Ángel Gutiérrez
Dpto. de Didáctica de la Matemática
Universidad de Valencia (Valencia, España)
angel.gutiérrez@uv.es

Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría euclidiana en secundaria

Resumen

En este artículo hago un recorrido por los principales temas de la geometría euclidiana escolar, reflexionando sobre resultados de la investigación didáctica y presentando a los profesores de Secundaria sugerencias y ejemplos para aplicar dichos resultados a la enseñanza de la geometría euclidiana en sus clases. En primer lugar, a modo de marco teórico de referencia para el resto del artículo, presento los Niveles de razonamiento matemático de Van Hiele y describo las líneas maestras que caracterizan la capacidad de visualización y de razonamiento espacial de los estudiantes. Después abordo la enseñanza y el aprendizaje de las figuras geométricas planas y espaciales, de la congruencia (isometrías) y de la semejanza (proporcionalidad geométrica). Por último, doy un ejemplo de aplicación de la geometría euclidiana a otras áreas de las matemáticas, concretamente al análisis matemático.

Abstract

In this paper I analyze the main topics of school Euclidean geometry from the viewpoint of mathematics education research, with the aim of providing Secondary school teachers with suggestions and examples to apply such research results to their classes. First, I characterize the theoretical framework of the paper by describing both Van Hiele Levels of mathematical reasoning and the main components of students' capability for visualization and spatial reasoning. Then, the paper deals with teaching and learning of plane and space figures, congruence (isometries) and geometric similarity. Finally, I provide an example of application of Euclidean geometry to other areas of mathematics, namely to calculus.

Introducción

Históricamente, la geometría (en particular la euclidiana) ha tenido siempre un papel destacado en la aplicación de las matemáticas a otros campos de la actividad humana. Durante siglos, la geometría euclidiana fue el núcleo central de las matemáticas. En la actualidad, la geometría ya no juega ese papel tan destacado, pero sigue siendo una herramienta muy útil para el desarrollo de otras áreas de las matemáticas, para el desarrollo de otras ciencias y para la aplicación de las matemáticas en otros campos del saber.

Es sabido que hasta mediados del siglo XX la geometría ocupaba en los currículos de los diferentes niveles educativos un lugar como mínimo tan relevante como la aritmética, el álgebra o el análisis matemático. Sin embargo, en las décadas de los 60 a los 80, el auge del movimiento de las "matemáticas modernas" y sus propuestas de currículos centrados en las estructuras algebraicas produjo una decadencia de la enseñanza de la geometría euclidiana en todos los niveles educativos. En algunos países (entre ellos España) sólo se estudiaba geometría euclidiana en Primaria, donde se abordaban unos pocos contenidos básicos, como reconocimiento de las figuras planas y espaciales más elementales y aprendizaje memorístico de sus nombres, definiciones, alguna propiedad básica y las fórmulas de cálculo de perímetros, áreas y volúmenes. En otros países (entre ellos EE.UU.) la geometría escolar se estudiaba casi exclusivamente en Secundaria, con un enfoque muy formal ya que era el contexto en el que se pretendía enseñar a los estudiantes los métodos de trabajo de tipo lógico-deductivo y a realizar demostraciones matemáticas.

La investigación didáctica ha demostrado claramente que ambas tendencias curriculares, junto a ciertas ventajas, tienen serias deficiencias que impiden a ambas alcanzar el objetivo de proporcionar a los estudiantes una formación geométrica adecuada y una comprensión profunda de los conceptos estudiados. Como consecuencia de esta evidencia, a finales de la década de los 80 comienzan a aparecer numerosos movimientos, desde locales a internacionales, que trabajan para reformar los currículos de matemáticas y, en particular, para que los nuevos currículos reconozcan la importancia de una buena formación geométrica de los estudiantes de los diferentes niveles educativos. Estos movimientos no proponen la vuelta a los antiguos métodos de enseñanza memorísticos y formalistas, sino que plantean diversos modelos de enseñanza y aprendizaje, la mayoría de los cuales coinciden en que la enseñanza de las matemáticas (y de la geometría en particular) debe basarse en la actividad de los estudiantes y en su adquisición de experiencias.

El objetivo de este artículo es ofrecer a los profesores de matemáticas de Secundaria algunas reflexiones, basadas en resultados recientes de la investigación en didáctica de las matemáticas, sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría euclidiana en este nivel educativo.

Identificación de un marco de referencia: Los niveles de Van Hiele

La investigación en didáctica de las matemáticas proporciona diferentes modelos teóricos que aportan ópticas y pautas para interpretar la enseñanza o el aprendizaje de las matemáticas. Uno de estos modelos teóricos, que ha demostrado ser especialmente adecuado para la enseñanza de la geometría, son los "niveles de razonamiento matemático de Van Hiele". En el resto del artículo tomaré este modelo como marco de referencia para organizar y explicar las propuestas de enseñanza y aprendizaje que presento, por lo que primero hago una descripción, necesariamente breve, de los niveles de Van Hiele.

El modelo de Van Hiele ofrece una detallada caracterización de los diferentes tipos de razonamiento matemático que podemos encontrar en los estudiantes de geometría de los sucesivos niveles educativos, así como de los cambios conceptuales asociados al paso de un nivel de razonamiento al siguiente. Existen numerosas referencias en las que se pueden encontrar descripciones detalladas de los niveles de Van Hiele (Burger, Shaughnessy, 1986; Clements, Battista, 1992; Fuys et al., 1988; Gutiérrez, Jaime, 1998; Jaime, Gutiérrez, 1990, 1996; Van Hiele 1986). Brevemente, las características de cada nivel son:

- *Nivel 1:* Los estudiantes describen, identifican y clasifican las figuras geométricas como un todo y, al describirlas, se basan preferentemente en sus propiedades físicas (posición, forma, etc.). Los estudiantes de Secundaria suelen utilizar términos matemáticos, pero se trata de elementos o propiedades elementales o bien usan esos términos incorrectamente, pues los estudiantes del nivel 1 sólo son capaces de comprender las propiedades matemáticas más elementales de las figuras geométricas.
- *Nivel 2:* Los estudiantes describen, identifican y clasifican las figuras geométricas basándose en sus propiedades matemáticas, pero no encuentran relación entre unas propiedades y otras. También pueden realizar actividades de descubrimiento empírico y generalización de nuevas propiedades al observar dichas propiedades en uno o varios ejemplos. Las justificaciones (demostraciones) elaboradas por los estudiantes de este nivel consisten en la verificación en uno o más ejemplos concretos.
- *Nivel 3:* Los estudiantes perciben las relaciones entre propiedades de las figuras geométricas y pueden realizar clasificaciones basadas en dichas propiedades y relaciones. También pueden realizar razonamientos deductivos o demostraciones de tipo informal. En estas demostraciones los estudiantes todavía no pueden realizar razonamientos puramente abstractos, por lo que los ejemplos siguen teniendo un papel destacado, pero sólo como ayuda y ya no como demostración por sí mismos.
- *Nivel 4:* Los estudiantes son capaces de realizar razonamientos puramente abstractos, comprenden las características de un sistema axiomático (en particular del euclidiano; el Libro I de los Elementos de Euclides es un buen ejemplo), saben utilizar axiomas, definiciones, teoremas, etc., y pueden realizar demostraciones formales usando diferentes procedimientos.

