limitat), els estudiants van tenir el temps molt limitat però, d'altra banda, tenien cinc opcions possibles de resposta per triar, el que els donava un avantatge per les possibles estratègies que es poden utilitzar en aquest context, i més tenint en compte que són estudiants amb experiència en aquest tipus de problemes. En el segon bloc (sense opcions de resposta i amb temps il·limitat), els estudiants gaudien de més temps per resoldre els problemes tot i que no tenien l'avantatge de les opcions de resposta. Mentre que en el primer bloc el nivell d'encert es troba al 57%, en el segon el nivell d'encert està en el 63% (Figura 22). En tots dos casos el nombre de respostes en blanc està al voltant del 5%. Aquests resultats suggereixen que tenir temps limitat per resoldre els problemes és un obstacle més gran que el fet de no disposar d'opcions de resposta, ja que els estudiants han tret més profit de tenir el temps suficient per resoldre adequadament el problema que de les opcions de resposta ofertes.

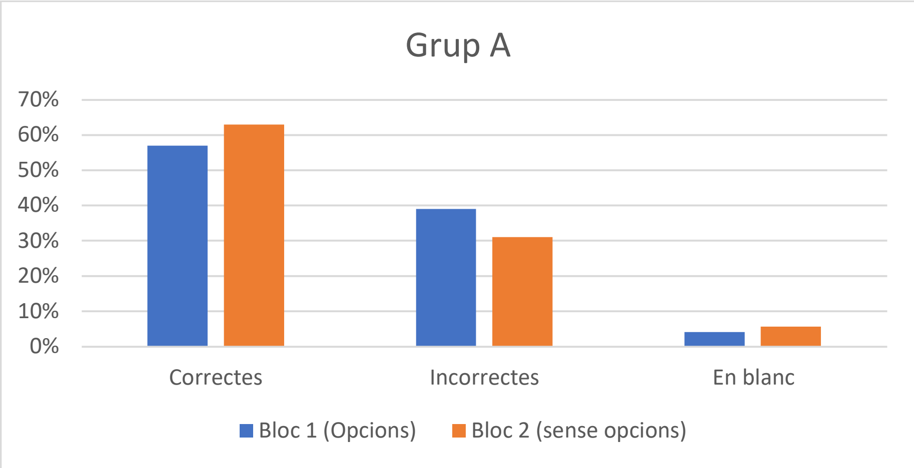


Figura 22 Respostes correctes i incorrectes (grup A).

5.1.2 Completesa de les solucions, ús de conjectures i intuïcions

Un aspecte important en aquest estudi és observar el comportament dels estudiants a l'hora de prendre riscos o assumir una resposta com a correcta sense una prova completa d'això, recollit en la categoria de completesa de les solucions. Un 40% dels problemes han presentat una solució completa, un 55% han presentat una solució incompleta i el 5% restant correspon a respostes en blanc. Totes les solucions completes menys una han estat correctes (l'errònia és per un lleu error de càlcul), mentre que la quantitat de solucions incompletes correctes es redueix a gairebé un 36% (Figura 23).

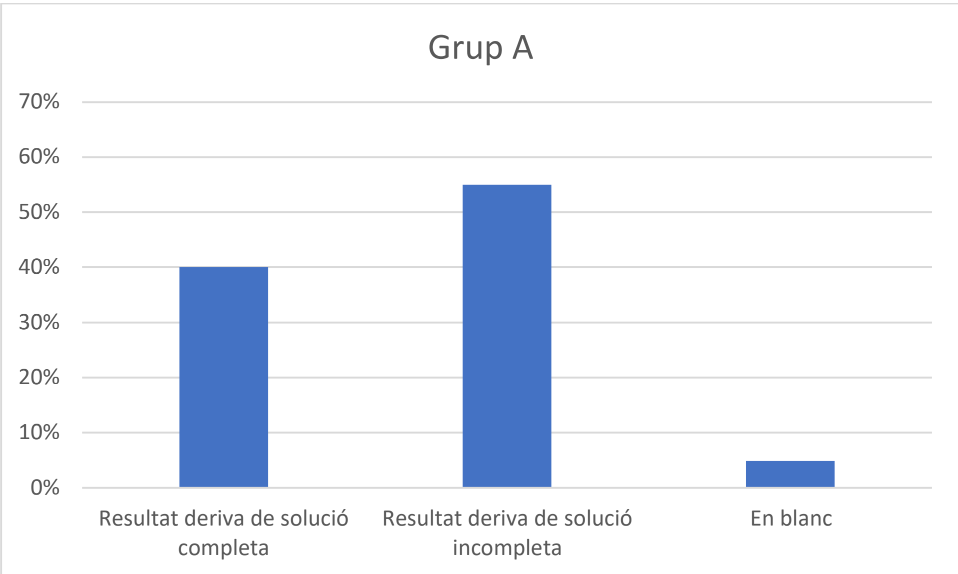
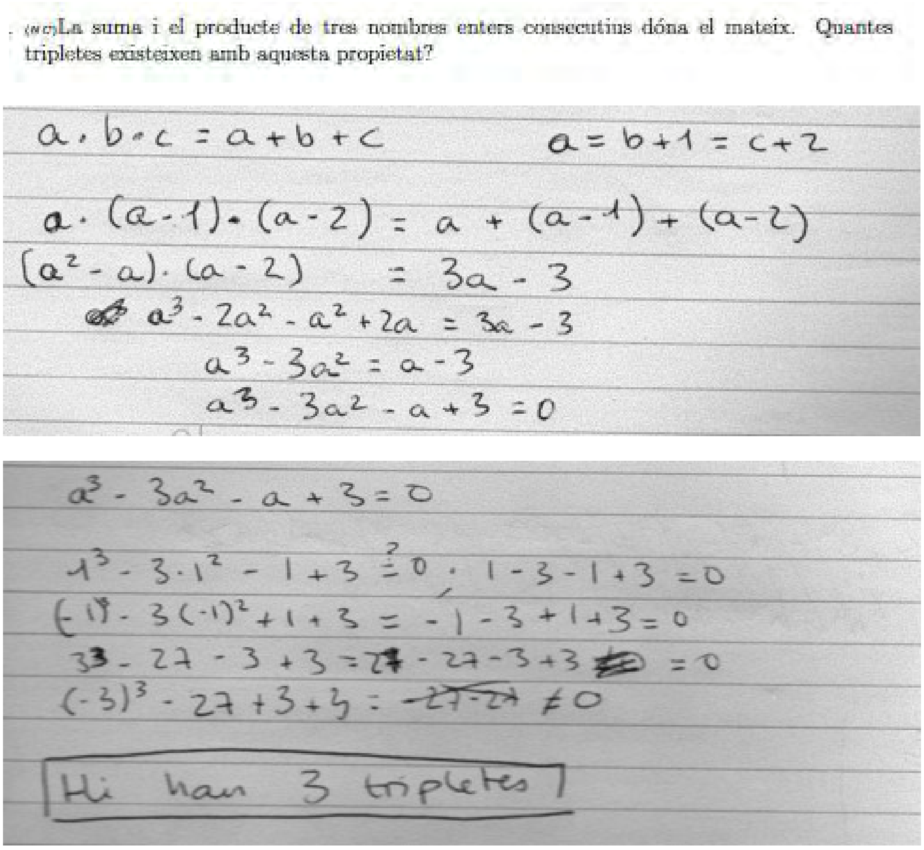


Figura 23 Solucions completes / incompletes (grup A).

En els problemes geomètrics hi ha una clara tendència a utilitzar conjectures, mentre que en els problemes aritmètics la quantitat de solucions completes és més gran. En els problemes geomètrics, la possibilitat de visualitzar mentalment o mitjançant un dibuix la informació durant la resolució fa que l'estudiant se senti més confiat a aventurar una resposta. D'altra banda hem constatat que les eines geomètriques que els estudiants apliquen són molt senzilles comparades amb les eines aritmètiques. Això es tradueix en una major proporció de solucions completes en els problemes aritmètics (Figura 24).


(WC) La suma i el producte de tres nombres enters consecutius dóna el mateix. Quantes tripletes existeixen amb aquesta propietat?

$a \cdot b \cdot c = a+b+c \qquad a = b+1 = c+2$

$a \cdot (a-1) \cdot (a-2) = a + (a-1) + (a-2)$

$(a^2-a) \cdot (a-2) = 3a-3$

$a^3 - 2a^2 - a^2 + 2a = 3a - 3$

$a^3 - 3a^2 = a - 3$

$a^3 - 3a^2 - a + 3 = 0$

$a^3 - 3a^2 - a + 3 = 0$

$1^3 - 3 \cdot 1^2 - 1 + 3 \stackrel{?}{=} 0 \; ; \; 1 - 3 - 1 + 3 = 0$

$(-1)^3 - 3(-1)^2 + 1 + 3 = -1 - 3 + 1 + 3 = 0$

$3^3 - 27 - 3 + 3 = 27 - 27 - 3 + 3 = 0$

$(-3)^3 - 27 + 3 + 3 = -27 - 27 \neq 0$

$\boxed{\text{Hi han 3 tripletes}}$

Aquesta figura mostra una resolució completa d'un problema aritmètic. L'estudiant fa un plantejament general, arriba a una equació de tercer grau, troba tres solucions i per tant totes les possibles. En l'entrevista posterior declara que coneix aquest fet, i que prova el cas a=3 per si de cas s'hagués equivocat en algun càlcul.

Figura 24 Exemple de resolució completa d'un problema aritmètic

A més, en els casos on apareixen conjectures durant la resolució, el grau de desenvolupament de la solució del problema també és més gran en els problemes aritmètics que en els geomètrics (Figura 25). En els problemes geomètrics es dona sovint la resposta basada únicament en suposicions o estimacions visuals sense fonament.

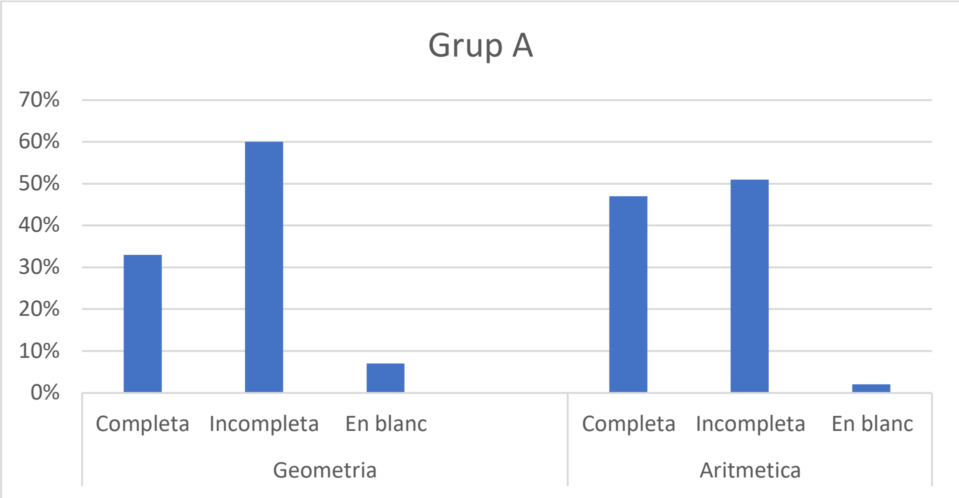


Figura 25 Completesa de les solucions segons temàtica del problema (grup A).

L'anàlisi de les solucions indica que, a major grau de certesa de la conjectura, major quantitat de respostes correctes s'obtenen, amb una lleu desviació entre els nivells molt baix i baix. Això ens porta a interpretar que els nivells de conjectura en què hem classificat les solucions representen bé el risc que assumeixen els estudiants en cadascuna d'elles.

Hem analitzat amb quina freqüència s'utilitzen conjectures durant la resolució dels problemes i amb quina freqüència es donen els diferents nivells de certesa. S'observa que les conjectures amb nivell de certesa molt alt apareixen molt poques vegades, en un percentatge lleugerament inferior al 3%, mentre que les conjectures dels altres nivells apareixen totes un nombre destacat de vegades. En particular, hem analitzat les diferències observades en aquest aspecte quan els estudiants han realitzat els problemes del primer bloc i els del segon bloc.

Els estudiants han utilitzat en general el recurs de conjecturar un resultat més sovint en els problemes del primer bloc, amb opcions de resposta, que en el segon bloc (amb més temps) Analitzant el grau d'aquestes conjectures hem observat doncs que resulta molt més fàcil per a un estudiant triar una resposta entre les cinc possibles sense tenir una certesa suficient del seu resultat; per tant al disposar de temps i no tenir les opcions de resposta, els estudiants tendeixen a no aventurar possibles resultats amb tanta freqüència i, quan ho fan, mostren un major grau de raonament.

Els nivells de certesa mostrats pels estudiants a l'hora de respondre ens indica fins a quin punt conjecturen una resposta sense tenir prou arguments per justificar-la. Al gràfic de la figura 26 podem observar el percentatge de respostes que corresponen a cada nivell, segons si els problemes resolts eren del primer o del segon bloc.

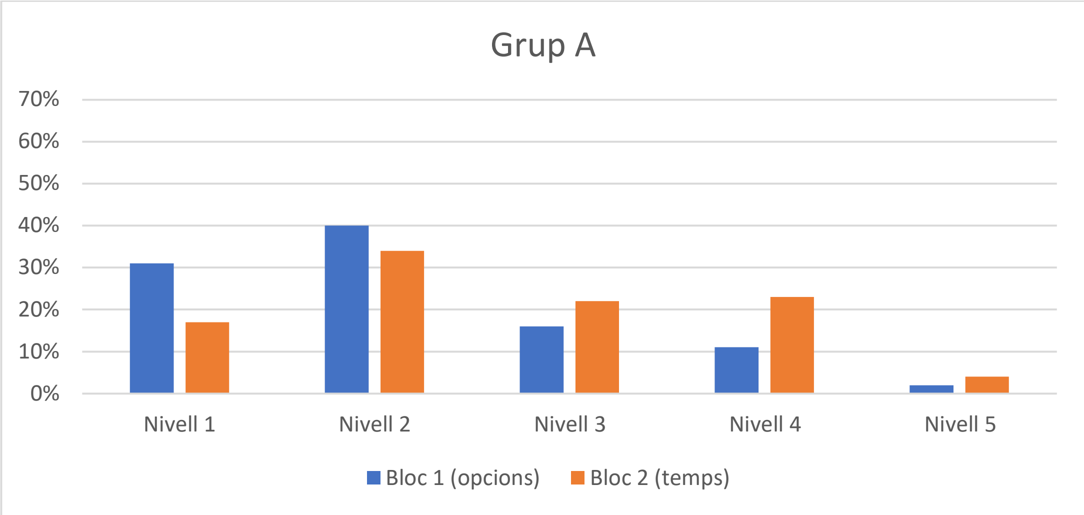


Figura 26 Nivells de certesa mostrats pels estudiants (grup A).

5.1.3 Ús de les opcions de resposta

La presència de les opcions de resposta combinada amb la limitació del temps a 30 minuts dona com a resultat un major percentatge de problemes sense una solució completa i també un menor grau d'encert (Figura 27), de manera que l'avantatge de conèixer aquestes opcions no compensa l'inconvenient la limitació del temps per als estudiants del grup A.

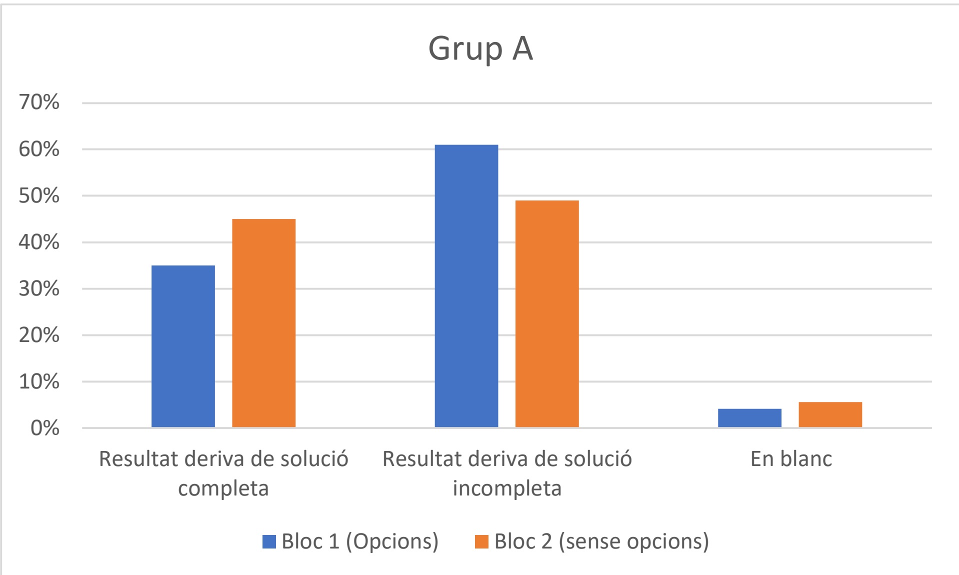


Figura 27 Completesa de les solucions amb / sense opcions de resposta (grup A).

D'altra banda, les respostes d'elecció múltiple brinden als estudiants la possibilitat d'utilitzar eines heurístiques partint de l'ús de les mateixes per poder trobar la resposta correcta al problema. Algunes de les eines heurístiques descrites per Puig (1996), com la consideració de casos particulars, l'anàlisi de possibilitats o la utilització de figures auxiliars poden aplicar-se de manera diferent en un mateix problema segons es disposi o no d'opcions de resposta. Si ens cenyim a el conjunt de problemes del primer bloc, observem que els estudiants del grup A han utilitzat les opcions de resposta en el procés de resolució només en un 23% de les seves resolucions (Figura 28). S'exclouen d'aquest recompte els problemes on l'estudiant ha utilitzat les opcions simplement per aventurar una resposta, sense haver desenvolupat un procés de resolució raonada.

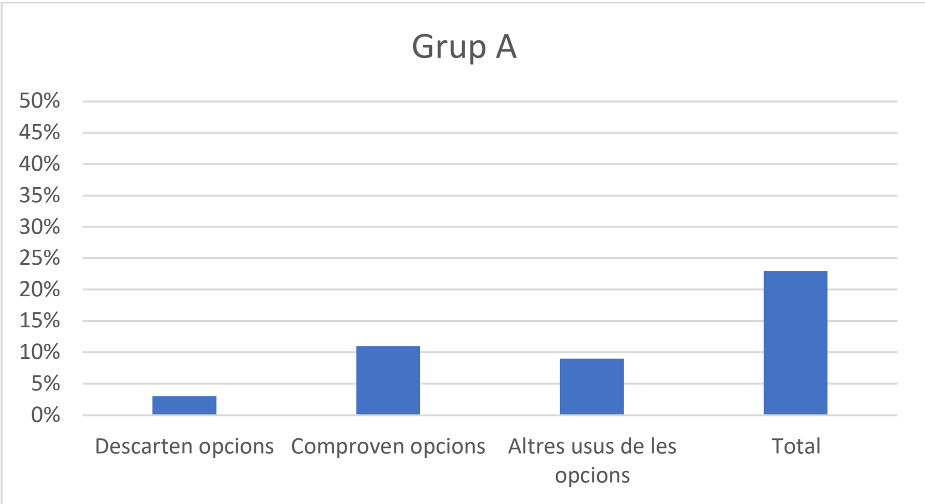
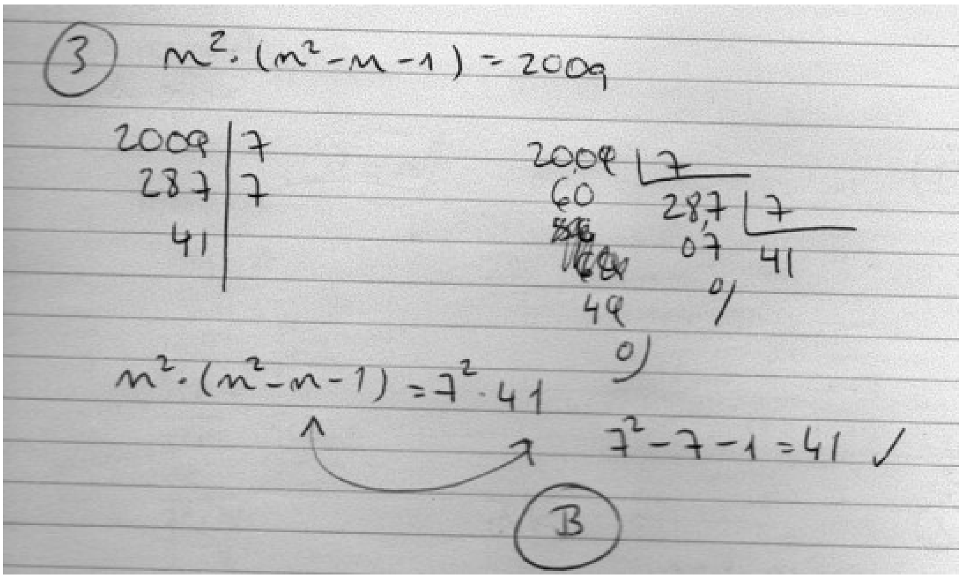


Figura 28 Ús de les opcions de resposta (grup A).

Constatem així que, en contra de la nostra conjectura inicial, aquests estudiants no basen el seu èxit en la competició de les Proves Cangur a un ús habitual d'estratègies basades en les opcions de resposta (Figura 29). De forma més detallada, hem analitzat l'aparició de les estratègies de resolució per eliminació d'opcions i per comprovació d'opcions, obtenint que, en els problemes del bloc 1, els estudiants han descartat opcions en un 3% dels casos i han comprovat opcions en l' 11% dels problemes. En ambdós casos el percentatge d'ús d'aquest tipus d'estratègies és massa baix com per poder justificar que el seu ús té una influència rellevant en l'alt rendiment d'aquests estudiants en les Proves Cangur.

(N.A) Si $n^4 - n^3 - n^2 = 2009$, essent n un enter positiu, llavors n és igual a

(A)5 (B)7 (C)9 (D)41 (E)No hi ha cap n que sigui solució



En aquest problema l’estudiant desestima la opció de comprovar les respostes una a una, tot i ser una opció factible, i elabora una solució completa que el porta a la resposta correcta. Aquesta resolució o similar per aquest problema només apareix en 3 alumnes del grup A i cap del grup B.

Figura 29 Exemple de resolució completa sense ús de les opcions de resposta

5.1.4 Heurístiques utilitzades

Les dades obtingudes indiquen, d'una banda, que els estudiants fan servir amb molta més freqüència les heurístiques de prova de casos que les d'aproximacions (Figura 30). D'altra banda, s'observa que no hi ha diferències importants en l'ús d'aquestes heurístiques entre els dos tipus de problemes, sinó que els estudiants les utilitzen d'una manera gairebé idèntica. El fet de tenir opcions de resposta facilita una mica més tant les aproximacions en el resultat com les proves de casos particulars, especialment quan la resolució no ha portat a l'estudiant a cap de les respostes proposades, de manera que, en comptes de revisar els seus càlculs i raonaments, ha decidit seleccionar per aproximació el resultat proposat pel problema que més s'acosta al seu, cosa que no és possible en els problemes sense opcions de resposta. Tot i això, alguns estudiants aproximen les seves respostes per factors com la creença que uns resultats (com els nombres enters) són més plausibles que altres (com nombres decimals) (Figura 31)

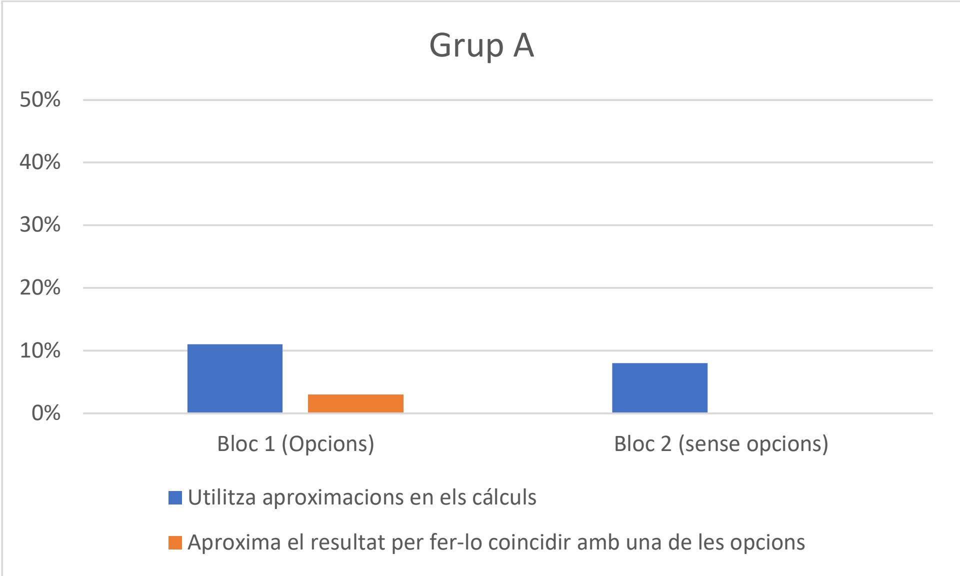


Figura 30 Ús de les aproximacions (grup A).

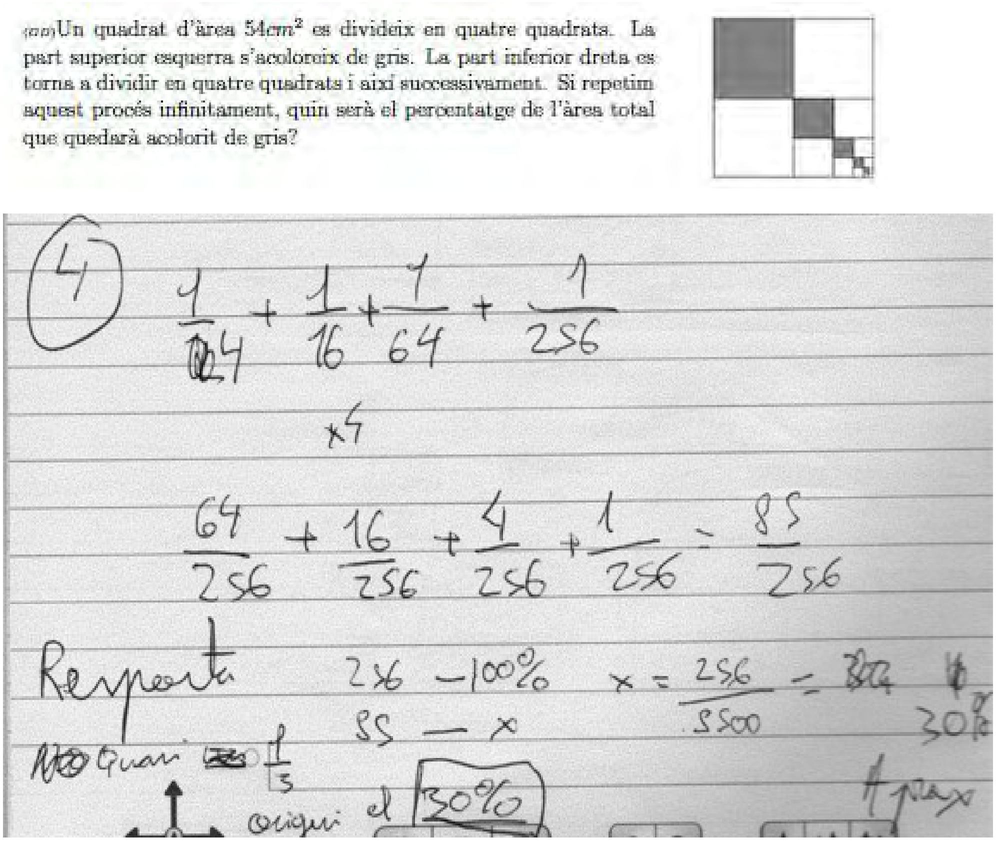
	En aquesta resolució l'estudiant calcula la proporció d'àrea dels primers quadrats, desestima els més petits i calcula el percentatge que representen. Troba un nombre proper a 30, i dona aquesta resposta. Fins i tot anota en una cantonada que el resultat és aproximat però el dona per bo.

Figura 31 Exemple d'ús de les aproximacions en la resolució d'un problema.

Finalment, l'heurística de provar casos particulars és molt habitual en qualsevol de les condicions de resolució, ja que s'utilitza en al voltant del 40% del total de les resolucions de cada bloc (Figura 32). Aquest percentatge resulta més significatiu si tenim en compte que no en tots els problemes es pot aplicar aquesta heurística.

