

Citar como: Gutiérrez, A. (2014): Los entornos de geometría dinámica 3d y la enseñanza de la geometría espacial. Claros y sombras, en Grupo Gedes (Ed.), Memorias del Congreso Internacional de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas Mediadas por TIC (CIMATIC14) (pp. 11-21). Armenia (Colombia): Univ. del Quindío.

1

Los entornos de geometría dinámica 3d y la enseñanza de la geometría espacial. Claros y sombras

Ángel Gutiérrez Rodríguez¹

RESUMEN

El creciente uso de aplicaciones informáticas de geometría dinámica 3-dimensional en las clases de matemáticas de los niveles de primaria y secundaria está mostrando que pueden ser una valiosa ayuda para facilitar el aprendizaje de la geometría espacial pero también que hay diversos aspectos importantes que influyen en el mayor o menor éxito de la enseñanza. Esto plantea a los investigadores en educación matemática y a los profesores de matemáticas cuestiones interesantes que es necesario explorar.

En esta conferencia me centraré en analizar algunos problemas que se plantean a los estudiantes, incluso cuando son estudiantes con un alto talento matemático, al iniciarse en el uso de una aplicación de geometría dinámica 3-dimensional. Estos problemas pueden ser de dos tipos: Problemas relacionados con la propia aplicación, como son el uso de sus comandos o la interpretación de la información ofrecida en la pantalla del computador. Problemas relacionados con el aprendizaje de los estudiantes, como son las concepciones primitivas que estos desarrollan a partir de sus interacciones con el entorno de geometría dinámica 3-dimensional. Mostraré algunos ejemplos de actuaciones de estudiantes en las que queda claro que la aplicación puede ser una ayuda pero también un obstáculo.

ABSTRACT

The increasing use of computer applications of 3-dimensional dynamic geometry in the primary and secondary mathematics classes is showing that they can be a valuable aid to facilitate the learning of space geometry but also that there are several important aspects that influence the greater or lesser success of teaching. This poses to researchers in mathematics education and mathematics teachers interesting questions that need to be explored.

¹angel.gutierrez@uv.es - Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia (España) <http://www.uv.es/angel.gutierrez>

In this lecture I will focus on analyzing some problems faced by students, even those mathematically gifted, when they are introduced to the use of a 3-dimensional dynamic geometry software. These problems may be of two types: problems related to the software itself, such as the use of its commands or the interpretation made by students of the information provided on the computer screen. Problems related to students' learning, such as the primitive conceptions that they develop after their interactions with the 3-dimensional dynamic geometry software. I will show some examples of students' performances clearly demonstrating that the software can be a help but also an obstacle.

PALABRAS CLAVE: Entornos de geometría dinámica, Geometría espacial, Dificultades de aprendizaje, Génesis instrumental, Talento matemático

KEYWORDS Dynamic geometry environments, Space geometry, Learning difficulties, Instrumental genesis, Mathematical giftedness.

