UNIVERSIDAD DE VALENCIA

ESCUELA UNIVERSITARIA DEL PROFESORADO DE EDUCACION GENERAL BASICA

# Papeles de Enseñanza de la Matemática

DE LAS REDES – 2

nº 2 – Junio, 1.979

Estos papeles son el fruto del trabajo de:

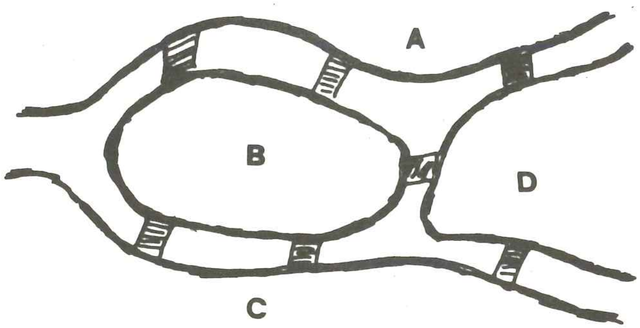
FERNANDO CERDAN PEREZ (*)
ALEJANDRO FERNANDEZ LAJUSTICIA (*)
EDUARDO GALAN PELAEZ (*)
BERNARDO GOMEZ ALFONSO (*)
RAMON GRANELL TRENCO (*)
GREGORIA GUILLEN SOLER (*)
ANGEL GUTIERREZ RODRIGUEZ (*)
ADELA JAIME PASTOR
LUIS PUIG ESPINOSA (*)

(*) Especialmente responsables de este número.

# REDES EULERIANAS

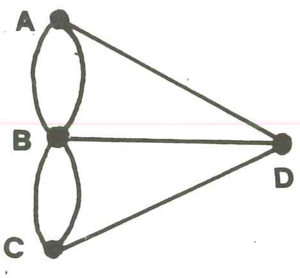
## RESEÑA HISTORICA SOBRE LAS REDES EULERIANAS

El origen de este tipo de redes se encuentra en el célebre "problema de los puentes de Königsberg". Königsberg es una ciudad, que era alemana en el siglo XVII (en la actualidad es rusa), por la cual pasa el río Pregel, describiendo un recorrido similar al de la figura, con dos islas que estaban unidas a las orillas por siete puentes.




El Pregel a su paso por Königsberg.

Los habitantes de la ciudad inventaron un pasatiempo consistente en intentar pasear a través de los siete puentes, pero sin pasar dos veces por ninguno de ellos. Este problema permaneció sin solución y desbordó el ámbito de las curiosidades para pasar a interesar a los matemáticos. Fue resuelto en 1736 por Leonhard Euler, matemático suizo que vivía en Königsberg, el cual dio una teoría que abarcaba a todos los problemas similares a éste; la demostración de Euler (más complicada que la que se da actualmente) puede verse en [20]. Es inmediata la solución del problema si el mapa de la figura anterior se transforma en una red en la que los puentes son los arcos (pues se trata de recorrer puentes) y las zonas de tierra son los vértices, como se ve en la figura inferior.



## INTRODUCCION

Aquí comienza un estudio más profundo de las redes planas. Vamos a dedicarnos al problema de recorrer las redes, y en particular de recorrer todos sus arcos. Este es un problema con claras aplicaciones en la vida real (redes de transporte, organización del tráfico en una ciudad, inspección de carreteras, etc.) y con un atractivo muy grande para los niños desde el punto de vista recreativo; ¿quién no ha hecho el pasatiempo de los sobres? (fig. 1)

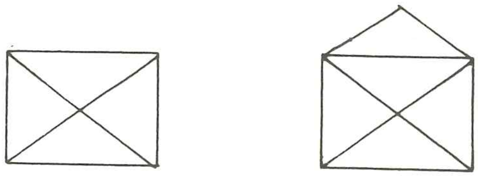


Fig.1.- El pasatiempo de los sobres consiste en tratar de dibujar sin levantar el lápiz un sobre cerrado, lo cual es imposible; basta abrir el sobre para que el problema tenga solución.

Anteriormente, nuestros alumnos han aprendido a distinguir las partes de una red, y sus tipos, así como las diferentes clases de redes. Ahora, pretendemos que empiecen a relacionar unas cosas con otras y que piensen en algunas propiedades útiles que aparecerán.

Puesto que la idea que más motiva a los niños es el juego de "recorrer todos los arcos de la red sin levantar el lápiz ni pasar dos veces por el mismo arco", sólo trabajaremos con redes conexas.

## DEFINICIONES

- Una red conexa es de recorrido no simple, o no euleriana, cuando no es posible recorrer todos sus arcos sin pasar dos veces por alguno de ellos o sin seguir un camino continuo.

- Una red conexa es de recorrido simple, o euleriana, cuando es posible recorrer todos sus arcos sin pasar dos veces por ninguno de ellos, siguiendo un camino continuo.

En las redes eulerianas pueden darse dos casos:

-Cuando el principio y el final del recorrido son el mismo vértice, se dice que la red tiene un circuito euleriano.

-Cuando el principio y el final del recorrido son dos vértices diferentes, se dice que la red tiene un camino euleriano.

Las tres primeras actividades de este capítulo, están dirigidas a poner en evidencia los diferentes tipos de redes que vamos a manejar. También (en 2-d) se distingue entre las redes conexas y no conexas, quedando claro que una red no conexa, por el hecho de estar formada por varios "trozos", no puede recorrerse sin levantar el lápiz.

Otro punto para tener en cuenta es que en las actividades A-1 y A-2 se habla de "dibujos"; los alumnos deben llegar a ver que cualquier dibujo normal (estilizado) puede ser considerado como una red. Una vez que ha sido entendida esta diferencia, el profesor debe dar las definiciones (*) de los distintos tipos de redes, para poder pasar a la actividad A-4.

Las propiedades de ser euleriana y de tener un camino o un circuito eulerianos, vienen dadas por los teoremas siguientes (que serán demostrados más adelante):

T-1 Una red tiene un circuito euleriano si y sólo si todos sus vértices son de orden par.

T-2 Una red tiene un camino euleriano si y sólo si tiene exactamente dos vértices de orden impar.

T-3 Una red es no euleriana si y sólo si tiene más de dos vértices de orden impar.

---

(*) Realmente es el alumno quien debe definir los distintos tipos, es decir, dar las características que diferencian a uno de otro, por lo que el profesor se limitará a "poner nombre" a esas clases de redes.

De estos teoremas se pueden deducir dos consecuencias importantes de cara a la construcción práctica de caminos o circuitos eulerianos:

1ª) Si una red tiene un circuito euleriano, para construirlo, se puede empezar en cualquier vértice de la red (que es el vértice en el que debe acabar el circuito).

2ª) Si una red tiene un camino euleriano, para construirlo, hay que empezar en uno de los vértices impares y terminar en el otro.

## DEMOSTRACIONES DE LOS TEOREMAS

### Teorema T-1.-

i) Sea R una red que tiene un circuito euleriano C, el cual empieza y termina en el vértice A.

Sea B otro vértice distinto de A. Como el circuito no termina en B, cada vez que se llega a B por un arco, hay que salir de B por otro; es decir, cada vez que pasamos por B "ocupamos" dos arcos que tocan a B (fig.2). Por lo tanto, como

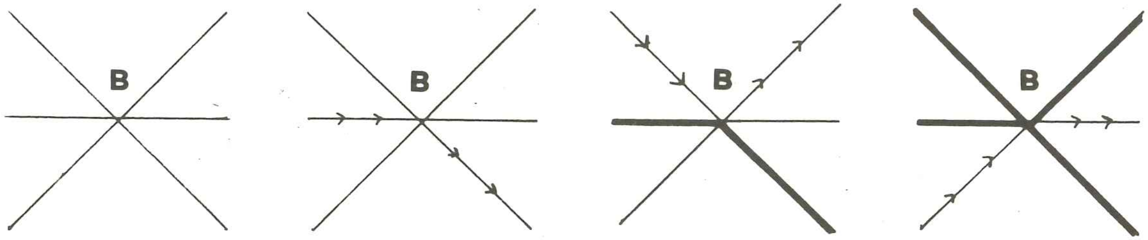
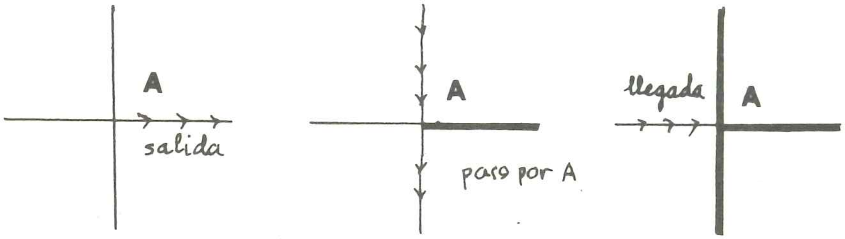



Fig.2.- Cada vez que se pasa por B, se ocupan dos arcos, luego no es posible terminar el recorrido C en el vértice B.

al final hemos pasado por todos los arcos que tocan a B, el orden de B será o(B) = 2 x (nº de veces que se pasa por B), luego el orden de B es par.

Así pues, todo vértice distinto de A es de orden par; como una red no puede tener un sólo vértice de orden impar, resulta que también A es de orden par.

ii) Sea R una red cuyos vértices son todos de orden par. Sea A un vértice cualquiera, elegido al azar, en el que empezamos un recorrido C, cualquiera. Este recorrido lo terminaremos cuando llegue el momento en que no podamos salir de un vértice por ningún arco "libre". Este último vértice debe ser necesariamente A pues todos los vértices son de orden par, luego si llegamos a un vértice B ($B \neq A$) podemos salir de él, y habremos ocupado dos arcos (luego de los arcos que tocan a B quedan libres o cero, o un número par de ellos (fig.2)), es decir, que no podemos terminar el recorrido C en ningún vértice que no sea A (sin embargo, al salir de A, ocupamos un vértice (fig.3a), y cada vez que pasamos por A ocupamos dos (fig.3b), luego al final nos quedará un solo arco disponible, que usaremos para llegar a A, pero no podremos seguir adelante (fig.3c)).




