

4.

La investigación en Didáctica de las Matemáticas

ANGEL GUTIÉRREZ RODRÍGUEZ
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Valencia

4.1. INTRODUCCION

En los anteriores capítulos de este libro se han descrito diferentes tipos de actividades, teóricas y prácticas, que integran el área de la Didáctica de las Matemáticas (o la Educación Matemática, si se usa la terminología anglosajona) y la caracterizan como una especialidad con entidad, métodos y objetivos propios. Para ofrecer una visión completa de la Didáctica de las Matemáticas, sólo queda por describir la actividad investigadora dentro de esta área, lo cual constituye el objetivo de este capítulo. En cualquier campo científico, la investigación es una actividad básica e imprescindible pues, junto a factores externos de tipo social o económico, marca las vías de evolución y progreso de dicho campo. En la Didáctica de las Matemáticas, cuyo objetivo último es mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, los investigadores tienen como misión preferente ofrecer respuestas a los problemas planteados por los profesores y diseñadores de currículum cuando quieren conseguir que las Matemáticas sean comprendidas mejor y aprendidas más profundamente por los estudiantes.

El objetivo del presente capítulo es presentar los elementos más importantes que integran la actividad de investigación en Didáctica de las Matemáticas, describiendo las corrientes metodológicas existentes, los objetivos

prioritarios de los investigadores y los temas de más interés en la actualidad. No he intentado hacer un desarrollo exhaustivo de dichos puntos (cosa que, por otra parte, cae fuera de los objetivos de este libro), por lo que probablemente cada lector echará de menos la referencia a algún concepto o alguna línea de trabajo que se ha quedado en el ordenador¹. La selección hecha tiene su origen en la perspectiva personal del autor y, sin duda, está influida por sus gustos y opiniones.

Como consecuencia de los objetivos básicos de la Didáctica de las Matemáticas, a los que me refería en el primer párrafo, la investigación en este área se encuentra situada en una posición intermedia entre las investigaciones en los diversos campos científicos que tienen que ver con el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas. Los que más relieve e influencia tienen en los didactas matemáticos son Psicología Cognitiva y Educativa, Matemáticas y Pedagogía, aunque también son patentes las influencias de Sociología, Epistemología, Antropología o Historia en determinadas especialidades de la Didáctica de las Matemáticas (fig. 1).

Esto hace que los investigadores en Didáctica, en el proceso de creación de sus propios métodos e instrumentos de trabajo, tomen otros precedentes de dichas áreas, uniéndolos y adaptándolos a sus necesidades y puntos de vista. El resultado es que la Didáctica de las Matemáticas tiene lazos que la unen a las especialidades citadas antes, más estrechamente a las tres citadas en primer lugar, si bien está claramente diferenciada de cada una de ellas:

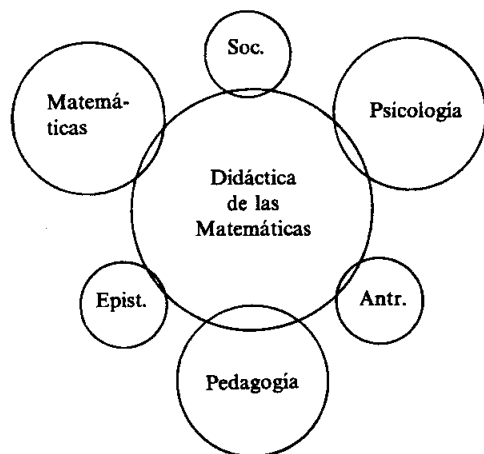


Figura 1.

¹ Creo que es necesario actualizar la clásica referencia al tintero como lugar de nacimiento de los libros.

- Mientras que los investigadores matemáticos se dedican a buscar nuevos conocimientos de Matemáticas y a organizar éstos y los ya existentes, los didactas se centran en los conocimientos ya establecidos y se preocupan de analizarlos para encontrar formas adecuadas de transmitir y entender las Matemáticas². Esta tarea se realiza de manera preferente en los niveles de Enseñanza Primaria y Secundaria, pues es donde hay mayor número de estudiantes involucrados y más variedad de problemas. No obstante, no debemos dejar de lado la Enseñanza Superior, en particular la formación inicial de profesores.
- Los pedagogos tienen como objetivo central la descripción de procesos generales de aprendizaje y de enseñanza que puedan ser aplicables a las diferentes áreas del saber; sin embargo, los didactas se centran en el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas (incluso cuando están inmersos en una investigación de tipo interdisciplinar), pues suele asumir la idea subyacente de que los procesos de aprendizaje en las distintas áreas del saber son diferentes, por lo que deben utilizarse diferentes métodos de enseñanza.
- La relación entre la Psicología Cognitiva o la Educativa y la Didáctica de las Matemáticas es, en la actualidad, la más estrecha de las tres citadas, pues la mayoría de las estructuras mentales del ser humano son globales y se usan indistintamente en unas actividades u otras (académicas y ordinarias, matemáticas y de otras áreas), si bien los didactas se interesan de forma concreta por aquellas estructuras mentales que tiene una relación directa con los procesos de comprensión y utilización de los conceptos y habilidades matemáticos, llegando a un nivel de concreción que cae fuera de los intereses, más globalistas, de los psicólogos.

Por último, antes de entrar de lleno en el tema, quiero señalar que este capítulo no va dirigido a los investigadores veteranos en este área, a los cuales poco o nada puedo enseñar, sino a ese núcleo, cada vez mayor y con más empuje, de personas interesadas en iniciarse en la investigación en Didáctica de las Matemáticas. Por este motivo, he procurado no profundizar en exceso en las descripciones teóricas, sino ofrecer una primera toma de contacto con la investigación, que puede ser ampliada mediante la lectura de las publicaciones citadas a lo largo del capítulo y, preferentemente, mediante la propia experiencia investigadora.

² Al definir el concepto de «transposición didáctica», Y. Chevallard resalta la importancia de este aspecto de la Didáctica (Chevallard, 1985).

4.2. QUE SE ENTIENDE POR INVESTIGACION EN DIDACTICA DE LAS MATEMATICAS

4.2.1. Delimitando el campo de actividad

Los límites de lo que constituye «investigación» en Didáctica de las Matemáticas son un tanto difusos, pues ésta es una actividad que no puede ser encapsulada en una definición formalista y concreta. No obstante, sí es posible empezar haciendo algunos planteamientos generales referentes a qué debe pretender una «investigación» en este área.

Tomemos como punto de partida esa idea que todos tenemos de la investigación con un trabajo apoyado en un marco teórico y dirigido al descubrimiento de algo desconocido y a la mejora de los conocimientos existentes sobre un tema. Seguro que vienen enseguida a nuestra mente la imagen estereotipada del biólogo absorto con su microscopio o del astrónomo con su telescopio. La frase en cursiva nos puede dar las claves para distinguir a un auténtico investigador en astronomía o biología de un simple curioso que se entretiene mirando por el telescopio o el microscopio: su preocupación por trabajar de acuerdo con una metodología válida y su afán por encontrar algo nuevo y por conseguir una mejor comprensión de lo ya conocido.

Si trasladamos estas ideas a la investigación en Didáctica de las Matemáticas, resulta que sus características primarias deben ser a) el perfeccionamiento de las actuales formas de actuación de los profesores de Matemáticas y la búsqueda de otras nuevas, con el objetivo final de promover una mejor enseñanza de herramientas y conceptos matemáticos a los estudiantes, y b) el logro de una mejor comprensión de los mecanismos mentales ligados a la actividad de aprendizaje de las Matemáticas, para así poder organizar buenos entornos formativos para los estudiantes y poder proporcionarles los medios necesarios para facilitar su aprendizaje.

Lesh (1979) nos proporciona otro punto de vista, más práctico y concreto, cuando dice que «el objetivo de la investigación es desarrollar un cuerpo de conocimientos útiles relacionados con temas importantes de la Didáctica de las Matemáticas». A continuación, Lesh aclara que, para él, «desarrollar conocimientos útiles» significa: «a) identificar problemas importantes para la enseñanza de las Matemáticas, b) plantear conjuntos de cuestiones concretas (y resolubles) relacionadas entre sí y que contribuyan a mejorar el conocimiento disponible sobre el problema subyacente, c) encontrar respuestas a esas cuestiones que sean útiles en una diversidad de contextos, eliminando la información poco válida o inútil, y d) comunicar los resultados y conclusiones de forma que sean comprensibles por profesores e investigadores».

Tratemos ahora de aplicar estas ideas a diferentes tipos de trabajo en Didáctica de las Matemáticas, con el fin de determinar si, en relación con los parámetros mencionados antes, se los puede considerar o no investigaciones:

- En un extremo del abanico de tipos se encuentra el trabajo de elaboración de teorías de enseñanza o aprendizaje de las Matemáticas. Estas son investigaciones laboriosas y complejas que deben abordar las diferentes componentes matemáticas, psicológicas y pedagógicas que intervienen en los procesos de comprensión y aprendizaje de las Matemáticas: Procesos y capacidades de razonamiento, estrategias de enseñanza, niveles de comprensión, obstáculos en el aprendizaje, formación o modificación de redes conceptuales, etc.

Hay varios ejemplos de teorías de este tipo entre las que podemos destacar, por su mayor difusión y utilización en la actualidad, las de Van Hiele³, Skemp⁴ y Dienes⁵. Otras teorías sobrepasan el ámbito de las Matemáticas y están siendo aplicadas en las Ciencias en general, como la de Piaget⁶ o el constructivismo⁷, tan pujante en estos momentos. En otro capítulo de este libro se han hecho descripciones resumidas de dichas teorías, si bien las referencias incluidas en las notas a pie de página permitirán tener un conocimiento más detallado.

- El otro extremo del abanico está representado por el trabajo de aquellos profesores que deciden completar o sustituir el contenido del libro de texto y elaboran bloques de actividades o planes de enseñanza complementaria con los que intentan mejorar la eficacia de su enseñanza y la profundidad del aprendizaje de sus alumnos. En este caso, bastante habitual en los centros de Enseñanza Primaria y Secundaria españoles, no siempre podemos hablar de una actividad de investigación, sino más bien de innovación o experimentación didáctica, pues faltan algunas componentes importantes de la actividad investigadora: Una planificación cuidadosa que tenga en cuenta los conocimientos disponibles sobre el tema y no sólo la experiencia personal acumulada por el profesor; la inclusión del trabajo que se va a realizar dentro de un marco conceptual concreto que permita analizarlo y relacionarlo con otras investigaciones sobre el mismo tema; un amplio conocimiento (didáctico y matemático) del tema de estudio, para identificar los

³ En Wirszup (1976), Hoffer (1983) y Jaime, Gutiérrez (1990) se hacen descripciones completas del Modelo de Van Hiele; además, en Gutiérrez, Jaime (1989) ofrecemos una bibliografía detallada.

⁴ Resulta interesante observar cómo ha ido evolucionando y perfeccionándose la teoría de Skemp a lo largo de los años; esto se refleja perfectamente en sus publicaciones, como Skemp (1978, 1979a, 1979b, 1982 y 1983).

⁵ Ver Dienes (1974) y Paige y otros (1978) para una descripción de las teorías de Dienes.

⁶ A pesar de que no se trata de una teoría de enseñanza o aprendizaje, sino de desarrollo. La bibliografía en español sobre Piaget es fácil de encontrar y muy numerosa.

⁷ Ver las conferencias plenarios del XI congreso del PME, en Bergeron, Herscovics, Kieran (1987).

orígenes de las dificultades de aprendizaje; una verificación objetiva de los logros alcanzados, más allá de la intuición personal o los resultados de los exámenes.

No debe deducirse del párrafo anterior que este tipo de actividad de los profesores de Matemáticas sea poco interesante; al contrario, el trabajo de innovación realizado por los profesores es imprescindible para mejorar la calidad de la formación matemática de los estudiantes, pues en muchas ocasiones es el medio de conexión de la investigación con la docencia cotidiana y, en todo caso, significa un interés de perfección muy deseable en los profesores.

- Entre estos dos tipos de trabajo se encuentra la actividad que realizan la mayoría de los investigadores, consistente en estudiar alguna parcela de la enseñanza o el aprendizaje de las Matemáticas, haciendo un análisis de los procesos de aprendizaje de los estudiantes, sus formas de comprensión de conceptos o las dificultades que encuentran, desarrollar métodos de enseñanza, etc. Por lo general se trata de investigadores individuales o que forman pequeños equipos ubicados en Departamentos de Universidades y Centros de Investigación. Estas personas o equipos no trabajan aislados, pues otra característica de la actividad investigadora es el flujo de información que circula entre los diversos miembros de la comunidad internacional interesados por un mismo tema; son las comunicaciones en congresos, los artículos en revistas y los contactos personales. Volveré sobre este punto en otra sección del capítulo.

Las investigaciones englobadas en este grupo incluyen tanto las centradas en descifrar aspectos puntuales de un tema como las que tratan de sistematizar y completar los resultados destacables existentes sobre el tema. Un ejemplo de las primeras nos lo ofrecen J. C. Bergeron y N. Herscovics, que han dedicado muchos años de esfuerzo continuo a estudiar la comprensión de los números cardinales por los niños de Preescolar y cuyos resultados pueden ser seguidos en sus numerosas publicaciones de todo tipo. Un ejemplo de las segundas lo tenemos en Goldin, McClintock (1984), donde se hace una clasificación de las diferentes variables que pueden influir en la resolución de problemas. Hay algunos campos de investigación muy frecuentados, como el relativo al aprendizaje de las operaciones aritméticas (comprensión de los conceptos, errores en las operaciones, algoritmos usados, ...) o el de resolución de problemas (tipos de problemas, estrategias de resolución, ...) ⁸, que ha sido la estrella de la década de los 80. En una

⁸ En Mason (1980) y Puig, Cerdán (1983) se recogen las referencias más importantes publicadas hasta esas fechas.

sección posterior que este capítulo describiremos, con más detalle, algunas de las principales áreas de investigación en Didáctica de las Matemáticas.

4.2.2. El concepto de calidad de la investigación

Una vez que ha quedado determinado qué tipos de trabajo podemos considerar como investigaciones en Didáctica de las Matemáticas, es conveniente conocer cuáles son los principales parámetros que se manejan para determinar la calidad de una investigación. Tener en cuenta estos parámetros significará una mejor selección tanto de los temas de investigación como de los métodos de trabajo. Freudenthal (1982) y Kilpatrick (1981) coinciden en reconocer tres parámetros:

- El «interés» o «significación» debe ser una cualidad esencial de las investigaciones. Efectivamente, si un objetivo que debe plantearse cualquier investigación en Didáctica de las Matemáticas es tratar de aportar alguna mejora a la calidad de la formación matemática, es preferible que el investigador centre su atención en algún elemento destacado de la enseñanza o el aprendizaje de las Matemáticas. En términos médicos, las investigaciones deben tratar de curar la enfermedades reales y epidémicas antes que otras enfermedades muy minoritarias que, en este momento, no representen ningún peligro.

