

La investigación en Didáctica de las Matemáticas estudia los diferentes factores que influyen en la comprensión y el aprendizaje de las matemáticas por individuos de cualquier edad y nivel educativo. Esto supone un amplio campo de trabajo que incluye factores relacionados con los propios estudiantes, con los profesores, con el contexto de las aulas, y con el entorno social, cultural y político de los estudiantes. En este artículo se hace una descripción global de la actividad investigadora actual y una descripción más detallada de algunas áreas de investigación específicas.

PALABRAS CLAVE: *Didáctica de las Matemáticas; Investigación; Profesor; Estudiante; Curricular; Socio-cultural.*

Perspectiva de la Investigación en Didáctica de las Matemáticas

pp. 61-72

Ángel Gutiérrez*

Universidad de Valencia

Los orígenes

La Didáctica de las Matemáticas o Educación Matemática actual surge a mediados del siglo XX, como una consecuencia de la implantación de la enseñanza obligatoria en numerosos países avanzados. Desde entonces se viene produciendo el desarrollo continuo de esta disciplina, que se interesa por investigar los problemas del aprendizaje de las matemáticas y por buscar soluciones a los problemas identificados.

Una señal del desarrollo alcanzado por la didáctica de las matemáticas son las numerosas revistas especializadas orientadas a la enseñanza, a la investigación, o a ambas actividades. *L'Enseignement Mathématique* (creada en 1899) es la revista decana, pero a finales de la década de 1960 se inicia un movimiento de

creación de revistas que llega hasta la actualidad. Entre las revistas de investigación más importantes están *Educational Studies in Mathematics*, *Journal for Research in Mathematics Education*, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *For the Learning of Mathematics*, *Recherches en Didactique des Mathématiques* y *Enseñanza de las Ciencias*.

La actividad de los didactas de las matemáticas se desarrolla en una doble línea de actuación: Por una parte, están quienes, desde la práctica profesional de la enseñanza, experimentan en busca de formas de trabajo en clase que resulten en un mejor aprendizaje. Por otra parte, están quienes adoptan una postura formal y analizan el comportamiento de estudiantes y profesores desde posiciones teóricas, en busca de respuestas que vayan más allá de las

* Ángel Gutiérrez. Dpto. de Didáctica de la Matemática. E. U. de Magisterio. Universidad de Valencia. Apartado 22045. 46071 Valencia (España) correo electrónico: angel.gutierrez@uv.es. Página web: www.uv.es/Angel.Gutierrez/

✉ Artículo recibido el 27 de octubre de 2009 y aceptado el 2 de diciembre de 2009.

clases concretas observadas. Estos dos grupos no son disjuntos, pues hay numerosos didactas que comparten los intereses, preocupaciones y formas de hacer de ambos.

Las sociedades de profesores de matemáticas y las revistas de didáctica de las matemáticas orientadas a los profesores juegan un papel fundamental de vías de comunicación entre ambos colectivos. En España, las sociedades regionales de profesores de matemáticas, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), que las agrupa, y la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) fomentan esta transferencia de información mediante la edición de revistas (Suma, Números, Epsilon, etc.) y libros y la organización de congresos periódicos (JAEM y jornadas anuales de la SEIEM y de cada sociedad de profesores).

Al hablar de investigación en didáctica de las matemáticas hay que mencionar el International Group for the Psychology of Mathematics Education (Grupo PME), cuyos congresos anuales son el foro más influyente en la actividad investigadora, y el International Congress on Mathematical Education (ICME), que cada cuatro años reúne a varios miles de especialistas para discutir sobre los más diversos aspectos de la educación matemática.

Durante varias décadas, la investigación centrada en componentes psicológicos, pedagógicos y matemáticos que tienen que ver con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se desarrolló y dominó la investigación en didáctica de las matemáticas (Gutiérrez, 1991). Sin embargo, en la década de 1990 un número creciente de investigadores se empezaron a interesar por otros componentes, principalmente de carácter afectivo, cultural y sociológico, que influyen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Como consecuencia de ello, en la actualidad la investigación en didáctica de las matemáticas se ha convertido en un mundo complejo, pluridisciplinar, en el que las interrelaciones son múltiples y con numerosos intereses que se reflejan en la diversidad de líneas de investigación que se desarrollan y de publicaciones que se hacen.

En este artículo se ofrece a los lectores una visión del estado actual de la investigación en didáctica de las matemáticas, con atención particular a los resultados de investigaciones españolas. La variedad de temas que son objeto de investigación es tan amplia que no es posible describir aquí todos ellos con un mínimo de detalle, por lo que la visión que ofrezco es necesariamente parcial. En la siguiente sección presento una visión global del área de investigación y después, en las restantes secciones del artículo, presento revisiones más detalladas de algunas áreas de investigación específicas.