-a- -b- -c-

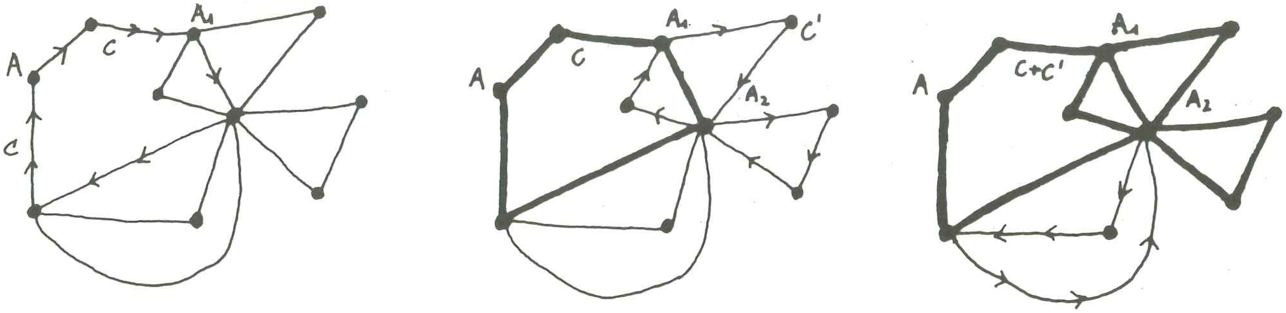
Fig.3

Si este recorrido C pasa por todos los arcos de R, ya tenemos un circuito euleriano; en caso contrario, algún vértice $A_1$ de C toca a un arco libre (fig.4a). Tomando $A_1$ como punto de partida, podemos construir otro recorrido C' que por las mismas razones que antes debe terminar en $A_1$ (fig.4b). Nótese que todos los vértices siguen teniendo o bien cero, o bien un número par de arcos libres.

Intercalando C' en C obtenemos un nuevo recorrido que llamaremos C + C', más largo que el anterior. Si todavía queda algún vértice $A_2$ con arcos sin recorrer, se repite la operación (fig.4c), y así tantas veces como haga falta, hasta recorrer todos los arcos (esto se consigue pues hay un número finito de arcos).

Al final, habremos obtenido un circuito euleriano que empieza y termina en A.

ooooooooooooooo




- a -　　　　- b -　　　　- c -

Fig. 4

Nótese que esta segunda parte de la demostración es constructiva, es decir, que da un procedimiento para construir un circuito euleriano; este procedimiento es el que se reflejará en las actividades correspondientes.

Por otra parte, se destaca como esencial el hecho de que, por ser todos los vértices de orden par, el recorrido debe empezar y terminar en el mismo vértice.

Teorema T-2.-

i) Sea una red R con un camino euleriano de extremos A y B. Sea C otro vértice cualquiera distinto de A y de B. Repitiendo el razonamiento hecho en el teorema T-1, llegamos a que C debe ser de orden par.

Vamos a estudiar el vértice A: A toca al arco que usamos para empezar el recorrido, y cada vez que pasamos por A usamos otros dos arcos, luego
o(A) = 1 + 2 x (nº de veces que se pasa por A), es decir que A es de orden impar.

Análogamente, cada vez que pasamos por B usamos dos arcos, y además usamos un arco cuando llegamos a B al final del recorrido, luego
o(B) = 2 x (nº de veces que se pasa por B) + 1, es decir que B es de orden impar

Por tanto, la red tiene exactamente dos vértices de orden impar, que son el principio y el final del camino euleriano.

ii) Sea R una red cuyos vértices son todos de orden par salvo dos, A y B. Como la red es conexa, podemos hacer un recorrido que empiece en A y termine en B. Si quitamos los arcos usados, la red inicial tiene varias subredes (cada una de ellas conexa) en las que todos los vértices son de orden par; por el teorema T-1, estas subredes tienen un circuito euleriano; uniendo estos circuitos al recorrido inicial, hemos obtenido un camino euleriano, cuyos extremos son los dos vértices de orden impar.

ooooooooooooooo

También esta demostración da un procedimiento para construir un camino euleriano, que evidentemente es similar al usado para los circuitos.

Además, queda claro que se puede construir el circuito empezando y terminando en los vértices de orden impar. Falta ver que es imposible construirlo empezando en un vértice de orden par:

Si el vértice inicial, A, es de orden par, 2n, resulta que a A llegan 2n arcos diferentes. Al salir de A usamos uno, luego quedan 2n-1 arcos diferentes libres.

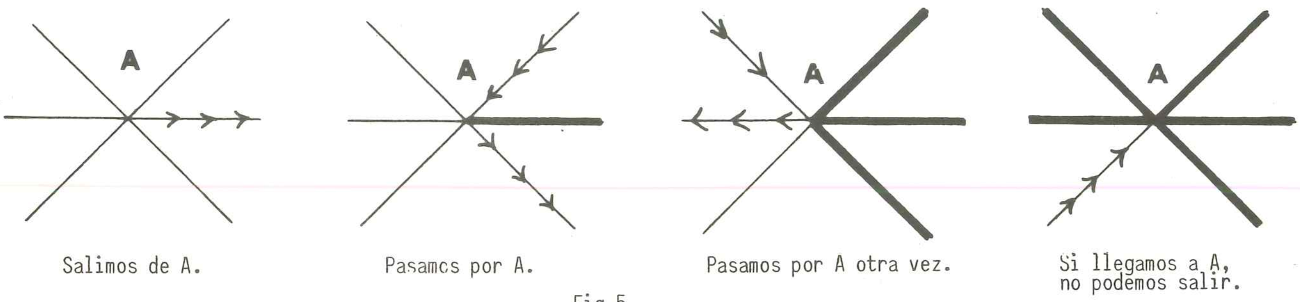


Fig.5

Si pasamos n-1 veces por A, como cada vez ocupamos dos arcos, al final nos queda sólo un arco libre. Entonces si pasamos por ese arco, llegamos a A y no se puede salir, luego el recorrido no es un camino euleriano (pues empieza y acaba en el mismo vértice); si no, ese arco no se recorre, luego el recorrido tampoco es un camino euleriano (fig.5).

Este detalle es importante, y debe quedar reflejado en las actividades. También es conveniente reflejar que si una red tiene un circuito euleriano, éste no es único, pues se puede empezar por cualquier vértice, e incluso empezando por el mismo vértice, se puede construir generalmente varios circuitos distintos. Sin embargo, un camino euleriano sólo puede empezar y terminar en los vértices de orden impar, aunque, igual que antes, empezando por el mismo vértice podemos construir casi siempre varios caminos distintos.

Teorema T-3

i) Sea R una red con más de dos vértices de orden impar ( es decir con 4,6,8, etc. vértices de orden impar). Esta red no puede tener un circuito euleriano (por el teorema T-1), ni tampoco un camino euleriano (por el teorema T-2), luego no puede ser red euleriana.

ii) Si R es una red no euleriana, no puede tener un circuito euleriano (por el teorema T-1), luego tiene vértices de orden impar; por otra parte, tampoco puede tener un camino euleriano, luego (por el teorema T-2) no tiene exactamente dos vértices de orden impar; sabemos que ninguna red tiene un solo vértice de orden impar, luego R debe tener más de dos vértices de orden impar.

ooooooooooooooo

Para comprobar que una red es euleriana, basta con encontrar un recorrido adecuado (camino o circuito); pero para comprobar que no es euleriana tenemos la dificultad de que hay que ver que ninguno de los posibles recorridos que hagamos va a ser un camino o un circuito eulerianos. Es importante que los alumnos vean que el encontrar un recorrido no euleriano no garantiza que la red no sea euleriana, aunque encontrar un recorrido euleriano sí garantiza que la red sea euleriana. Aquí tenemos una razón de mucho peso para fijarse en los órdenes de los vértices en vez de empezar a trazar recorridos, cuya variedad (y por tanto su número) puede ser enorme en una red que sea algo grande.

La parte i) del teorema T-3 puede probarse de otra forma que es más práctica de cara a su comprensión por los alumnos, pues no se basa en las relaciones lógicas deducidas de unas implicaciones, sino en el dato de que la red tiene más de dos vértices de orden impar:

La red debe tener por lo menos cuatro vértices A, B, C, D de orden impar. Ya sabemos que cada vez que pasamos por un vértice, ocupamos dos de los arcos que lo tocan; si tenemos que recorrer todos los arcos de la red, pasaremos una o varias veces por A, B, C y D (si sus órdenes son mayores que uno), o ninguna vez (si sus órdenes son uno), hasta conseguir que cada vértice A, B, C y D disponga sólo de un arco libre; cuando intentemos ocupar uno de estos arcos, está claro que no podremos salir de ese vértice, por lo que se ha terminado el recorrido y nos hemos dejado por lo menos dos arcos sin ocupar. Esto quiere decir que es imposible construir un recorrido euleriano en esa red.

La actividad A-4 es un primer encuentro con el problema de caracterizar las redes según el orden de sus vértices. Las sugerencias que se hacen son muy pocas, por lo que es muy probable que la mayoría de los alumnos no sea capaz de dar respuestas satisfactorias. Desde esta actividad hasta la A-10, se van dando cada vez más datos para ayudar a resolver las cuestiones planteadas en A-4. En las actividades A-6 y A-7 se dirige la atención a los cambios que se producen en una red si pasa de un tipo a otro, y a notar que el añadir un arco transforma un vértice de orden impar en un vértice de orden par (y viceversa). Las continuas vueltas a A-4 tienen como finalidad que el alumno se replantee las cuestiones cada vez que se recibe una nueva información, para conseguir así que llegue al resultado con la menor ayuda posible.

Por último, la actividad A-9 da prácticamente la solución buscada, la cual es expuesta en los enunciados de A-10.

El profesor debe cuidar de que los alumnos insistan suficientemente en cada uno de los pasos, sin dejar que se rindan demasiado pronto por el afán de tener rápidamente la solución.

Las actividades desde la A-11 a la A-14 están dirigidas a que el alumno note: 1º) que el circuito o camino euleriano de una red no es único, 2º) que para trazar un circuito, se puede empezar en cualquier vértice de la red, 3º) que para trazar un camino, hay que empezar y terminar en los dos vértices de orden impar.

Al empezar este grupo de actividades, es conveniente que el profesor oriente a los alumnos sobre cómo dibujar los recorridos, para que, una vez completados, sea posible saber cómo es el recorrido. En la figura 6 se ve una red, y un circuito suyo. Marcando el vértice inicial A, se sigue facilmente todo el recorrido.

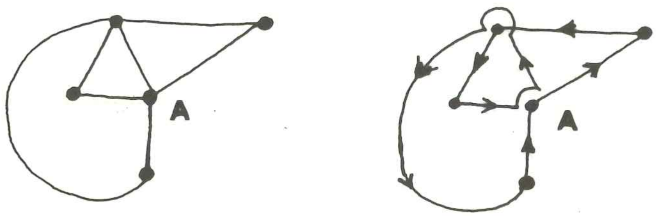


Fig.6

Por supuesto, este procedimiento no es el único (también se pueden numerar los arcos o escribir la cadena de vértices por los que se pasa), aunque pensamos que es muy claro y comprensible.

En esta parte del tema, hay mayor dificultad para hacer sugerencias en las actividades sin que esas sugerencias sean la solución del problema, por lo cual las preguntas que se hacen especialmente en A-13 son muy amplias y permiten una discusión en clase, la cual, bien dirigida por el profesor, dará mucho mejor fruto que las actividades escritas. Las actividades A-11 y A-12 se dirigen a comprobar qué extremos se pueden tomar para describir un camino o un circuito eulerianos, y no tienen dificultad; pero la actividad A-13 se dirige a ver qué vértices no hay que tomar como extremos de un camino euleriano; hay que llegar a que los alumnos se convenzan del resultado por sus propias experiencias y a que se den cuenta de los motivos que lo producen. Una vez claros estos puntos, según la edad de los alumnos, y según el criterio del profesor puede pedírseles que hagan un razonamiento completo de cada uno de los diversos casos (que seria demostrar los tres teoremas anteriores).