Según el modelo de Van Hiele, el progreso en el nivel de razonamiento de un estudiante no es resultado de su desarrollo biológico, sino de la adquisición de suficiente experiencia en el uso de las nuevas formas de razonamiento. Por lo tanto, los contextos de aprendizaje adecuados ayudan a los estudiantes, mientras que los contextos que no les proporcionan dicha experiencia frenan su progreso. El modelo de Van Hiele no se alinea con ninguna metodología de enseñanza en particular, sino que es compatible con cualquiera que propicie la adquisición de experiencia por los estudiantes. Para ayudar a los profesores a crear entornos de enseñanza adecuados, el modelo de Van Hiele propone la organización de la enseñanza sobre la base de cinco "fases de aprendizaje": información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración. No entraré aquí en la descripción de las fases, pues no son necesarias para el resto del capítulo; en Jaime, Gutiérrez (1990) puede leerse una descripción detallada de las fases de aprendizaje.
En unas condiciones óptimas de aprendizaje, con un currículo adecuado y profesores bien formados, un estudiante de capacidad normal puede alcanzar el nivel 2 en los últimos cursos de Primaria (a los 9-11 años) y el nivel 3 en los cursos intermedios de Secundaria (a los 15-16 años). Un estudiante inteligente puede alcanzar estos niveles un curso antes que sus compañeros y, además, iniciar el acceso al nivel 4 antes de terminar la Secundaria. Sin embargo, las condiciones reales pocas veces son así pues, como muestran diversos estudios longitudinales, al acabar

la Primaria la mayoría de los estudiantes no han completado la adquisición del razonamiento de nivel 2, y sólo una cantidad reducida de ellos terminan la Secundaria habiendo alcanzado el nivel 3 (Gutiérrez, Jaime, 1998 se refiere a estudiantes españoles).

Un aspecto muy importante en los cursos de geometría de Secundaria es aprender a realizar demostraciones. Como hemos visto, los estudiantes que razonan en el nivel 2 demuestran la veracidad de una propiedad mostrando ejemplos en los que se cumple (estrategia de sobra conocida por todos los profesores de matemáticas de Secundaria). El paso al nivel 3 supone, en este componente del razonamiento, comprender por qué la verificación en casos particulares no es suficiente como demostración y la necesidad de realizar razonamientos deductivos que, aunque estén apoyados en ejemplos, sólo utilicen propiedades generales. En el nivel 3, los estudiantes pueden empezar a tomar contacto con demostraciones formales sencillas guiados por el profesor, pero sólo podrán realizar demostraciones formales si son muy simples (de uno o pocos pasos) y tienen algún tipo de guía. Finalmente, el paso al nivel 4 se logra cuando los estudiantes consiguen que los ejemplos dejen de ser un apoyo necesario y empiezan a realizar deducciones puramente abstractas, al mismo tiempo que empiezan a desarrollar su habilidad para usar el lenguaje matemático formal.

Desarrollo de la visualización y el razonamiento espacial

Las capacidades de visualización y razonamiento espacial son herramientas imprescindibles para el correcto aprendizaje comprensivo de las matemá ticas. Al mencionar estos dos términos, nos encontramos ante un conjunto de elementos de características diversas, que resumiré a continuación, necesarios para que los estudiantes de Secundaria puedan realizar con eficacia diversas acciones mentales necesarias en numerosas actividades matemáticas, especialmente en el área de la geometría, como calcular áreas y volúmenes, dibujar e interpretar representaciones planas de cuerpos espaciales, identificar movimientos en el plano o el espacio, analizar estructuras gráficamente complejas, identificar posiciones relativas de puntos, rectas y planos en el espacio, etc.

La investigación didáctica viene aportando desde hace bastantes años pruebas de que la enseñanza específica aumenta la capacidad de los estudiantes para aplicar la visualización y el razonamiento espacial al resolver problemas de matemáticas. Dicha enseñanza debe iniciarse en Primaria y completarse y afianzarse en los primeros cursos de Secundaria, obteniéndose mejores resultados cuando la enseñanza se basa en el uso de materiales manipulativos (Bishop, 1980; Clements, Battista, 1992; Gutiérrez, 1998).

Diversas investigaciones didácticas han identificado tres tipos de elementos como componentes centrales de la visualización y del razonamiento espacial. El elemento básico en toda actividad son las *imágenes mentales*, es decir las representaciones mentales que las personas podemos hacer de objetos físicos, relaciones, conceptos, etc. En el contexto de las matemáticas, Presmeg (1986) ha encontrado diversos tipos de imágenes mentales:

1) *Imágenes concretas pictóricas.* Se trata de imágenes figurativas de objetos físicos. Con frecuencia se las denomina "fotografías en la mente".

2) *Imágenes de fórmulas.* Consisten en la visualización mental de fórmulas o relaciones esquemáticas tal como se las ve, por ejemplo, en el libro de texto.

3) *Imágenes de patrones.* Son imágenes de esquemas visuales correspondientes a relaciones abstractas. A diferencia del tipo anterior, no se

visualiza la relación propiamente dicha (una fórmula generalmente), sino alguna representación gráfica de su significado.
4) *Imágenes cinéticas.* Se trata de imágenes en parte físicas y en parte mentales, ya que en ellas tiene un papel importante el movimiento de manos, cabeza, etc.
5) *Imágenes dinámicas.* Son imágenes exclusivamente mentales en las que los objetos imaginados o algunos de sus elementos se desplazan o transforman.

Las actividades que se realizan con las imágenes mentales se pueden encuadrar, según Bishop (1989), en dos tipos de *procesos de visualización*, cuyas características son:
1) *Procesamiento visual.* Este es el proceso de conversión de información abstracta o no figurativa en imágenes mentales y también el proceso de transformación de una imagen mental ya formada en otra diferente.
2) *Interpretación de información figurativa.* Este es el proceso de comprensión e interpretación de imágenes mentales para extraer la información, generalmente abstracta, que contienen. Por lo tanto, este proceso puede verse como el inverso del anterior.

