**Citar como:**
Gutiérrez, A. (2012): Investigar es evolucionar: Un ejemplo de investigación en procesos de razonamiento. En Planas, N. (ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (serie Crítica y fundamentos, nº 41) (Graó: Barcelona), pp. 43-59.

# INVESTIGAR ES EVOLUCIONAR: UN EJEMPLO DE INVESTIGACIÓN EN PROCESOS DE RAZONAMIENTO

Ángel Gutiérrez

Departamento de Didáctica de la Matemática

Universidad de Valencia, España

**Resumen**

*Observando las trayectorias científicas de los investigadores en didáctica de las matemáticas veteranos, podemos identificar su evolución y la de sus producciones a lo largo de los años. En este capítulo presento, como ejemplo, mi propia actividad investigadora sobre el Modelo de Razonamiento Matemático de Van Hiele, mediante una reconstrucción histórica analizada y explicada desde mi óptica actual. Empezando desde mi primer contacto con el Modelo de Van Hiele, resumo las sucesivas investigaciones en las que he colaborado y reflexiono sobre los motivos que llevaron a realizar cambios, alguna vez drásticos, en nuestros objetivos y/o metodologías de investigación. La conclusión final a la que pretendo llevar al lector es que el esfuerzo científico de calidad continuado lleva inevitablemente al investigador a evolucionar en sus concepciones y puntos de vista sobre sus líneas de estudio y, más en general, sobre la didáctica de las matemáticas, las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje.*

## INTRODUCCIÓN

Un aspecto interesante que ayuda a conocer mejor la investigación en didáctica de las matemáticas es su evolución histórica, que explica por qué y cómo surgen, se desarrollan y desaparecen líneas o agendas de investigación. En los últimos años se han publicado varios libros de recopilación de la investigación en didáctica de las matemáticas –conocidos como *handbooks*– en los que se ofrecen visiones retrospectivas de la actividad investigadora internacional. Al leer estos libros, se pueden identificar los cambios de cuestiones, objetivos y metodologías de investigación producidos a lo largo del tiempo en una determinada agenda de investigación. Además de esta visión histórica institucional, es interesante observar la evolución personal de los investigadores –individuales o equipos– que más han influido en una agenda específica. Aunque la mayoría de los autores mencionados en los *handbooks* tienen una presencia puntual, algunos autores destacan por la cantidad y diversidad de aportaciones. Éstos son, generalmente, investigadores veteranos, con bastantes años de actividad, cuyas publicaciones muestran su evolución a lo largo del tiempo. Sin intención de ser exhaustivos, podemos identificar trayectorias científicas diferenciadas. Hay investigadores que, a partir de recopilaciones iniciales de información, han creado un modelo teórico y después lo han ido aplicando a contextos del mismo o de diferentes dominios matemáticos. Otros investigadores han trabajado con un modelo teórico –propio o ajeno– y, a raíz de la experiencia adquirida, lo han hecho evolucionar en su estructura, componentes, metodología o significados de sus elementos. También hay investigadores que han pasado de trabajar en unos problemas de investigación a otros de agendas distintas, sin continuidad aparente.

En este capítulo presento un resumen de mi propia actividad investigadora relacionada con el Modelo de Razonamiento Matemático de Van Hiele –generalmente junto a otros colegas, por ello el texto está escrito mayoritariamente en plural–, que encaja en el segundo de los tipos de trayectorias descritos más arriba. Mediante una reconstrucción del recorrido temporal desde mi primer contacto con el Modelo de Van Hiele hasta la actualidad, pretendo explicar los cambios habidos en mi forma de entender y utilizar dicho modelo y los motivos de tales cambios. El objetivo del capítulo no es describir detalladamente el Modelo de Van Hiele –descripción hecha en Jaime y Gutiérrez (1990)– ni profundizar en las investigaciones que menciono, que se pueden encontrar en diversas publicaciones, sino reflexionar sobre las particularidades de cada una, las conclusiones importantes y las consecuencias que tuvieron en la actividad posterior. No obstante, para facilitar la lectura, incluyo a continuación una descripción breve de las principales características de los niveles de Van Hiele:

- *Nivel 1.* Los estudiantes perciben las figuras geométricas globalmente, como objetos físicos, y sus descripciones se basan en características visuales, táctiles, etc. No reconocen explícitamente partes o propiedades matemáticas de las figuras, en especial las que no son evidentes. Es el nivel propio de la Educación Infantil y primeros cursos de Educación Primaria, aunque es frecuente encontrar alumnos razonando en este nivel incluso en la Educación Secundaria.

- *Nivel 2.* Los estudiantes perciben las figuras geométricas como conjuntos de propiedades y elementos matemáticos, sin darse cuenta de las relaciones lógicas. Pueden realizar razonamientos empíricos y generalizar propiedades identificadas de manera experimental. Es el nivel propio de los últimos cursos de Educación Primaria y primeros cursos de Secundaria, pero su uso se prolonga hasta el final del Bachillerato, principalmente en la especialidad de Humanidades.
- *Nivel 3.* Los estudiantes de este nivel entienden la existencia de relaciones de dependencia lógica entre propiedades matemáticas, por lo que empiezan a adquirir la capacidad de razonamiento deductivo abstracto, si bien en contextos matemáticos informales. Comprenden la necesidad de las demostraciones abstractas. Los profesores deberían iniciar a los estudiantes en este tipo de razonamiento durante los últimos cursos de Secundaria, para perfeccionarlo en Bachillerato.
- *Nivel 4.* Los estudiantes son capaces de realizar razonamientos lógico-deductivos en contextos de matemáticas formales. Tienen capacidad para comprender la estructura axiomática de las matemáticas y para entender y realizar los diferentes tipos de demostraciones formales. Los estudiantes del Bachillerato de Ciencias deberían iniciarse en esta forma de razonamiento, para perfeccionarlo en la universidad.
- *Nivel 5.* Este nivel de razonamiento se caracteriza por la capacidad de operar correctamente en diferentes sistemas axiomáticos. Es propio de los matemáticos avanzados.