La actividad A-15 expone el método para constuir caminos o circuitos eulerianos en redes complicadas, que es el mismo que seguía en las demostraciones de los teoremas anteriores. Puede ocurrir que los alumnos confeccionen, a partir de sus propias experiencias,otros métodos para construir estos recorridos eulerianos; de ningún modo hay que prohibirles que usen esos métodos, si son correctos.Es más, deben ser expuestos en clase (tanto si son correctos como si no lo son) por los propios alumnos, para que sus compañeros descubran los posibles errores, tal vez los mejoren, y cada uno de ellos utilice después el procedimiento que más le guste.

La actividad A-18 no es más que una curiosidad dedicada a aplicar los conocimientos adquiridos sobre el número de arcos que llegan a cada vértice de la red.La demostracion es sencilla:

(a)--Si el vértice de la red es un punto de corte de varias líneas del polígono, pero no un vértice del polígono, cada línea proporciona a ese vértice dos arcos.Luego su orden es o(v) = 2 x (nº de líneas que se cortan en v) ,esto es un número par.

(b)--Si el vértice de la red es un vértice del polígono, de él salen dos líneas, es decir,dos arcos.Además, si el polígono no es regular puede que por ese vértice pase alguna otra línea, luego, por (a) o(v) = 2+2x(nº de líneas que pasan por v), esto es un número par.

La actividad A-19 es otra aplicacion de las redes.En este caso, hay que transformar cada puerta en un arco y cada habitación en un vértice (no hay que olvidarse del vértice que representa el rellano de la escalera).

La actividad A-20 es similar a la A-19.En este caso, hay que tener cuidado con el vértice que representa el exterior de la figura. En Fig.7 se ve cómo resolver el primer dibujo.

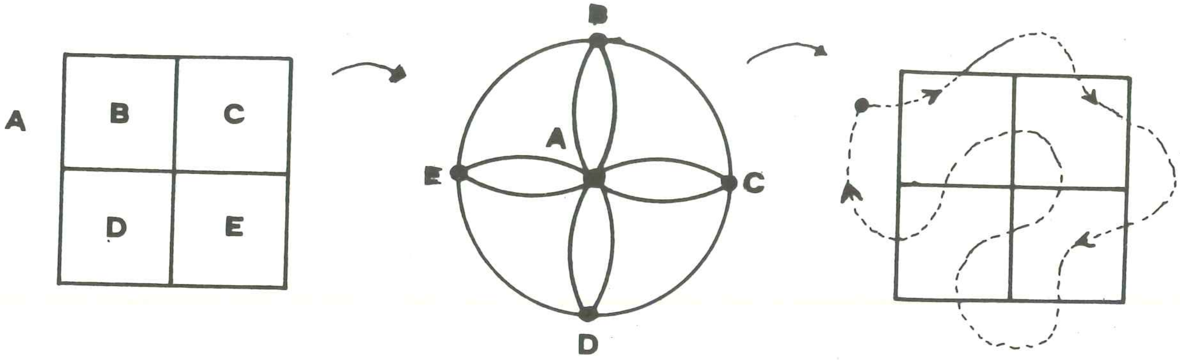


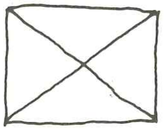

Fig.7

Sólo hay que buscar un circuito euleriano en esta red: A –B –A –C –A –E –A –D –E –C –B –D –A y pasarlo al diagrama original.

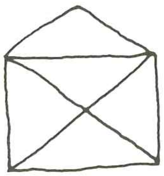
## ACTIVIDADES

A-1 Haz dibujos sin levantar el lápiz del papel, ni pasar dos veces por la misma línea. Intenta hacer unos que empiecen y acaben en el mismo punto, y otros que lo hagan en puntos diferentes.

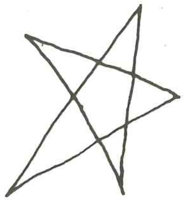
A-2 Trata de recorrer los siguientes dibujos (redes) sin levantar el lápiz del papel, ni pasar dos veces por el mismo arco. Agrúpalos según que hayas conseguido hacerlo o no.



– a –



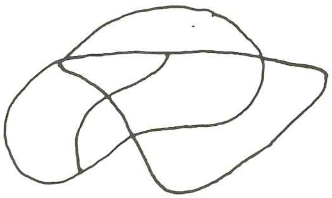
– b –



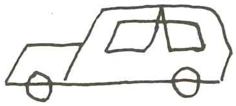
– c –

– d –

– e –

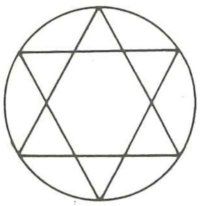


– f –

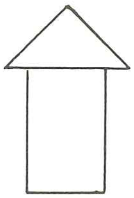


– g –

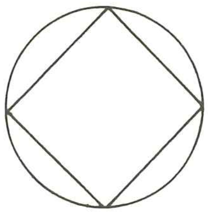
– h –



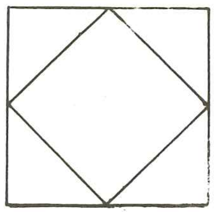
– i –



– j –



– k –



– l –

A-3 Toma las redes del ejercicio anterior que has podido recorrer sin levantar el lápiz ni pasar dos veces por el mismo arco. Señala el vértice donde has empezado el recorrido y el vértice donde lo has acabado. Separa las redes en las que estos vértices son diferentes de aquéllas en las que son el mismo.

DEFINICIONES. Una red es de recorrido simple o euleriana, cuando es posible recorrer todos sus arcos sin pasar dos veces por ninguno de ellos, siguiendo un camino continuo.

Cuando el principio y el final de este recorrido son el mismo vértice, se dice que la red tiene un circuito euleriano.

Cuando el principio y el final de este recorrido son dos vértices diferentes, se dice que la red tiene un camino euleriano.

A-4 Construye las redes descritas en la tabla siguiente. Trata de ver de qué tipo son, según las definiciones dadas antes.

| Red nº | Nº vértices de orden 1 | Nº vértices de orden 2 | Nº vértices de orden 3 | Nº vértices de orden 4 | Nº vértices de orden 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 2 | 2 | 2 | 0 |
| 3 | 4 | 3 | 2 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 4 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 4 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 0 | 6 | 0 | 1 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 4 | 1 | 0 |
| 8 | 0 | 2 | 4 | 1 | 0 |

A la vista de la tabla, y sabiendo de qué tipo es cada red, ¿ves alguna relación entre los números de la tabla correspondientes a las redes del mismo tipo? ¿Sabrías decir, sólo con ver la tabla (sin construir las redes), de qué tipo es cada red? Si has dado respuestas correctas, pasa la ejercicio A-10, y si no, pasa al A-5.

A-5 Amplía la tabla anterior uni'endole los valores de todas las redes que has clasificado hasta ahora. Reordénala poniendo juntas las redes de cada tipo (no euleriana, con circuito, o con camino eulerianos). Intenta contestar otra vez a la segunda parte de A-4. Si lo consigues pasa a A-10, si no, pasa a A-6.

A-6 Toma una red con camino euleriano de la tabla. Añádele los arcos necesarios para que el camino se transforme en un circuito. Observa en qué se diferencian los valores de la tabla de estas dos redes, y los cambios que se han producido. Repite esto con otras redes con camino euleriano.

A-7 Toma una red no euleriana de la tabla. Añádele los arcos necesarios para que la red tenga un camino euleriano. Observan en qué se diferencian los valores de la tabla de estas dos redes, y los cambios que se hana producido. Repite esto con otras redes no eulerianas.

A-8 Observa los resultados de A-6 y A-7 e intenta contestar a A-4. Si lo consigues pasa a A-10, y si no, pasa a A-9.

A-9 Con todas las redes que has utilizado hasta ahora tienes una tabla como la de A-4. Con esas redes construye esta otra tabla, poniendo juntas las redes del mismo tipo.

| Red nº | Nº vértices de orden par | Nº vértices de orden impar |
|---|---|---|
| | | |

Una vez terminada contesta a las preguntas de A-4.

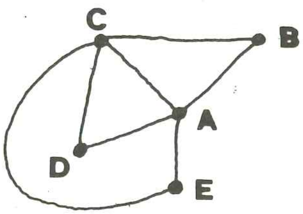
A-10 Completa los siguientes enunciados:

- Si todos los vértices de una red son de orden ....., esa red posee un circuito euleriano.

- Si una red tiene ..... vértices de orden ....., y los demás son de orden ....., la red posee un camino euleriano.

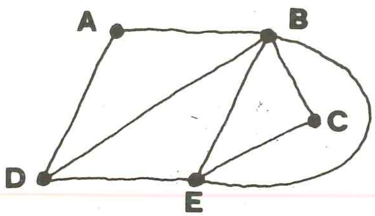
- Si una red tiene más de ..... vértices de orden ....., esa red no es euleriana.
- Si una red posee un ..... euleriano, todos sus vértices son de orden .....
- Si una red posee un ..... euleriano, todos sus vértices menos ..... son de orden ......
- Si una red tiene ..... de dos vértices de orden ....., entonces no es euleriana.

A-11 Comprueba que la red tiene un circuito euleriano. Intenta describir un circuito euleriano empezando en el vértice A. Haz lo mismo empezando en el vértice B, C, D y E. ¿Has podido dibujarlo siempre? ¿Qué diferencia hay entre estos cinco circuitos? ¿Puedes construir otros circuitos que sean distintos de los que has dibujado antes?




Repite este ejercicio con otras redes con circuito euleriano que te inventarás tú.

A-12 Comprueba que la red tiene un camino euleriano. ¿Cuáles son sus vértices de orden impar? Intenta construir un camino euleriano que empiece y termine en los dos vértices de orden impar. Intenta construir otros caminos diferentes que tengan los mismos extremos.



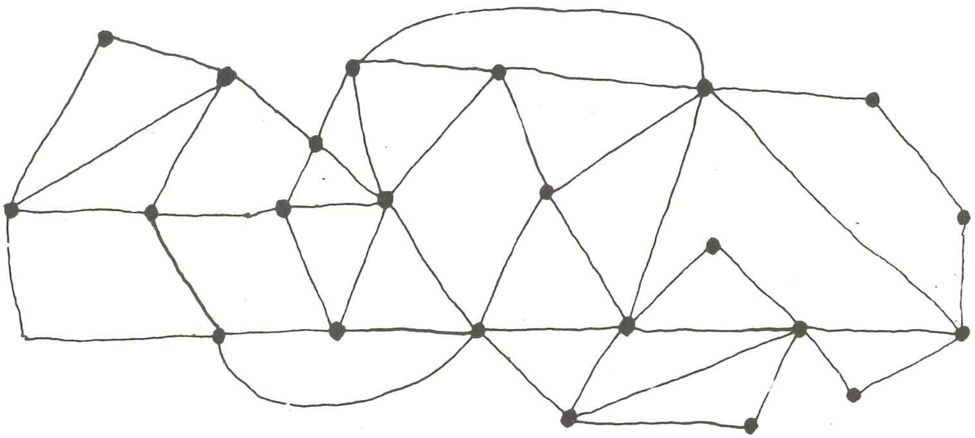

A-13 Toma la red anterior; intenta construir un camino euleriano que empiece en un vértice de orden par. ¿Puedes hacerlo? ¿Por qué?
Dibuja tú mismo otras redes con camino euleriano y repite con ellas las actividades A-12 y A-13. No las dibujes muy complicadas.