Los trabajos que, desde hace unos catorce años, vienen desarrollando los miembros del grupo liderado por K. Hart, sobre el aprendizaje de las Matemáticas en los primeros años de la Enseñanza Secundaria (11-16 años), son un ejemplo de este tipo de investigación: vemos cómo sus primeros estudios, iniciados en 1975, proporcionaban información sobre los grados de dificultad de diversos conceptos matemáticos y los diferentes errores típicos de los estudiantes detectados en cada uno ⁹. Pasaron a continuación, desde 1980, a investigar esos errores y sus motivos, con el fin de estar en condiciones de encontrar métodos de corrección de los mismos ¹⁰. Por último, mediante una investigación iniciada en 1983, que todavía no ha concluido, están ensayando métodos de trabajo en clase y unidades de enseñanza que ayuden a evitar o

⁹ Esta fase de la investigación es el «Concepts in Secondary Mathematics and Science (CSMS) Project», cuyos resultados han sido presentados en diversas tesis doctorales y artículos y están resumidos en Hart (1981).

¹⁰ Estas investigaciones forman el «Strategies and Errors in Secondary Mathematics (SESM) Project»; las publicaciones más destacadas que incluyen resultados del mismo son Booth (1984), Hart (1984) y Kerslake (1986).

corregir las dificultades de aprendizaje investigadas, haciendo que los estudiantes pasen de manera gradual del trabajo manipulativo típico de la Enseñanza Primaria al más formal habitual en la Secundaria¹¹.

El interés de este trabajo viene dado, por una parte, por el hecho de que empezó siendo un estudio de nivel nacional de la población estudiantil inglesa (en el CSMS Project se testaron 10.000 estudiantes por escrito y otros 300 mediante entrevistas) y, por otra parte, por la importancia que tienen en el actual currículum de Matemáticas de cualquier país avanzado los conceptos estudiados: sistema decimal de numeración, operaciones aritméticas, fracciones, números enteros, isometrías, medidas de longitud, superficie y volumen, proporcionalidad, álgebra, etc. Además, en las fases posteriores de la investigación, el equipo se ha preocupado sólo por algunos de los conceptos más destacados de los citados antes: álgebra, proporcionalidad y fracciones.

Otro ejemplo, esta vez negativo, lo tenemos en la infinidad de trabajos publicados en los que los investigadores han tomado alguno de los tests de Piaget (conservación, inclusión de clases, etc.), lo han administrado a niños de determinadas edades y han concluido que sí se cumplen las propuestas de Piaget. En estos casos, es probable que esas investigaciones apenas aporten información interesante al cuerpo de conocimientos sobre las teorías de Piaget, por lo que su interés es casi nulo. Como indica Kilpatrick (1981), para que un estudio sea significativo debe proporcionar un nuevo punto de vista y una comprensión más profunda del tema en cuestión. Sin embargo, hay otros investigadores que han realizado determinadas modificaciones, a veces muy pequeñas, en los experimentos ideados por Piaget y han obtenido unos resultados muy diferentes de los pronosticados por éste; si estos experimentos han ido acompañados de un análisis de las causas de las diferencias, es posible que ayuden a mejorar el conocimiento de las teorías de Piaget¹².

- La segunda característica que determina la calidad de las investigaciones es su «rigor» o «fiabilidad». Por rigor se entiende la adecuación de la metodología de trabajo de la investigación a los estándares fijados en ese momento. Al realizar una experiencia (por ejemplo el diseño y la administración de un test), es necesario controlar cierto número de variables que van a influir en el resultado, o por lo menos ser consciente de ellas, asegurarse de que el test va a medir lo que el investigador pretende y determinar la interpretación de su escala de medida.

¹¹ Estas investigaciones forman parte del «Children's Mathematical Frameworks (CMF) Project»; ver Hart y otros (1989).

¹² En Donaldson (1978) y Siegel, Brainerd (1983) se citan numerosos ejemplos de este tipo de investigaciones.

Un trabajo riguroso debe estar organizado con claridad, especificando los objetivos y los resultados obtenidos, describiendo las técnicas de análisis de datos utilizadas y las premisas asumidas, planteando el marco teórico en el que se inscribe la investigación y dando toda la información necesaria para que otros investigadores puedan, si lo desean, repetir el estudio en las mismas condiciones¹³.

Kilpatrick (1981) hace una interesante contraposición de las investigaciones estadounidenses y soviéticas de los años 70 en cuanto a sus niveles de rigor y de significación. Afirma que los investigadores americanos disponen de un aparato de análisis estadístico muy perfeccionado (desarrollado por los psicólogos de la educación), gracias al cual sus investigaciones tienen un alto grado de rigor, cosa de la que carecen los soviéticos, pero según Kilpatrick (1981), «mientras que en las investigaciones americanas el investigador empieza demasiado a menudo con una técnica preparada y buscando algún problema que pueda resolver con esa técnica, las investigaciones soviéticas suelen empezar con un problema práctico de enseñanza que el investigador aborda mediante mucha experimentación y teoría pero poca organización metodológica de la investigación».

- La tercera medida de la calidad de las investigaciones es su «validez». Una vez más, debemos recordar que el objetivo central de la investigación en Didáctica de las Matemáticas debe ser la mejora general de la enseñanza de las Matemáticas, y no sólo la mejora de la enseñanza realizada por el propio investigador o por los profesores de su entorno; así pues, las investigaciones deben tender a encontrar soluciones que sean aplicables en la mayor variedad de situaciones posible. Esta es la única manera de lograr que la investigación pueda ser útil a los profesores, pues no se puede pretender que éstos dispongan de un almacén de métodos de enseñanza, actividades correctoras, etc. para pasar de unos a otros según los alumnos que tengan en cada momento. Es un hecho suficientemente comprobado por todos los relacionados con la formación inicial o permanente de profesores que éstos pierden el interés en cuanto observan que las propuestas de enseñanza que se les hace sólo pueden usarse en casos particulares y no de forma sistemática con casi todos sus alumnos.

Es fácil darse cuenta de los intentos de los investigadores por asegurar la validez de sus estudios cuando buscan grupos suficientemente numerosos de estudiantes y que sean representativos de un determinado ambiente (intelectual, nacional, socio-cultural, ...). Esto es

¹³ Todos estos requisitos deben recordarse al publicar información sobre las investigaciones, porque los investigadores, además de ser rigurosos, deben demostrar que lo son.

algo con lo que debemos tener cuidado los investigadores españoles, pues estamos muy acostumbrados a trabajar con bibliografía extranjera y no siempre nos detenemos a comprobar si las condiciones en las que se realizó el trabajo original (país, currículum, nivel cultural, ...) son similares a las que tenemos nosotros.

No hay que confundir la validez de una investigación con su reproductibilidad: mientras que la primera propiedad se refiere a la posibilidad de aplicar los resultados de la investigación en contextos diferentes (de número de alumnos, edad, inteligencia, nivel cultural, etc.), la segunda se refiere a la posibilidad de repetir la experiencia en unas condiciones exactamente iguales a las originales. El objetivo de la reproducción de investigaciones suele ser comprobar sus resultados, o ampliarlos.

Hay que reconocer que la apreciación del interés, el rigor y la fiabilidad de un trabajo de investigación es bastante subjetiva y que está sujeta a cambios a lo largo del tiempo en función, principalmente, de los métodos de trabajo que están mejor considerados en cada momento. Por ejemplo, podemos comparar el estilo de investigación predominante en las décadas de los 60 y 70 (cuantitativo, arropado por un gran aparato estadístico) con el predominante en la actualidad (cualitativo, en el que los parámetros estadísticos se usan con más discreción); se da la circunstancia curiosa de que muchos trabajos que han destacado en una de las épocas habrían pasado desapercibidos si se hubieran publicado en la otra. Sin embargo, es muy probable que los tres parámetros mencionados sigan siendo siempre los principales determinantes de la calidad de las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas.

Kilpatrick (1981) afirma que parte de los problemas que sufre la investigación en Didáctica de las Matemáticas en EE. UU. se derivan de la acusación de que dicha investigación ha sido incapaz de modificar la práctica escolar. De aquí surge inmediatamente la cuestión de cómo debería influir la investigación en la práctica educativa cotidiana de los centros de Primaria y Secundaria.

Este es un problema que en España deberíamos tratar de resolver ahora que empieza a desarrollarse con fuerza la investigación en Didáctica de las Matemáticas, intentando que nuestras investigaciones tenga un objetivo final dentro de la enseñanza de las Matemáticas, haciendo que presten atención al aprendizaje de las Matemáticas tal como se da realmente en las aulas y tratando de comunicar a los profesores nuestros resultados en forma concreta, clara e inteligible¹⁴;

¹⁴ Sin que ello quiera decir que haya que proporcionar a los profesores simplemente recetas preparadas para su aplicación inmediata.

la propia serie «Matemáticas: cultura y aprendizaje», que se abre con este libro, tiene ejemplos de los dos estilos, pues mientras algunos de sus volúmenes están muy ligados a la práctica docente mediante sugerencias concretas, en otros se refleja un cierto distanciamiento debido a lo teórico del contenido, que los hace difíciles de asimilar y aplicar por los profesores. Dejando aparte la tendencia de cada «bando» a echar la culpa al otro, tanto profesores como investigadores debemos reconocer y aceptar nuestra parcela de responsabilidad y tratar de colaborar unos con los otros acercándonos y comunicándonos de forma inteligente.

4.3. TIPOS Y METODOLOGIAS DE INVESTIGACION EN DIDACTICA DE LAS MATEMATICAS

Al organizar un proyecto de investigación, se abren ante sus autores una diversidad de posibles *tipos de investigación*, bastante distintos unos de otros, que conviene conocer para poder seleccionar el más apropiado para ese proyecto concreto. Al mismo tiempo, hay diversos *métodos de trabajo* para realizar las investigaciones, que están relacionados, en cierto modo, con los diferentes tipos de investigación. Al hablar de la calidad de una investigación, he aludido a la metodología como uno de los factores determinantes. En realidad, el factor que se debe tener en cuenta no sólo es la correcta aplicación de la metodología de trabajo elegida, sino también la adecuación de ésta al tipo de investigación que se realiza. En esta sección haremos un recorrido descriptivo por los principales tipos y métodos de investigación usuales en la actualidad en Didáctica de las Matemáticas.

Frecuentemente las investigaciones surgen de ideas amplias o de preguntas generales relativas a cierto tema. Así, alguien puede plantearse la conveniencia de investigar los motivos de las dificultades que tienen los niños en las operaciones con fracciones. Esta primera aproximación al problema hace necesario plantear otras cuestiones más concretas como, por ejemplo, la relación entre las concepciones de fracción y el éxito en una determinada operación.

Hay una secuencia de trabajo que se detecta con facilidad si se observa la trayectoria que siguen gran parte de las líneas de investigación a lo largo de los años: Las investigaciones iniciales sobre un tema han sido de carácter descriptivo, tratando de detectar la magnitud real de cierto problema planteado (qué dificultades se producen en el aprendizaje de un concepto o una habilidad, cuándo se producen o desaparecen, con qué frecuencia se presentan, etc.); a continuación los investigadores han intentado determinar los motivos de esas dificultades (analizando los procesos de aprendizaje naturales o inducidos, los diferentes grados de comprensión de un estudiante, los elementos que intervienen en las redes conceptuales, etc.); por último, han

pasado a plantear soluciones que eviten las dificultades o que ayuden a los estudiante a superarlas (métodos de enseñanza que prevengan los errores o unidades correctivas específicas para corregirlos). Cada una de estas tres fases de la línea de investigación responde a unas necesidades diferentes y requiere de unos métodos de trabajo distintos.

Una excepción a esta secuencia es la línea de investigación sobre métodos heurísticos en la resolución de problemas, pues aquí, por lo general, no se pretende combatir ninguna dificultad de aprendizaje, sino describir con todo detalle las formas de actuar de los estudiantes y sus tomas de decisiones durante la resolución de determinados tipos de problemas.

4.3.1. Tipos de investigación

En cualquier caso, una vez que se ha llegado a plantear una cuestión «investigable», el camino natural consiste en determinar las formas disponibles y apropiadas de trabajar. Surgen diversas posibilidades ante el investigador, entre las que podemos destacar (Johnson, 1980a y 1980b) los tipos de investigaciones siguientes¹⁵:

- Como decía antes, la primera fase de una investigación a largo plazo suele consistir en hacer una «recopilación de información» relativa a algunas variables previamente determinadas, para lo cual se debe realizar una observación de la actividad de determinados colectivos de individuos (profesores, alumnos o ambos a la vez). El objetivo es, generalmente, hacer una descripción ajustada de la situación real del problema que se quiere investigar la cual permita, a partir de los datos obtenidos, generar hipótesis, sugerir vías de solución, plantear nuevos problemas, o tomar decisiones sobre líneas de trabajo posteriores.

Salvo que sea posible observar al colectivo completo, la componente crítica de este tipo de investigación está en la selección de la muestra (que debe ser representativa) y de los elementos de medida, pues ambos determinarán la validez y la fiabilidad de las conclusiones que se puedan obtener. Por ejemplo, si alguien quiere obtener información enviando un cuestionario a un grupo aleatorio de personas, normalmente sólo un pequeño porcentaje de ellas devolverán el cuestionario, por lo que sus respuestas posiblemente no serán representativas del total.

Este tipo de investigación se encuentra con frecuencia en estudios descriptivos de carácter nacional que los gobiernos realizan para deter-

¹⁵ Debemos ser conscientes de que en bastantes casos las investigaciones reales van a ser combinaciones de varios de estos tipos.

minar el estado actual de la educación, evaluar el éxito de un currículum después de algunos años de implantación o preparar futuras modificaciones. En EE. UU. existen, entre otros grupos, el «National Assessment of Educational Progress» (N.A.E.P.), que desde 1975 viene realizando periódicamente evaluaciones de los conocimientos de los estudiantes de 9, 13 y 17 años en Matemáticas y otras nueve asignaturas, y el «National Advisory Committee on Mathematical Education» (N.A.C.O.M.E.), surgido en 1974, cuya misión era la elaboración de un informe sobre la situación de las Matemáticas desde Preescolar hasta el final de la Enseñanza Secundaria (ver C.B.M.S., 1979). En Gran Bretaña también se han llevado a cabo varios de estos estudios, como el C.S.M.S. Project, ya descrito en este capítulo, y los elaborados periódicamente por la «Assessment of Performance Unit» (A.P.U.) desde 1978 con estudiantes de 11 y 15 años.