INTRODUCCIÓN

Desde hace varias décadas, los profesores de matemáticas y los investigadores en educación matemática vienen publicando numerosos ejemplos de entornos de geometría dinámica que prestan una ayuda importante a los estudiantes en su aprendizaje de la geometría plana. Por una parte, los profesores crean conjuntos de actividades para enseñar diferentes contenidos geométricos en todos los niveles educativos basándose en la manipulación de los entornos de geometría dinámica. Por otra parte, los investigadores han analizado la utilidad y eficacia de dichos entornos para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría plana y han definido diferentes marcos teóricos que permiten analizar e interpretar la actividad de profesores y estudiantes (Laborde y otros, 2006; Battista, 2007). La conclusión de la mayoría de investigadores y profesores es que los entornos de geometría dinámica pueden ser un instrumento eficaz para facilitar el aprendizaje de la geometría plana, aunque es necesario ser conscientes de que su utilización no es simple y que los estudiantes deben hacer frente a algunas dificultades propias de las características del entorno. Todo lo dicho antes se refiere a geometría plana y a entornos de geometría dinámica en el plano (EGD2d). Más recientemente, la aparición de aplicaciones informáticas de geometría dinámica 3-dimensional ha permitido ampliar el campo de aplicación de los entornos de geometría dinámica al estudio de la geometría espacial. Los entornos de geometría dinámica 3-dimensional (EDG3d) comparten algunas características de uso con los EGD2d, pero también incorporan características diferenciadas respecto de los EGD2d derivadas de las peculiaridades de la geometría espacial respecto de la geometría plana. Buena parte de la problemática docente e investigadora del los EGD2d es común a los EGD3d pero estos, además, tienen una problemática propia derivada, por una parte, de las características técnicas de las propias aplicaciones, especialmente de la necesidad de arrastrar tridimensionalmente objetos (puntos, rectas, sólidos, etc.) mediante un instrumento bidimensional (ratón, pad, etc.) y también derivada, por otra parte, de las características diferenciadoras de la geometría espacial, especialmente de la complejidad de representar en el plano objetos espaciales (no olvidemos que la pantalla del computador es una superficie plana) y de la necesidad de uso intensivo de habilidades de visualización e imaginación espacial por estudiantes y profesores. En la actualidad no resulta difícil encontrar propuestas de enseñanza de geometría espacial (principalmente en relación con los poliedros) apoyadas en EGD3d, si bien su número es todavía escaso. En la década de 1990, investigadores en educación matemática franceses empezaron a utilizar la teoría de la génesis instrumental para analizar y entender las dificultades que experimentaban los estudiantes de educación secundaria al utilizar calculadoras gráficas o simbólicas para aprender álgebra (Guin, Ruthven y Trouche, 2005). El éxito de los investigadores franceses en álgebra ha propiciado que, en la última década, se hayan llevado a cabo investigaciones que toman la teoría de la génesis instrumental como marco de referencia para analizar y entender las interacciones entre estudiante y máquinas en EGD2d (Restrepo, 2008) y también que, actualmente, se estén iniciando investigaciones usando este

marco teórico para analizar los problemas generados por los EGD3d para la enseñanza de la geometría espacial (Alba, 2012; Hugot, 2005; Mackrell, 2006; Salazar, 2009).

En la actualidad, una de las líneas de investigación²En la actualidad, una de las líneas de investigación que está desarrollando el equipo de investigación del que formo parte en la Universidad de Valencia se centra en la atención diferenciada a estudiantes de altas capacidades matemáticas (o con talento matemático). Los estudiantes de altas capacidades matemáticas requieren una atención especial por parte de sus profesores, ya que su ritmo de aprendizaje suele ser muy superior al de sus compañeros de grupo y sus intereses de aprendizaje de las matemáticas suelen ser bastante diferentes de los de sus compañeros. El uso de Tics facilita a los profesores la tarea de diversificar sus programaciones de las clases para que estudiantes de diferentes intereses o capacidades matemáticas sigan ritmos de trabajo distintos. En experimentaciones que hemos llevado a cabo hemos observado cómo estudiantes con altas capacidades matemáticas resuelven problemas en un EGD3d. Hemos identificado formas de resolver los problemas peculiares de estos estudiantes y también hemos observado que sufren dificultades de aprendizaje que sólo pueden superar con la ayuda del profesor.

Como síntesis e integración de lo dicho en los párrafos anteriores, en esta conferencia reflexionaré sobre el uso de un EGD3d basado en Cabri-3d por estudiantes de Educación Secundaria con capacidades matemáticas medias y altas, tomando como base la experiencia de estudiantes españoles de 2º y 4º cursos de Educación Secundaria Obligatoria (equivalente a los grados 8º y 10º de Colombia). Presentaré diversas actividades de enseñanza de geometría espacial y reflexionaremos sobre las formas de resolverlas diferentes estudiantes y sobre cómo dicho EGD3d proporciona ayuda al aprendizaje de los estudiantes pero también les pone obstáculos.

MARCO DE REFERENCIA

El análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje que presento se basa en la observación de tres elementos: La interacción de los sujetos (estudiantes de geometría espacial) con el computador, la interpretación y uso que los sujetos hacen de las representaciones planas de objetos espaciales (puntos, rectas, planos, poliedros, etc.) y la identificación de formas de razonamiento y resolución de problemas diferenciadoras de los estudiantes de altas capacidades matemáticas respecto de sus compañeros de capacidades matemáticas medias. Por ello, el marco de referencia que utilizaré está formado por tres componentes.