A-14 Así pues, de las actividades anteriores puedes deducir que:

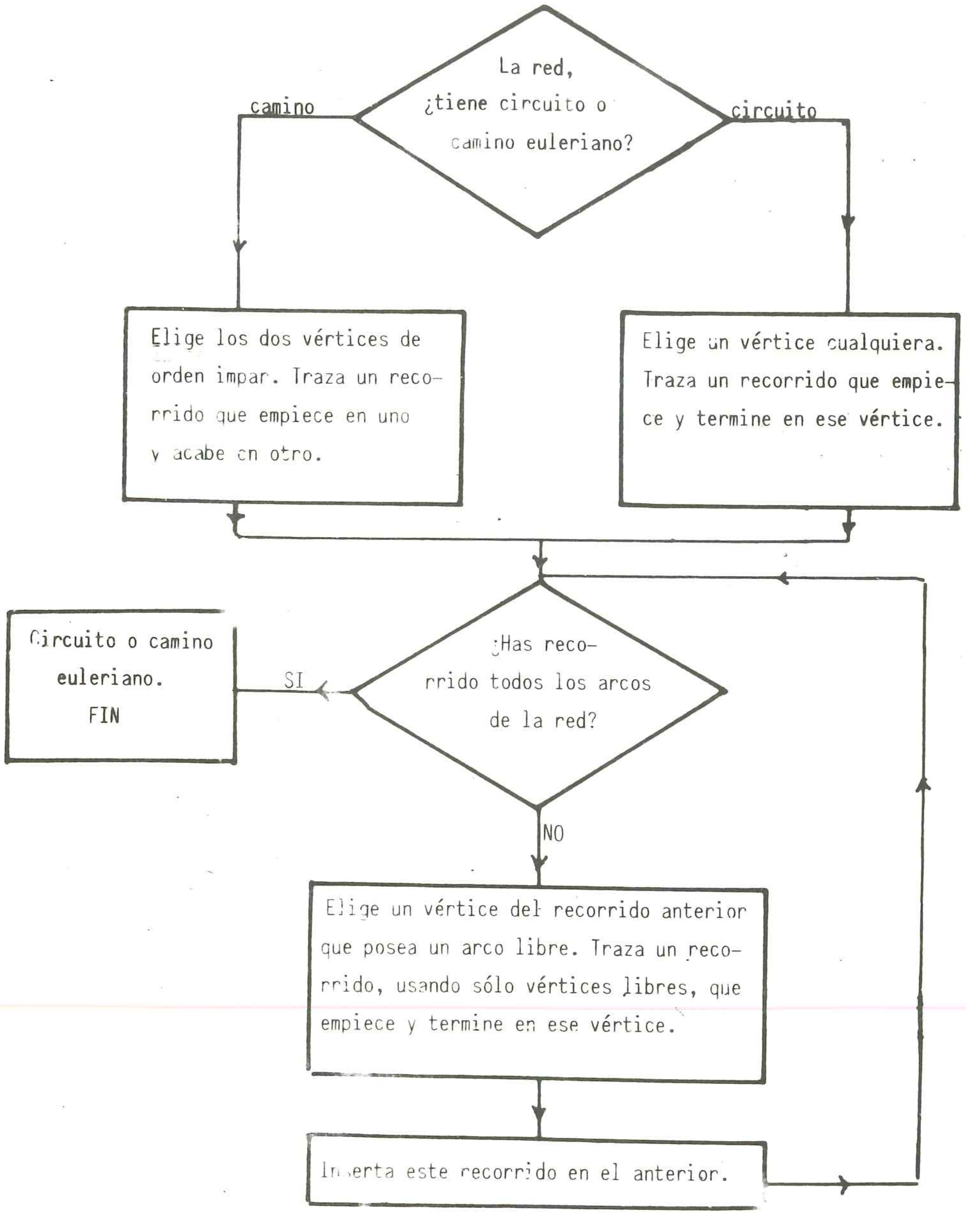
- En una red con circuito euleriano, ..... vértice puede ser el origen de varios circuitos eulerianos.
- En una red con camino euleriano, los vértices de orden ..... son los extremos de todos los caminos que puedas dibujar.

Construye redes eulerianas a tu gusto y comprueba en ellas estas dos afirmaciones.

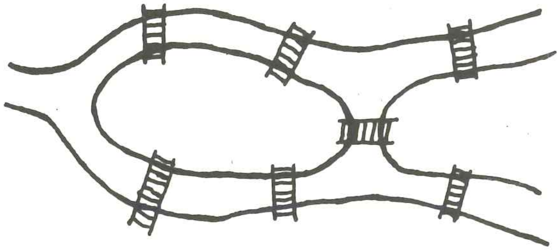
A-15 Ya sabes cuándo una red es euleriana. Pero, construir un circuito o un camino eulerianos puede ser difícil si la red es grande, como la que ves aquí.



Trata de construir un circuito o camino euleriano en esta red siguiendo las instrucciones del organigrama de la página siguiente. Después invéntate más redes eulerianas y practica con ellas.


La red, ¿tiene circuito o camino euleriano?
camino
circuito
Elige los dos vértices de orden impar. Traza un recorrido que empiece en uno y acabe en otro.
Elige un vértice cualquiera. Traza un recorrido que empiece y termine en ese vértice.
¿Has recorrido todos los arcos de la red?
SI
Circuito o camino euleriano. FIN
NO
Elige un vértice del recorrido anterior que posea un arco libre. Traza un recorrido, usando sólo vértices libres, que empiece y termine en ese vértice.
Inserta este recorrido en el anterior.

A-16 Resuelve el problema de los puentes de Königsberg, del que te habrá hablado tu profesor. Recuérdalo:

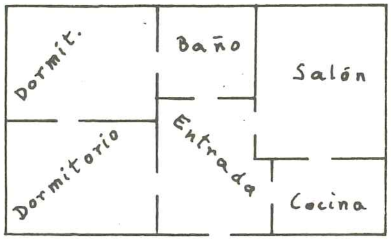


Sobre el río Pregel hay siete puentes que unen las dos islas con las orillas; hay que recorrer los siete puentes sin pasar dos veces por ninguno de ellos.

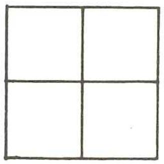
A-17 Si no has encontrado ningún recorrido, ¿crees que añadiendo un puente, existiría? ¿Dónde lo construirías? ¿Podrían hacer el recorrido todos los habitantes de la ciudad?

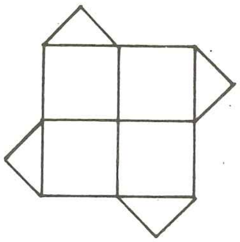
A-18 Dibuja varios polígonos estrellados, y comprueba que todos son redes eulerianas, cuyos vértices son todos los puntos en los que se cortan varias líneas. Trata de demostrar que cualquier polígono estrellado es una red euleriana.

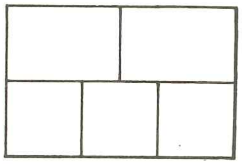
A-19 Mira si en este plano de una casa es posible recorrerla, pasando por todas las puertas una sóla vez.




A-20 Aquí tienes algunos dibujos. Trata de trazar una línea continua que pase por todos los segmentos una vez y sólo una.







# REDES HAMILTONIANAS

## INTRODUCCION

El problema que se va a tratar aquí, se parece al de las redes eulerianas, que apareció en otro sitio. Allí había que recorrer todos los arcos de una red, pasando una sola vez por cada una de ellos. Ahora, la atención va a centrarse en los vértices en lugar de en los arcos. Ello es consecuencia de la traducción al lenguaje de las redes de problemas como los siguientes:

- Un viajante tiene que recorrer varias ciudades, y desea pasar sólo una vez por cada ciudad; su problema, a la vista del mapa de carreteras, es decidir qué ruta debe seguir para pasar sólamente una vez por cada ciudad.

- En un museo es lógico plantearse si se puede hacer un recorrido de todas las salas sin necesidad de pasar dos veces por ninguna de ellas.

Otros problemas, que aparecen en las cadenas de producción que fabrican diversos productos, también conducen, como se podrá ver, a la búsqueda,en las redes que representan las posibles alternativas de ordenación en la elaboración de los productos, de recorridos similares.

En lenguaje de redes, esto se traduce en encontrar un recorrido que pase por todos los vértices de la red (ciudades, salas, productos), sin levantar el lápiz, ni pasar dos veces por ninguno de ellos.

## DEFINICIONES

- Una red es hamiltoniana (*)si hay algún recorrido continuo que pasa por todos sus vértices una sola vez.

---

(*) El nombre procede del matemático irlandés William Hamilton (1805-1865) que dio un gran impulso a la teoría de redes, al resolver algunos problemas y juegos que se ajustan a este modelo de red. (13)

Hay dos tipos de red hamiltoniana:

- Si el recorrido empieza y termina en el mismo vértice, la llamaremos red con circuito hamiltoniano.

- Si el recorrido empieza y termina en diferentes vértices, la llamaremos red con camino hamiltoniano.

Aunque no existen teoremas generales que determinen a priori si una red es hamiltoniana o no, sí que puede darse un procedimiento para construir todos los caminos y circuitos hamiltonianos que posea una red concreta. Este procedimiento consiste en un examen metódico y exhaustivo de posibilidades, que desemboca en la obtención de todos los recorridos que pueden hacerse a partir de un vértice dado. La reiteración del procedimiento a partir de otros vértices, cuando sea necesario, agota el examen de la red, pudiendo concluirse si es hamiltoniana o no por mera consideración de los recorridos obtenidos.

Como siempre que se quiere estudiar posibilidades, es práctico utilizar diagramas en árbol. Mostraremos cómo se hace mediante un ejemplo.