Aunque este capítulo habla de evolución de la investigación y de los investigadores en didáctica de las matemáticas, se puede decir lo mismo respecto de la actividad de innovación docente en la enseñanza de las matemáticas. Existen muchos profesores veteranos, dedicados desde hace años a realizar actividades de innovación de calidad, en cuyas trayectorias se pueden observar los mismos tipos de evolución que en los investigadores. Este capítulo se refiere a investigación porque mi experiencia personal es en ese terreno.

## PRIMERA INVESTIGACIÓN SOBRE EL MODELO DE VAN HIELE

La primera vez que participé en un congreso del Grupo Internacional para la Psicología de la Educación Matemática (PME-10, Londres, 1986) asistí a las sesiones del grupo de trabajo de geometría, en las que se presentaban ponencias relacionadas con los niveles de razonamiento de Van Hiele. Los niveles de Van Hiele, una idea completamente nueva para mí, me resultaron sorprendentes e interesantes, pues me abrían una perspectiva de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría muy diferente de la puesta en juego en los trabajos de investigación e innovación que había hecho hasta entonces en este campo (ver, por ejemplo, Gutiérrez, 1983 y Jaime y Gutiérrez, 1985). Frente a un enfoque próximo a las matemáticas como marco para organizar la enseñanza y analizar el aprendizaje, el nuevo enfoque hacía énfasis en componentes cognitivos, como la existencia de diferentes formas de comprensión de contenidos matemáticos, la distinción de sucesivas formas de razonamiento matemático, la relevancia del lenguaje, etc. La sorpresa e interés que experimenté en aquel momento son similares a los que describen algunos de nuestros alumnos de postgrado actuales cuando asisten a cursos y congresos o leen determinadas publicaciones. La pauta general es el descubrimiento de una idea desconocida hasta entonces que hace saltar la imaginación y percibir nuevas formas de resolver problemas didácticos e interpretar experiencias previas.

Mi primer contacto con la investigación sobre el modelo de Van Hiele fue Usiskin (1982). Este documento es el informe final de un proyecto de investigación cuyo principal objetivo es la evaluación del nivel de razonamiento de estudiantes de enseñanza secundaria en Estados Unidos. Para ello, el autor diseñó un test formado por 25 ítems de elección múltiple, sobre contenidos de geometría plana, de modo que los ítems 1 a 5 evalúan el razonamiento de nivel 1, los ítems 6 a 10 evalúan el razonamiento de nivel 2, etc. El resultado de administrar este test a un estudiante es que, aplicando determinados criterios objetivos, se le asigna el número del nivel de razonamiento más alto que ha superado.

Planteamos realizar una investigación que replicara la anterior con estudiantes de la Escuela de Magisterio de Valencia, por lo que preparamos un test basado en el de Usiskin (1982) con adaptaciones debidas a las diferencias entre los currículos de geometría español y norteamericano. Para completar la investigación, diseñamos otros dos tests –originales pero con la misma estructura del anterior– basados en contenidos de geometría espacial y de medida de magnitudes geométricas. Los resultados se recogen en Gutiérrez y Jaime (1987). La lectura crítica de Usiskin (1982) y la actividad durante el análisis de nuestros datos permitieron identificar problemas metodológicos importantes en este tipo de investigaciones, causados por la decisión de asignar el número de un nivel de razonamiento al estudiante:

- El diseño del test –5 ítems de elección múltiple evalúan la adquisición o no de cada nivel de razonamiento– obliga a que el criterio objetivo para decidir si un estudiante ha adquirido o no un determinado nivel se tenga que basar exclusivamente en la cantidad de respuestas correctas en los 5 ítems asociados a ese nivel. La decisión clave es dónde poner la frontera, es decir si se considera necesario responder bien los 5 ítems asociados a un nivel de razonamiento para afirmar que un estudiante ha adquirido este nivel o basta con responder bien 4 ó 3 ó ... ítems de los 5.

- Después de decidir cuántas respuestas correctas son necesarias para considerar superado un nivel de razonamiento, es necesario decidir un criterio para asignar a los estudiantes su nivel. Usiskin (1982) comienza aplicando el criterio de que un estudiante está en el nivel *n* si ha superado todos los niveles 1 a *n* y no ha superado ninguno de los niveles *n*+1 a 5. Pero este criterio no da resultado cuando un estudiante ha superado un nivel de razonamiento sin superar otro(s) nivel(es) inferior(es), por ejemplo, ha superado los niveles 1 y 2, no ha superado el nivel 3, ha superado el nivel 4 y no ha superado el nivel 5. Tanto Usiskin como nosotros nos encontramos con que no podíamos asignar ningún nivel de razonamiento a una cantidad excesivamente elevada de los estudiantes, pues los resultados de estos estudiantes –como el ejemplo anterior– no se ajustan al criterio. Ello nos obligó a definir criterios objetivos menos exigentes, hasta que el número de estudiantes a los que no se puede asignar un nivel es suficientemente reducido.
- Independientemente de las probabilidades teóricas de responder correctamente al azar un ítem de elección múltiple, hay varios ítems del test de Usiskin (1982), y de nuestros tests, que se pueden contestar bien porque las respuestas incorrectas son demasiado obvias. En otros casos –algunos ítems de los niveles 4 y 5– es posible llegar a la respuesta correcta por sentido común, sin necesidad de usar el razonamiento matemático sofisticado propio de estos niveles.