El tercer componente de la visualización y el razonamiento espacial son las *habilidades de visualización* utilizadas por los individuos para la realización de los procesos mencionados antes. Del Grande (1990), a partir de las propuestas de diversos autores, describe las siguientes habilidades, cuyo ámbito de aplicación trasciende el campo de las matemáticas:
1) *Coordinación motriz de los ojos.* Es la habilidad para seguir con los ojos el movimiento de los objetos de forma ágil y eficaz. Normalmente, se desarrolla completamente en los primeros años de vida de los niños.
2) *Identificación visual.* Es la habilidad para reconocer una figura aislándola de su contexto. Se utiliza, por ejemplo, cuando la figura está formada por varias partes, como en los mosaicos, o cuando hay varias figuras superpuestas.
3) *Conservación de la percepción.* Es la habilidad para reconocer que un objeto mantiene su forma y otras características aunque deje de verse total o parcialmente, por ejemplo porque haya girado o se haya ocultado.
4) *Reconocimiento de posiciones en el espacio.* Es la habilidad para relacionar la posición de un objeto con uno mismo (el observador) o con otro objeto que actúa como punto de referencia.
5) *Reconocimiento de las relaciones espaciales.* Es la habilidad que permite identificar correctamente las relaciones entre diversos objetos situados en el espacio. Por ejemplo, que están girados, son perpendiculares, simétricos, etc.
6) *Discriminación visual.* Es la habilidad que permite comparar varios objetos identificando sus semejanzas y diferencias visuales. Un ejemplo es el clásico pasatiempo de los diarios de encontrar las diferencias entre dos figuras.
7) *Memoria visual.* Es la habilidad para recordar las características visuales y de posición que tenían en un momento dado un conjunto de objetos que estaban a la vista pero que ya no se ven o que han sido cambiados de posición.

Se pueden definir otras habilidades interesantes, pero casi siempre se trata de combinaciones de las habilidades indicadas antes. Por ejemplo, la habilidad de "conservación de las relaciones espaciales", que nos permite reconocer que las posiciones relativas de varios objetos no varían cuando se les somete al mismo movimiento (giro o traslación), es una combinación de las habilidades de reconocimiento de las relaciones espaciales y de conservación de la percepción.
Es evidente que al estudiar geometría espacial es particularmente necesario el uso de la visualización y el razonamiento espacial. Las habilidades de estudiantes y profesores para producir representaciones planas adecuadas de cuerpos

espaciales y para interpretarlas correctamente son elementos necesarios para lograr el éxito en este campo. En este sentido, resulta particularmente interesante el planteamiento de Parzysz (1988) que alerta sobre las consecuencias de la pérdida de información que, inevitablemente se produce al representar un cuerpo espacial en el plano. Por tanto, es necesario que los profesores y autores de libros de texto desarrollen unidades de enseñanza para que los estudiantes puedan practicar las habilidades necesarias para establecer la conexión bidireccional entre el plano y el espacio. Veamos algunos ejemplos de actividades dirigidas al aprendizaje de representaciones planas de poliedros (Guillén, 1991):

1) El profesor proporciona a los estudiantes poliedros hechos con polígonos encajables (por ejemplo piezas de Polydron o polígonos de cartulina como los de la figura 1, que se enganchan mediante gomas elásticas). El profesor pide a los estudiantes que desmonten los poliedros de manera que todas las caras se mantengan conectadas y formen una estructura plana.

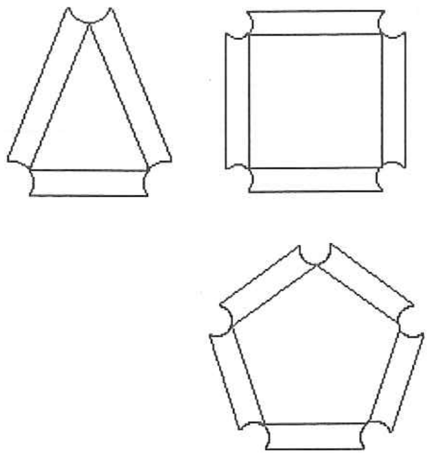

Figura 1.

Polígonos para construir poliedros.

2) Dados algunos examinós (figuras formadas por 6 cuadrados unidos por algún lado), los estudiantes deben identificar los que son desarrollos del cubo (figura 2).

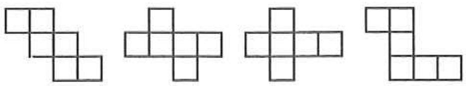

Figura 2.

¿Qué examinós son desarrollos del cubo?

3) Los estudiantes disponen de cubos encajables (por ejemplo Centicubos o Multilink) para construir los sólidos representados en la figura 3. Como actividad inversa, el profesor da a los estudiantes un módulo hecho con cubos y una hoja con la trama isométrica impresa y ellos deben dibujar las proyecciones ortogonales e isométrica del módulo.

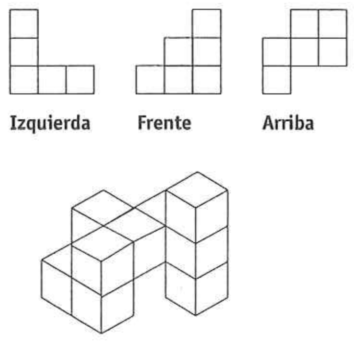

Figura 3.

Proyecciones planas de sólidos: Ortogonal e isométrica.

Es conveniente tener en cuenta que aprender a dibujar una proyección isométrica es bastante más difícil de lo que cabría esperar. Por ejemplo, las figuras 4b y 4c muestran dos intentos consecutivos de un estudiante de copiar en una hoja con la trama isométrica la figura 4a, que estaba dibujada en la misma hoja. Se puede observar cómo la principal dificultad viene de la incapacidad del estudiante para coordinar las direcciones de las distintas aristas y caras.

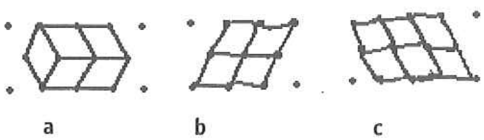

Figura 4.

Por otra parte, dibujar las proyecciones ortogonales de un sólido es bastante fácil, pero construir un sólido a partir de sus proyecciones ortogonales puede resultar complicado (Gutiérrez, 1998).

