

Gutiérrez, A. (2000): Aportaciones de la investigación psicológica al aprendizaje de las matemáticas en secundaria, *Uno* 23, 23-33.

Aportaciones de la Investigación Psicológica al Aprendizaje de las Matemáticas en Secundaria

Angel Gutiérrez

Dpto. de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia (España).

Resumen. La interpretación psicológica de los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas es uno de los paradigmas de investigación en didáctica de las matemáticas que están produciendo más resultados y más interesantes. En este artículo se pone de relieve la influencia que dicho enfoque tiene en el diseño curricular y en la enseñanza de las matemáticas de Secundaria, gracias a la utilización de resultados de las investigaciones en currícula, libros de texto, unidades de enseñanza, u organización del trabajo en el aula. Para ello se presentan algunos ejemplos de implementaciones en la enseñanza secundaria española de propuestas surgidas de la investigación psicológica en didáctica de las matemáticas.

La Didáctica de las Matemáticas¹ como dominio de actividad científica tiene como fines últimos explicar cómo se produce el aprendizaje de las matemáticas por los individuos y hacer propuestas para facilitarlos. El aprendizaje no se limita al ámbito escolar, sino que puede surgir en cualquier situación en la que estén presentes las matemáticas, y los individuos no son sólo los estudiantes, sino cualquier persona que utilice las matemáticas. Estas finalidades, que pueden parecer simples a primera vista, son realmente de una enorme complejidad, debido a la multitud de factores que intervienen, lo cual se traduce en la confluencia de numerosas disciplinas científicas que ayudan aportando puntos de vista específicos, interpretaciones de los hechos y propuestas de actuación (Díaz, 1991, p. 106).

A lo largo de los años, la didáctica de las matemáticas ha ido creando sus propios métodos de trabajo a partir de los métodos propios de otras disciplinas, fusionándolos y adaptándolos a

¹ No es mi intención entrar en el debate sobre qué etiqueta debe usarse, la latina (didáctica de las matemáticas) o la sajona (educación matemática), ni si ambas son equivalentes o abarcan terrenos diferentes.

sus intereses (Gutiérrez, 1991, p. 150). La psicología es una de las disciplinas con más peso en la actividad de la didáctica de las matemáticas, tanto en el terreno de la práctica docente como en el de la investigación, pues su óptica es necesaria en todo lo que tiene que ver con la comprensión de los procesos mentales relacionados con las matemáticas. En consecuencia, una alta proporción de la actividad investigadora de los didactas se encuadra en el terreno de la psicología de la didáctica de las matemáticas. El *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME) representa el principal foro internacional de investigación en este campo.

El objetivo de este artículo es mostrar la influencia que la componente psicológica de la didáctica de las matemáticas tiene en el diseño curricular y en la enseñanza de las matemáticas de Secundaria, influencia que se transmite al aplicar los resultados de investigaciones para elaborar currícula, libros de texto, o unidades de enseñanza, o para organizar formas de trabajo en el aula.

No es posible elaborar una propuesta curricular coherente sin un marco teórico que la organice, en el cual debe haber un modelo psicológico que explique el proceso de aprendizaje de las matemáticas por los estudiantes. Los decretos del Ministerio de Educación y de las Comunidades Autónomas que regulan la enseñanza de las matemáticas en la ESO y los Bachilleratos justifican frecuentemente sus decisiones o sugerencias apoyándose en aspectos cognitivos. Así, en el R.D. 1007/91 que establece las enseñanzas mínimas de la ESO, se entiende el aprendizaje de las matemáticas como “un proceso de construcción del conocimiento matemático”. En la misma línea, el decreto 47/92 que establece el currículo de la ESO de la Comunidad Valenciana indica que las capacidades cognitivas de los estudiantes aconsejan concebir las matemáticas de la ESO como una acción de creación de conceptos y práctica de destrezas. Pero, dado el bajo nivel de concreción de las directrices de los currícula oficiales, resulta más útil reflexionar sobre la situación en las aulas y los libros de texto. En las páginas siguientes presentaré algunos ejemplos que muestran implementaciones en la enseñanza secundaria española de propuestas surgidas de la investigación psicológica en didáctica de las matemáticas.