La teoría de la génesis instrumental. Rabardel (1999) analiza la evolución de la relación entre un sujeto y un artefacto. Un artefacto puede ser físico (p. ej., una máquina de coser, una sierra o un computador), simbólico (p. ej., un diagrama, un ábaco o un lenguaje de programación) o combinación de ambos (p. ej., un programa informático y el computador que lo ejecuta con sus periféricos). Además, Rabardel introduce el concepto de instrumento para identificar el resultado de la asimilación por el sujeto de algunas características del artefacto cuyo dominio le permite alcanzar el objetivo de aprendizaje planteado. Para Rabardel, el instrumento está formado por la combinación de un artefacto y de esquemas de uso en la mente del sujeto resultantes de la interacción del sujeto con el artefacto.

La génesis instrumental es el proceso de formación de un instrumento por un sujeto a partir de un artefacto. Describe las variaciones en las interacciones entre el sujeto y el artefacto a lo largo del tiempo, a medida que el sujeto va adquiriendo experiencia y la práctica le va haciendo más eficaz usando el artefacto (Rabardel, 2002). Dichas interacciones entre sujeto y artefacto tienen un

²Este texto presenta parte de las actividades del proyecto de investigación Análisis de procesos de aprendizaje de estudiantes de altas capacidades matemáticas de E. Primaria y ESO en contextos de realización de actividades matemáticas ricas (EDU2012-37259), subvencionado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España en el Programa Nacional de I+D+i.

componente físico (manipulación de la máquina de coser, del ábaco, del computador, etc.) y otro psicológico (interpretación de la información recibida por el sujeto y toma de decisiones respecto de cómo actuar sobre el artefacto).

En el aprendizaje de las matemáticas mediado por un EGD, el sujeto es el estudiante y el artefacto está formado por el teclado, ratón o pad, pantalla, etc. del ordenador más la parte del programa informático que necesita utilizar el estudiante (por ejemplo, para hacer una construcción geométrica en Geogebra normalmente no es necesario utilizar su hoja de cálculo, por lo que al estudiante no le hace falta saber usarla). Las interacciones del estudiante con el ordenador (manejo del teclado, ratón o pad, uso de los menús, observación de la pantalla, etc.) tienen como objetivo resolver unos problemas matemáticos y aprender unos contenidos mediante la interpretación en clave matemática por el estudiante de la información ofrecida por la pantalla y la transformación de su razonamiento matemático en decisiones de actuación sobre el ordenador (elección de un comando, acción de arrastre, etc.). La génesis instrumental tiene dos componentes:

- La instrumentalización concierne al surgimiento y evolución de los componentes del artefacto que forman parte del instrumento: selección, reagrupamiento, producción e institución de funciones, transformación del artefacto (estructura, funcionamiento, ...) que prolongan la concepción inicial de los artefactos.
- La instrumentación se refiere al surgimiento y la evolución de los esquemas de uso: su constitución, su funcionamiento, su evolución así como la asimilación de nuevos artefactos a esquemas ya constituidos, etc. (Rabardel, 1999, p. 9)

Dicho con otras palabras, la instrumentación es el proceso de creación de esquemas de uso que permiten al usuario adaptarse a las particularidades impuestas por el artefacto; por ejemplo, los estudiantes deben realizar las construcciones de objetos geométricos utilizando los comandos ofrecidos por el EGD3d y dando pasos en un orden permitido por la aplicación. La instrumentalización es el proceso de creación de esquemas de uso que permiten al usuario utilizar el artefacto de manera lo más eficaz posible, incluso de maneras no previstas por los creadores del artefacto; por ejemplo, en un EGD3d, los estudiantes pueden construir un cubo paso a paso, pero, si no lo pide así el profesor, es más eficaz utilizar el comando que construye automáticamente un cubo a partir de dos o tres puntos.

Así pues, mediante los procesos de instrumentalización el sujeto aprende a utilizar de manera más eficaz la parte del artefacto que necesita, hasta llegar a un nivel de perfección en su uso suficiente para poder resolver los problemas planteados. Y, mediante los procesos de instrumentación el sujeto crea esquemas de acción instrumentada (es decir, de acción mediante el uso del instrumento) orientados a permitirle resolver las tareas planteadas. Ambos procesos evolucionan generalmente de manera simultánea.