Enseñanza y aprendizaje de la geometría euclidiana en Secundaria

A pesar del título de esta sección, no es razonable hacer propuestas metodológicas ni de contenidos para este nivel educativo de manera global, pues en los seis cursos que incluye la Secundaria argentina (también la española) hay enormes diferencias entre los estudiantes de los primeros y de los últimos cursos. Además, una característica de la geometría que se estudia en este nivel educativo es que la mayoría de los temas se pueden estudiar con varios grados de sofisticación matemática y, por tanto, en diversos cursos o con alumnos de diferentes habilidades. Por lo general, los alumnos de los primeros cursos de Secundaria necesitan estudiar geometría en contextos prácticos y manipulativos, propios del nivel 2 de razonamiento, pero con un enfoque tendente, si es necesario, a completar la adquisición del razonamiento de nivel 2 y, después, a iniciar el progreso hacia el razonamiento del nivel 3. Por el contrario, en los últimos cursos de Secundaria el estilo de enseñanza debe ser más abstracto (aunque no formalista), para completar la adquisición del nivel 3 y, si los estudiantes están preparados, iniciar el progreso hacia el razonamiento del nivel 4.

Los profesores y autores de libros de texto deben considerar como componente central de sus materiales de enseñanza la idea de curriculum en espiral: los temas principales se estudian durante varios cursos (no necesariamente consecutivos) a lo largo de la Secundaria, de manera que en cada curso se enlaza con los contenidos aprendidos antes y se desarrollan estudiando nuevos conceptos, propiedades y estrategias de resolución de problemas, basando los nuevos contenidos en los anteriores. Otra característica del curriculum en espiral es que en cada curso se trabaja según el nivel de razonamiento de los estudiantes, por lo que también es conveniente retomar contenidos ya estudiados en cursos anteriores para analizarlos desde un punto de vista superior; por ejemplo, con los estudiantes que están en el nivel 3, propiedades importantes que se habían demostrado mediante ejemplos (nivel 2), como pueden ser los teoremas de Pitágoras o Tales, se vuelven a demostrar mediante un razonamiento deductivo (nivel 3).

Estudio de las figuras planas y espaciales

El estudio de las figuras planas (polígonos y circunferencia) y espaciales (poliedros y cuerpos de revolución) comienza en Primaria y se completa en los primeros cursos de Secundaria. El foco de atención estará en el aprendizaje y la comprensión de las definiciones, clasificaciones, propiedades métricas y relaciones entre diferentes propiedades de una misma familia. La metodología de enseñanza de estos contenidos deberá variar según el nivel de razonamiento de los estudiantes: mientras estén en el nivel 2, su actividad será manipulativa, induciendo las nuevas propiedades a partir de la experimentación y los ejemplos; cuando pasen al nivel 3, podrán trabajar en el aprendizaje de propiedades más complejas, cuya comprensión requiere usar razonamiento deductivo, así como en buscar relaciones de dependencia entre unas propiedades y otras (implicaciones lógicas). Por ejemplo, una actividad muy frecuente es contar el número de caras, aristas y vértices de diversos poliedros para obtener la fórmula de Euler ($V + C = A + 2$). Los estudiantes de nivel 2 resuelven esta actividad contando de forma ordenada los elementos de cada tipo en los poliedros. Estos recuentos son fáciles en los prismas y pirámides, pero pueden resultar complicados en otros poliedros, como el dodecaedro o el icosaedro. A los estudiantes del nivel 3 se les debe pedir que, en vez de contar, analicen la estructura de cada poliedro para obtener procedimientos más eficaces de recuento.

Clasificar las familias de cuadriláteros y triángulos es una actividad importante, necesaria para comprender la estructura interna de estas familias de polígonos y que tiene trascendencia en otras áreas de las matemáticas. Desde la perspectiva de las matemáticas, el problema de la clasificación de cuadriláteros y triángulos surge porque en los libros de texto se utilizan dos definiciones diferentes, no equivalentes, de rectángulo, rombo, trapecio o triángulo isósceles. Esto se traduce en que, según qué definiciones se usen, las familias de los cuadriláteros o los triángulos quedan clasificadas de formas diferentes. Por ejemplo, definiendo el rectángulo como el "cuadrilátero que tiene los ángulos rectos", los cuadrados son una subfamilia de los rectángulos; por el contrario, definiendo el rectángulo como el "cuadrilátero que tiene los ángulos rectos y lados de diferentes longitudes", los cuadrados y los rectángulos son familias disjuntas.

En algunas de las primeras publicaciones sobre los niveles de Van Hiele se dice que una característica de los estudiantes del nivel 2 es que no son capaces de hacer clasificaciones inclusivas de polígonos, mientras que los estudiantes del nivel 3 se caracterizan porque sí son capaces de hacerlas. Investigaciones más recientes han puesto en evidencia que esta distinción entre los niveles 2 y 3 no se puede hacer de manera tan taxativa pues, por ejemplo, cualquier estudiante del nivel 2 rechaza que los cuadrados sean rectángulos, pero admite sin dificultad que los cuadrados son paralelogramos. La diferencia entre los estudiantes de los niveles 2 y 3 no está en aceptar una clasificación u otra, sino en aceptar o no la existencia de *varias* clasificaciones diferentes dependiendo de las definiciones aceptadas. Es decir que una evidencia de que los estudiantes están razonando en el nivel 3 es que son capaces de entender y utilizar las diferentes clasificaciones de triángulos y cuadriláteros, *pasando de una a otra* cuando cambia alguna definición, mientras que los estudiantes del nivel 2 sólo aceptan una definición para cada polígono y, por tanto, una clasificación (Corberán y otros, 1994).

En los libros de texto, el trabajo en el mundo de los sólidos queda generalmente reducido a estudiar memorísticamente las definiciones de las principales familias (prismas, pirámides, poliedros regulares y cuerpos de revolución), algunas propiedades básicas y fórmulas de áreas y volúmenes. Los profesores deberían dedicar más tiempo a este tema, pues se trata de un entorno de extraordinaria riqueza, en el que se combinan numerosos conceptos y propiedades estudiados de manera aislada en geometría plana con los conceptos y propiedades específicos de los cuerpos espaciales. El estudio de los sólidos puede iniciarse en Primaria, con actividades de reconocimiento propias de los niveles de razonamiento 1 y 2, para continuar en Secundaria con actividades cada vez más sofisticadas propias de los niveles de razonamiento 2, 3 y 4, planteadas a medida que los estudiantes progresan en su capacidad de razonamiento matemático.

