

REFLEXIONES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN LOS NIVELES DE PRIMARIA Y SECUNDARIA

Ángel Gutiérrez

Universidad de Valencia, España

angel.gutierrez@uv.es, www.uv.es/Angel.Gutierrez

En este texto presento introducciones a los principales elementos didácticos centrales de la enseñanza de la geometría en los niveles educativos. El modelo de van Hiele es el marco más efectivo para organizar la enseñanza de la geometría en los diferentes niveles educativos. Me centraré en uno de sus componentes, las fases de aprendizaje, que sugiere cómo organizar los contenidos de las secuencias de enseñanza de las matemáticas escolares. A continuación, prestaré atención a una propuesta más específica, centrada en describir el aprendizaje de conceptos geométricos, basada en la distinción entre las imágenes conceptuales y las definiciones conceptuales, para mostrar el papel crítico que deben jugar los ejemplos. Por último, reflexionaré sobre la necesidad de que los profesores tengan en cuenta las representaciones gráficas, físicas y mentales, utilizadas en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Describiré los principales elementos que forman parte de los procesos y destrezas de visualización presentes en el trabajo con elementos geométricos.

INTRODUCCIÓN

Enseñar geometría en los grados de las educaciones primaria y secundaria es una tarea compleja debido a las múltiples variables que influyen. Actualmente, existe un acuerdo generalizado entre didactas de las matemáticas y profesores de matemáticas en que la enseñanza de la geometría debe basarse en metodologías que faciliten la actividad de exploración y descubrimiento de parte de los estudiantes. Para facilitar a los profesores la tarea de planificar y gestionar este tipo de clases, se han desarrollado diferentes modelos teóricos prácticos que identifican y organizan diversos elementos intervinientes en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En este texto propongo reflexionar sobre algunos de tales elementos, diversos y aparentemente desconectados pero que, en realidad, presentan estrechas relaciones que ayudan a dar a los profesores una visión más global y conexas de la geometría, de su enseñanza y de su aprendizaje.

LAS FASES DE APRENDIZAJE DE VAN HIELE

El modelo de razonamiento matemático de van Hiele es en la actualidad el principal marco de referencia para organizar la enseñanza de la geometría y para entender y evaluar el aprendizaje de los estudiantes. Existen diversas publicaciones que presentan muestras de cómo utilizar el modelo de van Hiele, tanto organizaciones curriculares completas de toda la enseñanza no universitaria (NCTM, 2003), como organización de unos contenidos matemáticos enseñados a lo largo de los años (Jaime, 1993; Jaime y Gutiérrez, 1996) u organización de un tema específico de un grado particular (Corberán y otros, 1994). Un elemento del modelo de van Hiele son las *fases de aprendizaje*. Constituyen una propuesta metodológica para los profesores que les indica cómo organizar los diferentes tipos de contenidos de un tema específico, secuenciándolos de manera que facilite el progreso de los estudiantes y gradúe su aprendizaje¹.

Van Hiele caracteriza el aprendizaje como un resultado de la acumulación de la cantidad suficiente de experiencias adecuadas; por lo tanto, existe la posibilidad de alcanzar niveles más altos de razonamiento fuera de la enseñanza escolar si se consiguen las experiencias apropiadas. No obstante, esas experiencias, aunque existen y no deben despreciarse, generalmente no son suficientes para producir un desarrollo de la capacidad de razonamiento completo y rápido, por lo que la misión de la educación matemática escolar es proporcionar experiencias adicionales, bien organizadas para que sean lo más útiles posible. La función de las fases de aprendizaje propuestas por van Hiele es sugerir al profesor cómo realizar dicha organización. Las fases de aprendizaje son unas etapas en la graduación y organización de las actividades que debe realizar un estudiante para adquirir las experiencias que le lleven al nivel superior de razonamiento. A lo largo de estas fases, el profesor debe procurar que sus alumnos construyan una red mental de relaciones entre los diferentes contenidos matemáticos que tiene que aprender, incluyendo en esta red las formas de razonamiento propias del nivel de razonamiento al que deben acceder. Es necesario conseguir, en primer lugar, que los estudiantes adquieran de manera comprensiva los conocimientos básicos necesarios (nuevos conceptos, propiedades, vocabulario, etc.) con los que tendrán que trabajar, para después centrar su actividad en aprender a utilizarlos y combinarlos. Las fases de aprendizaje propuestas por van Hiele son cinco:

¹ El resto de esta sección se extrae de Jaime y Gutiérrez (1990).

1ª fase: Información. Se trata de una fase de toma de contacto. El profesor debe informar a los estudiantes sobre el campo de estudio en el que van a trabajar, qué tipo de problemas se van a plantear, qué materiales van a utilizar, etc. Así mismo, los alumnos aprenderán a manejar el material y adquirirán una serie de conocimientos básicos imprescindibles para poder empezar el trabajo matemático propiamente dicho.

Esta es también una fase de información para el profesor, pues sirve para que éste averigüe los conocimientos previos de los estudiantes sobre el tema que se va a abordar. Como decíamos antes, la experiencia extraescolar no debe despreciarse, sino que puede aprovecharse como fuente de motivación; además, es conveniente evitar hacer un trabajo repetido o tratar de “enseñar” cosas que los alumnos ya saben. Por otra parte, muchas veces tendremos que trabajar en un tema que no es absolutamente nuevo para los estudiantes, que ya lo han estudiado en algún curso anterior, por lo que, para una buena utilización del modelo de van Hiele, es imprescindible que el profesor sepa qué grado de conocimiento de los contenidos del tema tienen sus alumnos y, sobre todo, qué nivel de razonamiento son capaces de mostrar.

2ª fase: Orientación dirigida. En esta fase los estudiantes empiezan a explorar el campo de estudio por medio de investigaciones basadas en el material que les ha sido proporcionado. El objetivo principal de esta fase es conseguir que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan cuáles son los conceptos, propiedades, figuras, etc. principales en el área de la geometría que están estudiando. En esta fase se construirán los elementos básicos de la red de relaciones del nuevo nivel. Van Hiele afirma, refiriéndose a esta fase, que “las actividades, si son escogidas cuidadosamente, forman la base adecuada del pensamiento del nivel superior” (van Hiele, 1986, p. 97).

Obviamente los estudiantes, por sí solos, no podrían realizar un aprendizaje eficaz (en cuanto a los resultados obtenidos y al tiempo empleado), por lo que es necesario que las actividades que se les propongan estén convenientemente dirigidas hacia los conceptos, propiedades, etc. que deben estudiar. El trabajo que vayan a hacer estará seleccionado de tal forma que los conceptos y estructuras característicos se les presenten de forma progresiva.

3ª fase: Explicitación. Una de las finalidades principales de la tercera fase es hacer que los estudiantes intercambien sus experiencias, que comenten las regularidades que han observado, que expliquen cómo han resuelto las activida-

des, todo ello dentro de un contexto de diálogo en el grupo. Es interesante que surjan puntos de vista divergentes, ya que el intento de cada estudiante por justificar su opinión hará que tenga que analizar con cuidado sus ideas (o las de su compañero), que ordenarlas y que expresarlas con claridad. Este diálogo hace que sea en el transcurso de esta fase cuando se forma parcialmente la nueva red de relaciones.

Esta fase tiene también la misión de conseguir que los estudiantes terminen de aprender el nuevo vocabulario, correspondiente al nuevo nivel de razonamiento que están empezando a alcanzar. En algunos casos, especialmente con niños de enseñanza primaria, no es conveniente, desde el punto de vista didáctico, introducir al mismo tiempo nuevos conceptos, nuevo vocabulario y nuevos símbolos. Una técnica utilizada por los maestros para reducir este problema consiste en permitir que, al principio, los niños denominen las nuevas figuras o propiedades a su gusto, hasta que hayan adquirido un dominio suficiente de las mismas. En la fase de explicitación se fomentará el paso del vocabulario de los niños al término matemático usual.