En el contexto de los EGD3d basados en Cabri 3d, los procesos de génesis instrumental incluyen una variedad de elementos, entre los que destacamos:

- Manejo de los comandos: algunos comandos realizan una única acción, pero otros actúan de maneras diferentes dependiendo de los objetos seleccionados o de si se pulsa o no determinada tecla. Por ejemplo, el comando “Perpendicular” permite hacer cuatro construcciones diferentes.
 - Manejo de la opción “bola de cristal”, que permite cambiar la ubicación del observador alrededor del espacio para ver los objetos construidos desde cualquier posición.
 - Idiosincrasias de Cabri 3d, en especial la referente a la movilidad de los puntos construidos sobre el “plano base” (el plano XY): un punto construido en la parte visible del plano base (el
-

cuadrilátero que lo representa en la pantalla) no puede moverse fuera del plano, mientras que un punto construido en el plano base fuera de su parte visible sí puede sacarse del plano.

La teoría de la visualización espacial en matemáticas. Parzysz (1988) nos avisa de la inevitable pérdida de información que se produce cuando se representa un objeto espacial sobre un plano, incluso cuando se trata de la imagen generada por un EGD3d y proyectada en la pantalla de un ordenador. Parzysz sugiere que, para ser eficaz y útil, cualquier forma de representación necesita compensar dicha pérdida de información mediante la utilización de determinados códigos, implícitos o explícitos, que aporten información complementaria a la contenida en la proyección gráfica. Para facilitar el aprendizaje a los estudiantes, los profesores deben enseñarles a entender y manejar esos códigos y deben ser conscientes de las dificultades que en ocasiones conlleva dicho aprendizaje, en particular en los EGD3d.

Así, Cabri 3d ofrece al usuario diversos códigos para ayudarle a visualizar e interpretar correctamente la imagen presentada en la pantalla. Por ejemplo, en la Figura 1.1 vemos que la aplicación utiliza el código de la visión en perspectiva que hace aparecer más pequeños los objetos más lejanos: la recta AB es aproximadamente paralela a la pantalla, y la recta CD forma un ángulo mayor con la pantalla, siendo su parte derecha la que se acerca al observador; este código nos permite saber, además, que el punto C es el más alejado del usuario y el punto B el más cercano a éste.

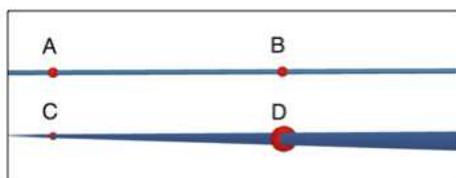


Figura 1.1: Dos rectas en la pantalla de Cabri 3d

Diversos autores han reconocido que la complejidad de la geometría espacial hace que sólo sea posible adquirir destreza en el uso de los EDG3d si paralelamente se van adquiriendo determinados conocimientos geométricos. Así, Mackrell (2006) describe un experimento de enseñanza basado en la manipulación de Cabri 3d e indica que los procesos de génesis instrumental deben incluir tanto la adquisición de destrezas en el uso de la aplicación como el aumento de la comprensión de la geometría espacial. Salazar (2009) confirma esta afirmación al notar que sus alumnos sólo eran capaces de desarrollar estrategias de uso de Cabri 3d al mismo tiempo que creaban conexiones entre la aplicación y sus conocimientos matemáticos. En los ejemplos de actividades de estudiantes que presentaré podremos observar también esta relación de aprendizaje paralelo de uso de Cabri 3d y de conocimientos de geometría espacial implicados en los problemas planteados.

Rasgos de los estudiantes de altas capacidades matemáticas. Existen diversas teorías psicológicas que tratan de explicar los rasgos de los individuos superdotados, si bien estas teorías, por lo general, son poco útiles para explicar las características específicas del talento matemático, debido principalmente a las muchas peculiaridades que tienen las Matemáticas respecto de otras actividades científicas o artísticas. Sin embargo, hay estudios centrados en analizar las formas de operar en matemáticas de estudiantes talentosos y superdotados que han dado lugar a descripciones ajustadas de rasgos de comportamiento específicos de estudiantes de diversas edades cuya característica común es poseer un talento matemático muy superior a la media de estudiantes de su edad o grado escolar. Autores como Freiman (2006), Greenes (1981), Krutetskii (1976), Miller (1990) y Ramírez (2012) ofrecen listas de descripciones del talento matemático, que podemos sintetizar y resumir en este conjunto de rasgos (Jaime, Gutiérrez, 2014):