En síntesis, esta investigación inicial sobre la asignación de niveles de razonamiento de los estudiantes: i) nos permitió empezar a entender las características de los niveles de Van Hiele, ii) nos llevó a descubrir la nula fiabilidad de los ítems de elección múltiple como instrumento para evaluar el nivel de razonamiento matemático, iii) nos mostró la dificultad de intentar asignar *un* nivel de razonamiento a los estudiantes, y por último iv) nos llevó a concluir que este camino no parecía tener continuidad y debíamos buscar en otra dirección.

## PRIMERA EVOLUCIÓN: UN CAMBIO DE ENFOQUE

La lectura de publicaciones derivadas de otras investigaciones más recientes sobre los niveles de Van Hiele (Burger y Shaughnessy, 1986; Fuys, Geddes y Tischler, 1985) nos mostró otras metodologías de investigación –entrevistas clínicas y cuestionarios de respuesta libre– diferentes y prometedoras, con formas de obtener información que permitían a los investigadores vislumbrar los procesos de razonamiento de los estudiantes. Por otra parte, estos autores aludían en sus conclusiones a la dificultad que habían tenido para asignar *un* nivel de razonamiento a determinados estudiantes, debido a que algunos mostraban en sus respuestas mezcla de razonamientos correspondientes a dos niveles diferentes o a que otros daban unas respuestas de un nivel y otras respuestas de otro nivel. Estas conclusiones corroboraban nuestras intuiciones, mencionadas en la sección anterior, de que asignar a los estudiantes el número correspondiente a un nivel de razonamiento ni es metodológicamente fiable ni describe la realidad del razonamiento diario de los estudiantes.

A partir de este momento, abandonamos el uso de tests de elección múltiple y, en línea con las publicaciones mencionadas en el párrafo anterior, comenzamos a diseñar y experimentar ítems de respuesta libre para evaluar el nivel de razonamiento de los estudiantes que pudieran usarse tanto en entrevistas clínicas como en cuestionarios escritos. Primero hicimos pequeñas experimentaciones piloto, unas veces mediante entrevistas para observar mejor las actuaciones de los estudiantes, otras veces mediante cuestionarios escritos para depurar el formato. Esta actividad, que duró varios años, permitió construir un banco de ítems depurados y experimentados con los que podríamos construir tests adecuados a los estudiantes –de Educación Primaria, Educación Secundaria y de las Titulaciones de Magisterio–, sus conocimientos de contenidos geométricos y sus niveles de razonamiento probables. El formato de estos ítems es generalmente de "superítem" pues están formados por diversas cuestiones o actividades relacionadas que admiten respuestas desde diversos niveles de razonamiento. El Cuadro 1 incluye un ejemplo de superítem, extraído de Jaime (1993); pueden verse otros superítems en esta publicación y en Gutiérrez y Jaime (1998).

Cuadro 1. Ejemplo de "superítem" relativo a la identificación de niveles de razonamiento

1. Recuerda que una *diagonal* de un polígono es un segmento que une dos vértices no consecutivos del polígono. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de *n* lados? Demuéstralo.
2. Completa estos enunciados:
   - En un polígono de 5 lados, la cantidad de diagonales que se pueden trazar desde cada vértice es ...... y la cantidad total de diagonales es ......
   - En un polígono de 6 lados, la cantidad de diagonales que se pueden trazar desde cada vértice es ...... y la cantidad total de diagonales es ......
   - En un polígono de *n* lados, la cantidad de diagonales que se pueden trazar desde cada vértice es ...... Justifica tu respuesta.

| |
|---|
| 3. Utilizando las respuestas al apartado anterior, calcula la cantidad de diagonales que tiene un polígono de *n* lados. Demuestra tu respuesta. |

El superítem del Cuadro 1 trata de la cantidad de diagonales de un polígono. En el primer apartado recuerda la definición –para evitar respuestas erróneas o en blanco por olvido– y plantea directamente la cuestión general. Los estudiantes en condiciones de responder bien son previsiblemente quienes están en los niveles 3 ó superiores. Los estudiantes que estén en el nivel 1 no podrán entender la pregunta y los que estén en el nivel 2 dibujarán algunos polígonos, contarán las cantidades de diagonales y tratarán de encontrar una relación general. El segundo apartado está diseñado para introducir a los estudiantes en una vía de resolución. Cabe esperar que los estudiantes que estén en el tercer nivel o superiores pero no hubieran sido capaces de encontrar una demostración en el apartado 1 aprovechen esta ayuda que puede desbloquearles y hagan la demostración deductiva en el apartado 3. Los estudiantes que estén en el segundo nivel podrán contestar correctamente el apartado 2 pero no serán capaces de realizar la demostración pedida en el apartado 3.

Superítems con esta estructura permiten discriminar diferentes formas de razonamiento, pues son contestados de diferentes formas por estudiantes que razonen en diferentes niveles. Veamos algunos ejemplos. La respuesta de la Imagen 1 muestra un razonamiento empírico muy básico, típico del comienzo del aprendizaje del razonamiento del nivel 2. El estudiante ha dibujado un pentágono con sus diagonales, las ha contado y ha inducido una relación entre el número de lados y el de diagonales.