Una descripción a vista de pájaro

La mayoría de agendas de investigación en didáctica de las matemáticas se centran en las siguientes temáticas: Fundamentación de la didáctica de las matemáticas (la disciplina, sus objetivos, sus métodos de trabajo); La enseñanza de las matemáticas (los profesores); El aprendizaje de las matemáticas (los estudiantes); El contexto del aula (currículum, libros de texto, materiales didácticos, tecnología); El entorno social (culturas, géneros, razas, políticas educativas, etc.). En los siguientes párrafos se presentan resúmenes de dichas temáticas.

En los años 1980 cristalizó un movimiento dentro de la didáctica de las matemáticas, encabezado por H.G. Steiner, que se ocupó de analizar la Didáctica de las Matemáticas como área de actividad científica con el fin de sentar sus bases como disciplina científica (Steiner, 1985). Con los años esta actividad investigadora ha evolucionado y actualmente está centrada principalmente en aspectos filosóficos (Ernest, 1999, 2004; Cobb, 2007).

Cuando se piensa en elementos que influyen en el aprendizaje de las matemáticas, los tres primeros que surgen son los estudiantes, los profesores y los libros de texto, por lo que no es de extrañar que la mayor parte de investigaciones y de publicaciones realizadas se centren en alguno. Por ejemplo, 17 de los 31 capítulos de Lester (2007) y 12 de los 15 capítulos de Gutiérrez y Boero (2006) están dedicados a ellos.

La investigación sobre la influencia de los profesores en el aprendizaje de sus alumnos abarca aspectos como la formación inicial o permanente de los profesores, sus metodologías de enseñanza, sus creencias sobre qué son las Matemáticas, cómo debe ser un buen método de enseñanza, cual es el papel de los estudiantes en las clases, qué objetivos de aprendizaje son importantes, etc., o el conocimiento que tienen los profesores de los contenidos matemáticos y didácticos (Llinares y Krainer, 2006; Ponte y Chapman, 2006; Sowder, 2007; Franke y otros, 2007; Philipp, 2007). En España hay varios grupos de investigación centrados en este tema, principalmente en las universidades de Alicante, Extremadura, Huelva y Sevilla.

La investigación didáctica sobre los estudiantes de matemáticas se centra en una diversidad de temas que tienen que ver, principalmente, con procesos cognitivos (memoria, razonamiento, etc.), el aprendizaje a diferentes edades (procesos, dificultades y errores de aprendizaje, estrategias de resolución de problemas, etc.) y los entornos de aprendizaje (estilos de trabajo en grupo, influencia del software educativo o materiales didácticos, enseñanza virtual, etc.), todo ello particularizado, en la mayoría de las investigaciones, a determinados contenidos matemáticos específicos (aritmética elemental o avanzada, álgebra, análisis matemático, geometría, probabilidades, estadística, etc.) o a temas transversales (visualización, demostración, etc.).

Durante muchos años numerosas investigaciones se han ocupado de analizar la influencia del uso de materiales didácticos diversos. En la actualidad, las investigaciones de este tipo se centran en analizar el papel del software educativo como entorno de aprendizaje, entender cómo son las interacciones estudiante-ordenador y explorar formas de conseguir mejores resultados cuando los estudiantes utilizan de manera habitual los ordenadores en las clases (Zbiek y otros, 2007). Aunque en cualquier área de las matemáticas escolares hay diversos programas informáticos entre los que elegir, en la actualidad la mayor atención investigadora se centra en el uso de programas de álgebra

simbólica, para la enseñanza de álgebra y de análisis matemático (Ferrara y otros, 2006), y programas de geometría dinámica (Laborde y otros, 2006).

Otros elementos importantes del contexto en que se desarrolla el aprendizaje de las matemáticas son los currículos y los libros de texto. Aunque hay investigaciones didácticas recientes centradas específicamente en analizar de manera global el papel del currículo y de los libros de texto en la enseñanza (Nicol y Crespo, 2006; Yates, 2006; Ortiz y otros, 2007) y el aprendizaje de las matemáticas (Abramovich y Brouwer, 2006; Stein y otros, 2007), la mayoría de investigaciones que abordan esta problemática lo hacen en el contexto de otras cuestiones relativas, por ejemplo, al aprendizaje de determinados conceptos matemáticos (Escudero, 2005; Stacey, 2005; Barragués y Guisasaola, 2006; Bruno y Cabrera, 2006) o a las creencias de los profesores (Pehkonen, 2004). La influencia de la investigación en los nuevos currículos y libros de texto dista mucho de ser habitual en España, salvo algunas excepciones como, por ejemplo, la incorporación del aprendizaje de la resolución de problemas como bloque de contenidos a los currículos de Primaria y ESO (MEC, 2006a, 2006 b).