1. Formulación espontánea de preguntas que van más allá de la tarea matemática propuesta.
2. Flexibilidad: Cambian fácilmente de estructura y de estrategia, según les convenga.
3. Producción de ideas originales, valiosas y extensas.
4. Localización de la clave de los problemas.
5. Identificación de patrones y relaciones.
6. Construcción de nexos y estructuras matemáticas.
7. Mantenimiento de los problemas y su resolución bajo control.
8. Atención a los detalles.
9. Desarrollo de estrategias eficientes.
10. Rapidez en la resolución de problemas y en el aprendizaje de contenidos matemáticos.
11. Originalidad de los caminos empleados para la resolución de problemas.
12. Pensamiento crítico y persistente en la consecución de los objetivos propuestos.
13. Mostrar abreviación de los procesos al resolver problemas de tipo similar.
14. No estar sujetos a técnicas de resolución que han tenido éxito en el pasado y poder hacer reajustes cuando éstas fallan.
15. Tendencia a recordar las estructuras generales, abreviadas, de los problemas y sus soluciones.
16. Menores muestras de cansancio trabajando en matemáticas que en otras materias.
17. Capacidad de generalización y transferencia.
18. Capacidad de abstracción.
19. Reducción del proceso de razonamiento matemático. Lo simplifican para obtener soluciones racionales y económicas.
20. Gran capacidad de utilización de pensamiento lógico usando símbolos matemáticos.
21. Habilidad para la inversión de procesos mentales en el razonamiento matemático.
22. Memoria matemática. No se trata de una memorización de datos inconexos, sino de recuperación de ideas, principios u operaciones significativas.

Es necesario aclarar que un estudiante con talento matemático no tiene necesariamente que mostrar todos los rasgos incluidos en la relación anterior. Que muestre o no un rasgo depende tanto de las peculiaridades del estudiante como del problema que se le proponga resolver.

EJEMPLOS DE RESOLUCIÓN DE TAREAS DE GEOMETRÍA ESPACIAL EN UN EGD3D

En los siguientes párrafos voy a presentar brevemente dos casos que sirven como ejemplos paradigmáticos de los tipos de beneficios y dificultades que pueden encontrar los estudiantes al aprender geometría espacial en un EGD3d.

El primer ejemplo, tomado de Alba (2012), es un caso que muestra una forma típica de interactuar de los estudiantes de Educación Secundaria cuando tiene lugar su primera toma de contacto con Cabri3d en un entorno en el que la metodología de enseñanza elegida da al profesor el rol de guía poco activo,

pues deja que los estudiantes resuelvan las tareas planteadas por sus propios medios y que decidan cómo proseguir cuando se dan cuenta de que han resuelto mal una tarea.

Los estudiantes estaban en 4^o curso de Educación Secundaria Obligatoria española (equivalente al 10^o grado de Colombia). Estaban empezando el tema de geometría espacial y el profesor inició una secuencia de actividades orientadas a enseñar a los estudiante el manejo de Cabri 3d, que no habían utilizado nunca, para luego usar este EGD3d para la enseñanza de dicho tema. Trabajaban por parejas, salvo una alumna que trabajaba sola.

Una actividad, que se planteó varias horas después de haber empezado el experimento, se inició abriendo un archivo en el que se ven (Figura 1.2a) el plano base (gris) y dos planos (verde y rosa) que se cortan. También se ven los puntos utilizados para la construcción de los dos planos. Se pedía a los estudiantes mover los planos verde y rosa hasta superponerlos y explicar el procedimiento seguido.

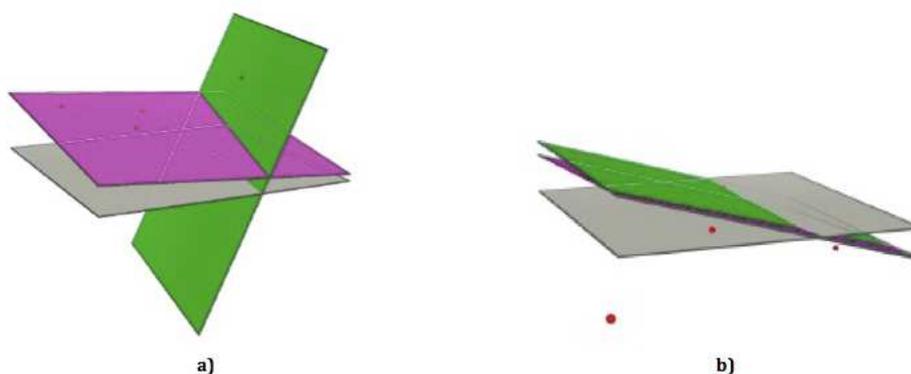


Figura 1.2: Mover los planos verde y rosa hasta superponerlos.

