PAPELES DE ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

ACTIVIDADES CON EL GEOPLANO PARA LA E.G.B.

Ángel Gutiérrez Rodríguez
Alejandro Fernández Lajusticia

COLECCIÓN DE MONOGRAFÍAS. N.º 1

ESCUELA UNIVERSITARIA DEL PROFESORADO
DE EDUCACIÓN GENERAL BÁSICA

UNIVERSIDAD DE VALENCIA
1985

Miembros del Seminario Permanente de Didáctica de las Matemáticas de la E.U. de Formación del Profesorado de E.G.B. en el ICE de la Universidad Literaria de Valencia que editan esta publicación:

Fernando Cerdán Pérez
Alejandro Fernández Lajusticia
Eduardo Galán Peláez
Bernardo Gómez Alfonso
Ramón Granell Trenco
Gregoria Guillén Soler
Ángel Gutiérrez Rodríguez
Adela Jaime Pastor
Luis Puig Espinosa

I.S.B.N. 84-600-3821-1
Depósito legal: V. 146 - 1985

Artes Gráficas Soler, S. A. - La Olivereta, 28 - 46018 Valencia - 1985

ÍNDICE

1. *Introducción*

1.1. Origen, necesidad y experimentaciones previas de las actividades

El primer objetivo que nos ha impulsado a escribir este texto es el de aportar nuestra pequeña ayuda para mejorar los procedimientos y técnica de enseñanza de las Matemáticas en EGB (y concretamente de la Geometría y otros temas afines). A continuación presentamos varias aplicaciones de técnicas concretas, de tipo heurístico, a situaciones que se presentan en los Programas Renovados de EGB que están entrando en vigor en estos años. Todas estas aplicaciones tienen su soporte físico en el Geoplano.

Durante varios años, los autores de este proyecto hemos trabajado en la elaboración de bloques de actividades para el Geoplano, las cuales han dado lugar a unos primeros resultados parciales que han sido publicados en (23). Esta publicación ha sido objeto de estudio y discusión en varias ocasiones: por una parte, en varios cursos de segundo de nuestra Escuela de Magisterio (en la asignatura de Didáctica de las Matemáticas); también ha sido discutida en la Escuela Universitaria Edetania de Godella (Valencia), en la misma asignatura, y en cursos de Perfeccionamiento de profesores de EGB del ICE de la Universidad Literaria y de la UNED. Por otra parte, se le han dedicado varias sesiones de trabajo del Seminario Permanente de Matemáticas del ICE de la Universidad Literaria en la Escuela de Magisterio de Valencia.

La aparición de los Programas Renovados nos sugirió la necesidad de iniciar una nueva fase de investigación para diseñar actividades de acuerdo con estos programas. Este nuevo material ha sido contrastado en las clases de Didáctica y en el Seminario Permanente de Matemáticas de la Escuela de Magisterio, en cursos de Perfeccionamiento de profesorado y utilizado, como material experimental, en el Colegio Santo Cáliz de Valencia en colaboración con su Departamento de Matemáticas. El resultado de las revisiones posteriores ha sido el texto que presentamos.

J. A. Easly indica en (20) que en realidad son pocos los profesores que han introducido nuevos métodos en la enseñanza de las Matemáticas para adaptarse a las nuevas tendencias y a los nuevos contenidos de los planes de estudios; por el contrario, en una gran parte éstos se han limitado a introducir cambios más teóricos que reales en su forma de llevar las clases. Esta observación se refiere a la enseñanza en Estados Unidos, pero desgraciadamente también es aplicable a una buena parte de profesores españoles.

Una hipótesis sobre el origen de este problema es que los profesores de EGB no cambian sus métodos de enseñanza por falta de una guía real que les preste apoyo concreto en su trabajo diario. Los cursos de perfeccionamiento (más bien cortos) que han recibido (en parte obligatorios, lo cual suele generar falta de interés) no se han traducido en sugerencias elaboradas y concretas de cómo realizar los cambios, es decir en libros de consulta o materiales que ellos puedan llevar a sus aulas.

Para afrontar este problema nos propusimos que el resultado del trabajo que íbamos a realizar debían ser bloques de actividades con el Geoplano, dirigidos a temas puntuales y diseñados para su uso inmediato con los alumnos de EGB.

Otro problema que nos hemos propuesto combatir es la existencia de lagunas en los conocimientos de parte de los profesores de EGB en ejercicio. J. Gimeno Sacristán señala en (25) la existencia de tales lagunas, que se refleja en que el método seguido por estos profesores es el de "explicación de los contenidos de los libros de texto" sin más apoyos de tipo audiovisual y práctico que estimulen a los alumnos. Para contrarrestar esta carencia, las actividades para los alumnos que ofrecemos van acompañadas de ampliaciones teóricas o de comentarios que puedan servir de ayuda y orientación al profesor.

El profesor A. W. Bell expone en (9) que existe una fuerte interrelación entre los contenidos del currículum y las técnicas de enseñanza y aprendizaje aplicables, llegando a la conclusión de que en el caso de la Geometría la técnica más idónea para asimilar nuevas propiedades es la realización por parte de los alumnos de actividades que hagan surgir las propiedades que se buscan, para entenderlas primero y aprenderlas después mediante una abstracción desde situaciones concretas, mejor que la obtención de esas propiedades como parte de una cadena de razonamientos que, cuando se rompe, provoca la incomprensión por parte del alumno y su fracaso. Estas conclusiones de A. W. Bell están completamente de acuerdo con las directrices que se sugieren para el nuevo Plan de Estudios de la EGB y con la línea de trabajo que se ha seguido en la elaboración de este libro.

1.2. Descripción y utilidad del Geoplano

Hay varios tipos de Geoplano. Los más sencillos están formados por una base de madera en la que se clavan varios clavos; éstos forman una malla que puede ser cuadrada, triangular o circular. Se llama "Geoplano 3×3" al formado por una malla cuadrada con 3 clavos en cada lado (9 clavos en total; fig. 1.1-a); análogamente, el "Geoplano 5×5" está formado por una malla cuadrada de 5 clavos en cada lado (fig. 1.1-b). Los geoplanos circulares suelen tener 12 ó 24 clavos igualmente espaciados sobre una circunferencia y otro clavo en el centro (fig. 1.1-c y 1.1-d); se les llama "Geoplano circular de 12 o de 24 puntos". En las actividades usaremos los geoplanos de mallas cuadradas y circulares.

También vamos a utilizar el "Geoplano Giratorio", que es un modelo que hemos diseñado los autores para facilitar el estudio de los ángulos y de los giros del plano. Está formado por una pieza inferior que es un Geoplano circular de 24 puntos y por una pieza superior que queda inscrita en la circunferencia inferior, de forma que el clavo del centro de dicha circunferen-

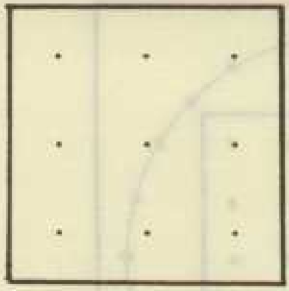


Figura 1.1-a

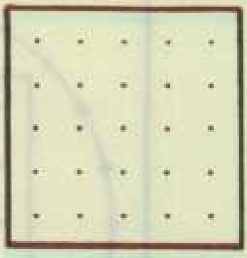


Figura 1.1-b

Figura 1.1-c

Figura 1.1-d

cia actúa de eje. El Geoplano contenido en la pieza superior puede ser de cualquier tipo, siempre que el eje que indicábamos antes sea uno de los clavos de la malla. Por este motivo no es conveniente usar mallas cuadradas de un número par de clavos (fig. 1.2). El material se completa con una cantidad adecuada de gomas elásticas, preferiblemente de colores y papel punteado o cuadriculado.

El objetivo prioritario del uso del Geoplano está en descubrir propiedades geométricas mediante la manipulación directa y la construcción de figuras con los clavos y las gomas. Según los estudios hechos por Piaget, los alumnos de los Ciclos Inicial y Medio de EGB se encuentran en estadios de evolución en los que necesitan ineludiblemente la ayuda de materiales concretos. En el Ciclo Superior, superada esta fase de desarrollo, el Geoplano sirve como laboratorio de ensayo para que los alumnos puedan elaborar sus propias conjeturas y las comprueben, iniciándose así en el razonamiento lógico y deductivo imprescindible para poder entender las demostraciones formales que encontraran en los años siguientes.

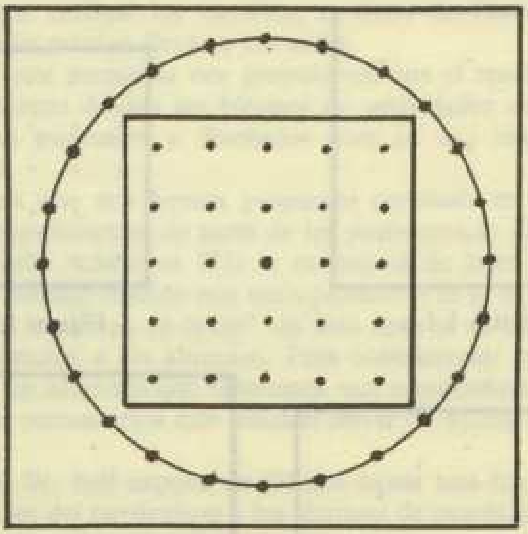


Figura 1.2

En un plano más concreto, la Geometría necesita de una exactitud de dibujo que los alumnos de la Primera Etapa están lejos de conseguir. Aquí, el Geoplano se presenta como una eficaz ayuda pues las gomas elásticas y los clavos van a proporcionar lados rectos que serán paralelos o iguales cuando sea necesario. También debemos destacar la gran facilidad que supone un material deformable para poder corregir los errores o para poder pasar rápidamente de unas figuras a otras, además de su utilidad si se quieren estudiar propiedades relativas a la modificación de la forma o el tamaño de las figuras.

Si se observan con un poco de cuidado los diferentes modelos de Geoplano (cuadrado, triangular, circular y giratorio), es fácil notar que unos se complementan con los otros. Así, por ejemplo, el Geoplano circular es el que permite construir mayor cantidad de polígonos regulares, y éste junto con el giratorio son los más prácticos para estudiar propiedades de los ángulos. El Geoplano circular y el triangular permiten construir triángulos equiláteros, cosa que no es posible en el Geoplano cuadrado.

Efectivamente, es posible demostrar con todo rigor que no es posible dibujar un triángulo equilátero cuyos vértices sean, los tres, puntos de una malla cuadrada (si bien la demostración no es inmediata). Sin embargo, un poco de tanteo con un Geoplano 5×5 puede llevar a obtener triángulos que parecen equiláteros; el teorema de Pitágoras indica que el triángulo de la figura 1.3 sólo es isósceles pues sus lados miden $\sqrt{17}$ y $\sqrt{18}$ unidades, es decir que tienen una diferencia de longitud de 0'12 unidades.

Esta diferencia es inapreciable a simple vista por cualquier persona si el Geoplano es de tamaño pequeño o medio y seguramente que también es inapreciable por un niño de Primera Etapa aunque mida los lados con una

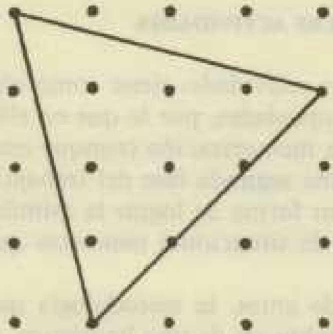


Figura 1.3

regla; hasta que no conozca el teorema de Pitágoras no podrá saber, por su propia experiencia, que ese triángulo no es equilátero y es probable que al principio tenga más fe en sí mismo que en el teorema: ocurre muchas veces que, si pedimos al niño que contraste con otras pruebas un determinado hecho poco claro (decir si ese triángulo es o no equilátero, por ejemplo), él se las arreglará para que los resultados concuerden con su idea, lo cual hará que cada vez esté más convencido de ella.

La movilidad de los geoplanos resulta útil para conseguir que los alumnos se acostumbren desde el principio a ver las figuras en varias posiciones. Pero hay un aspecto relacionado con la forma de las figuras que está muy poco estudiado, a pesar de que puede ser importante, que es la perspectiva. Es interesante que los profesores tengamos presente que no siempre la forma real de una figura dibujada en un libro o en un Geoplano coincide con la forma que se ve. Creemos que las figuras siguientes (fig. 1.4) de un mismo Geoplano visto desde tres posiciones, son claras y no necesitan comentarios.

Está claro que la posición ideal para mirar un Geoplano (o un libro) es desde arriba, lo cual suele ser fácil de conseguir.

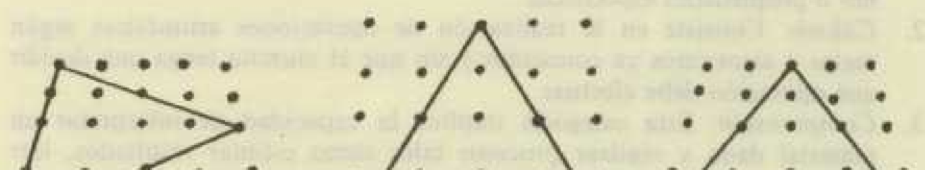


Figura 1.4

1.3. Metodología de las actividades

La mayor parte de las actividades tiene como objetivo introducir nuevos conceptos y descubrir propiedades, por lo que en ellas debe insistirse más en la comprensión que en la memorización (aunque esto también es necesario y debe ser el objetivo en una segunda fase del trabajo). Efectivamente, A. Bell señala en (9) que la mejor forma de lograr la asimilación de nuevas ideas es mediante la abstracción de situaciones concretas que sean resueltas por los propios alumnos.

Como hemos indicado antes, la metodología que hemos seguido en las actividades es fundamentalmente de tipo heurístico, la cual, por una parte, es la que mejor se adapta a la estructura del Geoplano y, por otra parte, es la sugerida por las nuevas directrices de EGB.

Basada en la enseñanza inductiva, consigue que el alumno saque conclusiones a partir de su propio trabajo y de sus experimentos, por lo que éste pasa de lo concreto y particular a lo general, de resolver algunos ejemplos o casos particulares a formular una conjetura que pueda resolver de forma general su problema. Posteriormente, el alumno contrastará su conjetura con varios ejemplos para garantizar su veracidad y pasará a demostrarla (de forma diferente, en cuanto al grado de rigor, según la edad y el estado de conocimientos de los alumnos).

La enseñanza heurística entraña más trabajo y dificultad para el profesor que la tradicional enseñanza deductiva (en la que el profesor es el centro de la clase), pues obliga a una enseñanza personalizada, o en pequeños grupos, y a que el profesor esté pendiente de cada uno de ellos para guiarlos, cuando sea necesario, hacia el objetivo propuesto con comentarios o preguntas, y nunca con las soluciones. Como compensación, su principal cualidad está en que permite alcanzar mayor grado de éxito en el aprendizaje y mayores cotas que la enseñanza tradicional en las Categorías de las Habilidades de Meckes (categorías de Habilidades Matemáticas derivadas de las Categorías de Bloom). Estas categorías son (ver (38)):

1. *Conocimiento:* Incluye cuestiones que sólo requieren recordar definiciones o propiedades específicas.
2. *Cálculo:* Consiste en la realización de operaciones aritméticas según reglas o algoritmos ya conocidos y sin que el alumno tenga que decidir qué operación debe efectuar.
3. *Comprensión:* Esta categoría implica la capacidad de interpretar un material dado y realizar procesos tales como estimar resultados, leer diagramas o pasar del lenguaje verbal al matemático. Esta es la primera categoría que incluye el razonamiento.
4. *Aplicación:* Es la habilidad de usar conocimientos previamente adquiridos en situaciones nuevas, tales como decidir qué operación debe hacerse o, en general, resolver problemas.
5. *Análisis:* Incluye la capacidad de separar un material en sus componentes y estudiar las relaciones que hay entre ellas. También se incluye aquí la

capacidad para reconocer falsos argumentos y para distinguir entre un hecho y una suposición.
6. *Síntesis:* Consiste en la capacidad para formar una nueva estructura mediante la combinación de varios elementos procedentes de varias fuentes y, por lo tanto, incluye la capacidad de generar nuevas ideas.
7. *Evaluación:* Esta es la más alta de las Habilidades de Meckes. Implica la capacidad para juzgar el valor de un material dado en función de criterios válidos.

Se puede observar que los problemas de los libros de texto alcanzan, en la inmensa mayoría de los casos, solo alguna de las tres primeras categorías y que muy pocas veces se llega a la cuarta categoría; sin embargo, una enseñanza de tipo heurístico como la que ofrecemos con estos bloques de actividades alcanza las categorías quinta y sexta. Faltaría únicamente por alcanzar la última categoría, pero que evidentemente queda fuera de los objetivos de EGB.

Aunque se utiliza el mismo material en todos los cursos de EGB, debemos destacar que el Geoplano se presta a varios tipos de actividades muy diferenciadas entre sí. Esto hace que se amolde a los requerimientos de todos los Ciclos de EGB (e incluso que pueda ser utilizado para trabajos más rigurosos en cursos superiores de BUP o de la Universidad); siguiendo las directrices de los Programas Renovados para el Ciclo Inicial, la principal forma de trabajo debe ser el conocimiento manipulativo de las cosas, de las formas y de sus propiedades. En el Ciclo Medio se utilizarán los ejemplos como medio fundamental de comprobación de las propiedades, pues los alumnos todavía no son capaces de seguir razonamientos lógicos. Posteriormente, en el Ciclo Superior, conviene utilizar materiales tanto estáticos como dinámicos en el aprendizaje de la Geometría, con el fin de desarrollar la intuición y la creatividad, abstrayendo las ideas a partir de situaciones reales.