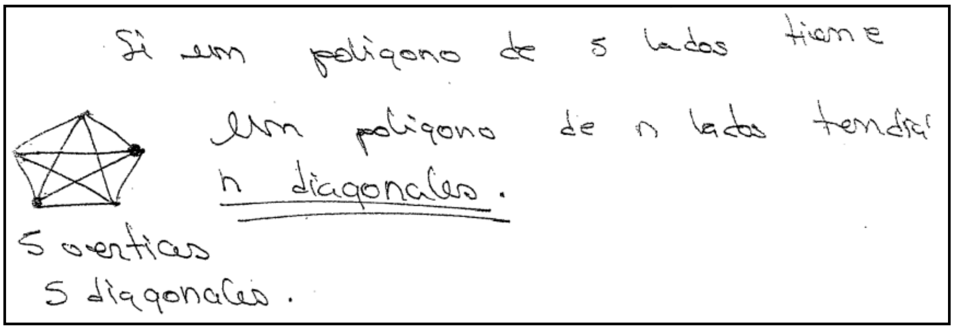


Imagen 1. Ejemplo de respuesta de un estudiante

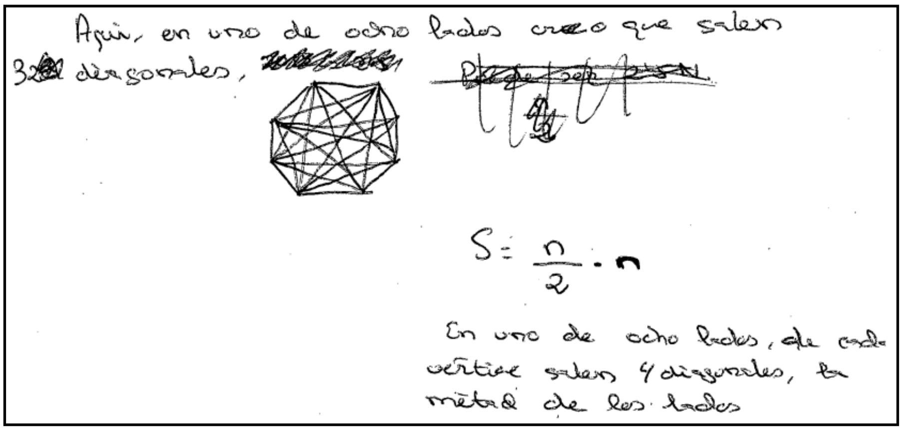


Imagen 2. Ejemplo de respuesta de un estudiante

La respuesta de la Imagen 2 es similar a la anterior, también del nivel 2, con la única diferencia de que el estudiante elige un polígono de más lados. Obsérvese que no dibuja todas las diagonales y que no las cuenta bien –en su figura hay 18 diagonales dibujadas– pero tiene la "suerte" de que le sale un número fácilmente relacionable con el 8.

El estudiante cuya respuesta se recoge en la Imagen 3, ofrece un razonamiento típico del inicio del nivel 3. Empieza dibujando una secuencia de polígonos para contar su número de diagonales –razonamiento que muestra una buena adquisición del nivel 2–. Como no ve la relación fácil que probablemente esperaba, cambia de estrategia y busca otro tipo de relación. La encuentra –razonando ya en el nivel 3– observando la cantidad de diagonales que salen de cada vértice de cada polígono. Es capaz de identificar la relación general por lo que, a partir de aquí, abandona el ejemplo específico y escribe una demostración deductiva abstracta informal de la fórmula que ha obtenido.

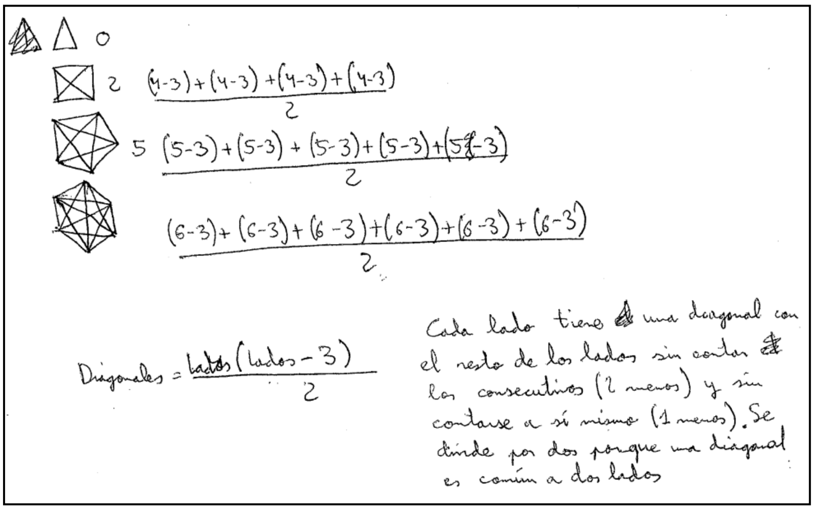


Imagen 3. Ejemplo de respuesta de un estudiante

El estudiante de la Imagen 4 nos muestra también un razonamiento típico del nivel 3. Como el anterior, se apoya en algunos ejemplos específicos para identificar una forma de resolver el problema y, cuando la ha encontrado, continúa usando razonamiento deductivo.