Aunque tradicionalmente los investigadores han prestado atención a la influencia de las metodologías de enseñanza, los materiales didácticos usados o las formas de trabajar de los estudiantes, en la década de 1990 se empezó a desarrollar con fuerza una corriente de investigación que prestaba atención a otros factores de tipo afectivo, cultural o social que también mediatizan la actividad de profesores y estudiantes y, por tanto, el aprendizaje (Gates, 2006; Lerman, 2006). Estas investigaciones nos muestran que factores como la raza (D'Ambrosio, 1997; Knijnik, 2002; Rowlands y Carson, 2002), la cultura (Planas y otros, 1999; Presmeg, 2007), la lengua materna (Gorgorió, Planas, 2001), el género (Gorgorió, 1996; McGraw y otros, 2006), la afectividad (Gómez-Chacón y otros, 2006) o las políticas educativas (Valero y Vithal, 1998; Ferrini-Mundy y Floden, 2007) pueden tener una gran importancia en la actitud y compor-

tamiento de los estudiantes ante las matemáticas y, en definitiva, en sus resultados escolares (Bishop y Forgasz, 2007; DMECLT, 2007). Es evidente que, en el actual contexto multicultural de los centros de enseñanza españoles, estas investigaciones cobran relevancia como fuentes de información a los profesores sobre cómo actuar en sus clases.

Investigación en didáctica del álgebra

El periodo inicial de aprendizaje del álgebra se caracteriza por el surgimiento de un lenguaje nuevo para los estudiantes, lo cual es una fuente de dificultades para ellos. Estos tratan de seguir usando los métodos aritméticos de resolver los problemas, pero sin éxito. Las dificultades de aprendizaje relacionadas con la transición de la aritmética al álgebra se empezaron a estudiar con intensidad hace 30 años y, aunque la investigación ha producido numerosos avances en este tema, en la actualidad sigue habiendo cuestiones importantes de investigación, relacionadas con nuevas formas de enfocar la cuestión y con nuevos modos de enseñanza, en especial relacionados con el uso de la informática.

De acuerdo con Kieran (2006), los obstáculos clave en el aprendizaje inicial del álgebra son el aprendizaje del uso de los literales y otros símbolos —en especial el signo igual— y de los conceptos de incógnita, variable y, posteriormente, parámetro. Los primeros resultados importantes de investigación en este tema consistieron en identificar diferentes significados que los estudiantes dan a los literales, dependiendo de su grado de comprensión de los conceptos algebraicos y de los contextos en los que se sitúan: Letra evaluada, letra como objeto, letra no utilizada, número generalizado, incógnita y variable (Hart, 1981). Son numerosas las investigaciones que han encontrado comportamientos similares de los estudiantes en diferentes países y contextos educativos, como Palarea (1998) en España.

Desde el comienzo del uso de los ordenadores en la enseñanza de las matemáticas escolares ha habido una infinidad de investigaciones

que han explorado diferentes formas de enseñanza, sus ventajas e inconvenientes en los distintos entornos presentes en las aulas en cada momento, como lenguajes de programación —Basic, Logo, etc.— (Sutherland y Hoyles, 1986; Sutherland, 1989), hojas de cálculo (Ursini y Trigueros, 2001) o, más recientemente, programas de álgebra simbólica (CAS) en calculadoras y ordenadores (Ferrara y otros, 2006).

Otra línea de investigación sobre este tema que ha resultado muy fructífera es la que toma la evolución histórica de las ideas algebraicas, en particular en lo relativo a la creación de su sistema de símbolos y a la evolución de los métodos de resolución de ecuaciones, como un referente para entender la evolución de esas ideas y método en los escolares actuales. Se considera que los elementos clave y las dificultades de la evolución histórica tienen sus paralelos en la evolución y las dificultades de los estudiantes. Un primer referente es Rojano (1985), que se centró en el aprendizaje inicial de las ecuaciones, mostrando cómo las diferencias entre textos históricos de diferentes épocas pueden explicar el *corte didáctico* que se produce en el contexto escolar cuando los estudiantes pasan de resolver ecuaciones de la forma $ax+b=c$ a resolver ecuaciones de la forma $ax+b=cx+d$. Investigadores de México y España han continuado desarrollando esta línea de investigación hasta la actualidad (Filloy, Puig y Rojano, 2008).