El Geoplano, en cualquier forma en que se utilice, supone la contínua construcción de figuras, su modificación y su eliminación para poder construir otras nuevas; además, sobre todo en las actividades de la Primera Etapa, una parte importante del trabajo de los alumnos consiste en comparar los resultados obtenidos. Pero esta comparación sólo es posible si se guardan los resultados; por lo tanto siempre que se trabaje con el Geoplano debe tenerse al lado un papel para ir copiando los resultados. Se han hecho estudios relativos a la transcripción de las figuras del Geoplano al papel. Es evidente que en papel marcado se dibuja mejor que en papel blanco, pero dentro de ese tipo hay varias clases; los estudios citados antes indican que el papel que da más facilidad a los alumnos de las edades correspondientes a EGB es un papel de puntos que tenga una malla de tamaño parecido a la del Geoplano y después un papel cuadriculado con cuadrícula grande (de 1 cm. a 2 cm.). Al final del libro incluimos unas páginas con las diferentes mallas de geoplanos, que pueden usarse para hacer copias para los alumnos.

Para concluir estas observaciones sobre la metodología del Geoplano, comentaremos la forma de hacer las preguntas, que son la base de la enseñanza heurística. La educación heurística debe ser fundamentalmente oral, de contacto constante entre el profesor y el alumno, si bien por la masificación de las aulas esto es imposible, por lo que hay que recurrir frecuentemente a las actividades escritas. El problema es que por escrito es más difícil graduar la sucesión de preguntas que deben hacerse, para que el alumno tenga en cada momento la información precisa.

Por ejemplo, hay una pregunta que suele aparecer en este tipo de textos con frecuencia: "¿Hay ...? Construye varios". Con ella se está diciendo claramente que sí hay ..., con lo cual se anula parte de la investigación que debía hacer el alumno.

Otra pregunta que aparece en los temas relacionados con clasificaciones (de polígonos, por ejemplo) es: "¿Cuántos... hay en el Geoplano?". Esta pregunta supone un esfuerzo importante para los alumnos y los profesores debemos ser conscientes de su trascendencia cuando la formulamos. El problema inmerso en esa pregunta es cómo saber cuándo se han construido ya todas las figuras posibles del tipo que se solicita, si queda alguna por aparecer o si seguir la búsqueda sólo va a proporcionarnos repeticiones inútiles.

En primer lugar es necesario que los alumnos tomen conciencia de la existencia de esa dificultad (lo cual se logra con los primeros ejercicios y la comparación de los resultados obtenidos por varios niños) y después que intenten resolverla. La mejor solución consiste en diseñar un algoritmo (que garantice sin lugar a dudas que al final del proceso se habrán construido todas las figuras) utilizando alguna propiedad del Geoplano o de las figuras que haya que construir.

Estos algoritmos pueden ser difíciles, por lo que a los alumnos de hasta el Ciclo Medio no se les debe insistir demasiado en que busquen alguna figura que les falte, a no ser que esa figura sea importante para las actividades posteriores, pero sí consideramos interesante que se planteen esas dos dudas anteriores para que los alumnos sean conscientes de la conveniencia de seguir alguna estrategia, mejor que buscar al azar.

1.4. Organización y estructura del texto

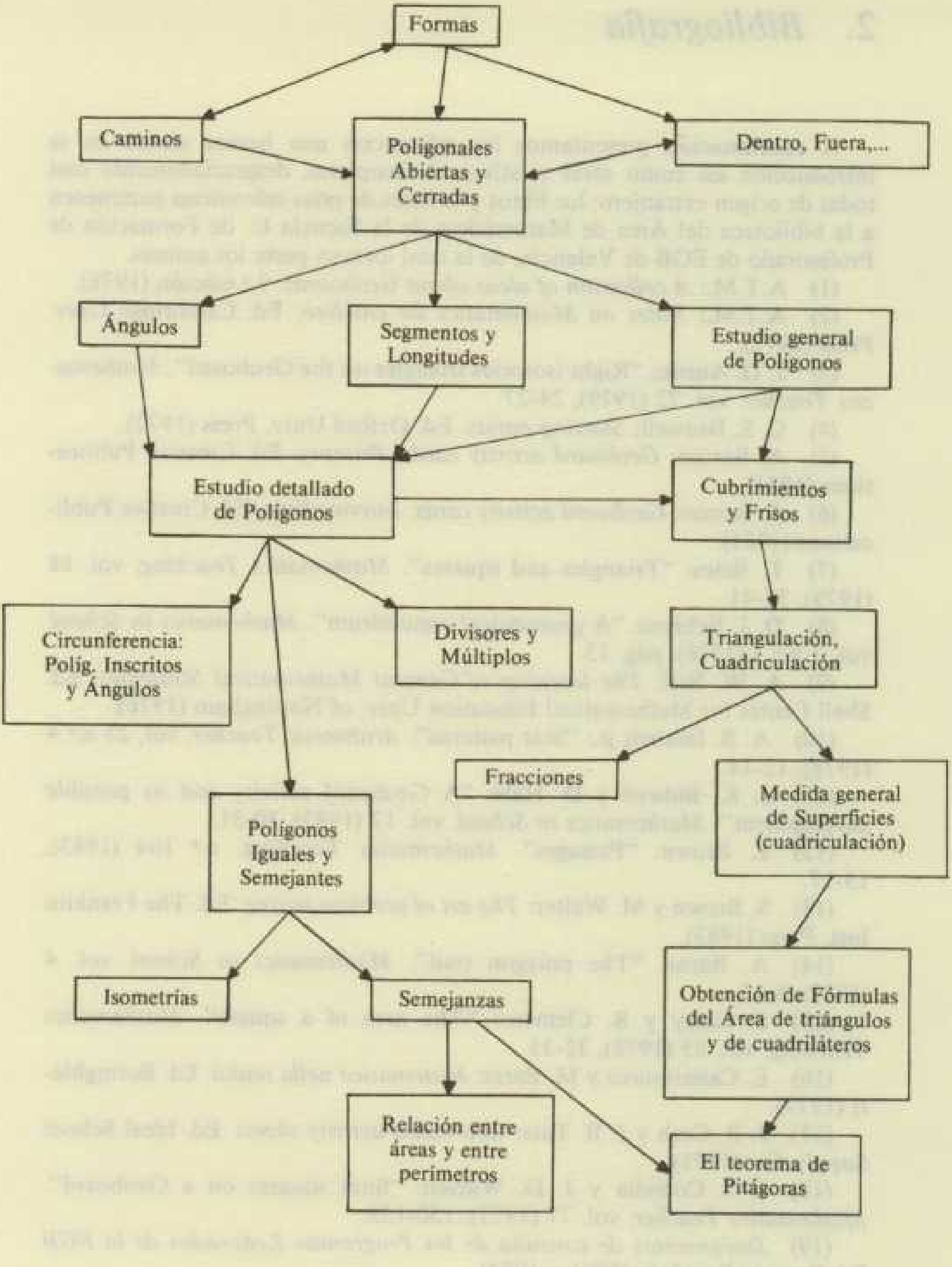
La parte principal de este libro está formada por bloques de actividades para estudiar diversos temas de EGB con la ayuda del Geoplano. Cada bloque trata un tema concreto y está organizado de forma continua desde la introducción de los conceptos hasta la obtención de las últimas propiedades. Algunos temas se estudian a lo largo de varios cursos o incluso varios Ciclos, sin embargo no hemos hecho ninguna partición de las actividades por este motivo pues tenemos la idea de que debe ser el profesor quien, en tales casos, seleccione la parte de actividades que le son útiles en su curso concreto.

En las páginas siguientes presentamos una tabla de contenidos y un esquema. La tabla está formada por todos los temas que hemos tratado con las actividades en este libro y sus apariciones a lo largo de los tres Ciclos de EGB, indicando las referencias de los Documentos de Consulta de los Programas Renovados (19).

El esquema que puede verse después es un diagrama que muestra las interrelaciones lógicas y temporales de los diferentes bloques de actividades, para mostrar cuáles es necesario, o por lo menos conveniente, conocer antes de abordar cada uno de ellos.

Cada bloque de actividades está formado por una primera parte de comentarios y una segunda con las actividades concretas. En la primera parte incluimos los fragmentos de los Documentos de Consulta que se refieren a ese bloque (según la tabla de la que hemos hablado) y unos comentarios, dirigidos a los profesores, relativos a determinados aspectos concretos de las actividades, posibles dificultades o sugerencias de cómo dirigir a los alumnos, todo ello con la intención de poner de relieve lo más claramente posible la idea con que hemos concebido las actividades y de ayudar lo más posible a los profesores que las utilicen.

Capítulo	*Preescolar*	*Ciclo Inicial*	*Ciclo Medio*	*Ciclo Superior*
3. Formas	2.2.1.-			
4. Dentro, fuera, etc....	2.1.1.-	5.1.1.-		
5. Caminos	1.3.3.- 2.1.3.-			
6. Líneas Poligonales		5.1.2.- 5.1.3.-		
7. Polígonos en general		5.2.2.- 5.2.3.-		
8. Ángulos			4.1.2.-4.1.3.- 4.1.6.-4.1.8.- 4.1.9.-	3.1.1.- 3.1.4.-3.1.9.-
9. Polígonos estudio detallado			4.1.4.-	2.1.1.- 3.1.8.-
10. Segmentos y Longitudes	1.2.3.-1.2.4.- 1.3.3.-	4.1.1.-	4.3.1.-	3.1.3.-
11. Circunferencia				3.1.5.-3.1.7.- 3.2.3.-
12. Cubrimientos y Frisos	2.2.2.-		4.2.2.-	
13. Triangulación y Cuadriculación			3.3.1.-3.3.3.- 4.1.10.-	
14. Medida general de superficies			3.3.1.-3.3.3.-	
15. Áreas de triángulos y cuadriláteros			4.3.1.-	3.2.6.-
16. Teorema de Pitágoras				3.3.3.-
17. Fracciones			2.3.1.-2.3.2.- 2.3.4.-	
18. Isometrías y Semejanzas			4.2.2.-4.2.3.- 4.2.4.-	3.3.2.-


Formas
Caminos
Poligonales Abiertas y Cerradas
Dentro, Fuera,...
Ángulos
Segmentos y Longitudes
Estudio general de Polígonos
Estudio detallado de Polígonos
Cubrimientos y Frisos
Circunferencia: Políg. Inscritos y Ángulos
Divisores y Múltiplos
Triangulación, Cuadriculación
Fracciones
Medida general de Superficies (cuadriculación)
Polígonos Iguales y Semejantes
Isometrías
Semejanzas
Obtención de Fórmulas del Área de triángulos y de cuadriláteros
Relación entre áreas y entre perímetros
El teorema de Pitágoras

2. *Bibliografía*

A continuación presentamos las referencias que hemos citado en la introducción así como otras relativas al Geoplano, desgraciadamente casi todas de origen extranjero; los libros y revistas de estas referencias pertenecen a la biblioteca del Área de Matemáticas de la Escuela U. de Formación de Profesorado de EGB de Valencia, de la cual forman parte los autores.

(1) A.T.M.: *A collection of ideas about Geoboards.* 9.ª edición (1978).

(2) A.T.M.: *Notes on Mathematics for children.* Ed. Cambridge Univ. Press (1977).

(3) J. D. Austin: "Right isosceles triangles on the Geoboard". *Mathematics Teacher,* vol. 72 (1979), 24-27.

(4) C. S. Banwell: *Starting points.* Ed. Oxford Univ. Press (1972).

(5) A. Barson: *Geoboard activity cards, Primary.* Ed. Creative Publications (1981).

(6) A. Barson: *Geoboard activity cards, Intermediate.* Ed. Creative Publications (1981).

(7) T. Bates: "Triangles and squares". *Mathematics Teaching,* vol. 88 (1979), 38-41.

(8) D. J. Behrens: "A geometrical conundrum". *Mathematics in School,* vol. 7 n.º 3 (1978), pág. 13.

(9) A. W. Bell: *The learning of General Mathematical Strategies.* Ed. Shell Centre for Mathematical Education Univ. of Nottingham (1976).

(10) A. B. Bennett jr.: "Star patterns". *Arithmetic Teacher,* vol. 25 n.º 4 (1978), 12-14.

(11) J. K. Bidwell y D. Hale: "A Geoboard activity and its possible development". *Mathematics in School,* vol. 12 (1983), 30-31.

(12) L. Brown: "Passages". *Mathematics Teaching,* n.º 104 (1983), 15-17.

(13) S. Brown y M. Walter: *The art of problem posing.* Ed. The Franklin Inst. Press (1983).

(14) A. Burns: "The polygon trail". *Mathematics in School,* vol. 4 (1982), 8-13.

(15) S. Casey y B. Clemens: "The area of a square". *Mathematics Teaching,* vol. 85 (1978), 32-35.

(16) E. Castelnuovo y M. Barra: *Matematica nella realtà.* Ed. Boringhieri (1977).

(17) J. P. Cech y J. B. Tate: *Geo-board activity sheets.* Ed. Ideal School Supply Co. (1971).

(18) J. J. Comella y J. D. Watson: "Sum squares on a Geoboard". *Mathematics Teacher,* vol. 77 (1977), 150-153.

(19) *Documentos de consulta de los Programas Renovados de la EGB* Ed. Escuela Española (1981 y 1984).

(20) J. A. Easly: "La renovación de las Matemáticas y sus problemas". *Matemática y Enseñanza,* vol. 7-8 (1976), 3-38.

(21) W. A. Ewbank: "If Pythagoras had a Geoboard". *Mathematics Teacher*, vol. 66 (1973), 215-221.

(22) M. A. Farrell: *Geoboard Geometry*. Ed. Creative Publications (1971).

(23) A. Fernández y A. Gutiérrez: "Actividades con el Geoplano". *Papeles de Enseñanza de las Matemáticas* (Univ. de Valencia), vol. 5 (1981).

(24) C. Gategno: *Álgebra y Geometría:* serie Aritmética con los Números en Color, n.º 9. Ed. Cuisinaire de España (1965).

(25) J. Gimeno Sacristán: "Las Normales a examen". *Cuadernos de Pedagogía*, n.º 69 (1980), 8-11.

(26) A. M. Guckin: "Square roots and Geoboards". *Mathematics Teacher*, vol. 72 (1979), 354-355.

(27) J. B. Harkin: "Transformation and Tessellation on the Geoboard". *Educational Studies in Math.*, vol. 5 n.º 4 (1974), 461-465.

(28) J. B. Harkin: "Introducing the Geoboard". *Educational Studies in Math.*, vol. 6 n.º 1 (1975), 113-118.

(29) J. B. Harkin: "Limit concept on the Geoboard". *Mathematics Teacher*, vol. 65 (1972), 13-17.

(30) C. R. Hirsch: "Pick's rule". *Mathematics Teacher*, vol. 67 (1974), 431-434.

(31) J. Holcomb: "Using Geoboard in the Primary School". *Arithmetic Teacher*, vol. 27 n.º 8 (1980), 22-25.

(32) L. James: "Mixed ability Maths". *Mathematics in School*, vol. 7 n.º 3 (1978), 26-28.

(33) H. A. Laing: "Preparing for Pythagoras". *Mathematics Teacher*, vol. 72 (1979), 599-602.

(34) J. E. L'Heureux: "Sum squares on a Geoboard revisited". *Mathematics Teacher*, vol. 75 n.º 8 (1982), 686-692.

(35) J. Lott y H. Nguyen: "Extremal problems on a Geoboard". *Mathematics Teacher*, vol. 72 (1979), 28-29.

(36) Ch. Lund: *Dot paper Geometry*. Ed. Cuisenaire Co. of America (1980).

(37) W. J. Masalski: "An open-ended problem on the Geoboard". *Mathematics Teacher*, vol. 67 (1974), 264-268.

(38) D. D. Paige y otros: *Elementary Mathematical Methods*. Ed. John Wiley & Sons (1978).

(39) K. Saunders: *Measurements*. Recognitions, n.º 8 (1977).

(40) J. Sauvy: "Approche de la notion de longeur". *Bulletin de l'A.P.M.E.P.*, n.º 341 (1983), 550-558.

(41) School Mathematics Project (SMP): *Books A y C*. Ed. Cambridge Univ. Press.

(42) G. Spitler: "The shear joy of area". *Arithmetic Teacher*, vol. 29 n.º 8 (1982), 36-38.

(43) R. R. Steffani: "The surveyor and the Geoboard". *Mathematics Teacher*, vol. 70 (1977), 147-149.

(44) L. Y. Hollis: "Teaching rational numbers - Primary Grades". *Arithmetic Teacher*, vol. 31 n.º 6 (1984), 36-39.