La demostración matemática. Lograr que los estudiantes entiendan la necesidad de las demostraciones en matemáticas, y que lleguen a realizar demostraciones de manera autónoma, es uno de los caballos de batalla de los profesores de matemáticas de enseñanza secundaria en todo el mundo. No es de extrañar, por tanto, que numerosos investigadores hayan estudiado las características psicológicas del aprendizaje de la demostración desde diversas perspectivas.

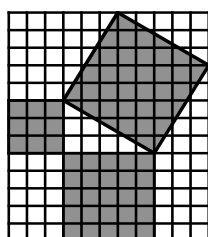
Durante varias décadas, las teorías de Piaget fueron el marco psicológico de referencia para la enseñanza de las matemáticas en primaria y secundaria. A comienzos de los 80, aparecen otros modelos locales que sustituyen al de Piaget en áreas específicas de las matemáticas. En geometría, el modelo de razonamiento de Van Hiele es el marco teórico más utilizado

actualmente para organizar la enseñanza de acuerdo con las habilidades psicológicas de razonamiento de los estudiantes. El modelo de Van Hiele describe cuatro formas (niveles) de razonamiento matemático, que representan aumentos de la sofisticación en el uso y aprendizaje de las matemáticas. Descripciones detalladas del modelo de Van Hiele pueden leerse en Jaime y Gutiérrez (1990) y (1996) y en Clements y Battista (1992).

En particular, el modelo de Van Hiele describe diferentes capacidades de demostración matemática, y ayuda a organizar la enseñanza de manera adecuada. El segundo nivel de Van Hiele se caracteriza por un razonamiento inductivo, en el que la experimentación y observación de casos particulares es el medio de descubrimiento y generalización de nuevos conceptos y propiedades, así como de convencimiento de la veracidad general de éstas. El tercer nivel se caracteriza por el surgimiento del razonamiento deductivo abstracto (aunque no formal), que permite a los estudiantes justificar sus conjeturas y afirmaciones basándose en conocimientos previamente institucionalizados. El cuarto nivel se caracteriza por la consolidación del uso del razonamiento matemático deductivo formal.

Hay estudios que muestran que la inmensa mayoría de los estudiantes españoles de enseñanza secundaria se encuentran en los niveles de razonamiento segundo y tercero (Jaime, 1993). No obstante, un objetivo razonable de la enseñanza de las matemáticas es que los estudiantes de las especialidades científicas de bachillerato hayan iniciado la adquisición del cuarto nivel antes de terminar el segundo curso, siendo capaces de hacer autónomamente demostraciones poco complejas. Esto quiere decir que se debe graduar la forma de presentación de los contenidos de matemáticas a lo largo de los 6 años de enseñanza secundaria de manera que se favorezca la transición del segundo al tercer nivel y de éste al cuarto. Veamos una implementación de estas ideas en un tema presente en todas las series de libros de texto de secundaria, que la mayoría de ellas desarrollan de manera muy similar: El teorema de Pitágoras y las relaciones trigonométricas elementales.

La primera toma de contacto con este teorema se hace en los primeros cursos de ESO, luego debe ser en el segundo nivel de Van Hiele, es decir manipulativamente. De esta forma, los estudiantes pueden descubrir y formular su enunciado geométrico a partir de la observación de varios triángulos rectángulos. Para formular el teorema de Pitágoras, los estudiantes dibujan sobre papel cuadriculado triángulos rectángulos y cuadrados sobre sus lados (Figura 1). Después calculan las áreas de los cuadrados, completan la tabla y enuncian sus conjeturas, que adquieren el carácter de propiedades demostradas.



Cateto mayor	Cateto menor	Hipotenusa
25	9	34

Figura 1. El teorema de Pitágoras en el segundo nivel de Van Hiele.