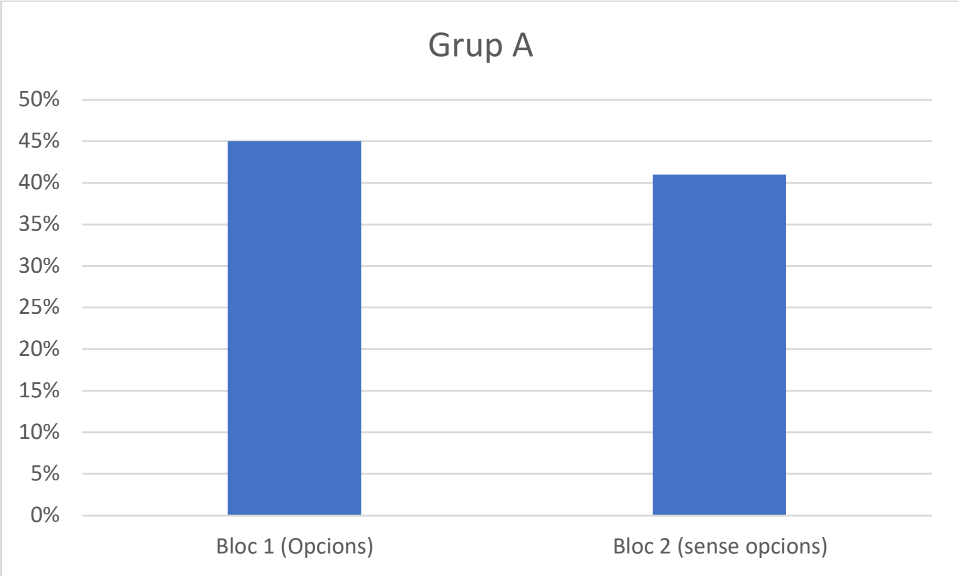


Figura 32 Ús de casos particulars (grup A).

5.2 Grup B

Les dades obtingudes de la població del grup B s'han analitzat utilitzant els mateixos criteris que s'han seguit pel grup A.

5.2.1 Sobre encerts i errors

A l'analitzar les respostes correctes i incorrectes donades als problemes en les dues condicions de resolució (temps limitat i opcions de resposta, temps no limitat i sense opcions de resposta) els resultats indiquen que no s'observa una gran diferència entre les resolucions en les diferents condicions. En el primer bloc de problemes (amb respostes d'elecció múltiple i temps limitat) el nivell d'encert de la resposta correcta va ser d'un 42%, mentre que en el segon bloc (sense opcions de resposta i temps il·limitat) el nivell d'encert va ser del 26%. Les respostes en blanc van suposar un 6% del total en el primer bloc i un 18% en el segon (Figura 33). Aquests resultats indiquen que el fet de disposar d'opcions de resposta sembla que sigui un avantatge més gran que el fet de disposar més temps per resoldre els problemes.

Crida l'atenció la diferència de respostes en blanc, en cas de disposar d'opcions de resposta els estudiants tendeixen a donar alguna de les opcions com a resposta tot i que la seva resolució no sigui concloent. En condicions reals de concurs aquestes respostes incorrectes comporten una penalització a la puntuació, però amb les dades de què disposem no podem discernir si aquest comportament s'hagués donat també en una situació de concurs o si en aquest cas els estudiants haguessin optat per una estratègia més conservadora abans de donar respostes incorrectes.

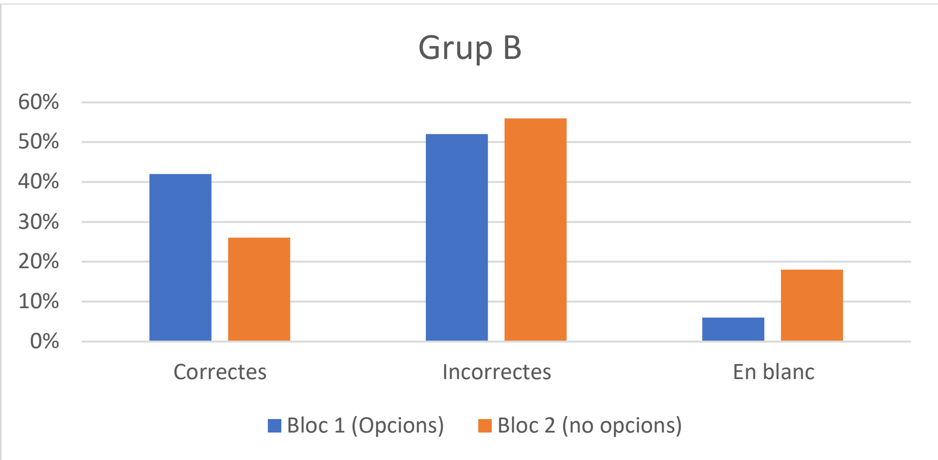


Figura 33 Respostes correctes i incorrectes (grup B).

5.2.2 Ús de conjectures i intuïcions

A l'hora d'analitzar l'ús de conjectures i intuïcions en les resolucions dels estudiants, s'han utilitzat els mateixos paràmetres que al grup A. Les resolucions dels estudiants s'han considerat com a completes si d'aquesta resolució se'n deriva directament una resposta (sigui aquesta correcta o incorrecta) i el procés seguit en la resolució també té una estructura lògica coherent. En els casos en que els estudiants fan alguna assumpció no justificada, tant en el procediment com en l'elecció de la resposta (sigui amb opcions o sense) es considera que la solució és incompleta i per tant l'estudiant ha utilitzat algun tipus de conjectura o ha fet ús de la seva intuïció per completar el procés de resolució. En aquest grup B, les solucions completes representen tan sols un 13% del total, mentre que les incompletes en representen un 75% (la resta són respostes en blanc). De les solucions completes pràcticament totes porten a respostes correctes (totes excepte dues) mentre que les solucions incompletes porten només a un 28% de respostes correctes i a un 72% de respostes incorrectes (Figura 34).

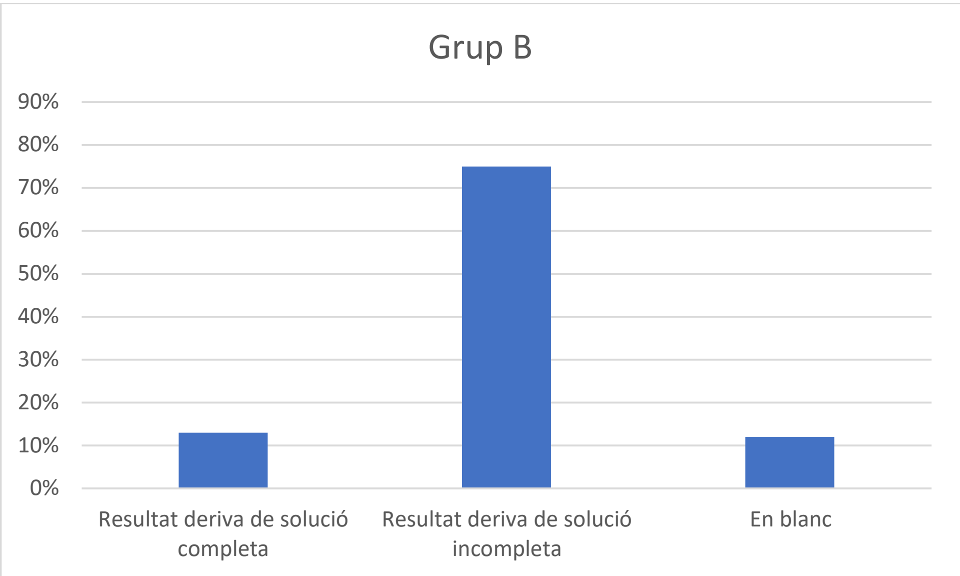
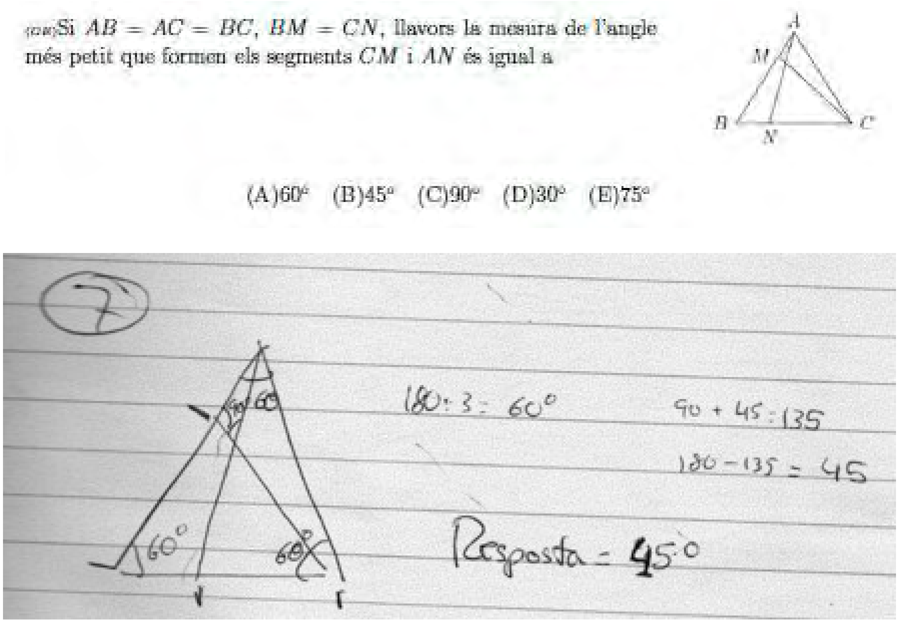


Figura 34 Solucions completes / incompletes (grup B).

Pel que fa a l'estudi dels problemes aritmètics i geomètrics per separat, s'observa una gran diferència entre les resolucions dels dos grups de problemes. En els problemes geomètrics hi ha molt poques solucions completes, al voltant d'un 2% de les solucions fetes pels estudiants ho són, mentre que en els aritmètics aquest percentatge, tot i ser baix, és major, un 26% (en aquests percentatges no es tenen en compte les respostes en blanc, ja que no es consideren solucions completes ni incompletes). Les eines geomètriques que utilitzen els estudiants són molt bàsiques, i és on el mecanismes de visualització s'utilitzen amb més freqüència per conjecturar fets que no es deriven necessàriament del procés lògic de la resolució (Figura 35). En els problemes aritmètics el major nombre de solucions completes porten a un major nombre de respostes correctes. Les conjectures són de nivell més baix en els problemes geomètrics que en els aritmètics, en part perquè els mecanismes de visualització no actuen de la mateixa manera en un i altre cas.



En la reva resolució l'alumne fa un seguit de conjectures sobre les relacions angulars del triangle. Utilitza la intuïció per assignar valors (incorrectes) que li permeten avançar en la resolució del problema

Figura 35Exemple d'ús d'intuïció en un problema geomètric

En els problemes aritmètics gairebé sempre hi ha un intent (correcte o incorrecte, més o menys desenvolupat) de trobar una justificació a la resposta, encara que no es faci explícita al moment de donar aquesta resposta, mentre que en els geomètrics és habitual que es doni una resposta basada únicament en intuïcions (Figura 36).

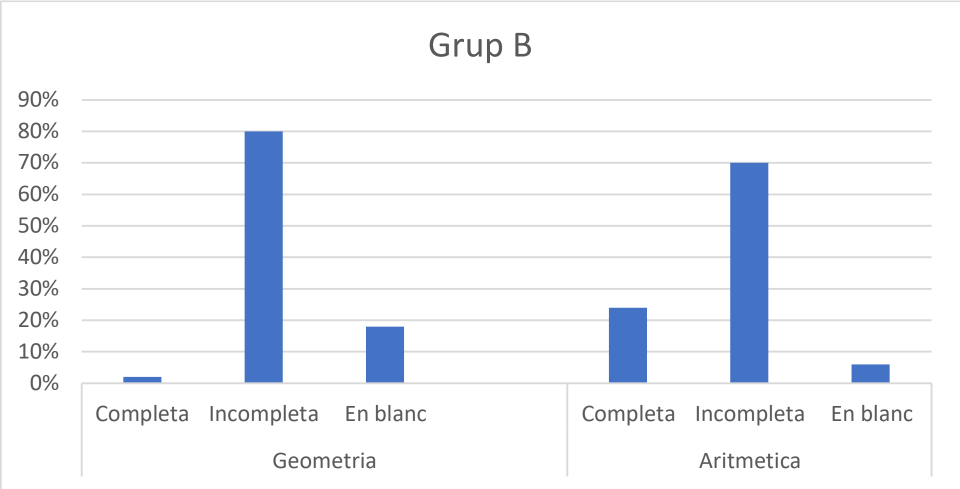


Figura 36 Completesa de les solucions segons temàtica del problema (grup B).

A l'analitzar els nivells de certesa en les resolucions dels estudiants s'observa un nivell baix en general. Les conjectures amb nivell de certesa molt alt (5 en la nostra escala) apareixen de manera testimonial en un 0,4% de les resolucions, les de nivell alt (4) en un 3% i les corresponents als tres nivells més baixos de certesa apareixen tots de manera destacada. També és rellevant la diferència de l'ús de conjectures i intuïcions entre els dos blocs de problemes. En els problemes resolts en condicions Cangur s'utilitzen conjectures del resultat en un 86% de les respostes, mentre que en el segon bloc, sense opcions de resposta, el percentatge és del 63% (Figura 37).

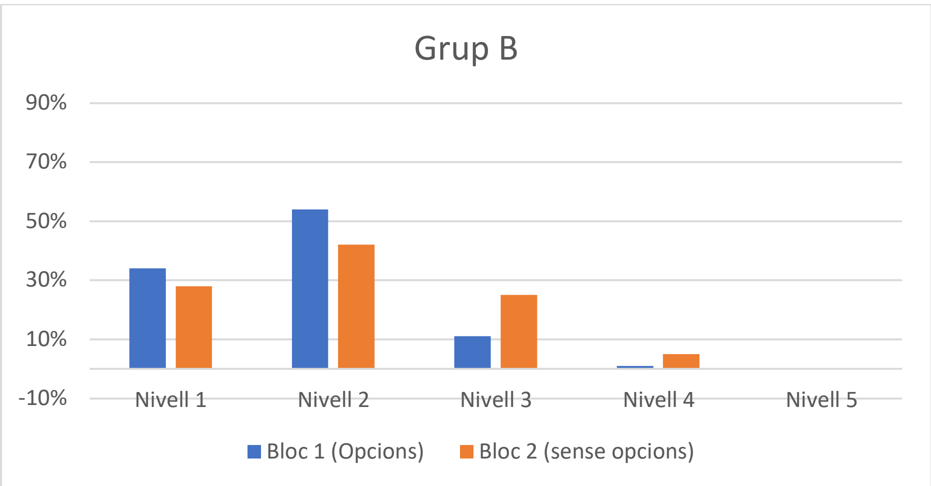


Figura 37 Nivells de certesa mostrats pels estudiants (grup B).

Com veurem en l'anàlisi de les heurístiques utilitzades, l'ús de les opcions de resposta porta a que els estudiants tinguin més eines per aventurar possibles respostes encara que el procés de resolució mostri poca certesa, i també condiciona el mateix procés de resolució, fent que l'estudiant utilitzi aquestes opcions de resposta per omplir buits en la cadena lògica de raonaments que conformen la seva resolució (Figura 38).

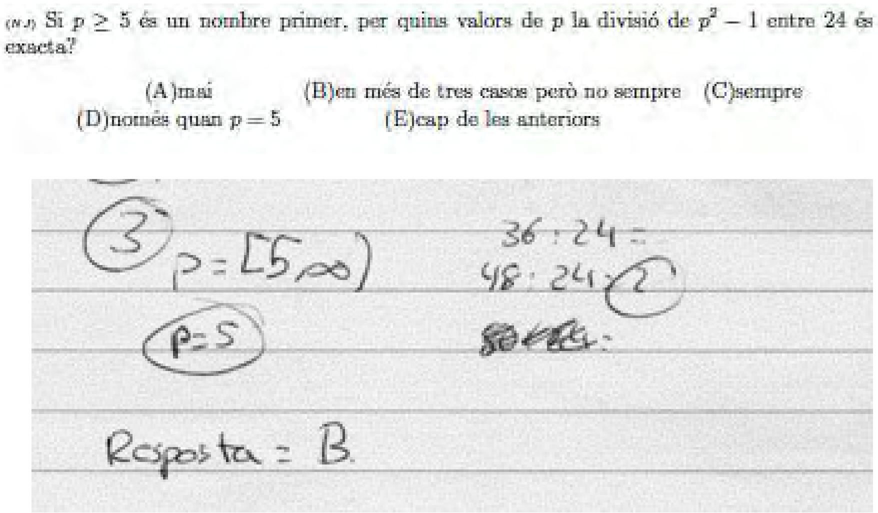
	L'estudiant prova alguns casos, p=6 i p=7. En p=6 comet un error de càlcul i no es compleix la condició de l'enunciat, i per p=7 sí que es compleix. Observant les opcions de resposta tria B quan la opció E també podria explicar els seus resultats anteriors.

Figura 38 Exemple de conjectura d'elecció resposta sense justificació matemàtica

5.2.3 Ús de les opcions de resposta

Pel que fa a l'encert en la resposta, ja hem vist que el disposar de les opcions suposa als estudiants d'aquest grup un avantatge a l'hora de donar respostes correctes.

Quan analitzem com afecta l'ús de les opcions de resposta a l'hora de plantejar una resolució, veiem que les solucions completes (portin o no a una resposta correcta) són aproximadament les mateixes en un i altre cas (Figura 39), una mica més en la resolució de problemes sense opcions de resposta, com podríem esperar, però el fet que quan es tenen opcions de resposta es donin moltes menys respostes en blanc ens fa pensar que, com veurem més endavant, els estudiants utilitzen molt sovint aquestes opcions per donar respostes sense un procés més o menys complet de resolució. Així doncs, el 85% de les respostes en condicions de Proves Cangur provenen de solucions incompletes mentre que només el 65% de les respostes en condicions ordinàries provenen d'aquestes solucions incompletes amb només un 17% de respostes completes en aquest últim cas.

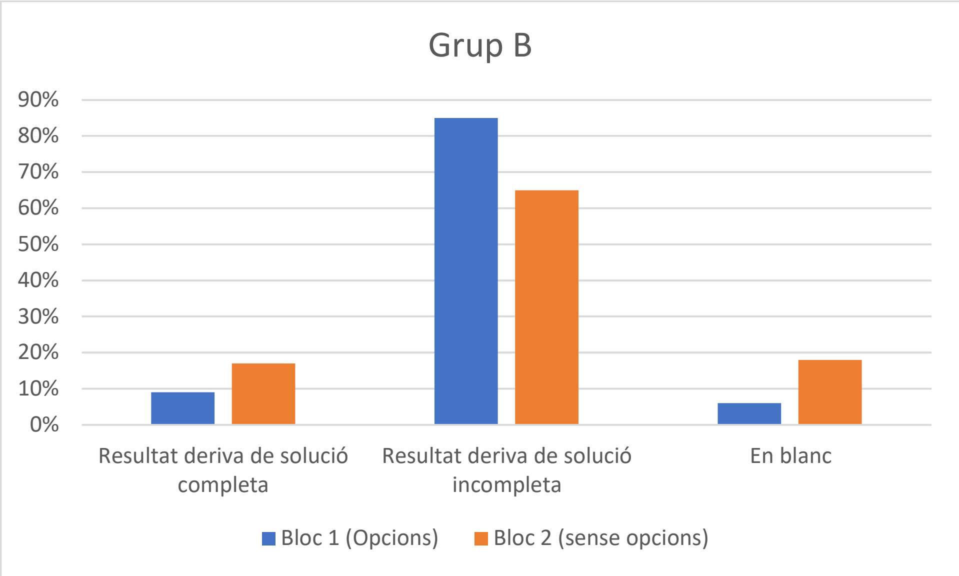


Figura 39 Completesa de les solucions amb / sense opcions de resposta (grup B).

Els estudiants del grup B per tant, a l'hora de plantejar un problema amb les condicions de les Proves Cangur, utilitzen molt sovint estratègies pròpies de la resolució de problemes basada en major o menor grau en les opcions de resposta (Figura 40). En total, aquests estudiants han utilitzat les opcions en un 40% de les seves resolucions, sense tenir en compte les respostes que es donen simplement escollint una de les opcions sense cap procés raonat que les justifiqui (correcte o incorrecte). Aquest percentatge és alt si tenim en compte que no tots els problemes proposats admeten estratègies basades en les opcions, en alguns d'ells només es pot arribar a la resposta correcta amb una resolució del problema, deixant les opcions només per a comprovar si la resposta obtinguda forma part del conjunt d'opcions possibles, i en cas contrari, revisar el procediment per detectar els errors que s'hagin pogut cometre.

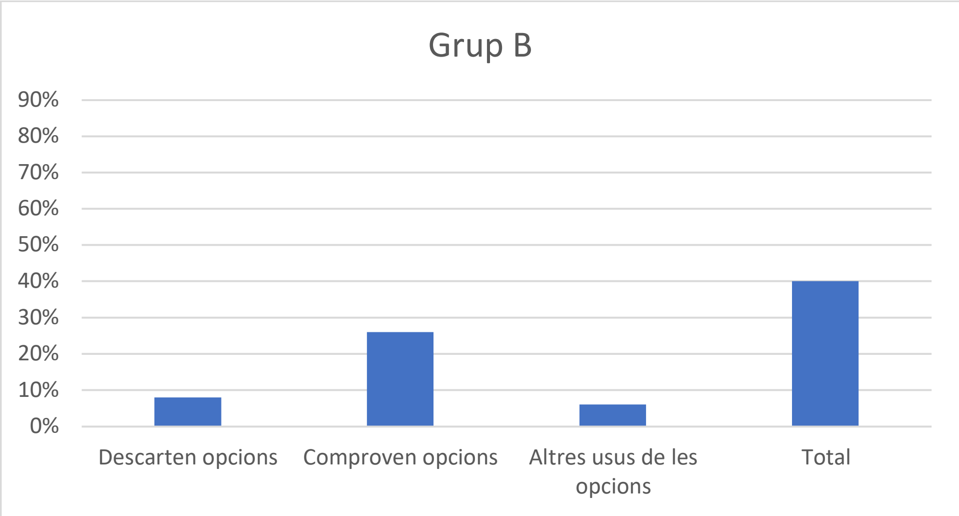
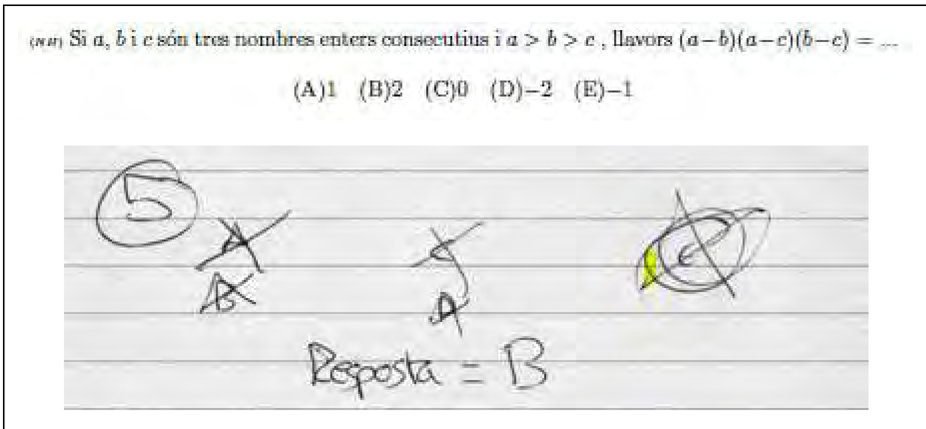


Figura 40 Ús de les opcions de resposta (grup B).

L'estratègia més comuna és la de comprovació de les opcions que s'ofereixen, que apareix en un 26% de les resolucions de problemes amb opció múltiple de resposta (Figura 41). En aquests problemes els estudiants miren de comprovar una a una les opcions per veure si alguna pot ser resposta del problema, sense desenvolupar una resolució completa que pugui justificar-ne la resposta. A vegades aquesta comprovació de les opcions es fa com a punt de partida per intentar localitzar la resposta correcta, i a vegades es fa després d'iniciar un procés de resolució que es tanca prematurament comprovant quina de les opcions pot encaixar amb els resultats parcials obtinguts fins aleshores.



L'estudiant va descartant les opcions una a una, fins i tot comet un error que el porta a descartar-les totes, en una segona repassada troba la resposta correcta.

Figura 41 Exemple de comprovació de les opcions

Altres estratègies com descartar opcions abans de començar a resoldre el problema per fer-se una idea de quin pot ser el resultat (i per exemple donar una resposta per aproximació com veurem més endavant) apareixen en un 8% de les resolucions, i en un percentatge similar apareixen altres tipus d'estratègies basades en l'ús de les opcions. Amb aquestes dades podem intuir que els estudiants del grup B usen de manera habitual les opcions sempre que el problema ho permeti, i amb això milloren els índexs de respostes correctes, encara que el nivell de certesa mostrat sigui baix. Això pot indicar que aquests estudiants obtenen els seus bons resultats en les Proves Cangur gràcies a un ús eficaç de les opcions de resposta.

5.2.4 Heurístiques utilitzades

De les heurístiques descrites al capítol de metodologia respecte la resolució de problemes, en el grup B s'observa que els estudiants utilitzen tant la prova de casos particulars (Figura 42) com les aproximacions en la resolució de problemes (Figura 44). Tot i que en un 24% de les resolucions fan servir casos particulars, el nombre de problemes on es pot trobar alguna estratègia que impliqui la prova de casos és major, per tant no sempre veuen aquesta heurística com una opció.

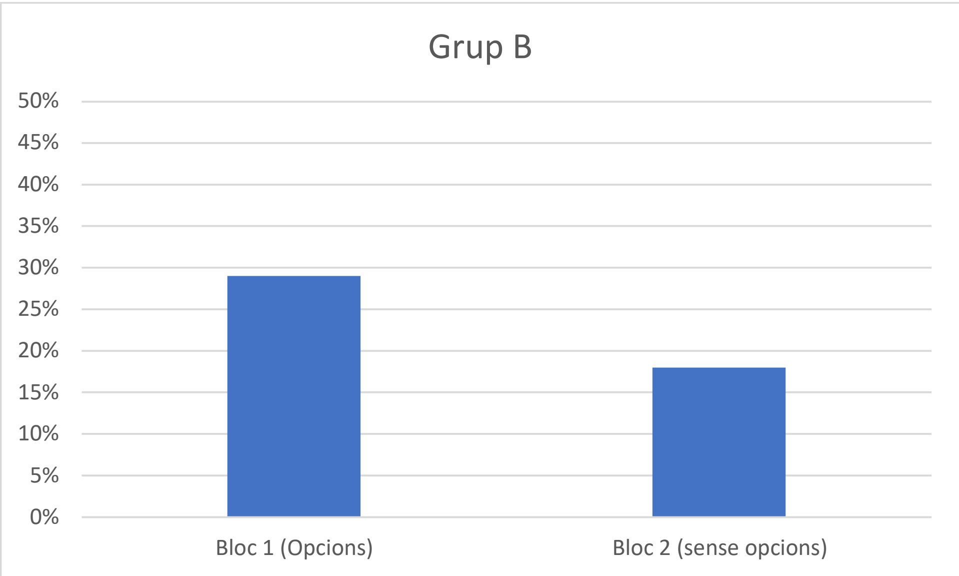


Figura 42 Ús de casos particulars (grup B).

En canvi, l'ús d'aproximacions durant el procés de resolució apareix també en un 25% dels casos (Figura 43), tot i que en aquest cas els problemes on aquesta heurística pot ser útil és menor que en el cas anterior.

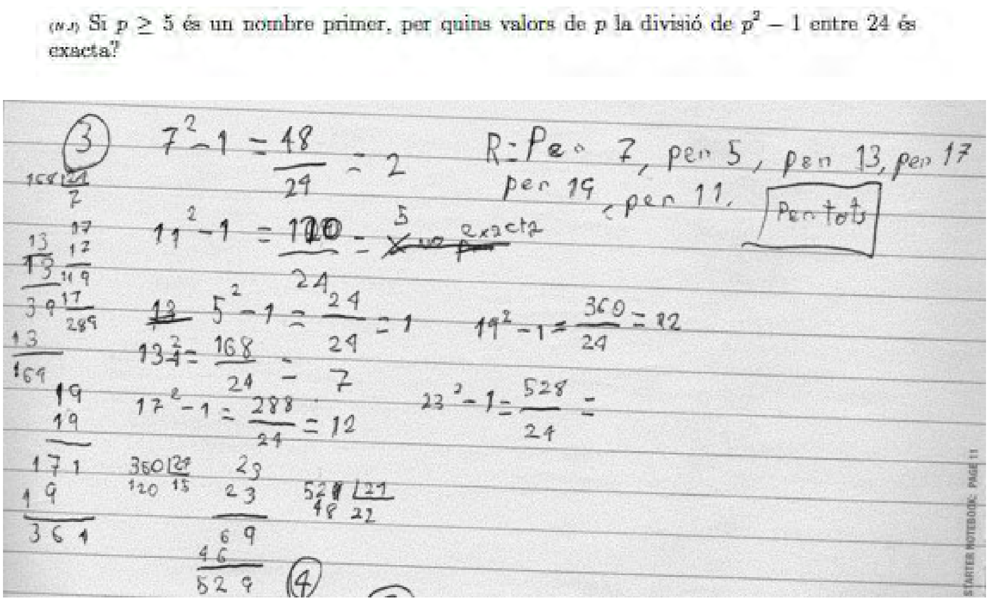
	L'estudiant prova casos particulars que el porten a conjecturar que això passarà en tots els casos.