Durante muchos años se ha considerado que aprender a usar calculadoras u ordenadores y el software era un requisito previo al que había que dedicar un tiempo hasta que los estudiantes lograran suficiente dominio. Sin embargo, investigaciones recientes desarrolladas en Francia en la década de 1990 han mostrado que el proceso de aprendizaje de uso de calculadoras, ordenadores y software tiene influencia en cómo los estudiantes los usan durante la realización de actividades. El marco teórico en que se fundamentan estas investigaciones es la teoría de la génesis instrumental (Trouche, 2003; Guin y otros, 2005). La génesis instrumental distingue entre los conceptos de *artefacto* (un utensilio físico utilizado, como calculadoras y ordenadores) e *instrumento* (una

construcción mental hecha por un estudiante sobre un artefacto, que incluye elaboraciones creadas por el estudiante sobre qué y cómo hacer operaciones con él) y los conceptos de *instrumentalización e instrumentación*. Durante el proceso de instrumentalización, el estudiante todavía no sabe bien cómo puede o no interactuar con el artefacto que está usando, lo cual hace que sea el artefacto el que impone al usuario ciertas limitaciones de uso. Después empieza el proceso de instrumentación, cuando el estudiante adquiere cierto grado de destreza en el uso del artefacto y éste se convierte en un instrumento; ahora el estudiante ya consigue dominar al artefacto e incluso hacer con él cosas para las que en principio no había sido diseñado.

Investigación en didáctica de la geometría y aprendizaje de la demostración

Esta sección está dedicada a sintetizar resultados relevantes de investigación sobre dos temas relacionados pero independientes, que, como herencia de los Elementos de Euclides, tradicionalmente han estado, y continúan estando, considerados como partes de un único contexto escolar: La geometría, y la demostración matemática. Efectivamente, la demostración tienen mucha relación con la geometría, pero también la tiene con cualquier otra parte de las matemáticas.

La investigación actual sobre didáctica de la geometría se organiza predominantemente en torno al marco teórico de los Niveles de Razonamiento Matemático de Van Hiele (Battista, 2007). Después de algunos años en los que los niveles de Van Hiele fueron objeto de análisis, y la investigación se orientaba a identificar y verificar características de los niveles (Burger y Shaughnessy, 1986; Fuys y otros, 1988; Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991), en la actualidad la teoría de Van Hiele se ha constituido en el principal marco de referencia para la investigación y la innovación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. Un ejem-

plo paradigmático es NCTM (2003), que lleva los resultados de la investigación didáctica al terreno de la práctica ofreciendo a los profesores de matemáticas de los niveles desde E. Infantil hasta el final de E. Secundaria un conjunto de principios básicos en los que basar su metodología de enseñanza. Para la geometría, se propone una organización centrada en los niveles de Van Hiele, de manera que, a medida que se progresa en los cursos, las formas como los profesores presenten los contenidos conceptuales y como los estudiantes deban resolver los problemas vayan progresando de acuerdo con las características de los sucesivos niveles de razonamiento.

El aprendizaje de la demostración matemática en los niveles no universitarios ha pasado en las últimas décadas por varias vicisitudes. De la fuerte carga de formalismo que tenían los cursos de matemáticas, incluso desde comienzos de la E. Primaria, en las décadas de 1960 a 1980 se pasó en los años 1990, como reacción, a abandonar por completo el razonamiento deductivo y convertir las matemáticas escolares en puramente exploratorias y memorísticas. Por último, a finales del siglo XX se abrió paso una postura intermedia, apoyada mayoritariamente por profesores y por didactas, de reconocer la necesidad de que se empiece a enseñar a razonar matemáticamente a lo largo de la enseñanza no universitaria, incluso en E. Primaria (Gutiérrez, 2007), adecuando los requerimientos de los profesores a la capacidad de razonamiento de los estudiantes. También aquí, los niveles de Van Hiele suponen un valioso marco de referencia.

La investigación sobre el aprendizaje de la demostración se ha fijado en diferentes variables de tipos histórico y epistemológico, cognitivo, curriculares y socio-cultural que condicionan dicho aprendizaje (Mariotti, 2006; Harel y Sowder, 2007). Las creencias de los estudiantes sobre qué es demostrar en matemáticas y qué sirve o no como demostración resultan cruciales pues, por ejemplo, mientras los estudiantes no se convencen de la fragilidad del razonamiento basado exclusivamente en ejemplos, no admitirán la necesidad de usar

métodos de demostración deductivos abstractos (De Villiers, 1993).

Una cuestión importante es dónde está el límite entre las producciones que se pueden admitir como demostración y las que no. Una propuesta que clarifica esta cuestión es la planteada en Duval (1991, 1999), al distinguir entre los conceptos de argumentación (un discurso retórico, con escasa o nula base matemática, elaborado para convencer a alguien de la verdad o falsedad de un enunciado) y demostración (un discurso formado por una cadena lógica de afirmaciones matemáticas elaborado para convencer a alguien de la verdad o falsedad de un enunciado).