(21) W. A. Fallstad: "If Pythagoras had a Geoboard", Mathematics Teacher, vol. 66 (1973), 215-221.
(22) M. A. Farrell: Geoboard Geometry, Ed. Creative Publications (1971).
(23) A. Fernández y A. Gutiérrez: "Actividades con el Geoplano", Puertas de Enseñanza de las Matemáticas (Univ. de Valencia), vol. 1 (1981).
(24) C. Gattegno: Álgebra y Geometría, serie Aritmética con los Números en Color, n.º 8. Ed. Cuisenaire de España (1965).
(25) J. Gimeno Hernández: "Los Números a examen", Cuadernos de Pedagogía, n.º 69 (1980), 8-13.
(26) A. M. Gordon: "Square roots and Geoboards", Mathematics Teacher, vol. 72 (1979), 324-325.
(27) J. B. Harkin: "Transformation and Translation on the Geoboard", Educational Studies in Math., vol. 5 n.º 4 (1974), 461-465.
(28) J. B. Harkin: "Introducing the Geoboard", Educational Studies in Math., vol. 6 n.º 1 (1975), 113-118.
(29) J. B. Harkin: "Limit concept on the Geoboard", Mathematics Teacher, vol. 65 (1972), 13-17.
(30) C. R. Hirsch: "Pick's rule", Mathematics Teacher, vol. 67 (1974), 431-434.
(31) J. Holcomb: "Using Geoboards in the Primary School", Arithmetic Teacher, vol. 27 n.º 8 (1980), 22-25.
(32) L. James: "Mixed ability Maths", Mathematics in School, vol. 7 n.º 1 (1978), 26-28.
(33) H. A. Laing: "Preparing for Pythagoras", Mathematics Teacher, vol. 72 (1979), 599-602.
(34) J. E. L'Heureux: "Sum squares on a Geoboard revisited", Mathematics Teacher, vol. 75 n.º 8 (1982), 686-692.
(35) J. Lott y H. Pagnusz: "Extremal problems on a Geoboard", Mathematics Teacher, vol. 72 (1979), 26-29.
(36) Ch. Lund: Dot paper Geometry, Ed. Cuisenaire Co. of America (1980).
(37) W. J. Masalski: "An open-ended problem on the Geoboard", Mathematics Teacher, vol. 67 (1974), 364-368.
(38) D. D. Paige y otros: Elementary Mathematical Methods. Ed. John Wiley & Sons (1978).
(39) S. Pandelis: Mathematiques Recognitions, n.º 8 (1977).
(40) J. Sauvy: "Approche de la notion de longueur", Bulletin de l'A.P.M.E.P., n.º 341 (1983), 579-598.
(41) School Mathematics Project (SMP): Books A y C. Ed. Cambridge Univ. Press.
(42) G. Spitler: "The shear joy of area", Arithmetic Teacher, vol. 29 n.º 8 (1982), 36-38.
(43) E. R. Wallace: "The surveyor and the Geoboard", Mathematics Teacher, vol. 70 (1977), 143-146.
(44) L. V. Hollis: "Teaching squared numbers - Primary Grades", Arithmetic Teacher, vol. 31 n.º 5 (1984), 36-37.

3. *Formas*

OBJETIVOS	PREESCOLAR	ACTIVIDADES
2.2.1. **Reconocer formas.**		— Recortar formas sencillas (casitas, patitos, balcones, etc.) — Dar el nombre a formas geométricas sencillas. — Representar líneas abiertas y cerradas mediante lanas, cordones, jugando al corro. — Distinguir una caja cerrada y una abierta.

La mejor forma de empezar a utilizar el Geoplano, a cualquier edad, es mediante el juego libre, para que cada persona juegue con él y lo manipule como quiera. Este primer bloque de actividades está pensado para Preescolar, pero puede ser modificado para que sirva de introducción al Geoplano con alumnos de cualquier curso.

Las primeras manipulaciones que se realicen deben servir simplemente para conocer el material, descubrir la utilidad de los clavos y aprender a manejar las gomas. Una vez que los niños de Preescolar han estado un tiempo jugando libremente, se les puede pedir que intenten construir determinadas formas y figuras de objetos conocidos, bien de tipo geométrico o imitando objetos reales; para estas actividades se pueden usar tanto el Geoplano cuadrado como el circular de 12 puntos (fig. 3.1).

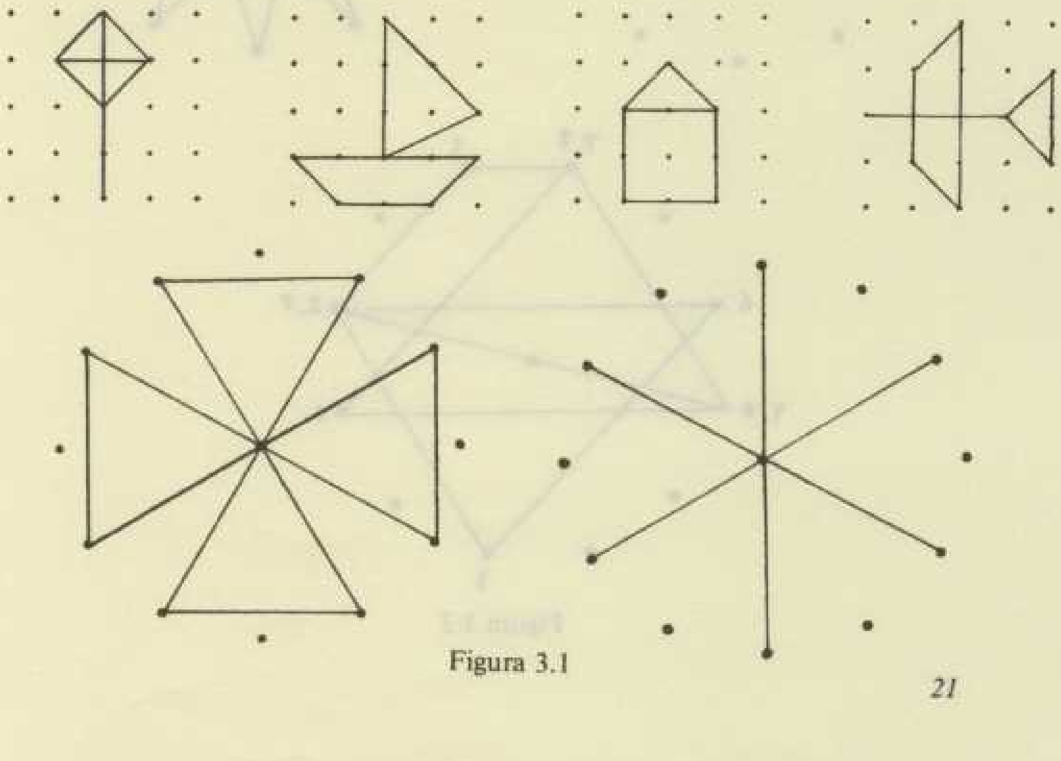


Figura 3.1

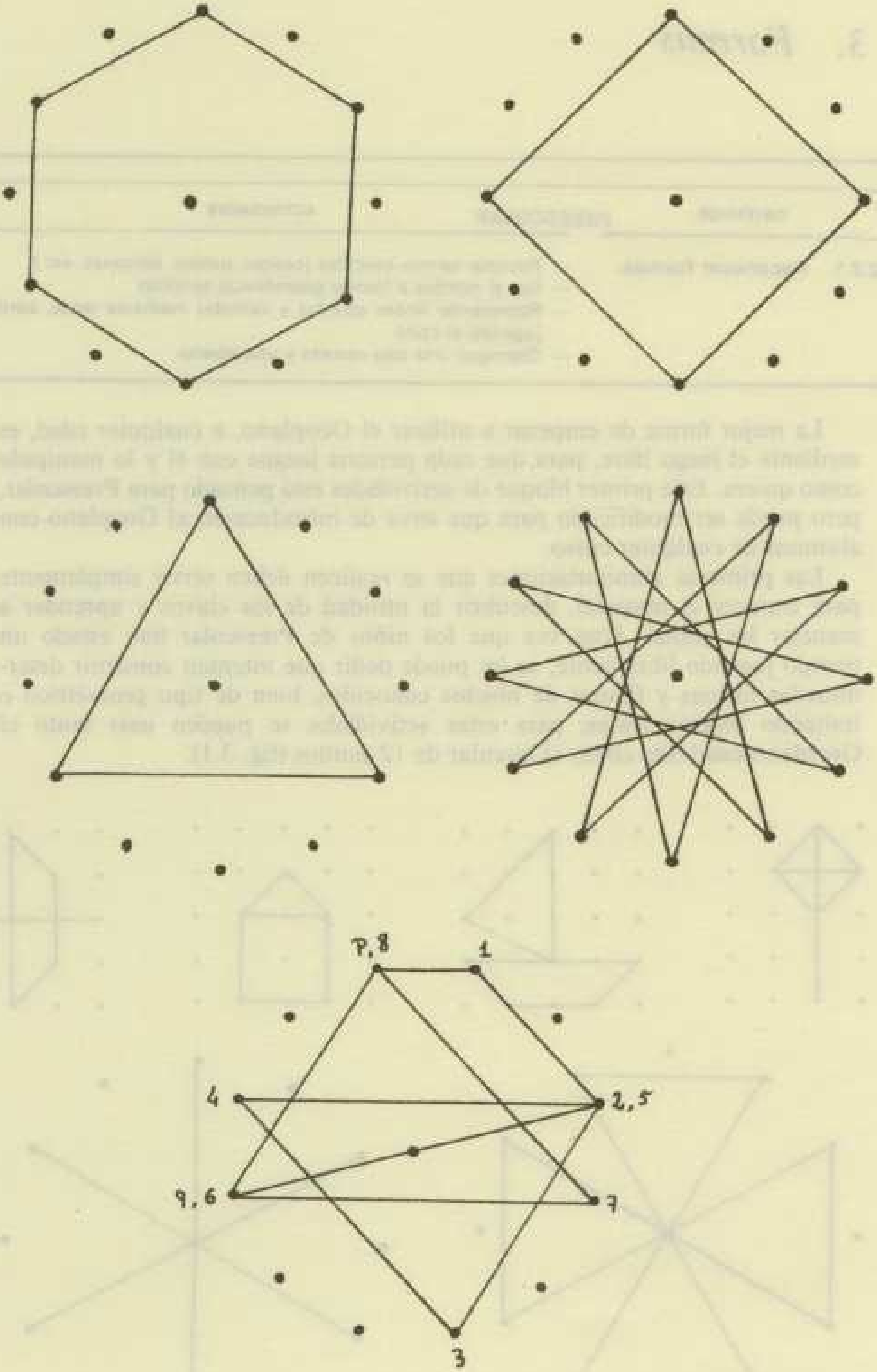


Figura 3.2

También se les puede pedir que reproduzcan figuras hechas por sus compañeros. Esto no es difícil pues la estructura del Geoplano hace que las figuras incorrectas sean casi siempre bastante diferentes de las originales.

Si los niños ya han aprendido los números y saben contar, se les pueden plantear actividades para que practiquen con ellos, del estilo de éstas:

F-1. (En el Geoplano cuadrado). Construye figuras haciendo que cada goma que uses toque sólo dos clavos (o tres, cuatro, etc. clavos).

F-2. (En el Geoplano circular). Une los clavos de la circunferencia* de uno en uno (de dos en dos, de tres en tres, etc.) hasta que vuelvas al primero.

F-3. Une los clavos de la circunferencia saltándote uno, después dos, después tres, etc.

Algunos resultados de las actividades se ven en la figura 3.2. En F-2 y F-3 debemos tener en cuenta la dificultad que pueden tener los niños para colocar las gomas; tal vez sea más conveniente usar una cuerda fina en vez de gomas para hacer estas actividades. Por otra parte, lo importante no es lo artístico del resultado sino que los niños utilicen secuencias de números.

Dentro de la enseñanza global de Preescolar y Primera Etapa de EGB, estas actividades pueden ir acompañadas de una segunda parte consistente en pedir a los alumnos que dibujen los resultados en papel, con lo cual alternan el trabajo aritmético con el geométrico y el dibujo, adquiriendo además práctica en el dibujo geométrico, que más adelante les resultará útil, cuando tengan que dibujar polígonos regulares o cualquier otra figura con precisión.

* La palabra circunferencia, que los niños no conocen, debería ser sustituida por otra puesta por ellos para identificar a esos clavos.

4. *Dentro, fuera y otros conceptos topológicos*

OBJETIVOS	PREESCOLAR — ACTIVIDADES
2.1.1. **Situarse en el espacio con relación a objetos, edificios, a otros compañeros, etc.**	— Distinguir cuándo otro niño o él mismo está en movimiento o parado — Saber saltar dentro de una alfombra relativamente pequeña o de un espacio pintado en el suelo. — Colocarse «dentro de», «fuera de», «en la línea», según se le ordene.

En Preescolar se toma el primer contacto con los conceptos topológicos de dentro, encima, abierto, etc. y otros tales como cerca y lejos. De todos ellos los que más se prestan a trabajar con el Geoplano son los referentes a la situación respecto de una frontera, que es el contenido de esta sección.

Las primeras actividades, muy elementales, consisten en construir figuras en el Geoplano 5×5 y señalar clavos que estén situados dentro de la goma, fuera de ella o que la toquen. En particular, se les debe pedir que construyan figuras sin clavos en el exterior o en el interior.

Normalmente las figuras que construyen los niños son cerradas (por la forma de las gomas), pero si aparecen figuras abiertas se puede aprovechar la situación para hacer hincapié en esta idea y en su relación con los conceptos de dentro y fuera.

OBJETIVOS	CICLO INICIAL — ACTIVIDADES
5.1.1. **Realizar experiencias relacionadas con «dentro» (interior), «fuera» (exterior), «encima», «sobre», «debajo», «borde».**	— Dado un dibujo de figuras superpuestas (preferentemente las de las estudiadas en este ciclo) el alumno ha de ser capaz de decir cuál de las figuras está arriba y cuál está debajo. — Dado un dibujo en el que se encuentre representada una línea curva y cerrada, el alumno ha de ser capaz de identificar el interior (dentro) y el exterior (fuera) de la misma. — También vale la actividad del objetivo número 5.1.2.

En el Ciclo Inicial se vuelve a insistir en estos conceptos. Ahora los niños ya saben contar y pueden realizar otro tipo de actividades más interesantes, relativas a construir figuras con determinado número de clavos en el exterior, en la frontera o en el interior (actividades D-1 hasta D-4). Evidentemente, dados dos de estos valores el tercero queda fijado por el tamaño del Geoplano; esta propiedad puede usarse para plantear actividades en las que los alumnos tengan que hacer sumas y restas.

A propósito de lo que indicábamos en un párrafo anterior respecto de que los alumnos normalmente dibujan regiones cerradas, es importante que no se identifique el concepto de Frontera como el límite de una región cerrada, sino como la división entre dos regiones. Este es el objetivo de las actividades D-5 y siguientes. Los ejemplos de la figura 4.1 muestran que las actividades D-5 y D-6 no son equivalentes, sino que pueden llevar a resultados diferentes.

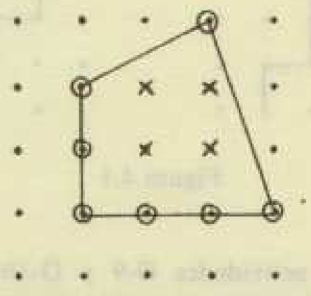
Figura 4.1

Por último, con las actividades D-9 y D-10 pretendemos poner de manifiesto la relatividad de estos conceptos si tenemos varias figuras a la vez y la necesidad de indicar fuera o dentro de qué figura está un punto.

ACTIVIDADES

D-1. Construye una figura que tenga 5 clavos fuera y 4 clavos dentro.

D-2. Una figura del Geoplano se puede describir por un par de números F(**a**);I(**b**) que indican que en la frontera hay **a** clavos y en el interior hay **b** clavos (figura 4.2). ¿Podrías escribir los pares correspondientes a las figuras 4.3, 4.4 y 4.5?



polígono con F(7); I(4)
Figura 4.2

Figura 4.3

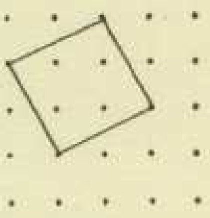


Figura 4.4

Figura 4.5

D-3. La figura 4.2 de la actividad D-2 tiene el par F(5);I(1). ¿Puedes construir otras figuras diferentes que tengan también el par F(5);I(1)?

D-4. ¿Puedes construir figuras que correspondan a los siguientes pares? F(4);I(2) - F(2);I(4) - F(3);I(0) - F(3);I(5) - F(6);I(2).

D-5. Traza una línea que divida a tu Geoplano 5×5 en dos partes con el mismo número de clavos cada una.

D-6. Traza ahora una línea que lo divida en dos partes iguales.

D-7. Con dos gomas, divide al Geoplano en tres partes con el mismo número de clavos cada una.

D-8. Después, divídelo en cuatro partes con el mismo número de clavos cada una.

D-9. Divide al Geoplano en tres partes iguales.

D-10. Divide al Geoplano en cuatro partes iguales.

D-11. Copia en tu Geoplano el dibujo de la figura 4.6. Escoge varios puntos del Geoplano y dí, para cada uno de ellos, si está dentro o fuera de las figuras.

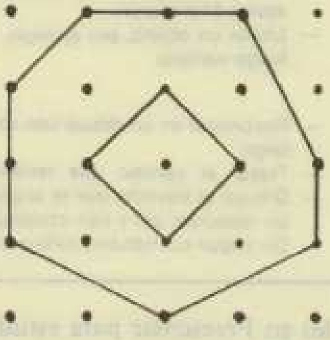


Figura 4.6

D-12. Repite la actividad anterior con los pares de figuras que ves debajo (figura 4.7).

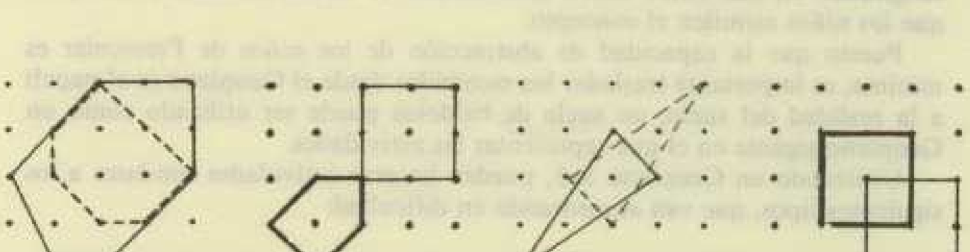


Figura 4.7

5. *Caminos*

OBJETIVOS	PREESCOLAR ACTIVIDADES
1.3.3. **Realizar experiencias de «medir» sin expresar el resultado.**	— «Medir» una línea pintada en el suelo con pasos, con una barra, con una cuerda, sin exigir el número de veces que el pie, barra, etc., está contenido en la línea. — Hacer la progresión de las barras rojas Montessori y de las rojas y azules Montessori. — Llenar un objeto, por ejemplo, un cubito, con arena o con agua y luego vaciarlo.
2.1.3. **Dibujar, reconocer y organizar trayectos y laberintos.**	— Reconocer en un dibujo con caminos el camino más corto y el más largo. — Trazar el camino que recorrería un niño para ir a su casa. — Dibujar el trayecto que se seguirá para llegar de un punto a otro de un laberinto, sin y con obstáculo. — Distinguir cuando otro niño o él mismo está en movimiento o parado.