El teorema de Pitágoras vuelve a estudiarse en los últimos cursos de la ESO, cuando los alumnos están adquiriendo el tercer nivel de razonamiento. Ahora, además de recordar lo hecho en cursos anteriores, los profesores deben trabajar para hacer ver a sus alumnos que la verificación de una propiedad en unos pocos ejemplos no es suficiente para garantizar su veracidad y que es necesario encontrar una justificación general, independiente de un ejemplo concreto. En este contexto, son adecuadas algunas de las numerosas demostraciones gráficas y/o manipulativas del teorema de Pitágoras basadas en la descomposición y recomposición de figuras formadas por el triángulo y/o los cuadrados (Figura 2).

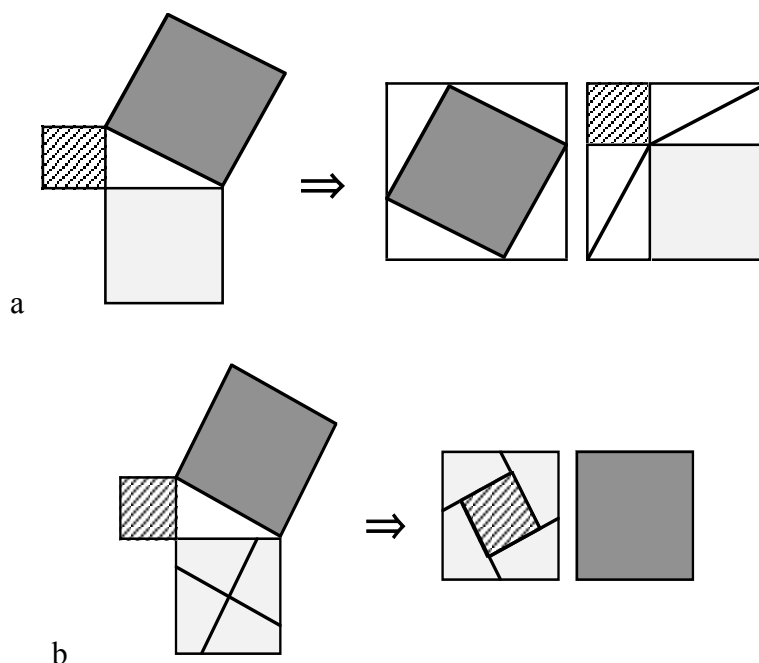


Figura 2. El teorema de Pitágoras en el tercer nivel de Van Hiele.

Este ejercicio no se puede quedar en la simple manipulación (actividad que sólo requiere razonamiento del segundo nivel), sino que el profesor debe inducir a los estudiantes a elaborar una justificación de su validez general. Las investigaciones sobre las creencias de los estudiantes respecto de la necesidad de demostrar una afirmación muestran que, en actividades como ésta, la mayoría de los estudiantes quedarán convencidos, tras hacer la manipulación unas pocas veces, de que siempre se puede hacer la transformación de los cuadrados para hacerlos coincidir. Por tanto, pedirles que demuestran que la transformación realizada es correcta no es adecuado, ya que ellos no entenderán la necesidad de demostrar algo obvio. El profesor no debe dirigir la atención de sus alumnos a la cuestión de si la transformación se puede hacer o no, sino que, admitido que ésta se puede hacer, debe dirigirla a la cuestión de por qué funciona esa transformación. De esta manera el hecho de la manipulación realizada pierde valor y hay que pensar en justificar cómo se ha realizado.

En este punto, es importante notar que las diferentes transformaciones de la figura

pitagórica plantean dificultades variadas. Por ejemplo, la transformación de la Figura 2a siempre es posible, mientras que la de la Figura 2b sólo es correcta cuando los segmentos que dividen al cuadrado del cateto mayor miden igual que la hipotenusa. Otra transformación interesante, completamente diferente de las anteriores, es la incluida en la carpeta de figuras que acompaña al *software Cabri-Géomètre*. Por tanto, debe elegirse una u otra transformación según el grado de adquisición del tercer nivel de razonamiento de los estudiantes y su capacidad para involucrarse en el juego de elaborar una justificación.