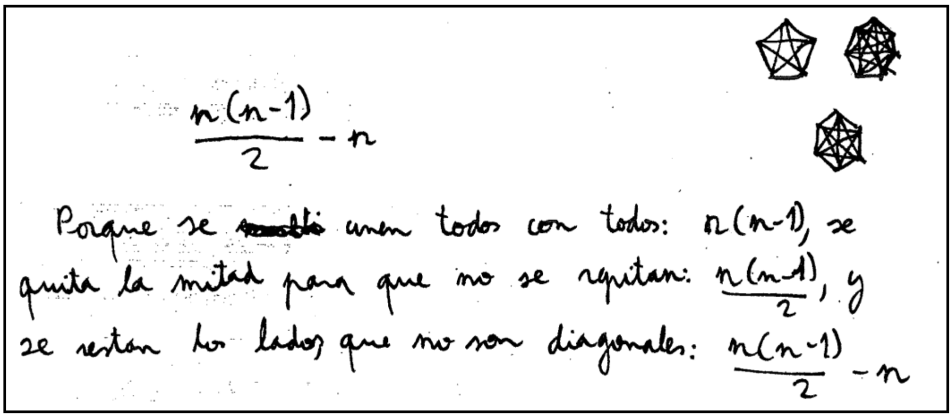


Imagen 4. Ejemplo de respuesta de un estudiante

Paralelamente a las tareas de diseño y experimentación, empecé a colaborar en un proyecto de investigación cuyo objetivo era evaluar la capacidad de razonamiento de estudiantes de Magisterio en contextos de geometría espacial. Los resultados de esta investigación se presentaron primero en el sexto congreso ICME –International Congress on Mathematical Education–, celebrado en Budapest, Hungría, en 1988, y después en Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991). En esta investigación, también como consecuencia de la experiencia de los estudios anteriores, decidimos que era necesario buscar una forma realista de asignar niveles de razonamiento de Van Hiele. Pero este paso sólo se podía dar cuestionando algunas ideas previas asumidas como centrales por los investigadores internacionales de aquel momento, en concreto referidas al modo de asignar los niveles de razonamiento, al orden estricto en el logro de los sucesivos niveles (jerarquía) y a la forma como los estudiantes pasan de razonar en un nivel a razonar en el nivel siguiente (discontinuidad).

## EL CAMBIO: NUEVO PARADIGMA DE EVALUACIÓN DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO

El conjunto de los niveles de razonamiento, tal como lo define Pierre M. van Hiele en sus primeros textos (Van Hiele, 1957 y 1986), tiene varias características que los investigadores de finales de los 80 –y también nosotros– trataban de aplicar de manera estricta (Clements y Battista, 1992; Jaime y Gutiérrez, 1990). De entre ellas, ahora sólo me interesa mencionar las que influyeron más en la evolución de mi concepción de los niveles de Van Hiele:

- La *secuencialidad* de los niveles: Los niveles de razonamiento están ordenados, desde el 1 hasta el 5. Esta característica viene inducida par las propias características de los estilos de razonamiento de los sucesivos niveles, cada vez más sofisticadas; la investigación la avala de forma casi unánime.
- La *jerarquía* de los niveles: No es posible la adquisición de un nivel de razonamiento sin antes haber adquirido el nivel anterior. Esta idea, interpretada de manera estricta, está en la base de las metodologías aplicadas en las investigaciones mencionadas en párrafos anteriores para identificar el mayor nivel adquirido por cada estudiante y asignarle la etiqueta de ese nivel como resultado de la evaluación.
- La *discontinuidad* en el paso de un nivel al siguiente: El paso de un nivel al siguiente es rápido, como un salto. Esta característica se apoya en algunos textos de P. M. van Hiele: "Había partes de la materia en cuestión que yo podía explicar y explicar, y aún así los alumnos no entendían. ... podía ver que ellos daban el máximo de sí, pero la materia parecía ser demasiado difícil. ... De pronto parecía que comprendían la materia en cuestión. Podían hablar de ella con bastante sentido ..." (Van Hiele, 1986, p. 39)

Las experiencias de los investigadores que trabajaron seriamente sobre la característica de jerarquía de los niveles de Van Hiele, y también la nuestra, indican que esta idea es discutible, pues la mayoría de autores documentan casos de estudiantes que muestran de manera simultánea el uso de dos niveles de razonamiento sin un dominio completo del nivel inferior (en Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991, hay respuestas de este tipo). Del mismo modo, también la característica de discontinuidad entre los niveles es discutible, pues algunos investigadores que hicieron experimentaciones de aprendizaje suficientemente largas observaron cambios en los estudiantes que no concuerdan con la idea del cambio brusco en la forma de razonar planteada por P. M. van Hiele.

Al diseñar la metodología de análisis de datos para la investigación mencionada al final de la sección anterior, fruto de las experiencias y reflexiones previas, nos planteamos la conveniencia de abandonar la tradición de aplicar de manera estricta las características de los niveles (jerarquía y discontinuidad), y adoptar una postura más abierta y realista: Asumimos el carácter secuencial de los niveles pero los consideramos dotados de una jerarquía parcial, que nos permitía incorporar la realidad de que la mayoría de estudiantes comienzan la adquisición de un nivel de razonamiento aunque todavía no hayan adquirido completamente el nivel anterior. En coherencia con esto, asumimos que la transición de un nivel al siguiente tiene un carácter continuo y pausado, que no se da bruscamente, sino que suele dilatarse en el tiempo, incluso durante varios años para los niveles de razonamiento superiores al segundo. Esta posición teórica planteó problemas prácticos de investigación que fuimos resolviendo.