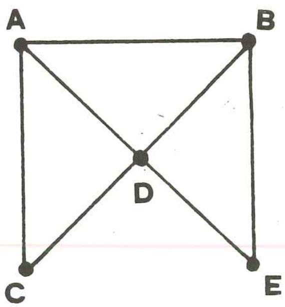
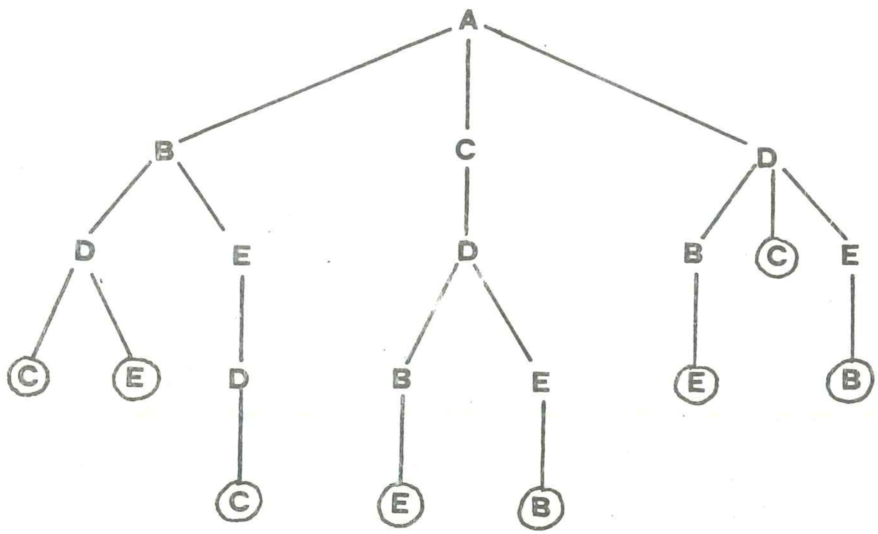


Fig.1

En la red de la figura 1, hemos designado cada vértice con una letra. Vamos a obtener todos los recorridos que empiecen en el vértice A. La idea es indicar todos los vértices a los que se puede ir desde cada uno, teniendo en cuenta que, en cada rama del árbol, no debe haber ningún vértice repetido. Según esto, empezando en A, se obtiene el siguiente árbol:




Los círculos indican que ya se ha terminado el recorrido, pues desde ese vértice no se puede ir a ninguno que no se haya usado antes. Los recorridos válidos son los que utilizan los cinco vértices: (1) A-B-E-D-C; (2) A-C-D-B-E; (3) A-C-D--E-B; de ellos, el (1) y (3) son circuitos, pues del vértice final se puede volver directamente al A, pero no así en (2), luego (2) es un camino hamiltoniano. En la figura 2 se ve estos tres recorridos.

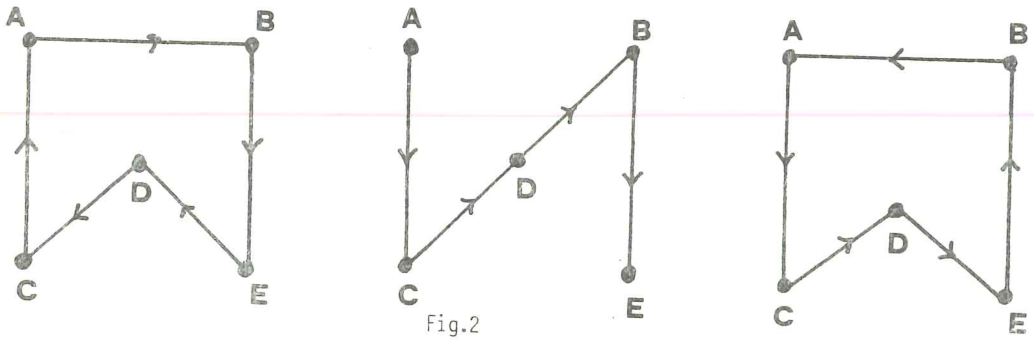



Fig.2

Por simetría, empezando en B, se obtendrían también dos circuitos y un camino hamiltonianos (fig.3).

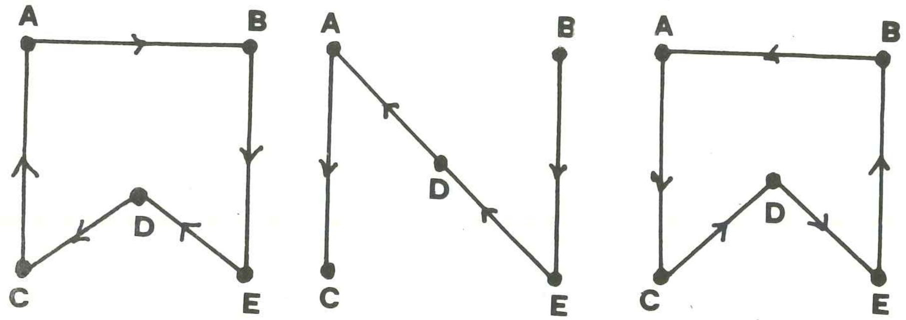
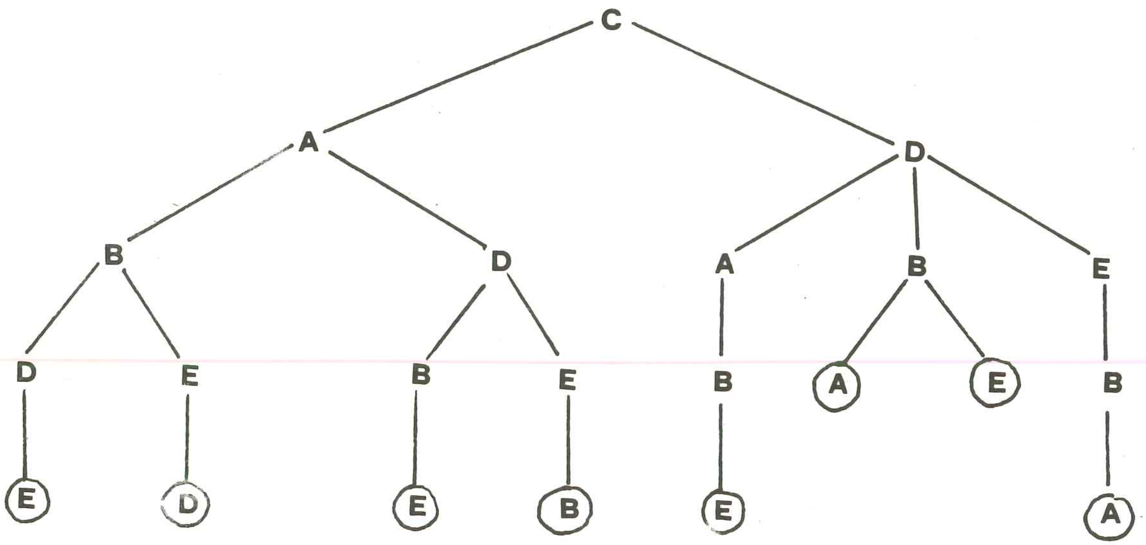



Fig.3

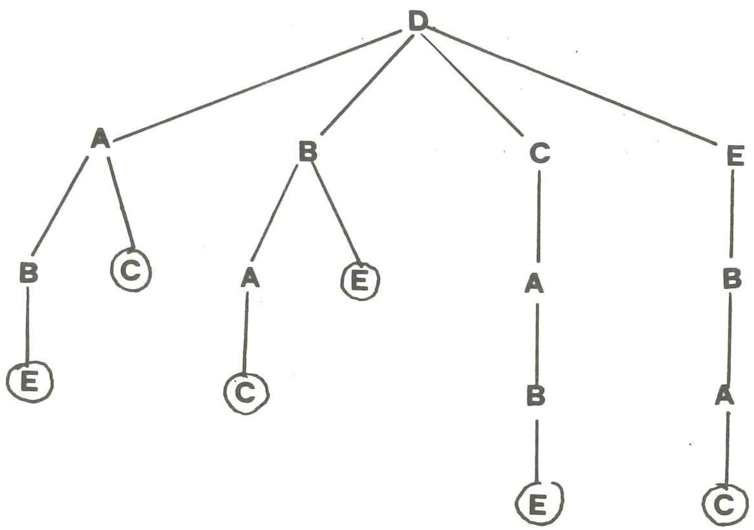
Empezando en C se obtiene el árbol:



Es decir que se obtiene seis recorridos hamiltonianos, de los cuales dos son circuitos y los otros son caminos.

Por simetría con C, empezando en E, se obtiene cuatro caminos y dos circuitos hamiltonianos.

Por último, empezando en D, se obtiene el árbol:




De este árbol se deduce que, empezando en D, sólo se obtiene dos circuitos hamiltonianos (que son los que han aparecido en todos los árboles) y ningún camino hamiltoniano.

Así pues, construyendo los árboles de todos los vértices, podemos conseguir todos los recorridos hamiltonianos posibles en una red. Si lo que buscamos es sólo comprobar si una red es hamiltoniana, no es necesario tanto trabajo:

- Si la red tiene algún circuito hamiltoniano, éste aparecerá en todos los árboles (más exactamente, todos los circuitos hamiltonianos aparecen en todos los árboles), luego sólo hay que hacer uno cualquiera.

- Si la red no tiene circuito hamiltoniano, a veces no basta con un árbol, pues si el primer árbol que hagamos no nos proporciona un camino hamiltoniano, tendremos que construir otro, pues puede ser que éste segundo sí nos dé el camino; si no se construye un tercero, etc., hasta obtener un camino.

Si después de construir todos los árboles no se obtiene ningún camino hamiltoniano, es que la red no es hamiltoniana.

Sea, por ejemplo, la red de la figura 4. Tiene caminos hamiltonianos (pero no circuitos), que empiezan en los vértices 2, 3, 5, 7, luego los árboles de los vértices 1, 4, 6 no nos darán ningún recorrido hamiltoniano.

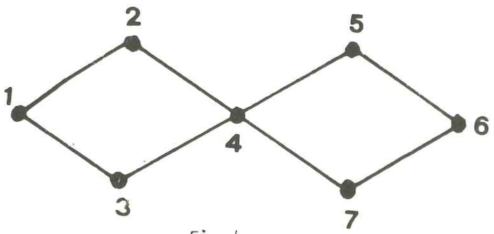



Fig.4

Para algunas redes particulares no es preciso efectuar este examen minucioso para saber si son o no hamiltonianas. Los teoremas siguientes desarrollan bajo qué condiciones sucede esto.

T-1 En una red simple conexa, si el orden de cada vértice es mayor o igual que la mitad del número de vértices, entonces la red tiene un circuito hamiltoniano

DEFINICION

Diremos que una red es coloreable si es posible colorear sus vértices de blanco y negro alternativamente (es decir, que dos vértices adyacentes tengan distinto color).

Así, la red (a) de la fig. 5 es coloreable, pero la red (b) no lo es pues siempre hay dos vértices adyacentes que tienen el mismo color.

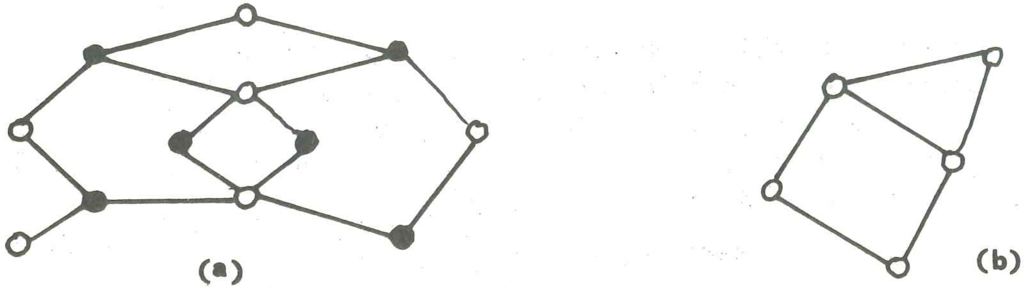



Fig.5

T-2 Si una red con un circuito hamiltoniano es coloreable, el número de vértices blancos es igual al de vértices negros.