Los caminos son útiles en Preescolar para estudiar conceptos relativos al movimiento y, de forma práctica, para desarrollar las facultades motrices de los niños. Pero, por otra parte, no debemos olvidar que los caminos es una primera etapa de un proceso que llevará algunos años después a los polígonos y al estudio de las longitudes y esto hay que tenerlo presente en el trabajo que se haga en Preescolar, para darle también esta orientación. En cuanto a las longitudes, en este curso deben considerarse de forma intuitiva y sólo para que los niños asimilen el concepto.

Puesto que la capacidad de abstracción de los niños de Preescolar es mínima, es importante trasladar los recorridos desde el Geoplano (o el papel) a la realidad del suelo; un suelo de baldosas puede ser utilizado como un Geoplano gigante en el que representar las actividades.

Utilizando un Geoplano 5x5, pueden hacerse actividades similares a los siguientes tipos, que van aumentando en dificultad:

Tipo 1. Actividades en las que los niños unen dos puntos del Geoplano con una goma y recorren con el dedo el camino marcado por la goma.

Utilizando gomas de colores, los niños pueden construir varios caminos que unan los mismos puntos. La segunda parte de estas actividades consiste en escenificar sobre el aula recorridos iguales que los dibujados en el Geoplano. Naturalmente, la exactitud que habrá al pasar del Geoplano al suelo, o viceversa, será poca, por lo menos al principio, pero eso es poco importante.

Tipo 2. En las actividades anteriores los niños tenían libertad para construir los caminos como quisieran; ahora les impondremos algunas restricciones, bien en forma de prohibición bien de obligación.

Por ejemplo: En las actividades del tipo 1, la parte de suelo del aula que hacía de Geoplano estaba despejada. ¿Qué ocurrirá si ponemos una mesa o cualquier objeto grande en ese espacio? Algunos caminos quedarán cortados y habrá que dar rodeos. Esto, traducido al Geoplano, equivale a prohibir el paso por algún punto o algún segmento.

Otro ejemplo: En el "Geoplano" del aula hay varios niños quietos esperando a que un repartidor (otro niño) les dé alguna cosa. Esto quiere decir que en el Geoplano de madera habrá que pasar por determinados clavos.

Por último, podemos combinar los dos tipos de restricciones.

Tipo 3. Podemos diferenciar entre caminos que vuelven al punto de partida y caminos que no vuelven (las escenificaciones para estos casos son evidentes para cualquier maestro). De aquí llegamos a los conceptos de línea abierta y línea cerrada, que más adelante darán lugar a las poligonales abiertas y a las cerradas (polígonos).

Todas las actividades que hemos propuesto aquí están referidas a los cursos de Preescolar o primeros años de E.G.B.; no obstante, unos años después, al final del Ciclo Superior, pueden usarse los caminos para construir el Triángulo de Tartaglia (o de Pascal). Las actividades consisten en calcular cuántos caminos de una determinada longitud hay entre dos puntos fijos y están completamente desarrolladas en (23).

6. *Líneas poligonales*

OBJETIVOS	CICLO INICIAL	ACTIVIDADES
5.1.2.	**Distinguir líneas poligonales abiertas y cerradas.**	— Se pedirá al alumno que se fije en los bordes de polígonos que haya en la clase e identificar si son líneas abiertas o cerradas y también que identifique las líneas poligonales y no poligonales, abiertas y cerradas representadas en un grabado.
5.1.3.	**Representar gráfica y plásticamente líneas poligonales e identificar las del mundo circundante.**	— Después de identificar en un dibujo líneas en objetos poligonales en distintas posiciones, cerradas y abiertas, el alumno construirá en alambre o con gomillas sobre el geoplano una de las líneas abiertas identificadas y otra de las cerradas. — Dados al alumno polígonos construidos en papel o cualquier otro material y objetos, que pase su dedo índice por los bordes correspondientes.

Entre otros conceptos estudiados en Preescolar, están los de abierto y cerrado, en los cuales se sigue insistiendo en los primeros cursos de E.G.B. para utilizarlos en la introducción de los polígonos. También se sigue trabajando con los caminos, pero ahora habrá que tender al uso de caminos que sólo tienen tramos rectos, para lo cual puede ser muy útil el Geoplano. Las actividades empezarán recordando los conceptos aprendidos en Preescolar acerca de los caminos, pero dando más énfasis a lo relacionado con la forma de éstos.

Una vez que se ha centrado la atención en el hecho de que los caminos estarán formados por segmentos rectos, se podrá ir cambiando el vocabulario poco a poco para pasar de "camino" a "línea" y a "línea poligonal" (para distinguir éstas de las formadas por segmentos curvos); también se introducirán los nombres de "lado" y "vértice", para que los niños vayan adquiriendo de forma natural estas palabras que representan los conceptos importantes relativos a los polígonos.

Las actividades pueden ir secuenciadas según los siguientes tipos:

Tipo 1. Actividades similares a las realizadas en Preescolar, para recordar los conocimientos sobre caminos, realizadas en el Geoplano 5×5.

Tipo 2. Actividades en las que se distingue entre caminos ramificados y caminos de una sola trayectoria (figura 6.1); con estas actividades pretendemos eliminar algunos tipos de líneas que no son útiles para llegar al concepto de polígono. También se realizarán actividades en las que se diferencie entre caminos abiertos y cerrados. Su objetivo es centrar la atención de los niños en las líneas poligonales (con dos extremos o con ninguno).

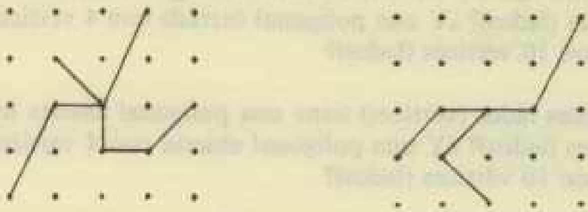


Figura 6.1

Por último, dentro de este bloque, se pueden realizar, si todavía está confusa la cuestión, actividades para separar los caminos con tramos curvos de los que sólo tienen tramos rectos.

Tipo 3. Actividades que resumen los resultados del bloque anterior y que sirven para introducir el nuevo vocabulario:

LP-1. Llamaremos "líneas poligonales" a los caminos que están formados sólo por líneas rectas. Busca líneas poligonales entre los caminos que has construido hasta ahora y dibuja otras nuevas.

LP-2. Cada tramo recto de la línea poligonal se llama "lado" (figura 6.2). ¿Cuántos lados tienen las líneas poligonales que has dibujado en la actividad anterior? Anota junto a cada figura el resultado que saques.

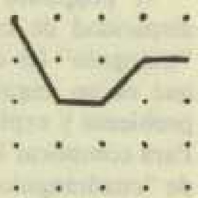


Figura 6.2

LP-3. Los extremos de los lados de una línea poligonal se llaman "vértices" (figura 6.3). ¿Cuántos vértices tienen las líneas poligonales que tienes dibujadas? Anota ahora también cada resultado al lado de las figuras.

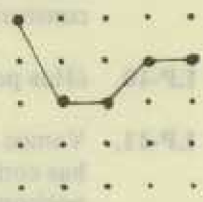


Figura 6.3

LP-4. Compara el número de lados y el número de vértices que has anotado en una línea poligonal. ¿Ves alguna relación entre esos dos números? Observa si la relación es la misma en todas las poligonales.

LP-5. Separa las poligonales que tienes dibujadas según que sean líneas abiertas o líneas cerradas. ¿Qué relación ves entre el número de lados y el número de vértices de una poligonal cerrada?

LP-6. ¿Qué relación ves entre el número de lados y el número de vértices de una poligonal abierta?

LP-7. ¿Cuántos lados (vértices) tiene una poligonal cerrada formada por 6 vértices (lados)? ¿Y una poligonal cerrada con 4 vértices (lados)? ¿Y una con 10 vértices (lados)?

LP-8. ¿Cuántos lados (vértices) tiene una poligonal abierta formada por 6 vértices (lados)? ¿Y una poligonal abierta con 4 vértices (lados)? ¿Y una con 10 vértices (lados)?

Tipo 4. En las siguientes actividades, los alumnos empezarán a construir polígonos, si bien sólo de una manera informal, pues el estudio de los polígonos será abordado en el bloque de actividades siguiente. Si se cree conveniente, es posible ir dando nombre a los polígonos de pocos lados, aunque no es necesario para las actividades que los niños realizan en este momento. Un aspecto importante de estas actividades está en hacer ver a los alumnos la imposibilidad de construir polígonos de menos de tres lados (¡con los lados rectos, naturalmente!). Aquí puede que el Geoplano resulte molesto porque al colocar una goma entre dos clavos, por el grosor de los clavos, aparezcan dos lados en vez de uno.

A propósito de los nombres de los polígonos, resulta paradójica la disparidad de criterios que se siguen, pues hay una figura que se llama "triángulo" (es decir, con tres ángulos), y esto antes de que los niños sepan qué es un ángulo. Suponemos que lo que hay que hacer es olvidarse del problema y explicar a los niños el significado de esa palabra en su momento. Para complicar las cosas, el siguiente polígono se llama "cuadrilátero" en vez de "cuadrángulo" y después se decide volver a cambiar con "pentágono", etc.

LP-9. Dibuja varias poligonales que tengan 1 lado, otras que tengan 2 lados, otras que tengan 3 lados y otras que tengan 4 lados. Procura construir algunas de cada clase abiertas y otras cerradas.

LP-10. ¿Has podido construir poligonales cerradas de todas las clases?

LP-11. Vamos a llamar "polígonos" a las líneas poligonales cerradas. Ya has comprobado en la actividad anterior que no se pueden construir polígonos con menos de tres lados. Dibuja polígonos con 3 lados, otros con 4 lados y otros con 5.

Estas últimas actividades pretenden reflejar la diferencia entre poligonales y polígonos. Por último, indicaremos que las actividades de este cuarto tipo pueden realizarse en el Ciclo Inicial o en el Medio, en función de los objetivos generales que se plantee cada profesor respecto al tema de los polígonos.

7. *Polígonos en general*

CICLO INICIAL

OBJETIVOS	ACTIVIDADES
5.2.2. Identificar polígonos hasta el pentágono y describirlos.	—De objetos que haya en la clase se pedirá al alumno que identifique triángulos, cuadriláteros y pentágonos; luego los realizará con alambre, geoplano, palillos ...; y si son de palillos los pegará en cartulina y pondrá el nombre de cada polígono debajo de la figura correspondiente y los describirá con sus palabras.
5.2.3. Representar gráficamente polígonos hasta el pentágono.	— Vale la actividad de los objetivos número 5.2.2.

Al entrar en el estudio de los polígonos no hacemos más que continuar con el trabajo que hemos realizado con las líneas poligonales, que terminó con la construcción de triángulos, cuadriláteros y pentágonos.

Así pues, en el Ciclo Inicial continuaremos con el reconocimiento de los polígonos y de sus elementos (lados y ángulos).

En el Ciclo Medio se profundiza un poco más, estudiando la clasificación detallada de los triángulos y cuadriláteros e introduciendo el concepto de diagonal. También se diferenciará entre los polígonos regulares y los irregulares.

Como los polígonos se introducen a partir de las poligonales, es natural que aparezcan polígonos cóncavos y convexos. No es conveniente eliminar los polígonos cóncavos, pues dentro de unos años los niños van a tener que usarlos de nuevo y, por otra parte, aparecen con bastante frecuencia en la vida ordinaria; también es interesante, desde el punto de vista geométrico, investigar qué propiedades se conservan para estos polígonos.

Las primeras actividades de este capítulo conectan con las líneas poligonales y se orientan hacia el afianzamiento de los conceptos. La primera parte de las actividades (hasta PG-6) corresponde al Ciclo Inicial. Las actividades propuestas para el Geoplano circular de 12 puntos pueden realizarse también con el de 24 puntos; en estos geoplanos, usando el clavo del centro es fácil que aparezcan polígonos cóncavos.

Las actividades PG-4, PG-5 y PG-6 sirven, por el momento, para afianzar el vocabulario y los conceptos; más adelante serán la base que permita la clasificación. Su primer objetivo es familiarizar a los niños con las diversas formas y tamaños de los polígonos, y no sólo con los regulares. Los alumnos tendrán que decidir qué son polígonos "diferentes"; nuestra idea al proponer las actividades es considerar diferentes las formas y los tamaños, pero no las posiciones.

Como en el Geoplano cuadrado no se pueden construir triángulos equiláteros, ni otros polígonos regulares aparte del cuadrado, es conveniente alternarlo con el Geoplano circular, en el que sí es posible construir más polígonos regulares.

En la actividad PG-4 surge la pregunta ¿Cuántos...? que ya hemos comentado. Es fácil, sobre todo si los niños trabajan en grupos, que construyan los 8 triángulos; de los 16 cuadriláteros, es conveniente que obtengan los paralelogramos y los trapecios, pues serán útiles más adelante; no es importante que construyan todos los pentágonos (hay 23), pero es interesante que con esta actividad los alumnos desarrollen y perfeccionen técnicas de búsqueda.

Un modo de mejorar estas actividades es utilizando el Geoplano giratorio 3×3, con el fin de habituar a los alumnos a ver las figuras en distintas posiciones. Girando el Geoplano se puede ver mejor si una figura es nueva o está repetida, cosa que con el Geoplano estático resulta más difícil. Así, es fácil darse cuenta, sólo con mover el Geoplano giratorio, de que el triángulo -a- (figura 7.1) coincide con el -c- pero no con el -b-. No obstante, este procedimiento es inútil para comparar dos figuras simétricas (la -a- y la -d- de la misma figura) que, para nuestros intereses conviene considerar iguales.

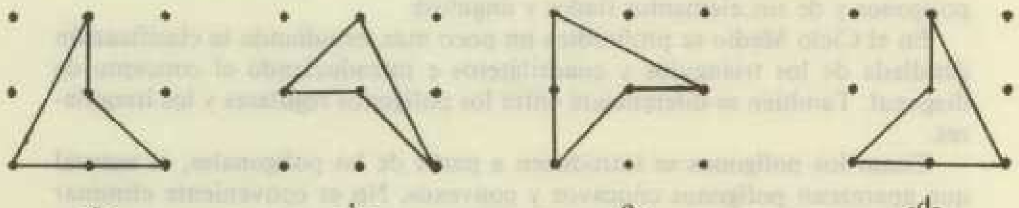


Figura 7.1

Puesto que en el Ciclo Inicial es demasiado pronto para hablar de simetría a los niños, se puede optar por dos salidas: o se consideran las figuras geométricas como diferentes o se comparan mediante un espejo o mirando el papel al trasluz.

La última parte de las actividades, desde PG-7, está destinada a introducir las diagonales de los polígonos en el Ciclo Medio. Conviene realizarlas en el Geoplano 5×5 o en los circulares.

En PG-9 se pide a los alumnos que dibujen las diagonales de un triángulo. Naturalmente no pueden, pero deben ser los alumnos sólos quienes descubran que no es posible. Solamente después de ese descubrimiento, el profesor preguntará qué pasa y dará las explicaciones convenientes para aclarar las ideas. Este aspecto de la enseñanza heurística, que debe ser fundamentalmente oral, es el más difícil de plasmar en unas actividades escritas.

La particularidad de la no existencia de diagonales en los triángulos tiene su continuación en la característica de que no hay triángulos cóncavos. El problema, si se enfoca mal, puede hacerse complicado. Por la edad de los alumnos, no se deben usar razonamientos del tipo de que "el triángulo es convexo porque todas sus diagonales (cero diagonales) están dentro de él" o "porque no tiene ninguna diagonal fuera"; estas justificaciones son correctas, pero suponen un conocimiento de la lógica matemática que los niños no tienen. Creemos que las actividades PG-13 a PG-16 dan una buena solución al hacer notar que la forma de los triángulos corresponde a la de los polígonos convexos (los vértices están "hacia fuera", es decir, sus ángulos son menores de 180 grados).

ACTIVIDADES

PG-1. En el Geoplano 5×5, construye líneas poligonales cerradas. Recuerda que las llamamos "polígonos". Cuenta el número de lados que tienen los polígonos que has construido.

PG-2. De los polígonos de la actividad anterior, señala los *triángulos* (tienen tres lados). Señala ahora los *cuadriláteros* (los de 4 lados) y después los *pentágonos* (los de 5 lados).

PG-3. Repite las actividades anteriores sobre el Geoplano circular de 12 puntos.

PG-4. Construye triángulos en el Geoplano 3×3. Ves dibujando en el papel aquéllos que sean diferentes de los anteriores. ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden construir?

PG-5. Repite la actividad anterior pero construyendo cuadriláteros.

PG-6. Repítela ahora construyendo pentágonos.

PG-7. Construye un pentágono. Une con una goma de otro color dos vértices que no sean *adyacentes* (es decir que no estén seguidos). Repite esto varias veces en el mismo polígono. Estas líneas se llaman "diagonales" del polígono. Construye las diagonales de varios polígonos.

PG-8. Explica qué diferencias observas entre las diagonales y los lados.