Una pareja de estudiantes empezó la actividad arrastrando horizontalmente uno de los puntos de construcción del plano rosa, con la intención de hacer girar al plano. Como no obtuvieron ninguna rotación apreciable, a continuación arrastraron el plano rosa también horizontalmente, lo cual tampoco les dio ningún resultado útil. Después, las estudiantes decidieron arrastrar alguno de los puntos del plano rosa, pero no fueron capaces de encontrarlos, pues se habían salido de la ventana, por lo que pensaron en usar la bola de cristal, pero una de ellas tampoco estaba segura de para qué servía:

S: ¿Cómo era eso de la bola de cristal?

C: Con la bola de cristal sólo podías cambiar de perspectiva.

S: Sí, sí. Pues eso.

No obstante, bastó el recordatorio de su compañera para que recordara la utilidad de la bola de cristal. Al usar la bola de cristal, no lograron encontrar algunos de los puntos de construcción de los planos, por lo que desistieron. En vista de su bloqueo, decidieron llamar al profesor y éste optó por cerrarles el archivo y abrírselo de nuevo en la posición inicial. Ahora, las estudiantes arrastraron horizontalmente un punto de construcción del plano verde y lograron girarlo. Cuando pensaron que este plano estaba situado paralelo al plano rosa, decidieron arrastrar este plano. No consiguieron superponerlos correctamente, pero se conformaron con el resultado (Figura 1.2b) y dieron la actividad por terminada.

En este resumen podemos darnos cuenta de que las estudiantes tenían dificultades para manejar

adecuadamente el arrastre y de que no distinguían la diferencia entre los efectos de arrastrar un punto o un plano. Las estudiantes no se dieron cuenta de que, al arrastrar el plano, arrastraban también indirectamente sus puntos de construcción, ni de que estos puntos quedaban fuera de la parte visible de dicho plano, incluso algunos de ellos también fuera de la pantalla del ordenador. A pesar de que las estudiantes ya habían resuelto con anterioridad actividades en las que habían tenido que girar planos, todavía no habían logrado desarrollar unos procesos de instrumentación e instrumentalización que les ayudaran a resolver tareas como esta, pues el problema que sufrían está ligado a los tipos de movimientos que se pueden hacer con los planos y a las condiciones impuestas por el EGD3d de cómo realizarlos.

Por lo tanto, podemos observar que las alumnas necesitaban, desde un punto de vista de su génesis instrumental, elaborar esquemas apropiados sobre las formas de girar y trasladar planos y sobre el uso de la bola de cristal. En este sentido les sería útil asimilar, como mínimo, que:

- Cuando se arrastra un punto de construcción de un plano, el plano gira alrededor de la recta que pasa por los otros dos puntos de construcción.
- La posición e inclinación de un plano sólo dependen de las posiciones de sus puntos de construcción.

El segundo ejemplo, tomado de Gutiérrez, Jaime y Alba (2014), es un caso que muestra la actuación de un estudiante de altas capacidades matemáticas de 2º curso de Educación Secundaria Obligatoria española (equivalente al 8º grado de Colombia) cuando empieza a interactuar con el EGD3d para estudiar los conceptos de punto, recta y plano en el espacio 3-dimensional, así como las relaciones de corte, cruce, pertenencia, paralelismo, perpendicularidad, etc. entre ellos.

El estudiante no había estudiado nunca estos conceptos en el espacio, pero sí había estudiado los conceptos de puntos y rectas, así como las propiedades correspondientes, en geometría plana. Por otra parte, el estudiante tenía bastante experiencia en el uso de EGD2d y una experiencia muy básica en el uso de Cabri 3d, limitada a la construcción de poliedros mediante los comandos que ofrece la aplicación.

El experimento de enseñanza empezó con un cuestionario escrito para identificar los conocimientos y concepciones previas del estudiante. Las siguientes respuestas tuvieron lugar durante la primera sesión. Se le pidió dibujar un plano y dos rectas en el plano y que a) sean paralelas, b) que se corten y c) sean perpendiculares. La Figura 1.3 muestra los dibujos hechos por el estudiante.