En cuarto de ESO suele iniciarse el estudio de la trigonometría, que se desarrolla y completa en los Bachilleratos de Ciencias y de Tecnología. Durante estos tres cursos, los estudiantes deben completar su adquisición del razonamiento de nivel 3 e iniciar la adquisición del razonamiento de nivel 4. Por tanto, podrán entender demostraciones formales sencillas explicadas por el profesor y ser capaces de desarrollar autónomamente algunas demostraciones sencillas y cortas que, poco a poco, podrán hacerse más largas o complejas.

El teorema de Pitágoras surge de nuevo, aunque esta vez no como objeto de estudio, sino como herramienta de deducción y demostración. La Figura 3 muestra una demostración sencilla, apropiada para la transición del tercer al cuarto nivel, de una relación trigonométrica. Posteriormente se estudian también teoremas como el del seno y el del coseno, cuyas demostraciones son más complejas.

ABC es un triángulo rectángulo luego, por el teorema de Pitágoras, $BC^2 + AC^2 = AB^2$. Dividiendo por AB^2 , queda:

$$\frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1$$

o, lo que es lo mismo:

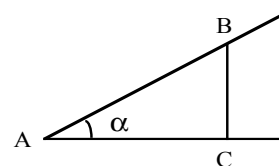
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$


Figura 3. El teorema de Pitágoras en la transición al cuarto nivel de Van Hiele.

Otros puntos de vista pertinentes sobre el problema del aprendizaje de la demostración son los proporcionados por quienes estudian las creencias de los estudiantes respecto al concepto de demostración (De Villiers, 1991; Harel y Sowder, 1996) y quienes estudian los tipos de demostraciones producidas por éstos, o la forma de producirlas (Arzarello et al., 1998; Balacheff, 1988; Boero et al., 1996; Harel y Sowder, 1996). La mayor parte de estos resultados son más útiles a los profesores que a los autores de diseños curriculares o libros de texto, pues permiten entender la forma de pensar de los estudiantes y los motivos de sus respuestas.

Los resultados de las investigaciones sobre las creencias de los estudiantes muestran que buena parte de ellos no sienten ni entienden la necesidad de una demostración para convencerse de la veracidad de una afirmación, y que dan mucho valor a la autoridad de los profesores y los libros de texto. Por otra parte, entre quienes han estudiado los tipos de demostración producidos por los estudiantes, destaca Balacheff (1988), que distingue:

* Demostraciones pragmáticas, basadas en el uso de ejemplos específicos y manipulaciones. El empirismo *naïf* es el tipo más elemental, consistente en verificar que la conjetura es cierta en unos pocos ejemplos. El ejemplo genérico es el tipo más elaborado, consistente en verificar la conjetura en un ejemplo elegido de forma que sea lo menos particular posible, para que actúe como representante de su clase.

* Demostraciones conceptuales, basadas en la formulación abstracta de propiedades y relaciones entre ellas. El experimento mental consiste en interiorizar las acciones y separarlas de los ejemplos en los que se han realizado. Aunque Balacheff no las menciona, entre estas demostraciones están las demostraciones formales usuales entre los matemáticos profesionales.

Finalmente, es interesante conocer otras dos investigaciones que han analizado aspectos cognitivos del proceso de búsqueda de conjeturas y, a continuación, elaboración de demostraciones. Boero et al. (1996) han prestado atención a los dos tipos de actividad realizada por los estudiantes durante la resolución de problemas de demostrar, una empírica dirigida a generar o verificar una conjetura, y otra deductiva dirigida a crear su demostración o justificación deductiva. Para estos investigadores se trata de dos partes de un continuo, que han denominado la “unidad cognitiva del teorema”. En la misma línea, Arzarello et al. (1998) han prestado atención al momento en que los estudiantes pasan de la actividad empírica a la deductiva, tratando de identificar los procesos mentales que desencadenan dicho cambio de actividad.