4ª fase: Orientación libre. Ahora los alumnos deberán aplicar los conocimientos y lenguaje que acaban de adquirir a otras investigaciones diferentes de las anteriores. El campo de estudio ya es en gran parte conocido por los alumnos, pero éstos todavía deben perfeccionar su conocimiento del mismo. Esto se consigue mediante el planteamiento de problemas por parte del profesor que, preferiblemente, puedan desarrollarse de diversas formas o que puedan llevar a diferentes soluciones. En estos problemas se colocarán indicios que muestren el camino que se ha de seguir, pero de forma que el estudiante tenga que combinarlos adecuadamente, aplicando los conocimientos y la forma de razonar que ha adquirido en las fases anteriores.

Queremos remarcar que el núcleo de esta fase está formado por actividades de utilización y combinación de los nuevos conceptos, propiedades y forma de razonamiento. Los problemas que hay que plantear en la fase 4 no tienen nada que ver con los ejercicios de “aplicación”, tan frecuentes en nuestros libros de texto de enseñanzas primaria y secundaria, para cuya solución sólo hace falta recordar algún hecho concreto y utilizarlo directamente; por el contrario, algunos de los problemas de esta fase deben presentar situaciones nuevas, ser abiertos, con varios caminos de resolución. Este tipo de actividad es la que permitirá completar la red de relaciones que se empezó a formar en las fases

anteriores, dando lugar a que se establezcan las relaciones más complejas y más importantes.

5ª fase: Integración. A lo largo de las fases anteriores, los estudiantes han adquirido nuevos conocimientos y habilidades, pero todavía deben adquirir una visión general de los contenidos y métodos que tienen a su disposición, relacionando los nuevos conocimientos con otros campos que hayan estudiado anteriormente; se trata de condensar en un todo el dominio que ha explorado su pensamiento. En esta fase el profesor puede fomentar este trabajo proporcionando comprensiones globales, pero es importante que estas comprensiones no le aporten ningún concepto o propiedad nuevos al estudiante: Solamente deben ser una acumulación, comparación y combinación de cosas que ya conoce.

APRENDIZAJE DE CONCEPTOS GEOMÉTRICOS ELEMENTALES

En geometría, como en las demás partes de las matemáticas escolares, los estudiantes deben entender y aprender conceptos, propiedades de estos conceptos y relaciones entre unos y otras. En contextos matemáticos en los que hay un importante soporte gráfico y visual, los procesos de aprendizaje están muy condicionados por el uso de objetos físicos, figuras, diagramas, etc. De manera general, se aprecia un desajuste entre los componentes gráficos y verbales de las actividades y respuestas de los estudiantes. Este desajuste se puede entender gracias a los resultados de las investigaciones del didacta S. Vinner, que presento a continuación².

Cuando los profesores y libros de texto españoles presentan por primera vez a los estudiantes un concepto nuevo de geometría elemental, suelen recurrir a uno de estos dos métodos de enseñanza: i) enunciar una definición matemática de dicho concepto (más o menos formal, según el curso) y, a continuación, plantear ejercicios de memorización y de reconocimiento de algunas figuras concretas, o ii) presentar ejemplos de figuras que representan ese concepto, haciendo una descripción de sus características matemáticas (y, a veces, físicas), a continuación, enunciar una definición matemática del concepto y, por último, plantear ejercicios de memorización de la definición y de reconocimiento de otras figuras concretas.

² El resto de esta sección se extrae de Gutiérrez y Jaime (1996).