T-3 Si una red con un camino hamiltoniano es coloreable, el número de vértices blancos y el número de vértices negros difieren como máximo en una unidad.

DEMOSTRACIONES DE LOS TEOREMAS

Teorema T-1

La demostración del teorema es muy larga y complicada, por lo que no la incluímos en este trabajo. Puede encontrarse en la bibliografía especializada.

ooooooooooooooo

Teorema T-2

Si una red tiene un circuito hamiltoniano, podemos ordenar sus vértices gracias a ese circuito (fig.6) en una cadena en la que el primer y el último vértices son

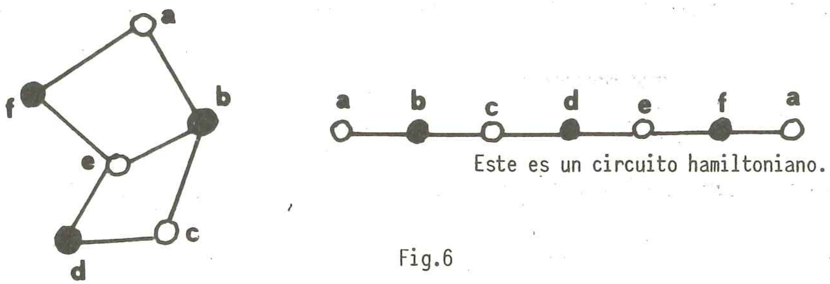


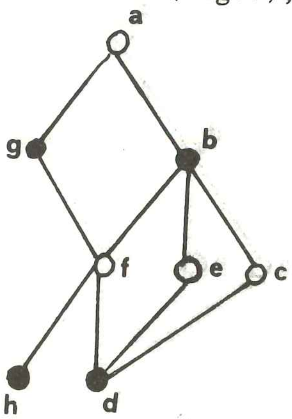

Fig.6

el mismo. Como la red es coloreable, los vértices de la cadena tendrán alternativamente los colores blanco y negro, con la particularidad de que el primer y el último vértices tienen el mismo color, pues son el mismo. Bajo esta condición, la cadena debe tener un número impar de puntos, luego la red tiene un número par de vértices,de los que la mitad son de cada color.

ooooooooooooooo

Teorema T-3

Dada la red, ordenamos sus vértices según una cadena, gracias al camino hamiltoniano existente (fig.7), en la que los vértices tienen alternativamente los colores





Este es un camino hamiltoniano.

Fig.7

blanco y negro, pero siendo el primer vértice y el último distintos. Si el primer y el último vértice tienen el mismo color, la red tendrá un vértice más de ese color que del otro; si el primer y el último vértices tienen distinto color, la red tendrá el mismo número de vértices de cada color. Luego, en resumen:

$$(\text{nº vértices blancos}) - (\text{nº vértices negros}) \leq 1$$

ooooooooooooooo

En la fig.7 se ha visto una red en la que hay camino hamiltoniano, pero no circuito (a causa del vértice h), y tiene tantos vértices blancos como negros. En la fig.8 se ve una red con camino hamiltoniano, pero sin circuito, en la que hay tres vértices blancos y cuatro negros (uno de diferencia). Por lo tanto, el hecho de que la red tenga tantos vértices blancos como negros no dice nada sobre la existencia de circuito hamiltoniano. Sin embargo, si la red no tiene el mismo número de blancos que de negros, por T-2, sabemos que no tiene circuito hamiltoniano.

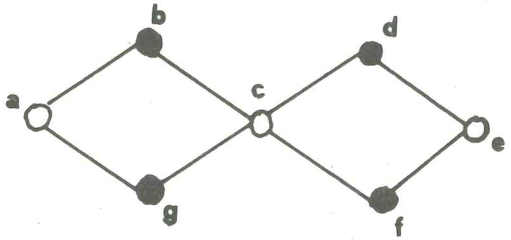
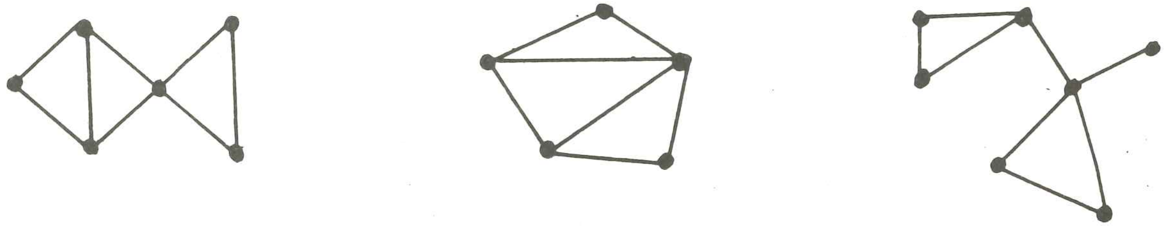



Fig.8

Del mismo modo, si la red tiene dos o más vértices de un color que de otro, sabemos por T-3 que no tiene ni circuito ni camino hamiltonianos.

Además, hay que fijarse que el no ser coloreable no dice tampoco nada, según se ve en las redes de la figura 9, ninguna de las cuales es coloreable.



Red con camino hamiltoniano. Red con circuito hamiltoniano. Red no hamiltoniana.

Fig.9

Por lo tanto, estos dos teoremas dan condiciones de no existencia de redes con circuito o camino hamiltoniano, a diferencia del primer teorema que da una condición de sí existencia.

Las actividades A-1 y A-2 se dirigen a introducir el problema de las redes hamiltonianas, y a conocer los tipos de redes que hay desde este punto de vista. La actividad A-3 sirve para afianzar las definiciones.

Después de explicar a los alumnos cómo se hace un árbol, la actividad A-4 se dirige a practicar en la construcción de árboles. También estudia cuántos árboles es necesario construir para obtener caminos o circuitos, o para saber que no existen (tal como se explicaba anteriormente).

Aunque los problemas euleriano y hamiltoniano son similares, las actividades desde la A-5 hasta la A-9 están destinadas a ver que no hay ninguna relación entre redes eulerianas y hamiltonianas. No hemos hecho un estudio sistemático, pues habría que distinguir entre si tienen caminos o circuitos, lo cual da nueve casos diferentes; pero si el profesor quiere abarcar esos nueve casos, no se le planteará ninguna dificultad.

Empiezan las actividades que van a mostrar los teoremas. Puesto que el T-1 no está demostrado, lo que creemos más conveniente es dar la condición (actividad A-10) para que los alumnos la comprueben, y tras varios ejemplos se convenzan de su eficacia.

E n la actividad A-11 se ponen ejemplos de redes que cumplen la condición del teorema T-1 y otras que no la cumplen. De éstas últimas, una tiene circuito hamiltoniano y otra no, con lo que se ve que el no cumplir la condición del teorema no garantiza ningún resultado.

A partir de la actividad A-12 se oborda los teoremas T-2 y T-3 sobre redes coloreables. Se van recorriendo los distintos resultados de las redes coloreables: Las actividades A-13 y A-14 dan una forma de reconocer las redes coloreables (una red es coloreable si y sólo si no forma ninguna región con un número impar de vértices, salvo la exterior). Las actividades desde la A-15 hasta la A-18 proponen los diferentes criterios para ver si una red coloreable no tiene camino o circuito hamiltoniano, que son:

- Si la diferencia entre el número de vértices blancos y negros es mayor que uno, la red no es hamiltoniana.

- Si la diferencia es exactamente uno, la red no tiene circuito hamiltoniano; puede tener o no camino hamiltoniano.

- Si el número de vértices blancos y negros es igual, no se puede decir nada sobre el tipo de red.

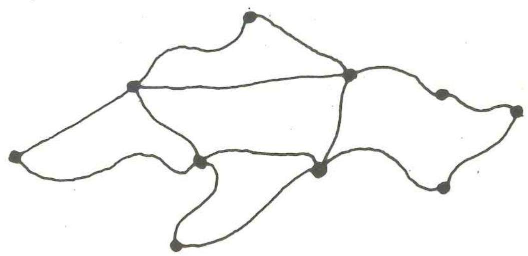
Las actividades A-19 y A-20 resumen estos resultados.

La actividad A-21 muestra que existen redes no coloreables de cada uno de los tres tipos, con lo cual se termina de comprobar que realmente los resultados son muy parciales.

Las actividades desde la A-22 hasta la A-26 son unos ejercicios de aplicación de toda la teoría aprendida en este tema.

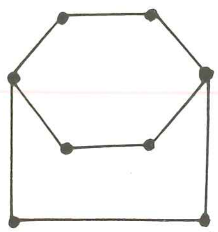
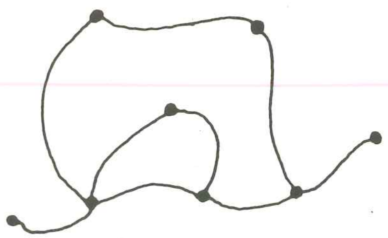
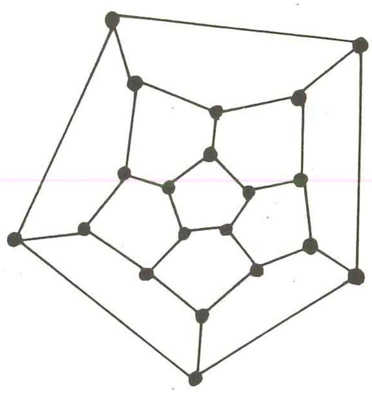
ACTIVIDADES

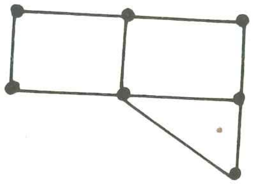
A-1 Imagínate que eres un viajante de comercio o un inspector de enseñanza que debe visitar los pueblos de una comarca, cuya red de carreteras es la siguiente:

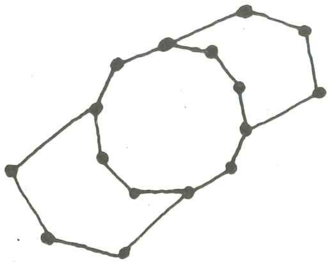


Si no consideramos las distancias, está claro que lo más importante es recorrer todos los pueblos sin pasar dos veces por el mismo. ¿Qué recorrido harías?

A-2 Mira si en estas redes puedes recorrer todos los vértices sin pasar dos veces por el mismo vértice, ni levantar el lápiz.





En algunas habrás podido hacerlo y en otras no. Sepáralas. En las que has podido hacerlo, en algunas has podido volver al mismo vértice de partida y en otras no. Sepáralas.