Análisis matemático. Los conceptos de análisis matemático enseñados en secundaria (función, límite, continuidad, derivada, integral, etc.) han sido objeto de interés de los investigadores en didáctica de las matemáticas desde hace varias décadas. El resultado son diversos modelos que describen y explican los procesos mentales de los estudiantes al aprender y usar estos conceptos. Uno de ellos, desarrollado por S. Vinner y otros investigadores, se basa en las nociones de “imagen conceptual” y “definición de un concepto” propias de un estudiante (Vinner, 1991). La imagen conceptual es el conjunto de información evocado por un estudiante (es decir, activado desde su memoria) cuando utiliza ese concepto conscientemente para resolver un problema. La definición de un concepto es la verbalización (recitado) hecha por un estudiante cuando se le pide que defina ese concepto (o cuando él cree que se le pide). En este contexto, el aprendizaje de conceptos matemáticos consiste en formar imágenes ricas y completas de los conceptos estudiados, adecuadamente conectadas a definiciones correctas de esos conceptos, y la misión de los profesores es poner los medios para que sus alumnos adquieran la experiencia necesaria para poder crear tales imágenes conceptuales.

El modelo de Vinner es especialmente interesante por su compatibilidad con otros modelos teóricos. Por ejemplo, en geometría, los niveles de Van Hiele conllevan la existencia de imágenes conceptuales cada vez más completas. Otra característica destacada del modelo de Vinner es su aplicabilidad en diversas áreas de las matemáticas. Existen numerosas experiencias en análisis, geometría y otras áreas que muestran estudiantes con una total separación y

desconexión entre su imagen conceptual y su definición de un concepto. Por ejemplo, en Gutiérrez y Jaime (1996) usamos este modelo para analizar los conocimientos de estudiantes de Magisterio respecto del concepto de altura de un triángulo.

Muchos profesores creen que los conceptos matemáticos deben presentarse mediante sus definiciones formales, ya que los estudiantes comprenden los conceptos a partir de sus definiciones, y que utilizan éstas para resolver problemas y demostrar teoremas. Sin embargo, esto dista mucho de ser cierto, pues la mayoría de los estudiantes usan de manera casi exclusiva sus imágenes conceptuales tanto para dar significado a los nuevos conceptos como para resolver problemas (Vinner, 1991). Los profesores pueden basarse en el modelo de Vinner para analizar las respuestas de sus alumnos, explicar los motivos de sus errores, y tomar medidas adecuadas para tratar de corregirlos. También pueden usarlo como referencia para organizar la enseñanza. Así, este modelo suele asociarse a la enseñanza de conceptos mediante ejemplos y contraejemplos, los cuales, adecuadamente presentados por el profesor y analizados por los alumnos, permiten a éstos diferenciar entre las propiedades necesarias del concepto y los atributos irrelevantes que pueden dar lugar a imágenes conceptuales prototípicas parciales o erróneas (Hershkowitz, Bruckheimer y Vinner, 1987; Hershkowitz, 1990; Gutiérrez y Jaime, 1996).

Diversos investigadores han tomado el modelo de Vinner como marco teórico para analizar varios conceptos de análisis matemático, describir las imágenes conceptuales usuales de los estudiantes o diseñar unidades de enseñanza. Vinner (1983) planteó diversas preguntas para observar las imágenes y las definiciones del concepto de función que tenían 147 estudiantes de 15 a 17 años matriculados en una asignatura de cálculo avanzado (Figura 4).

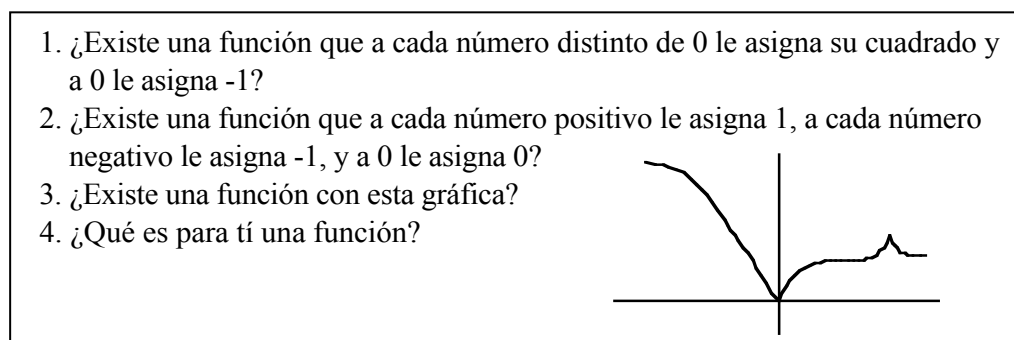


Figura 4.