En ambos casos, los profesores suelen poner más énfasis en las definiciones que en los ejemplos, sin darse cuenta de que son los últimos los que impactan más en los estudiantes y los que producen un efecto mental más duradero y profundo. Según Vinner (1991), cuando leemos o escuchamos el nombre de un concepto conocido, se estimula nuestra memoria y se evoca algo, que raramente es la definición del concepto, sino un conjunto de representaciones visuales, imágenes, impresiones o experiencias. Este “algo” es lo que Vinner llama la imagen del concepto (o imagen conceptual). En el caso de conceptos geométricos, la imagen conceptual que se crea en la mente de los estudiantes está compuesta por las diversas figuras, dibujos o representaciones que recuerdan los estudiantes como ejemplos de dicho concepto, junto al conjunto de las propiedades que el estudiante asocia al concepto. Según esto, una imagen de un concepto es correcta cuando le permite al estudiante discriminar sin errores todos los ejemplos de ese concepto y cuando las propiedades que lleva asociadas son todas relevantes. Dichas propiedades no son necesariamente matemáticas puesto que, especialmente en estudiantes situados en el primer o segundo niveles de van Hiele, también pueden ser propiedades irrelevantes de tipo físico. Por ejemplo, la imagen del concepto de rectángulo que se forman muchos estudiantes de enseñanza primaria está compuesta por una serie de rectángulos concretos colocados en posición estándar (el par de lados más largos, horizontales) y por algunas propiedades derivadas de estas figuras, como tener los ángulos rectos, los lados opuestos iguales, los lados verticales y horizontales, siendo los horizontales más largos que los verticales, etc.

Por otra parte, fruto de los métodos de enseñanza que mencionábamos antes, los estudiantes memorizan una cierta definición, que repiten cuando el profesor les pregunta pero que no utilizan cuando les pide que pongan en acción dicho concepto para resolver un problema. Vinner y Hershkowitz (1983) llaman definición de un concepto a esta definición verbal que un estudiante tiene en su memoria y que recita cuando se le pide. La definición de un concepto expresada por un estudiante no tiene por qué estar ligada operativamente a su imagen de ese concepto en el momento de la realización de tareas. Por ejemplo, al preguntarles, muchos estudiantes recitan que un polígono regular es un polígono que tiene todos los lados iguales aunque parte de estos estudiantes son capaces de reconocer sin errores todos los ejemplos de polígonos regulares e irregulares que se les presenten. Inversamente, también es frecuente encontrar estudiantes de todos los niveles educativos que, aunque escriben la definición correcta de polígono regular, identifican como tales los rectángulos

“porque tienen los ángulos iguales”. Ambas discrepancias ponen en evidencia la diferencia que, para los estudiantes, hay entre la imagen y la definición de un concepto y los diferentes usos que hacen de ambas, cosa que el modelo de Vinner explica, como veremos más adelante.

En la formación de la imagen de un concepto que tiene una persona juegan un papel básico la propia experiencia y los ejemplos que se han visto o utilizado tanto en el contexto escolar como extraescolarmente. Con frecuencia estos ejemplos son pocos y con alguna característica visual peculiar, convirtiéndose en prototipos y en los únicos casos de referencia con los que el estudiante puede comparar casos nuevos. Por lo tanto, la manera de mejorar la calidad de las imágenes conceptuales es ofrecer a los estudiantes mayor variedad de ejemplos, tratar de detectar los defectos de sus imágenes del concepto y hacer especial incidencia en los ejemplos directamente relacionados con esos errores. Uno de los objetivos de la investigación que describimos en este capítulo es dar pautas concretas sobre cómo analizar y mejorar las imágenes de los conceptos geométricos de los estudiantes.

En cuanto a la utilización que los estudiantes hacen de las imágenes y las definiciones de los conceptos, está muy extendida entre los profesores de los diferentes niveles educativos la creencia (casi siempre errónea) de que los estudiantes basan sus razonamientos principalmente en las definiciones verbales (formales) de los conceptos y que sus imágenes del concepto tienen, como mucho, un papel secundario, de apoyo. Sin embargo, la actividad de los estudiantes está, en una mayoría de casos, basada sólo en sus imágenes de los conceptos. Hay un elevado número de estudiantes cuya definición del concepto es inactiva o no existe (olvidaron o nunca aprendieron la definición enseñada por su profesor).