También se han realizado algunos estudios internacionales, que permiten comparar la situación en los países participantes, como los «International Mathematics Studies» (realizados en 1964 y 1981); se trata de una investigación internacional centrada en estudiantes de 13 y 18 años, que se realizó en 13 países en la primera ocasión y en 39 países en la segunda (entre los cuales no se encuentra España). Ver Cressell, Gubb (1987).

Por lo que se refiere a España, el único estudio «oficial» de este tipo publicado que conozco es M.E.C. (1989); aparte de esto, los únicos datos que suelen manejar nuestros ministerios (nacional y regionales) son los porcentajes de aprobados y suspensos de cada curso escolar, que es un parámetro de una pobreza absoluta desde el punto de vista de su validez científica.

- Durante el proceso de aprendizaje de alguna parte concreta de las Matemáticas por los estudiantes, se van produciendo modificaciones en su comportamiento, es decir en sus conocimientos, destrezas operatorias, etc. Estas modificaciones suelen estar directamente relacionadas con cambios en sus forma de entender los conceptos matemáticos involucrados o con el surgimiento de determinadas dificultades específicas. Para mejorar la enseñanza, es necesario averiguar cómo se desarrollan dichos procesos de aprendizaje y descubrir la evolución del pensamiento de los estudiantes, las causas de sus problemas y cómo adquieren las habilidades cognitivas que les permiten superarlos. Se trata de un tipo de investigaciones al que podemos dar el apelativo genérico de «análisis de comportamiento» de los sujetos (bien individualmente, bien como grupos).

El análisis de los procesos y las dificultades en el aprendizaje de conceptos, algoritmos y estrategias de trabajo, que se reflejan en las

formas como los estudiantes realizan determinadas tareas o en las respuestas que dan a ciertas preguntas, es una de las investigaciones más frecuentes de este tipo. Está comprobado por infinidad de trabajos que sólo una pequeña parte de los errores que comenten los estudiantes cuando resuelven un determinado tipo de problema o ejercicio son fortuitos (generados, por ejemplo, por falta de atención o por un fallo puntual de la memoria). Por el contrario, la mayoría de los errores se cometen de forma sistemática y aparecen de nuevo cuando se propone a los estudiantes otro problema o ejercicio similar.

Esto significa que los estudiantes se equivocan porque aplican alguna idea incorrecta (un concepto mal entendido, una técnica mal aprendida, etc.) o, lo que es más frecuente, porque se basan en alguna idea cuyo campo de validez deja fuera a la situación en la que el estudiante la está aplicando. En el primer caso, el problema generalmente se resuelve haciendo que los estudiantes lleguen a ser conscientes de que sus ideas son erróneas y haciendo que las desechen y las cambien por las correctas. El segundo caso suele ser el más difícil de resolver, pues se trata de «comprensiones parciales», es decir de ideas que los estudiantes han utilizado con éxito hasta un determinado momento, pero que ya no tienen validez universal, al haberse incrementado el dominio de los conceptos en los que éstas se apoyan. La dificultad radica, por una parte, en que los estudiantes no entienden por qué el profesor *ya no* acepta sus respuestas, y por otra en que no se pueden desechar esas formas de trabajar, pues son ideas correctas, sino que hay que mostrar a los estudiantes cuándo se pueden usar y cuándo no¹⁶.

Veamos dos ejemplos. Dejando aparte la poco recomendable vía de resolver las dificultades de aprendizaje de los estudiantes mediante la memorización de la técnica correcta de trabajo, una forma de atacar esas dificultades es actuando sobre su origen, es decir, sabiendo por qué se producen. Para ello es necesario diseñar una investigación en la que, a partir de la información disponible, se conjeturen algunos motivos de la dificultad, se presenten a los estudiantes diversas situaciones en las que estén presentes, de forma organizada, esas presuntas causas y se analice la influencia real de cada una de ellas¹⁷. Hay numerosos ejemplos de este tipo de investigación en relación con el aprendizaje de los conceptos de las operaciones aritméticas con números naturales,

¹⁶ Un caso particular lo constituyen los «obstáculos epistemológicos», es decir las dificultades producidas como consecuencia de cambios de significado de los términos matemáticos (ver Brousseau, 1983 y Centeno, 1988).

¹⁷ En Mulhern (1989) se ofrece una detallada descripción de distintos tipos de investigación sobre análisis de errores.

decimales o fracciones. Por ejemplo, Beattie (1979) estudia los métodos de restar contando y los clasifica en resta contando hacia adelante (desde el sustraendo hasta el minuendo), resta contando hacia atrás (desde el minuendo hasta el sustraendo) y resta contando a saltos (haciendo sumas o restas parciales); además, realiza una experimentación en la que detecta los motivos de error más frecuentes en cada método. Después, otros investigadores, como Fuson (1986), toman los resultados anteriores, u otros análogos, como punto de partida e investigan estrategias de enseñanza que eviten dichas dificultades.

El segundo ejemplo es otra forma de análisis de comportamiento muy usual, que se ocupa de estudiar la formación de conceptos matemáticos en los estudiantes. Estas investigaciones tienen como finalidad conocer el proceso de aprendizaje por los estudiantes de un concepto, o un grupo de conceptos relacionados, desde que tienen la primera toma de contacto con el mismo hasta que llegan a su plena comprensión. Estos estudios están muy relacionados con el problema de las comprensiones parciales que he descrito antes, pues parte de los errores que se cometen tienen su origen en una mala comprensión de los conceptos implicados, pero la mayoría de los conceptos matemáticos son los suficientemente complejos como para que los estudiantes no puedan entender y aprender al mismo tiempo todas sus facetas (un ejemplo muy claro lo tenemos en las múltiples interpretaciones de los números racionales). En estos casos, el proceso normal de aprendizaje hace que se produzcan comprensiones parciales, que originarán dificultades cuando los estudiantes las apliquen fuera de su dominio de validez.

- Cuando los investigadores tienen como objetivo final de su trabajo el diseño de unidades curriculares (que pueden ir desde material de apoyo ante dificultades de aprendizaje específicas, o unidades para la enseñanza de un tema concreto, hasta el desarrollo del currículum completo de un nivel educativo), es absolutamente imprescindible evaluar la calidad (es decir, la eficacia) de los materiales que han elaborado. Nos encontramos ante una «investigación curricular» en la que se debe seguir un proceso cíclico de desarrollo y evaluación: elaboración de una primera propuesta de material, experimentación del mismo, evaluación de los resultados, modificación del material como consecuencia de la evaluación, experimentación del nuevo material, etc. Retomando el argumento que expuse al distinguir entre investigación e innovación o experimentación didáctica, este ciclo está presente en ambas clases de actividad; lo que diferencia las investigaciones de las innovaciones es la forma como se realiza cada paso de ciclo y muy especialmente los de experimentación y evaluación.

En las investigaciones curriculares, los elementos que tienen más

influencia en la calidad y validez del resultado final son la selección que se haga de las muestras para las experimentaciones y la forma de evaluar el desarrollo de las mismas. Un problema con el que frecuentemente se enfrentan los investigadores es que, si quieren hacer varias experimentaciones, no hay suficiente cantidad de estudiantes como para tomar muestras grandes. Una forma de superar el obstáculo es combinar una primera fase de trabajo de laboratorio (experimentando el material con grupos pequeños de estudiantes) con una fase posterior de trabajo a mayor escala (en la que se pasa a trabajar con clases o centros completos); otra forma es hacer las sucesivas experimentaciones en distintos años.

Un excelente ejemplo de este tipo de investigación lo encontramos en el Instituto Freudenthal de Holanda, que desde su creación bajo el nombre IOWO (y hasta hace poco OW&OC) se ha dedicado de manera prioritaria a generar nuevas propuestas curriculares para las enseñanzas Primaria y Secundaria holandesas. El resultado es una infinidad de publicaciones de todo tipo (desde materiales de clase hasta trabajos teóricos e informes de investigación), algunas de las cuales están traducidas al inglés y al español, entre las que destaca Treffers (1987).

- Todos los tipos anteriores son «prácticos», pues se trata de investigaciones que tienen la observación como base de sus conclusiones finales. Voy a mencionar, por último, unos tipos de investigación «teórica» en Didáctica de las Matemáticas, bastante diferente de los descritos hasta aquí.

Las investigaciones que podemos considerar como más genuinamente teóricas son las que se orientan hacia la «fundamentación» tanto de alguna teoría cognitiva (de enseñanza, aprendizaje, etc.) como de la Didáctica de las Matemáticas en sí misma, tratando, en el primer caso, de contruir teorías o de analizar las ya existentes desde una postura teórica y, en el segundo caso, de identificar las bases sobre las que se pueda construir la Didáctica de las Matemáticas como una Ciencia estable. En el tercer capítulo de este libro se ha hecho un estudio detallado de este campo de actividad; aquí me centraré en aquello que tenga relación directa con la actividad investigadora.

Actualmente la comunidad internacional es consciente del interés de una buena fundamentación de la Didáctica de las Matemáticas, si bien su dificultad hace este trabajo muy minoritario. Nos encontramos con dos posturas destacadas, siendo sus representantes más conocidos G. Brousseau, que encabeza un grupo de investigadores franceses, y H. G. Steiner, que lidera el grupo «Theory of Mathematics Education» (T.M.E.).

Según la visión del «Grupo Francés»¹⁸, el centro del sistema educativo son los estudiantes y el objetivo de la Didáctica de las Matemáticas es estudiar las interacciones que se crean en torno a su aprendizaje, en las cuales intervienen matemáticos, profesores, los otros estudiantes, el entorno social, etc. Como consecuencia, buena parte de sus esfuerzos se orientan a caracterizar y describir aquellos elementos que pueden modificar dichas interacciones. En Brousseau (1986) tenemos un amplio, y a veces difícil de leer, compendio del mundo en el que se mueve este equipo que tiene el innegable mérito de haber creado una nueva perspectiva dentro de la Didáctica de las Matemáticas.

En cuanto al grupo T.M.E., la mejor manera de describir su punto de vista y sus objetivos es citar al propio Steiner: «Con *Teoría de la Educación Matemática* quiero referirme a un *programa evolutivo* que consiste principalmente en 3 *componentes* inter-relacionadas: a) Identificación y elaboración de *problemas básicos* en la orientación, fundamentación, metodología y organización de la Educación Matemática como una disciplina. b) Desarrollo de una *aproximación comprensiva* a la Educación Matemática vista en su totalidad como un *sistema interactivo* que abarca investigación, desarrollo y práctica. c) *Auto-referencia y meta-investigación* relativa a la Educación Matemática, que proporciona, principalmente, *información y datos* sobre el estado de la cuestión, la situación, problemas y necesidades de la disciplina, respetando las considerables diferencias nacionales y regionales» (Steiner, 1988).

- Una línea de investigación teórica completamente diferente de la anterior es la centrada en la «Historia de la enseñanza de las Matemáticas o de las propias Matemáticas». Por una parte, nos encontramos con las personas interesadas en conocer la Historia de la enseñanza de las Matemáticas por el valor intrínseco de esta componente de nuestra cultura; en España tenemos ejemplos de este tipo en algunas sociedades y en personas individuales (ver el primer capítulo de este libro).

Por otra parte, hay investigadores que toman el desarrollo histórico de un concepto (o grupo de conceptos como un elemento que les ayude a comprender cómo se produce el proceso de aprendizaje de este concepto (por qué aparecen determinadas dificultades o errores) o para organizar su enseñanza. Esta metodología se basa en una hipótesis según la cual los problemas que ha tenido que resolver la humanidad (y en particular los sabios de cada momento) para llegar al conocimiento que tenemos hoy de un concepto determinado son paralelos a los

¹⁸ Este es un grupo de investigadores franceses, cuyo miembro más representativo es Guy Brousseau, que no tiene ninguna denominación oficial concreta, por lo que se les suele mencionar como «La Escuela Francesa», «el Grupo de Brousseau», o apelativos análogos.

problemas que tiene que superar un estudiante actual para comprender correctamente ese concepto. Así, vemos cómo en Rojano (1985) su autora utiliza tres grandes momentos del proceso histórico de formación del Álgebra para identificar diferentes fases en el proceso de acceso de los niños al Álgebra y determinar los puntos claves de transición de una u otra, que son sus objetos de estudio. No obstante, hay que evitar el error de creer que los estudiantes recorren los mismos caminos por los que se ha desarrollado la Historia, o que hay que conducirlos por ellos paso a paso, pues las condiciones actuales son muy diferentes de las anteriores; a nadie se le ocurriría, por ejemplo, pretender que los niños de cinco a ocho años deben aprender los números naturales y el sistema decimal (símbolos, vocablos, etc.) siguiendo el recorrido histórico.

- Otro tipo de investigación teórica surge si miramos el conjunto de las investigaciones experimentales que se centran en un problema concreto, pues nos daremos cuenta de que constituyen un mosaico de lo más variopinto, debido a la diversidad de contextos en que se han realizado, en el cual hay acumulación de resultados en algunos puntos y ausencia casi total en otros. Por lo tanto, es necesario también que alguien se dedique a recopilar y clasificar la información fiable disponible e intente hacer una «integración de los concimientos» que hay sobre el tema, para sacar unas conclusiones generales a partir de los resultados parciales, hacer una descripción actualizada del estado de resolución del problema, poner de relieve características pendientes de investigación, plantear nuevos problemas relacionados, etc.

Este tipo de actividades es de suma importancia pues, como indica Johnson (1980a), a veces el examen cuidadoso de las publicaciones existentes sobre un tema pone de relieve la presencia de dos o tres posturas aparentemente diferentes pero que pueden ser fundidas en una sola que explique mejor el problema. Por otra parte, en casi todos los problemas importantes planteados en Didáctica de las Matemáticas, es conveniente que la investigación se lleve a cabo por un equipo de investigadores coordinados, que usen diferentes formas de trabajo y varias líneas metodológicas, si bien convergiendo en un objetivo de análisis común. Así, la parte final de esta actividad será la unión de los descubrimientos y las conclusiones de cada investigador, para obtener unos resultados globales. Este es el objetivo de publicaciones como Neshier, Kilpatrick (1990): los autores de los diferentes capítulos, dedicados a distintas áreas de las Matemáticas (Aritmética, Lenguaje, Geometría, Álgebra o Matemáticas Avanzadas), han reunido los resultados más interesantes presentados en los congresos del P.M.E. en una síntesis que refleja, de forma global, los avances conseguidos y plantea interrogantes pendientes.