Otro tipo de análisis de las demostraciones elaboradas por los estudiantes se basa en categorizar dichas demostraciones desde el punto de vista de su calidad matemática. Balacheff (1988) y Harel y Sowder (1998) han elaborado dos clasificaciones complementarias pues, la de Balacheff describe mejor las demostraciones inductivas (empíricas) y la de Harel y Sowder describe mejor las demostraciones deductivas. Estas categorizaciones han sido aplicadas con éxito en numerosos experimentos de enseñanza, y algunos investigadores las han completado o particularizado para adaptarlas a las condiciones específicas de sus investigaciones (Martínez-Recio, 1999; Ibáñez, 2001; Marrades y Gutiérrez, 2000).

En cuanto a las investigaciones sobre cómo aprenden los estudiantes a demostrar y qué estrategias de enseñanza pueden ser adecuadas, en los últimos años se está prestando mucha atención al uso del software de geometría dinámica (SGD), como Cabri, Geogebra, Sketchpad, Regla y Compás, etc. La capacidad del SGD de ayudar a los estudiantes a superar las demostraciones empíricas e iniciar la producción de demostraciones deductivas ha sido puesto en cuestión en algunas ocasiones (Chazan, 1993; Healy, 2000), si bien otras investigaciones han mostrado cómo una adecuada planificación de las actividades acompañada de una gestión de la clase por el profesor coherente con los objetivos fijados dan resultados positivos (Mariotti y Bartolini Bussi, 1998;

Marrades y Gutiérrez, 2000; Richard y Fortuny, 2007).

En la agenda de investigación sobre el aprendizaje de la demostración, en los últimos años están cobrando interés destacado las investigaciones sobre aspectos socio-culturales de la demostración, que la presentan como el fruto de una construcción social realizada por la comunidad de matemáticos. En este contexto, se plantea caracterizar el grupo de clase (profesor y alumnos) como una comunidad de práctica en el seno de la cual se construyen y acuerdan las normas que permiten realizar demostraciones y juzgar la validez de las producciones de profesor y alumnos (Yackel, 2001; Camargo 2007).

También está empezado a cobrar interés en la actualidad la investigación para aplicar el marco de la génesis instrumental al contexto del SGD. Un primer paso en esta dirección se puede ver en Iranzo (2009), que analiza desde esta perspectiva el uso del arrastre por los estudiantes durante la resolución de problemas de geometría.

Investigación sobre la actividad de los profesores de matemáticas

Las metodologías de enseñanza en los cursos de formación inicial de profesores de matemáticas son variadas. Algunos investigadores han explorado la posible influencia de diferentes formas de trabajo en grupo y del uso de las Tics en el aprendizaje. Esto incluye, entre otros, el uso de videoclips como instrumento de análisis de profesores impartiendo clases (Callejo y otros, 2007) o la creación de comunidades virtuales de estudiantes para promover el aprendizaje colaborativo y la discusión (Llinares y Olivero, 2008).

Cómo sea la formación inicial de los profesores de matemáticas influye a largo plazo en el sistema educativo de una son las prácticas de enseñanza. Numerosas investigaciones se han centrado en los cambios que se producen en las creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas y su enseñanza cuando se

enfrentan por primera vez a la docencia real durante sus prácticas de enseñanza (Llinares, Krainer, 2006).

Es evidente que los conocimientos de los profesores (o la carencia de ellos) relacionados con los contenidos que deben enseñar son un factor decisivo en su forma de enseñar. En la literatura sobre este tema se distingue entre el conocimiento de los contenidos matemáticos y el conocimiento de los contenidos didácticos. No son pocas las investigaciones que llegan a la conclusión de que bastantes profesores en formación y en ejercicio tienen carencias de conocimientos sobre temas de las matemáticas escolares, como fracciones (Llinares y Sánchez, 1992; Pinto y Tall, 1996), funciones (Hansson, 2005), geometría (Hershkowitz y Vinner, 1984) o razonamiento deductivo (Braconne y Dionne, 1987). En estas publicaciones queda patente la influencia de estas carencias de los profesores en sus clases, en la forma de seleccionar los contenidos matemáticos que van a enseñar o en la forma de organizar y dirigir las clases.

Las creencias o concepciones de los profesores sobre qué son las matemáticas, cómo aprenden los estudiantes, cómo se debe enseñar matemáticas, etc. ejercen una influencia decisiva en la actitud de los profesores y en su forma de preparar, organizar y gestionar las clases de matemáticas. Por ejemplo, Carrillo (1995) y Contreras (1998) estudiaron las creencias de los profesores respecto del papel de la resolución de problemas como parte de las clases y la relación entre dichas creencias y su práctica.

Hay otros aspectos que forman parte de la vida profesional de un profesor de matemáticas que en mayor o menor grado influyen en el aprendizaje de sus alumnos. Uno que está desarrollándose en los últimos años es el estudio de las relaciones sociales dentro del aula entre profesor y estudiantes o entre estudiantes. Diversas investigaciones (Anghileri, 2002; Camargo y Gutiérrez, 2008) muestran cómo la introducción por el profesor de determinados tipos de relaciones en el aula (por ejemplo, comunidades de práctica o aprendizaje colaborativo) puede llevar a metodologías de enseñanza muy fructíferas.