PG-9. Construye cuadriláteros y dibuja sus diagonales. Construye ahora triángulos y dibuja sus diagonales.

PG-10. Construye cuadriláteros y pentágonos. Traza todas las diagonales de cada polígono y cuéntalas.

PG-11. ¿Están siempre las diagonales dentro del polígono?

PG-12. De los polígonos de la actividad PG-10, separa aquéllos que tienen alguna diagonal fuera del polígono. Llamaremos a esos polígonos "cóncavos". A los polígonos que tienen todas las diagonales dentro los llamaremos "convexos".

PG-13. Construye polígonos convexos.

PG-14. Construye polígonos cóncavos.

PG-15. Compara la forma de los polígonos cóncavos y la de los polígonos convexos; saca alguna consecuencia de las diferencias que notes.

PG-16. ¿Has construido algún triángulo en PG-14? ¿Hay triángulos cóncavos?

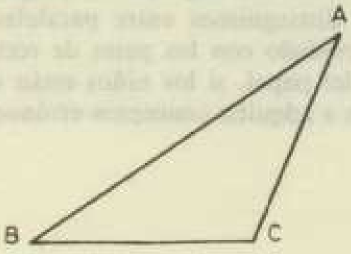
8. *Tipos de ángulos y conceptos relacionados con los ángulos*

CICLO MEDIO

OBJETIVOS		ACTIVIDADES SUGERIDAS
4.1.2.	**Reconocer y distinguir las diferentes clases de ángulos en relación con la región angular que ocupa.**	— Realizar ejercicios de reconocimiento de regiones angulares y de ángulos de diferentes clases. *Ejemplos:* a) Dibujar dos rectas que se cortan formando cuatro regiones angulares.
4.1.3.	**Dibujar y reconocer ángulos complementarios, suplementarios y opuestos por el vértice.**	— Dibujar un ángulo recto. Dividido en dos con una recta que pase por el vértice. Observar que estos dos nuevos ángulos juntos son iguales al ángulo recto (son complementarios). — Hacer los ejercicios con cartulina y recortar las figuras.
4.1.6.	**Reconocer las cuatro regiones angulares que se determinan al cortarse dos rectas.**	— Mediante plegado construir regiones angulares y reconocerlas.
4.1.8.	**Clasificar y reconocer las distintas clases de ángulos (recto, agudo y obtuso).**	— Reconocer ángulos formados con diversos objetos. *Ejemplo:* a) Colocar las agujas del reloj de modo que formen ángulos rectos, agudos y obtusos.
4.1.9.	**Reconocer rectas perpendiculares.**	— Señalar en la clase rectas perpendiculares y los correspondientes ángulos rectos. — Dibujar un plano. Trazar en él dos rectas perpendiculares. Observar que las cuatro regiones angulares formadas son iguales.

CICLO SUPERIOR

OBJETIVOS		ACTIVIDADES SUGERIDAS
3.1.1.	**Reconocer y manejar conceptos geométricos fundamentales: perpendicularidad y paralelismo, mediatriz, altura, mediana.**	— Construcción de elementos geométricos fundamentales.

3.1.4. Identificar, reconocer y construir ángulos opuestos por el vértice, adyacentes, de lados paralelos, etcétera, y establecer las relaciones que existan entre ellos.	
3.1.9. Demostrar algunos teoremas de geometría elemental. (Medida de los ángulos interiores de un triángulo, exterior a un triángulo, interior de un polígono, etc.).	1. En el triángulo ABC, demostrar que: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$. 

Vamos a realizar varias actividades sobre el Geoplano circular de 24 puntos para ayudar a introducir los primeros conceptos relativos a los ángulos y a sus tipos. En el Ciclo Medio se estudiarán los aspectos relacionados con la amplitud de los ángulos y en el Ciclo Superior se introducen los tipos de ángulos según su posición relativa, así como otras propiedades como perpendicularidad y paralelismo. En el Geoplano circular usaremos siempre el clavo central como vértice y en el cuadrado se elegirá el clavo según las necesidades de cada caso. Las actividades propuestas para el Ciclo Medio son las comprendidas entre A-1 y A-20.

En un Geoplano circular es fácil encontrar ángulos rectos (basta con contar clavos) y además siempre tienen los lados iguales; los alumnos se fijarán en la amplitud para ver si el ángulo es recto o no. Esto es útil para la división del plano en cuadrantes; sin embargo en el Geoplano cuadrado se pierde esa referencia, por lo que necesariamente hay que desarrollar la idea de perpendicularidad y centrar la atención en la posición relativa de los lados. Es interesante pedir a los niños que construyan ángulos rectos en posiciones no estándar (figura 8.1), para que aprendan a reconocerlos en

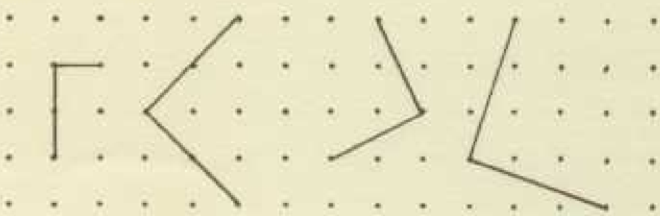


Figura 8.1

cualquier posición y para que les resulte fácil encontrar los cuadrados y rectángulos "escondidos" del Geoplano. Este es el objetivo de A-9.

Si el profesor lo cree interesante, puede proponer actividades de encontrar todos los ángulos diferentes que hay, de cada tipo, en el Geoplano 5×5.

Con las actividades A-21 y siguientes, descubrimos propiedades de perpendicularidad y paralelismo y, a partir de ellas, las distintas posiciones relativas de dos ángulos. Al preguntar por las posiciones relativas de dos rectas, distinguimos entre paralelas, oblicuas y perpendiculares. Hay que tener cuidado con los pares de rectas que se cortan fuera del Geoplano (o fuera del papel, si los niños están dibujando), para evitar que los alumnos lleguen a adquirir conceptos erróneos.

ACTIVIDADES

A-1. Une por medio de gomas dos clavos del Geoplano circular con el clavo del centro. ¿Cuántos ángulos forman los dos segmentos? Repite varias veces la actividad uniendo pares de clavos con el centro.

A-2. Construye un ángulo con el vértice en el centro del Geoplano. Construye unos ángulos que sean más amplios y otros que sean menos amplios que el primero.

A-3. Une dos puntos del Geoplano circular de manera que el segmento que se forma pase por el clavo del centro. Repite otra vez la construcción. ¿Cuántos ángulos forman los dos segmentos? ¿Cuántas regiones se forman en el Geoplano?

A-4. Repite A-3 varias veces. ¿Son siempre distintos los ángulos? Intenta hacer alguna construcción en la que todos los ángulos sean iguales. ¿Son iguales las regiones?

A-5. Si dos segmentos dividen al Geoplano circular en cuatro partes iguales, llamaremos "cuadrante" a cada una de esas regiones. Haz más divisiones del Geoplano en cuadrantes.

A-6. Diremos que un ángulo es "recto" si abarca *exactamente* un cuadrante. Construye varios ángulos rectos en el Geoplano circular.

A-7. Diremos que un ángulo es "agudo" si abarca *menos* de un cuadrante. Construye varios ángulos agudos.

A-8. Diremos que un ángulo es "obtuso" si abarca *más* de un cuadrante. Construye varios ángulos obtusos.

A-9. Construye ángulos en el Geoplano 5×5 e indica en cada uno qué tipo de ángulo es. Construye algunos ángulos que sean agudos, otros rectos y otros obtusos.

A-10. ¿Hay ángulos agudos de diferentes amplitudes? ¿Y ángulos rectos? ¿Y ángulos obtusos? Aclara las respuestas con ejemplos.

A-11. Diremos que dos rectas (o segmentos) son "perpendiculares" si se cortan formando ángulos rectos. Dibuja en el Geoplano circular varios pares de rectas (o segmentos) perpendiculares; dibújalos también en el Geoplano 5×5.

A-12. Usa el Geoplano y gomas de varios colores para construir dos ángulos que no tengan ni el vértice ni los lados comunes. Repite varias veces esta actividad.

A-13. Ahora construye pares de ángulos que tengan el vértice común pero no los lados.

A-14. Construye pares de ángulos que tengan en común el vértice y uno de sus lados.

A-15. Construye pares de ángulos que tengan en común algún lado pero no el vértice.

A-16. Repite varias veces las actividades desde A-12 hasta A-15 y dibuja los resultados en el papel.

A-17. Si construyes dos ángulos que tengan el vértice y uno de los lados en común (pero no los dos lados), puedes hacerlo de forma que uno de los ángulos esté fuera del otro (figura 8.2-a) o de forma que esté uno dentro del otro (figura 8.2-b). Haz un ejemplo de cada clase usando gomas de colores. Con una goma de otro color, señala el ángulo que forman los lados no comunes. En la figura 8.2-a este ángulo es la "suma" de los dos anteriores y en la figura 8.2-b es la "diferencia" de los ángulos.

Figura 8.2

A-18. Construye la suma y la diferencia de varios pares de ángulos en el Geoplano circular de 24 puntos.

A-19. Diremos que dos ángulos son "complementarios" si su suma es igual a un ángulo recto. Construye varios pares de ángulos complementarios.

A-20. Diremos que dos ángulos son "suplementarios" si su suma es igual a la suma de dos ángulos rectos. Construye varios pares de ángulos suplementarios.

A-21. En el Geoplano 5×5 (o mejor en el 10×10, si es posible), traza un segmento. Traza, con gomas de otro color, varios segmentos que sean paralelos al primero. ¿Qué posición relativa tienen esos segmentos entre sí?

A-22. Traza un segmento en el Geoplano. Traza, con gomas de otro color, varios segmentos perpendiculares al primero. ¿Qué posición relativa tienen estos segmentos entre sí?

A-23. Traza un segmento en el Geoplano. Traza otro perpendicular. Traza otro perpendicular al segundo. Continúa de esta forma trazando algunos segmentos más. Estudia las posiciones relativas de unos segmentos respecto de otros y saca conclusiones.

A-24. Construye un ángulo en el Geoplano cuadrado (5×5 ó 10×10). Construye otro ángulo en la posición adecuada para sumarlos. Diremos que estos dos ángulos son "adyacentes" (es decir, dos ángulos son adyacentes si tienen el vértice y un lado comunes). Construye varios pares de ángulos adyacentes.

A-25. Construye un ángulo. Construye otro que tenga sus lados perpendiculares a los del primero. ¿Qué relación hay entre las amplitudes de los dos ángulos? Repite varias veces la actividad y saca conclusiones.

A-26. Construye un ángulo. Construye otro que tenga los lados paralelos a los del primero. ¿Qué relación hay entre las amplitudes de los dos ángulos? Repite esta actividad varias veces y saca conclusiones.

A-27. Construye varios pares de ángulos que tengan el vértice común pero que no sean adyacentes. Separa los pares de ángulos en los que los cuatro lados forman dos líneas rectas (como en la figura 8.3). Construye varios ejemplos de este tipo. ¿Qué relación hay entre los dos ángulos?
Llamaremos ángulos "opuestos por el vértice" a aquellos cuyos lados forman dos líneas rectas.

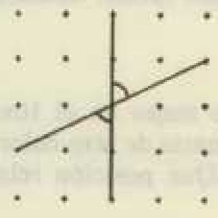


Figura 8.3

A-28. Traza en el Geoplano dos segmentos paralelos que no coincidan con los bordes. Traza otro segmento que los corte oblicuamente (como en la figura 8.4). ¿Cuántos ángulos se han formado? Numéralos y clasifícalos según los tipos que has estudiado: iguales, complementarios, adyacentes, de lados perpendiculares, etc.

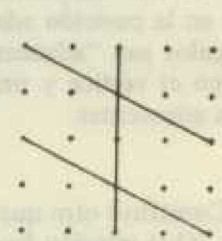


Figura 8.4

A-29. Repite A-28 varias veces con otros segmentos. Usa siempre los mismos números para los ángulos y compara los resultados de los diferentes casos.

A-30. En un triángulo cualquiera, ¿cuánto suman sus tres ángulos? Puedes ayudarte construyendo una línea paralela a la base que pase por el otro vértice (figura 8.5). Construye varios triángulos de las distintas clases y repite esta actividad con ellos.

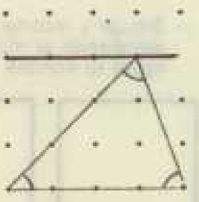


Figura 8.5

A-31. Dado un triángulo, llamaremos "ángulos exteriores" del triángulo a los formados por uno de sus lados y la prolongación de otro lado (en la figura 8.6 hay varios). Construye varios triángulos de los diferentes tipos y dibuja sus ángulos exteriores.

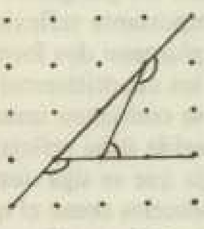


Figura 8.6

A-32. ¿Qué relaciones notas entre los ángulos exteriores de un triángulo? ¿Varían esas relaciones si, en el mismo triángulo, se construyen otros ángulos exteriores?

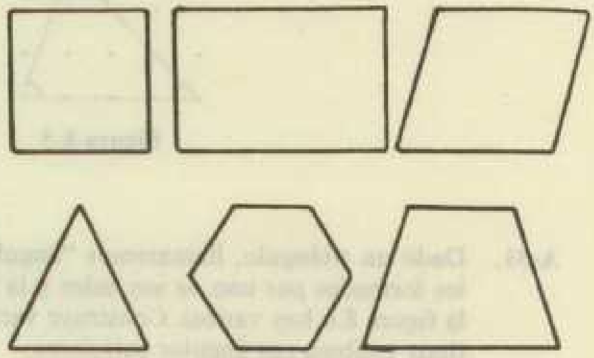
A-33. ¿Qué relaciones ves entre los ángulos exteriores y los interiores de un triángulo? ¿Varían si eliges otros ángulos exteriores?

A-34. ¿Cuánto suman los ángulos exteriores de un triángulo?

9. *Polígonos: estudio detallado*

CICLO MEDIO

OBJETIVOS	ACTIVIDADES SUGERIDAS
4.1.4. **Clasificar, reconocer y describir las diversas clases de polígonos.**	— Dibujar y recortar un conjunto de polígonos. Clasificarlos atendiendo al número de lados. Escribir debajo de cada figura su nombre.



En el Ciclo Medio se estudian los polígonos regulares y en particular los triángulos y cuadriláteros. Es importante reflexionar sobre las clasificaciones de estos tipos de polígonos. Se plantean dos formas de clasificación:

– Agrupar los triángulos (y los cuadriláteros) en clases disjuntas.

– Agruparlos en clases que se contienen unas a otras.

La forma de clasificación elegida debe reflejarse en las definiciones y será importante en la línea de trabajo que se siga después. Un ejemplo:

La definición de triángulo isósceles como el que tiene "dos lados iguales y uno desigual" corresponde a la primera forma de clasificación, pues los triángulos equiláteros no serán isósceles. La definición de triángulo isósceles como el que tiene "dos lados iguales" corresponde a la segunda forma ya que ahora los triángulos equiláteros sí serán isósceles.

En cualquier caso lo que debe hacerse es valorar las ventajas e inconvenientes de cada clasificación, elegir la que se crea mejor y ser coherente con ella en lo sucesivo.

Nosotros optamos por la segunda forma de clasificación, que se refleja en los siguientes esquemas:

Equilátero → Isósceles → Escaleno.

Cuadrado ↗ Rectángulo ↘ / ↘ Rombo ↗ Romboide = Paralelogramo → Trapecio →

→ Trapezoide = Cuadrilátero convexo.

La razón principal de nuestra elección está en que las definiciones son las más generales y las propiedades derivadas de una de ellas quedan automáticamente demostradas para las clases contenidas (piense que todas las propiedades de los rectángulos o de los rombos son ciertas también para los cuadrados).

Las primeras actividades (PD-1 hasta PD-16) están diseñadas para introducir, en el Ciclo Medio, los tipos de polígonos. Con el fin de poder construir triángulos equiláteros, se usan tanto el Geoplano circular como el cuadrado.

Llamamos la atención sobre la técnica usada para empezar la clasificación (actividades PD-2, PD-3, PD-8 y siguientes) de empezar por el tipo más general y pasar después al particular, con lo que se obtienen las inclusiones de forma evidente.

En el Geoplano circular no es fácil saber si un ángulo es recto hasta que no se conozca la relación de estos ángulos con el diámetro (ver el capítulo 11); por eso conviene realizar la actividad PD-5 sobre el Geoplano cuadrado.

Para afianzar tantos conceptos y definiciones nuevas conviene practicar con ellos, por lo cual se incluyen actividades de construcción de los diferentes tipos de polígonos después de introducir las definiciones..

Hay dos cuadriláteros, la cometa y la flecha (fig. 9.1) que no tienen interés para la clasificación, pero conviene que los alumnos los conozcan porque más adelante les serán útiles.

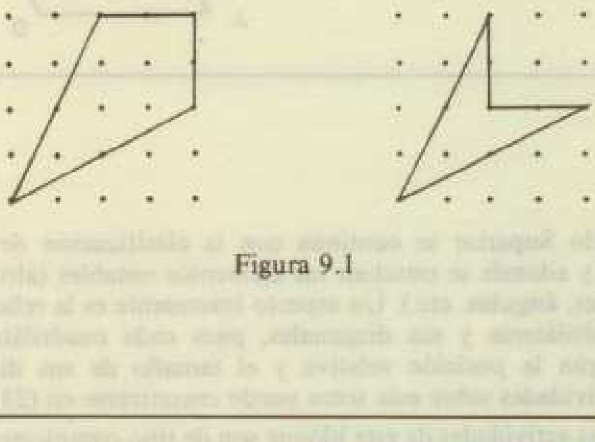
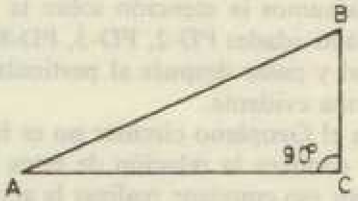


Figura 9.1

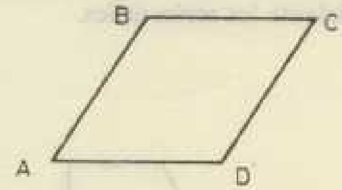
OBJETIVOS	CICLO SUPERIOR	ACTIVIDADES SUGERIDAS
2.1.1. Adquirir el concepto de múltiplo y divisor y saber reconocer múltiplos y divisores.		