4.3.2. Métodos de investigación

Hasta aquí, he presentado una clasificación de las investigaciones desde el punto de vista de sus objetivos. No obstante, éste no es el único criterio para diferenciar unas de otras o para definir una línea de trabajo; hay otra forma de clasificación, igual de importante que la anterior, que se basa en los métodos utilizados por los investigadores para recoger los datos, elaborar conjeturas, llegar a sus conclusiones o justificar la validez de las mismas. En primer lugar abordaré dos métodos de trabajo durante la fase de recogida de información y después dos métodos propios de la fase de tratamiento de dicha información:

- En Didáctica de las Matemáticas es frecuente estudiar los resultados de una determinada forma de instrucción, para lo cual se procede a realizar una «experimentación» en la que se aplica ese método de enseñanza a un grupo de estudiantes. Los elementos clave de las investigaciones basadas en la experimentación están en el diseño de los experimentos, en la forma de selección de los estudiantes y en la forma de análisis de los datos.

Un objetivo frecuente de las investigaciones consiste en comparar los beneficios de una nueva forma de enseñanza (o material didáctico, o tipo de ejercicios, o ...) frente a otra ya establecida. Para ello se realiza una experimentación consistente en seleccionar dos grupos equivalentes de estudiantes (es decir con los mismos valores en unas variables que el investigador considera relevantes) y aplicar a cada grupo una de las formas de enseñanza. Para obtener unos resultados fiables hay que asegurarse, entre otras cosas, de que las dos unidades de enseñanza que se van a aplicar, la experimental y la «de control», incidan en los mismos conceptos o destrezas, de que los grupos sean equivalentes, es decir que los estudiantes de uno y otro tengan conocimientos similares del tema, de que los profesores dominen perfectamente sus respectivos métodos de trabajo en clase, de que las pruebas de evaluación sean imparciales, etc. Después de realizadas las dos experimentaciones, se suele recurrir a algunos parámetros estadísticos que evalúen las diferencias entre los resultados del grupo de control y del experimental.

Aunque el objetivo de estas investigaciones es demostrar que el nuevo método de enseñanza es más eficaz que el actual, en bastantes casos los resultados obtenidos no revelan diferencias estadísticamente significativas entre ambos métodos; ello no quiere decir que no existan realmente diferencias, sino simplemente que en ese contexto no se han detectado. Probablemente introduciendo algunos cambios o considerando otras variables en la realización de los experimentos sí se obtengan diferencias significativas. En estas investigaciones que no han mos-

trado diferencias significativas es más necesario, si cabe, describir con rigor y precisión todos los elementos de la experimentación realizada, ya que sólo conociendo estos datos pueden otros investigadores tratar de diseñar nuevos experimentos o buscar posibles mejoras en la metodología.

- En algunas ocasiones, la investigación que se ha diseñado requiere que se haga un seguimiento continuo, completo y detallado de los estudiantes durante su actividad, o de los procesos que están teniendo lugar en un determinado contexto (por ejemplo las interacciones profesor-alumnos en un aula). El hecho de que sea necesario un análisis profundo de la situación hace casi imprescindible que los investigadores centren sus experimentaciones en muy pocos individuos, de aquí que este método de trabajo se conozca generalmente como «estudio de casos». Aunque se trata de una forma particular de experimentación, sus peculiaridades y la frecuencia con que se utiliza el estudio de casos hacen conveniente distinguirlo como un método aparte¹⁹.

Los estudios de casos tienen como característica diferenciadora que la obtención de la información y de las conclusiones subsiguientes se basan en la observación de un número muy reducido de individuos (a veces uno o dos solamente). Para ello se suele recurrir al trabajo personalizado de los investigadores con los individuos seleccionados; esto sucede normalmente cuando el problema investigado está relacionado directamente con el comportamiento de los estudiantes o con el análisis de sus habilidades intelectuales. Otras veces, si el objeto de estudio tiene relación, por ejemplo, con el análisis del funcionamiento de un método de enseñanza, puede que la actividad se desarrolle en una clase ordinaria, pero los investigadores seleccionan previamente a unos pocos de los estudiantes para centrar en ellos sus observaciones.

Esta característica, el número de individuos observados, representa la fuerza y la debilidad de estudio de casos: por una parte, permite describir y controlar numerosas variables que de otra forma quedarían ocultas o serían ignoradas por los investigadores; realmente, cualquier investigación que permita analizar en detalle el complejo mundo del comportamiento humano puede aportar información interesante, aunque sea a partir de un solo estudiante. Pero, por otra parte, es muy problemático hacer generalizaciones a partir de muestras tan reducidas, pues las diferencias entre el comportamiento de unos individuos y otros elimina la posibilidad de generalizar los resultados del estudio de

unos pocos casos a toda la población de individuos, cosa que nunca debe pretenderse. Por eso, el estudio de casos es más indicado para investigaciones cuyo objetivo sea generar hipótesis de trabajo que para investigaciones que deban producir conclusiones generalizables. No obstante, existen las técnicas «de rejilla», provenientes de los campos de la Pedagogía y la Psicología, que permiten clasificar a los individuos de una población heterogénea en una serie de tipos de características muy concretas, en función de sus valores para ciertas variables, de manera que los resultados de un estudio de casos se pueden generalizar a los individuos del mismo tipo que los observados.

- Aunque se puede hacer una distinción más fina que la que presento a continuación al discutir las formas de tratamiento de la información y de generación o verificación de hipótesis, voy a centrarme ahora en los dos polos de una dicotomía. Las investigaciones cuantitativas frente a las cualitativas.

Los métodos «cuantitativos» (o estadísticos) se basan en el tratamiento estadístico exhaustivo de la información recogida como forma de generar hipótesis o de validar las conclusiones extraídas; para ello existe una amplia gama de herramientas que incluyen: tablas de porcentajes, coeficientes de correlación diversos, tests de hipótesis, análisis mono o multi-variantes, análisis de varianzas (anova), análisis de correspondencias, técnicas de rejillas, etc. Un elemento característico de los trabajos cuantitativos es la tendencia a eliminar la posibilidad de que una experiencia realizada hoy produzca resultados completamente diferentes a los que produjo esa experiencia realizada hace algún tiempo; los métodos cuantitativos tratan de asegurar que si una experiencia se repite con las debidas garantías, los resultados deben estar muy próximos a los anteriores.

La aplicación de los métodos cuantitativos al campo de la Didáctica de las Matemáticas procede de la Psicología y sigue siendo en este área donde se pueden encontrar la mayor gama de aplicaciones así como los mejores textos para aquéllos que estén interesados en profundizar en el estudio de este método de trabajo. Son típicas de las investigaciones cuantitativas las variables representando atributos medibles con una escala, las recogidas de grandes cantidades de datos interpretables matemáticamente y los análisis de la información realizados mediante la obtención de diferentes parámetros y coeficientes estadísticos, que son la base para justificar las conclusiones de la investigación. El número elevado de datos que se suelen recoger es un elemento necesario para asegurar la fiabilidad del estudio; otra consecuencia del número elevado de individuos que se deben observar es la necesidad de traducir los datos recogidos a escalas y valores numéricos

¹⁹ En el contexto de las investigaciones soviéticas de los años 50 y 60, este método de investigación recibe el nombre de «experimento de enseñanza»; ver Kantowsky (1978) y Kilpatrick, Wirszup (1969).

tratables matemáticamente, para lo cual se utilizan programas estadísticos de ordenador²⁰.

Un problema inherente a los estudios cuantitativos está en el hecho de que la decisión sobre la veracidad o no de un resultado depende exclusivamente de si un coeficiente supera o no un valor predeterminado. Naturalmente, ocurre con frecuencia que el valor obtenido está muy cerca de la frontera, por lo que una pequeña variación en los datos puede invertir el resultado de la investigación. Otras veces no hay acuerdo en la comunidad de investigadores sobre cuál es el valor frontera, por lo que la validez de las conclusiones dependerá de la opinión del investigador al respecto. Una forma razonable de informar sobre una investigación en la que se han usado determinados coeficientes para respaldar las conclusiones del investigador es ofrecer los valores numéricos obtenidos (que son un elemento completamente objetivo, por ejemplo los grados de significación) junto a la interpretación, más o menos subjetiva, que el investigador hace de esos resultados y a sus conclusiones al respecto; de esta manera, los lectores están en condiciones de extraer sus propias conclusiones sobre el estudio, que pueden ser diferentes de las expuestas por su autor.

El proyecto de investigación Usiskin (1982) puede servir como ejemplo típico de una investigación cuantitativa; en él se intenta averiguar si el nivel de razonamiento de Van Hiele de los estudiantes al empezar un curso de Geometría es un buen predictor de su progreso a lo largo del curso y de sus resultados finales. Para determinar el nivel de razonamiento de Van Hiele de los estudiantes, se les administra al principio y al final del curso un test formado por 25 ítems de elección múltiple²¹; la asignación del nivel se hace en base a la cantidad de respuestas correctas, para lo cual los investigadores definen y aplican varios criterios de superación de los niveles, seleccionando finalmente de entre ellos, como más adecuado, el que proporciona mayor porcentaje de alumnos «bien asignados». Por otra parte, para decidir si el nivel de razonamiento es un buen predictor, se administrarán a los estudiantes otros tests estandarizados de conocimientos geométricos y de razonamiento lógico y formal en Matemáticas; para extraer las conclusiones, se calcularon parámetros estadísticos que miden la correlación entre los resultados de cada estudiante en los diversos tests.

²⁰ En la actualidad hay un buen número de paquetes estadísticos para los diversos tipos de ordenador (Macintosh, Compatibles o grandes ordenadores de los Centros de Cálculo); los de uso más frecuente son SPSS, BMDP y Systat.

²¹ Un ítem de elección múltiple ofrece varias respuestas (en este caso 5), de las cuales una y sólo una es correcta. El estudiante simplemente debe poner una cruz en la casilla correspondiente a la respuesta que él cree que es la correcta.

- Los métodos «cualitativos» (también llamados «etnográficos») son la alternativa que se ofrece a los investigadores cuando ven la dificultad o inconveniencia que en muchos casos supone el tratar de convertir la información recogida en una serie de valores numéricos o en una tabla de parámetros. Las investigaciones cualitativas tienen como principios básicos de su forma de entender la educación que los estudiantes son diferentes y que su comportamiento o su éxito en el aprendizaje no depende sólo de su habilidad o capacidad, sino que están relacionados con una serie de variables de tipo social que deben ser tenidas en cuenta (entorno familiar, escolar, ...). Por su forma de interpretar el aprendizaje de las Matemáticas, los métodos cualitativos se utilizan preferentemente en aquellos estudios centrados en el análisis de la formación de conceptos y que, en general, tratan de indagar sobre cómo se desarrolla un proceso cognitivo o de entender el proceso completo y la influencia de los diferentes elementos que intervienen en él. Este método de investigación permite unas descripciones mucho más ricas de las situaciones que los métodos cuantitativos.

La recogida de información cualitativa se hace generalmente de una de estas dos formas: La observación y las entrevistas. La primera forma tiene lugar cuando se desea investigar sobre el comportamiento de un grupo de estudiantes, pues la información que se recoge procede del grupo completo, o de un numeroso conjunto de sus elementos, y no de individuos aislados. Se debe recurrir a este método de trabajo cuando se es consciente de que los resultados de la investigación estarán altamente influenciados por las interacciones sociales del grupo formado por un profesor y sus alumnos durante su actividad cotidiana en el aula. Los investigadores del «Grupo Francés» utilizan de manera habitual este método de investigación.

Aquí le surgirá al investigador un dilema en cuanto a su forma de actuar durante la investigación: por una parte, su presencia supone la aparición de un elemento extraño que puede producir distorsiones en el «ecosistema» habitual del aula, las cuales serán más importantes cuanto más activo sea el papel del investigador; desde este punto de vista, lo ideal es que no estén en el aula más que las personas habituales (profesor y estudiantes). Pero, por otra parte, si el investigador no entra en el aula, la única fuente de información sobre lo que ha pasado es el profesor; la experiencia indica que los informes de los profesores suelen ser parciales (es imposible estar atento a lo que hacen todos los estudiantes durante todo el tiempo y, además, recordarlo todo) e involuntariamente sesgados (normalmente el profesor no sabe con exactitud qué es lo que busca el investigador ni cuáles son los aspectos más interesantes para él). Luego la recogida de información debería hacerla directamente el investigador y, salvo que el profesor sea un miembro

del equipo investigador²², es razonable que haya en el aula, como mínimo, un operador con una cámara de vídeo.

Se habla de dos tipos de observación: la observación participativa, en la cual el investigador trata de comportarse como un miembro del grupo, para comprender mejor sus interacciones aunque, al mismo tiempo, toma una postura de observador externo, para tener una perspectiva objetiva adecuada sobre las actividades del grupo. Y la observación no participativa (o neutra), en la cual el investigador trata de pasar lo más desapercibido posible y no tiene ningún tipo de relación con los miembros del aula.

Las entrevistas se utilizan cuando se desea obtener información de personas individuales. Pueden ser meramente informativas, en las que el entrevistador quiere conocer la situación actual del estudiante (sus concepciones, estrategias de trabajo, conocimientos, etc.), o formativas, en las que el entrevistador quiere descubrir cómo tienen lugar los procesos de aprendizaje del estudiante, para lo cual le proporciona determinada información (conceptos, propiedades, técnicas, etc.) y observa cómo la asimila y la utiliza. Del primer tipo de entrevistas se pueden encontrar multitud de ejemplos en cualquier revista, mientras que el último tipo, que en realidad es una unidad de enseñanza personalizada, es bastante menos frecuente (Fuys, Geddes, Tischler, 1988 es un ejemplo). Por otra parte, el estilo de las entrevistas puede variar desde las conversaciones informales hasta las entrevistas completamente estructuradas y con preguntas orientadas a objetivos muy específicos.