El primer resultado llamativo es que, a pesar de que la muestra era un grupo de buenos estudiantes, sólo el 57% dieron una definición correcta de función en la pregunta 4, y sólo la tercera parte de éstos contestaron correctamente a las tres primeras preguntas. Ello corrobora la afirmación hecha antes de que la mayoría de los estudiantes sólo (o predominantemente) usan su imagen conceptual para resolver problemas. Los porcentajes de respuestas correctas a las tres primeras preguntas fueron del 39%, 66% y 57%, respectivamente. Lo más interesante de este estudio es ver los diferentes tipos de imágenes conceptuales detectados:

- Una función debe estar definida por una sola regla (verbal o algebraica).
- Cuando una función está definida por varias reglas, sus dominios deben ser intervalos o semirrectas (no pueden ser puntos aislados).
- Las funciones deben tener gráficas “razonables” (con cierta regularidad).

En varios estudios paralelos, se ha utilizado el modelo de Vinner para analizar la influencia de la enseñanza en las concepciones de estudiantes sobre los conceptos de continuidad y función lineal (Delgado y Azcárate, 1996; García y Azcárate, 1996), y para conocer las imágenes conceptuales que tenían profesores universitarios sobre el concepto de ecuación diferencial (Moreno y Azcárate, 1996).

Respecto del concepto de continuidad, se observa que la imagen conceptual inicial de la mayoría de los estudiantes está basada en la idea intuitiva, relacionada con el uso cotidiano de la palabra “continuo”, de función continua como aquella cuya gráfica se puede dibujar con un solo trazo, sin levantar el lápiz del papel. Esta imagen conceptual es un obstáculo que influye, por ejemplo, en la comprensión de las funciones definidas por partes. Los autores de esta investigación tratan de anular esta imagen errónea planteando actividades con el objetivo de producir un conflicto cognitivo en los estudiantes que les ayude a formar una imagen conceptual más correcta.

En el concepto de función lineal hay dos componentes importantes: La idea de pendiente de la recta y la de corte con el eje de ordenadas. Entre los estudiantes observados surgen tres imágenes conceptuales, basadas en las ideas de inclinación de la recta, razón de las variaciones de x e y , y pendiente como coeficiente de la x en la expresión algebraica explícita. Esta investigación muestra que a los estudiantes les resulta difícil integrar estos tres significados, y que en ocasiones conviven una imagen conceptual inicial con otra diferente inducida por la enseñanza.

Otra investigación reciente (Rasslan y Vinner, 1997 y 1998) ha analizado las imágenes conceptuales que tienen estudiantes de 15 a 17 años de función de/creciente y de función im/par. Los investigadores administraron un cuestionario en el que se preguntaba sobre las características de de/crecimiento o de paridad de funciones presentadas gráficamente y algebraicamente. Entre los resultados destaca que los conceptos de crecimiento y decrecimiento son fáciles para los estudiantes de los últimos cursos de secundaria, pues cerca de las dos terceras partes de ellos tienen imágenes conceptuales correctas conectadas a caracterizaciones basadas en la definición (para todo $a > b$, $f(a) > f(b)$), y en propiedades de la pendiente de la curva o de su derivada.

No ocurre lo mismo con las funciones pares e impares, pues menos de la mitad de los estudiantes identifican correctamente las funciones y dan explicaciones adecuadas. En este estudio se ve también que hay bastante diferencia entre las respuestas cuando las funciones se presentan algebraica y gráficamente. Por lo tanto, los profesores deben tener estos resultados en

cuenta al enseñar estos conceptos, para graduar correctamente los ejercicios que planteen a sus alumnos.