DEFINICIONES. Una red es hamiltoniana si existe un recorrido continuo que pasa por todos los vértices una solca vez.

Si este recorrido puede volver al vértice inicial, decimos que la red tiene un circuito hamiltoniano.

Si no puede volver, decimos que tiene un camino hamiltoniano.

A-3 Dibuja redes que tengan camino hamiltoniano, que tengan circuito hamiltoniano y que no tengan ni lo uno, ni lo otro.

ooooooooooooooo

Aunque todavía no has hecho más que unos pocos ejercicios, te habrás dado cuenta de que buscar los caminos o los circuitos no es una empresa fácil. Hasta ahora, te parecerá que es cuestión de suerte o de vista. Te ofrecemos a continuación un procedimiento metódico y seguro, aunque a veces sea largo, para encontrarlos.

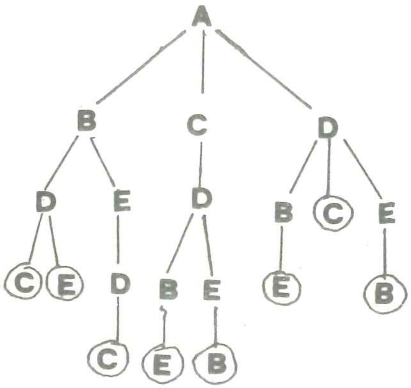



Fig.5

Se sigue hasta que ya no pueda continuarse por ninguna rama. (Fig.5)

Puedes ver que algunos de los recorridos pasan por todos los vértices y otros no. Estos últimos no nos interesan, pero sí los primeros.

Alguno de estos recorridos puede ser circuito, si del último vértice se puede ir directamente a A. En nuestro caso, desde C y B se puede volver a A, pero no desde E. Por tanto tendríamos, empezando en A, dos circuitos (A-B-E-D-C-A) y (A-C-D-E-B-A), y un camino (A-C-D-B-E) hamiltonianos.

ooooooooooooooo

A-4 Haz los árboles de los demás vértices. ¿Te salen los mismos circuitos? ¿Por qué? ¿Y los caminos? Saca conclusiones sobre el número de árboles que debes hacer para estar seguro de que no hay circuito y para estar seguro de que no hay camino.

El problema que estamos estudiando puede recordarte el de si una red es euleriana o no. En aquel caso se trataba de recorrer todos los arcos, ahora de recorrer todos los vértices. Puedes pensar que ambas cosas están relacionadas; esto es lo que ahora se te pide que investigues.

A-5 ¿Alguna de las redes utilizadas anteriormente es euleriana?

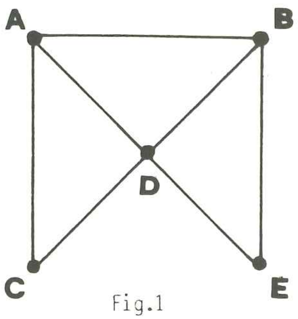


Fig.1

Se trata de hacer un árbol con todos los recorridos posibles, empezando por un vértice determinado.

Para construirlo designamos los vértices de la red con letras o números. (Fig.1)

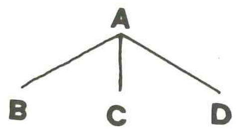


Fig.2

Elegimos uno de ellos, por ejemplo el A, e indicamos todos los vértices a los que se puede ir desde A. (Fig.2)

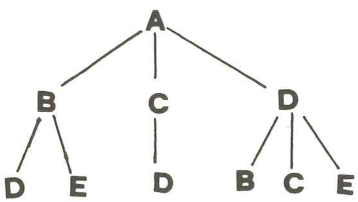


Fig.3

Repetimos la misma operación desde cada uno de estos vértices, suprimiendo el vértice A porque ya hemos pasado por él. (Fig.3)

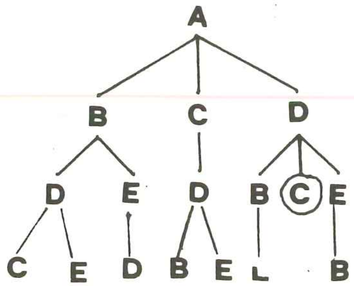


Fig.4

Volvemos a repetir la operación eliminando en cada caso los vértices por los que ya hemos pasado. Por ejemplo, de la D de la izquierda eliminamos A y B porque ya hemos pasado por ellos y escribimos C y E. De la otra D, eliminamos A y C y escribimos B y E, etc. A partir del vértice C ya no se puede continuar porque por A y B ya hemos pasado. Aquí se termina un recorrido. (Fig.4)

A-6 Dibuja redes que sean eulerianas y no hamiltonianas.

A-7 Dibuja redes que sean hamiltonianas y no eulerianas.

A-8 Dibuja redes que sean hamiltonianas y eulerianas.

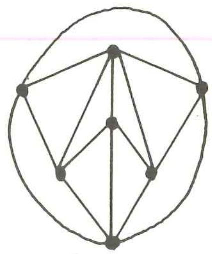
A-9 Dibuja redes que no sean hamiltonianas, ni eulerianas.

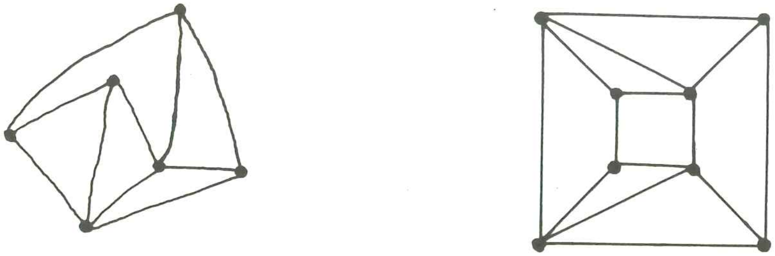
Acabas de ver que no hay ninguna relación entre las redes eulerianas y las hamiltonianas. Aún peor, para las redes eulerianas encontramos unas condiciones que nos decían si una era era euleriana o no y de qué tipo. Por desgracia no se conoce ninguna condición similar para las hamiltonianas. La única forma, que tenemos por ahora, de averiguar con seguridad si una red es hamiltoniana o no es buscar el camino o el circuito mediante los árboles de las actividades A-3 y A-4. Sin embargo, para redes muy particulares, hay algunas condiciones para saber de antemano si son hamiltonianas o no. Este es el objetivo de las actividades siguientes.

A-10 Dibuja algunas redes simples y conexas con la condición de que el orden de cada vértice sea mayor o igual que la mitad del número de vértices de la red.

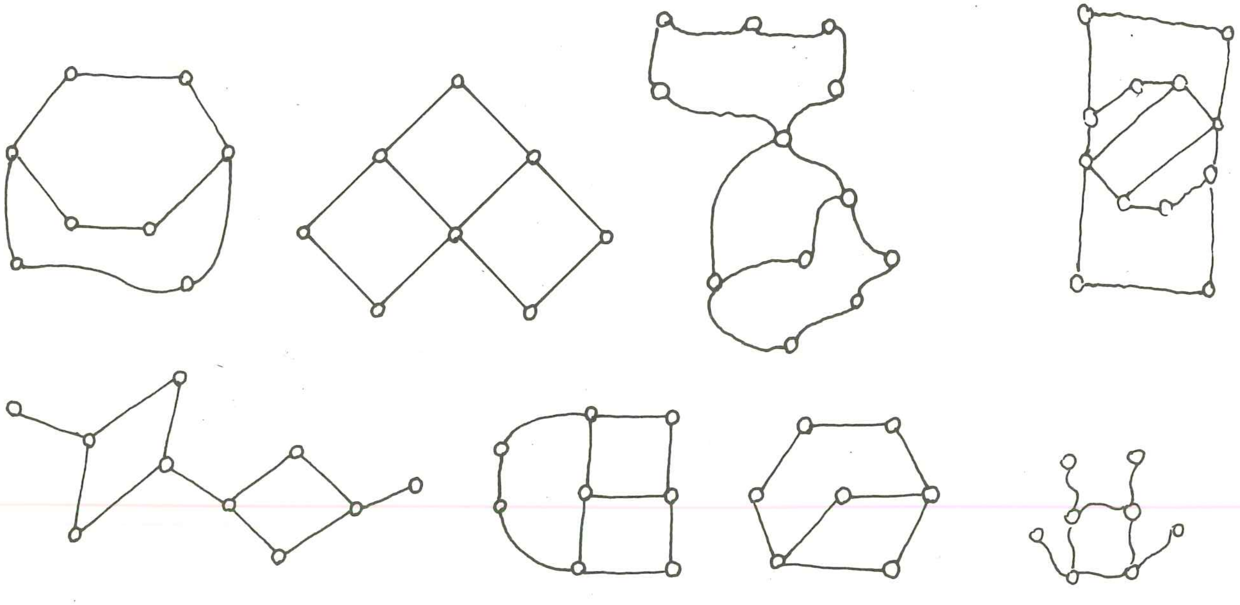
Trata de encontrar un circuito hamiltoniano en cada una de ellas.

A-11 ¿Puedes decir si las redes siguientes tienen circuito o no, sin buscarlo?



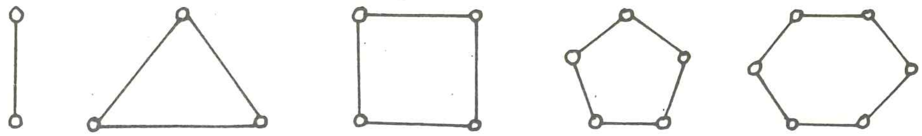


A-12 En las siguientes redes colorea los vértices de blanco y negro, de forma que cada par de vértices adyacentes tenga colores distintos.



A-13 ¿Puedes decir cuándo se puede colorear una red de esa manera y cuándo no? Si lo sabes, pasa a A-15; si no, haz A-14.

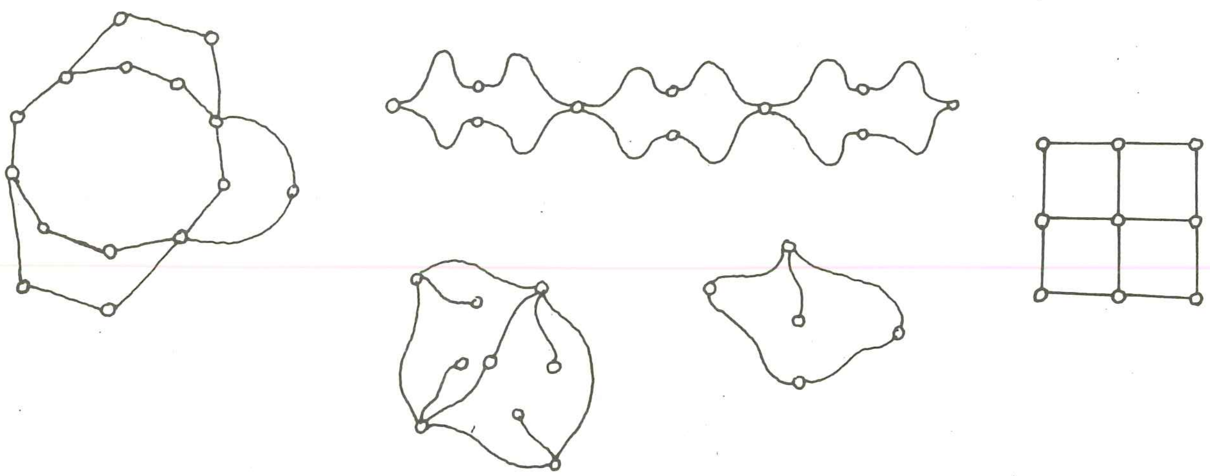
A-14 Observa cuáles de las redes siguientes se pueden colorear.