Las dificultades de los métodos cualitativos se centran en la determinación de su fiabilidad y su validez. Cualquier investigación experimental debe permitir su reproducción fiel, si bien es poco probable que se pueda repetir la experiencia exactamente en las mismas condiciones, como si de un experimento químico se tratara; en el caso de las cualitativas, hay algunos puntos en los que los investigadores deben tener cuidado al elaborar las memorias o artículos describiendo la investigación: Especificar la forma de elección de la muestra, describir las condiciones sociales y físicas en que se ha desarrollado la experiencia, describir la actividad del investigador y del entrevistado durante la misma, indicar las estructuras objeto de estudio y explicar cómo se ha analizado la información recogida. En cuanto a la posibilidad de generalización de los resultados, las investigaciones cualitativas asumen, por su propia estructura, que se trata de situaciones particulares y, por

lo tanto, sólo generalizables a otros ambientes similares, por lo que la generalización de unos resultados a un contexto diferente (país, edad de los sujetos, contenidos o método de enseñanza, tamaño del grupo, etc.) sólo podrá hacerse con garantías de veracidad después de haber repetido la investigación original en el nuevo contexto.

No es razonable comparar las metodologías cuantitativa y cualitativa para decidir cuál es la mejor, pues se basan en concepciones, métodos y objetivos diferentes. La preponderancia de una de ellas sobre la otra no es clara ni permanente, dependiendo de finalidades²³, épocas, países y, sobre todo, de escuelas científicas. Así, es fácil darse cuenta de que en los años 50 y 60 en la Unión Soviética casi todas las investigaciones educativas, no sólo en Didáctica de las Matemáticas, son de tipo cualitativo²⁴. Por el contrario, en las investigaciones de EE. UU. los métodos cuantitativos eran completamente dominantes hasta finales de la década de los 70; sin embargo, en los años 80 comenzó en el mundo occidental un movimiento de análisis crítico de la metodología cuantitativa y de mayor consideración de las cualidades de la investigación cualitativa. Por los mismos años tuvo lugar el florecimiento del constructivismo²⁵ en la enseñanza y aprendizaje de diversas áreas de las Ciencias, entre ellas en la Didáctica de las Matemáticas. Esta simultaneidad no es una coincidencia, ya que los constructivistas consideran los métodos cualitativos como los más adecuados para resolver el tipo de problemas que plantean.

En este terreno, como en tantos otros, no suele ser adecuada una elección extremista ya que en muchas investigaciones es posible desarrollar una metodología mixta, que aproveche algunas ventajas del análisis cualitativo y otras del análisis cuantitativo, lo cual suele dar buenos resultados, aunque sin olvidar las importantes diferencias que separan estos dos métodos de trabajo. En Cook, Reichardt (1986, pág. 29) se ofrece una tabla que pone de relieve, y compara, los elementos más destacados de cada paradigma; a continuación recogemos los más significativos de dichos elementos:

²³ Como indica Eisenhart (1988), generalmente se necesita recurrir a los resultados estadísticos significativos para poder sacar adelante la propuesta de una política de acción, mientras que en los estudios sociológicos se prefieren los métodos cualitativos.

²⁴ Kantowski (1978) explica los motivos, fundamentalmente políticos, que dieron lugar a esta situación.

²⁵ De acuerdo con Steffe (1983), el objetivo central de los investigadores constructivistas es explicar los procesos de construcción de objetos matemáticos que tiene lugar realmente en las mentes de los niños.

²² Cosa que ocurre con poca frecuencia y que, a veces, no es aconsejable, por ejemplo, cuando se realiza una experiencia con grupos experimentales y de control o cuando el objetivo del estudio no son los alumnos sino los profesores.

Paradigma cualitativo	Paradigma cuantitativo
Fenomenológico, interesado en <i>comprender</i> la conducta humana.	Positivista lógico, intentando buscar los <i>hechos</i> o <i>causas</i> de los fenómenos.
Subjetivo.	Objetivo.
Próximo a los datos; perspectiva «desde dentro».	Al margen de los datos; perspectiva «desde fuera».
Orientado al proceso.	Orientado al resultado.

4.4. HERRAMIENTAS PARA LA INVESTIGACION EN DIDACTICA DE LAS MATEMATICAS

Después de describir los tipos y métodos de investigación usuales en nuestra área, es obligado que dedique algunas páginas al trabajo de campo propiamente dicho, es decir al proceso de recogida de información. Aquí nos encontramos ante dos problemas diferentes: a) saber qué otras investigaciones se han realizado hasta el momento sobre el problema que nos interesa, cómo han sido desarrolladas y qué resultados han producido y b) cómo hacer la recogida de información para nuestra investigación. Es importante ser consciente de que lo segundo debe estar influenciado por lo primero y, realmente, debe ser posterior.

4.4.1. Fuentes de documentación

Hay que tener en cuenta que en el campo de la investigación en Didáctica de las Matemáticas, como en cualquier otro, el aislamiento es un error que hay que evitar a toda costa. Por el contrario, se hace completamente necesario tratar de conocer qué están haciendo otras personas interesadas por los mismos temas, tanto en nuestro entorno próximo (local) como a nivel nacional e internacional, qué problemas están siendo resueltos, qué soluciones se están proponiendo, etc. Esta necesidad de conocimiento del trabajo ajeno está originada, en parte, por la conveniencia de aunar esfuerzos para la resolución eficaz de problemas educativos, lo cual sólo se puede lograr compartiendo nuestras ideas y nuestro trabajo. Pero también está originada por la conveniencia de evitar la pérdida de tiempo que supone trabajar para llegar a conclusiones que ya han hecho públicas otras personas hace tiempo

o, lo que es peor, para encontrar lo mismos problemas o cometer los mismos errores de otros investigadores.

Por otra parte, la complejidad de la mayoría de las cuestiones interesantes que deben ser investigadas hace prácticamente imposible que una persona sola o un pequeño grupo puedan resolver satisfactoriamente alguna de esas cuestiones. Este es un motivo más por el que se impone la necesidad de trabajar de forma coordinada, con un abundante intercambio de información.

Considero un principio básico de la investigación que cuando alguien se sienta interesado por un problema y quiera investigarlo, una de las primeras cosas que debe hacer es reunir una cantidad adecuada de información sobre investigaciones relevantes en ese problema, para estudiarla, organizarla y conseguir una idea clara de cuál es el estado de la cuestión en ese momento Johnson (1980b). Dos consecuencias de este esfuerzo son que el investigador comprenderá mejor el problema en el que va a trabajar y que le surgirán un número de preguntas y posibilidades interesantes de las que antes no era consciente.

En la actualidad, las vías usuales de transmisión de la información entre los investigadores en Didáctica de las Matemáticas son de dos tipos: publicaciones y congresos. Voy a hacer una breve descripción de las más importantes de cada tipo.

- Por lo que se refiere a los *libros*, hay diversas editoriales especializadas en Didáctica de las Matemáticas; además de las de lengua española, suficientemente conocidas, conviene tener en cuenta²⁶: Cambridge Univ. Press (G.B.), Cassell (G.B.), Kluwer Academic (Holanda), Franklin Institute Press (EE. UU.) Lawrence Erlbaum (EE. UU.), N.C.T.M. (EE. UU.), NFER-Nelson (G.B.) y Springer Verlag (Holanda). Más adelante me referiré a las actas de congresos.

En cuanto a las *revistas*, existe una cantidad bastante elevada de revistas dedicadas de forma más o menos directa a la Didáctica de las Matemáticas. De entre ellos destacan las siguientes, que son las más valiosas para la investigación en este campo: «Educational Studies in Mathematics», «Enseñanza de las Ciencias»²⁷, «For the Learning of Mathematics», «Journal for Research in Mathematics Education» (la más importante en estos momentos), «Journal of Mathematical Behavior» y «Recherches en Didactique des Mathématiques». Casi todos los

²⁶ Algunas de estas editoriales han cambiado de nombre o han sufrido absorciones, como es el caso de D. Reidel, absorbida por Kluwer, o de Holt, Reinhart & Winston, Croom Helm y Cassell, que son tres nombres de la misma editorial.

²⁷ Esta revista tiene también una sección dedicada a reseñas bibliográficas, bibliografías monográficas e información de novedades.

artículos de estas revistas presentan resultados de trabajos de investigación y su estilo es riguroso y técnico.

Hay otro grupo de revistas, dirigidas a los profesores de Matemáticas, en las que se pueden encontrar resultados de investigaciones, si bien el estilo de sus artículos es más divulgativo que en las citadas antes. Las más conocidas e interesantes son «Epsilon», «Números» y «Sumas» entre las españolas y «Arithmetic Teacher» (EE. UU.), «Mathematics in School» (G.B.), «Mathematics Teaching» (G.B.), «Petil x» (Fr.) y «The Mathematics Teacher» (EE. UU.) entre las extranjeras.

En tercer lugar, no hay que olvidar las «bases de datos», que editan publicaciones periódicas conteniendo información, en forma de abstracts, sobre publicaciones de todo tipo; en particular incluyen tesis doctorales y memorias de proyectos de investigación, que suelen ser muy difíciles de conseguir por otras vías. En España podemos acudir al Centro de Investigación, Documentación y Evaluación (CIDE), al Instituto de Información y Documentación en Ciencias Sociales y Humanas y al recientemente creado Centro de Documentación de la Sociedad Thales. A nivel internacional, las bases de datos más destacadas son:

- Educational Resources Information Center (ERIC). En esta organización norteamericana se recogen infinidad de publicaciones interesantes, cuyas reseñas aparecen en «Investigations in Mathematics Education» (publicación integrada por reseñas de trabajos seleccionados), «Current Index to Journals in Education» (CIJE; integrada por reseñas de los artículos aparecidos en gran número de revistas) y «Resources in Education» (RIE; con reseñas de todas las publicaciones de la base de datos de ERIC y algunas publicaciones más). Es posible obtener de ERIC copias de la mayor parte de los documentos reseñados en dichas publicaciones, excepto de libros comercializados y artículos de algunas revistas.
- Dissertations Abstracts International (DAI)²⁸. Su objetivo es reseñar tesis de doctorado, maestría, etc. Tiene dos series relacionadas con la Didáctica de las Matemáticas, una dedicada principalmente a Norteamérica y la otra al resto del mundo. Es posible obtener copias de casi todos los documentos reseñados.
- La British Thesis Library tiene los mismos objetivos de DAI, pero centrada en las universidades británicas. Es posible obtener copias de todos los documentos reseñados, si bien el proceso es un tanto laborioso.

²⁸ También conocida como «University Microfilm International», que es el nombre de la compañía editora.

— Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) es una base de datos alemana que publica reseñas principalmente de artículos, libros y abstracts de congresos. Cada número de ZDM tiene también una sección en la que se publican artículos y se informa de congresos que se van a celebrar en los próximos meses. No suministra copias de los documentos reseñados.

— Los Citation Index son recopilaciones de publicaciones científicas de los diversos campos del saber editados por el Institute for Scientific Information (ISI). Seguramente constituye la base de datos más compleja, pues permite buscar una referencia a partir de sus palabras clave, de sus autores y de los autores citados en la misma. El relacionado con la Didáctica de las Matemáticas es el Behavioral Sciences Citation Index.

— El Journal for Research in Mathematics Education dedica el número 4 de cada volumen a reseñar memorias de investigación y artículos seleccionados entre los aparecidos en diversas fuentes durante el último año.

Por lo general, las bases de datos permiten acceder a los listados de referencias desde diversos puntos: número de serie, tema, autor y palabras clave. Otra forma de consulta por la que se puede acceder a la mayoría de las bases anteriores es la informática, bien sea mediante conexión en tiempo real de un ordenador a la base de datos informática central de la compañía, a través de las redes informáticas internacionales, bien sea mediante el uso de diskettes.

- El proceso de publicación de un artículo en una revista de investigación suele ser largo pues, una vez que los autores han completado la investigación que van a describir, hay que sumar los tiempos de redacción del artículo, reseña, lista de espera, corrección de pruebas, etc. Todo ello hace que sea bastante frecuente un período superior a dos años desde que se empieza a escribir el artículo hasta que aparece publicado. Naturalmente, al escribir un libro el tiempo suele ser todavía más largo. Por lo tanto, estas publicaciones no permiten saber qué se está haciendo en este momento²⁹.

La mejor forma de estar «a la última» en la investigación en Didáctica de las Matemáticas es por medio de los «congresos» (nacionales o internacionales) que tienen lugar periódicamente. Ello permite, por una parte, saber qué se está haciendo y, por otra parte, poder intercambiar opiniones directamente con aquellas personas que nos

²⁹ Nos pasa como a los astrónomos, que no ven cómo son ahora las estrellas, sino cómo eran hace varios cientos de miles de años, cuando emitieron la luz que llega ahora a la Tierra.

interese. En todo caso, las «actas de los congresos» son también una fuente importante de información.

En otro capítulo de este libro se ha hecho una descripción histórica de los principales congresos sobre Didáctica de las Matemáticas; actualmente el único congreso español de investigación en Didáctica de las Matemáticas era el organizado por la revista Enseñanza de las Ciencias, que tiene carácter bianual³⁰. En el contexto internacional, de entre los congresos relacionados estrechamente con la investigación destacan:

- El «International Congress on Mathematical Education» (I.C.M.E.). Organizado por la International Commission on Mathematical Instruction (I.C.M.I., dependiente de la Unión Matemática Internacional), es el principal congreso de nuestro campo en estos momentos; tiene carácter cuatrienal y reúne a varios miles de educadores matemáticos de todo el mundo interesados en los más diversos aspectos de la Didáctica de las Matemáticas³¹. No se publican actas del congreso debido a su carácter multitudinario, pero diferentes grupos publican actas de secciones especializadas.
- El congreso del Grupo Internacional «Psychology of Mathematics Education» (P.M.E.) es el congreso internacional más importante entre los dedicados de forma específica a la investigación en Didáctica de las Matemáticas. Tiene lugar cada año, generalmente en julio, y una característica suya destacable es que sus actas se publican en el momento de celebrar el congreso, contra la costumbre usual de publicarlas varios meses después.

Existe una sección norteamericana del P.M.E. (agrupando principalmente a investigadores de Canadá, EE. UU. y México) que también se reúne anualmente en un congreso denominado P.M.E.-N.A.; es independiente del congreso del P.M.E. y publica sus propias actas, que también son muy interesantes.

- El grupo «Theory of Mathematics Education» (T.M.E.) fue creado en 1984. Sus congresos se celebran anualmente y el centro de atención de los mismos es el indicado por el nombre del grupo, al cual nos hemos referido con anterioridad en éste y otros capítulos del presente libro. Este congreso es una referencia útil para aquéllos interesados en la fundamentación de la Didáctica de las Matemáticas

³⁰ Sus tres ediciones se han celebrado en Barcelona (1985), Valencia (1987) y Santiago (1989). Un defecto de este congreso es que no publica actas, sino unos resúmenes de una página de las comunicaciones presentadas.