Ya he comentado la necesidad de desarrollar adecuadamente la visualización y el razonamiento espacial para estudiar geometría espacial, basándose, entre otras cosas, en la utilización por los estudiantes de materiales manipulativos. Existen en el mercado conjuntos de sólidos de madera, plástico o cartulina que, si son suficientemente variados, facilitan el desarrollo de la enseñanza práctica de este tema, pues permiten que todos los alumnos tengan acceso a los sólidos reales. Por otra parte, también existen programas de ordenador (algunos comerciales y otros gratuitos; una búsqueda en internet suele dar buenos resultados) que permiten realizar diversas manipulaciones con los sólidos. Una característica común a la mayoría de estos programas es que permiten girar los sólidos en la pantalla en cualquier dirección, lo cual imita suficientemente bien la actividad manipulativa que se puede hacer con sólidos reales. Además, cada programa tiene algunas características que lo diferencian de los otros. Así, hay programas que permiten representar innumerables sólidos diferentes y transformar unos en otros. También hay programas que permiten obtener los desarrollos planos de los poliedros representados. Otros programas permiten realizar cálculos métricos. En algunos programas, los poliedros que se pueden representar son sólo los que incluye el programa, mientras que en otros el usuario puede definir nuevos poliedros, generalmente dando al programa un listado con las coordenadas (x, y, z) de los vértices y las secuencias de vértices que forman las caras.

Un trabajo muy interesante para los estudiantes de Secundaria es el relacionado con las secciones planas de sólidos, tanto de poliedros co-mo de cuerpos de revolución (cónicas). También hay programas de ordenador que permiten realizar secciones planas de sólidos (figura 5) marcando tres puntos en la superficie del sólido para definir el plano de corte; a continuación se elige una de las partes en que ha quedado dividido el sólido y se sigue trabajando con ella para analizarla, hacer nuevas secciones, obtener su desarrollo plano, etc. (Schumann, 2000).

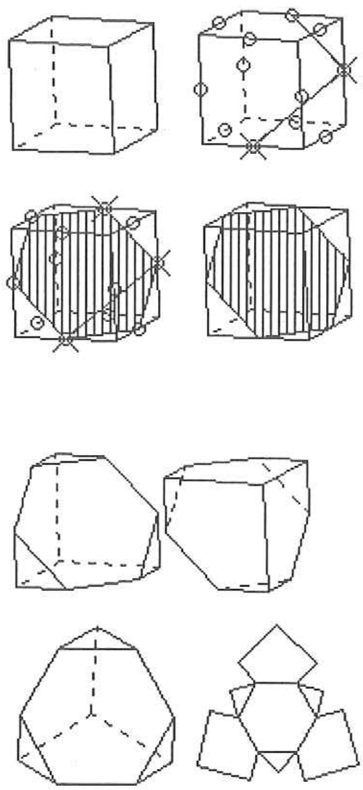

Figura 5.

Proceso de sección de un cubo y creación del desarrollo plano de una de las partes

Si los estudiantes empiezan haciendo diferentes secciones de un cubo de manera libre, el profesor puede seguir planteándoles algunas preguntas para que investiguen, enuncien conjeturas y las demuestren (de manera adecuada a su nivel de razonamiento). Por ejemplo:

- *¿Se pueden obtener secciones triangulares de un cubo? ¿Y cuadrangulares? ¿Y pentagonales? ¿Y ...? ¿Cuál es el mayor número de lados que puede tener una sección de un cubo?*
- *¿Se pueden obtener secciones de un cubo que sean polígonos regulares?*
- Dado un poliedro, se obtiene, por una parte, su desarrollo plano y, por otra parte, una sección del poliedro. Dibujar en el desarrollo plano las aristas del polígono de la sección (figura 6).

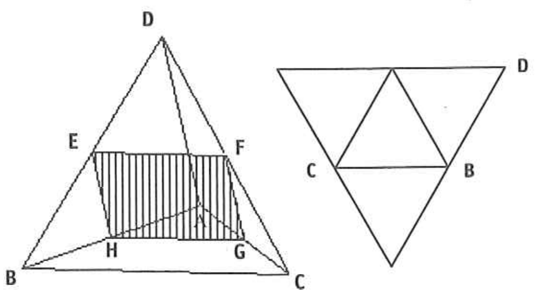

Figura 6.

Dibujar sobre el desarrollo los lados de la sección EFGH del tetraedro

- Inversamente, dado el desarrollo plano de un poliedro en el que están dibujados los lados de una sección suya, obtener dicha sección del poliedro (figura 7).

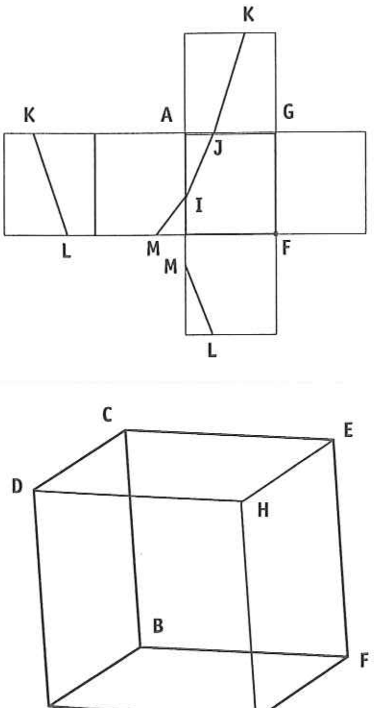

Figura 7.

Obtener la sección representada en el desarrollo del cubo

En resumen, tanto los sólidos reales como los virtuales del ordenador tienen sus ventajas y sus inconvenientes, por lo que lo más interesante, si los medios disponibles lo permiten, es dar a los estudiantes la oportunidad de manejar ambos entornos, lo cual redundará en una mayor riqueza y en un aprendizaje más completo y profundo.