REFERENCIAS

- ABRAMOVICH, S. y BROUWER, P. (2006). Hidden mathematics curriculum: A positive learning framework. *For the Learning of Mathematics* 26 (1), 12-16.
- ANGHLIERI, J. (2002). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. En *Proceedings of the 26th PME Conference 2*, 49-56.
- BALACHEFF, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège* (tesis doctoral). Grenoble, Francia: Université J. Fourier.
- BARRAGUÉS, J.I. y GUIASOLA, J. (2006). La introducción de los conceptos relativos al azar y la probabilidad en libros de texto universitarios. *Enseñanza de las Ciencias* 24 (2), 241-256.
- BATTISTA, M.T. (2007). The development of geometrical and spatial thinking. En F.K. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Reston, VA.: NCTM.
- BISHOP, A.J. y FORGASZ, H.J. (2007). Issues in access and equity in mathematics education. En F.K. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1145-1168). Reston, VA.: NCTM.
- BRACONNE A. y DIONNE J.J. (1987). Secondary school students' and teachers' understanding of demonstration in geometry. En *Proceedings of the 11th PME Conference 3*, 109-116.
- BRUNO, A. y CABRERA, N. (2006). Types of representations of the number line in textbooks. *Proceedings of the 30th PME Conference 2*, 249-256.
- BURGER, W.F. y SHAUGHNESSY, J.M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education* 17.1, 31-48.
- CALLEJO, M.L.; LLINARES, S. y VALLS, J. (2007). El uso de videoclips para una práctica reflexiva. En *Actas de las XIII Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* (JAEM).
- CAMARGO, L. (2007). *Bases para la constitución de una comunidad de práctica encaminada a la tarea de demostrar. Experiencia en un curso de Geometría Plana de un programa de formación de profesores de Matemáticas en Bogotá, Co-*

- lombia (Trabajo de Investigación de doctorado). Valencia: Universidad de Valencia.
- CAMARGO, L. y GUTIÉRREZ, A. (2008). *Some aspects of the sociocultural practice of proving in a university course with support of Cabri*. Manuscrito presentado en el TSG 18 "Reasoning, proof and proving in mathematics education" del 11th International Congress on Mathematical Education (ICME 11). En <http://tsg.icme11.org/document/get/287> (consultado el 15 de octubre de 2009).
- CARRILLO, J. (1995). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones* (tesis doctoral). Sevilla: Universidad de Sevilla.
- CHAZAN, D. (1993). High school geometry student's justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics* 24 (4), 359-387.
- COBB, P. (2007). Putting philosophy to work: Coping with multiple theoretical perspectives. En F.K. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 3-38). Reston, VA.: NCTM.
- CONTRERAS, L.C. (1998). *Resolución de problemas: Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula* (tesis doctoral). Huelva: Universidad de Huelva.
- D'AMBROSIO, U. (1997). Where does ethnomathematics stand nowadays? *For the Learning of Mathematics* 17 (2), 13-17.
- De VILLIERS, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon* 26, 15-29.
- De VILLIERS, M. y FURINGHETTI, F. (eds.) (1996). *Proofs and proving: Why, when and how?* Centrahil, R. de Sudáfrica: AMESA.
- DIVERSITY IN MATHEMATICS EDUCATION CENTER FOR LEARNING AND TEACHING (DMECLT) (2007). Culture, race, power, and mathematics education. En F.K. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 405-434). Reston, VA.: NCTM.
- DUVAL, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics* 22 (3), 233-261.
- DUVAL, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- ERNEST, P. (1999). Forms of knowledge in mathematics and mathematics education: Philosophical and rhetorical perspectives. *Educational Studies in Mathematics* 38 (1-3), 67-83.
- ERNEST, P. (2004). ¿Son las matemáticas descubiertas o inventadas? *Uno* 37, 25-31.
- ESCUADERO, I. (2005). Un análisis del tratamiento de la semejanza en los documentos oficiales y textos escolares de matemáticas en la segunda mitad del siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias* 23 (3), 379-391.
- FERRARA, E.; PRATT, D. y ROBUTTI, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. En A. Gutiérrez y P. Boero (eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 237-273). Rotterdam: Sense Publishers.
- FERRINI-MUNDY, J. y FLODEN, R. (2007). Educational policy research and mathematics education. En F.K. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1247-1280). Reston, VA.: NCTM.
- FILLOY, E.; PUIG, L. y ROJANO, T. (2008). *Educational Algebra*. Nueva York: Springer.
- FRANKE, M.L.; KAZEMI, E. y BATLEY, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice in mathematics. En F.K. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 225-256). Reston, VA.: NCTM.
- FUYS, D.; GEDDES, D. y TISCHLER, R. (1988). *The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents*. Reston, VA.: NCTM.
- GATES, P. (2006). The place of equity and social justice in the history of PME. En A. Gutiérrez y P. Boero (eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 367-402). Rotterdam: Sense Publishers.
- GÓMEZ-CHACÓN, I.M.; OP'T EYNDE, P. y DE CORTE, E. (2006). Creencias de los estudiantes de matemáticas. La influencia del contexto de clase. *Enseñanza de las Ciencias* 24 (3), 309-325.