³¹ El próximo congreso, ICME-7, tendrá lugar en Quebec (Canadá) en agosto de 1992 y el ICME-8 se celebrará en Sevilla en 1996.

cas como Ciencia, pues representa una de las tendencias actuales en este tema.

- Por último mencionaré el congreso de la «Commission Internationales pour l'Etude et l'Amelioration de l'Enseignement des Mathématiques» (C.I.E.A.E.M.)³². Este congreso, anual excepto cuando tiene lugar el I.C.M.E., se dirige principalmente a los profesores de Matemáticas y a estudiar los problemas relacionados directamente con la enseñanza y la actividad en las aulas, si bien también se presentan en él resultados de investigaciones.

A pesar de la existencia de todos estos medios que acabo de describir, siempre queda una cierta cantidad de documentación a la que no podemos acceder fácilmente. En estos casos lo más práctico es intentar el contacto directo con sus autores (obviamente muy fácil entre españoles). Por lo que a mi experiencia personal se refiere, debo reconocer que este tipo de contactos casi siempre ha funcionado bien y muchas veces ha producido una información mucho mejor que la que en el primer momento pretendía conseguir. Para ello, además del correo ordinario, existe una red cada vez más extensa de comunicaciones casi instantánea por medio del «correo electrónico» y del «telex». En ambos casos se trata de vías muy seguras y que permiten un contacto fluido y rápido con personas de cualquier parte del mundo.

4.4.2. Métodos de recogida de datos

Voy a referirme ahora a las principales técnicas usadas actualmente por los investigadores para la recogida de información durante su «trabajo de campo», es decir las formas de obtener datos directamente de los estudiantes, profesores, etc., en los que basa la investigación. Para estudiar el proceso de aprendizaje seguido por los estudiantes, es imprescindible conocer cómo utilizan en cada momento los elementos matemáticos (conceptos, propiedades o algoritmos) implicados. Disponemos de varias técnicas, que comentaré a continuación.

- En determinados contextos, generalmente al hacer un análisis de comportamiento, resulta útil proponer a los estudiantes una serie de problemas seleccionados, con el fin de analizar sus métodos de resolución y formas de uso de los conceptos y métodos matemáticos. En tales

³² No hay que confundirlo con otros congresos de siglas parecidas y objetivos también próximos: C.I.A.E.M. (Conferencia Interamericana de Educación Matemática) y C.I.B.E.M. (Congreso Iberoamericano de Educación Matemática).

casos, el «análisis de errores» se revela como una estrategia muy útil para hacer inferencias acerca de los procesos mentales de los estudiantes.

Aunque se puede usar el número de errores cometidos por un estudiante como medida de su grado de aprendizaje, esta es una técnica de alcance muy limitado. Es mucho más provechoso hacer un análisis de los errores cometidos: ya he comentado antes que, aunque los estudiantes cometen errores no sistemáticos, la mayoría de sus errores aparecen con mucha frecuencia y suelen estar asociados a una clase concreta de dificultades en el aprendizaje o de comprensión de los conceptos. Un error sistemático es señal inequívoca de alguna comprensión incorrecta de un concepto o de la adquisición incorrecta de un algoritmo, por lo que el análisis de los errores puede dar luz sobre el punto en el que se debe incidir para mejorar el aprendizaje.

Un ejemplo muy conocido lo tenemos en los problemas aritméticos verbales en los que el enunciado proporciona dos números y el estudiante debe seleccionar la operación que tiene que realizar; es muy común la idea errónea de que, en una división, el dividendo debe ser mayor que el divisor, por lo que un estudiante que tenga esta falsa concepción de la división suele dar respuestas como éstas:

- a) «Un agricultor ha recogido 60 toneladas de naranjas en 25 días ¿Cuántas ha recogido cada día?» Respuesta: $60 \div 25 = 2,4$ toneladas.
- b) «Un agricultor ha recogido 11 toneladas de naranjas en 25 días. ¿Cuántas ha recogido cada día?» Respuesta: $25 \div 11 = 2,27$ toneladas.

En este caso, como en la mayoría de las concepciones erróneas presentes en los estudiantes, el origen está en los primeros momentos del aprendizaje de la división: durante uno o más cursos los niños sólo hacen divisiones enteras (exactas o con resto), en las cuales para que el cociente sea entero, el dividendo tiene que ser necesariamente mayor que el divisor; como consecuencia, los estudiantes inducen dos propiedades que en el contexto particular de la división entera son correctas, a saber, que el dividendo tiene que ser mayor que el divisor y que el cociente tiene que ser menor que el dividendo. La primera de estas propiedades es la que provoca el error del ejemplo anterior. La segunda causará errores cuando surjan las divisiones cuyo divisor sea menor que la unidad.

Por lo tanto, al diseñar un estudio basado en análisis de errores, es necesario seleccionar los problemas de manera que se diferencien unos de otros en características concretas que sean las presumibles fuentes de error. Posteriormente, al avanzar en el estudio, se construirán nue-

vos problemas que induzcan a cometer un determinado error sólo a aquellos estudiantes que tengan un cierto tipo de fallo en su aprendizaje. Aunque pueda parecer paradójico, la única forma de detectar y corregir las lagunas en el aprendizaje de los estudiantes es planteándoles problemas para que los resuelvan mal; naturalmente con estos problemas no se debe pretender suspender a los alumnos ni provocar su falta de confianza o su desaliento, por lo que, una vez determinado el error, estos problemas ya no son necesarios y hay que pasar a la fase de corrección del fallo detectado. En Mulhern (1989) se hace una descripción detallada de diferentes motivos de errores.

- Otra técnica, muy utilizada en las investigaciones cualitativas, es el «análisis de protocolos». Un protocolo es una reproducción fiel, completa y exhaustiva de la actividad de un individuo durante cierto espacio de tiempo. Por lo tanto, el investigador debe recoger toda la actividad de su(s) sujeto(s) experimental(es) para analizarla después en detalle; para ello se suelen utilizar el magnetófono o la cámara de vídeo, además de lo que haya escrito o dibujado el individuo y las notas del investigador, si está presente³³. Según los objetivos de la investigación, el protocolo puede recoger la resolución de uno o varios problemas, la actividad a lo largo de un cierto número de horas de clase, una entrevista entre el investigador y el sujeto, etc.

En el primer caso (resolución de problemas), el investigador suele tomar una actividad pasiva después de haber dado a los sujetos las instrucciones iniciales, sin dialogar con ellos durante su actividad. Cuando está trabajando un individuo sólo se le pide que resuelva los problemas «pensando en voz alta», para exteriorizar lo más posible sus procesos internos de pensamiento; en otras ocasiones se forma una pareja de sujetos, que trabajan en equipo, con el fin de fomentar el diálogo entre ellos y que cada uno exprese sus ideas.

En el segundo caso (actividad en un aula), el protocolo suele proceder de la interacción del sujeto (profesor o alumno) en el aula con los demás miembros del grupo. Ahora, el investigador puede ser un miembro del grupo, por ejemplo si un profesor está investigando la actividad de sus alumnos, o puede ser un observador externo, que está en el aula observando sin intervenir en nada.

El tercer tipo de protocolo (entrevista) reproduce el diálogo de las «entrevistas clínicas», en las cuales participan el investigador y un solo sujeto; el investigador propone problemas o hace preguntas al sujeto, de

³³ Aunque generalmente los protocolos se refieren a actividad verbal, en algunos casos la actividad de los sujetos es de otro tipo, como escribir o dibujar al resolver un problema, manipular determinados materiales didácticos o trabajar en un ordenador (las «dribble files» recogen todas las pulsaciones sobre el teclado durante el trabajo).

manera que hay un diálogo continuo entre ambos. Las entrevistas siempre deben tener un guión previamente establecido; en algunas investigaciones se sigue este guión escrupulosamente, con el fin de asegurar que a todos los individuos entrevistados se les hacen las mismas preguntas, mientras que en otros casos el guión puede ser modificado sobre la marcha por el entrevistador para completar la información, pedir más detalles al individuo, incidir sobre algún punto especialmente interesante, etc.

Generalmente las entrevistas clínicas tienen como finalidad conocer las opiniones y puntos de vista del entrevistado o evaluar los conocimientos y habilidades matemáticas que tiene en el momento de la entrevista en relación con un tema determinado. No obstante, algunas veces las entrevistas clínicas tienen una finalidad formativa, pues en ellas se quiere evaluar la capacidad de aprendizaje del individuo. Así, Fuys, Geddes, Tischler (1988) realizan entrevistas clínicas para determinar el nivel de Van Hiele de razonamiento «potencial» de los estudiantes, en las cuales siguen unas unidades de enseñanza de triángulos y cuadriláteros para ver cómo reaccionan los estudiantes y hasta dónde son capaces de progresar en el aprendizaje de ese tema.

El análisis de protocolos es una técnica muy interesante de recogida de información; no obstante, en algunos tipos de actividad el análisis está limitado por la habilidad de los sujetos observados para expresarse y explicar coherentemente sus ideas (esto es especialmente importante con niños pequeños). En algunas ocasiones se han planteado críticas contra el «pensamiento en voz alta», pues dudan de que la mayoría de los estudiantes sean capaces de hacer introspecciones eficaces en sus propios razonamientos; por otra parte, es cierto que, probablemente, los sujetos no resolverán un problema de la misma manera si están callados que si deben expresar paso a paso sus ideas, pues el hecho de tener que hablar puede producir interferencias en sus procesos habituales de pensamiento. En cualquier caso, estas objeciones son serias y deben tenerse en cuenta al organizar la fase experimental de una investigación, si bien no creo que, por sí solas, sea un impedimento al uso de las técnicas de análisis de protocolos.

4.5. TEMAS ACTUALES DE INVESTIGACION

Aunque el objetivo básico de la investigación en Didáctica de las Matemáticas es conocer los procesos de aprendizaje de los estudiantes, con el fin de poder ofrecer a los profesores propuestas con las que hacer su actividad en las aulas más efectiva, la actividad investigadora internacional no es monolítica y homogénea, sino de lo más diversificada y heterogénea. Por una

parte, se investiga con más profundidad en algunas áreas de las Matemáticas escolares que en otras; esto depende, entre otros factores, de su importancia dentro del curriculum, de su dificultad intrínseca y, hay que reconocerlo, de las modas. La resolución de problemas como objetivo autónomo es un ejemplo claro de investigación generada por la moda. En 1980 el N.C.T.M. propuso este tema como prioritario para la década de los 80, lo cual dio lugar a un boom de investigaciones sobre resolución de problemas (en una mayoría de casos centradas en los problemas aritméticos y, de éstos, predominantemente en los de sumas o restas)³⁴.

Además, al analizar el aprendizaje de una parte de las Matemáticas, se pueden adoptar diferentes posturas, que suelen estar asociadas a las diversas escuelas o metodologías de enseñanza actualmente en uso (conductismo, neopiagetianos, constructivismo, escuela francesa, enseñanza por diagnóstico, etc.). Es evidente que el hecho de que un investigador se sitúe en una u otra corriente influye en los métodos y objetivos de su trabajo, pero también influye en los contenidos, pues para cada corriente hay ciertas componentes del aprendizaje más importantes que otras (matemáticas, psicológicas, metodológicas, sociales, etc.).

Por último, se debe tener en cuenta que no todos los conceptos matemáticos son análogos desde el punto de vista de su aprendizaje, por lo que es necesario limitar el campo de investigación a áreas concretas de las Matemáticas, como aritmética, geometría, álgebra, etc. y, dentro de cada una de ellas, a conceptos aislados o conjuntos de conceptos relacionados entre sí (por ejemplo, las operaciones con números naturales, las isometrías, las fracciones, las ecuaciones con una incógnita, etc.). Todo ello hace que la variedad de objetos de investigación sea muy grande, si bien hay en cada momento algunos temas más destacados.

Ha habido algunos intentos de plantear los principales problemas de la Didáctica de las Matemáticas que deberían ser resueltos, a semejanza de la famosa lista de los 23 principales problemas de las Matemáticas enunciados por Hilbert en 1900. Si bien los problemas planteados por Hilbert han marcado fuertemente las líneas de desarrollo de la investigación matemática durante este siglo, no se puede decir que haya ocurrido lo mismo en el campo de la Educación Matemática. Uno de estos intentos se debe a D. Wheeler, que propuso a diversos educadores matemáticos destacados la «formulación de problemas concretos cuya solución pueda suponer un avance sustancial de nuestro conocimiento sobre la Educación Matemática» (Wheeler et al., 1984a, 1984b y 1984c). La diversidad de personas que contes-

³⁴ Durante los últimos años ha decrecido el interés de los investigadores por la resolución de problemas aritméticos, aunque se sigue reconociendo como un elemento importante y necesario dentro de la enseñanza de las matemáticas.

taron hace que la variedad de respuestas sea muy grande, desde las que se refieren a los fines o métodos de la investigación hasta las relativas a contenidos matemáticos escolares concretos, pasando por las que enfatizan problemas sociológicos, curriculares, de formación de profesores, etc. Sólo la lectura de los tres artículos citados antes permite darse cuenta de la disparidad de puntos de vista.

Otro intento destacado se debe a Freudenthal (1981). Un grupo de problemas que plantea Freudenthal se refiere al aprendizaje de algunas áreas de las Matemáticas: ¿Por qué los niños no aprenden bien la aritmética? ¿Es posible basar la enseñanza de la geometría en las intuiciones espaciales de los estudiantes? ¿Cómo podemos usar calculadoras y ordenadores para mejorar la comprensión de las Matemáticas?

Otros problemas se refieren al proceso de aprendizaje: ¿Cómo deberían aprender los estudiantes? ¿Cómo deben avanzar los profesores en la esquematización y la formalización durante la enseñanza de un cierto tema? ¿Cómo se pueden estimular los procesos de comprensión de las Matemáticas y de reflexión sobre las propias actividades? ¿Cómo se puede estructurar el aprendizaje de las Matemáticas de acuerdo con ciertos niveles diferenciados?

Un tercer tipo de problemas enunciados por Freudenthal se centra en componentes afectivas del aprendizaje: ¿Cómo se pueden crear actitudes positivas hacia las Matemáticas? ¿Cómo se pueden crear contextos en los que se enseñe a matematizar?