Los estudios descritos en este artículo son ejemplos que muestran cómo, para organizar la enseñanza de las matemáticas en secundaria, los conceptos matemáticos deben ser analizados desde una perspectiva didáctica, y que la secuenciación de la actividad en el aula no puede basarse únicamente en la organización lógico-deductiva de los conceptos, sino que es necesario tener en cuenta, de manera destacada, los factores psicológicos que más influyen en la comprensión de estos conceptos por los estudiantes.

Referencias

- Arzarello, F. et al. (1998): A model for analysing the transition to formal proofs in geometry, en *Proceedings of the 22th PME Conference* 2, pp. 24-31.
- Balacheff, N. (1988): *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège* (tesis doctoral). (Univ. J. Fourier: Grenoble, Francia).
- Boero, P. et al. (1996): Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems, en *Proceedings of the 20th PME Conference* 2, pp. 113-120.
- Clements, D.H.; Battista, M.T. (1992): Geometry and spatial reasoning, en Grouws, D.A. (ed.): *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (MacMillan: N. York, USA), pp. 420-464.
- De Villiers, M. (1991): Pupils' needs for conviction and explanation within the context of geometry, *Pythagoras* 26, pp. 18-27.
- Delgado, C.; Azcárate, C. (1996): Study of the evolution of graduate students' concept images while learning the notions of limit and continuity, en *Proceedings of the 20th PME Conference* 2, pp. 289-296.
- Díaz, J. (1991): Hacia una teoría de la didáctica de la matemática, en Gutiérrez, A. (ed.) *Area de conocimiento didáctica de la matemática* (Síntesis: Madrid), pp. 105-148.
- García, M.C.; Azcárate, C. (1996): An analysis of some students' concept images related to the linear function when using a "generic organizer", en *Proceedings of the 20th PME Conference* 2, pp. 385-392.
- Gutiérrez, A. (1991): La investigación en didáctica de las matemáticas, en Gutiérrez, A. (ed.) *Area de conocimiento didáctica de la matemática* (Síntesis: Madrid), pp. 149-194.
- Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1996): Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio, en Giménez, J.; Llinares, S.; Sánchez, M.V. (eds.): *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (Comares: Granada), pp. 143-170.
- Harel, G.; Sowder, L. (1996): Classifying processes of proving, en *Proceedings of the 20th PME Conference* 3, pp. 59-66.
- Hershkowitz, R. (1990): Psychological aspects of learning geometry, en Nesher, P.; Kilpatrick,

- J. (eds.): *Mathematics and cognition* (Cambridge U.P.: Cambridge, G.B.), pp. 70-95.
- Hershkowitz, R.; Bruckheimer, M.; Vinner, S. (1987): Activities with teachers based on cognitive research, en Lindquist, M.M. (ed.): *Learning and teaching geometry, K—12* (1987 yearbook) (N.C.T.M.: Reston, USA), pp. 222-235.
- Jaime, A. (1993): *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento* (tesis doctoral). (Univ. de Valencia: Valencia).
- Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1990): Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele, en Llinares, S.; Sánchez, M.V. (eds.): *Teoría y práctica en educación matemática* (Alfar: Sevilla, Spain), pp. 295-384.
- Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1996): *El grupo de las isometrías del plano*. (Síntesis: Madrid).
- Moreno, M.; Azcárate, C. (1996): Teaching differential equations to chemistry and biology students: An overview on methodology of qualitative research. A case study, en *Proceedings of the 20th PME Conference* 4, pp. 11-18.
- Rasslan, S.; Vinner, S. (1997): Images and definitions for the concept of even/odd function, en *Proceedings of the 21th PME Conference* 4, pp. 41-48.
- Rasslan, S.; Vinner, S. (1998): Images and definitions for the concept of increasing / decreasing function, en *Proceedings of the 22th PME Conference* 4, pp. 33-40.
- Vinner, S. (1983): Concept definition, concept image and the notion of function, *International Journal of Math. Education in Science and Technology* 14.3, pp. 293-305.
- Vinner, S. (1991): The role of definitions in the teaching and learning of mathematics, en Tall, D. (ed.): *Advanced Mathematical Thinking* (Kluwer: Dordrecht, Holanda), pp. 65-81.