En primer lugar, vimos que si el aprendizaje de un nivel de razonamiento tiene lugar de manera lenta, necesariamente debe haber periodos de aprendizaje parcial o imperfecto. Asignar a los estudiantes el número de *un* nivel de razonamiento ignoraba esta realidad e inducía dificultades para interpretar correctamente datos empíricos. Así pues, cabe preguntarse cómo se puede evaluar este aprendizaje progresivo y continuo, y sus cambios a lo largo del tiempo, de manera fiable. Como parte de la investigación sobre razonamiento de estudiantes de Magisterio en geometría espacial mencionada más arriba, diseñamos un método de análisis de respuestas de los estudiantes que tiene en cuenta, por una parte, la calidad del nivel de razonamiento empleado y, por otra, la calidad matemática de la respuesta (la experiencia señala que hay bastante relación entre ambas). El resultado es un conjunto de tipos cualitativos de respuestas que representan diferentes calidades en el uso de un determinado nivel de razonamiento. Un proceso de cálculo (descrito con todo detalle en Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991, y en Jaime, 1993) nos permite asignar a cada estudiante un porcentaje de adquisición de cada nivel de Van Hiele, es decir un conjunto de 4 ó 5 valores (dependiendo de si se tiene en cuenta o no el nivel 5) que da una representación del razonamiento más detallada que la mera asignación de un nivel hecha en las investigaciones precedentes. Por ejemplo, si a un estudiante se le asignan los valores porcentuales (100, 76, 37, 5) de adquisición de los niveles 1 a 4, vemos que ha adquirido completamente el nivel 1, tiene una adquisición bastante alta pero no completa del nivel 2, está empezando a adquirir el nivel 3, y no ha mostrado de manera significativa razonamiento de nivel 4.

Otro de los problemas prácticos surgió al plantearnos por qué los estudiantes comienzan el aprendizaje de la forma de razonamiento propia de un nivel cuando todavía no han aprendido completamente a razonar en el nivel precedente –como en el ejemplo anterior. Cabe preguntarse cómo podemos reflejar estos procesos de aprendizaje entremezclados en los resultados de evaluar el razonamiento de los estudiantes. La solución llegó de la mano de dos publicaciones (Hoffer, 1981 y De Villiers, 1987) en las que sus autores plantean la idea de que el razonamiento matemático no es algo único, compacto y homogéneo, sino que está formado por diversos componentes. Elaborando sobre estas publicaciones, en Gutiérrez y Jaime (1998) presentamos nuestra propuesta de cuáles son los procesos de razonamiento matemático –reconocer, con las variantes de identificar y describir, definir, usar definiciones, clasificar y demostrar– usados en cualquier actividad matemática que no sea meramente memorística y qué características tiene cada proceso para cada nivel de Van Hiele. Esta caracterización permitió explicar por qué se puede estar desarrollando el razonamiento de un nivel cuando todavía no se ha completado la adquisición del nivel anterior: Si no se practican todos los procesos de razonamiento matemático asociados a un nivel *n*, no se logrará adquirir completamente ese nivel pero, en los procesos matemáticos que sí se practican, se logrará avanzar y empezar a razonar en el nivel $n+1$.

Por otra parte, la revisión que hicimos de la literatura mostraba que no existía ningún instrumento de evaluación –test u otra forma de cuestionario– adecuado para el tipo de evaluación de los niveles de Van Hiele planteado en los dos puntos anteriores, por lo que necesitábamos diseñar nuevos procedimientos de evaluación válidos, fiables y eficaces. Un instrumento de evaluación de los niveles de Van Hiele debe combinar validez, fiabilidad y eficacia: La validez se consigue al organizar un conjunto de ítems que evalúen todos los procesos de razonamiento matemático y todos los niveles de Van Hiele. La fiabilidad se consigue mediante un criterio de evaluación de las respuestas de los estudiantes que produzca información correcta sobre sus formas de razonamiento matemático. La eficacia se consigue al minimizar la cantidad de ítems necesarios y, por tanto, el tiempo de administración y el esfuerzo de los estudiantes. Logramos todo esto gracias a que pusimos en juego una idea que, hasta entonces, algunos investigadores habían mencionado pero ninguno había aplicado en sus experimentaciones: El nivel de razonamiento de alguien no se muestra por contestar bien unos ítems, sino por las características de las respuestas, pues un mismo problema de matemáticas planteado a varios estudiantes puede ser contestado de maneras muy diferentes. Por ejemplo, un problema de demostración será resuelto por un estudiante del nivel 2 verificando la conjetura en unos ejemplos, mientras que uno de nivel 3 hará una demostración deductiva informal y uno de nivel 4 construirá una demostración deductiva formal.

Los superítems que estábamos creando y la caracterización de las relaciones entre los procesos de razonamiento matemático y los niveles de Van Hiele descrita nos permitieron elaborar una estrategia de diseño de tests (Gutiérrez y Jaime, 1998) que, junto con la metodología de evaluación de la adquisición de los niveles de Van Hiele descrita, dieron lugar a una metodología de investigación con las tres características mencionadas. En Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991), Jaime (1993) y Gutiérrez y Jaime (1998) está sintetizado el resultado de estos años de investigaciones y experimentaciones.

En los párrafos anteriores he tratado de mostrar de manera sintética cómo el análisis crítico de las primeras investigaciones sobre los niveles de Van Hiele nos llevó a plantear preguntas y a buscar sus respuestas, para lo cual tuvimos que adoptar una nueva concepción de los niveles de razonamiento y construir una metodología de investigación original que fuera coherente y nos proporcionara resultados interesantes.

**SEGUNDA EVOLUCIÓN: CAMBIO DE OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN**

La actividad investigadora descrita en la sección anterior nos proporcionó, además de una valiosa experiencia, un instrumento útil para evaluar los niveles de Van Hiele de los estudiantes. Por otra parte, los diversos investigadores que habían trabajado en analizar las características de los niveles de Van Hiele habían obtenido suficiente cantidad de información como para que la realidad de estas características pudiera considerarse consolidada (Clements y Battista, 1992; Battista, 2007). Esto cerraba los problemas que habían dado lugar a toda esa actividad y nos dejaba en condiciones de poder plantear un cambio en nuestros objetivos de investigación. En ese momento, las circunstancias hicieron que dirigiera la atención hacia la parte del Modelo de Van Hiele que había pasado desapercibida hasta entonces, las fases de aprendizaje (descritas detalladamente en Jaime y Gutiérrez, 1990) y su aplicación como metodología de enseñanza en actividades de investigación o innovación sobre la enseñanza de temas específicos de matemáticas. Para facilitar la lectura, incluyo a continuación una descripción breve de las principales características de las fases de aprendizaje:

- Fase 1: *Información*. Ante un tema nuevo, el profesor plantea actividades que sirvan, por una parte, para una toma de contacto de los estudiantes con el tema y, por otra, para identificar conocimientos y formas de razonamiento de estos estudiantes.
- Fase 2: *Orientación dirigida*. Los estudiantes empiezan a explorar el nuevo tema mediante la resolución de actividades bastante cerradas que les guiarán al aprendizaje de los contenidos básicos del tema. El profesor debe comprobar que los estudiantes llegan a los resultados previstos.
- Fase 3: *Explicitación*. Se explican los resultados obtenidos y las operaciones realizadas, se justifican las afirmaciones hechas, se debaten con el profesor o con otros estudiantes, etc. para lograr un mejor aprendizaje. No hay que ver esta fase como un tiempo de verbalización después de la segunda fase, sino como una actividad permanente siempre que la ocasión lo permita.
- Fase 4: *Orientación libre*. El aprendizaje logrado en la segunda fase se debe profundizar y completar. Los estudiantes resuelven actividades en las que deberán

poner en juego los nuevos conocimientos y formas de razonamiento en situaciones creativas y abiertas, con varias formas de resolución, varias soluciones o ninguna.

- Fase 5: *Integración*. Para concluir, es necesario proporcionar a los estudiantes la posibilidad de verlo de manera global, integrando los diferentes contenidos entre ellos y con conocimientos previos relacionados. La finalidad de esta fase no es el aprendizaje de nuevos conocimientos, sino la integración de lo aprendido.

La tesis doctoral de Dina van Hiele-Geldof es un delicioso ejemplo de aplicación de los niveles de razonamiento y de las fases de aprendizaje a la preparación de un curso de geometría de Educación Secundaria (Van Hiele-Geldof, 1957). Un estudio realizado a comienzo de los años 90 (Jaime, 1993) fue la primera actividad importante en esta nueva línea de investigación, que continuó con otro proyecto presentado en Corberán y otros (1994) y que llega hasta la actualidad con diversas investigaciones (ver, por ejemplo, Fiallo, 2011 y Gualdrón, 2011). Ahora el objetivo es diseñar unidades de enseñanza de temas específicos de matemáticas teniendo en cuenta los niveles de razonamiento esperados de los estudiantes del curso implicado y las fases de aprendizaje como marco para diseñar y organizar la unidad de enseñanza. La evaluación de los niveles de Van Hiele de los estudiantes dejó de ser el objetivo de investigación para convertirse en una herramienta de investigación que permitió, por ejemplo, hacer comparaciones pre y post-test o estudios longitudinales.

En Jaime (1993) diseñamos un conjunto de secuencias de actividades para la enseñanza de las isometrías del plano desde su introducción inicial a estudiantes sin ningún conocimiento del tema –niños de Educación Primaria, pero también futuros maestros– hasta el estudio del grupo de las isometrías del plano –propio de una Facultad de Matemáticas. Las secuencias de actividades están elaboradas sobre un marco teórico con tres componentes:

i) Los niveles de Van Hiele, que ayudan a decidir qué contenidos matemáticos y qué objetivos y metodología de enseñanza son adecuados para cada curso, al informar sobre niveles de razonamiento y tipos de respuestas que cabe esperar.
ii) Las fases de aprendizaje de Van Hiele, que ayudan a organizar las actividades de cada secuencia dependiendo de sus contenidos y de los objetivos de aprendizaje que se pretenda lograr de los estudiantes que las resuelvan bien.
iii) El conocimiento didáctico sobre estrategias y errores típicos de los estudiantes al aprender las diferentes isometrías del plano.

Como contraste a lo amplio del objetivo de la investigación anterior, en Corberán y otros (1994) procedimos a diseñar, experimentar y evaluar tres unidades de enseñanza de triángulos, cuadriláteros y polígonos en general para estudiantes del primer curso de Educación Secundaria con notables carencias en los conocimientos de este tema que deberían haber aprendido en Educación Primaria. Como en Jaime (1993), el diseño de las unidades de enseñanza se hizo teniendo en cuenta las directrices del Modelo de Van Hiele –niveles de razonamiento y fases de aprendizaje.

Otras investigaciones más recientes dentro de esta línea en las que he colaborado han tenido objetivos similares pero centrados en áreas diferentes de las matemáticas escolares y en tipos diferentes de estudiantes. Por ejemplo, Guillén (1997) se centró en analizar formas de razonamiento de futuros profesores de Educación Primaria cuando resuelven tareas de geometría espacial. Este análisis necesitaba basarse en una caracterización del significado específico de cada nivel de Van Hiele en la geometría de los poliedros, caracterización que no existía, por lo que uno de los objetivos fue obtener dicha caracterización. A continuación, abordamos los otros objetivos de la investigación: elaborar una secuencia de actividades para la enseñanza de contenidos de geometría espacial basada en los niveles y las fases del modelo de Van Hiele, y caracterizar el aprendizaje y los niveles de razonamiento de los futuros profesores al trabajar en dicha secuencia de actividades. Más recientemente, el objetivo de Gualdrón (2011) ha sido analizar el aprendizaje de la semejanza de figuras planas por estudiantes de Educación Secundaria. Para ello, ha elaborado una caracterización de los niveles de razonamiento en este contexto matemático que permite analizar de manera detallada la actividad de aprendizaje. Por su parte, uno de los objetivos de Fiallo (2011) ha sido diseñar actividades para la enseñanza de las razones trigonométricas con el soporte de software de geometría dinámica a estudiantes de Educación Secundaria. La organización de estas actividades se ha hecho tomando como referencia las fases de aprendizaje.