Pero estas preguntas planteadas por Freudenthal, de indudable interés e importancia, no son cuestiones investigables directamente, sino líneas de investigación en las que se debe hacer un análisis detallado, pues están formadas por numerosos problemas interconectados, cada uno de los cuales necesita del esfuerzo de los investigadores.

Si miramos hacia la realidad de la investigación actual, podemos encontrar algunos campos que están siendo investigados con intensidad. Los índices de las actas de los congresos internacionales de investigación y algunas publicaciones como Nesher, Kilpatrick (1990) o la serie del N.C.T.M. «Research Agenda for Mathematics» pueden dar una idea clara de cuales son estos campos y las líneas que se siguen en cada uno de ellos; sin ánimo de ser exhaustivo, ni de aludir a «los» más importantes, en los siguientes párrafos haré unas breves presentaciones de algunos de tales campos de investigación.

- La investigación en «geometría» ha sufrido durante mucho tiempo el mismo olvido que su enseñanza en Primaria y Secundaria, si bien en los últimos años se observa un relanzamiento de la investigación paralelo al mayor peso de la geometría en los nuevos currícula. Este hecho y mi gusto personal son los motivos por los que aludo a la geometría en primer lugar.

Al igual que en otras áreas de las Matemáticas, la teoría de Piaget ha supuesto hasta finales de los 70 la principal fuente de investigaciones, tanto para aplicar dicha teoría como para analizarla o criticarla. Pero, como indica Coxford (1978), la investigación sobre conceptos geométricos debe ir más allá de la descripción de qué comprenden los niños a diferentes edades y de la repetición o el refinamiento de las teorías de Piaget; debe ocuparse, por ejemplo, de relacionar la comprensión geométrica con el tipo de experiencias que adquieren los estudiantes dentro y fuera de las escuelas y con los tipos de enseñanza usados por los profesores.

El modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele da respuestas válidas a las necesidades planteadas por Coxford, por lo que está implantado con fuerza como marco teórico en el que apoyar los trabajos de investigación y de innovación en la enseñanza: Se están realizando investigaciones de desarrollo curricular en diversas áreas de la geometría así como de profundización y mejora del propio modelo de Van Hiele³⁵.

Dentro de la investigación en geometría, es necesario destacar como especialidad autónoma la dedicada a la «visualización espacial», ya que está fuera de duda que la capacidad de visión espacial es una componente necesaria para el aprendizaje de la geometría tridimensional. No obstante, la «visualización» es una habilidad que no sólo interacciona con la geometría, sino con la aritmética, el álgebra, etc.³⁶, por lo que la visualización espacial es una de sus componentes. La investigación en este campo presenta bastantes problemas, derivados en parte de la dificultad de acotar el concepto de «visualización espacial» o geométrica. A. Bishop es una figura destacada de la investigación en visualización matemática; en Bishop (1983) hace una interesante aproximación a este campo de investigación de la Didáctica de las Matemáticas y en Bishop (1989) ofrece una revisión de la situación del tema.

Respecto de la investigación en geometría en general, en Clements, Battista (en prensa) y Hershkowitz (1990) se recogen e integran las principales aportaciones de la investigación internacional de los últimos años (incluyendo las correspondientes a la visualización espacial).

- El aprendizaje de la «aritmética» ha sido siempre y sigue siendo un elemento básico de las Matemáticas elementales (principalmente en relación con los conceptos y operaciones de los números naturales, las fracciones y los decimales y sus respectivos algoritmos). Sin embargo

³⁵ En Jaime, Gutiérrez (1990) se puede encontrar una introducción a los principales aspectos teóricos y de aplicación educativa del modelo de Van Hiele.

³⁶ Y también tiene relación con otras Ciencias cuando se analiza desde la perspectiva de la Psicología Educativa.

ha cambiado la óptica al respecto, pues mientras hace algunas décadas las habilidades mecánicas de realización de operaciones (conteo, suma, resta, etc.) eran el objetivo de la enseñanza y de las investigaciones, actualmente se está más interesado por procurar la comprensión por los estudiantes de los conceptos y las habilidades implicados. Ello ha motivado un cambio en el planteamiento de los objetivos educativos, pues mientras hasta hace aproximadamente veinte años se primaba el aprendizaje memorístico y rutinario de las operaciones aritméticas, actualmente se hace más énfasis en la necesidad de que los estudiantes comprendan los motivos (muchas veces ocultos) que justifican la utilización de cada tipo de números y la realización de los algoritmos.

No obstante, hay que tener cuidado en la interpretación de las propuestas de enseñanza comprensiva pues una aplicación radical de las mismas suele llevar a la eliminación total de la actividad memorística y mecánica, cosa que puede ser aún más perjudicial para los estudiantes que el aprendizaje puramente rutinario. Cualquier persona sensata debe reconocer que la memoria y la agilidad algorítmica son imprescindibles en la actividad matemática no escolar y que no es razonable pretender que los estudiantes «descubran» el algoritmo de, por ejemplo, la división cada vez que deben hacer una.

Aunque los investigadores piagetianos están preocupados por las bases lógicas de la comprensión y manejo de los números (en especial de los naturales), hay otra tendencia, actualmente mayoritaria, que sustenta la propuesta de que la comprensión de los sistemas numéricos y sus operaciones es el resultado de la adquisición de ciertas destrezas básicas, como representaciones mentales o redes conceptuales, por lo que sus esfuerzos se dirigen a identificar y jerarquizar tales destrezas. Desde este punto de vista, la comprensión de los números no se logra con la simple memorización de sus características y propiedades básicas, sino que requiere la formación de una red en la que se integran los diferentes significados de cada tipo de números y de sus operaciones, las relaciones entre unos conjuntos numéricos y otros, etc. De esta manera, se explica el proceso de cambio conceptual que se produce (o se debería producir) en los niños cuando pasan de utilizar los números naturales en conteos, sumas y restas de cantidades (discretas) pequeñas a su uso en el desarrollo de las habilidades de cálculo, incluido el mental, y cuando surgen la multiplicación y división. También se originan procesos de este tipo cuando entran en juego los números fraccionarios, con el consiguiente rompimiento de la unidad y el cambio de concepción del significado de la unidad (los números naturales pasan de ser unidades irrompibles a ser unidades con otro significado, o a dejar de ser las unidades).

Otra consecuencia de la tendencia educativa actual más generaliza-

da, a favor de la enseñanza comprensiva frente al tradicional aprendizaje rutinario de los hechos y algoritmos básicos, es el creciente interés de los investigadores y educadores por el cálculo mental (exacto) y por la estimación (cálculo mental aproximado); en estas líneas se presentan interesantes problemas metodológicos derivados, en primer lugar, de la dificultad de acceder a los pensamientos de los estudiantes de los primeros cursos de Primaria.

Carpenter, Moser, Romberg (1982) y Lesh, Landau (1983) son dos buenas fuentes para tener una visión completa del tema. Por otra parte, en Bergeron, Herscovics (1990) y Hiebert, Behr (1988) se puede obtener una visión global de la situación actual de las investigaciones en números y operaciones aritméticas y en Sowder (en prensa) se recopilan y organizan las investigaciones más recientes sobre cálculo mental y estimación en general (de operaciones aritméticas, de cantidades cardinales y de magnitudes).

- El «álgebra» escolar se puede considerar como la continuación natural de la aritmética; de hecho, los investigadores interesados en el estudio inicial del álgebra buscan sus antecedentes en ciertas actividades estructurales de aritmética, como transformar problemas verbales en expresiones simbólica o simplificar expresiones complejas. Las variables son el elemento básico del álgebra escolar y, por lo tanto, el centro de atención de numerosas investigaciones; en contra de lo que pueda pensar un profano, o un matemático puro, para los estudiantes hay diferentes tipos de «variables», dependiendo de qué significado tiene para ellos la variable en cada caso; más concretamente, debemos hablar de que los estudiantes dan diferentes significados a lo que los matemáticos consideramos, dependiendo de la situación concreta, variables o incógnitas. En Hart (1981, pág. 104) se alude a seis interpretaciones diferentes de las letras que aparecen en expresiones algebraicas o en problemas con valores desconocidos, algunas de las cuales reflejan fases iniciales de la comprensión de los conceptos matemáticos de variable e incógnita. En concreto, son las siguientes:

— *Letra evaluada*. Se refiere al caso en el que el estudiante sustituye la letra por un número concreto nada más empezar el trabajo.

— *Letra no usada*. En este caso el estudiante ignora la presencia de la letra, o la tiene en cuenta pero sin darle ningún significado.

— *Letra como objeto*. En este caso el estudiante considera la letra como abreviatura de un cierto objeto o como un objeto en sí misma.

— *Letra como incógnita específica*. En este caso los estudiantes consideran la letra como un número concreto pero desconocido, pudiendo operar con ella directamente.

— *Letra como número generalizado*. En este caso se considera que la

letra puede tomar diversos valores diferentes, o se considera como su representante.

— *Letra como variable*. El estudiante considera la letra como representante de una cantidad indeterminada de valores y entiende que hay una relación sistemática entre la letra y dichos valores.

Por lo tanto aquí hay un terreno fructífero para la investigación, analizando cuándo y cómo se puede llegar a las concepciones más adecuadas.

El otro elemento importante en la enseñanza y la investigación didáctica del álgebra son las ecuaciones. Aquí se debe investigar principalmente en torno a los métodos algebraicos de resolución de problemas y a la comprensión y aprendizaje de las técnicas para el cálculo de soluciones de ecuaciones o sistemas. En este tema, Kieran (1990), Kieran, Filloy (1989) y Wagner, Kieran (1989) ofrecen descripciones detalladas de las líneas de investigación en marcha y de los principales problemas pendientes (no olvidemos que se trata de un área de investigación bastante reciente), que pueden resumirse en las siguientes cuestiones que se plantean en Wagner, Kieran (1989) con el objetivo de delimitar el campo de estudio y de tratar de diferenciarlo, principalmente, de su análogo en aritmética:

«— ¿Qué es un problema verbal algebraico? ¿Hay problemas verbales que sean intrínsecamente más algebraicos que aritméticos? ¿Cuándo un método de resolver problemas verbales es más algebraico que aritmético?

— ¿Hay tipos particulares de problemas verbales que estimulen el desarrollo del razonamiento algebraico?

— ¿Qué está involucrado en el proceso de convertir problemas verbales en notación algebraica?»

- El auge de la informática educativa y la entrada de los ordenadores en los centros de Enseñanza Primaria y Secundaria en numerosos países han hecho que se desarrolle una rama de la investigación en Didáctica de las Matemáticas preocupada por analizar este fenómeno desde varias perspectivas: el «ordenador» como herramienta para uso del profesor o del alumno, la programación, la simulación, la práctica rutinaria.

Dentro de esta gama de líneas de investigación, merece la pena destacar la dedicada al análisis del aprendizaje del (y en el) lenguaje de programación «Logo». Este lenguaje, de prestaciones técnicas similares a otros aptos para la Inteligencia Artificial, tiene como característica diferenciadora que está creado para ser utilizado por los niños sin necesidad de entrenamientos especiales. De ahí que se estén realizando

numerosas investigaciones dirigidas, generalmente, a analizar las metodologías de enseñanza de diversos conceptos matemáticos por medio de la interacción de los niños con el ordenador.

Este es un campo de investigación prometedor pues, aunque se han hecho numerosas investigaciones, la mayoría de ellas son de tipo empírico, por lo que se necesita pasar a una fase de trabajo en la que se produzcan resultados generalizables y globales acerca de los procesos cognitivos y las estructuras mentales que actúan cuando se programa en Logo. Así, están pendientes de ser investigados en profundidad:

— Los problemas, tanto conceptuales como algorítmicos, subyacentes a la programación en sí misma.

— Los problemas relativos a la transferencia de conocimientos desde un entorno Logo a otros ambientes de trabajo matemático (en geometría, aritmética, álgebra, probabilidades, etc.).

— La influencia de la programación Logo en las estrategias generales de razonamiento o de resolución de problemas.

— Los problemas inherentes a las diversas metodologías de enseñanza utilizables en entornos Logo (descubrimiento libre o guiado, enseñanza dirigida, etc.).

Además, se da la circunstancia de que las investigaciones realizadas hasta ahora presentan resultados muy contradictorios, sin que haya un dominio claro de resultados a favor o en contra del Logo. Esto hace pensar que es necesario programar investigaciones con bases metodológicas y conceptuales sólidas y no simples experimentaciones con grupos pequeños de estudiantes. De Corte, Verschaffell (1987)³⁷ hacen una interesante discusión de los puntos anteriores incluyendo sugerencias de nuevas líneas de investigación.

- Por último, voy a referirme a una línea de investigación que ha surgido en los últimos años con fuerza, como resultado de la consciencia de que el aprendizaje de las Matemáticas no es un acto individual, sino un fenómeno social. Estas investigaciones, que podemos encuadrar bajo el calificativo de «aspectos sociales de las Matemáticas», tienen como objetivo común el estudio de las formas como el entorno social y cultural de los estudiantes influye en su aprendizaje tanto dentro como fuera de las aulas. Ya he mencionado con anterioridad que las interacciones dentro de un aula (profesor-alumnos y alumnos-alumnos) tienen

³⁷ Este artículo ha aparecido posteriormente con el título «Logo: A vehicle for thinking» en Greer, Mulhern (1989): *New directions in mathematics education* (Routledge: Londres, G. Bretaña), pág. 63-81.

un papel importante en el aprendizaje de las Matemáticas de cada estudiante de ese aula. Lo que caracteriza a esta línea de investigación es la amplitud de su campo de observación, pues no se limita al contexto del aula, sino que observa un entorno mucho más amplio que puede llegar a incluir al país en el que se sitúa un estudiante concreto, con toda la diversidad de factores (sociales, culturales, económicos, étnicos, lingüísticos, etc.) que ello supone.

A modo de ejemplo, estos son los temas de estudio que se abordaron en la reunión del Grupo de Trabajo «Social Psychology of Mathematics Education» del P.M.E., liderado por A. J. Bishop, en su congreso de 1990 (Furinghetti, 1991, pág. 18):

1. Estudiantes biculturales; en particular de Brasil.
2. Las relaciones entre los contextos sociales de las Matemáticas y el modelo de desarrollo del niño.
3. Componentes sociales de la evaluación.
4. Aspectos de «diferencia» social y cultural que pueden ser importantes en el aprendizaje de las Matemáticas.