Figura 43 Exemple de prova de casos particulars

Quan mirem les diferències observades entre els problemes amb opcions de resposta i temps limitat i les comparem amb els problemes que no oferien opcions de resposta ni límit de temps, el que veiem és que la major part de les aproximacions es fan en els problemes sense opcions de resposta (Figura 44).

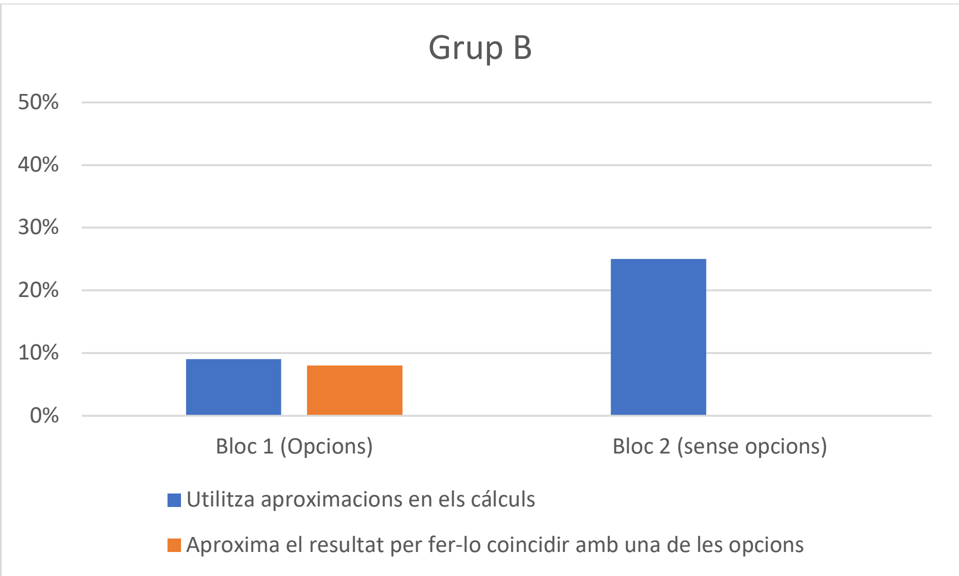


Figura 44 Ús de les aproximacions (grup B).

En el cas de problemes d'elecció múltiple, crida l'atenció que en un 8% dels casos l'estudiant tria una resposta per aproximació a la obtinguda en el seu procés de resolució sense refer els seus càlculs en busca del perquè no obté exactament cap de les respostes proposades.

Capítol 6. Resultats

En aquest capítol farem una anàlisi comparatiu dels resultats obtinguts pels grups A i B per tal de veure si els dos grups de població estudiats, tot i estar en ambdós casos formats per estudiants que obtenen bons resultats en les Proves Cangur, mostren diferències rellevants. Recordem que el grup A està format per alumnes amb resultats entre els percentils 99,75% i 100%, mentre que els del grup B està format per alumnes entre els percentils 95% i 96%. Estem per tant davant d'alumnes tots ells classificats entre el 5% dels millors de l'última edició del concurs que s'havia celebrat en el moment de la recollida de dades. Les diferències en la classificació per tant són minses entre els dos grups, i en aquest capítol veurem si les diferències entre els comportaments mostrats per uns i altres són importants i en quins aspectes ho són més.

6.1.1 Sobre encerts i errors

Com era d'esperar, els alumnes del grup A obtenen un millor resultat quan mirem les respostes correctes obtingudes per a la col·lecció de problemes en el seu conjunt (Figura 45).

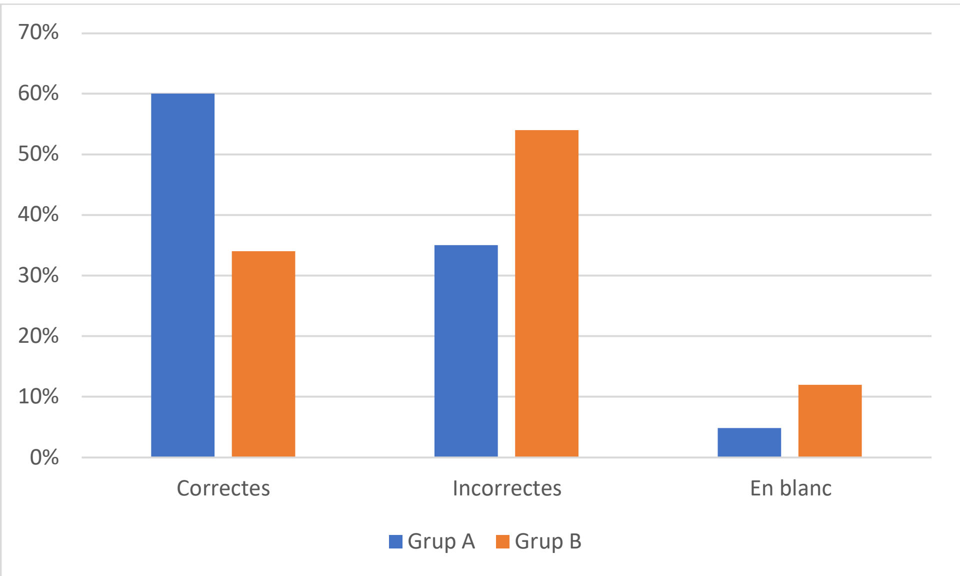


Figura 45 Respostes correctes / incorrectes segons grup.

Els estudiants del grup A obtenen gairebé el doble de respostes correctes que els del grup B. Aquesta diferència és major que la diferència en les puntuacions obtingudes en el concurs real, i una possible explicació és que, tal i com s'ha explicat en la metodologia utilitzada, els problemes seleccionats són de nivell mitjà-alt per a les edats i nivells dels participants a l'estudi. Aquests resultats per tant suggereixen que la diferència que es podria haver obtingut amb problemes de dificultat baixa hauria estat molt menor.

Si mirem el grau d'encert entre els problemes amb opcions de resposta i temps limitat (bloc 1) i els que no oferien opció múltiple de resposta ni limitaven el temps, veiem que les majors diferències s'observen en els problemes que no ofereixen opcions de resposta. En els problemes del primer bloc la diferència entre un i altre grup és d'un 23%, mentre que en els problemes del segon bloc aquesta diferència augmenta fins al 37% (Figura 46) .

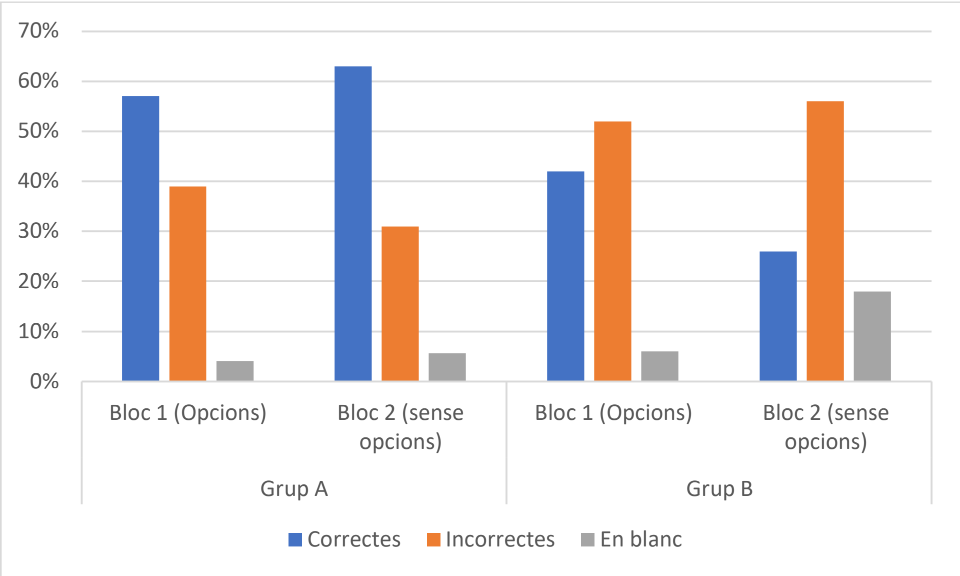


Figura 46 Respostes correctes / incorrectes segons condicions de resolució i grup.

En els estudiants del grup A fins i tot les respostes correctes obtingudes sense opcions de resposta són lleugerament superiors a les obtingudes sense aquestes opcions, per tant les dades semblen indicar que els resultats obtinguts per aquests alumnes no depenen del fet de disposar d'aquestes opcions, i en canvi treuen més profit del temps addicional del que disposen per a resoldre els problemes del segon bloc. En canvi, els estudiants del grup B mostren clarament un menor encert quan no disposen d'opcions de resposta.

És també destacable la diferència observada de respostes en blanc en un i altre grup. En el grup A són poques les respostes en blanc, i tot i que són una mica més freqüents quan no hi ha opcions de resposta, la diferència no és gran. En canvi, els estudiants del grup B opten per no donar cap resposta als problemes del segon bloc amb molta més freqüència. Això es pot relacionar amb les respostes correctes i incorrectes donades en cada cas, ja que és possible que davant un problema on l'estudiant no sap obtenir una resposta, el fet de disposar de les opcions proposades desencadena algun tipus d'estratègia basada en aquestes opcions que li permet avançar i aventurar una possible resposta. Aquesta hipòtesi concorda amb l'anàlisi que veure més endavant sobre l'ús que fan els alumnes d'un i altre grup de les opcions de resposta.

6.1.2 Ús de conjectures i intuïcions

Els estudiants del grup A es mostren molt més propensos a resoldre els problemes de manera completa que els del grup B (Figura 47). En general i comptant la totalitat dels problemes resolts, els primers resolen completament un 40% dels problemes abans de donar una resposta, mentre que els del grup B ho fan només en un 13% de les ocasions.

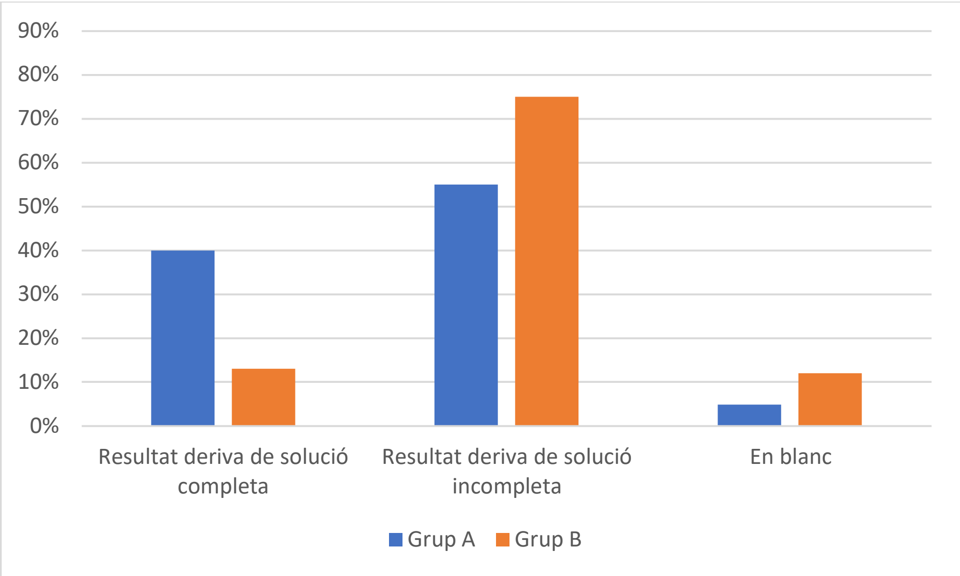


Figura 47 Solucions completes / incompletes segons grup.

Si analitzem aquestes dades segons les condicions de resolució del problema (Figura 48), observem que la distribució de les respostes completes o incompletes és similar ens els dos grups respecte les condicions de resolució, respecte el total de cada cas. És a dir, les respostes completes es reparteixen entre els dos blocs de manera semblant.

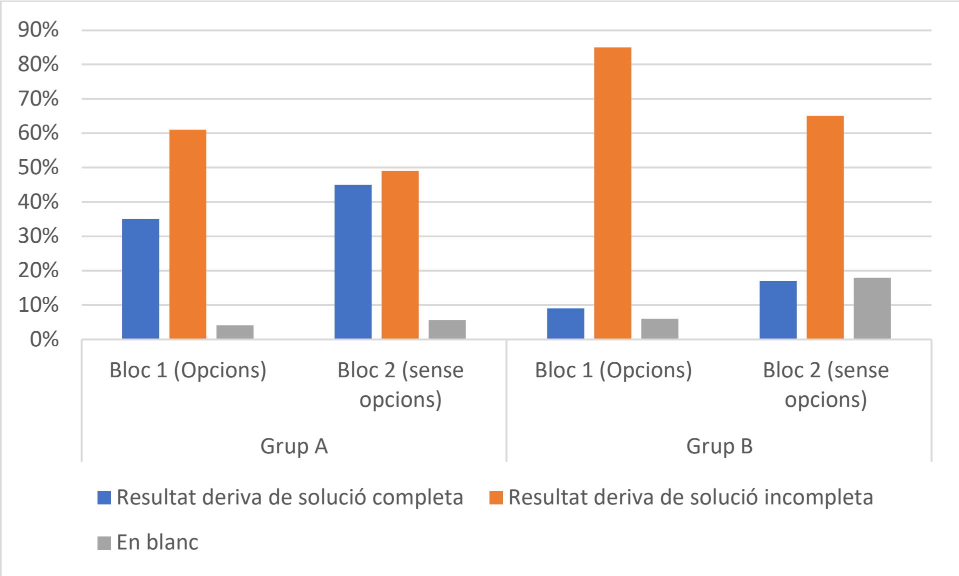


Figura 48 Solucions completes / incompletes segons grup i condicions de resolució

Els dos grups donen més respostes completes quan no es disposa d'opcions de resposta, per tant aquestes opcions desencadenen en els estudiants comportaments intuïtius que no es donen quan no disposen d'aquestes opcions. És més rellevant la diferència de respostes derivades de solucions completes en el cas dels problemes amb opcions de resposta que en els que no en tenen.

Si volem analitzar més en detall aquests aspectes hem de mirar el nivell de certesa mostrats per cada grup d'estudiants a l'hora de donar resposta als problemes quan aquesta resposta deriva d'una resolució incompleta (Figura 49). Ja hem vist que els estudiants del grup A es basen en resolucions completes molt més sovint que els del grup B, però si comparem els nivells de certesa mostrats en els problemes amb resolució incompleta, observem també diferències destacables.

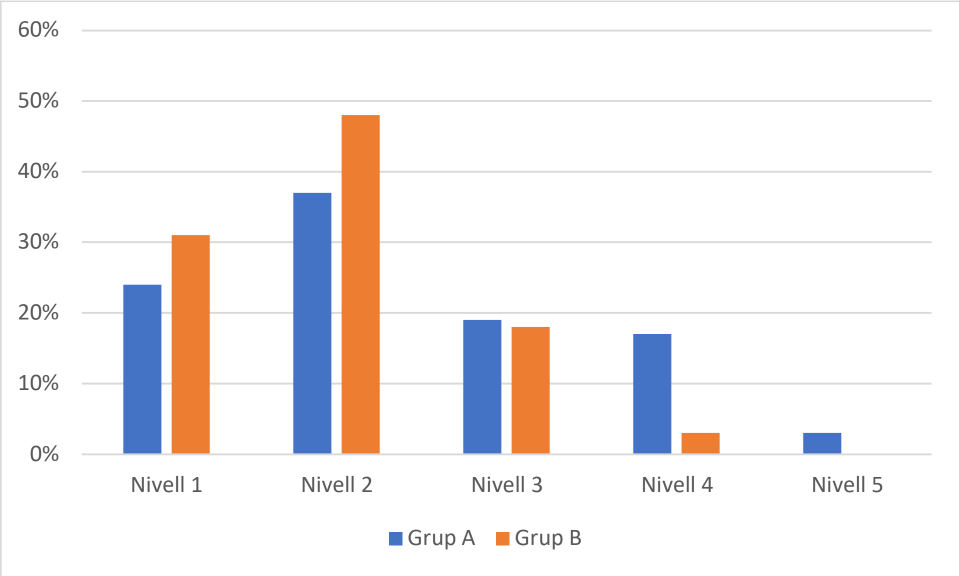


Figura 49 Nivells de certesa mostrats pels estudiants segons grup

Els alumnes del grup B rarament mostren una certesa alta o molt alta en les seves respostes, mentre que les respostes donades amb certesa baixa o molt baixa representen gairebé el 80% de les respostes incompletes, mentre que els alumnes del grup A només mostres certes baixa o molt baixa en aproximadament un 60% dels casos.

Si comparem els nivells de certesa de cada grup però segmentats per blocs de problemes segons les condicions de resolució (Figures 50 i 51) veiem que les diferències no depenen tan del grup sinó de les condicions de resolució.

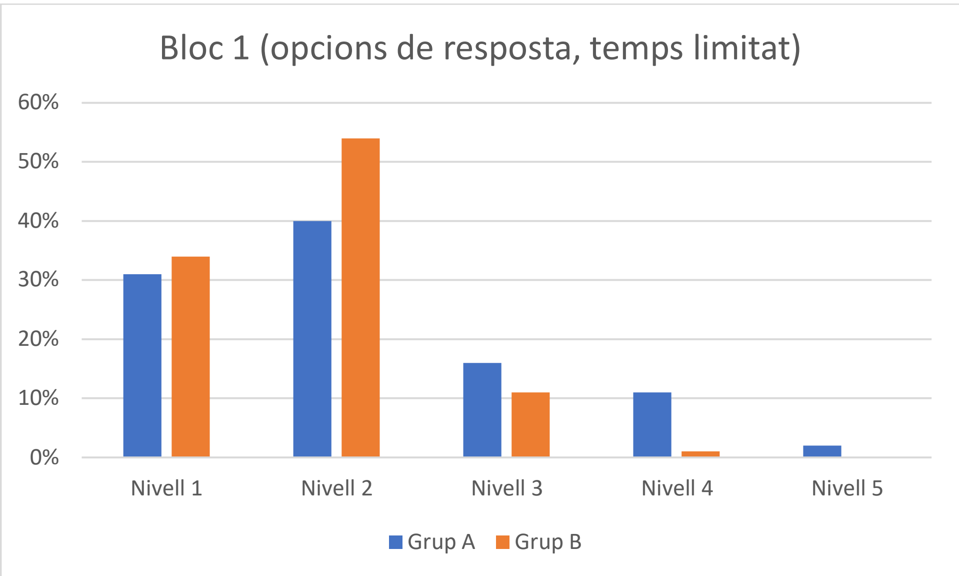


Figura 50 Nivells de certesa en el bloc 1 segons grup

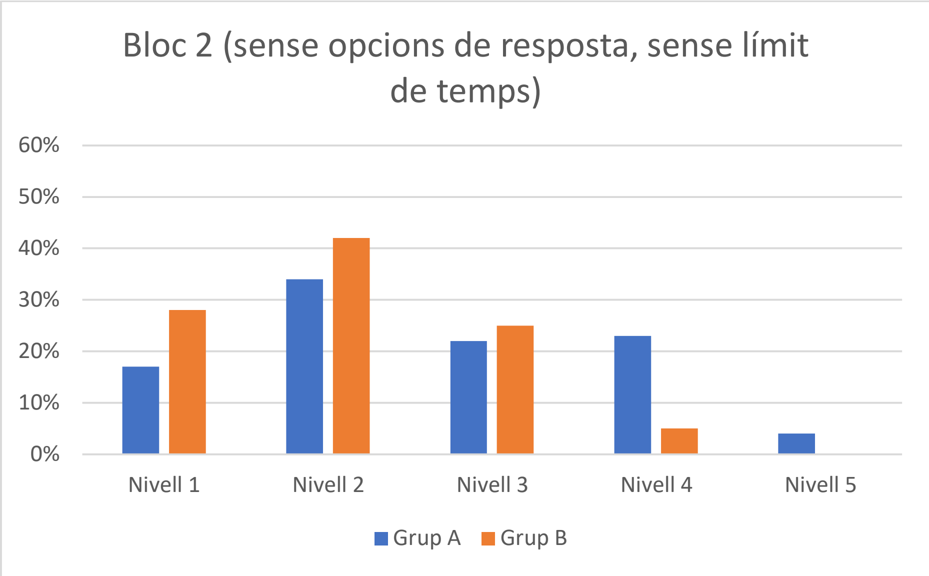


Figura 51 Nivells de certesa en el bloc 2 segons grup.

En general veiem que els dos grups generen respostes basades en nivells de certesa més baixos quan disposen d'opcions de resposta que quan no les tenen, però no es veu un comportament diferent entre els dos grups, sobretot pel que fa a les respostes amb nivells baix o molt baix de certesa.

6.1.3 Ús de les opcions de resposta

Els estudiants del grup B mostren clarament una major tendència a utilitzar les opcions de resposta en les seves resolucions quan en disposen. Aquests ho fan en un 40% dels problemes amb opció múltiple de resposta, mentre que els del grup A només ho fan en un 23% (Figura 52).

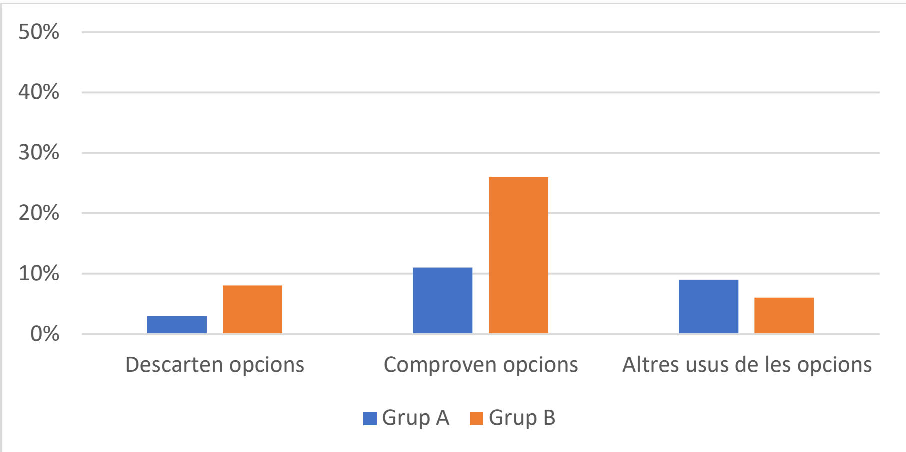


Figura 52 Ús de les opcions de resposta segons grup.

Les dades indiquen que els estudiants del grup A basen molt poc la seva estratègia de resolució en les opcions de resposta, mentre que els del grup B utilitzen sobretot l'estratègia de comprovar les respostes proposades una per una per anar-les descartant fins a obtenir una única resposta possible. A més, en els estudiants del grup A, aquesta opció s'ha utilitzat en diversos casos després de provar una resolució completa que no es basa en les opcions, mentre que en els del grup B gairebé sempre s'utilitza la comprovació de les opcions com a estratègia principal de resolució de certs problemes. Cal tornar a indicar que no tots els problemes eren susceptibles de ser resolts (o intentar ser resolts) mitjançant la comprovació de les opcions de resposta.

6.1.4 Heurístiques utilitzades

Les heurístiques que hem analitzat en les resolucions dels estudiants són l'ús de casos particulars per a donar resposta a una pregunta més general, i l'ús de les aproximacions en el procés de resolució.

Pel que fa a l'ús de casos particulars, veiem que és un comportament molt freqüent en els estudiants del grup A i no tant en els estudiants del grup B (Figura 53).

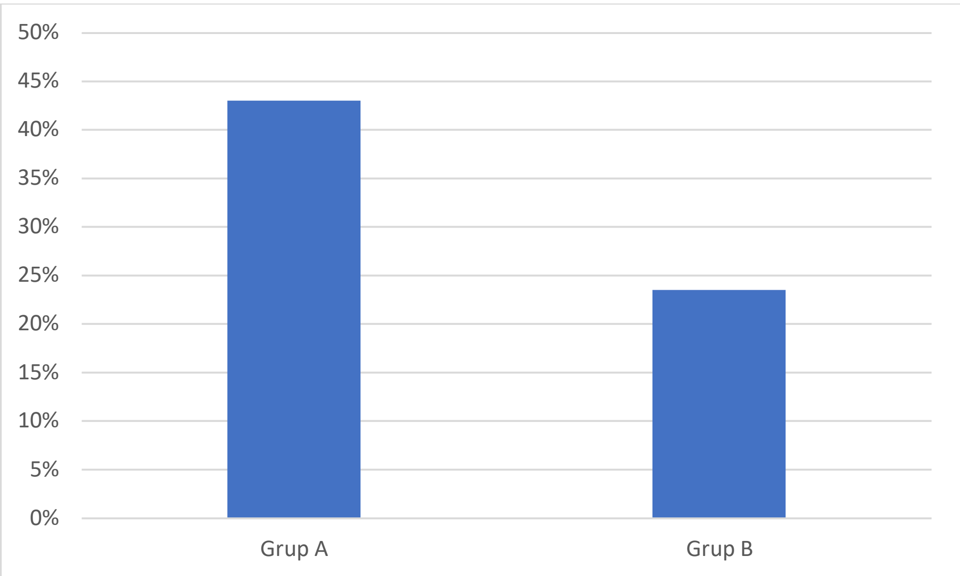


Figura 53 Ús de casos particulars segons grup.

Aquesta prova de casos particulars no s'ha de confondre amb la comprovació de les opcions de resposta. En aquesta categoria s'hi inclouen les resolucions on l'estudiant prova casos més o menys inconnexos com a part del seu procés de resolució.

Si analitzem l'ús dels casos particulars segons les condicions de resolució, no s'observa una preferència per aquesta heurística condicionada per la disposició o no d'opcions de resposta en el grup A, mentre que en el grup B sí que el seu ús baixa del 29% al 18% (Figura 54). Això s'explica en part pel més alt nombre de respostes en blanc donades pels alumnes del grup B en els problemes on no disposen d'opcions de resposta.

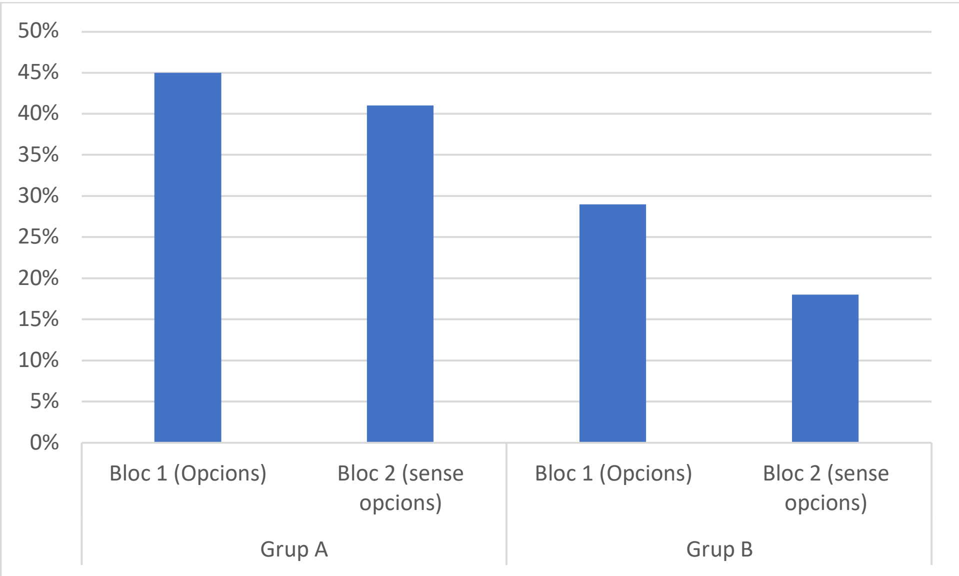


Figura 54 Ús de casos particulars segons grup i condicions de resolució.

Pel que fa a l'ús d'aproximacions, observem comportaments totalment diferents en els dos grups (Figura 55). El grup A utilitza aquest recurs en un 11% de les seves resolucions i el grup B ho fa en un 25% de les ocasions. L'estratègia de donar una resposta per aproximació del resultat obtingut a una de les opcions de resposta apareix de manera testimonial en les produccions dels estudiants de grup A, mentre que en els del grup B és força més habitual.