- GORGORIÓ, N. (1996). Choosing a visual strategy: The influence of gender on the solution process of rotation problems. *Proceedings of the 20th PME Conference* 3, 19-26.
- GORGORIÓ, N. y PLANAS, N. (2001). Teaching mathematics in multilingual classrooms, *Educational Studies in Mathematics* 47 (1), 7-33.
- GUIN, D.; RUTHVEN, K. y TROUCHE, L. (eds.) (2005). *The didactical challenge of symbolic calculators*. Nueva York: Springer.
- GUTIÉRREZ, A. (1991). La investigación en didáctica de las matemáticas. En A. Gutiérrez (ed.), *Área de conocimiento Didáctica de la Matemática* (pp. 149-194). Madrid: Síntesis.
- GUTIÉRREZ, A. (2007). Geometría, demostración y ordenadores. En *Actas de las XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* (JAEM) 3. Publicación en cd sin paginación.
- GUTIÉRREZ, A. y BOERO, P. (eds.). (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education*. Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.
- GUTIÉRREZ, A.; JAIME, A. y FORTUNY, J.M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education* 22 (3), 237-251.
- HANSSON, Ö. (2005). Preservice teachers' view on $y=x+5$ and $y=\omega x^2$ expressed through the utilization of concept maps: A study of the concept of function. En *Proceedings of the 29th PME Conference* 3, 97-104.
- HAREL, G. y SOWDER, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En A.H. Schoenfeld, J. Kaput y E. Dubinsky (eds.), *Research in collegiate mathematics education* (vol. III, pp. 234-283). Providence, EE.UU.: American Mathematical Society.
- HAREL, G. y SOWDER, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. En F.K. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Reston, VA, EE.UU.: NCTM.
- HART, K. (ed.) (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. Londres: John Murray.
- HEALY, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationships: Interactions with robust and soft Cabri constructions. En *Proceedings of the 24th PME Conference* 1, 103-117.
- HERSHKOWITZ, R. y VINNER, S. (1984). Children's concept in elementary geometry - A reflection of teacher's concepts? En *Proceedings of the 8th PME Conference*, 63-69.
- IBÁÑES, M.J. (2001). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato* (tesis doctoral). Valladolid: Universidad de Valladolid.
- IRANZO, N. (2009). *Influence of dynamic geometry software on plane geometry problem solving strategies* (tesis doctoral). Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.
- KIERAN, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. En A. Gutiérrez y P. Boero (eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.
- KNIJNIK, G. (2002). Ethnomathematics: Culture and politics of knowledge in mathematics education. *For the Learning of Mathematics* 22 (1), 11-14.
- LABORDE, C.; KYNIGOS, C.; HOLLEBRANDS, K. y STRÄESSER, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. En A. Gutiérrez y P. Boero (eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 275-304). Rotterdam: Sense Publishers.
- LERMAN, S. (2006). Socio-cultural research in PME. En A. Gutiérrez y P. Boero (eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 347-366). Rotterdam: Sense Publishers.
- LESTER, F.K. (ed.). (2007). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Reston, VA, EE.UU.: NC.T.M.
- LLINARES, S. y KRAINER, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators a learners. En A. Gutiérrez y P. Boero (eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 429-459). Rotterdam: Sense Publishers.
- LLINARES, S., y OLIVERO, F. (2008). Virtual communities and networks of prospective mathematics teachers: Technologies, interactions and new forms of discourse. En K. Krainer y T. Wood (eds.), *Participants in*