4.6. ESTADO DE LA INVESTIGACION DE DIDACTICA DE LAS MATEMATICAS EN ESPAÑA

Al hablar de Didáctica de las Matemáticas en España, se puede considerar el año 1984 como año cero de su evolución. En efecto, en dicho año se reconoce por primera vez de forma oficial la existencia de la Didáctica de las Matemáticas como una especialidad universitaria independiente³⁸, en igualdad de condiciones legales (que no reales) con cualquier otra área de conocimiento en cuanto a posibilidades de dotación estructural, económica y humana. Con anterioridad a esta fecha existían asignaturas de metodología en algunas Facultades de Matemáticas, pero desgraciadamente, su influencia ha sido, en el mejor de los casos, nula. Algunas de estas asignaturas fueron recuperadas por los recién nacidos departamentos de Didáctica de la Matemática (en Granada y la Laguna) gracias a lo cual los estudiantes de Matemáticas de estas dos universidades disponen en su licenciatura de asignaturas de Didáctica de las Matemáticas.

En cuanto a la actividad investigadora en este área, con anterioridad a 1984 el trabajo había tenido un carácter puramente voluntarista, a cargo, principalmente, de grupos de profesores de Escuela de Magisterio y de Enseñanza Media, estando buena parte de la actividad que se realizaba más

³⁸ Junto a las Didácticas de las Ciencias Experimentales, las Ciencias Sociales, la Lengua y las Artes.

cerca de la innovación o experimentación educativa que de la investigación propiamente dicha. Sin embargo, la creación en 1984 del área de conocimiento y la nueva estructura surgida de la Ley de Reforma Universitaria posibilita la constitución en las universidades de Departamentos de Didáctica de las Matemáticas (a veces en unión de otras áreas de conocimiento próximas), la realización de programas de doctorado y, en fin, el lanzamiento de una actividad investigadora de mayor calidad e intensidad.

Parámetros objetivos para medir este incremento de la actividad investigadora en España son el creciente número de programas de doctorado de Didáctica de las Matemáticas y de tesis doctorales leídas cuyo contenido pertenece a este área, la aparición cada vez más frecuente de artículos de investigación, tanto en revistas nacionales como internacionales, y la participación activa de españoles en los principales congresos de investigación en Didáctica de las Matemáticas (en especial en los congresos anuales del Grupo P.M.E. y en el I.C.M.E. de 1988).

De todas formas, la situación actual dista mucho de ser buena y es necesario unir el esfuerzo de todas las personas interesadas (profesores de los tres niveles educativos, grupos o sociedades y autoridades educativas) para seguir adelante y progresar. En mi opinión, la mejora de la investigación en Didáctica de las Matemáticas debe apoyarse en la mejora de las condiciones de trabajo, en el fomento de encuentros nacionales especializados y en la apertura al exterior, mediante una mayor presencia activa en publicaciones o congresos internacionales, el intercambio de información y la colaboración con investigadores extranjeros.

4.7. BIBLIOGRAFIA

- BEATTIE, I. D. (1979): Children's strategies for solving subtraction-fact combinations, *Arithmetic Teacher* vol. 27.1, pág. 14-15.
- BERGERON, J. C.; HERSCOVIS, N. (1990): Psychological aspects of learning early arithmetic, en *Nesher; Kilpatrick (1990)*, pág. 31-52.
- BERGERON, J. C.; HERSCOVIS, N.; KIERAN, C. (1987): *Proceedings of the 11th international conference of the P.M.E.*, 3 vols. (Univ. de Montreal: Montreal, Canadá).
- BISHOP, A. J. (1983): Space and geometry, en *Lesh; Landau (1983)*, pág. 176-203.
- BISHOP, A. J. (1989): Review of research on visualization in mathematics education, *Focus on Learning Problems in Mathematics* vol. 11.1, pág. 7-16.
- BOOTH, L. (1984): *Algebra: Children's strategies and errors*. (NFER-Nelson: G. Bretaña).
- BROUSSEAU, G. (1983): Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* vol. 4.2, pág. 165-198.
- BROUSSEAU, G. (1986): Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* vol. 7.2, pág. 33-115.

- C.B.M.S. (1979): *Overview and analysis of school mathematics, grades K-12*. (N.C.T.M.: Reston, USA).
- CARPENTER, T. P.; MOSER, J. M.; ROMBERG, T. A. (1982): *Addition and subtraction. A cognitive perspective*. (L. Erlbaum: Hillsdale, EE. UU.).
- CENTENO, J. (1988): *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?*, colección «Matemáticas: Cultura y aprendizaje» n.º 5. (Síntesis: Madrid, España).
- CHEVALLARD, Y. (1985): *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. (La Pensée Sauvage: Grenoble, Francia).
- CLEMENTS, D. H.; BATTISTA, M. T. (en prensa): Geometry and spatial reasoning, en D. A. Grouws (en prensa): *Handbook of research on mathematics teaching* (N.C.T.M.: Reston, EE. UU.), preprint.
- COOK, T. D.; REICHARDT, C. S. (1986): *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa*. (Morata: Madrid, España).
- COXFORD, A. F. (1978): Research directions in geometry, en R. Lesh; D. Mierkiewicz (1978): *Recent research concerning the development of spatial and geometric concepts* (ERIC: Columbus, EE. UU.), pág. 323-332.
- CRESSELL, M.; GUBB, J. (1987): *The second International Mathematics Study in England and Wales*. (NFER-Nelson: G. Bretaña).
- DE CORTE, A.; VERSCHAFFELL, L. (1987): Logo: ¿Un medio para pensar?, *Logo y Educación* n.º 8, pág. 3-13.
- DIENES, Z. P. (1974): *Las seis etapas del aprendizaje en matemáticas*. (Teide: Barcelona, España).
- DONALDSON, M. (1978): *Children's minds*. (Fontana: Glasgow, G. Bretaña).
- EISENHART, M. A. (1988): The ethnographic research tradition and mathematics education research, *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 19.2, pág. 99-114.
- FREUDENTHAL, H. (1981): Major problems of mathematics education, *Educational Studies in Mathematics* vol. 12, pág. 133-150.
- FREUDENTHAL, H. (1982): Fiabilidad, validez y pertinencia - criterios de la investigación sobre el aprendizaje de la matemática, *Educational Studies in Mathematics* vol. 13, pág. 395-408.
- FURINGHETTI, F. (1991): *Proceedings of the 15th P.M.E. Conference*, 3 vols. (Universidad de Génova: Génova, Italia).
- FUSON, K. C. (1986): Teaching children to subtract by counting up, *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 17.3, pág. 172-189.
- FUYS, D.; GEDDES, D.; TISCHLER, R. (1988): *The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents*, colección «Journal for Research in Mathematics Education Monograph» n.º 3. (N.C.T.M.: Reston, EE. UU.).
- GOLDIN, G. A.; MCCLINTOCK, C. E. (1984): *Task variables in mathematical problem solving*. (Franklin Institute Press: EE. UU.).
- GUTIÉRREZ, A.; JAIME, A. (1989): Bibliografía sobre el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, *Enseñanza de las Ciencias* vol. 7.1, pág. 89-95.
- HART, K. (1981): *Children's understanding of mathematics: 11-16*. (John Murray: Londres, G. Bretaña).
- HART, K. (1984): *Ratio: Children's strategies and errors*. (NFER-Nelson: G. Bretaña).
- HART, K. y otros (1989): *Children's mathematical frameworks 8-13. A study of classroom teaching*. (NFER-Nelson: G. Bretaña).
- HERSHKOWITZ, R. (1990): Psychological aspects of learning geometry, en Neshier; Kilpatrick (1990), pág. 70-95.
- HIEBERT, J.; BEHR, M. (1988): *Number concepts and operations in the middle grades*. (N.C.T.M.: Reston, EE. UU.).
- HOFFER, A. (1983): Van Hiele based research, en Lesh; Landau (1983), pág. 205-227.
- JAIME, A.; GUTIÉRREZ, A. (1990): Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele, en S. Linares; M. V. Sánchez (1990): *Teoría y práctica en educación matemática* (Alfar: Sevilla, España), pág. 295-384.
- JOHNSON, D. C. (1980a): Types of research, en R. J. Shumway (1980): *Research in mathematics education* (N.C.T.M.: Reston, EE. UU.), pág. 20-28.
- JOHNSON, D. C. (1980b): The research process, en R. J. Shumway (1980): *Research in mathematics education* (N.C.T.M.: Reston, EE. UU.), pág. 29-46.
- KANTOWSKI, M. G. (1978): The teaching experiment and soviet studies of problem solving, en L. L. Hatfield; D. A. Bradbards (1978): *Mathematical problem solving* (ERIC: Columbus, EE. UU.), pág. 43-52.
- KERSLAKE, D. (1986): *Fractions: Children's strategies and errors*. (NFER-Nelson: G. Bretaña).
- KIERAN, C. (1990): Cognitive processes involved in learning school algebra, en Neshier; Kilpatrick (1990), pág. 96-112.
- KIERAN, C.; FILLOY, E. (1989): El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica, *Enseñanza de las Ciencias* vol. 7.3, pág. 363-379.
- KILPATRICK, J. (1981): Research on mathematical learning and thinking in the United States, *Recherches en Didactique des Mathématiques* vol. 2.3, pág. 363-379.
- KILPATRICK, J.; WIRSZUP, I. (1969): *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*, 14 vols. (N.C.T.M.: Reston, EE. UU.).
- LESH, R. (1979): Supporting research in mathematics education, en R. Lesh; W. Secada (1979): *Some theoretical issues in mathematics education: Papers from a research session* (ERIC: Columbus, EE. UU.), pág. 1-11.
- LESH, R.; LANDAU, M. (1983): *Acquisition of mathematics concepts and processes*. (Academic Press: N. York, EE. UU.).
- M.E.C. (1989): *Informe sobre la evaluación de las enseñanzas mínimas del Ciclo Medio de E.G.B.* (Servicio de Publicaciones del M.E.C.: Madrid, España).
- MASON, S. F. (1980): *Problem solving in mathematics: An annotated bibliography*. (N.C.T.M.: Reston, EE. UU.).
- MULHERN, G. (1989): Between the ears: Making inferences about internal processes, en B. Greer; G. Mulhern (1989): *New directions in mathematics education* (Routledge: Londres), pág. 29-62.
- NESHER, P.; KILPATRICK, J. (1990): *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Cambridge U.P.: Cambridge, G. Bretaña).
- PAIGE, D. D. y otros (1978): *Elementary mathematical methods*. (John Wiley & Sons: N. York, EE. UU.).
- PUIG, L.; CERDÁN, F. (1983): Resolución de problemas de matemáticas: Una bibliografía, *Enseñanza de las Ciencias* vol. 1.1, pág. 61-63.
- ROJANO, T. (1985): *De la aritmética al álgebra. Un estudio clínico con niños de 12 a 13 años de edad (Tesis doctoral)*. (CINVESTAV, Sec. Matemática Educativa: México D. F., México).

- SIEGEL, L. S.; BRAINERD, C. J. (1983): *Alternativas a Piaget*. (Pirámide: Madrid, España).
- SKEMP, R. R. (1978): Relational understanding and instrumental understanding, *Arithmetic Teacher* vol. 26.3, pág. 9-15.
- SKEMP, R. R. (1979a): *Intelligence, learning and action*. (John Wiley: N. York, EE. UU.).
- SKEMP, R. R. (1979b): Goals of learning and qualities of understanding, *Mathematics Teaching* n.º 88, pág. 44-49.
- SKEMP, R. R. (1982): Type 1 theories and type 2 theories in relationship to mathematical learning, en *T. P. Carpenter; J. M. Moser; T. A. Romberg (1982): Addition and subtraction. A cognitive perspective* (L. Erlbaum: Hillsdale, EE. UU.), pág. 183-190.
- SKEMP, R. R. (1983): The functioning of intelligence and the understanding of mathematics, en *M. Zweng y otros. (1983): Proceedings of the 4th I.C.M.E.* (Birkhauser: Boston, EE. UU.), pág. 533-537.
- SOWDER, J. (en prensa): Estimation and related topics, en *D. A. Grouws (en prensa): Handbook of research on mathematics teaching* (N.C.T.M.: Reston, EE. UU.), preprint.
- STEFFE, L. P. (1983): The teaching experiment methodology in a constructivist research program, en *M. Zweng et al. (1983): Proceedings of the 4th I.C.M.E.* (Birkhauser: Boston, EE. UU.), pág. 469-471.
- STEINER, H.-G. (1988): Theory of Mathematics Education and implications for scholarships, en *H.-G. Steiner; A. Vemandel (1988): Proceedings of the 2nd TME Conference* (Los autores: Bielefeld-Amberes, Holanda), pág. 5-20.
- TREFFERS, A. (1987): *Three dimensions*. (D. Reidel: Dordrecht, Holanda).
- USISKIN, Z. (1982): *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry*. (ERIC: Columbus, EE. UU.).
- WAGNER, S.; KIERAN, C. (1989): *Research issues in the learning and teaching of algebra* (N.C.T.M.: Reston, EE. UU.).
- WHEELER, D. y otros (1984a): Research problems in mathematics education I, *For the Learning of Mathematics* vol. 4.1, pág. 40-47.
- WHEELER, D. y otros (1984b): Research problems in mathematics education II, *For the Learning of Mathematics* vol. 4.2, pág. 39-44.
- WHEELER, D. y otros (1984c): Research problems in mathematics education III, *For the Learning of Mathematics* vol. 4.3, pág. 22-29.
- WIRSZUP, I. (1976): Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry, en *J. L. Martin (1976): Space and geometry* (ERIC: Columbus, USA), pág. 75-97.

**ANEXO
DIRECCIONES UTILES**

Editoriales y Librerías

Academia Press

24-28 Dual Road
London NW1 7DX (G. Bretaña)

Cambridge Univ. Press

The Pitt Building; Trumpington Street
Cambridge CB2 1RP (Gran Bretaña)

Cassell

Artillery House
Artillery Row
London SW1P 1RT (G. Bretaña)

Franklin Institute Press

Boston Spa. Wetherby
West Yorkshire LS23 TBQ (G. Bretaña)

Kluwer Academic Publ. Group

P. O. Box 322
3300 AH Dordrecht (Holanda)

Lawrence Erlbaum

365 Broadway
Hillsdale, NJ 07642(USA)

National Council of Teachers of Mathematics (N.C.T.M.)

Ver la sección de sociedades

NFER-Nelson

Darville House, 2 Oxford Road East
Windsor, Berkshire SL4 1DF (Gran Bretaña)

Springer Verlag

175 Fifth Avenue
New York, NY 10010 (USA)