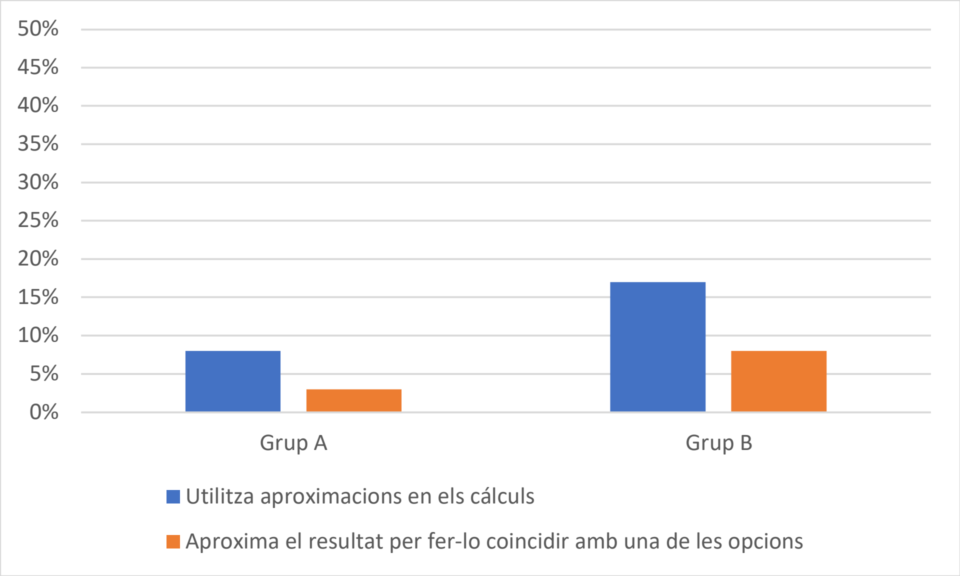


Figura 55 Ús de les aproximacions segons grup

Si mirem aquest ús de les aproximacions segons les condicions de resolució, veiem que els estudiants del grup A ho fan pràcticament de la mateixa manera, és a dir que les condicions del concurs no semblen determinar l'aparició d'aquestes aproximacions, mentre que en el grup B el comportament és molt diferent (Figura 56).

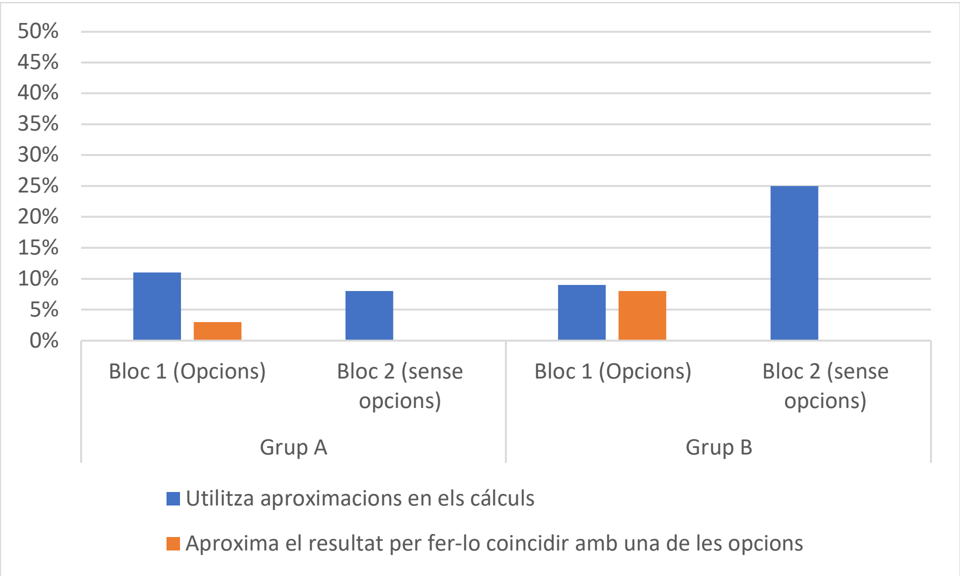


Figura 56 Ús de les aproximacions segons grup i condicions de resolució

Els estudiants del grup B recorren al recurs d'aproximar càlculs en molt major mesura quan no disposen d'opcions de resposta. En els problemes on disposen d'aquestes opcions mostren preferència per altres tipus d'estratègies, sobretot les basades en les pròpies opcions de resposta, mentre que quan no tenen aquest suport sovint mostren incapacitat per treballar amb càlculs exactes i opten per l'ús d'aproximacions que simplifiquin aquests càlculs o que donin més sentit a una resposta.

Capítol 7. Conclusions

En aquest treball hem analitzat algunes característiques del comportament d'estudiants que obtenen bons resultats en el concurs matemàtic de les Proves Cangur, i per tant considerats experts resolutors de problemes de matemàtiques en el context d'aquestes proves. Els aspectes més característics dels problemes plantejats són, per una banda, que ofereixen opcions múltiples de resposta, on l'estudiant sap que una i només una d'elles és correcta, i per altra, la limitació del temps que tenen els estudiants per resoldre la col·lecció de problemes proposats.

Hem definit uns objectius específics per tal d'identificar comportaments en la resolució que puguin ser propis de les condicions del concurs, seleccionant un conjunt de 20 estudiants que han obtingut bons resultats en les Proves Cangur, a qui s'ha demanat que resolguin un conjunt de 16 problemes, la meitat en les condicions específiques de la prova (opcions de resposta i temps limitat) i l'altra meitat sense aquestes condicions (sense opcions de resposta i sense limitar el temps per a la resolució).

Per tal de donar resposta a l'objectiu general d'establir les principals diferències de comportament envers la resolució de problemes entre els alumnes que obtenen bons resultats i els millors, hem dividit la població de l'estudi en dos subgrups, 10 alumnes que havien obtingut les millors posicions en la classificació de les Proves Cangur (posició entre els percentils 99,75% i 100% dels millors classificats) a qui hem anomenat grup A i un altre grup format per estudiants que avien obtingut bons resultats en el concurs (posicions que estan entre els percentils 95% i 96%), identificats com a grup B per tal d'observar les diferències de comportament entre els dos, que donen lloc a l'objectiu general d'aquest estudi.

Les resolucions dels alumnes s’han analitzat amb detall per tal d’establir en primer lloc unes categories que fossin útils per a la recerca, i posteriorment s’han classificat totes aquestes produccions seguint les categories establertes.

Les hipòtesis inicials que van motivar la recerca suposaven que aquests estudiants basaven el seu èxit en les Proves Cangur en un domini important d’estratègies de resolució basades en les opcions de resposta, i en una alta capacitat per intuir la resposta correcta sense necessitat d’una resolució completa del problema. Veurem que aquestes hipòtesis inicials no s’han confirmat del tot en la recerca que presentem.

Per tal d’extreure conclusions de la recerca ens plantejàvem, com dèiem, diversos objectius, que es revisaran en detall en els següents apartats. Els resultats obtinguts en la persecució d’aquests objectius ens permetran extreure conclusions referents a l’objectiu general, que és caracteritzar les diferències de comportament entre els estudiants amb bons resultats i millors resultats en les Proves Cangur a l’hora de resoldre problemes d’opció múltiple i temps limitat.

7.1 Establiment dels nivells de certesa

El primer objectiu pretenia establir uns nivells de certesa basats en l’ús de la intuïció dels estudiants per tal de classificar les seves produccions. Hem analitzat les intuïcions i conjectures que apareixen en les resolucions d'aquests estudiants i hem establert una categorització en cinc nivells que ens permet valorar el grau de certesa que mostren els estudiants respecte a les seves solucions dels problemes. Aquesta certesa està lligada a la completesa de la resolució obtinguda per l’estudiant, considerant que una resolució és completa quan l’estudiant no mostra llacunes en el raonament i per tant la resposta obtinguda és una conseqüència necessària i justificada del procés seguit. La resta de resolucions es consideren incompletes. És en aquestes resolucions incompletes on hem identificat la necessitat de classificar-les per tal de mesurar-ne el grau d’”incompletitut”.

Hem identificat cadascun dels cinc nivells amb els mecanismes que participen en la generació de les intuïcions que apareixen en la resolució diferenciant graus de certesa i evidència (Fischbein, 1987), i explorant també els tipus de visualització que s'associen a cada nivell (Presmeg, 1986). Aquesta categorització proposada per nivells concorda amb la quantitat d'encerts que obtenen els estudiants, de manera que a major nivell de certesa al proposar un resultat, major és la probabilitat que el resultat sigui correcte. Considerem que els nivells establerts són una aportació innovadora d'aquesta investigació, que ha resultat un element útil i efectiu per a la classificació de les resolucions dels alumnes.

7.2 Ús de la intuïció

Quan observem els tipus d'intuïcions que apareixen en cada un dels blocs de problemes i els mecanismes que generen aquestes intuïcions, veiem diferències substancials en les resolucions a problemes amb o sense opcions de resposta. En les condicions del concurs, és molt freqüent que els estudiants no desenvolupin de manera completa les seves resolucions, cosa esperable donat el poc temps de què disposen per a la seva realització. En el segon bloc (sense opcions de resposta i tems no limitat) hem trobat un major percentatge de problemes resolts completament, tot i que les diferències més significatives amb els problemes del bloc 1 (amb opcions de resposta i temps no limitat) no les trobem en el percentatge de resolucions que utilitzen conjectures sinó en el nivell de certesa d'aquestes conjectures. En el primer bloc els estudiants han utilitzat preferentment conjectures amb un nivell baix o molt baix de certesa, mentre que en el segon bloc, tot i que en el problema no s'arribi a una solució completa, els nivells de certesa utilitzats han estat habitualment més grans (Figura 57).

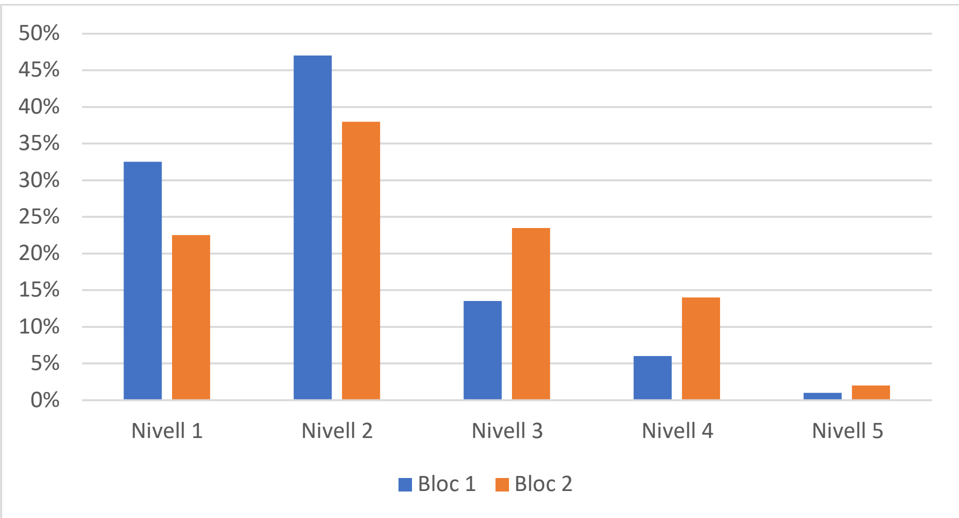


Figura 57 Nivells de certesa en les resolucions dels problemes segons condicions de resolució

Així doncs, aquests resultats indiquen que els alumnes que obtenen bons resultats en les Proves Cangur tendeixen a deixar incompletes resolucions que podrien desenvolupar més al disposar de més temps, o bé que la disposició d'opcions de resposta afavoreix elements de clausura prematura de la resolució en forma d'intuïcions d'anticipació.

Ara bé, quan estudiem en detall els resultats obtinguts per cadascun dels dos grups d'estudiants hi observem diferències importants. Els estudiants del grup A obtenen resolucions completes en molta major proporció que els estudiants del grup B, i utilitzen una certesa en general més alta. Així doncs, els estudiants del grup B fan un ús més habitual de mecanismes de visualització i d'intuïció.

7.3 Ús de les opcions de resposta

Analitzant les resolucions fetes pels estudiants en cada bloc, es constata que l'ús que aquests fan de les opcions de resposta canvia molt en els dos grups de població. En el grup A observem que el fet de disposar d'opcions de resposta no afecta d'una manera important a les decisions que prenen aquests estudiants a l'hora de triar les seves estratègies. Observem que els estudiants han utilitzat les opcions de respostes dels problemes del bloc 1 en un 22% dels problemes (encara que en ocasions les opcions s'utilitzen per triar una resposta quan l'estudiant no troba cap camí raonable cap a la resolució del problema). L'estratègia de resoldre per eliminació apareix en al voltant del 10% dels problemes. Això concorda amb el que s'ha exposat anteriorment, en el sentit que els resultats dels estudiants són més favorables quan poden desenvolupar el problema al complet, donada la seva poca tendència a utilitzar les opcions de resposta.

En el grup B la situació ha estat molt diferent. Els estudiants d'aquest grup han basat la seva resolució dels problemes en les opcions de resposta en un 40% dels problemes resolts en les condicions de les Proves Cangur. Estratègies com descartar opcions que no veuen plausibles per tal de fer-se una millor idea de quina ha de ser la resposta final, i sobretot l'estratègia de resoldre (o intentar resoldre) un problema comprovant si les respostes proposades poden o no ser la resposta correcta apareixen molt freqüentment en les seves resolucions.

7.4 Ús d’heurístiques específiques

D’entre totes les heurístiques que els estudiants poden posar en joc a l’hora de resoldre problemes matemàtics n’hem escollit dues que són les que apareixen en major freqüència en la mostra de dades recollides.

En primer lloc hem analitzat l’ús de casos particulars per tal d’ajudar a la resolució del problema. En general hem vist que aquesta heurística, que no és pròpia de la resolució de problemes amb opció múltiple, és un recurs bastant habitual, sobretot per als alumnes del grup A. Aquests estudiants es mostren hàbils utilitzant aquests casos particulars per a desencadenar raonaments més generals que portin a la resolució d’un problema. Els estudiants del grup B utilitzen aquest recurs en menor proporció. El fet que els estudiants del grup A hagin rebut entrenament molt més específic en la resolució de problemes pot explicar en bona part el fet que aquests disposin de més mecanismes heurístics que els faciliten la resolució. Els estudiants del grup B es mostren més ingenus en la utilització d’aquest recurs, no només perquè ho fen amb menys freqüència sinó que sovint aquesta prova de casos particulars no comporta necessàriament un avenç significatiu cap a l’obtenció de la solució del problema.

L’altre aspecte que hem analitzat per caracteritzar les resolucions dels estudiants és l’ús que aquests fan de les aproximacions en el seu procés de resolució. L’ús d’aquestes aproximacions en general no és molt freqüent, però els estudiants del grup A en particular són molt reticents a acceptar resultats que no siguin iguals als obtinguts en el procés de resolució. Els del grup B mostren menys varietat de recursos heurístics i menys habilitat en el càlcul, pel que són menys rigorosos en els seus procediments.

7.5 Diferències observades en la resolució de problemes amb i sense opcions de resposta

L’ús que els estudiants fan de les opcions de resposta és molt diferent en els dos grups d’estudiants que hem analitzat, com hem exposat a l’apartat 7.3. Així doncs, no ens és possible extreure conclusions sobre aquest aspecte que descriguin una tendència general dels estudiants que hem analitzat en aquest sentit. Els estudiants considerats els millors resolutors de problemes en el context de la recerca no mostren diferències importants en el plantejament i resolució dels problemes, contradient la nostra hipòtesi inicial. Per contra els estudiants del grup B format per estudiants que obtenen bons resultats en la resolució de problemes en el context de les Proves Cangur sí que mostren un comportament com el que preveiem en la nostra hipòtesi, i enfoquen els problemes de manera diferent, mostrant una clara preferència per l'ús de les opcions de resposta. Utilitzen preferentment la comprovació de la validesa de les respostes obtingudes per tal d'identificar-ne la correcta sempre que això és possible, i quan no ho és, mostren una tendència marcada a escollir una de les respostes proposades amb nivells baixos de certesa en la validesa del resultat.

7.6 Conclusions finals

L'objectiu principal d'aquesta recerca és fer-nos una idea de com es comporten els estudiants que mostren bons resultats al concurs matemàtic Proves Cangur davant la resolució de problemes en aquest context, i caracteritzar les principals diferències que s'observen entre estudiants que obtenen bons resultats i aquells que obtenen els millors resultats.

Després d'analitzar alguns aspectes que s'han identificat com a representatius i d'haver arribat a les conclusions dels objectius específics, la nostra principal conclusió és que els dos grups de població estudiats, tot i estar entre el primer 5% de classificats a les Proves Cangur, mostren un comportament molt diferent davant la resolució de problemes, i per tant no es poden treure conclusions genèriques sobre el conjunt d'alumnes que obtenen bons resultats. L'experiència personal com a professor de matemàtiques i com a membre de la Comissió Cangur, i per tant com a persona directament implicada en el procés d'elaboració, implementació i anàlisi dels resultats del concurs, porta a conjecturar que les diferències observades entre aquests dos grups de població d'aquest estudi són més grans de les que hi podria haver entre els estudiants que formen la mostra del grup B i altres estudiants amb pitjors resultats, però això caldrà estudiar-ho en futures investigacions.

Tots els resultats d'aquest estudi ens indiquen que el grup dels millors resolutors de problemes en les condicions estudiades tenen unes característiques excepcionals, no només respecte el conjunt general de la població d'estudiants de la mateixa edat, sinó que també respecte el grup que hem caracteritzat com bons resolutors de problemes. Hi ha diversos motius que poden justificar una diferència tant destacable, com poden ser les altes capacitats matemàtiques que es manifesten en un grup molt reduït de la població, com també l'entrenament específic que aquests alumnes etiquetats com a grup A han rebut específicament en resolució de problemes i la preparació de concursos, tant el més populars com les Proves Cangur com d'altres de major exigència matemàtica com la Olimpíada Internacional de Matemàtiques.

En el context del concurs matemàtic Proves Cangur, els estudiants que obtenen millors puntuacions no modifiquen de manera apreciable els seus patrons de resolució ni les seves actuacions pel fet que els problemes ofereixin opcions de resposta. Són bons resolutors de problemes amb recursos apropiats i els apliquen per dissenyar plans de resolució que parteixen de l'essència del problema i no de l'ús d'estratègies basades en les opcions de resposta donades pels problemes. La seva habilitat no resideix en trobar dreceres mitjançant la utilització de les opcions de resposta, sinó en ser capaços d'intuir i avançar resultats que els evitin haver de resoldre els problemes amb tot detall, però basant-se en enfocaments de la resolució dels problemes que no varien substancialment dels que utilitzen quan no tenen les opcions de resposta disponibles.

Els estudiants que obtenen bones puntuacions sense arribar a les millors posicions mostren un comportament molt diferent als anteriors. Aquests estudiants per una banda es mostren menys experts en les heurístiques pròpies de la resolució de problemes, i arriben a la resposta correcta en molta menor proporció que els primers. Haver-los posat davant d'un conjunt de problemes tots ells de nivell mitjà-alt ha posat de relleu les mancances metodològiques d'aquest grup d'estudiants, o l'excepcionalitat dels primers. Això es tradueix en resolucions menys completes i en l'acceptació de resultats basats en intuïcions pròpies, fonamentades sovint en elements de visualització. Així com hem vist que els estudiants del grup A tenen una aproximació al problema que no està influït per les opcions de resposta, els estudiants del grup B mostren una predilecció especial per utilitzar aquestes opcions com a suport de la seva resolució. En molts casos aquesta resolució està basada directament en les opcions proposades.

És especialment significatiu el fet que els alumnes del grup A milloren els seus resultats quan han resolt problemes sense opció de resposta, gràcies al fet de disposar de més temps per a trobar una resolució completa i així augmentar sensiblement la probabilitat d'obtenir una resposta completa. En canvi els alumnes del grup B mostren uns resultats contraris. Aquests alumnes aconsegueixen gairebé el doble d'encerts en les condicions del concurs gràcies a les opcions de resposta del que ho fan quan no disposen d'aquestes opcions, encara que se'ls doni més temps per resoldre el problema. Els recursos heurístics que mostren són limitats, i els substitueixen per un ús de la intuïció efectiu que els permet obtenir respostes correctes sense disposar de resolucions prou completes.

7.7 Implicacions didàctiques

La resolució de problemes és un camp de recerca amb resultats que comporten profundes implicacions didàctiques. El coneixement que anem obtenint sobre els mecanismes que activen els alumnes en el moment d'enfrontar la resolució d'un problema matemàtic és molt valuós per a la didàctica de les matemàtiques. A les aules de matemàtiques d'avui en dia, almenys en el context català, és molt habitual que s'utilitzin recursos com els problemes proposats en les Proves Cangur per a treballar precisament la dimensió de resolució de problemes. Una preocupació habitual entre el professorat que utilitza aquests recursos és el dubte de com la presentació d'opcions de resposta afecta l'estratègia de resolució del problema i si això pot fer que l'entrenament en aquesta disciplina (la resolució de problemes) sigui menys eficaç. Els resultats del nostre estudi semblen indicar que això no passa amb els estudiants que tenen altes capacitats matemàtiques i que són experts resolutors de problemes, però sí ho fa en els bons alumnes no excepcionals. Per tant, les nostres conclusions ens porten a aconsellar la presentació d'aquest tipus de problemes sense les opcions de resposta per a una pràctica més efectiva de la resolució de problemes. Podem també treballar estratègies basades en aquestes opcions com a raonaments matemàtics interessants, com la comprovació de respostes, que ens pot ajudar a entendre el raonament que s'amaga darrere el plantejament d'un problema, o una discussió de quines opcions poden ser descartades perquè són manifestament incompatibles amb el plantejament del problema. Aquestes estratègies poden complementar la formació en resolució de problemes, però no en són un substitut.

La diferència de comportament i de resultats correctes entre els dos subgrups de població que hem estudiat ens fa reflexionar també sobre la importància de l'entrenament específic que alguns dels alumnes més talentosos reben per tal de preparar-se per a concursos de matemàtiques. Fa anys aquest tipus d'entrenaments era poc freqüent als centres de Catalunya, però avui en dia diverses universitats i altres institucions tenen programes específics per aquest fi. Existeixen sessions de preparació per a les Proves Cangur i l'Olimpíada Matemàtica en universitats com la Universitat Autònoma de Barcelona, la Universitat de Barcelona, la Universitat Politècnica de Catalunya, la Universitat de Lleida i la Universitat Rovira i Virgili. El fet que els estudiants que obtenen les millors puntuacions que han format part del nostre estudi hagin rebut aquest tipus de formacions en tots els casos, i que cap dels estudiants que formaven la mostra d'estudiants amb bons resultats però no els millors hi hagin participat, difícilment pot ser casual. Caldria veure com poden millorar el seu rendiment aquests bons alumnes si tinguessin accés a aquest tipus d'entrenament específic, per tal de veure fins a quin punt el talent matemàtic mostrat per aquests millors alumnes és fruit d'un talent innat o d'un entrenament adequat.

També pot ser interessant el que apunta aquest estudi en relació al canvi de comportament dels alumnes envers els problemes matemàtics quan disposen de temps limitat per a resoldre'ls. El nostre treball no ha estudiat de manera independent el factor de la limitació de temps, però sembla indicar que als estudiants (excepte als més talentosos) els condiciona en el moment de plantejar la resolució d'un problema. Aquest fet és rellevant en els exàmens a què es sotmeten els alumnes a les aules de matemàtiques i en situacions com les Proves d'Accés a la Universitat.

Un altre actor que es pot beneficiar dels resultats d'aquest estudi és la Comissió Cangur encarregada d'organitzar el concurs a nivell mundial. A la introducció ja parlàvem del desconeixement general que sembla haver-hi entre els membres d'aquesta comissió dels mecanismes que posen en marxa els alumnes quan s'enfronten a problemes en les condicions específiques del concurs. L'aproximació que es fa a cada problema sovint es fa des del punt de vista d'un expert resolutor com els propis membres de la comissió, i posant en marxa processos com els que hem observat per al nostre grup de població A, el dels millors estudiants. Però aquest estudi indica que ja des d'un segon nivell d'expertesa els alumnes tendeixen a desenvolupar estratègies de resolució basades en les opcions de resposta, i per tant aquest fet cal tenir-lo en compte a l'hora de dissenyar les proves.

7.8 Limitacions de la recerca i perspectives de futur

La recerca presentada en aquest treball és de tipus exploratori, un primer intent d'aproximació a l'anàlisi de resolució de problemes en un context marcat sobretot per la disponibilitat d'opcions de resposta i la forta limitació del temps per a trobar una resposta correcta. Al no disposar de referències prèvies en aquesta situació, les categories que hem establert per tal d'analitzar les produccions dels alumnes són poques i encara no validades per altres autors, però això obre la porta a noves investigacions que aportin altres punts de vista sobre la resolució de problemes en condicions especials com les del concurs que hem analitzat.

Un altre punt que és interessant investigar amb més deteniment és quines són les conseqüències de limitar el temps de resposta per als estudiants quan resolen un problema, més enllà de si tenen o no opcions de resposta. El nostre estudi suggereix que aquesta limitació de temps desencadena ens els estudiants factors d'intuïció i visualització que substitueixen resolucions més completes. En el nostre cas, això s'ha vist reflectit en una cerca d'estratègies basades en les opcions de resposta, però seria convenient estudiar què passa amb els usos d'aquestes opcions de resposta si el temps no és limitat.

En el nostre instrument de recerca hem utilitzat problemes aritmètics i geomètrics, i aquest primer estudi indica que els mecanismes d'intuïció i visualització actuen de manera bastant diferent en uns i altres. No hem aprofundit més en la caracterització d'aquests factors relacionats amb la temàtica del problema, però l'estudi parcial que hem fet sembla indicar que seria molt interessant analitzar com actuen els mecanismes d'intuïció i sobretot de visualització en problemes aritmètics o geomètrics. Hi ha estudis com el de Presmeg (1986) que analitzen aspectes rellevants de la visualització aplicada a problemes geomètrics, i podria ser interessant desenvolupar aquest camp de recerca amb problemes aritmètics dels estudiants amb altes capacitats matemàtiques en el context de concursos matemàtics.

Per últim, volem que aquest estudi contribueixi al creixement del camp de la recerca de qüestions relacionades amb els concursos matemàtics. Competicions com les Proves Cangur continuen guanyant popularitat, i cada cop més alumnes de tot el món hi participen. Mellroth (2015) ja apunta en la direcció que qüestionaris no estàndard com els problemes de les Proves Cangur són importants en el procés d'avaluació dels estudiants per tal d'identificar aquells que tenen bones aptituds envers les matemàtiques, ja que a vegades aquests estudiants no mostren tan bons resultats en altres proves més estàndard. Creiem que és necessària una recerca més exhaustiva sobre les implicacions didàctiques que aquest tipus d'activitats tenen en els estudiants. Camps com la resolució de problemes, el desenvolupament del talent matemàtic, l'elaboració de materials didàctics de suport per a mestres i professors i altres aspectes més transversals com els estudis de gènere en relació al comportament dels estudiants davant les competicions matemàtiques encara tenen ujn camí llarg per endavant.

Capítol 8. Referències bibliogràfiques

Andrà, C. i Santi, G. (2011). A semiotic characterization of intuitions. A B. Ubuz (ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 113-120). The IGPME.

Applebaum, M. (2017). Spatial abilities as a predictor to success in the Kangaroo contest. *Journal of Mathematics and System Science, 7*, 154-163.

Applebaum, M. i Leikin, R. (2019). Girl's performance in the Kangaroo contest. A M. Nolte (ed.), *The 11th International Mathematical Creativity and Giftedness Conference* (pp. 87-94). The IGMCG.

Assouline, S. G. i Lupkowski-Shoplik, A. (2005). *Developing math talent: a guide for educating gifted and advanced learners in math*. Prufrock Press.

Benbow, C. P. i Arjmand, O. (1990). Predictors of high academic achievement in mathematics and science by mathematically talented students: A longitudinal study. *Journal of Educational Psychology, 82*, 430-441.

Bilican, S., Demirtasli, R. N. i Kilmen, S. (2011). The attitudes and opinions of the students towards mathematics course: the comparison of TIMSS 1999 and TIMSS 2007. *Educational Sciences in Theory and Practice, 11*(3), 1277-1283.

Boaler, J. (2002). *Experiencing school mathematics*. Lawrence Erlbaum.

Brown, S. W., Renzulli, J. S., Gubbins, E. J., Siegle, D., Zhang, W. i Chen, C. (2005). Assumptions underlying the identification of gifted and talented students. *Gifted Child Quarterly, 49*, 68-79.

Cárcamo, A. D., Fortuny, J. M. i Gómez, J. V. (2017). Mathematical modelling and the learning trajectory: tools to support the teaching of linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 48*(3), 338-352.

Carreira, S. i Jacinto, H. (2019). A model of mathematical problem solving with technology: The case of Marco solving-and-expressing two geometry problems. A P. Liljedahl i M. Santos-Trigo (eds.), *Mathematical Problem Solving: Current themes, trends, and research* (pp. 41-62). Springer.

Charles, R. I. i Silver, E. A. (1989). *The teaching and assessing of mathematical problem solving*. Lawrence Erlbaum.

Cheung, P.-H. (1992). Problem solving strategies: research findings from Mathematics Olympiads. *Mathematical Medley, 20*(2), 79-98.

Ching, T. P. (1997). An experiment to discover mathematical talent in a primary school in Kampong Air. *International Reviews on Mathematical Education, 29*(3), 94-96.