OBJETIVOS	CICLO SUPERIOR	ACTIVIDADES SUGERIDAS
3.1.8.	**Describir, representar y caracterizar los polígonos más utilizados (triángulos, paralelogramos, etc., regulares e irregulares).**	1. Dado el triángulo ABC: *a)* Clasificarlo respecto a sus lados. *b)* Clasificarlo respecto a sus ángulos. *c)* Trazar la altura respecto al lado BC. *d)* Trazar la mediana correspondiente al lado AB.



2. Clasificar y denominar el polígono ABCD.
Dibujar sus diagonales, establecer la relación que existe entre ellas.

¿Qué relación existe entre los ángulos D y C?



En el Ciclo Superior se continúa con la clasificación de triángulos y cuadriláteros y además se estudian los elementos notables (alturas, diagonales, mediatrices, ángulos, etc.). Un aspecto interesante es la relación entre los tipos de cuadriláteros y sus diagonales, pues cada cuadrilátero se puede reconocer según la posición relativa y el tamaño de sus diagonales. Un bloque de actividades sobre este tema puede encontrarse en (23), capítulo 4.

Las últimas actividades de este bloque son de tipo complementario y están relacionadas, en el Geoplano giratorio, con los polígonos regulares y los polígonos estrellados. Es interesante notar la relación entre el número de clavos del Geoplano circular y los polígonos regulares que admite, lo cual proporciona un tema de apoyo a la divisibilidad, que habrá sido estudiada unas semanas antes de este tema. Esta relación hace que sea mejor nombrar a los geoplanos circulares como "de 12 ó 24 puntos" que como "de 13 ó 25 puntos", aunque es ésta la cantidad real de clavos.

Las actividades PD-17 hasta PD-19 llaman la atención sobre la posibilidad de "medir la longitud" de los segmentos contando clavos, hecho que volveremos a usar en el tema 11.

A partir de PD-25 se propone la construcción de los polígonos regulares como resultado de actividades combinatorias. Las mismas reglas llevan a los polígonos estrellados y al concepto de ángulo central. Para estas actividades usaremos los geoplanos giratorios 5×5 y de 12 puntos.

También es posible plantear las construcciones al revés, es decir que un alumno dibuje una figura según una regla secreta y sus compañeros la descubran.

ACTIVIDADES

PD-1. Recuerda la actividad PG-4 en la que encontrabas todos los triángulos del Geoplano 3×3. Coge ahora el Geoplano circular de 12 puntos y construye en él todos los triángulos diferentes que puedas (puedes usar también el calvo del centro). Copia los resultados en el papel.

PD-2. Si un triángulo tiene dos lados iguales se llama *isósceles*. Busca los triángulos isósceles que has dibujado en los dos geoplanos.

PD-3. Si un triángulo tiene los tres lados iguales se llama *equilátero*. Busca los triángulos equiláteros que hayas construido.

PD-4. ¿Qué relación observas entre los triángulos isósceles y los equiláteros?

PD-5. Los triángulos que tienen un ángulo recto se llaman *rectángulos*. Busca triángulos rectángulos en el Geoplano 3×3. ¿Alguno de ellos es también isósceles?

PD-6. Los triángulos que tienen un ángulo obtuso se llaman *obtusángulos*. Señala los triángulos obtusángulos que has construido. ¿Es alguno de ellos isósceles?

PD-7. Los triángulos *acutángulos* son aquellos que tienen los tres ángulos agudos. Busca los que hayas dibujado. ¿Es alguno de ellos también rectángulo? ¿Y obtusángulo?

PD-8. Busca los cuadriláteros que has construido en la actividad PG-5. Separa los que son convexos. También se les suele llamar *trapezoides*.

PD-9. Si un trapezoide tiene dos lados paralelos se llama *trapecio*. Señala los trapecios.

PD-10. Construye varios trapecios en el Geoplano circular de 12 puntos.

PD-11. Si un cuadrilátero tiene los cuatro lados paralelos dos a dos se llama *paralelogramo* o también *romboide*. Si además tiene los cuatro lados iguales se llama *rombo*. Busca los romboides que hay entre tus cuadriláteros. Busca ahora los rombos.

PD-12. ¿Qué relaciones observas entre los ángulos de un paralelogramo? ¿Existen las mismas relaciones en los trapecios?

PD-13. Construye algunos rombos en el Geoplano circular de 12 puntos. Construye romboides que no sean rombos. Construye trapecios que no sean romboides.

PD-14. Si un paralelogramo tiene los cuatro ángulos rectos se llama *rectángulo*. Busca los rectángulos que hay entre tus cuadriláteros.

PD-15. Un *cuadrado* es un cuadrilátero que tiene los cuatro lados iguales y los cuatro ángulos rectos. Relaciona los cuadrados con los rectángulos y con los rombos.

PD-16. Construye en el Geoplano circular algunos rectángulos y algunos rombos que no sean cuadrados.

PD-17. Construye varios segmentos en el Geoplano de 12 puntos. Numéralos, empezando por el más corto, por orden de longitud. Indica también cuáles miden lo mismo.

PD-18. Construye un segmento en el Geoplano de 12 puntos. Construye varios igual de largos, otros más largos y otros más cortos que ése. ¿Qué relación hay entre el número de clavos que abarcan los segmentos y sus longitudes? Repite esta actividad varias veces.

PD-19. Repite las actividades PD-17 y PD-18 en el Geoplano de 24 puntos.

PD-20. En las siguientes actividades, con el Geoplano circular de 24 puntos, *no* uses el calvo del centro. Construye un triángulo equilátero.

PD-21. Construye un cuadrado, un pentágono y un hexágono regulares.

PD-22. Construye los demás polígonos regulares que puedas.

PD-23. Repite las tres actividades anteriores con el Geoplano circular de 12 puntos.

PD-24. ¿Qué relación observas entre el número de clavos del Geoplano circular y los polígonos regulares que se pueden construir en él?

PD-25. Ahora usaremos el Geoplano giratorio 5×5. Gíralo ángulos de 30°, 60°, 75°, 90°, 105°, 135°, 180°, 225°, 270° y 300°.

PD-26. Haz también algunos de los giros anteriores con el Geoplano giratorio circular de 12 puntos.

PD-27. En el Geoplano de 24 puntos, une el clavo del centro con dos clavos consecutivos de la circunferencia (fig. 9.2). ¿Cuántos ángulos hay como ése? ¿Cuántos grados miden esos ángulos?

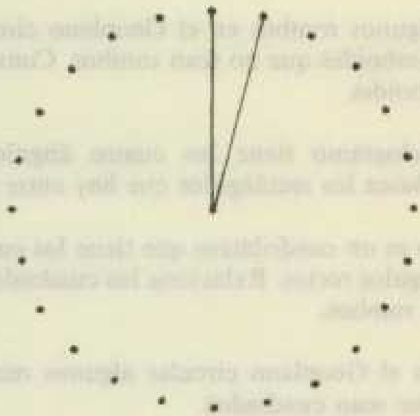


Figura 9.2

PD-28. Construye ángulos, cuyo vértice sea el clavo del centro, con 30º, 60º, 90º, 105º, 135º, 180º, 225º, 270º y 300º.

PD-29. Vuelve a construir uno de los polígonos regulares de las actividades anteriores. Une el clavo del centro con dos vértices consecutivos del polígono. ¿Cuántos grados mide el ángulo que se forma? ¿Qué resultados obtienes si lo repites con otros pares de vértices consecutivos del polígono?

PD-30. Repite la actividad anterior con otros polígonos regulares. Llamaremos *ángulo central* de un polígono regular a ese ángulo formado al unir el centro del Geoplano con dos vértices consecutivos del polígono. ¿Son iguales todos los ángulos centrales de un polígono regular?

PD-31. ¿Qué relación observas entre el valor del ángulo central y el número de lados de un polígono regular?

PD-32. Construye un polígono regular sobre el Geoplano giratorio circular de 12 puntos. Gira el Geoplano hasta que un vértice vaya a parar a la posición que ocupaba el vértice siguiente (fig. 9.3). ¿Qué relación

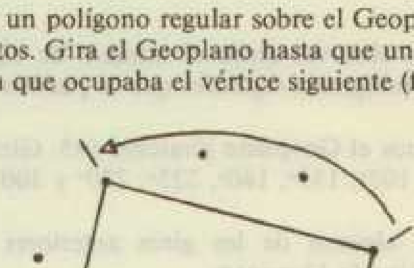


Figura 9.3

hay entre el ángulo de este giro que has realizado y el ángulo central del polígono?

PD-33. En el Geoplano circular de 24 puntos, une por medio de una goma los clavos de la circunferencia de dos en dos (es decir, uno sí y uno no, fig. 9.4) hasta dar toda la vuelta y volver al primer clavo. ¿Cuántos lados tiene el polígono? ¿Es regular? ¿Cuántos polígonos hay como ése?

Figura 9.4

PD-34. Repite la actividad anterior uniendo los clavos de tres en tres (uno sí y dos no) y de cuatro en cuatro.

PD-35. ¿Ves alguna relación entre los polígonos que dibujabas en PD-33 y PD-34, los clavos del Geoplano y la cantidad de polígonos iguales que podías construir?

PD-36. Repite PD-33 uniendo los clavos de cinco en cinco. ¿Vuelves al primer clavo? En caso afirmativo, ¿es regular el polígono?

PD-37. En vez de dar sólo una vuelta al Geoplano, sigue uniendo los clavos de cinco en cinco mientras puedas, hasta que te encuentres con el primero. A la figura que has obtenido se le llama "polígono estrellado".

PD-38. Repite la actividad anterior uniendo los clavos de seis en seis, de siete en siete, etc. Si al volver al primer clavo del polígono quedan clavos libres en el Geoplano, repite la operación con ellos. ¿En qué casos se ocupan todos los clavos de la circunferencia con un solo polígono?

PD-39. Numera los clavos de la circunferencia desde el 1 hasta el 24. Une cada clavo con su doble (el doble del 13 será el 26, es decir el 2).

PD-40. Si, empezando en 0, vamos sumando los números 1, 2, 3, ... se obtiene la sucesión 1, 2, 4, 7, ... Une los clavos según los números de esta sucesión.

PD-41. Inventa tus propias reglas y une los clavos del Geoplano de esa forma.

10. *Segmentos y longitudes*

La construcción de segmentos, su manejo como herramienta y la medida de longitudes es un tema que se desarrolla a lo largo de los nueve años de educación básica.

OBJETIVOS	PREESCOLAR	ACTIVIDADES
1.2.3.	**Realizar seriaciones utilizando propiedades de objetos.**	— Ordenar por tamaños una serie de cinco objetos. — Seguir una serie ya comenzada: grande, pequeño, con objetos. — Reconocer en la clase algo «más largo», «más corto», que un objeto que se le presenta. — Hacer seriaciones con los criterios: • más largo que • menos largo que • igual de largo que
1.2.4.	**Realizar clasificaciones utilizando propiedades de objetos.**	— Clasificar objetos según su longitud. — Clasificar objetos por su peso. — Clasificar objetos por su grosor. — Clasificar objetos por su anchura.
1.3.3.	**Realizar experiencias de «medir» sin expresar el resultado.**	— «Medir» una línea pintada en el suelo con pasos, con una barra, con una cuerda, sin exigir el número de veces que el pie, barra, etc., está contenido en la línea.

En Preescolar se empieza midiendo longitudes asequibles a los niños de una manera informal, para afianzar los conceptos de longitud y de comparación, sin entrar en las unidades de medida (el niño todavía no sabe contar). Por lo tanto, las actividades deben dirigirse a los objetivos siguientes:

1. Decir qué objeto es más largo (corto).
2. Buscar objetos que sean más (igual, menos) largos que uno dado.

Este tipo de actividades se puede hacer sobre el Geoplano (SL-1 y SL-2) comparando segmentos dibujados en él. Conviene usar el Geoplano 5×5 que da más variedad de longitudes que el 3×3 (fig. 10.1).

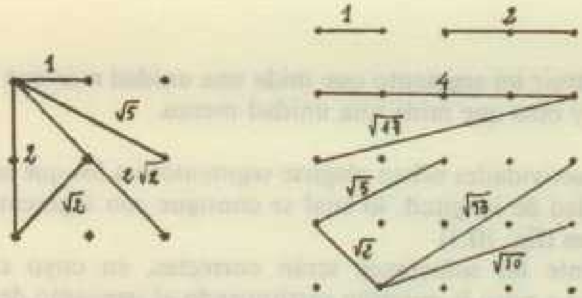


Figura 10.1

SL-1. Construir varios segmentos en el Geoplano y decir cuáles son más largos (cortos).

SL-2. Dado un segmento, construir unos que sean igual de largos, otros que sean más largos y otros más cortos que el dado.

En una etapa posterior del curso, podemos compaginar estas actividades con las relativas a los caminos (capítulo 5).

SL-3. Construir un camino en el Geoplano y medir su longitud. Construir varios caminos y comparar sus longitudes con la del anterior.

OBJETIVOS	CICLO INICIAL	ACTIVIDADES
4.1.1. Realizar mediciones utilizando unidades naturales: palmo, pie, unidades propias de la región, baldosines, etcétera.		— Marcada una distancia en el suelo por dos líneas separadas entre sí, aproximadamente cinco metros, el alumno ha de ser capaz de medir con palmos, pies, etc., indistintamente. Conforme vaya midiendo irá trasplantando los resultados correspondientes a una tabla

En el Ciclo Inicial los niños ya pueden expresar numéricamente el resultado de las mediciones y por lo tanto se les puede introducir en el conocimiento de las unidades de medida. Las actividades pueden ser similares a las que proponemos para Preescolar (SL-1 y SL-2) pero insistiendo en la cuantificación de los resultados.

SL-4. Construir varios segmentos iguales al de la figura 10.2.

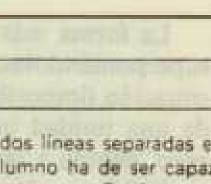


Figura 10.2

SL-5. Construir un segmento que mida una unidad más que el de la figura 10.2 y otro que mida una unidad menos.

Para estas actividades deben elegirse segmentos en los que se pueda tomar la misma unidad de longitud, lo cual se consigue con segmentos paralelos o perpendiculares (fig. 10.3).

Normalmente las soluciones serán correctas, en cuyo caso se puede complicar poco a poco la cuestión sustituyendo el segmento de la figura 10.2 por los de las figuras 10.3 y 10.4.

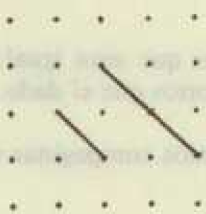


Figura 10.3

Figura 10.4

La forma más natural de comparar la longitud de dos objetos físicos es superponiéndolos, pero esto no es posible en el Geoplano. Esta nueva situación (imposibilidad de cambiar los objetos de sitio) es la que exige el uso de una unidad independiente del Geoplano (una cuerda, una barrita, etc.) pero, debido a las medidas fraccionarias, que no deben aparecer todavía, es preferible que los alumnos usen unidades inherentes al Geoplano.

En el momento en que un alumno realice erróneamente la actividad 10.3, se puede iniciar una interesante clase heurística acerca de las unidades de medida y su coherencia.

Salvo que el alumno se haya equivocado al contar, su error se debe casi siempre a que los dos segmentos tienen la misma cantidad de unidades, pero con unidades de diferente longitud; por lo tanto las preguntas deben ir dirigidas a explorar cómo mide el alumno, con qué unidad y por qué son iguales para él los dos segmentos.

Es frecuente que los niños midan contando clavos, o huecos entre clavos, con lo que los segmentos **a** y **b** de la figura 10.5 miden lo mismo, así como los segmentos **c** y **d**.

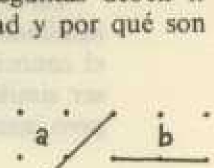


Figura 10.5

Otra forma equivocada de medir que se da con frecuencia consiste en contar la cantidad de cuadros que toca el segmento, que haría que los segmentos **a**, **b** y **c** (fig. 10.6) midan lo mismo.

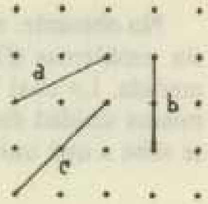


Figura 10.6

En ambos casos el profesor debe guiar al alumno para que se dé cuenta de que su unidad de medida no es coherente, porque lleva a resultados contradictorios. Se le propondrá al alumno que mida segmentos ostensiblemente diferentes pero de la misma longitud si usa su unidad. Para el primer tipo de errores es útil el segmento de la figura 10.4 y para el segundo uno en diagonal (como c de la figura 10.6).

No hay que sentirse defraudados porque los niños no descubran rápidamente la forma correcta de construir segmentos iguales en el Geoplano, que consiste en medir las diferencias de coordenadas entre los extremos del segmento (fig. 10.7), pues ésta es una técnica difícil de descubrir y que puede no ser evidente incluso para estudiantes bastante mayores.