LA VISUALIZACIÓN ESPACIAL EN EL APRENDIZAJE DE CONCEPTOS GEOMÉTRICOS³

La percepción visual es un elemento importante en infinidad de actividades de la vida, no sólo en las relacionadas con el aprendizaje escolar o con la geometría. Esto hace que diferentes grupos de investigadores, con objetivos y contextos diversos, se hayan preocupado de estudiar este campo, al que se suele dar diversos nombres como “percepción espacial”, “imaginación espacial”,

³ El contenido de esta sección se extrae de Gutiérrez y Jaime (1996).

“visión espacial”, o “visualización”. El término elegido por una persona suele dar indicios de la posición concreta que ha adoptado y del significado que le da a ese término, aunque esta no es una regla general. Para aludir a este tipo de habilidades, en Didáctica de las Matemáticas, cuando nos centramos en el estudio de la geometría 3-dimensional, se emplean generalmente los términos equivalentes de “visualización” o “visualización espacial”.

El elemento básico central en todas las concepciones de percepción visual son las *imágenes mentales*, es decir las representaciones mentales que las personas podemos hacer de objetos físicos, relaciones, conceptos, etc. En el contexto de las matemáticas, Presmeg (1986) ha encontrado diversos tipos de imágenes mentales:

1) *Imágenes concretas pictóricas*. Se trata de imágenes figurativas de objetos físicos.

2) *Imágenes de fórmulas*. Consisten en la visualización mental de fórmulas o relaciones esquemáticas de la misma manera como se las vería, por ejemplo, en el libro de texto.

3) *Imágenes de patrones*. Son imágenes de esquemas visuales correspondientes a relaciones abstractas. A diferencia del tipo anterior, no se visualiza la relación propiamente dicha (una fórmula generalmente), sino alguna representación gráfica de su significado.

4) *Imágenes cinéticas*. Se trata de imágenes en parte físicas y en parte mentales, ya que en ellas tiene un papel importante el movimiento de manos, cabeza, etc.

5) *Imágenes dinámicas*. Son imágenes mentales en las que los objetos o algunos de sus elementos se desplazan.

Una determinada imagen puede ser de dos tipos diferentes pues, normalmente, su clasificación como cinética o dinámica es independiente de su clasificación como pictórica, patrón o de fórmula.

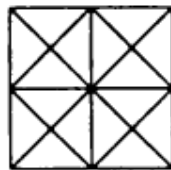
De acuerdo con la distinción que hace Bishop (1989), las imágenes visuales (físicas o mentales) son los objetos que se manipulan en la actividad de visualización, manipulación que se realiza según dos tipos de procesos:

- *Procesamiento visual* (VP). Este es el proceso de conversión de información abstracta o no figurativa en imágenes visuales y también el proceso de transformación de unas imágenes visuales ya formadas en otras.
- *Interpretación de información figurativa* (IFI). Este es el proceso de comprensión e interpretación de representaciones visuales para extraer la información que contienen. Por lo tanto, este proceso puede verse como el inverso del anterior.

El tercer componente diferenciado de la visualización son las *habilidades de visualización* utilizadas por los individuos para la creación y procesamiento de imágenes visuales. Aunque Bishop no diferencia claramente entre procesos y habilidades, otros investigadores sí han hecho esa distinción. Una relación bastante detallada de las habilidades que pueden integrar la percepción espacial de un individuo es la que nos proporciona Del Grande (1990), obtenida uniendo las propuestas de diversos autores y que se refiere a un contexto más amplio que el de la geometría:

1) *Coordinación motriz de los ojos*. Es la habilidad para seguir con los ojos el movimiento de los objetos de forma ágil y eficaz.