Coleman, L. J. i Cross, T. L. (2005). *Being gifted in school* (2nd ed.). Prufrock Press.

Csikszentmihalyi, M. (2000). *Becoming adult: how teenagers prepare for the world of work*. Basic Books.

Deulofeu, J. i Vilallonga, J. (2018). Resolución de problemas y regulación del aprendizaje. *Educatio Siglo XXI, 36*(3), 153-176.

Fiallo, J. i Gutiérrez, A. (2017). Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 145-167.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. D. Reidel.

Foster, C. (2016). Confidence and competence with mathematical procedures. *Educational Studies in Mathematics, 91*(2), 271-288.

Gagne, F. (2005). From noncompetence to exceptional talent: exploring the range of academic achievement within and between grade levels. *Gifted Child Quarterly, 49*(2), 139-153.

García-Honrado, I., Fortuny, J. M., Ferrer, M. i Morera, L. (2016). Análisis del aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje generadas en la discusión en gran grupo de un problema de transformaciones geométricas. A J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández i A. Berciano (eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 253-263). SEIEM.

Giardino, V. (2010). Intuition and visualization in mathematical problem solving. *Topoi, 29*(1), 29-39.

Gutiérrez, A. (1992): Procesos y habilidades en visualización espacial. A A. Gutiérrez (ed.), *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en educación Matemática: Geometría*, pp. 44-59. Sección de Matemática Educativa del CINESTAV.

Gutiérrez, A. i Jaime, A. (2013). Exploración de los estilos de razonamiento de estudiantes con altas capacidades matemáticas. A A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa i N. Climent (eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 319-326). SEIEM.

Halverscheid, S. (2006). Problems that make a difference to kangaroos. A S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz i A. Méndez (eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 333-335). PME-NA.

Hersh, R. (1997). What is mathematics, really? *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 2*, 13-14.

Hong, E. i Aqui, Y. (2004). Cognitive and motivational characteristics of adolescents gifted in mathematics: comparisons among students with different types of giftedness. *Gifted Child Quarterly, 48*, 191–201.

Jaime, A. i Gutiérrez, A. (2017). Investigación sobre estudiantes con alta capacidad matemática. A J. M. Muñoz, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo i J. Carrillo (eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 71-89). SEIEM.

Jiang, P. y Xiong, B. (2021). Analyze the quality of Math Kangaroo problems with a content analysis. *Journal of Physics: Conference Series, 1875*, 012015.

Kantowski, M. G. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education, 8,* 163-180.

Kaufman, J. C. i Beghetto, R. A. (2009). Beyond big and little: the four C model of creativity. *Review of General Psychology, 13*, 1-12.

Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past 25 years of research on teaching mathematical problem solving. A E. A. Silver (ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives* (pp. 1-16). Taylor & Francis.

Kim, H., Cho, S. i Ahn, D. (2003). Development of mathematical creative problem solving ability test for identification of gifted in math. *Gifted Education International, 18*(2), 164-175.

Koichu, B., Berman, A. (2005). When do gifted high school students use geometry to solve geometry problems? *Journal of Secondary Gifted Education, 16*(4), 168-179.

Kontoyianni, K., Kattou, M., Pitta-Pantazi, D. i Christou, C. (2011). Unraveling mathematical giftedness. A M. Pytlak, T. Rowland i E. Swoboda (eds.), *Proceedings of the 7th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1066-1074). ERME.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. University of Chicago Press.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problem of teaching*. Yale University Press.

Leikin, R. i Pitta-Pantazi, D. (2013). Creativity and mathematics education: the state of the art. *ZDM Mathematics Education, 45*(2), 159-166.

Lesh, R. (1985). Conceptual analyses of problem solving performance. A E. A. Silver (ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives* (pp. 309-330). Taylor & Francis.

Lester, F. K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(6), 660-675.

Lester, F. K., Garofalo, J. i Kroll, D. L. (1989). Self-confidence, interest, beliefs, and metacognition: key influences on problem-solving behavior. A D. B. McLeod i V. M. Adams (eds.), *Affect and mathematical problem solving* (pp. 75-88). Springer.

Liljedahl, P. i Santos-Trigo, M. (2019). *Mathematical problem solving: current themes, trends, and research*. Springer.

Maciejewski, W. (2019). Future-oriented thinking and activity in mathematical problem solving. A P. Liljedahl i M. Santos-Trigo (eds.), *Mathematical problem solving: current themes, trends, and research* (pp. 21-38). Springer.

Mann, E. L. (2005). *Mathematical creativity and school mathematics: indicators of mathematical creativity in middle school students* (Tesi Doctoral no publicada). University of Connecticut. https://www.proquest.com/docview/305010927

Mayer, R. E. (1999). Fifty years of creativity research. A R. J. Sternberg (ed.), *Handbook of creativity* (pp. 449-460). Cambridge University Press.

Mellroth, E. (2015). Problem solving competency and the mathematical kangaroo. A K. Krainer i N. Vondrová (eds.) *Proceedings of the 9th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1095-1096). ERME.

Miller, A. L. (2012). Conceptualizations of creativity: comparing theories and models of giftedness. *Roeper Review, 34*, 94-103.

Moliner, R. (2016). *Concursos matemáticos como estimulación y motivación para el aprendizaje de las matemáticas en el alumnado de secundaria* (Treball final de Màster no publicat). Universitat Jaume I. http://hdl.handle.net/10234/164192

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1980). *An Agenda for Action: recommendations for school mathematics of the 1980's*. The National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. The National Council of Teachers of Mathematics.

Ortega, M., Puig, L. i Albarracín, L. (2019). The influence of technology on the mathematical modelling of physical phenomena. A G. A. Stillman i J. P. Brown (eds.), *Lines of inquiry in mathematical modelling research in education* (pp. 161-178). Springer.

Plucker, J. i Beghetto, R. (2004). Why creativity is domain general, why it looks domain specific, and why the distinction does not matter. A R. J. Sternberg, E. L. Grigorenko i J. L. Singer (eds.), *Creativity: from potential to realization* (pp. 153-167). American Psychological Association.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning, Volume 1: induction and analogy in mathematics*. Princeton University Press.

Polya, G. (1962). *Mathematical discovery. On understandind, learning, and teaching problem solving*. John Wiley & Sons.

Presmeg, N. (1986). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics, 6*(3), 42-46.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Comares.

Renzulli, J. S. (1986). The three-ring conception of giftedness: a developmental model for creative productivity. A R. J. Sternberg i J. E. Davidson (eds.), *Conceptions of giftedness* (pp. 51-92). Cambridge University Press.

Renzulli, J. S. (2005). The three-ring conception of giftedness: a developmental model for promoting creative productivity. A R. J. Sternberg i J. E. Davidson (eds.), *Conceptions of giftedness* (pp. 246-279). Cambridge University Press.

Santos-Trigo, M. (2019). Mathematical problem solving and the use of digital technologies. A P. Liljedahl i M. Santos-Trigo (eds.), *Mathematical Problem Solving: Current themes, trends, and research* (pp. 63-89). Springer.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition. A A. H. Schoenfeld (ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189-215). Lawrence Erlbaurm.

Schoenfeld, A. H. (2007). Problem solving in the United States, 1970-2008: research and theory, practice and politics. *ZDM Mathematics Education, 39*(5-6), 537-551.

Senk, S. i Thompson, D. (2003). *Standards-oriented school mathematics curricula: what does the research say about student outcomes*. Lawrence Erlbaurm.

Sriraman, B. (2005). Are mathematical giftedness and mathematical creativity synonyms? A theoretical analysis of constructs. *Journal of Secondary Gifted Education, 17*(1), 20-36.

Sternberg, R. J. (ed.) (1999). *Handbook of creativity*. Cambridge University Press.

Terman, L. M. (1925). *Genetic studies of genius. Mental and physical traits of a thousand gifted children* (Vol. 1). Stanford University Press.

Tjoe, H. (2019). "Looking back" to solve differently: familiarity, fluency, and flexibility. A P. Liljedahl i M. Santos-Trigo (eds.), *Mathematical problem solving: current themes, trends, and research* (pp. 3-20). Springer.

Torregrosa, A., Deulofeu, J. i Albarracín, L. (2020). Caracterización de procesos metacognitivos en la resolución de problemas de numeración y patrones matemáticos. *Educación Matemática, 32*(3), 39-67.

Treffinger, D. J., Young, G. C., Selby, E. C. i Shepardson, C. (2002). *Assessing creativity: a guide for educators*. The National Research Center on the Gifted and Talented, University of Connecticut.

Annex 1: Enunciats de les Proves Cangur dels anys 2012 i 2015 dels nivells de 3r i 4t d'ESO

XVII Cangur SCM — 15 de març de 2012 — Nivell 1

Qüestions de 3 punts:

1. En Josep vol pintar l'eslògan *«VISCA EL CANGUR»* en una paret. Vol que lletres diferents tinguin colors diferents, i que lletres iguals tinguin el mateix color. Quants colors necessitarà?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 11 E) 13

2. Una pissarra fa 6 m d'ample. La part del mig fa 3 m. Les altres dues parts tenen la mateixa amplada. Quina és l'amplada de la part de la dreta?

A) 1 m B) 1,25 m C) 1,5 m D) 1,75 m E) 2 m

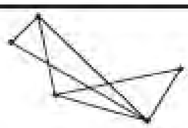
3. La Sílvia pot posar 4 monedes dins un quadrat fet amb 4 llumins (vegeu la imatge). Quants llumins necessita, com a mínim, per a construir un quadrat que contingui 16 monedes que no se superposin?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 15 E) 16

4. En un avió, les files estan numerades de l'1 fins al 25, però la fila número 13 no existeix. La fila número 15 té només 4 seients per a passatgers, mentre que la resta tenen 6 seients per a passatgers. Quants seients per a passatgers hi ha a l'avió?

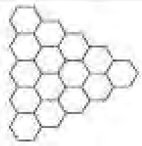
A) 120 B) 138 C) 142 D) 144 E) 150

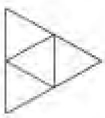
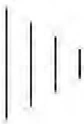
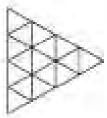
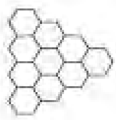
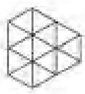
5. Al País de les Meravelles hi ha 5 ciutats. Cada parella de ciutats està connectada per una carretera. Algunes de les carreteres són visibles i d'altres invisibles. Tal com podeu veure a la figura, hi ha 7 carreteres visibles. L'Alícia té unes ulleres màgiques: quan mira el mapa amb aquestes ulleres només veu les que són invisibles. Quantes carreteres veu l'Alícia?



A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 3

6. Quin dibuix obtenim unint els centres de totes les parelles d'hexàgons de la figura de la dreta que tenen algun costat comú?



A)

B)

C)

D)

E)


7. A 6 li sumem 3. A continuació multipliquem el resultat per 2 i després li sumem 1. Com escrivim aquesta operació?

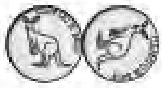
A) $(6+3\cdot 2)+1$ B) $6+3\cdot 2+1$ C) $(6+3)\cdot(2+1)$ D) $6+3\cdot(2+1)$ E) $(6+3)\cdot 2+1$

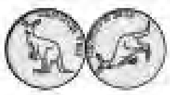
8. Un globus pot arribar a aixecar una cistella que porti, en el seu interior, 80 quilos de pes. Dos globus, del mateix tipus, poden arribar a aixecar la mateixa cistella amb 180 quilos. Quin és el pes de la cistella?

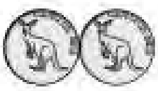
A) 20 kg B) 50 kg C) 30 kg D) 40 kg E) 10 kg

9. La moneda superior gira sense lliscar al voltant de la moneda inferior, que es manté fixa, fins a la posició que s'indica a la figura. Quina és la posició final de les monedes?

A) 

B) 

C) 

D) 

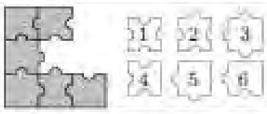
E) Depèn de la velocitat de rotació.

10. La Rita i l'Ovidi han anat a buscar pomes i peres a l'hort de la seva àvia; en total han collit 25 peces de fruita. De camí cap a casa seva, la Rita es menja una poma i tres peres i l'Ovidi es menja tres pomes i dues peres. En arribar a casa seva, veuen que els queden el mateix nombre de peres que de pomes. Quantes peres han agafat de l'hort de la seva àvia?

A) 12 B) 13 C) 16 D) 20 E) 21

Qüestions de 4 punts:

11. Quines són les tres peces del puzle que cal afegir per completar el quadrat?



A) 1, 3, 4 B) 1, 3, 6 C) 2, 3, 5 D) 2, 5, 6 E) 2, 3, 6

12. La Telma té vuit daus. Cada dau té pintada la mateixa lletra, una A, una B, una C o una D en totes les cares. Amb els 8 daus construeix el cub de la figura, en la qual dos daus adjacents (es toquen per una cara) tenen pintades lletres diferents. Quina lletra correspon a l'únic cub del qual no en veiem cap cara?

A) A B) B C) C D) D E) No es pot saber.

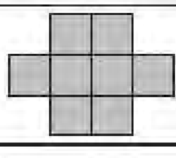
13. Quan són les 4 de la tarda a Londres, són les 5 de la tarda a Manresa, i les 8 del matí del mateix dia a San Francisco. L'Anna va arribar a San Francisco a les 9 del vespre d'ahir. Quina era l'hora a Manresa en aquell moment?

A) Les 6 del matí d'ahir
B) Les 6 de la tarda d'ahir
C) Les 12 del migdia d'ahir
D) Les 12 de la nit
E) Les 6 d'aquest matí

14. Tenim els nombres enters i positius pintats amb els colors roig, blau o verd d'aquesta manera: l'1 de color roig, el 2 de color blau, el 3 de color verd, el 4 de color roig, el 5 de color blau, el 6 de color verd, i així successivament. De quin color pot ser el nombre resultant de sumar un nombre roig amb un nombre blau?

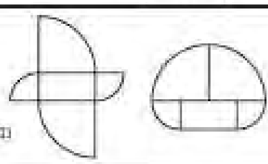
A) Verd B) Roig o blau C) Blau D) Depèn dels nombres. E) Roig

15. El perímetre de la figura, construïda amb quadrats iguals, és de 42 cm. Quina és l'àrea de la figura?



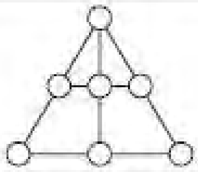
A) 8 cm^2 B) 9 cm^2 C) 24 cm^2 D) 72 cm^2 E) 128 cm^2

16. Les dues figures que hi ha a la dreta estan formades per les mateixes cinc peces. Els costats del rectangle fan 5 cm i 10 cm i les altres peces són quarts de cercle. La diferència entre els perímetres de les dues figures és



A) 2,5 cm B) 5 cm C) 10 cm D) 20 cm E) 30 cm

17. Col·loca les xifres de l'1 al 7 dins dels cercles de la figura, de manera que la suma dels nombres de cada línia sigui la mateixa. Quina xifra hi ha al vèrtex superior del triangle?

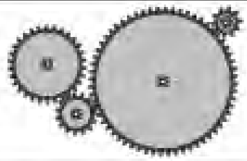


A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

18. Una pilota de goma cau des de la teulada d'una casa de 10 m d'altura. Cada cop que toca a terra rebota fins a arribar als 4/5 de l'altura anterior. Quants cops apareixerà davant d'una finestra que té el marc inferior a 5 m de terra i el marc superior a 6 m?

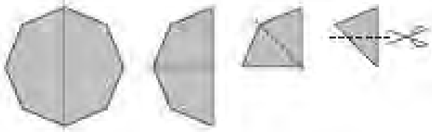
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

19. Tenim quatre rodes dentades que formen un engranatge, tal com es veu al dibuix. La primera té 30 dents, la segona, 15; la tercera, 60, i la quarta, 10. Quantes voltes dóna la quarta roda quan la primera en dóna una?



A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 9

20. Pleguem un octògon regular de paper tres cops seguits, sempre per la meitat del que ens queda, i obtenim un triangle, tal com es mostra al dibuix. A continuació en tallem un tros, de manera que el tall formi un angle recte amb un dels costats iguals, tal com es veu a la figura. Quina de les imatges següents representa millor el que veurem quan despleguem el paper?



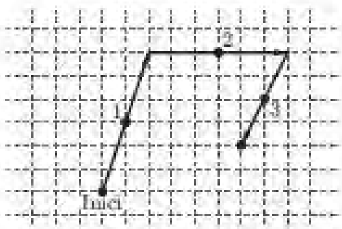
A) B) C) D) E)

Qüestions de 5 punts:

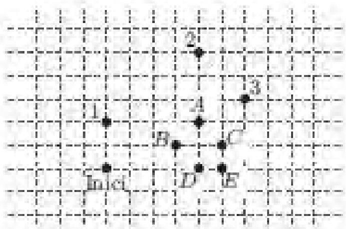
21. La Maria i en Lluís corren al voltant d'una pista circular, de manera que, al principi, comencen en punts diametralment oposats, i corren en el mateix sentit. La velocitat de cursa de la Maria és 9/8 de la velocitat d'en Lluís. Quantes voltes haurà completat en Lluís quan la Maria aconsegueixi atrapar-lo?

A) 2 B) 4 C) 8 D) 9 E) Depèn de la longitud de la pista.

22. Els cangurets Hip i Hop estan jugant a saltar per damunt d'unes pedres de manera que en cada salt que fan deixen la pedra just al mig del segment que representa cada salt. El dibuix 1 mostra els tres salts que ha fet en Hip sobre les pedres 1, 2 i 3. El dibuix 2 mostra on són les pedres 1, 2 i 3 que saltarà en Hop, en aquest ordre, i el punt on començarà. En quin dels punts, A, B, C, D o E anirà a parar en Hop després del tercer salt?



Dibuix 1: Hip



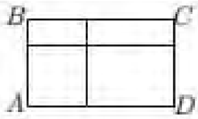
Dibuix 2: Hop

A) A B) B C) C D) D E) E

23. En una festa d'aniversari hi ha 12 criatures que tenen 6, 7, 8, 9 o 10 anys. Si agrupem els assistents per edats, el grup més nombrós és el de 8 anys, i al grup dels de 6 anys hi ha quatre criatures. Quina és la mitjana d'edat de les 12 criatures?

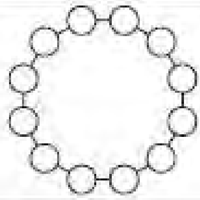
A) 5,5 anys B) 6 anys C) 6,5 anys D) 7 anys E) 7,5 anys

24. Dividim el rectangle $ABCD$ en 4 rectangles, tal com es veu al dibuix. Els perímetres de tres d'aquests rectangles fan 11, 16 i 19 centímetres. El perímetre del quart rectangle no és ni el major ni el menor. Quant fa el perímetre del rectangle inicial $ABCD$?



A) 28 cm B) 30 cm C) 32 cm D) 38 cm E) 40 cm

25. Col·loquem tots els nombres de l'1 al 12 en un cercle, de manera que la diferència entre dos nombres veïns sigui 1 o 2. Quina de les parelles següents pot correspondre a una parella de nombres veïns?

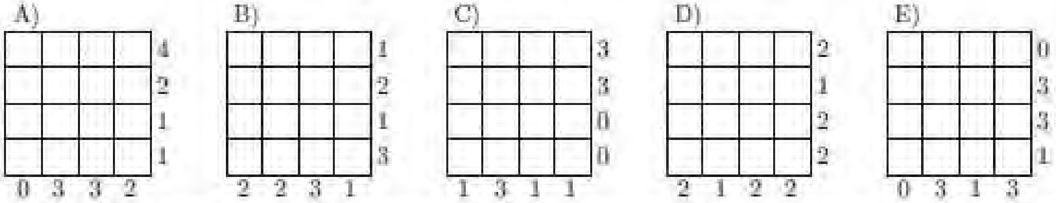


A) 5 i 6 B) 10 i 9 C) 6 i 7 D) 8 i 10 E) 4 i 3

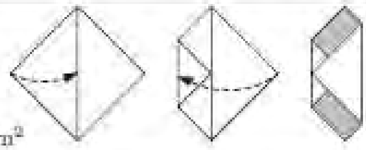
26. En Pere vol obtenir quadrats de costats enters tallant un rectangle de mides 6×7. Quin és el nombre mínim de quadrats que pot aconseguir?

A) 4 B) 5 C) 7 D) 9 E) 3

27. Pintem de color vermell algunes caselles d'una taula 4×4. Després indiquem, al final de cada fila, el nombre de caselles vermelles que té, i fem el mateix a sota de cada columna. A continuació esborrem el color vermell. De les cinc taules següents, quina pot ser la que hem pintat?



28. Dobleguem dues vegades un tros de paper quadrat, tal com mostra el dibuix. Trobeu la suma de les àrees dels rectangles ombrejats, si sabem que l'àrea del quadrat original és 64 cm^2.



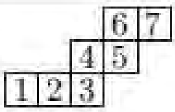
A) 10 cm^2 B) 14 cm^2 C) 15 cm^2 D) 16 cm^2 E) 24 cm^2

29. Els números de tres cases del meu carrer estan formats amb les mateixes xifres, cap de les quals és igual a 0: abc, bc, c. Si la suma dels números d'aquestes tres cases és 912, quin és el valor de b?

$$\begin{array}{r} abc \\ +\ bc \\ +\ c \\ \hline 912 \end{array}$$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 0

30. Un cub rodola pas a pas en el pla tot girant sobre les arestes. La cara inferior passa per les posicions 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7, en aquest ordre. En quines d'aquestes dues posicions la cara inferior del cub és la mateixa?



A) 1 i 7 B) 1 i 6 C) 1 i 5 D) 2 i 7 E) 2 i 6

XVII Cangur SCM — 15 de març de 2012 — Nivell 2

Qüestions de 3 punts:

1. Quatre rajoles de xocolata costen 6 € més que només una rajola de xocolata. Quant costa cada rajola?

A) 1 € B) 2 € C) 3 € D) 4 € E) 5 €

2. L'Andreu juga amb la calculadora i escriu $11{,}11 - 1{,}111$. Quin resultat apareixerà a la calculadora?

A) 9,999 B) 9,99 C) 9,009 D) 9,0909 E) 10

3. Un rellotge és a sobre d'una taula de cara enlaire, i la busca minutera assenyala el nord-est. Quants minuts han de passar fins que aquesta busca assenyali el nord-oest per primera vegada?

A) 45 minuts B) 40 minuts C) 30 minuts D) 20 minuts E) 15 minuts

4. La Mireia té unes tisores i cinc lletres de cartolina. Talla cada una de les lletres només una vegada seguint una línia recta, per tal d'obtenir tants trossos com sigui possible. Amb quina lletra obté el màxim nombre de trossos?

A) B) C) D) E)

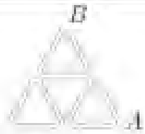
5. Un drac té 5 caps. Cada vegada que se li talla un cap, li'n creixen cinc de nous. Si tallem, d'un en un, sis caps del drac, quants caps acabarà tenint?

A) 25 B) 28 C) 29 D) 30 E) 35

6. En quina de les expressions següents podem reemplaçar cada aparició del nombre 8 per un altre nombre positiu, diferent del 8, sense que en canviï el resultat?

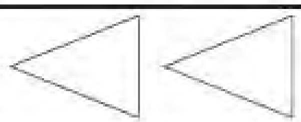
A) $(8+8):8+8$ B) $8\cdot(8+8):8$ C) $8+8-8+8$ D) $(8+8-8)\cdot 8$ E) $(8+8-8):8$

7. El dibuix representa un parc i cada un dels 9 camins que hi veieu fa 100 m de llarg. L'Anna vol anar des de A fins a B sense passar més d'un cop per un mateix camí. Quant fa el camí més llarg que pot triar?



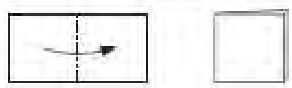
A) 900 m B) 800 m C) 700 m D) 600 m E) 400 m

8. Aquí teniu dos triangles. De quantes maneres podeu triar dos vèrtexs, un de cada triangle, de manera que la recta que els uneixi no talli cap dels triangles?

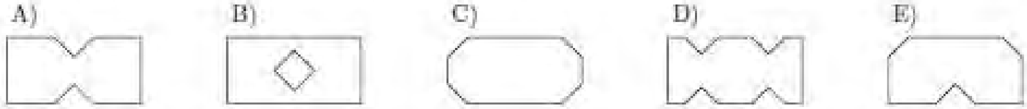


A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Més de 4

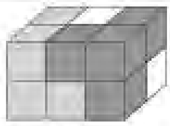
9. L'Andreu doblega un full de paper, tal com mostra la figura, i amb unes tisores hi fa dos talls rectilinis. Després, desplega el full de paper. Quina de les figures següents no es pot obtenir com a resultat?



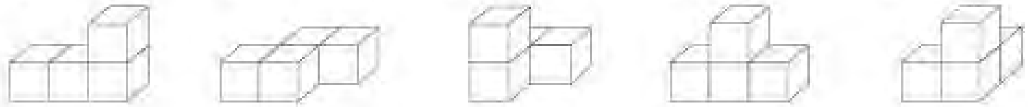
A) B) C) D) E)



10. Un ortoedre està fet amb tres peces, tal com indica el dibuix. Cada peça està formada per 4 cubs, tots del mateix color. Quina de les peces següents correspon a la peça blanca?



A) B) C) D) E)

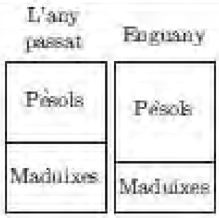


Qüestions de 4 punts:

11. Utilitzant totes les xifres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 8 només una vegada, formem dos nombres de quatre xifres tals que la seva suma és la menor possible. Quin és el valor d'aquesta suma possible?

A) 3825 B) 3333 C) 2468 D) 6912 E) 4734

12. La senyora Jardí té sembrats pèsols i maduixes en un terreny. Enguany ha canviat la part dels pèsols de rectangular a quadrada allargant 3 metres un dels seus costats. En conseqüència, la part de les maduixes ha esdevingut 15 m^2 més petita. Quina era l'àrea de la part dels pèsols l'any passat?



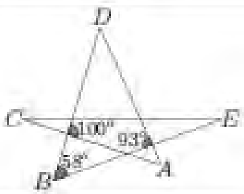
A) 5 m^2 B) 9 m^2 C) 10 m^2 D) 15 m^2 E) 18 m^2

13. Na Bàrbara vol completar el següent diagrama mitjançant la inserció de tres nombres, un a cada cel·la buida. Si vol que la suma dels tres primers nombres sigui 100, la suma dels tres del mig sigui 200 i la suma dels tres últims nombres sigui 300, quin nombre ha d'inserir na Bàrbara en el centre del diagrama?

10				130

A) 50 B) 60 C) 70 D) 75 E) 100

14. La figura mostra un pentàgon estrellat, amb la situació de tres angles de 58°, 93° i 100°. Quin és el valor de l'angle del vèrtex A?

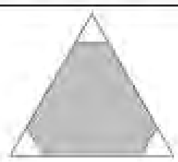


A) 51° B) 65° C) 109° D) 42° E) 35°

15. A cadascuna de quatre targetes hi ha escrits un dels nombres 2, 5, 7 i 12 en una de les seves cares. A l'altra cada hi ha escrit un dels textos «divisible per 7», «primer», «senar», «més gran que 100». Se sap que el nombre escrit en una cara de la targeta *no es correspon* amb el text de l'altra cara. Quin nombre hi ha escrit a la targeta amb la frase «més gran que 100»?

A) 2 B) 5 C) 7 D) 12 E) No es pot saber.

16. Tenim un triangle equilàter de 6 cm de costat, del qual, en els seus vèrtexs, tallem tres triangles equilàters de la mateixa mida. La suma dels perímetres dels tres triangles tallats és igual al perímetre de l'hexàgon que en resulta (ombrejat gris a la figura). Quina és la longitud de cada costat dels triangles petits?



A) 1 cm B) 1,2 cm C) 1,25 cm D) 1,5 cm E) 2 cm

17. Hem tallat un formatge a trossos. Els ratolins roben trossos durant tot el dia. El moix mandrós Nico s'adona que cada ratolí roba un nombre diferent de trossos inferior a 10 i que cap ratolí roba exactament el doble de trossos que els altres ratolins. Com a màxim, quants ratolins pot haver observat en Nico?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

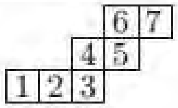
18. A l'aeroport hi ha una cinta transportadora de 500 m de longitud que es mou a una velocitat de 4 km/h. N'Aina i n'Oriol pugen junts a la cinta transportadora. N'Aina camina sobre la cinta a una velocitat de 6 km/h i n'Oriol es queda quiet. A quina distància es troba n'Aina de n'Oriol quan ella surt de la cinta?