Estudio de la congruencia y la semejanza en el plano

En los primeros cursos de Secundaria se debe iniciar la enseñanza de las isometrías y semejanza en el plano (o continuarla si este tema está incluido también en el currículo de Primaria). Respecto de las isometrías, un objetivo para la Secundaria puede ser llegar a profundizar en el conocimiento de la estructura algebraica de este conjunto. Para ello, después de estudiar las propiedades características de cada isometría por separado en los primeros cursos y trabajando en el nivel 2 de Van Hiele, el aprendizaje continúa explorando los diferentes productos de isometrías. La comprensión de los productos y descomposiciones de isometrías es esencial, pues son el núcleo de la red de relaciones entre isometrías y están en la base de las demostraciones de la mayoría de los teoremas. Pero hay que tener en cuenta que entre unos productos o descomposiciones y otros hay notables diferencias conceptuales y matemáticas, lo cual hace necesario planificar la enseñanza con cuidado, ordenando los contenidos para adecuarlos a los niveles de razonamiento de los estudiantes. Así, mientras cualquier estudiante que razone en el nivel 2 puede comprender y usar el producto de dos traslaciones, de dos giros del mismo centro o de dos simetrías, para comprender y justificar el resultado del producto de dos giros de distinto centro o las descomposiciones de una isometría en producto de otras, en particular de una simetría en producto de dos giros o dos traslaciones, hace falta desarrollar ar-

gumentos deductivos propios, como mínimo, del nivel 3 (Jaime, Gutiérrez, 1995, 1996).
Lo habitual en las matemáticas escolares de Primaria y Secundaria es que las propiedades estudiadas sean siempre ciertas, lo cual crea implícitamente en los estudiantes una imagen distorsionada de las matemáticas como formadas por verdades absolutas. Por ejemplo, los estudiantes de Secundaria están acostumbrado a usar la conmutatividad de la suma y el producto de números. Estudiar la conmutatividad del producto de isometrías es un excelente contexto para ayudar a los estudiantes a que progresen del razonamiento de nivel 2 al de nivel 3 y para que practiquen técnicas de demostración, ya que esta propiedad es cierta en determinados casos y falsa en otros, por lo que los estudiantes deberán buscar una demostración en algunos casos y un contraejemplo en otros.
Finalmente, en los cursos superiores de Secundaria se puede ampliar el estudio de las isometrías iniciando la construcción de la estructura algebraica de este conjunto. Si en los primeros cursos de Secundaria los estudiantes han adquirido suficiente destreza en el manejo de los productos de dos isometrías y de las descomposiciones de una isometría en producto de otras, el enunciado de diversas propiedades (algunas ya conocidas) y su demostración siguiendo métodos del nivel 3 ó del 4, según los estudiantes, puede servir de toma de contacto con dicha estructura. Los principales teoremas que caracterizan el grupo de las isometrías del plano son:
- Traslación, giro, simetría y simetría en deslizamiento son isometrías.
- Cualquier isometría se puede descomponer en producto de, a lo sumo, tres simetrías.
- Existen exactamente cuatro tipos de isometrías del plano: traslaciones, giros, simetrías y simetrías en deslizamiento (teorema de clasificación).
- La aplicación identidad, caracterizada como traslación de vector nulo o como giro de 0 grados, es el elemento neutro del conjunto de las isometrías con la operación producto de aplicaciones. Cada isometría tiene su inversa (elemento simétrico).

El enfoque que propongo para el estudio de las isometrías no es el único posible pues, dependiendo del conjunto del currículo de matemáticas de Secundaria, puede ser más interesante completar el estudio de las isometrías pasando a su representación analítica (matricial y mediante ecuaciones). No obstante, este enfoque no es mi objetivo en este texto.
La enseñanza de la semejanza (proporcionalidad geométrica) es muy compleja, pues intervienen numerosos conceptos procedentes de diversas áreas de las matemáticas, como la aritmética de los números decimales y las fracciones, la proporcionalidad aritmética (numérica) y geométrica (gráfica), la visualización espacial, etc. Plantear el estudio de la semejanza como una extensión del de las isometrías (combinando isometrías con homotecias) es una manera de proporcionar a los estudiantes herramientas para resolver los problemas de manera gráfica que además, en los niveles superiores de razonamiento, les ayuda a encontrar argumentos que les permitan resolver los problemas deductivamente.
Un ejemplo lo tenemos en el estudio de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos, que generalmente se reduce a hacer que los estudiantes memoricen los diferentes criterios y los apliquen para decidir si dos triángulos son congruentes (o semejantes). En vez de esto, es mucho más interesante, ameno e instructivo que los profesores preparen entornos de descubrimiento guiado en los cuales los estudiantes tengan la oportunidad de descubrir por sí mismos dichos criterios y justificar su validez de acuerdo con su nivel de razonamiento. Estos entornos pueden ser tanto de papel y lápiz como informáticos con software de geometría dinámica (SGD) como Cabri, Cinderella o Sketchpad entre otros. Por

ejemplo, la figura 8 muestra las claves para demostrar que dos triángulos son semejantes cuando tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual: el producto S•G•T transforma el triángulo ABC en el A'''B''P, que está colocado sobre el triángulo MNP; después la homotecia de centro P y razón r = NP/BC = MP/AC transforma el triángulo A'''B''P en el MNP.

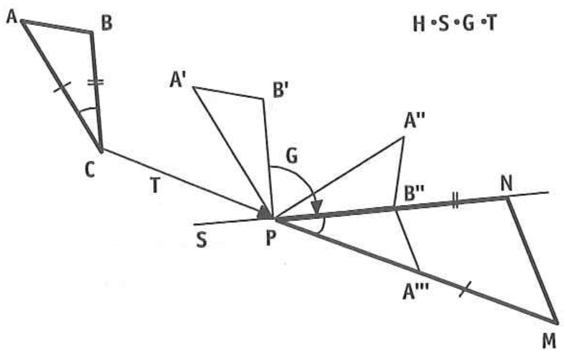

Figura 8.

Demostración de un criterio de semejanza de triángulos

Una forma de resolver este problema, utilizando razonamiento deductivo informal del nivel 3, es desarrollando la solución gráfica en la que se van dibujando los sucesivos movimientos y la homotecia final del triángulo ABC hasta llegar a hacerlo coincidir con el triángulo MNP. La otra forma de resolver el problema, utilizando razonamiento lógico deductivo del nivel 4, es desarrollando la aproximación abstracta que permite definir las isometrías algebraicamente (presento sólo un esquema de la demostración, que habría que completar con las demostraciones formales detalladas de que las isometrías y la homotecia definidas realizan las transformaciones indicadas):

1. Dados los triángulos ABC y MNP tales que $\angle C = \angle P$ y que MP/AC = NP/BC, si $C \neq P$, la traslación T de vector CP transforma ABC en A'B'P.

2. Si el segmento PB' no está contenido en el segmento PN, el giro G de centro P y ángulo $\angle B'PN$ transforma A'B'P en A''B''P de manera que el segmento PB'' está contenido en el segmento PN.

3. Si el segmento PA'' no está contenido en el segmento PM, la simetría cuyo eje es la recta que contiene a PN transforma A''B''P en A'''B''P de manera que el segmento PA''' está contenido en el segmento PM.

4. Como PA''' está sobre PM, PB'' está sobre PN, y MP/PA''' = MP/CA = NP/BC = NP/PB'' = r, la homotecia de centro P y razón *r* transforma el triángulo A'''B''P en el MNP.