En síntesis, la última etapa de mi actividad científica ha tenido como objetivo permanente caracterizar los niveles de Van Hiele en contextos de la matemática escolar donde no habían sido utilizados de manera meticulosa y aplicar el modelo de Van Hiele al desarrollo de formas de enseñanza y al análisis de procesos de aprendizaje en estos contextos.

## CONSIDERACIONES FINALES

En las páginas anteriores he hecho un recorrido autobiográfico por mi actividad investigadora relacionada con el Modelo de Van Hiele. Comparando las páginas iniciales, intermedias y finales del texto, en las que he descrito los estudios en los que he participado, desde los más antiguos hasta los más recientes, es evidente que ha habido dos momentos de cambio claro en los objetivos de las investigaciones: 1) De usar la concepción sobre los niveles de Van Hiele y la metodología de evaluación del nivel de razonamiento dominantes en aquel momento a buscar una concepción y una metodología diferentes que dieran mejores respuestas a los problemas de investigación. 2) De investigar *sobre* el Modelo de Van Hiele a investigar *usando* el Modelo de Van Hiele como herramienta.

Naturalmente, en ambos cambios hubo influencias externas, procedentes de la lectura de publicaciones y de la interacción personal con otros investigadores, pero creo que los cambios surgieron sobre todo como consecuencia de la propia actividad investigadora realizada y de la reflexión crítica sobre sus objetivos, métodos y resultados. Es por todo ello que considero que mi actividad investigadora personal, en el contexto de los equipos en los que he colaborado, es el principal elemento que indujo mi evolución como investigador y el avance hacia diferentes perspectivas y nuevos objetivos.

Sería interesante analizar la influencia que hayan podido tener en esta evolución –u otras similares– las circunstancias del tiempo en que se produjo y contestar a la pregunta de si en las circunstancias actuales se podría haber dado una evolución similar. En el período de finales de los años 80 y durante la década de los 90, la actividad de investigación en didáctica de las matemáticas era, en general, bastante pausada y estable; se estaban empezando a consolidar equipos de investigación en las universidades españolas, cuyos miembros éramos los doctores más antiguos y los compañeros que acababan de obtener el doctorado seguían en el equipo pasando del rol de alumno al rol de tutor. Sin embargo, en la actualidad buena parte de nuestros alumnos de máster y doctorado tienen otros intereses –u otras posibilidades– y buscan el trabajo puntual que les permita obtener el título, cosa que nos obliga a quienes actuamos como tutores a saltar de unos temas a otros. Esto no ayuda a la continuidad temporal de una línea de investigación. Pero este análisis sería el contenido de otro capítulo.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Battista, M. T. (2007). The development of geometrical and spatial thinking. En F. K. Lester (Ed), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (843-908). Reston, Estados Unidos: NCTM.

Burger, W. F. y Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*(1), 31-

48.

Clements, D. H. y Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. A. Grouws (Ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (420-464). Nueva York, Estados Unidos: MacMillan.

Corberán, R., Gutiérrez, Á., Huerta, M. P., Jaime, A., Margarit, J. B., Peñas, A. y Ruiz, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en Enseñanza Secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele.* Madrid: C.I.D.E.-M.E.C.

De Villiers, M. D. (1987). *Research evidence on hierarchical thinking, teaching strategies and the Van Hiele theory: some critical comments*. Stellenbosch, República de Sudáfrica: Research Unit for Mathematics Education.

Fiallo, J. E. (2011). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica*. Tesis Doctoral. Valencia: Universidad de Valencia.

Fuys, D., Geddes, D. y Tischler, R. (1985). *An investigation of the Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents* (final report). Nueva York, Estados Unidos: School of Education, Brooklyn College.

Gualdrón, E. (2011). *Análisis y caracterización de la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de figuras planas*. Tesis Doctoral. Valencia: Universidad de Valencia.

Guillén, G. (1997). El *modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje*. Tesis Doctoral. Valencia: Universidad de Valencia.

Gutiérrez, Á. (1983). An experience with M. C. Escher and the tessellations. *Mathematics in School, 12*(2), 17-21.

Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (1987). Estudio de las características de los niveles de Van Hiele. En J. G. Bergeron, N. Herscovics y C. Kieran (Eds), *Proceedings of the 11th PME Conference* (vol. 3, 131-137). Montreal, Canadá: University of Montreal.

Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 20*(2/3), 27-46.

Gutiérrez, Á., Jaime, A. y Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 237-251.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *The Mathematics Teacher, 74*(1), 11-18.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. Tesis Doctoral. Valencia: Universidad de Valencia.

Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (1985). Estudio de las isometrías planas en las Escuelas de Magisterio. Los mosaicos. En *Actas de las X Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas* (secc. X, 52-59). Murcia: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Murcia.

Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de Van Hiele. En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds), *Teoría y práctica en educación matemática* (295-384). Sevilla: Alfar.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry*. Columbus, Estados Unidos: ERIC.

Van Hiele, P. M. (1957). *El problema de la comprensión en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría*. Tesis Doctoral. Utrecht, Holanda: Universidad de Utrecht (http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/VanHiele57.pdf).

Van Hiele-Geldof, D. (1957). *The didactics of geometry in the lowest class of secondary school*. Tesis Doctoral. Utrecht, Holanda: Universidad de Utrecht (traducción al inglés editada por D. Fuys, D. Geddes y R. Tischler –City University of New York, Nueva York, Estados Unidos– en 1984).

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education.* Londres, Reino Unido: Academic Press.