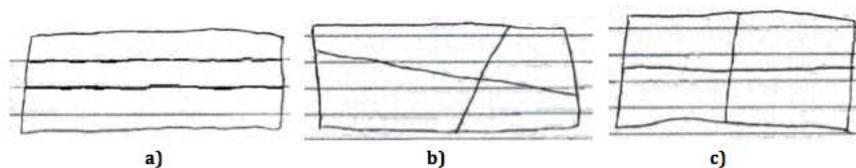


Figura 1.3: Dibujo de un plano y de dos rectas en el plano que (a) sean paralelas, (b) se corten, (c) sean perpendiculares.

Se observa que la concepción de plano en el espacio del estudiante era de una superficie acotada, limitada por el perímetro rectangular dibujado. Creemos que esta concepción errónea de plano en el espacio 3-dimensional puede ser inducida por el propio software y la forma como representa los planos. En otras palabras, la génesis instrumental que este estudiante necesita para poder utilizar correctamente el EGD3d y para adquirir una concepción correcta de plano en geometría espacial está

sin iniciar. El estudiante necesita desarrollar los procesos de instrumentación (que le permita entender las limitaciones impuestas por Cabri 3d en su forma de representar los planos y adaptarse a ellas) y de instrumentalización (que le permita aprender a utilizar mejor los comandos de construcción de la aplicación).

Sin embargo, el estudiante sí tenía una concepción correcta de recta como línea indefinida, como se ve en la Figura 1.4 y la respuesta que dio después de dibujar las rectas de la Figura 1.4a:

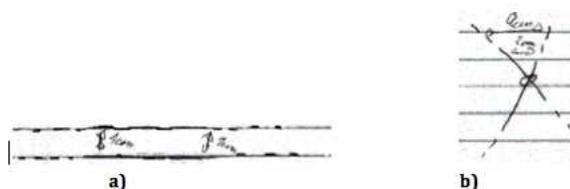


Figura 1.4: Dibujo de dos rectas (a) paralelas, (b) que se cortan

Profesor: *¿Por qué dibujas esos puntitos sueltos a los lados [los guiones]?*

Estudiante: *Porque [las rectas] siguen y siguen.*

Al mismo tiempo, este estudiante mostraba rasgos propios de su alto talento matemático al tratar de resolver los problemas planteados de manera coherente. Así, en la Figura 1.5 se ve el dibujo hecho por el estudiante al pedirle el profesor que dibujara un plano y una recta paralela al plano. El estudiante explicó por qué la recta superior es paralela al plano:

Estudiante: *Porque nunca lo tocan. ... Y, además, porque la distancia de aquí a aquí es la misma que de aquí a aquí y de aquí a aquí, etc*

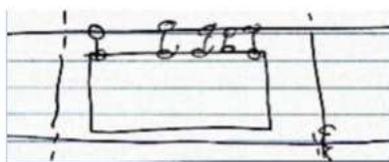


Figura 1.5: Dibujo de un plano y de rectas paralelas al plano.

En esta respuesta se observa que el estudiante ha recordado su conocimiento de la caracterización de dos rectas paralelas en la geometría plana y lo ha transformado para justificar coherentemente (aunque incorrectamente desde el punto de vista matemático) el paralelismo entre la recta y el plano que había dibujado. En concreto, en esta respuesta aparecen rasgos de capacidad de generalización y transferencia de conocimientos de la geometría plana a la geometría espacial y de habilidad para la construcción de nexos y estructuras matemáticas nuevos.

A lo largo de las sesiones de la unidad de enseñanza, el profesor le explicaba cuando era oportuno que los planos en el espacio 3-dimensional son ilimitados y que el EGD3d sólo representa de forma visible una pequeña parte de los planos. Estas explicaciones más la resolución de los problemas planteados y la práctica en el uso hicieron que la génesis instrumental se desarrollara rápida y satisfactoriamente en los dos componentes de uso del EGD3d y del aprendizaje de los contenidos geométricos (concepción correcta de plano como superficie ilimitada). La Figura 1.6 muestra el dibujo hecho por el estudiante al final del experimento de enseñanza cuando el profesor le volvió a pedir que dibujara un plano y

una recta paralela al plano. Comparando las Figuras 1.5 y 1.6, observamos que las habilidades de dibujo del estudiante han mejorado pues es capaz de representar la recta y el plano tanto desde una posición superior (dibujo de la izquierda) como desde una posición en la que el plano está situado ortogonalmente a la hoja de papel, imitando la imagen que se ve en la pantalla del computador cuando se usa la bola de cristal para situar un plano ortogonalmente a la pantalla. Podemos considerar que la génesis instrumental inducida por la unidad de enseñanza se ha completado.