A) 100 m B) 160 m C) 200 m D) 250 m E) 300 m

19. El costat original d'un quadrat que parla era de 8 cm. Si el quadrat diu la veritat, el seu costat es fa 2 cm més curt. Si menteix, el seu perímetre es duplica. De les quatre frases que ha dit, dues són vertaderes i dues falses, però no sabem quin és l'ordre. Quin és el màxim perímetre possible del quadrat després de les quatre frases?

A) 28 cm B) 80 cm C) 88 cm D) 112 cm E) 120 cm

20. Un cub rodola pas a pas en el pla tot girant sobre les arestes. La cara inferior passa per les posicions 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7, en aquest ordre. En quines dues d'aquestes posicions la cara inferior del cub és la mateixa?



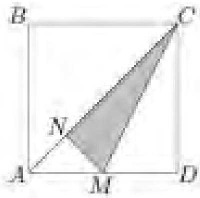
A) 1 i 7 B) 1 i 6 C) 1 i 5 D) 2 i 7 E) 2 i 6

Qüestions de 5 punts:

21. En Ricard té 5 cubs. Quan els ordena de més petit a més gran, la diferència d'altures de dos cubs veïns és de 2 cm. L'altura del cub més gran coincideix amb la de la torre formada pels dos cubs més petits. Quina és l'altura de la torre formada pels cinc cubs?

A) 6 cm B) 14 cm C) 22 cm D) 44 cm E) 50 cm

22. Calculeu la raó entre l'àrea de la regió gris (triangle MNC) i l'àrea del quadrat $ABCD$, si M és el punt mitjà de AD i MN és perpendicular a AC.



A) 1:6 B) 1:5 C) 7:36 D) 7:40 E) 3:16

23. El tango es balla per parelles, un home i una dona. En una festa no hi ha més de 50 persones. En un cert moment, 3/4 dels homes ballen amb 4/5 de les dones. Quantes persones ballen en aquell moment?

A) 20 B) 24 C) 30 D) 32 E) 46

24. En David vol col·locar els dotze nombres de l'1 al 12 en una circumferència, de manera que la diferència entre dos nombres veïns sigui 2 o 3. Quins dels nombres següents han de ser veïns?

A) 5 i 8 B) 3 i 5 C) 7 i 9 D) 6 i 8 E) 4 i 6

25. Hi ha alguns nombres de tres xifres amb la propietat següent: si els traiem la primera xifra obtenim un quadrat perfecte, i si els traiem la darrera xifra també obtenim un quadrat perfecte. Quant sumen tots els nombres que tenen aquesta curiosa propietat?

A) 1013 B) 1177 C) 1465 D) 1993 E) 2016

26. Un llibre conté 30 relats. Les llargades dels relats són diferents: 1, 2, 3, …, 30 pàgines, no necessàriament en aquest ordre. Cada relat comença en una pàgina nova. El primer relat comença a la pàgina número 1. Com a màxim, quants relats poden començar en pàgines senars?

A) 15 B) 18 C) 20 D) 21 E) 23

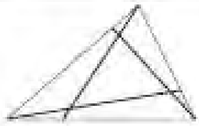
27. Fem rotacions d'un triangle equilàter al voltant del seu centre, primer de 3°, després, a partir de la posició obtinguda, de 9°, després de 27° més, i successivament, en el pas n es fa una rotació de $(3^n)^\circ$, sempre a partir de la posició anterior. Quantes posicions diferents, tot comptant la posició inicial, es poden aconseguir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 360

28. Una corda es plega per la meitat, a continuació es torna a plegar per la meitat, i encara es torna a plegar una altra vegada, també per la meitat. Després s'hi fa un tall i en resulten diferents fragments. Dos d'aquests trossos tenen una llargada de 9 m i de 4 m. Quin dels valors següents no pot ser la longitud de la corda sencera?

A) 52 B) 68 C) 72 D) 88 E) Totes les respostes són possibles.

29. Tres segments divideixen un triangle en quatre triangles més petits i tres quadrilàters. La suma dels perímetres dels tres quadrilàters és igual a 25 cm. La suma dels perímetres dels quatre triangles petits és 20 cm. El perímetre del triangle inicial és de 19 cm. Quant és la suma de les longituds dels segments?



A) 13 cm B) 12 cm C) 15 cm D) 11 cm E) 16 cm

30. Una graella 3×3 s'omple amb nombres positius, de manera que el producte dels nombres de cada fila i de cada columna és 1, i el producte dels quatre nombres de qualsevol graella 2×2 és 2. Quin és el nombre que hi haurà a la casella central de la graella?

A) 16 B) 8 C) 4 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{8}$

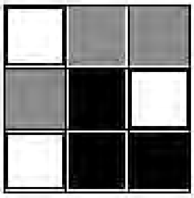
XX Cangur SCM — 19 de març de 2015 — Nivell 1

Qüestions de 3 punts

1. Cada dia l'Ada anota la data de la mateixa manera i calcula la suma de les xifres que ha escrit. Així, avui, 19 de març, ha escrit 19/03 i ha calculat $1+9+0+3=13$. En un any, quin és el resultat de la suma més gran que pot calcular?

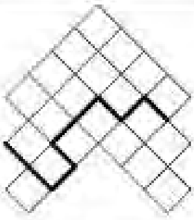
A) 7 B) 13 C) 14 D) 16 E) 20

2. En David ha pintat els nou quadrats de la figura amb els colors negre, blanc i gris. Quants quadrats, com a mínim, ha de repintar d'un altre color per a aconseguir que cap dels quadrats que tenen un costat comú no tinguin el mateix color?



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

3. Cada quadradet de la figura té una àrea de 4 cm^2. Quina és la longitud de la línia negra més gruixuda?



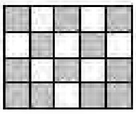
A) 16 cm B) 18 cm C) 20 cm D) 21 cm E) 23 cm

4. Tenim dos sacs de patates. Si els posem junts en un plat d'una balança s'equilibren amb 80 kg en l'altre plat. Si en posem un a cada plat de la balança hem d'afegir 20 kg en un dels plats per a equilibrar la balança. Quant pesa el sac més pesant?

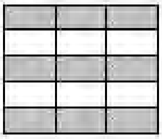
A) 20 kg B) 30 kg C) 40 kg D) 50 kg E) 60 kg

5. Quina de les figures té una part ombrejada en una proporció diferent de totes les altres?

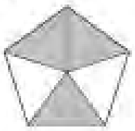
A)



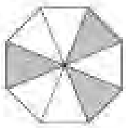
B)



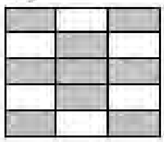
C)



D)



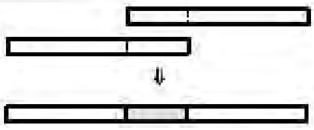
E)



6. Cada branca d'un arbust té o bé set fulles o bé quatre fulles i una flor. Quantes branques té l'arbust si en total hi ha 9 flors i 120 fulles?

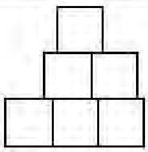
A) 23 B) 21 C) 20 D) 18 E) 15

7. La Teresa té quatre tires de paper iguals. Enganxa dues d'aquestes tires superposant 10 cm de cada tira i així obté una tira de 50 cm. Amb les altres dues vol fer una tira de 56 cm. Quina longitud de cada tira haurà de superposar?



A) 4 cm B) 6 cm C) 8 cm D) 10 cm E) 12 cm

8. Quin és el perímetre de la figura si hi ha dibuixats 6 quadrats de costat 1.

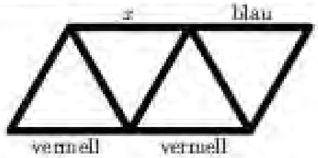


A) 11 B) 12 C) 13 D) 9 E) 10

9. Els famosos germans Dalton, tenen alçades diferents. L'Averell és el més alt, després ve en Jack que és el segon més alt, en William és el tercer en alçada i en Joe és el més baix. La diferència d'estatura entre l'Averell i en Jack, entre en Jack i en William, i entre en William i en Joe és la mateixa. En Joe fa 160 cm d'alçada. La mitjana d'estatura dels quatre germans és 178 cm. Quina alçada fa en Jack?

A) 184 cm B) 196 cm C) 172 cm D) 166 cm E) 162 cm

10. Cada un dels nou segments de la figura s'ha de pintar de color blau, verd o vermell. Els tres costats de cada triangle han de tenir els colors diferents. Tres dels segments ja tenen el color definit en la figura. De quin color es pot pintar el segment marcat amb la x?



A) Només blau B) Només verd C) Només vermell D) De qualsevol color E) De cap color

Qüestions de 4 punts

11. S'ha creat una nova peça per al joc d'escacs, el cangur. El *cangur* pot fer, sense sortir del taulell, qualsevol dels vuit moviments que mostra la figura 1. Quin és el nombre mínim de moviments que necessita el *cangur* per a anar de la casella que ocupa en el tauler de la figura 2 fins a la que està marcada amb la lletra A?

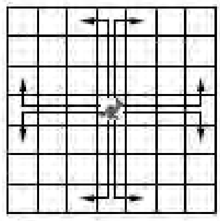


Figura 1

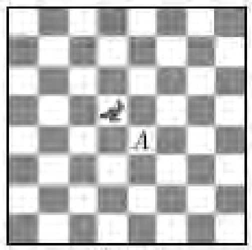


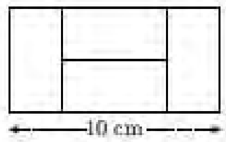
Figura 2

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

12. L'àrea d'un rectangle és 12 cm^2. Les longituds dels costats són nombres enters. Quin dels valors següents no pot ser el perímetre d'aquest rectangle?

A) 14 cm B) 16 cm C) 26 cm D) 24 cm E) Tots els valors anteriors són possibles.

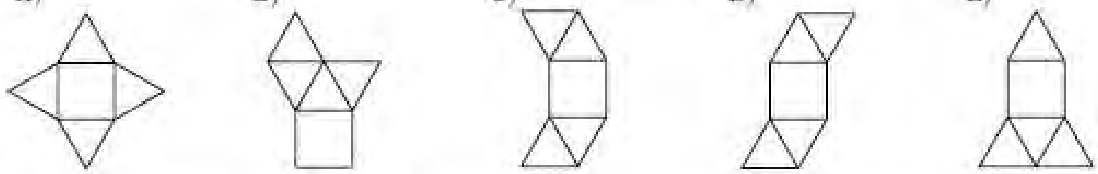
13. El rectangle gran de la figura es compon de quatre rectangles més petits, tots iguals. Si la longitud del costat llarg del rectangle gran és 10 cm, quina és la longitud del costat curt d'aquest rectangle gran?



A) 4 cm B) 6 cm C) 2,5 cm D) $3,\overline{3}$ cm E) 5 cm

14. Quin d'aquests cinc croquis no es pot plegar en forma de piràmide?

A) B) C) D) E)



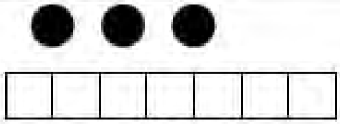
15. En el carrer del Bot hi ha nou cases en fila. A cada casa hi viu, com a mínim, una persona. Qualsevol parella de cases veïnes és habitada, en conjunt, per sis persones, com a màxim. Quin és el màxim de persones que poden viure al carrer del Bot?

A) 29 B) 31 C) 23 D) 25 E) 27

16. Na Mercè i la seva mare van néixer pel gener. Avui, 19 de març de 2015, na Mercè suma l'any del seu naixement, l'any de naixement de la seva mare, la seva edat i l'edat de la seva mare. Quin resultat obté?

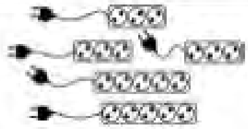
A) 4029 B) 4030 C) 4028 D) 4032 E) 4031

17. De quantes maneres es poden col·locar tres fitxes iguals en tres caselles diferents de la figura si no hi pot haver dues fitxes en caselles veïnes (amb un costat comú)?



A) 11 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

18. Disposem de tres allargadors amb tres preses de corrent cadascun i de dos allargadors amb cinc preses de corrent en cada un. A la paret només hi ha un endoll per a connectar els allargadors al corrent. Si connectem els allargadors de manera que en tots hi hagi corrent, de quantes preses de corrent podem arribar a disposar?



A) 14 B) 15 C) 19 D) 18 E) Depèn de com els connectem.

19. En un cistell hi ha 3 pomes verdes, 5 pomes grogues, 7 peres verdes i 2 peres grogues. L'Arcadi en treu a l'atzar les fruites d'una en una. Quantes fruites ha de treure per a estar segur que haurà tret una poma i una pera del mateix color?

A) 13 B) 12 C) 10 D) 11 E) 9

20. Hem multiplicat 100 o bé per 3 o bé per 2; al resultat obtingut, li hem sumat 2 o 1; i aquest nou resultat l'hem dividit per 4 o per 3. El resultat final és un nombre enter. Quin és aquest resultat final?

A) 50 B) 51 C) 67 D) 68 E) No hi ha un únic resultat final possible.

Qüestions de 5 punts

21. En la suma de la figura, lletres iguals representen xifres iguals i lletres diferents, xifres diferents. Quina xifra representa la lletra X?

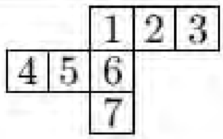
$$\begin{array}{r} X \\ +\quad X \\ +\ YY \\ \hline ZZZ \end{array}$$

A) 2 B) 3 C) 6 D) 4 E) 5

22. La Joana ha comprat tres joguines. Per la primera joguina ha pagat la meitat dels diners que tenia i 1 € més. Per la segona joguina ha pagat la meitat dels diners que li quedaven i 2 € més. Finalment, per la tercera joguina ha pagat la meitat dels diners que encara tenia i 3 € més, i així s'ha gastat tots els diners que tenia. Quants diners tenia inicialment?

A) 45 € B) 34 € C) 36 € D) 65 € E) 100 €

23. La Carla vol construir un cub doblegant un desenvolupament dibuixat en un paper. Per error fa una figura amb set quadrats en el full de paper en comptes de sis. Quin quadrat pot eliminar de manera que la figura continuï connectada i que en pugui construir un cub?



A) Només el 4 B) Només el 7 C) Només el 3 i el 4
D) Només el 3 i el 7 E) Només el 3, el 4 i el 7

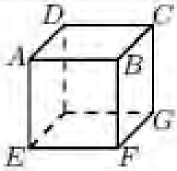
24. Quines són les darreres dues xifres del nombre $9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{999\ldots99}_{2015\ xifres}$?

A) 15 B) 25 C) 35 D) 65 E) 95

25. En un nombre de quatre xifres diferents, $ABCD$, les xifres A, B, C i D estan col·locades en ordre creixent d'esquerra a dreta. Quina és la diferència més gran que hi pot haver entre els nombres de dues xifres BD i AC?

A) 86 B) 56 C) 50 D) 16 E) 61

26. La Maria escriu un número en cada cara d'un cub. Després, per cada vèrtex, suma els nombres corresponents a les tres cares que comparteixen aquest vèrtex (per exemple, pel vèrtex B suma els nombres escrits a les cares $BCDA$, $BAEF$ i $BFGC$). Els nombres calculats per la Maria per als vèrtexs C, D i E són 14, 16 i 24, respectivament. Quin nombre ha calculat per al vèrtex F?

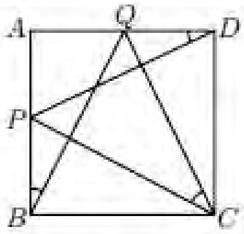


A) 15 B) 22 C) 24 D) 26 E) 19

27. Un tren té 12 cotxes de viatgers. Cada cotxe té el mateix nombre de compartiments i estan numerats de manera consecutiva i única en tot el tren. En Miquel viatja en el tercer cotxe i en el divuitè compartiment des de la locomotora. La Jana seu en el setè cotxe i en el cinquantè compartiment des de la locomotora. Quants compartiments hi ha en cada cotxe?

A) 9 B) 10 C) 12 D) 8 E) 7

28. En un quadrat $ABCD$, el punt P és un punt del costat AB que satisfà $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{2}$ (la figura no està dibuixada a escala). Similarment, el punt Q és un punt del costat DA que compleix $\frac{DQ}{QA} = \frac{1}{2}$. Quina és la suma dels angles $\widehat{QBA}$, $\widehat{QCP}$ i $\widehat{QDP}$?



A) 60° B) 75° C) 90° D) 102° E) 66°

29. En una línia recta es marquen quatre punts, les distàncies entre els quals són, en ordre creixent, 2, 3, k, 11, 12 i 14. Quin valor té k ?

A) 5 B) 7 C) 8 D) 9 E) 6

30. En Bernat ha construït un cub de costat 4 amb cubs petits, blancs, de costat 1. Després, ha pintat tres cares del cub gran de color vermell i les altres tres cares de color blau. En acabar, no hi havia cap cub petit amb tres cares vermelles. Quants cubs petits tenen, simultàniament, alguna cara vermella i alguna cara blava?

A) 8 B) 16 C) 12 D) 24 E) 32

Generalitat de Catalunya
Departament
d'Ensenyament
Fundació Privada
CELLEX

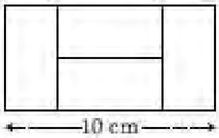
XX Cangur SCM — 19 de març de 2015 — Nivell 2

Qüestions de 3 punts

1. Quins dels nombres següents no és un nombre enter?

A) $\frac{2013}{3}$ B) $\frac{2012}{2}$ C) $\frac{2015}{5}$ D) $\frac{2011}{1}$ E) $\frac{2014}{4}$

2. El rectangle gran de la figura es compon de quatre rectangles més petits, tots iguals. Si la longitud del costat llarg del rectangle gran és 10 cm, quina és la longitud del costat curt d'aquest rectangle gran?

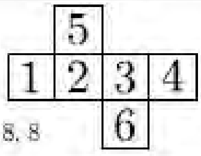


A) 5 cm B) 2,5 cm C) 6 cm D) 3,33 cm E) 4 cm

3. Un triangle té costats de longitud 2001, 2014 i 2015. Quina seria la longitud del costat d'un triangle equilàter que tingués el mateix perímetre que el triangle donat?

A) 2010 B) 2008 C) 2006 D) 2014 E) 2009

4. El diagrama mostra el desenvolupament d'un cub amb les cares numerades. En Tomeu suma correctament els nombres de les cares oposades del cub. Quins tres resultats ha obtingut en Tomeu?

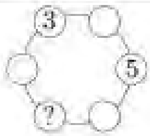


A) 4, 6, 11 B) 5, 7, 9 C) 5, 6, 10 D) 4, 5, 12 E) 5, 8, 8

5. Un arbust té 10 branques. Cada branca té o bé 5 fulles o bé només 2 fulles i una flor. Quina de les respostes següents podria ser el nombre total de fulles que té l'arbust?

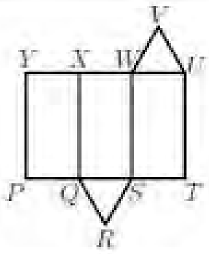
A) 37 B) 39 C) 31 D) 45 E) Cap de les anteriors

6. En Pau vol escriure un nombre enter en cadascun dels cercles buits de la figura, de manera que cada nombre sigui la suma dels seus dos veïns. Quin nombre ha d'escriure en Pau en el cercle amb el signe d'interrogació?



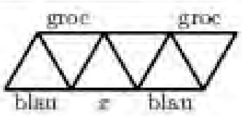
A) -5 B) 5 C) -8 D) 3 E) -3

7. El diagrama mostra el desenvolupament d'un prisma triangular. Quan es construeixi el prisma, amb quins punts coincidiran, respectivament, els punts U i V?



A) R i S B) W i X C) Y i X D) X i Y E) X i W

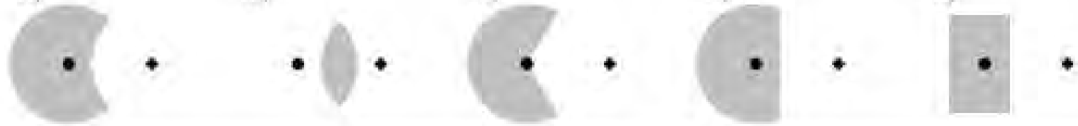
8. En el dibuix s'indica el color de quatre dels costats dels triangles que formen una sanefa. En Lluís pretén pintar els altres costats de color vermell, blau o groc de manera que tots els triangles tinguin un costat de cada color. De quin color pot pintar el costat marcat amb una x?



A) Només blau B) Només groc C) Vermell o blau D) Només vermell
E) El que es pretén és impossible.

9. Quan l'esquirol Simó baixa de l'arbre a terra, mai no s'allunya més de 5 m del tronc de l'arbre. Tampoc no s'acosta mai a menys a 5 m de la caseta del gos. Quina de les imatges següents mostra, amb més precisió, la forma de la zona de terra on es mou en Simó?

A) B) C) D) E)



10. Un ciclista va a una velocitat de 5 m/s. Les rodes de la seva bicicleta tenen una circumferència de 125 cm. Quantes voltes completes fa cada roda en 5 segons?

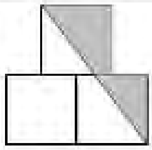
A) 20 B) 4 C) 25 D) 10 E) 5

Qüestions de 4 punts

11. En una classe, no hi ha cap parella de nens que hagi nascut el mateix dia de la setmana i no hi ha cap parella de nenes que hagi nascut el mateix mes. Quan un nen nou o una nena nova s'incorporin a aquesta classe, una d'aquestes dues condicions deixarà de ser certa. Quants alumnes hi ha a la classe?

A) 20 B) 19 C) 25 D) 18 E) 24

12. En la figura, el quadrat de dalt està centrat respecte dels dos quadrats de baix. Cada quadrat té costats de longitud 1. Quina és l'àrea de la regió ombrejada?



A) $\frac{7}{8}$ B) 1 C) $1\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $1\frac{1}{4}$

13. Cada asterisc de la igualtat $2 * 0 * 1 * 5 * 2 * 0 * 1 * 5 * 2 * 0 * 1 * 5 = 0$ es vol substituir per un signe $+$ o $-$ de manera que la igualtat sigui correcta. Quin és el mínim nombre d'asteriscs que ha de ser reemplaçat amb $+$?

A) 2 B) 5 C) 1 D) 4 E) 3

14. Durant una tempesta, van caure 15 litres d'aigua per metre quadrat. Quin va ser l'augment del nivell de l'aigua en una piscina de competició a l'aire lliure?

A) Depèn de la mida de la piscina. B) 150 cm C) 1,5 cm D) 15 cm E) 0,15 cm

15. En la figura es veuen tres cares adjacents d'un cub, que mostren els nombres 5, 7 i 12. Les tres cares del cub que no veiem tenen escrits tres nombres que sumen el mateix que els de les tres cares visibles. A més, sabem que les sumes de nombres en les tres parelles de cares oposades són iguals. Quin nombre té la cara oposada al 7?

A) 9 B) 10 C) 4 D) 5 E) 11

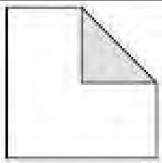
16. La mitjana de les puntuacions d'un examen de matemàtiques és 6. L'han aprovat exactament el 60% dels estudiants, amb una mitjana de 8. Quina ha estat la puntuació mitjana dels que no l'han aprovat?

A) 1 B) 4 C) 3 D) 2 E) 5

17. L'Agnès suma les longituds de tres costats d'un rectangle i li dóna 44 cm. En Miquel suma també les longituds de tres costats del mateix rectangle i n'obté 40 cm. Quin és el perímetre d'aquest rectangle?

A) 64 cm B) 56 cm C) 112 cm D) 42 cm E) 84 cm

18. Es plega un angle d'un quadrat fent que el vèrtex coincideixi amb el centre i, així s'obté un pentàgon irregular. Les àrees del pentàgon i del quadrat són nombres enters consecutius. Quina és l'àrea del quadrat?



A) 4 B) 32 C) 2 D) 16 E) 8

19. Les edats de l'Anna, en Biel, la Cinta i en David són 3, 8, 12 i 14 anys, en algun ordre. La suma de les edats de l'Anna i en David és múltiple de 5 i la suma de les edats d'en David i la Cinta és també múltiple de 5. Quina és la suma de les edats d'en Biel i en David?

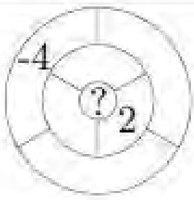
A) No es pot saber. B) 11 C) 26 D) 22 E) 17

20. La Mercè pregunta a cinc alumnes quants d'ells han estudiat el dia abans. Malgrat que tots cinc saben qui ha estudiat i qui no, en Pol respon: «Cap»; la Berta diu: «Només un»; l'Ona: «Exactament dos»; l'Eugeni: «Exactament tres», i en Gerard: «Exactament quatre». La Mercè sap que qui ha estudiat ha dit la veritat mentre que qui no ha estudiat ha mentit. Quants alumnes han estudiat el dia abans?

A) 0 B) 3 C) 2 D) 4 E) 1

Qüestions de 5 punts

21. La Isabel vol escriure un nombre en cada una de les set regions del dibuix. Dues regions són veïnes si comparteixen part de la seva frontera. En cada regió el nombre és la suma dels nombres de totes les regions veïnes. La Isabel ja ha posat els nombres de dues regions, tal com mostra el dibuix. Quin nombre haurà d'escriure en la regió central?

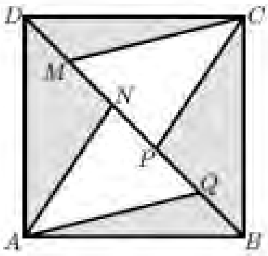


A) 6 B) -2 C) 0 D) 1 E) -4

22. Tenim cinc targetes i en cada una escrivim un nombre enter positiu. En Pere suma els nombres de les targetes, de dues en dues, de totes les maneres possibles i obté només tres resultats diferents, 57, 70 i 83. Quin és el nombre més gran que hi ha a les targetes?

A) 42 B) 48 C) 35 D) 53 E) 82

23. Un quadrat $ABCD$ té àrea 30 cm^2. Sobre la diagonal DB marquem quatre punts M, N, P i Q que la divideixen en cinc segments com es mostra al croquis orientatiu. Sabem les àrees dels quatre triangles ombrejats: el triangle $\triangle ABQ$ fa 4 cm^2; el triangle $\triangle BCP$ fa 9 cm^2; el triangle $\triangle CDM$ fa 2 cm^2 i el triangle $\triangle DAN$ fa 5 cm^2. Quina de les cinc parts de la diagonal és la més llarga?



A) DM B) PQ C) NP D) MN E) QB

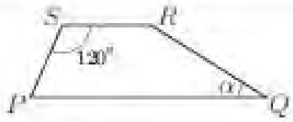
24. En un grup de cangurs, els dos més lleugers, junts, pesen un 25 % del pes total del grup. Els tres més pesants, també junts, pesen un 60 % del pes total. Quants cangurs hi ha en el grup?

A) 8 B) 7 C) 20 D) 6 E) 15

25. En Raimon té set peces de filferro amb longituds diferents: 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm i 7 cm. Fa servir algunes de les peces, sense tallar-les, per a fer un cub de filferro d'1 cm d'aresta, sense que se superposi cap tros de filferro. Quantes peces ha d'utilitzar com a mínim?

A) 2 B) 5 C) 1 D) 4 E) 3

26. En el trapezi $PQRS$, els costats PQ i SR són paral·lels. L'angle $\widehat{S}$ fa $120°$ i $RS = SP = \frac{1}{3}PQ$. Quant mesura l'angle α ?



A) 45° B) 15° C) 22.5° D) 25° E) 30°

27. Tenim cinc punts en una línia recta. L'Àlex calcula les distàncies entre totes les possibles parelles de punts. Ha obtingut, en ordre creixent, 2, 5, 6, 8, 9, k, 15, 17, 20 i 22. Quin és el valor de k?

A) 10 B) 13 C) 12 D) 11 E) 14

28. Ahir vaig anotar el número de telèfon del meu amic Enric i recordo que comença i acaba en 6. Ara bé, en la nota només tinc vuit xifres i no nou, un sis al principi i un sis al final. No sé quina xifra em vaig saltar ni la seva posició. Quants números de telèfon diferents he de provar per a estar segur d'encertar el número correcte del meu amic?

A) 64 B) 60 C) 80 D) 55 E) 70

29. La Maria divideix 2015 successivament per 1, 2, 3, ..., fins al 1000, i escriu el residu de cada divisió. Quin d'aquests residus és el més gran?

A) 215 B) 671 C) 15 D) 1007 E) Algun altre valor

30. Cada enter positiu s'escriu de color blau o vermell de manera que la suma de dos nombres diferents del mateix color és també del mateix color que els sumands. De quantes maneres diferents es pot fer això?