Del mismo modo, combinaciones adecuadas de traslaciones, giros y simetrías permiten descubrir y demostrar los criterios de congruencia de triángulos. Una ventaja didáctica de esta forma de trabajo es que los problemas tienen numerosas soluciones diferentes (es decir, caminos diferentes para llegar desde el triángulo ABC al MNP, en el caso de la figura 8).

Los estudiantes que dominan suficientemente el razonamiento de nivel 3 ó superior, pueden resolver problemas de aplicación de la semejanza geométrica en otras áreas de las matemáticas u otras ciencias. Un ejemplo lo tenemos en los pantógrafos, usados en matemáticas y también en mecánica. Los estudiantes pueden analizar la estructura de diversos pantógrafos para descubrir sus reglas de funcionamiento y calcular su razón de semejanza (Bartolini-Bussi, 1993). Aunque es posible construir modelos reales de distintos pantógrafos, resulta más fácil y práctico utilizar SGD (figura 9), ya que este contexto permite a los estudiantes experimentar realizando modificaciones en el pantógrafo que no podrían hacer en un aparato real.

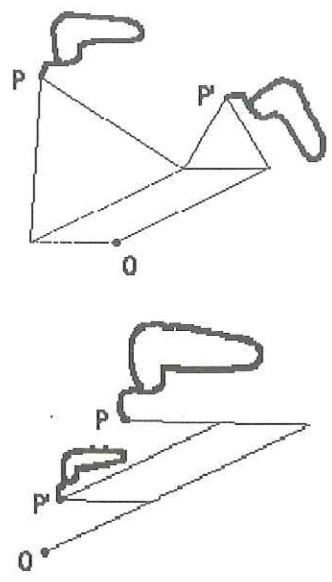

Figura 9.

Pantógrafos de Sylvester (arriba) y ordinario (abajo). El punto O es fijo.

Entre geometría y análisis matemático

Las diferentes áreas de las matemáticas escolares (aritmética, geometría, álgebra, análisis matemático, etc.) no son compartimentos estancos, sino que tienen estrechas relaciones. Estas relaciones tienen que ver, por lo general, con el uso de un área como herramienta en otra. Por ejemplo, manipulamos ecuaciones para resolver un problema de geometría o análisis, dibujamos estructuras geométricas para comprender un problema de álgebra, etc. Veamos un caso con más detalle:

Al estudiar perímetros y áreas de figuras planas (polígonos y círculo), los estudiantes suelen caer en el importante error conceptual de creer que el área y el perímetro de una figura están relacionadas, es decir que si una de estas magnitudes cambia, debe cambiar también la otra. Para prevenir este error, además de los típicos ejercicios para practicar con las fórmulas de áreas o perímetros, es muy conveniente plantear problemas que ayuden a los estudiantes a comprender que no hay ninguna relación que ligue el área y el perímetro de una figura. Uno de estos problemas es el de las "figuras isoperimétricas": *De todas las figuras de una determinada clase que tengan el mismo perímetro, ¿cuál de ellas tiene el área máxima?* Podemos plantear este problema (referido a los rectángulos) a los estudiantes del primer curso de Secundaria:

1. ¿Es posible dibujar varios rectángulos que tengan el mismo perímetro pero diferentes formas (es decir, dimensiones)? Conviene usar papel cuadriculado y negociar con los estudiantes si el rectángulo *axb* tiene o no la misma forma que el rectángulo *bxa.*

2. (Los estudiantes no suelen tener dificultad en dibujar varios pares de rectángulos que dan una respuesta afirmativa a la pregunta 1) Dibujar varios rectángulos que tengan el perímetro de ... unidades pero diferentes formas. ¿Tienen todos estos rectángulos la misma área?

3. (Los estudiantes realizan los cálculos pertinentes y ven que hay rectángulos con áreas diferentes) ¿Es posible dibujar otros rectángulos diferentes de los de la pregunta 2 que tengan también el perímetro de ... unidades? ¿Cuántos rectángulos diferentes hay que tengan el perímetro de ... unidades? ¿Cuál de ellos tiene mayor área?

Para resolver la tercera parte del problema es muy conveniente que los estudiantes puedan utilizar SGD. En la construcción correspondiente (figura 10), el segmento superior representa el perímetro fijo de los rectángulos. Los estudiantes desplazan el punto V entre el centro y el extremo izquierdo del segmento perímetro. Por tanteo, los estudiantes del primer curso de Secundaria enuncian rápidamente la conjetura de que el área máxima se obtiene cuando el rectángulo tiene los lados iguales (cuadrado). Puesto que estos estudiantes razonan en el nivel 2 de Van Hiele, esta verificación mediante ejemplos es suficiente demostración para convencerlos de la veracidad general de la conjetura.

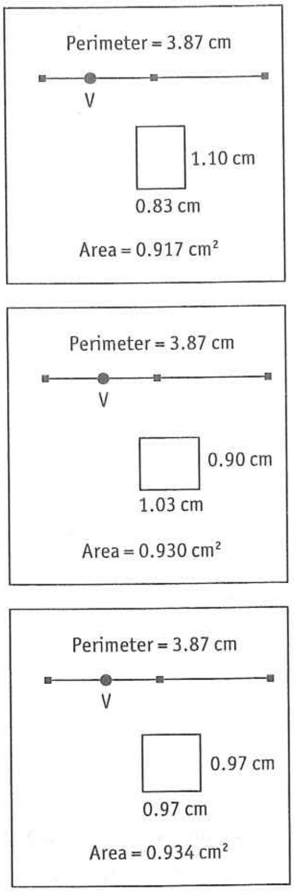

Figura 10.

Solución razonando en el nivel 2 de Van Hiele

Cuando en algunos cursos más adelante los estudiantes hayan aprendido los elementos básicos de las funciones y sus representaciones gráficas, y estén adquiriendo el razonamiento del nivel 3, se les puede plantear de nuevo este mismo problema. Ahora los estudiantes ya no aceptan los ejemplos como demostración de la conjetura, sino que deben buscar un argumento deductivo abstracto. Usar el SGD les ayudará a comprender el problema y entrever la vía de demostración. El profesor puede guiar a sus alumnos para hacer una conexión entre geometría y funciones, mediante una versión más sofisticada de la construcción anterior a la que se ha añadido una gráfica que, para un perímetro fijo, representa cartesianamente el área del rectángulo en función de su base (figura 11).