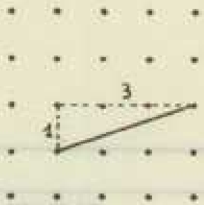


Figura 10.7

Esta métrica suele denominarse "del taxista", pues se presenta ambientada en una ciudad (el Geoplano), en la que los puntos son las plazas y las líneas verticales y horizontales son las calles, por lo que no se puede hacer uso de diagonales.

CICLO MEDIO

OBJETIVOS	ACTIVIDADES SUGERIDAS
4.3.1. Calcular el perímetro de los polígonos.	— Realizar ejercicios variados para calcular perímetros.

En el Ciclo Medio se insiste en el cálculo de perímetros. En el Geoplano se presenta la dificultad de los segmentos de longitud irracional, que hace que algunas figuras no se puedan medir hasta que no se conozca el teorema de Pitágoras (fig. 10.8).

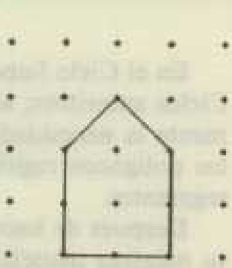


Figura 10.8

No obstante, existen bastantes polígonos cuyo perímetro se puede calcular sin problemas (fig. 10.9): en función de la posición, se elige la unidad de medida. Lo cual lleva a las conclusiones de que es necesario usar siempre la misma unidad de medida y de la poca información que da un número si no se sabe a qué unidad representa.

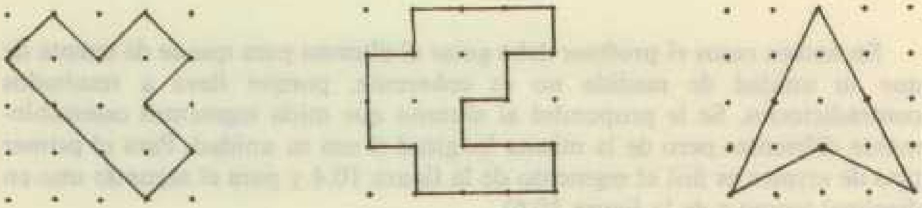
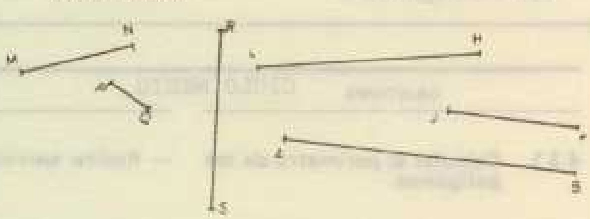


Figura 10.9

OBJETIVOS	CICLO SUPERIOR	ACTIVIDADES SUGERIDAS
3.1.3. Obtener relaciones entre segmentos (relaciones de igualdad y desigualdad).		1. Expresar matemáticamente las tres posibles relaciones (de igualdad y desigualdad) entre dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Dibujar en cada caso los segmentos. 2. De los segmentos siguientes, ¿cuál es el mayor? Explicar cómo se puede comprobar dicha afirmación de dos maneras distintas.



En el Ciclo Superior será útil recordar las actividades que se hacían en los Ciclos anteriores; se darán menos errores y los alumnos entenderán perfectamente la necesidad de una unidad de longitud coherente. Para el estudio de los polígonos regulares es fundamental entender la relación de igualdad de segmentos.

Después de hacer estudiado el teorema de Pitágoras, el Geoplano alcanza su máxima manejabilidad, pues ya se pueden medir con exactitud todas las longitudes. Una actividad interesante es pedir a los alumnos que construyan, y que midan, todos los segmentos diferentes (en longitud) que hay en los geoplanos 3x3 y 5x5.

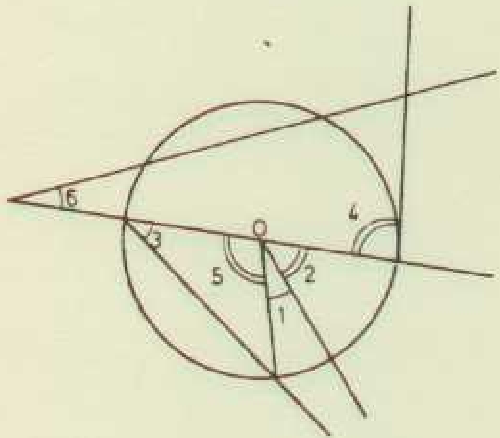
Por último, señalaremos que en los geoplanos circulares la única forma que hay de medir segmentos es usando como unidad "el número de clavos que abarca el segmento", que nos proporciona otro ejemplo de sistema coherente de medida que no es el usual: la longitud de un segmento depende del número de clavos del Geoplano y, además, doble longitud en clavos no corresponde a doble longitud en centímetros.

3.1.5. Caracterizar arcos y ángulos centrales y arcos y cuerdas correspondientes.

1. Dado un arco, representar el ángulo central correspondiente.
2. Dada una cuerda, señalar el arco y ángulo central correspondiente.
3. Comprobar por simetría que a cuerdas iguales corresponden arcos iguales.

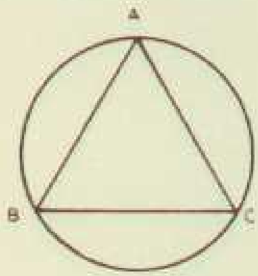
3.1.7. Construir, reconocer e identificar ángulos inscritos, circunscritos, interiores, etcétera, a la circunferencia.

1. En la circunferencia del centro O, decir qué tipo de ángulo es cada uno de los señalados (1, 2, 3, 4, 5 y 6).



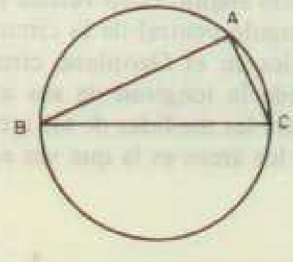
3.2.3. Determinar la medida de los ángulos semiinscritos, inscrito, exterior e interior a una circunferencia de los arcos que abarcan sus lados respectivos.

1. ¿Cuál es la medida de los ángulos del $\widehat{ABC}$, en relación con los arcos que abarcan?



$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$

3. ¿Cuál es la medida del ángulo $\widehat{BAC}$?



Ya ha sido introducido en otro capítulo el ángulo central de un polígono. Por analogía, se puede introducir el ángulo central de una circunferencia, pero es necesario poner de relieve las diferencias debidas a que la circunferencia no tiene vértices. Las primeras actividades (C-1 a C-3) tratan de ellas.

En las siguientes actividades (desde C-4 hasta el final) estudiamos el ángulo inscrito en una circunferencia. El resultado más importante es la relación según la cual un ángulo inscrito mide el doble que su ángulo central. En particular, los ángulos inscritos rectos son los que abarcan media circunferencia.

En C-13 se vuelve a obtener el resultado, ya conocido, relativo a la suma de los ángulos de un triángulo. Ofrecemos así otra verificación menos artificiosa que la anterior de esta propiedad, verificación que también es válida para los cuadriláteros.

ACTIVIDADES

C-1. Todo ángulo cuyo vértice está en el centro de la circunferencia es un "ángulo central de la circunferencia". Construye varios ángulos centrales en el Geoplano circular de 24 puntos. Mide sus amplitudes. Mide la longitud de sus arcos correspondientes. ¿Qué relación hay entre las medidas de los arcos y de los ángulos? La unidad de longitud de los arcos es la que ves en la figura 11.1.

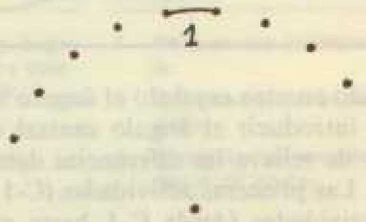


Figura 11.1

C-2. Construye ángulos centrales de 15º, 30º, 60º y 120º. Mide la longitud de su arcos. Saca conclusiones.

C-3. Construye arcos de longitud 1, 2, 4 y 8 unidades. Mide los ángulos centrales correspondientes. Saca conclusiones.

C-4. Construye un ángulo con el vértice y los extremos de los lados sobre la circunferencia del Geoplano de 24 puntos. Lo llamaremos "ángulo inscrito" en la circunferencia. Construye el ángulo central correspondiente al mismo arco. ¿Cuándo mide el ángulo central? ¿Y el inscrito? Si no eres capaz de medirlo, pasa a C-5.

C-5. Construye otro ángulo inscrito de forma que uno de sus lados sea el diámetro de la circunferencia. ¿Cuánto mide el ángulo central correspondiente al mismo arco? ¿Qué tipo de triángulo (según sus lados) se ha formado en el Geoplano? ¿Cuánto mide cada ángulo de ese triángulo? ¿Cuánto mide el ángulo inscrito?

C-6. Repite C-5 varias veces con ángulos inscritos diferentes. ¿Observas alguna relación entre los ángulos inscritos y los centrales?

C-7. Volvamos al ángulo inscrito de C-4. ¿Es del tipo de los que has dibujado en C-5 y C-6? Si no lo es, dibuja el diámetro de la circunferencia que termina en el vértice del ángulo. ¿Cuántos ángulos inscritos ves ahora? ¿Qué relación hay entre ellos?

C-8. ¿Puedes calcular ahora el valor de tu ángulo inscrito?

C-9. Repite la actividad C-4 con varios ángulos inscritos diferentes. ¿Qué relación hay entre sus amplitudes y las de los ángulos centrales correspondientes?

C-10. Ahora que ya sabes calcular la amplitud de cualquier ángulo inscrito, construye varios con los mismos extremos de los lados pero con distintos vértices. ¿Cuánto miden esos ángulos? Repite la actividad varias veces para asegurar tus conclusiones.

C-11. Construye ángulos inscritos que abarquen media circunferencia. ¿Cuánto miden? ¿Puedes construir todos los triángulos diferentes que hay en el Geoplano circular de 24 puntos?

C-12. Construye triángulos obtusángulos inscritos en la circunferencia del Geoplano. ¿Puedes encontrar alguna característica que los diferencie de los triángulos rectángulos y de los acutángulos?

C-13. Construye un triángulo inscrito en la circunferencia del Geoplano. ¿Cuánto suman sus ángulos? Repite la actividad con más triángulos.

C-14. Construye un cuadrilátero inscrito en la circunferencia. ¿Cuánto suman sus ángulos opuestos? ¿Cuánto suman sus cuatro ángulos? Repite la actividad con otros cuadriláteros.

C-15. Ya sabes que el ángulo central de un hexágono regular mide 60°. Construye uno y calcula cuánto mide cada uno de los ángulos del hexágono.

C-16. Construye un hexágono regular en tu Geoplano. Construye uno de sus ángulos centrales. ¿Qué tipo de triángulo (según sus lados) forman el ángulo central y el lado del polígono? ¿Qué relación hay entre los lados del hexágono y el radio de la circunferencia en la que está inscrito?

12. *Cubrimientos y frisos*

2.2. EXPERIENCIAS DE TIPO TOPOLOGICO Y GEOMETRICO

El saber distinguir entre líneas abiertas y cerradas hará que el niño comprenda lo que significa la representación de un conjunto utilizando diagramas de Venn. Hay un enlace con el Ciclo Inicial, pues en él se precisará más el concepto de borde o frontera. Distinguirá entre líneas poligonales abiertas y cerradas como preparación al concepto de polígono.

Es importante que las actividades de tipo geométrico las realice manipulativamente. Dibujar, colorear, recortar, pegar, construir con diversos materiales son fundamentales para la educación geométrica y psicomotriz del niño de esta edad.

Reconocer formas, reproducirlas, recortar, pegar, organizar puzzles, rompecabezas, frisos, etc., ayudarán al niño posteriormente al estudio matemático de las isometrías (traslaciones, rotaciones, simetrías).

OBJETIVOS	PREESCOLAR	ACTIVIDADES
2.2.2.	**Organizar rompecabezas, puzzles, frisos, etc.**	— Pegar figuras formando puzzles. — Pegar figuras formando frisos. — Colorear frisos.

OBJETIVOS	CICLO MEDIO	ACTIVIDADES SUGERIDAS
4.2.2.	Construir frisos.	— Obtener figuras iguales por plegado y dibujado. *Ejemplo.* Dibujar una figura sencilla en un papel transparente. Doblar y calcar la figura. Hacerlo varias veces. — Recortar figuras iguales doblando varias veces el papel.

Las actividades que siguen no son específicamente de Preescolar, pero podrían servir de modelo para otras más sencillas con intervención directa del profesor.

Las actividades de cubrimientos inician al alumno a la descomposición de figuras y a la medida de superficies por triangulación o cuadriculación.

ACTIVIDADES

Utiliza para estas actividades el Geoplano 10×10.

CF-1. En la fig. 12.1 hay dibujadas unas bandas de figuras geométricas; a cada una de ellas la llamaremos "friso".
Construye una figura en tu Geoplano; desplazándola hacia la derecha o la izquierda en sentido horizontal, construye figuras análogas de forma que hayas construido un friso. Construye al menos cinco distintos.

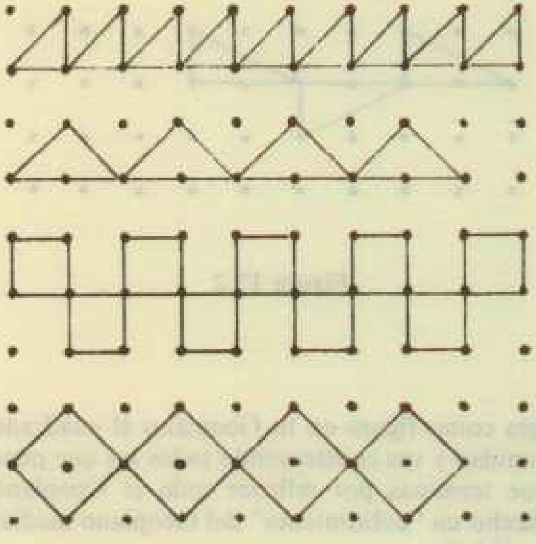


Figura 12.1

CF-2. Dibuja en una hoja cuadriculada los frisos anteriores. Hazlos más largos y colorea las figuras del friso.

CF-3. Construye en tu Geoplano una figura; desplazándola en sentido vertical, construye figuras análogas de forma que obtengas un friso. Construye varios y repite CF-2.

CF-4. En la figura 12.2 hay iniciados varios frisos; intenta terminarlos, pásalos al papel cuadriculado y hazlos más largos.
Indica en cada caso cuál es la figura que va formando el friso. Describe el movimiento de la figura para formar el friso.

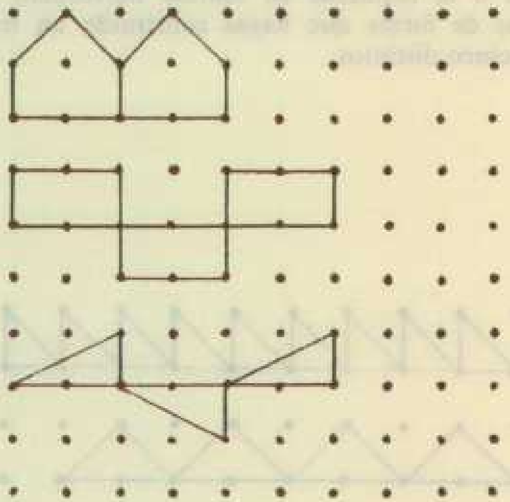


Figura 12.2

CF-5. Si escoges como figura en tu Geoplano el cuadrado que tiene por lado la unidad y vas construyendo todos los que puedas iguales a él, verás que terminas por rellenar todo el Geoplano; diremos que hemos hecho un "cubrimiento" del Geoplano mediante el cuadrado de lado unidad.

CF-6. Construye un triángulo en tu Geoplano e intenta con ese triángulo "cubrir" tu Geoplano. Si no puedes construye otro e inténtalo de nuevo hasta que encuentres uno que lo cubra.

CF-7. Busca otras figuras que cubran tu Geoplano. Halla todas las que puedas.

CF-8. Si con una figura no has podido cubrir tu Geoplano, utiliza otro que tenga un número de clavos distinto e inténtalo de nuevo.
¿Encuentras alguna razón por la cual una figura cubre un Geoplano y no cubre otro distinto?

CF-9. Construye una figura en tu Geoplano, por ejemplo un octógono. Intenta cubrirlo con el cuadrado unidad, si no puedes construye otro octógono de forma que puedas cubrirlo con el cuadrado unidad.

CF-10. Construye una figura en tu Geoplano e intenta cubrirla con cuadriláteros. ¿Son todos iguales? Dibuja estos cuadriláteros en una hoja de papel cuadriculado, recórtalos e intenta recomponer la primera figura que has construido.
Construye otras figuras e intenta hacer lo mismo que antes.

CF-11. Construye una figura en tu Geoplano e intenta cubrirla con triángulos. ¿Son todos iguales? Dibuja en un papel cuadriculado la figura y todos los triángulos que has necesitado para cubrirla, recorta los triángulos e intenta construir con ellos la figura inicial.

CF-12. Construye otras figuras en tu geoplano y actúa como en la actividad CF-11.

CF-13. Construye una figura en el Geoplano e intenta cubrirla con figuras que no sean triángulos o cuadriláteros. Dibújalas en un papel cuadriculado. Recórtalas para formar un puzzle y proponle a un compañero si sabe obtener la figura que inicialmente habías construido.