A) De cap B) De 6 C) De 4 D) De 2 E) De més de 6 maneres

Generalitat de Catalunya
Departament
d'Ensenyament

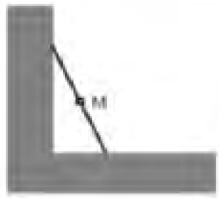
Fundació Privada
CELLEX

Annex 2: Llistat de problemes utilitzats a l'estudi, amb opcions de resposta visibles

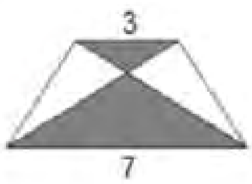
Els problemes utilitzats en l'estudi es mostren a continuació, recordem que els mateixos problemes s'han utilitzat amb i sense opcions de resposta.

Problemes geomètrics

1. (GA) Una escala es recolza en una paret i va caient poc a poc. Durant tota l'estona, la part superior de l'escala està en contacte amb la paret i la part inferior amb el terra. Quina es la corba que descriu el punt mitjà M de l'escala?

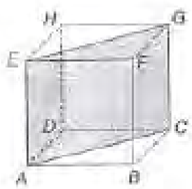


2. (GB) El trapezi de la figura té els seus costats paral·lels de longituds 3 i 7 centímetres. Quin és el percentatge de la superfície que cobreix la part blanca?



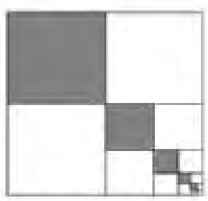
(A)$37,5\%$ (B)42% (C)48% (D)50% (E)$52,5\%$

3. (GC) ABCDEFGH és un cub. L'àrea del rectangle ACGE és de $16\sqrt{2}cm^2$. Quin és el volum del cub?



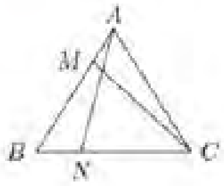
(A) $27cm^3$ (B)$32cm^3$ (C)$48cm^3$ (D)$54cm^3$ (E)$64cm^3$

4. (GD) Un quadrat d'àrea $54cm^2$ es divideix en quatre quadrats. La part superior esquerra s'acoloreix de gris. La part inferior dreta es torna a dividir en quatre quadrats i així successivament. Si repetim aquest procés infinitament, quin serà el percentatge de l'àrea total que quedarà acolorit de gris?



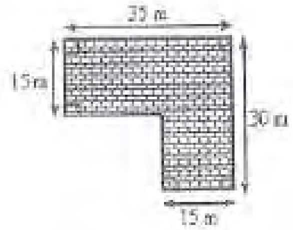
(A)28% (B)$32,5\%$ (C)$33\frac{1}{3}\%$ (D)35% (E)36%

5. (GE)Si $AB = AC = BC$, $BM = CN$, llavors la mesura de l'angle més petit que formen els segments CM i AN és igual a



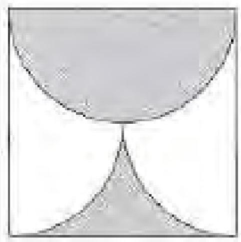
(A)$60°$ (B)$45°$ (C)$90°$ (D)$30°$ (E)$75°$

6. (GP) Un plànol de la casa vist des de dalt es mostra a la figura. Troba el temps mínim que necessita una persona per donar la volta a la casa a una velocitat de $4m/s$.



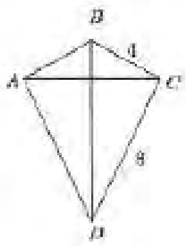
(A)$1min$ (B)$45s$ (C)$37,5s$ (D)$35s$ (E)$30s$

7. (GG)Calcula l'àrea de la copa ombrejada que es veu a la figura inscrita en un quadrat de costat a.



(A)$\frac{\pi a^2}{8}$ (B)$\frac{a^2}{2}$ (C)$\frac{\pi a^2}{2}$ (D)$\frac{a^2}{4}$ (E)$\frac{\pi a^2}{2}$

8. (GG)$ABCD$ és un estel amb $AB = BC = 4cm$ i $CD = DA = 8cm$. Quina és l'àrea màxima que pot tenir l'estel en cm^2?



(A)24 (B)$16\sqrt{2}$ (C)$16\sqrt{3}$ (D)32 (E)64

Problemes aritmètics

1. (NA)Si $n^4 - n^3 - n^2 = 2009$, essent n un enter positiu, llavors n és igual a

   (A)5 (B)7 (C)9 (D)41 (E)No hi ha cap n que sigui solució

2. (NB) Quin és el valor de $444445^2 + 111111 - 444444^2$?

   (A)10^3 (B)10^4 (C)10^5 (D)10^6 (E)10^7

3. (NC)La suma i el producte de tres nombres enters consecutius dóna el mateix. Quantes tripletes existeixen amb aquesta propietat?

   (A)1 (B)2 (C)3 (D)4 (E)5

4. (ND) Cinc nenes tenen una certa quantitat de caramels cadascuna. Sabem que no n'hi ha dues que tinguin la mateixa quantitat de caramels i que qualsevol grup de tres té més caramels que les altres dues juntes. Quin és el mínim nombre de caramels que poden tenir entre les cinc?

   (A)20 (B)25 (C)30 (D)35 (E)40

5. (NJ) Si $p \geq 5$ és un nombre primer, per quins valors de p la divisió de $p^2 - 1$ entre 24 és exacta?

   (A)mai (B)en més de tres casos però no sempre (C)sempre
   (D)només quan $p = 5$ (E)cap de les anteriors

6. (NK) Per quants nombres primers p es compleix que $p^3 + p^2$ és un quadrat perfecte?

   (A)0 (B)1 (C)2 (D)més de 2 (E)no es pot saber

7. (NB) Si a, b i c són tres nombres enters consecutius i $a > b > c$, llavors $(a-b)(a-c)(b-c) = \ldots$

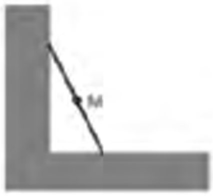
   (A)1 (B)2 (C)0 (D)-2 (E)-1

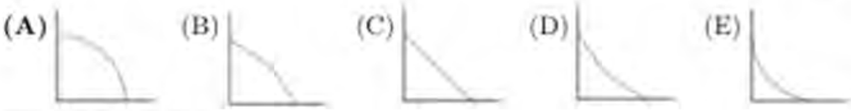
8. (NE) En Pere i en Bernat tenen 18 euros entre els dos. En Bernat i en Joan tenen 16 euros, en Joan i la Núria 10 euros i la Núria i en Pere 14 euros. Quants euros tenen entre tots?

   (A)28 (B)30 (C)29 (D)58 (E)la situació que es planteja és impossible

Annex 3: Possibles resolucions dels problemes seleccionats

1. (GA) Una escala es recolza en una paret i va caient poc a poc. Durant tota l'estona, la part superior de l'escala està en contacte amb la paret i la part inferior amb el terra. Quina es la corba que descriu el punt mitjà M de l'escala?

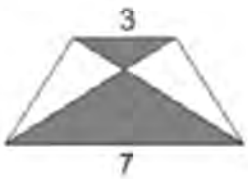




Possible resolució:

Aquest problema es planteja amb la intenció que els alumnes utilitzin les seves eines de visualització per tal de "veure"que la solució correcta és A. Una solució completa l'obtenim assignant coordenades a $M = (x, y)$, i anomenant L a la llargada de l'escala. La relació que en resulta és $(2y)^2 + (2x)^2 = L^2$, d'on s'obté $y^2 + x^2 = \frac{L^2}{4}$ i per tant M descriu una circumferència de centre $(0, 0)$.

2. (GB)El trapezi de la figura té els seus costats paral·lels de longituds 3 i 7 centímetres. Quin és el percentatge de la superfície que cobreix la part blanca?



(A)37, 5% **(B)**42% (C)48% (D)50% (E)52, 5%

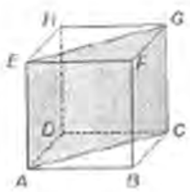
Possible resolució:

Els triangles acolorits són semblants, en proporció 3 : 7. Les seves altures per tant també guarden aquesta proporció, i si anomenem $10h$ l'altura del trapezi (per simplificar càlculs), les altures dels triangles seran $3h$ i $7h$. Si calculem la proporció d'àrea ombrejada ens queda:

$$\frac{\frac{3 \cdot 3h}{2} + \frac{7 \cdot 7h}{2}}{\frac{(7+3) \cdot 10h}{2}} = \frac{58}{100}$$

i per tant l'àrea blanca representa un 42% del total.

3. (GC)ABCDEFGH és un cub. L'àrea del rectangle ACGE és de $16\sqrt{2}cm^2$. Quin és el volum del cub?



(A) $27cm^3$ (B)$32cm^3$ (C)$48cm^3$ (D)$54cm^3$ **(E)**$64cm^3$

Possible resolució:

Fent Pitàgores per trobar la diagonal del quadrat de la base del cub ens queda que l'àrea del rectangle igualada a l'expressió de l'enunciat és:

$$16\sqrt{2} = \sqrt{2}c \cdot c$$
$$16 = c^2$$

i per tant el costat del cub mesura $4cm$ i el seu volum $4^3 = 64cm^3$.

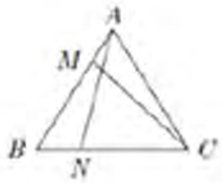
4. (GD)Un quadrat d'àrea $54cm^2$ es divideix en quatre quadrats. La part superior esquerra s'acoloreix de gris. La part inferior dreta es torna a dividir en quatre quadrats i així successivament. Si repetim aquest procés infinitament, quin serà el percentatge de l'àrea total que quedarà acolorit de gris?

(A)28% (B)32, 5% **(C)**$33\frac{1}{3}$% (D)35% (E)36%

Possible resolució:

Si agrupem els quadrats d'igual mida, veurem que n'hi ha 3 de cada mida, dos de blancs i un de gris. Això passa per totes les mides de quadrat, per tant una tercera part de l'àrea total és gris.

5. (GE)Si $AB = AC = BC$, $BM = CN$, llavors la mesura de l'angle més petit que formen els segments CM i AN és igual a

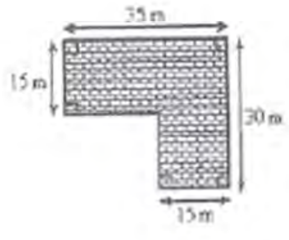


(A)$60°$ (B)$45°$ (C)$90°$ (D)$30°$ (E)$75°$

Possible resolució:

Si anomenem P al punt d'intersecció dels segments a l'interior del triangle, tenim que els angles CAN i ANC sumen $120°$ ja que el tercer angle $NCA = 60°$. Observem que $NCM = CAN$ perquè els triangles BMC i ANC són iguals. Així doncs, en el triangle NPC els angles CNP i NCM sumen $120°$ i per tant l'angle $NPC = 60°$.

6. (GF) Un plànol de la casa vist des de dalt es mostra a la figura. Troba el temps mínim que necessita una persona per donar la volta a la casa a una velocitat de $4m/s$.

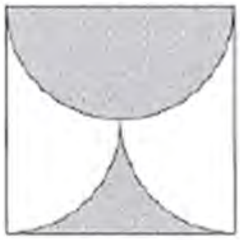


(A)$1min$ (B)$45s$ (C)$37, 5s$ (D)$35s$ **(E)**$30s$

Possible resolució:

El recorregut més ràpid per donar la volta a la casa no és resseguir el perímetre sinó evitar l'angle cóncau del polígon. Hem de recórrer els costats $15 + 35 + 30 + 15 = 95m$ i recórrer el segment que evita l'angle cóncau i que mesura $c = \sqrt{20^2 + 15^2} = \sqrt{625} = 25m$. Per tant el recorregut mesurarà $95 + 25 = 120m$, i si la velocitat és de $4m/s$ el temps invertit serà de $120/4 = 30s$.

7. $_{(GG)}$Calcula l'àrea de la copa ombrejada que es veu a la figura inscrita en un quadrat de costat a.

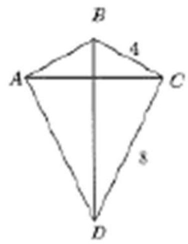


(A)$\frac{\pi a^2}{8}$ **(B)**$\frac{a^2}{2}$ (C)$\frac{\pi a^2}{2}$ (D)$\frac{a^2}{4}$ (E)$\frac{\pi a^2}{4}$

Possible resolució:

Si dividim el quadrat en dues parts iguals per un segment horitzontal, veiem que a la part superior tenim un semicercle ombrejat i la resta és blanc, i a la part inferior dos quarts de cercle, i per tant un semicercle, blanc, i la resta gris. És a dir, que en total la meitat de l'àrea del quadrat està ombrejada, i per tant la resposta és $\frac{a^2}{2}$.

8. $_{(GH)}ABCD$ és un estel amb $AB = BC = 4cm$ i $CD = DA = 8cm$. Quina és l'àrea màxima que pot tenir l'estel en cm^2?



(A)24 (B)$16\sqrt{2}$ (C)$16\sqrt{3}$ (D)32 (E)64

Possible resolució:

Si ens fixem en el triangle BCD que és la meitat de l'estel, i prenem com a base el costat CD, veurem que l'altura sobre aqust costat és la distància entre el vèrtex B i la recta que conté la base. Com que la distància entre B i C és 4, aquesta altura és sempre menor o igual que 4, i val 4 si fem que l'angle BCD sigui recte. En aquest cas l'àrea del triangle valdrà $A = \frac{8 \cdot 4}{2}$, però com que l'estel està format per dos triangles com aquest, l'àrea màxima de l'estel és de $32cm^2$.

9. $_{(NA)}$Si $n^4 - n^3 - n^2 = 2009$, essent n un enter positiu, llavors n és igual a

(A)5 **(B)**7 (C)9 (D)41 (E)No hi ha cap n que sigui solució

Possible resolució:

Si factoritzem 2009 i treiem factor comú, obtenim $n^2(n^2 - n - 1) = 7^2 \cdot 41$, per tant mirant els factors, $n = 7$ o $n = 1$, però $n = 1$ no és solució de l'equació, en canvi $n = 7$ sí, per tant és l'única solució possible.

10. $_{(NB)}$ Quin és el valor de $444445^2 + 111111 - 444444^2$?

(A)10^3 (B)10^4 (C)10^5 **(D)**10^6 (E)10^7

Possible resolució:

L'expressió es pot reescriure de la següent manera, $444445^2 + 111111 - 444444^2 = (444444 + 1)^2 + 111111 - 444444^2 = 444444^2 + 2 \cdot 444444 + 1 + 111111 - 444444^2 = 888888 + 111111 + 1 = 10^6$

11. $_{(NC)}$La suma i el producte de tres nombres enters consecutius dóna el mateix. Quantes tripletes existeixen amb aquesta propietat?

(A)1 (B)2 **(C)**3 (D)4 (E)5

Possible resolució:

Si anomenem n al nombre central de la tripleta, obtenim l'equació $(n-1)n(n+1) = n - 1 + n + n + 1, n^3 - n = 3n, n^3 - 4n = 0$ que té com a solucions $n = 0$ i $n^2 = 4$ i per tant, $n \in \{-2, 0, 2\}$ que corresponen a les tripletes $(-3, -2, -1), (-1, 0 - 1), (1, 2, 3)$.

12. $_{(ND)}$ Cinc nenes tenen una certa quantitat de caramels cadascuna. Sabem que no n'hi ha dues que tinguin la mateixa quantitat de caramels i que qualsevol grup de tres té més caramels que les altres dues juntes. Quin és el mínim nombre de caramels que poden tenir entre les cinc?

(A)20 (B)25 (C)30 **(D)**35 (E)40

Possible resolució:

Anomenem n el nombre de caramels que té la nena que en té menys. Com que no n'hi ha dues que tinguin la mateixa quantitat de caramels, les altres quatre nenes han de tenir almenys (ordenades de menys a més caramels) $n+1, n+2, n+3, n+4$ caramels. Si trobem una solució amb 5 nombres consecutius, serà mínima. Com que qualsevol grup de tres té més caramels que les altres dues juntes, cal que les tres que en tenen menys en tinguin més que les altres dues, si això passa, per la resta de grups de tres també passarà. Aleshores tenim la desigualtat $n + n + 1 + n + 2 > n + 3 + n + 4$, $n > 4$ i per tant la solució mínima és que entre totes tinguin $5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 35$ caramels.

13. $_{(NE)}$ En Pere i en Bernat tenen 18 euros entre els dos. En Bernat i en Joan tenen 16 euros, en Joan i la Núria 10 euros i la Núria i en Pere 14 euros. Quants euros tenen entre tots?

(A)28 (B)30 **(C)**29 (D)58 (E)la situació que es planteja és impossible

Possible resolució:

Si sumem les quantitats que diu l'enunciat obtenim $P+B+B+J+J+N+N+P = 18+16+10+14, 2(P+B+J+N) = 58, P+B+J+N = 29$.

14. $_{(NH)}$ Si a, b i c són tres nombres enters consecutius i $a > b > c$, llavors $(a-b)(a-c)(b-c) = ...$

(A)1 **(B)**2 (C)0 (D)-2 (E)-1

Possible resolució:

Podem fer $a = b+1$ i $c = b-1$, i aleshores $(a-b)(a-c)(b-c) = (b+1-b)(b+1-b+1)(b-b+1) = (1)(2)(1) = 2$

15. $_{(NJ)}$ Si $p \geq 5$ és un nombre primer, per quins valors de p la divisió de p^2-1 entre 24 és exacta?

(A)mai (B)en més de tres casos però no sempre **(C)** sempre (D)només quan $p = 5$ (E)cap de les anteriors

Possible resolució:

L'expressió p^2-1 es pot escriure com $(p+1)(p-1)$. Com que $p \neq 3$, o bé $p-1$ o bé $p+1$ ha de ser múltiple de 3, i com que $p \neq 2$, un dels dos factors és múltiple de 2 i l'altre és múltiple de 4 (són dos parells consecutius). Per tant, el producte $(p+1)(p-1)$ és sempre múltiple de 24.

16. $_{(NK)}$ Per quants nombres primers p es compleix que p^3+p^2 és un quadrat perfecte?

(A)0 **(B)**1 (C)2 (D)més de 2 (E)no es pot saber

Possible resolució:

$p^3+p^2 = p^2(p+1)$ i per tant $p+1$ també ha de ser un quadrat perfecte. Si $p+1 = n^2$, aleshores $p = n^2-1 = (n+1)(n-1)$. Com que p és primer, o bé $n+1$ o bé $n-1$ ha de ser 1, el que ens porta a que $n = 0$ o $n = 2$. El primer cas ens porta a $p = -1$ que no és primer, i el segon a $p = 3$ que efectivament és una solució, i per tant única.

Annex 4: Exemple de qüestionari lliurat als estudiants

Alumne 1

Sèrie 1 de problemes

1. *(NA)*Si $n^4 - n^3 - n^2 = 2009$, essent n un enter positiu, llavors n és igual a

   (A)5 (B)7 (C)9 (D)41 (E)No hi ha cap n que sigui solució

2. *(NB)* Quin és el valor de $444445^2 + 111111 - 444444^2$?

   (A)10^3 (B)10^4 (C)10^5 (D)10^6 (E)10^7

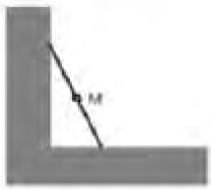
3. *(NJ)* Si $p \geq 5$ és un nombre primer, per quins valors de p la divisió de $p^2 - 1$ entre 24 és exacta?

   (A)mai (B)en més de tres casos però no sempre (C)sempre
   (D)només quan $p = 5$ (E)cap de les anteriors

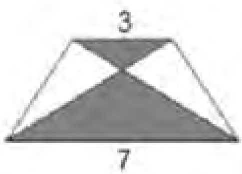
4. *(NK)* Per quants nombres primers p es compleix que $p^3 + p^2$ és un quadrat perfecte?

   (A)0 (B)1 (C)2 (D)més de 2 (E)no es pot saber

5. *(GA)* Una escala es recolza en una paret i va caient poc a poc. Durant tota l'estona, la part superior de l'escala està en contacte amb la paret i la part inferior amb el terra. Quina es la corba que descriu el punt mitjà M de l'escala?



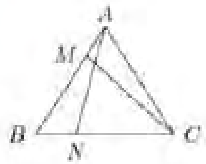
6. *(GB)*El trapezi de la figura té els seus costats paral·lels de longituds 3 i 7 centímetres. Quin és el percentatge de la superfície que cobreix la part blanca?



   (A)37, 5% (B)42% (C)48% (D)50% (E)52, 5%

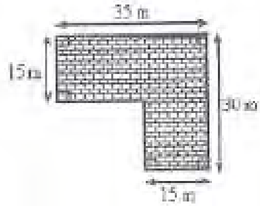
1

7. $_{(GE)}$Si $AB = AC = BC$, $BM = CN$, llavors la mesura de l'angle més petit que formen els segments CM i AN és igual a



(A)60° (B)45° (C)90° (D)30° (E)75°

8. $_{(GF)}$ Un plànol de la casa vist des de dalt es mostra a la figura. Troba el temps mínim que necessita una persona per donar la volta a la casa a una velocitat de $4m/s$.

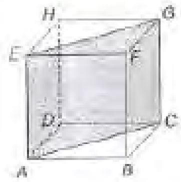


(A)$1min$ (B)$45s$ (C)$37,5s$ (D)$35s$ (E)$30s$

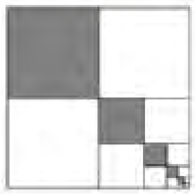
Alumne 1

Sèrie 2 de problemes

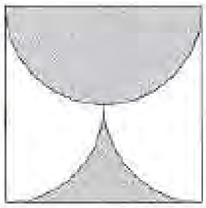
1. $_{(NG)}$La suma i el producte de tres nombres enters consecutius dóna el mateix. Quantes tripletes existeixen amb aquesta propietat?
2. $_{(ND)}$ Cinc nenes tenen una certa quantitat de caramels cadascuna. Sabem que no n'hi ha dues que tinguin la mateixa quantitat de caramels i que qualsevol grup de tres té més caramels que les altres dues juntes. Quin és el mínim nombre de caramels que poden tenir entre les cinc?
3. $_{(NH)}$ Si a, b i c són tres nombres enters consecutius i $a > b > c$, llavors $(a-b)(a-c)(b-c) = ...$
4. $_{(NE)}$ En Pere i en Bernat tenen 18 euros entre els dos. En Bernat i en Joan tenen 16 euros, en Joan i la Núria 10 euros i la Núria i en Pere 14 euros. Quants euros tenen entre tots?
5. $_{(GC)}$ABCDEFGH és un cub. L'àrea del rectangle ACGE és de $16\sqrt{2}cm^2$. Quin és el volum del cub?



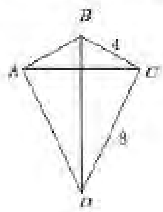
6. $_{(GD)}$Un quadrat d'àrea $54cm^2$ es divideix en quatre quadrats. La part superior esquerra s'acoloreix de gris. La part inferior dreta es torna a dividir en quatre quadrats i així successivament. Si repetim aquest procés infinitament, quin serà el percentatge de l'àrea total que quedarà acolorit de gris?



7. $_{(GC)}$Calcula l'àrea de la copa ombrejada que es veu a la figura inscrita en un quadrat de costat a.

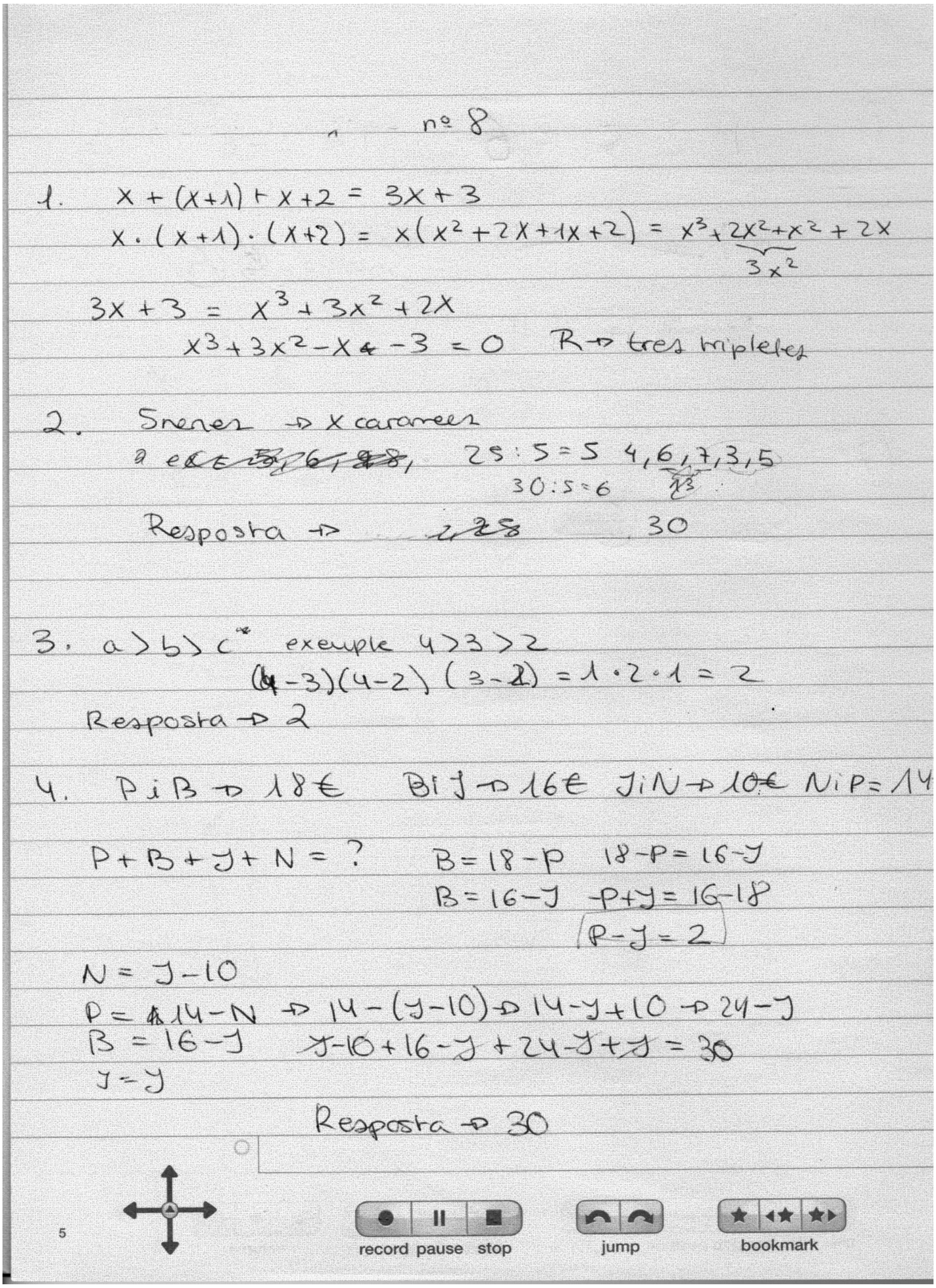


8. $_{(GC)}$$ABCD$ és un estel amb $AB = BC = 4cm$ i $CD = DA = 8cm$. Quina és l'àrea màxima que pot tenir l'estel en cm^2?



Annex 5: Exemples de produccions dels estudiants

Grup A (sense opcions de resposta)



nº 8

1. $x + (x+1) + x+2 = 3x+3$

$x \cdot (x+1) \cdot (x+2) = x(x^2+2x+1x+2) = x^3 + \underbrace{2x^2 + x^2}_{3x^2} + 2x$

$3x+3 = x^3+3x^2+2x$

$x^3+3x^2-x-3 = 0$ R → tres tripletes

2. 5nenes → x caramels

a ell ~~5, 6, 8~~, 25 : 5 = 5 4, 6, 7, 3, 5

30 : 5 = 6

Resposta → ~~25~~ 30

3. $a > b > c$ exemple $4 > 3 > 2$

$(4-3)(4-2)(3-2) = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$

Resposta → 2

4. P i B → 18€ B i J → 16€ J i N → 10€ N i P = 14

$P+B+J+N = ?$ $B = 18-P$ $18-P = 16-J$

$B = 16-J$ $-P+J = 16-18$

$\boxed{P-J=2}$

$N = J-10$

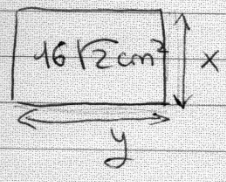
$P = 14-N$ → $14-(J-10)$ → $14-J+10$ → $24-J$

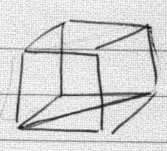
$B = 16-J$ $J-10+16-J+24-J+J = 30$

$J = J$

Resposta → 30

5.

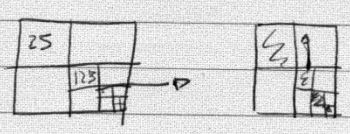




$x \cdot y = 16\sqrt{2}$

6. Àrea = 54 cm²   25% de 25% · 25% · 25%

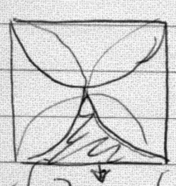
100 | 8
20 12'5 | 4
40 0'5 3'125 | 4
10
20



25 + 12'5 + 3'125

40'625 ~ 40

7.