¿Te atreves a contestar a A-13?

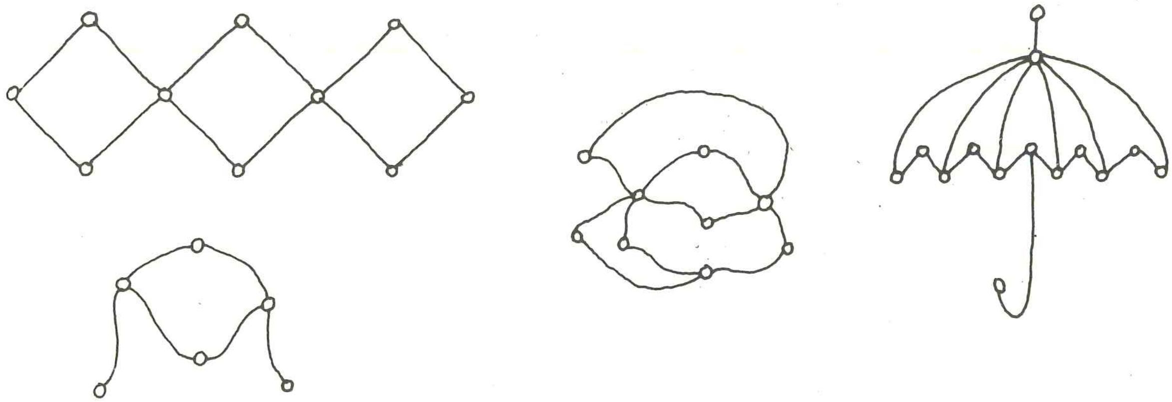
A-15 En A-12 hay algunas redes coloreables que tienen el mismo número de vértices blancos que negros. Búscalas y di de qué tipo son.

A-16 Comprueba que las siguientes redes son coloreables y tienen distinto número de vértices blancos que negros. Busca en ellas circuitos hamiltonianos.



A-17 En A-12 y A-16 hay algunas redes coloreables en las que la diferencia entre el número de vértices blancos y negros es exactamente uno. Búscalas y di de que tipo son.

A-18 Comprueba que las siguientes redes son coloreables y que la diferencia entre el número de vértices blancos y negros es mayor que uno. Busca en ellas caminos hamiltonianos.



A-19 Saca conclusiones a partir de las actividades A-15, A-16, A-17 y A-18. Si no puedes hacerlo, construye más redes coloreables, clasifícalas e intenta sacar conclusiones.

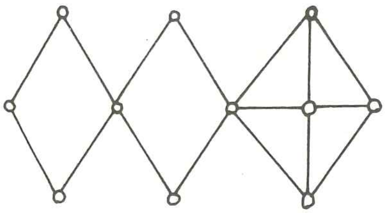
A-20 Con las conclusiones que has obtenido en A-19 completa los siguientes enunciados:

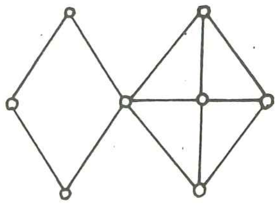
a) Si una red es coloreable y la diferencia entre el número de vértices blancos y negros es mayor que uno, entonces la red ..... hamiltoniana.

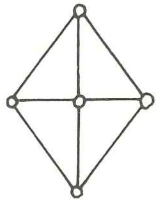
b) Si una red es coloreable y la diferencia entre el número de vértices blancos y negros es exactamente uno, entonces la red ..... circuito hamiltoniano.

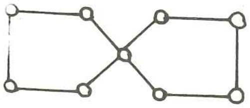
c) Si una red es coloreable y el número de vértices blancos y negros ....., entonces no se puede decir nada sobre ella.

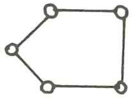
A-21 Comprueba si las redes son coloreables y clasifícalas.

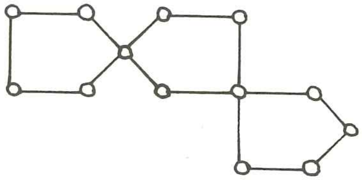






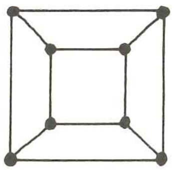


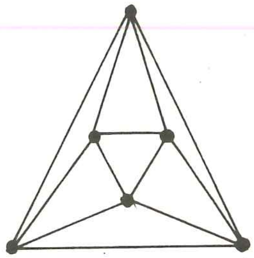


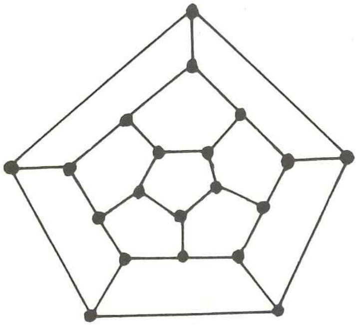


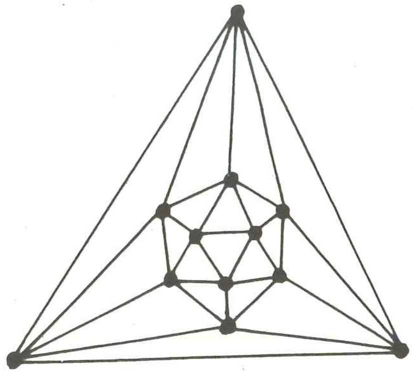
Utiliza todos los resultados que has obtenido para resolver las siguientes actividades.

A-22 Los diagramas siguientes son esquemas planos de los cinco poliedros regulares. Busca en ellos caminos y circuitos hamiltonianos.

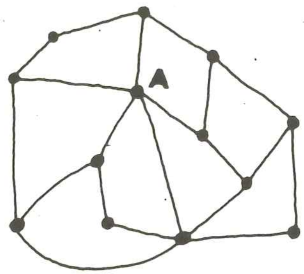




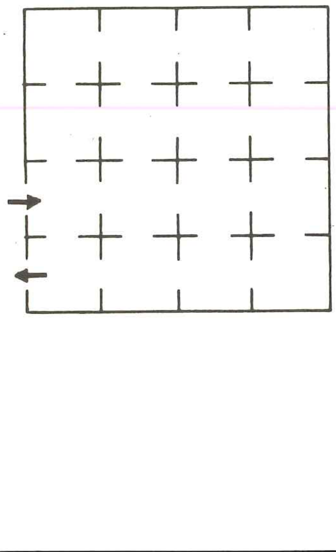




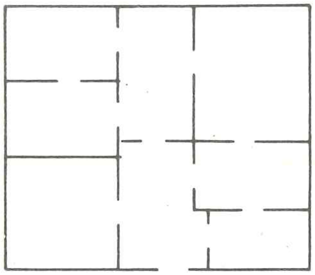
A-23 La red del dibujo representa las calles de una ciudad. En A tiene su almacén un repartidor de refrescos. Los demás vértices son los bares a los que ha de llevar su mercancía. El recorrido que más le interesa es el que pase una sola vez por cada bar y vuelva al almacén. Búscalo.



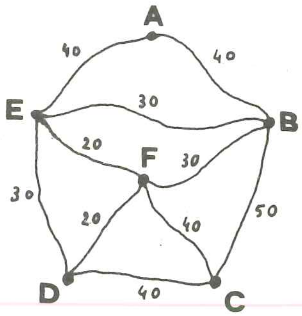

A-24 La figura representa el plano de un museo. Busca un recorrido que pase por todas las salas una sola vez.



A-25 La figura representa el plano de un "chalet". ¿Es posible recorrer todas las habitaciones sin pasar dos veces por ninguna de ellas, entrando por la puerta de la calle? Si no es posible, cambia de sitio la puerta de entrada para que sí lo sea.



A-26 La red del dibujo representa seis pueblos unidos por líneas de autobuses. Los números indican los precios de los billetes para ir de pueblo a pueblo. Busca el circuito más barato.



## BIBLIOGRAFIA


(1) BERGE, C. "The Theory of Graphs". Ed Methuen.
(2) CASTELNUOVO, E. "Matematica nella realtà". Ed. Boringhieri.
(3) BANWELL, C.S.; SAUNDERS, K.D. "Comprehensive Mathematics". Book 4. Ed. Oxford.
(4) COURANT, R.; ROBBINS, H. "¿Qué es la Matemática?" Ed. Aguilar.
(5) WALLRADENSTEIN, H. "Experiments in Teaching Intuitive Topologye in the 5 y 6 Grades". Educational Studies in Mathematics. Vol. 5, nº 1, pag. 91 y ss.
(6) NIMAN, J. "Graph Theory in the Elementary School". Educational Studies in Mathematics. Vol. 6, nº 3, pag. 351 y ss.
(7) EXPLORING MATHEMATICS ON YOUR OWN. nº 12. "Topology". Ed. John Murray.
(8) FLETCHER, T.J. "Didáctica de la matemática moderna". Ed. Teide.
(9) OEHL et al. "El mundo del número". 1,2,3,4 y 5. Ed. Interduc-Schroedel.
(10) WINTER et al. "La nueva matemática" 2. Ed. Interduc-Schroedel.
(11) KAUFMANN, A. "Métodos y modelos de la investigación de operaciones". Tomo 2. Ed. Cecsa.
(12) LAKATOS, I. "Pruebas y refutaciones". Ed. Alianza.
(13) COOKE, CH.; ANDERSON, I. "Counting and Configurations" in "The Mathematics Curriculum". Ed. Blackie.
(14) "Crossing Subject Boundaries" in MATHEMATICS FOR THE MAJORITY". Ed. Chatto & Windus.
(15) "Purple Red Set" in NUFFIELD MATHEMATICS PROJECT. Ed. John Murray.
(16) POLYA, G. "Matemáticas y razonamiento plausible". Ed. Tecnos.
(17) SCHOOL MATHEMATICS PROJECT. Books 2, 3 y B. Ed. Cambridge University Press.
(18) NEWMANN, J., ed. "Sigma. El mundo de las matemáticas. Vol. 4". Ed. Grijalbo.
(19) STEWART, I."Conceptos de la matemática moderna". Ed. Alianza.
(20) "Los puentes de Königsberg" en "Matemáticas en el mundo moderno". Ed. Blume.
(21) ORE, O. "The Graphs and their Uses". Ed. Random House.