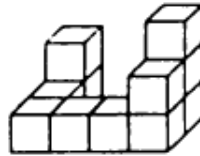
2) *Identificación visual*. Es la habilidad para reconocer una figura aislándola de su contexto. Se utiliza, por ejemplo, cuando la figura está formada por varias partes, como en los mosaicos, o cuando hay varias figuras superpuestas. Por ejemplo, ¿cuántos cuadrados hay en la figura de la derecha?



3) *Conservación de la percepción*. Es la habilidad para reconocer que un objeto mantiene su forma aunque deje de verse total o parcialmente, por ejemplo porque haya girado o se haya ocultado.

4) *Reconocimiento de posiciones en el espacio*. Es la habilidad para relacionar la posición de un objeto con uno mismo (el observador) o con otro objeto, que actúa como punto de referencia.

5) *Reconocimiento de las relaciones espaciales.* Es la habilidad que permite identificar correctamente las características de relaciones entre diversos objetos situados en el espacio. Por ejemplo, que están girados, son perpendiculares, simétricos, etc. Esta habilidad es necesaria para construir, con cubos Multilink, el cuerpo de la figura de la derecha.



6) *Discriminación visual.* Es la habilidad que permite comparar varios objetos identificando sus semejanzas y diferencias visuales. Un ejemplo es el siguiente: calcular la cantidad de módulos iguales que hay en la figura de la derecha.



7) *Memoria visual.* Es la habilidad para recordar las características visuales y de posición que tenían en un momento dado un conjunto de objetos que estaban a la vista pero que ya no se ven o que han sido cambiados de posición.

Se pueden definir otras habilidades interesantes y que merece la pena estudiar, pero casi siempre se trata de combinaciones de las habilidades indicadas antes. Por ejemplo, la habilidad de “conservación de las relaciones espaciales”, que nos permite reconocer que las posiciones relativas de varios objetos no varían cuando se les somete al mismo movimiento (giro o traslación), sería una combinación de las habilidades de reconocimiento de las posiciones espaciales y de conservación de la percepción.

Si realizamos una clasificación conjunta de imágenes, procesos y habilidades visuales, nos daremos cuenta de que, aunque todos ellos tienen relación con la actividad de los estudiantes de matemáticas, algunos tienen una relación más estrecha con el contexto del aprendizaje de la geometría espacial. En concreto, son importantes las imágenes pictóricas, cinéticas y dinámicas, los procesos VP e IFI (cuando intervienen en la obtención o análisis de los tres tipos anteriores de imágenes) y las habilidades de identificación visual, de reconocimiento de posiciones o de relaciones en el espacio y de discriminación visual

(también cuando se usan con los tres tipos de imágenes mencionados antes). Esta mayor relación con el contexto de la geometría 3-dimensional implica, por una parte, que los estudiantes los utilizan directamente al realizar actividades o resolver problemas en los que intervienen objetos geométricos espaciales y, por otra parte, que la capacidad de los estudiantes –para usarlos– se puede mejorar mediante una instrucción específica centrada en la resolución de actividades geométricas.

REFERENCIAS ⁴

- Bishop, A.J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 7-16.
- Corberán, R. y otros (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de van Hiele*. Madrid, España: Ministerio de Educación.
- Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, 37(6), 14-20.
- Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En J. Giménez, S. Llinares y M.V. Sánchez (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (pp. 143-170). Granada, España: Comares.
- Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. Tesis doctoral. Valencia, España: Universidad de Valencia.
- Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. En S. Llinares y M.V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla, España: Alfar.
- Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid, España: Síntesis.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Presmeg, N.C. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6(3), 42-46.
- van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Londres, Gran Bretaña: Academic Press.

⁴ Varias de las referencias están disponibles en <http://www.uv.es/Angel.Gutierrez>.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Vinner, S. y Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *ZDM*, 83(1), 20-25.