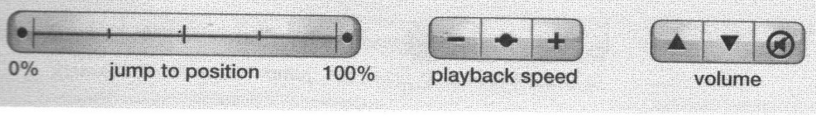
$\frac{\pi \cdot 0'5a^2}{2}$ a^2 = area total

$a^2-(2\cdot(\pi 0'5a^2) = a^2-(2\pi\cdot 2a^2)$

$\left(a^2-\pi\cdot\left(\frac{1}{2}a\right)^2\right)+$

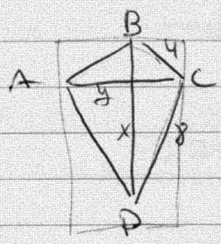
mitja circumferència → $\left(\pi\frac{1}{2}a^2\right)\cdot\frac{1}{2}$

àrea $a^2-\pi\cdot\left(\frac{1}{2}a\right)^2+\pi\cdot\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{1}{2}$

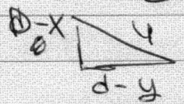


6

8.



$$\frac{D \cdot d}{2}$$

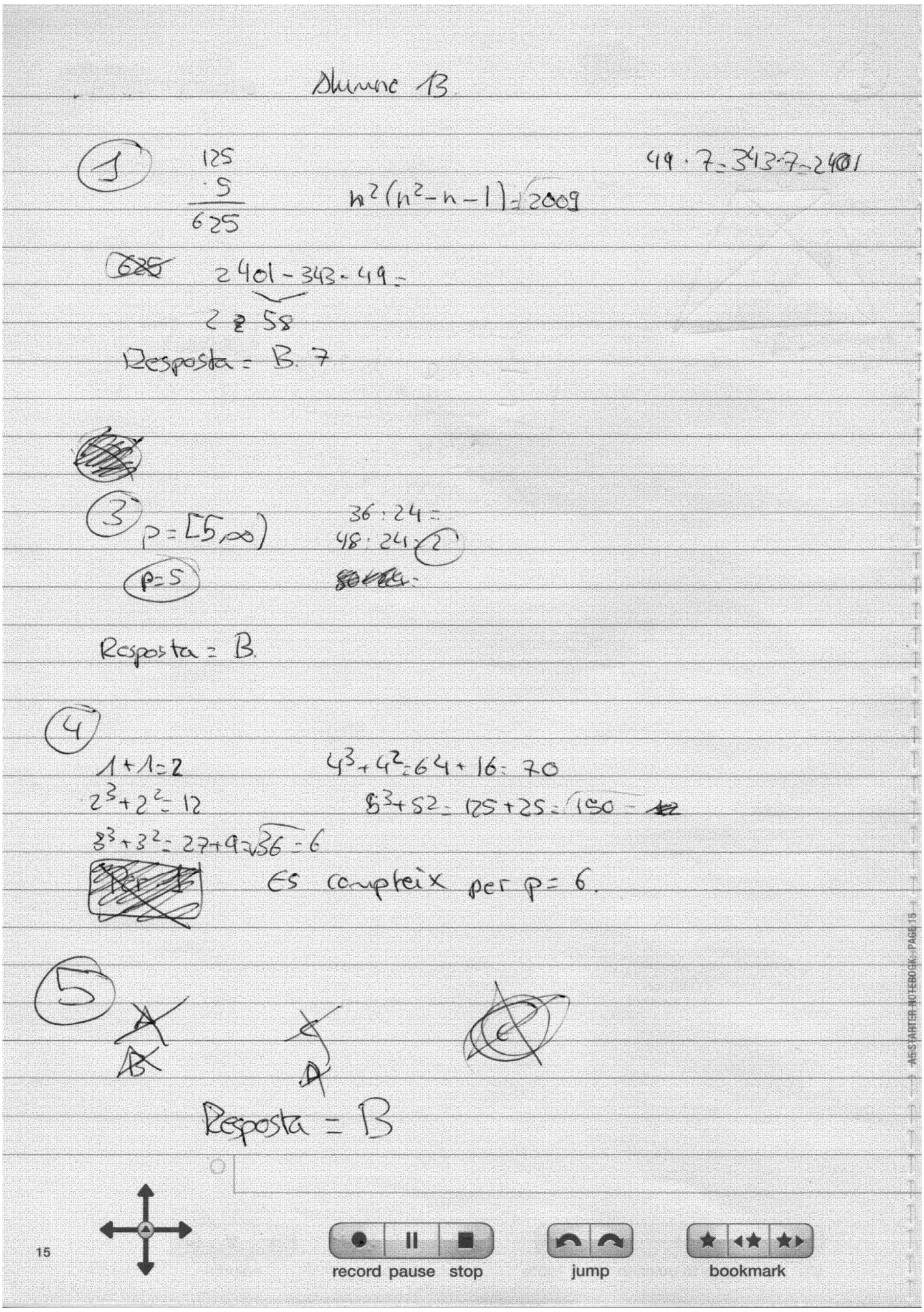


$$(D-x)^2+(d-y)^2=4^2$$

$8 \cdot 4 = 32$

$$=16$$

Grup A (amb opcions de resposta)



Alumne 13

(1) $125 \cdot 5 = 625$ $\quad n^2(n^2-n-1)=2009$ $\quad 49 \cdot 7 = 343 \cdot 7 = 2401$

~~625~~ $\quad 2401-343-49=$

$2\ 8\ 58$

Resposta = B. 7

~~(2)~~

(3) $p=[5,\infty)$ $\quad 36:24=$

$48:24=2$

$p=5$ $\quad$ ~~[illegible]~~

Resposta = B.

(4)

$1+1=2$ $\quad 4^3+4^2=64+16=80$

$2^3+2^2=12$ $\quad 5^3+5^2=125+25=150-$

$3^3+3^2=27+9=\sqrt{36}=6$

~~Per 1~~ Es compleix per $p=6$.

(5) ~~A~~ A ~~A~~ A ~~C~~

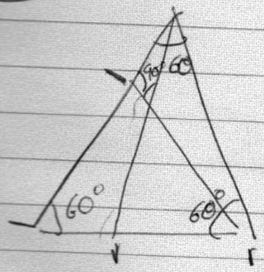
Resposta = B

6

$\frac{7 \cdot h}{2} =$

7 ⌊3 = 2
10 2 3

7



180 : 3 = 60°

90 + 45 = 135

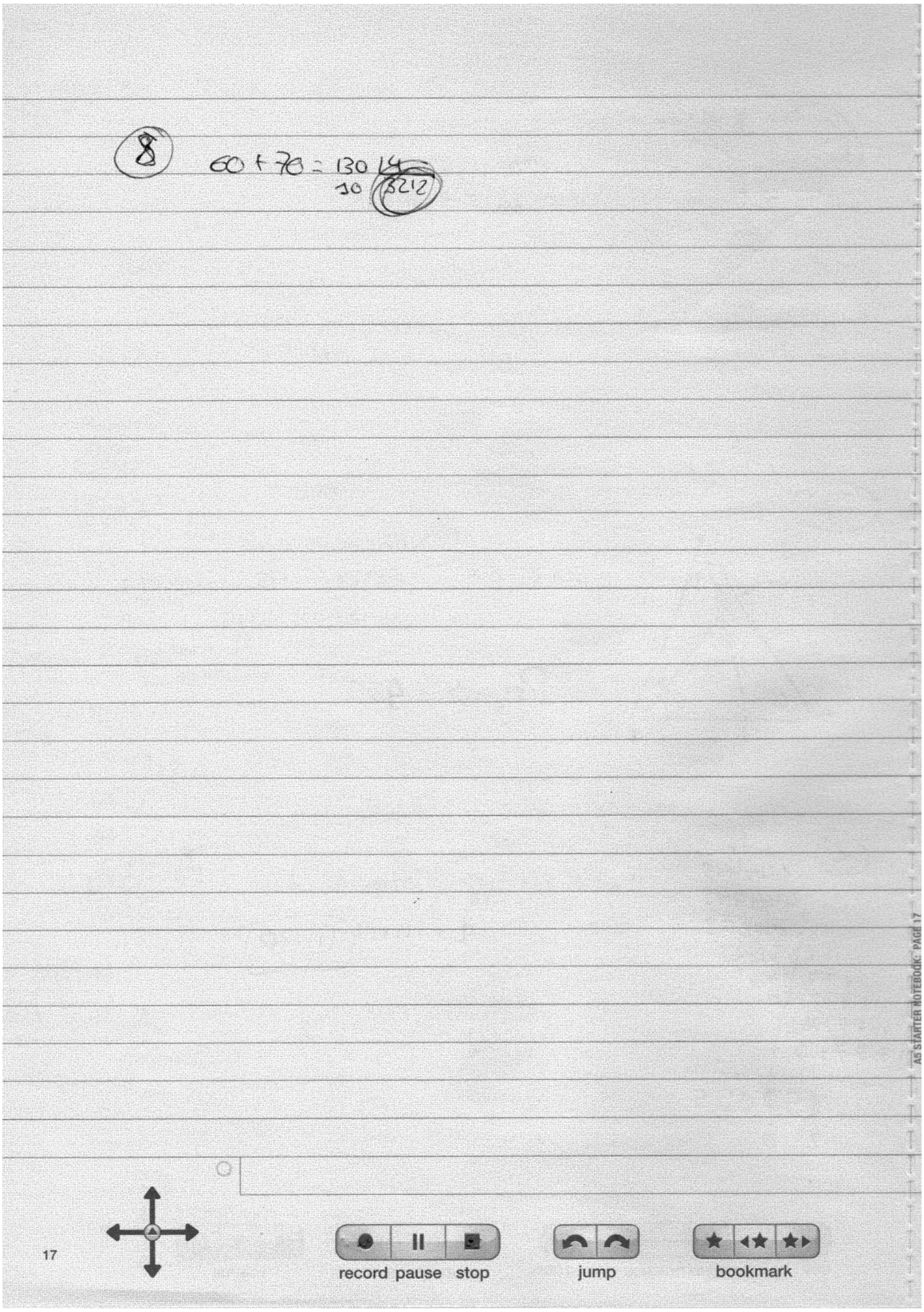
180 − 135 = 45

Resposta = 45°

2

444445
444445
2222255
1777780
1777780
1777780
1777780
1777780
152055

25
−16
9 + 111111 = 111120



8

60 + 70 = 130 | 14

10 8'212

A5 STARTER NOTEBOOK: PAGE 17

17

record pause stop

jump

bookmark

Grup B (sense opcions de resposta)

Número 2

(2) $x+y+z = x\cdot y\cdot z$

$x = y+1$

$x = z+2$

$1\ 2\ 3 = 1\cdot 2\cdot 3$

$6 = 6$

$2\ 3\ 4 = 2\cdot 3\cdot 4$

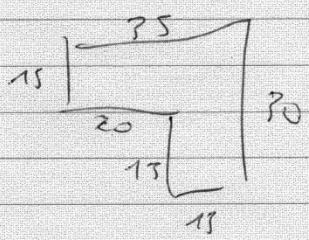
$9 = 24$

$3\ 4\ 5 = 3\cdot 4\cdot 5$

$12 =$

$\boxed{1}$

(3) $v = \frac{e}{t}$; $e = \frac{v}{t}$



$v = 4 m/s$

$e = 35+15+30+15+15+20$

50 80 95 110 130

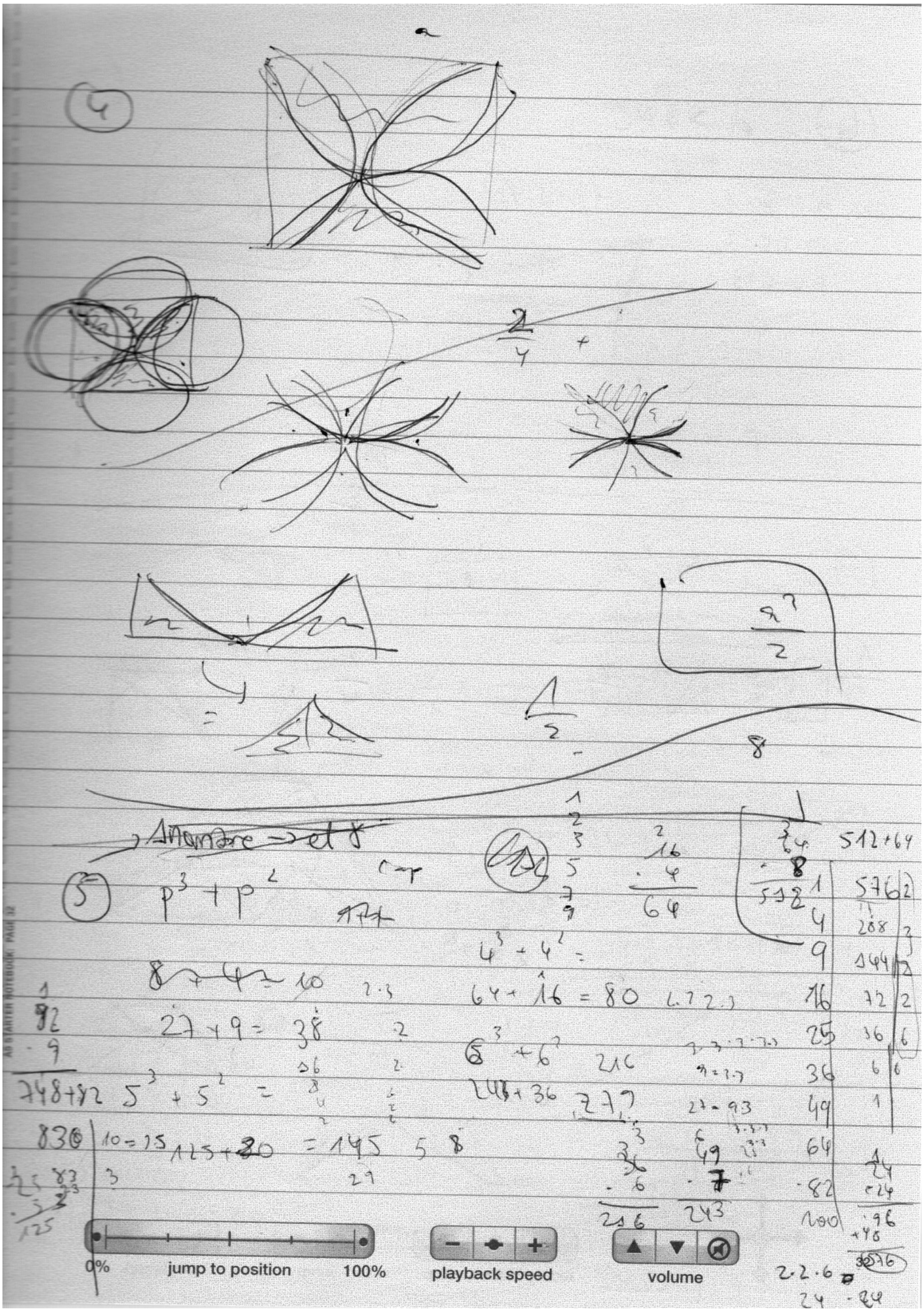
$4 = \frac{130}{t}$; $4t = 130$; $t = \frac{130}{4}$;

130 |4
10 32,5
20

$\boxed{32,5 \text{ segons}}$

31

record pause stop jump bookmark



4
5
p³ + p²
27 + 9 = 38
4³ + 4² =
64 + 16 = 80
125 + 20 = 145
0%
jump to position
100%
playback speed
volume

6 $a > b > c$

$a = b + 1$ $(b+1 > b)$

$a = c + 2$ $1 \cdot \cancel{2} \cdot 1$

$b = c + 1$

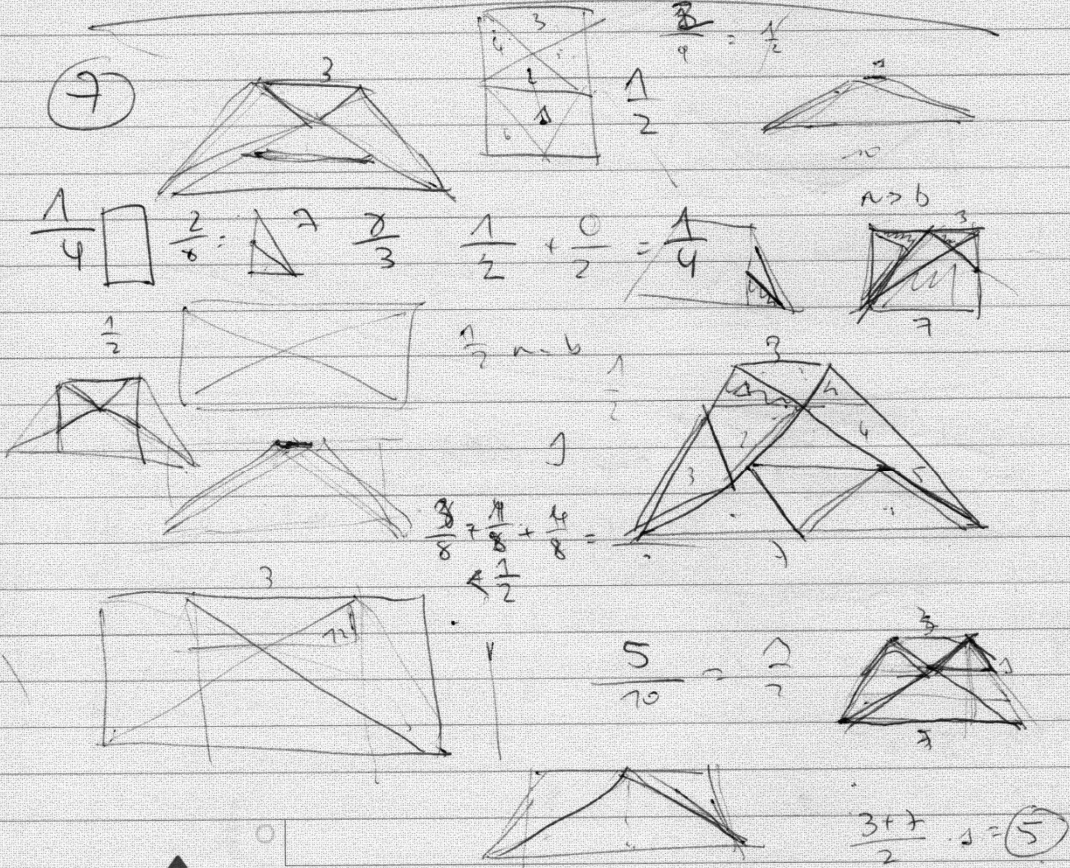
2

$b - c = 1$

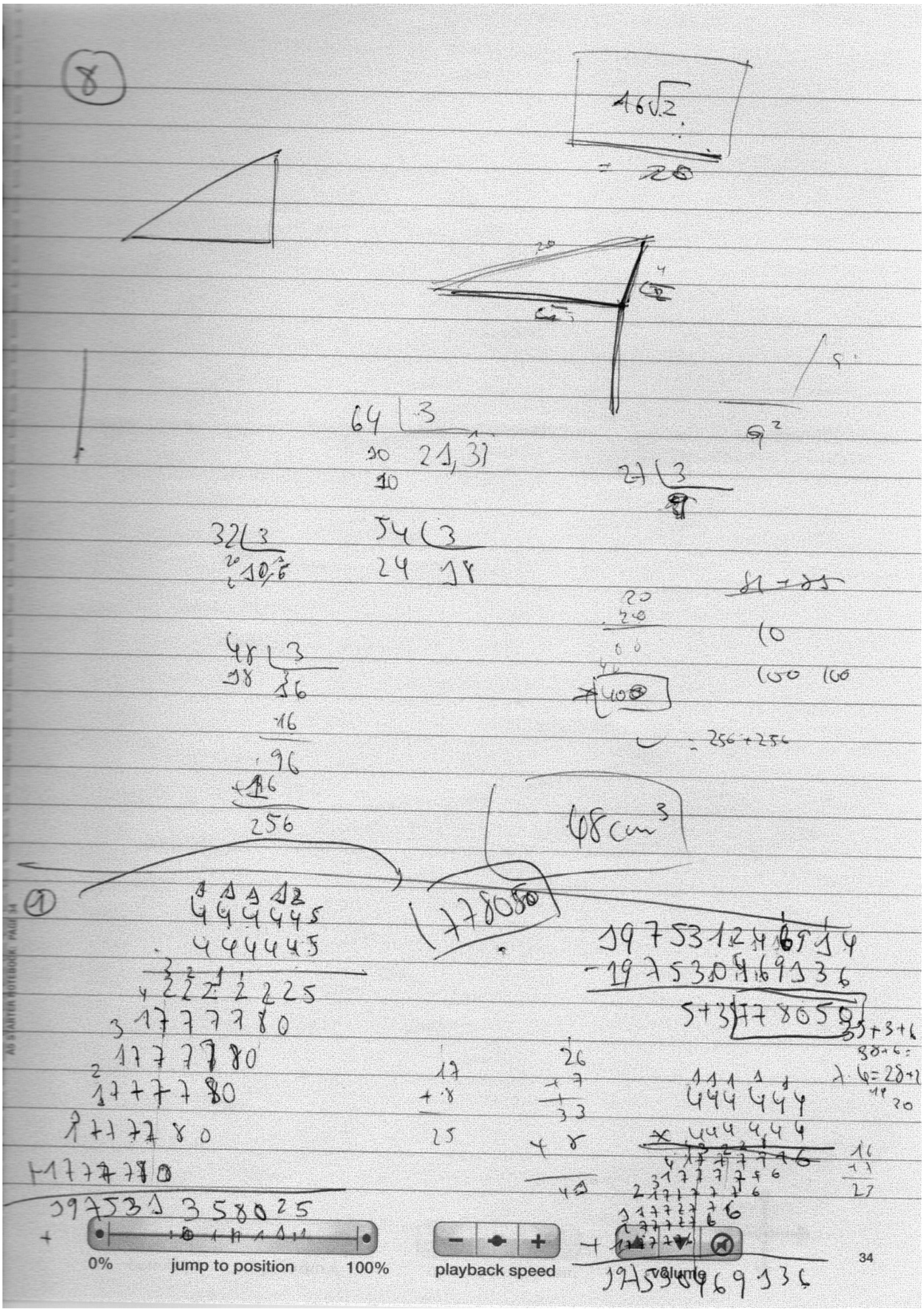
$a - b = 1$

$a - c = 2$

7



$\frac{3+7}{2} \cdot 1 = 5$


48 cm³
0%
jump to position
100%
playback speed
volume
34

Grup B (amb opcions de resposta)

~~ ~~ Alumne 3

Sèrie 2 de problemes.

1

$2^4 - 2^3 - 2^2$

$16 - 8 - 4 = 4.$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\ 3 \\ \hline 71 \end{array}$$

$3^4 - 3^3 - 3^2 =$

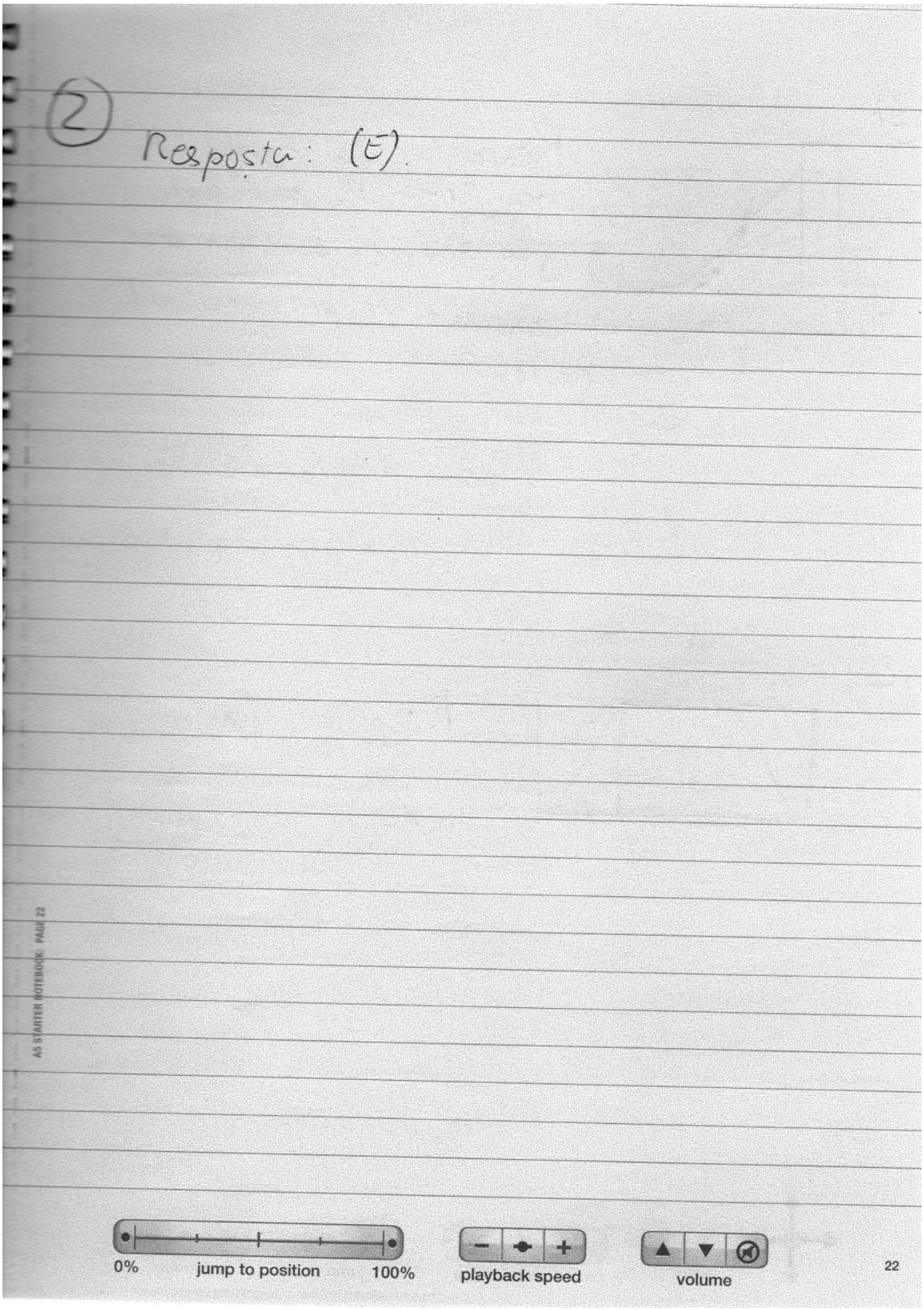
$71 - 27 - 9$

$71 - 36 = 35.$

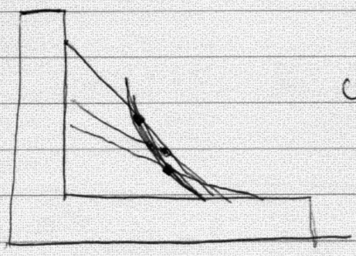
21

record pause stop jump bookmark

A5 STARTER NOTEBOOK · PAGE 21

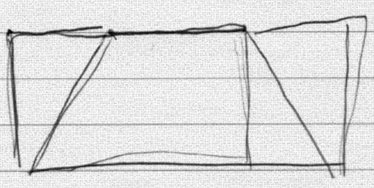

2
Resposta: (E).
A5 STARTER NOTEBOOK: PAGE 22
0%
jump to position
100%
playback speed
volume
22

(3)



Resposta: la corba te una forma de paràbola ja que el punt n va canviant de posició al caure.

(4.)



Resposta: (A)

(5) $p=7.$

$7^2-1 \,\underline{|\,24} = 48\,\underline{|\,24}$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 \quad 2$

Resposta: $\boxed{\text{és exacta.}}$

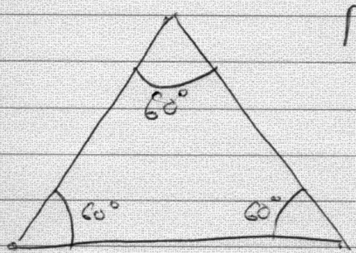
(6) $3^3+3^2=27+9=36=6\cdot6$ ✓

$5^3+5^2=125+25=150=$ no te quadrat perfecte.

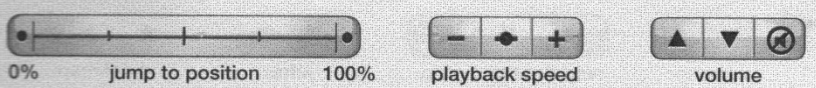
$7^3+7^2=$

Resposta: (B)

(7)



Resposta: $\boxed{60^\circ}$



24

(8) perimetre = 15 + 35 + 30 + 15 + 15 + 20 = 45 + 35 + 30 + 20

45 + 35 + 30 = 80 + 50 = 130 m

V = 4 m/s.

$\frac{130}{4} =$

130 | 4
10   32,5
2

Resposta: (D)

record pause stop jump bookmark