- mathematics teacher education: Individuals, teams, communities and networks* (pp. 155-179). Rotterdam: Sense Publishers.
- LLINARES, S. y SÁNCHEZ, M.V. (1992). El aprendizaje desde la instrucción: La evolución de las estrategias personales en tareas de proporcionalidad numérica, *Enseñanza de las Ciencias* 10 (1), 37-48.
- MARIOTTI, M.A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En A. Gutiérrez y P. Boero (eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 173-204). Rotterdam: Sense Publishers.
- MARIOTTI, M.A. y BARTOLINI BUSSI, M.G. (1998). From drawing to construction: Teachers' mediation within the Cabri environment. En *Proceedings of the 22th PME Conference* 3, 247-254.
- MARRADES, R. y GUTIÉRREZ, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics* 44 (1/2), 87-125.
- MARTÍNEZ-RECIO, A. (1999). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática* (tesis doctoral). Granada: Universidad de Granada.
- MCGRAW, R.; LUBIENSKI, S.T. y STRUTCHEN, M.E. (2006). A Closer Look at Gender in NAEP Mathematics Achievement and Affect Data: Intersections with Achievement, Race/Ethnicity, and Socioeconomic Status. *Journal for Research in Mathematics Education* 37 (2), 129-150.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (MEC) (2006 a). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Primaria. *B.O.E.* 293, 43053-43102 (8-12-2006).
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (MEC) (2006 b). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *B.O.E.* 5, 667-773 (5-1-2007).
- NCTM (2003). Principios y estándares para la educación matemática. Reston, VA.: NCTM.
- NICOL, C.C. y CRESPO, S.M. (2006). Learning to teach with mathematics textbooks: How pre-service teachers interpret and use curriculum materials. *Educational Studies in Mathematics* 62 (3), 331-355.
- ORTIZ, J.; RICO, L. y CASTRO, E. (2007). Organizadores del currículo como plataforma para el conocimiento didáctico. Una experiencia con futuros profesores de matemáticas, *Enseñanza de las Ciencias* 25 (1), 21-32.
- PALAREA, M.M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años* (tesis doctoral). La Laguna, Tenerife: Universidad de La Laguna.
- PEHKONEN, E. (2004). The magic circle of the textbooks an option or an obstacle for teacher change. *Proceedings of the 28th PME Conference* 3, 513-520.
- PHILIPP, R.A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. En F.K. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-316). Reston, VA.: NCTM.
- PINTO, M. y TALL, D. (1996). Student teachers' conceptions of the rational number. En *Proceedings of the 20th PME Conference* 4, 139-146.
- PLANAS, N.; VILELLA, X. y GORGORIO, N. (1999). El cálculo en contexto: Aportaciones de alumnos de distintos entornos culturales. *Uno* 22, 9-18.
- PONTE, J.P. y CHAPMAN, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutiérrez y P. Boero (eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 461-494). Rotterdam: Sense Publishers.
- PRESMEG, N.C. (2007). The role of culture in teaching and learning mathematics. En F.K. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 435-458). Reston, VA.: NCTM.
- RICHARD, P.R. y FORTUNY, J.M. (2007). Amélioration des compétences argumentatives à l'aide d'un système tutoriel en classe de mathématique au secondaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 12, 83-116.
- ROJANO, T. (1985). *De la aritmética al álgebra* (tesis doctoral). México D.F.: CINVESTAV, IPN.
- ROWLANDS, S. y CARSON, R. (2002). Where would formal, academic mathematics stand

- in a curriculum informed by ethnomathematics? A critical review of ethnomathematics. *Educational Studies in Mathematics* 50 (1), 79-102.
- SOWDER, J.T. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F.K. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 157-224). Reston, VA.: NCTM.
- STACEY, K. (2005). The place of problem solving in contemporary mathematics curriculum documents. *The Journal of Mathematical Behavior* 24 (3-4), 341-350.
- STEIN, M.K.; REMILLARD, J. y SMITH, M.S. (2007). How curriculum influences student learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-370). Reston, VA.: NCTM.
- STEINER, H. (1985). Theory of Mathematics Education (TME): An introduction. *For the Learning of Mathematics* 5 (2), 11-17.
- SUTHERLAND R. (1989). Providing a Computer Based Framework for Algebraic Thinking. *Educational Studies in Mathematics* 20 (3), 317-344.
- SUTHERLAND R. y HOYLES C. (1986). Logo as a context for learning about variable. *Proceedings of the 10th PME Conference* 1, 301-306.
- TROUCHE, L. (2003). From artifact to instrument: mathematics teaching mediated by symbolic calculators. *Interacting with Computers* 15 (6), 783-800.
- URSINI, S. y TRIGUEROS, M. (2001). A model for the uses of variable in elementary algebra. *Proceedings of the 25th PME Conference* 4, 335-342.
- USISKIN, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry*. Columbus: ERIC.
- VALERO, P. y VITHAL, R. (1998). Research methods of the "north" revisited from the "south". *Proceedings of the 22th PME Conference* 4, 153-160.
- YACKEL, E. (2001). Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. En *Proceedings of the 25th PME Conference* 1, 9-24.
- YATES, S.M. (2006). Elementary teachers' mathematics beliefs and teaching practices after a curriculum reform. *Proceedings of the 30th PME Conference* 5, 433-440.
- ZBIEK, R.M.; HEID, M.K.; BLUME, G.W. y DICK, T.P. (2007). Research on technology in mathematics education. En F.K. Lester (Eed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1169-1207). Reston, VA: NCTM.