Figura 1.6: Dibujo de un plano y de una recta paralela al plano.

CONCLUSIONES

La enseñanza de la geometría espacial presenta importantes retos para profesores y estudiantes. El uso de materiales didácticos como apoyo para facilitar el aprendizaje y la comprensión es siempre necesario. En la actualidad, además de los tradicionales materiales manipulativos, disponemos de recursos electrónicos que pueden cubrir parte de las carencias de los materiales manipulativos.

Hemos analizado uno de estos recursos electrónicos, los entornos de geometría dinámica 3-dimensional. Como conclusión del análisis realizado, podemos afirmar que el uso de los EGD3d no es fácil, sino que requiere de los profesores un esfuerzo para controlar las diversas fuentes de dificultades que presentan. Creo que un uso combinado y complementarios de EGD3d y materiales manipulativos, que aproveche las virtudes de cada contexto y trate de evitar las deficiencias de cada uno, puede ser la forma de enseñanza de la geometría espacial más fructífera en los grados de Educación Primaria y de Educación Secundaria.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alba, F. J. (2012). Dificultades de interpretación y de uso de los arrastres en Cabri 3D por estudiantes de ESO (Memoria de Trabajo Fin de Máster no publicada). Valencia, España: U. de Valencia. Disponible en [http://roderic.uv.es/bitstream/handle/10550/25780/Alba,F.J.\(2012\).pdf](http://roderic.uv.es/bitstream/handle/10550/25780/Alba,F.J.(2012).pdf).
- Battista, M. T. (2007). The development of geometrical and spatial thinking. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Reston, EE.UU.: NCTM.
- Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A challenging situations approach. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 3 (1), 51-75.
- Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *Arithmetic Teacher*, 28, 14-18.
- Guin, D., Ruthven, K., y Trouche, L. (Eds.). (2005). *The didactical challenge of symbolic calculators*. N. York: Springer.
- Hugot, F. (2005). Une étude sur l'utilisabilité de Cabri 3D. Grenoble, Francia: Université Joseph Fourier Grenoble I. Disponible en <http://www-diam.imag.fr/memoiresDEA/memoireF.Hugot.PDF>.

-
- Jaime, A., Gutiérrez, A. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de E. Primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. pendiente de publicación). Valencia: Publicaciones de la U. de València.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school-children*. Chicago, EE.UU.: The University of Chicago Press.
- Miller, R. C. (1990). *Discovering Mathematical Talent*. Washington, DC: ERIC. Disponible en <<http://www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/contentdelivery/servlet/ERICServlet?accno=ED321487>>.
- Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., y Sträesser, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 275-304). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.
- Mackrell, K. (2006). Cabri 3D: potential, problems and a web-based approach to instrumental genesis. *Proceedings of the 7th ICMI Study Conference "Technology revisited"*, 2, 362-369. Disponible en <<http://elib.lhu.edu.vn/bitstream/123456789/4872/1/c10.pdf>>.
- Rabardel, P. (1999). Éléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. *Actes de la 10e Université d'Été de Didactique des Mathématiques*, 203-213. Disponible en <<http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/Groupes/Modele/Articles/Public/ART372248700765426887.PDF>>.
- Rabardel, P. (2002). People and technology. A cognitive approach to contemporary instruments. Paris: Université Paris 8. Disponible en <<http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/Groupes/Modele/Articles/Public/ART375257849869724629.PDF>> y <<http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/Groupes/Modele/Articles/Public/ART375254868869724629.PDF>>.
- Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (tesis doctoral no publicada). Granada: Universidad de Granada. Disponible en <http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalles/7461/descargar>.
- Restrepo, A. M. (2008). *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6ème* (Tesis doctoral no publicada). Grenoble, Francia: Université Joseph Fourier.
- Salazar, J. V. F. (2009). *Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de transformações geométricas no espaço* (Tesis doctoral). Sao Paulo, Brasil: Pontifícia Universidade Católica de Sao Paulo. Disponible en <http://www.pucsp.br/pos/edmat/do/tese/jesus_flores_salazar.pdf>.
-