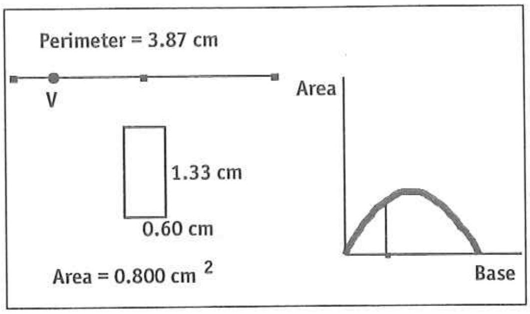

Figura 11.

Solución razonando en el nivel 3 de Van Hiele

Los estudiantes que conocen la parábola la identifican rápidamente en la figura y esto les permite elaborar una justificación de la veracidad de la conjetura basándose en la simetría de la parábola. Esta demostración es típica del nivel 3 ya que se basa en el ejemplo que han manipulado pero es deductiva y usa propiedades generales de las parábolas.

En los últimos cursos de Secundaria se puede plantear de nuevo este problema a aquellos estudiantes que estén iniciando la adquisición del nivel 4 y que sepan calcular máximos y mínimos de funciones. Ahora la manipulación en el ordenador y la justificación anterior ya no son suficientes, sino que el profesor debe guiar a los estudiantes para hacerles ver los defectos de la demostración anterior (desde la óptica de la matemática formal) y para inducirles a buscar una demostración formal completa propia del razonamiento de nivel 4. Esta demostración se puede obtener algebrizando el problema:

Para un perímetro fijo p, la relación entre la base y la altura de un rectángulo es $h = (p - 2b)/2$, y la relación representada en la gráfica de la figura 11, entre la base y el área del rectángulo, es $A = f(b) = b \cdot (p - 2b)/2$. Los cálculos correspondientes sobre $A = f(b)$ dan como resultado que el máximo de esta función está en $b = p/4$, que es el lado del cuadrado de perímetro *p*.

Este problema no es más que uno entre muchos ejemplos de cómo el SGD puede ayudar a los estudiantes de geometría euclidiana de los diferentes niveles educativos a conseguir un aprendizaje comprensivo más profundo, a progresar en su nivel de razonamiento y a desarrollar sus habilidades de demostración (Jones, Gutiérrez, Mariotti, 2000). La inmediatez con que se pueden obtener una infinidad de ejemplos en un SGD es un potencial para los estudiantes de los niveles de razonamiento 1 a 3, pero el poder de convicción de un SGD es tal que puede ser un obstáculo para que los estudiantes del nivel 3 entiendan y admitan la necesidad de las demostraciones formales, lo cual paralizaría su progreso hacia el nivel 4. Diversas investigaciones recientes muestran que es un error didáctico pedir a los estudiantes que demuestren formalmente un resultado de cuya veracidad están completamente convencidos tras su actividad experimental con el SGD, pues los estudiantes no entienden la necesidad de tal demostración cuando hay otra forma más cómoda de llegar a la misma conclusión. Una forma eficaz de sortear este obstáculo consiste en que el profesor no pida a sus alumnos que demuestren que la conjetura *es cierta*, sino que admita, como los estudiantes, que la manipulación en el ordenador ha sido suficiente para convencerle de que la conjetura planteada es verdadera, pero que a continuación el profesor pida a sus alumnos que expliquen *por qué es cierta* dicha conjetura. Este cambio de enfoque rompe la dinámica anterior ya que ahora el hecho de haber obtenido ejemplos en el ordenador no da la respuesta, sino que es necesario descubrir la estructura matemática subyacente.

Referencias bibliográficas

Bartolini-Bussi, M.G. (1993): "Geometrical Proofs and Mathematical Machines: An Exploratory Study" en *Proceedings of the 17th PME Conference* 2, pp. 97-104.

Bishop, A.J. (1980): "Spatial abilities and mathematics education - A review" en *Educational Studies in Mathematics* 11, pp. 257-269.

Bishop, A.J. (1989): "Review of research on visualization in mathematics education" en *Focus on Learning Problems in Mathematics* 11.1, pp. 7-16.

Burger, W.F.; Shaughnessy, J.M. (1986): "Characterizing the van Hiele levels of development in geometry" en *Journal for Research in Mathematics Education* 17.1, pp. 31-48.

Clements, D.H.; Battista, M.T. (1992): Geometry and spatial reasoning en D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Nueva York. MacMillan (Ed.), pp. 420-464.

Corberán, R. y otros (1994): *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele*. (Madrid: C.I.D.E., M.E.C.).

Del Grande, J. (1990): "Spatial sense" en *Arithmetic Teacher* 37.6, pp. 14-20.

Guillén, G. (1991): *El mundo de los poliedros* (colección "Matemáticas: Cultura y aprendizaje" N° 15). Madrid. Síntesis (Ed.).

Fuys, D.; Geddes, D.; Tischler, R. (1988): "The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents" en *Journal for Research in Mathematics Education Monograph N° 3*. Reston, EE.UU. N.C.T.M. (Ed.).

Gutiérrez, A. (1998): "Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial" en *Revista EMA* 3.3, pp. 193-220.

Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1998): "On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning" en *Focus on Learning Problems in Mathematics* 20.2/3, pp. 27-46.

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1990): "Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele" en Llinares, S.; Sánchez, M.V. (eds.), *Teoría y práctica en educación matemática*. (Sevilla: Alfar), pp. 295-384.

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1995): "Guidelines for teaching plane isometries in secondary school" en *The Mathematics Teacher* 88.7, pp. 591-597.

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1996): *El grupo de las isometrías del plano* (colección "Educación matemática en secundaria" N° 13). (Madrid: Síntesis).

Jones, K.; Gutiérrez, A.; Mariotti, M.A. (eds. invitados) (2000): "Proof in dynamic geometry environments" en *Educational Studies in Mathematics* 44.1/2 (special issue).

Parzysz, B. (1988): ""Knowing" vs. "seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures" en *Educational Studies in Mathematics* 19, pp. 79-92.

Presmeg, N.C. (1986): "Visualization in high school mathematics" en *For the Learning of Mathematics* 6.3, pp. 42-46.

Schumann, H. (2000): "For the design of a computer integrating geometry curriculum" en *Beiträge zum Computereinsatz in der Schule 14.2*, pp. 1-116. (versión electrónica en <http://www.mathe-schumann.de>)

Van Hiele, P.M. (1986): *Structure and insight. A theory of mathematics education.* (Londres: Academic Press).

Nota: Algunas de las referencias listadas pueden consultarse, en versión electrónica, en mi página web: URL: <http://www.uv.es/~didmat/angel/Index.html>