13. *Triangulación y cuadriculación*

OBJETIVOS	CICLO MEDIO	ACTIVIDADES SUGERIDAS
3.3.1.	**Medir superficies mediante el uso de la cuadrícula.**	— Hacer ejercicios de medida utilizando diversas clases de cuadrículas. Dibujar en una cartulina cualquier cosa (muñeco, casa, vaso, jarrón...). Recortar el dibujo y medir sobre una cuadrícula su superficie. Expresar el resultado de la medida tomando como unidad un cuadradito de la cuadrícula. — De un papel cuadriculado recortar un cuadrado cuyo lado tenga como longitud 10 lados de los cuadrados pequeños. ¿Cuántos cuadraditos hay en este cuadrado? Suponiendo que cada cuadradito midiera un centímetro de lado, ¿cuántos centímetros mediría cada lado? ¿Cuántos decímetros? — Fijarse en el suelo de la clase si tiene baldosas, ¿hace falta contar todas las baldosas para saber la medida de la superficie del suelo de la clase? En caso negativo, explicar cómo hacerlo.
3.3.3.	**Conocer y expresar por manipulación y cuadriculación las medidas aproximadas de superficies planas.**	— Dibujar figuras en papel cuadriculado y calcular de manera aproximada su superficie. *Ejemplo:* En una hoja cuadriculada dibujar un cuadrado, un rectángulo, un triángulo isósceles, uno rectángulo y una casita y contar los cuadrados que ocupa cada dibujo. — Si sólo se dispone de un metro y una hoja de papel, ¿cómo se mediría una superficie? ¿Y si no se tuviera hoja de papel y se pudiera trazar paralelas y perpendiculares? — Realizar ejercicios similares de dificultad creciente. — Calcular «a ojo» algunas medidas de superficie. Comprobar el resultado midiendo la superficie con las unidades de superficie construidas por el alumno.
4.1.10.	**Construir polígonos mediante triangulaciones, plegado y líneas poligonales.**	— Construir polígonos mediante triangulaciones. *Ejemplo:* a) Dibujar triángulos consecutivos de varias formas, de manera que se formen polígonos. Contar los lados de los polígonos resultantes.

ACTIVIDADES

En estas actividades el tamaño del Geoplano más conveniente es el 10×10, aunque también se pueden iniciar con el 5×5 y en algún caso utilizar el circular.

TC-1. Construye un polígono en tu Geoplano e intenta descomponerlo en triángulos. Una forma de realizarlo es escoger un vértice y unirlo con los demás vértices excepto sus adyacentes.
¿Puedes aplicarlo en tu polígono?
¿Se puede aplicar el método anterior siempre?
¿Se puede triangularizar siempre un polígono?

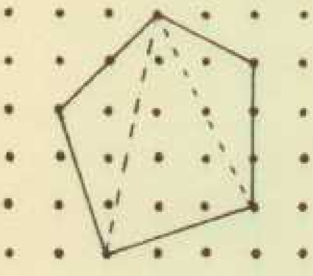


Figura 13.1

TC-2. Construye un polígono en tu Geoplano e intenta descomponerlo en cuadriláteros que lo cubran.
Si no puedes construye otros polígonos hasta que puedas descomponer en cuadriláteros varios de ellos.
Cuenta el número de vértices en los casos que has podido cuadricular y en los casos que no has podido cuadricular.
¿Encuentras alguna relación?

TC-3. Construye un polígono en tu Geoplano 10×10 o circular e intenta descomponerlo en triángulos iguales.
Si no puedes construye otros hasta que puedas hacerlo y cuenta el número de triángulos que has obtenido.

TC-4. Construye un polígono regular en tu Geoplano circular e intenta descomponerlo en triángulos iguales.
Si no has podido utiliza el clavo del centro y forma triángulos con los vértices del polígono.

TC-5. Construye todos los polígonos regulares que puedas en tu Geoplano circular de 24 clavos, descomponlos en triángulos iguales y cuéntalos en cada caso.

TC-6. Construye un polígono en tu Geoplano circular o 10×10 e intenta descomponerlo en cuadriláteros iguales que lo cubran.

Si no has sido capaz construye otros que sí lo seas; en cada caso cuenta el número de cuadriláteros.

14. *Medida general de superficies*

OBJETIVOS	CICLO MEDIO ACTIVIDADES SUGERIDAS
3.3.1. Medir superficies mediante el uso de la cuadrícula.	
3.3.3. Conocer y expresar por manipulación y cuadriculación las medidas aproximadas de superficies planas.	— Dibujar figuras en papel cuadriculado y calcular de manera aproximada su superficie. *Ejemplo* En una hoja cuadriculada dibujar un cuadrado, un rectángulo, un triángulo isósceles, uno rectángulo y una casita y contar los cuadrados que ocupa cada dibujo. — Si sólo se dispone de un metro y una hoja de papel, ¿cómo se mediría una superficie? ¿Y si no se tuviera hoja de papel y se pudiera trazar paralelas y perpendiculares? — Realizar ejercicios similares de dificultad creciente. — Calcular «a ojo» algunas medidas de superficie. Comprobar el resultado midiendo la superficie con las unidades de superficie construidas por el alumno.

Los geoplanos y el papel cuadriculado pueden servir al niño para desarrollar el concepto de área y el descubrimiento de fórmulas.

El papel punteado auxiliar está construido de forma que la cuadrícula unidad tiene un cm^2. La obtención de la fórmula del rectángulo es elemental y viene de resolver un problema de multiplicación. Para buscar el área del triángulo el alumno debe saber que la diagonal del rectángulo divide a éste en dos partes congruentes.

En un capítulo anterior nos hemos dedicado a la triangulación y cuadriculación de figuras por lo que el alumno podrá calcular el área de cualquier figura en el Geoplano si sabe descomponerla.

ACTIVIDADES

MGS-1. Tomando como unidad de área la del cuadrado que ves dibujado en la fig. 14.1, y cuya longitud de lado es la unidad, calcula el área de las siguientes figuras.

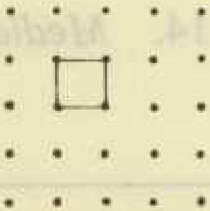


Figura 14.1

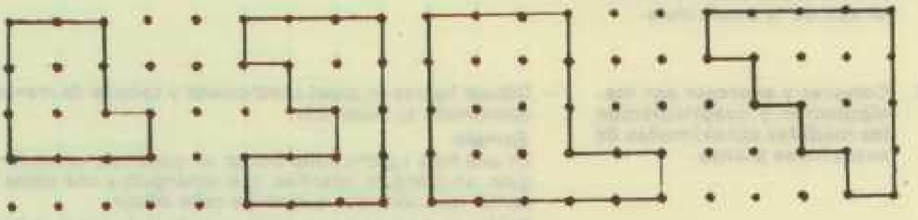


Figura 14.2

MGS-2. Construye en tu Geoplano figuras cuyo área sea respectivamente 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 unidades de área.
Dibújalas en papel punteado.

MGS-3. Calcula el área de las siguientes figuras.

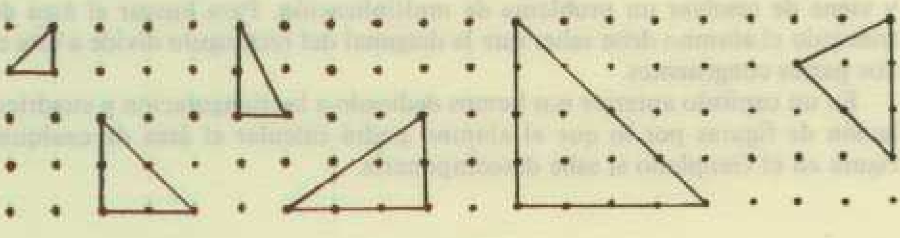


Figura 14.3

MGS-4. Construye en tu Geoplano 5×5 una figura, haz una descomposición de la figura en cuadrados y triángulos y calcula su área.

MGS-5. Calcula el área de las figuras siguientes por descomposición y pasa las soluciones al papel punteado.

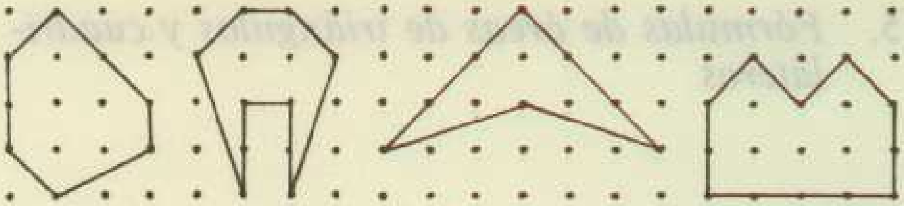


Figura 14.4

MGS-6. Construye una figura en tu Geoplano 5×5, completa la figura de forma que obtengas un rectángulo o un cuadrado. Calcula el área de éste y las áreas de las figuras que has contruido para completar. Calcula el área de la figura que inicialmente habías construido.

MGS-7. Calcula el área de las figuras siguientes por completación y pasa las soluciones al papel punteado.

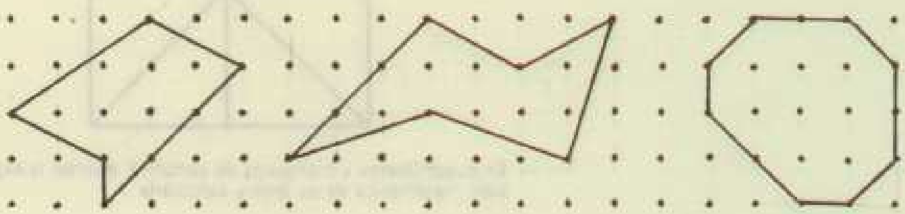
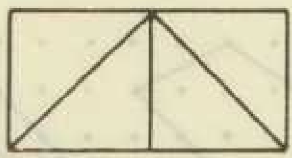


Figura 14.5

MGS-8. Calcula por descomposición el área de las figuras de MGS-7 y calcula por completación el área de las figuras de la actividad MGS-5. Pasa los resultados al papel cuadriculado.

15. *Fórmulas de áreas de triángulos y cuadriláteros*

OBJETIVOS	CICLO MEDIO	ACTIVIDADES SUGERIDAS
4.3.1.	**Llegar, mediante experiencias, a la expresión matemática del área del cuadrado, rectángulo y triángulo, utilizando la cuadrícula.**	— Dibujar un rectángulo sobre papel cuadriculado. Contar el número de cuadros que hay en el interior del dibujado, observar que es el mismo que si multiplicamos el número de cuadrados adosados a dos lados consecutivos. Deducir la expresión matemática del área del rectángulo. — Dibujar un triángulo y una altura del mismo, trazar una paralela a la base por el vértice opuesto y perpendiculares a la base por sus extremos. La figura que resulta es un rectángulo cuya superficie ya se sabe medir, deducir ahora la expresión del área del triángulo.  — En cuadriláteros y triángulos de cartulina, escribir la expresión matemática de su área y calcularla.

OBJETIVOS	CICLO SUPERIOR	ACTIVIDADES SUGERIDAS
3.2.6.	**Resolución de problemas de áreas de paralelogramos, triángulos y polígonos regulares de más de 4 lados, utilizando, en su caso, el teorema de Pitágoras.**	

Se intenta en este capítulo que el alumno, en cada tipo de polígono, enuncie por inducción una fórmula para calcular el área de esas figuras.

No se pretende que sea una demostración formal, sino que el alumno se convenza de que la fórmula por él enunciada es válida. Para ello es necesario que el alumno realice un número suficiente de actividades y que los polígonos sean muy variados.

ACTIVIDADES

FTC-1. Construye en tu Geoplano 5×5 cuadrados que tengan de área 4, 9 y 16 unidades. ¿Cuántos cuadrados puedes construir de cada tipo?

FTC-2. Rellena la tabla siguiente con los cuadrados que has construido en FTC-1.

Cuadrado	*Longitud del lado*	*Área del cuadrado*
1º		
2º		
3º		
....		

¿Qué relación existe entre el área del cuadrado y la longitud de sus lados? Escribe una fórmula general.

FTC-3. En tu Geoplano 10×10 construye cuadrados que tengan de lado 5, 6, 7, 8 y 9 unidades respectivamente. Comprueba si la fórmula que has escrito antes es válida para estos cuadrados.

FTC-4. Construye en tu Geoplano 5×5 rectángulos de área 2, 3 y 4 unidades.

FTC-5. Calcula el área de los rectángulos siguientes.

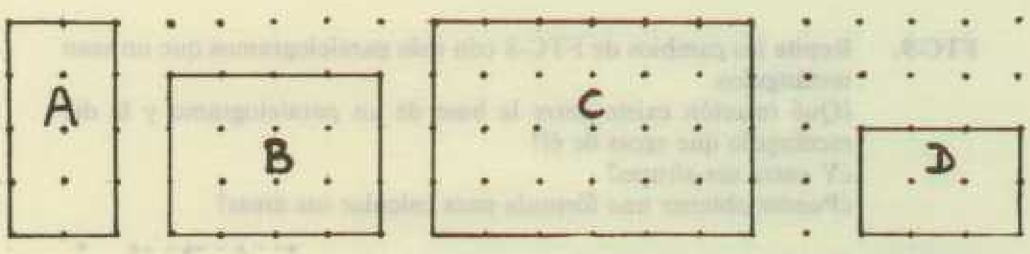


Figura 15.1

FTC-6. Rellena la tabla siguiente con los datos de las actividades FTC-4 y FTC-5.

Rectángulo	*Área*	*Longitud base*	*Longitud altura*
1º (FTC-4)			
2º (FTC-4)			
3º (FTC-4)			
A (FTC-5)			
B (FTC-5)			
C (FTC-5)			
D (FTC-5)			

¿Qué relación hay entre el área del rectángulo y la longitud de sus lados?
¿Puedes dar una fórmula?

FTC-7. Comprueba la fórmula anterior en tu Geoplano 10×10 construyendo rectángulos mayores y calculando su área.

FTC-8. Puesto que sabes calcular el área del rectángulo, intenta aprovecharte de ello. Si tienes un paralelogramo, divídelo en piezas como en la figura 15.2, de manera que al cambiar alguna de ellas de sitio, la figura se convierta en un rectángulo. ¿Está claro que el área del nuevo rectángulo es la misma que la del paralelogramo dado? Comprueba esto con cuidado.

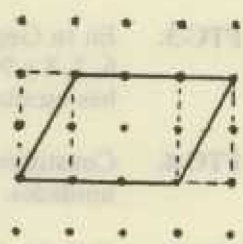


Figura 15.2

FTC-9. Repite los cambios de FTC-8 con más paralelogramos que no sean rectángulos.
¿Qué relación existe entre la base de un paralelogramo y la del rectángulo que sacas de él?
¿Y entre sus alturas?
¿Puedes obtener una fórmula para calcular sus áreas?

FTC-10. Dibuja varios triángulos acutángulos en papel cuadriculado. Construye en cada caso un rectángulo de la misma base y altura que el triángulo, como en la fig. 15.3. ¿Qué relación existe entre las áreas del triángulo y del rectángulo en cada caso?

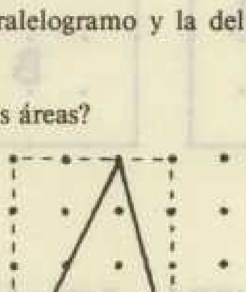


Figura 15.3

FTC-11. Completa la tabla siguiente.

Triángulo	*Longitud base*	*Longitud altura*	*Área del triángulo*	*Área del rectángulo*
1º				
2º				
3º				
...				
...				
...				

¿Puedes deducir una fórmula para calcular el área de estos triángulos? Recuerda el resultado de FTC-6.

FTC-12. Construye un triángulo obtusángulo. Como no se puede construir un rectángulo como en FTC-10, intenta construir un paralelogramo con la misma base y altura y ponlo encima del triángulo.
¿Qué relación existe entre las áreas del triángulo y del paralelogramo?
Da una fórmula para obtener el área del triángulo. ¿Se parece a la que has obtenido en FTC-11?

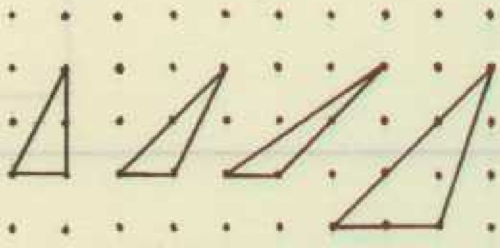


Figura 15.4

FTC-13. Construye un trapecio rectángulo en tu Geoplano 5×5 y calcula su área.
Construye otro trapecio que no sea rectángulo, y traza una diagonal. Calcula el área de los dos triángulos que has obtenido. Construye más trapecios y calcula su área por descomposición en dos triángulos.
¿Puedes dar una fórmula para obtener el área del trapecio?

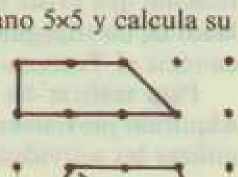
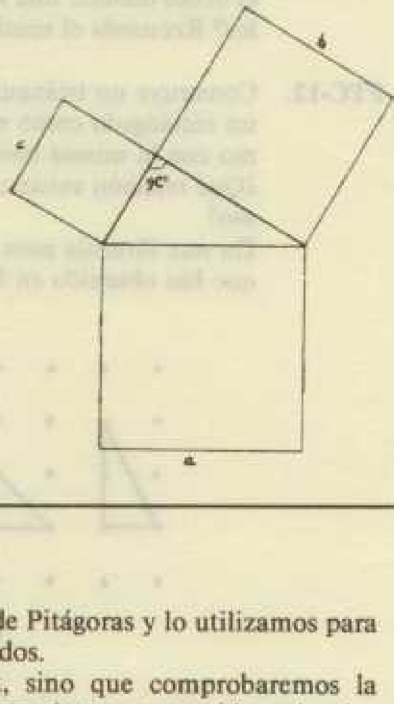


Figura 15.5

16. *Teorema de Pitágoras*

OBJETIVOS	CICLO SUPERIOR	ACTIVIDADES SUGERIDAS
3.3.3. Demostrar algunos teoremas de geometría elemental.		3. Demostrar que: $a^2 = b^2 + c^2$



En este capítulo enunciamos el Teorema de Pitágoras y lo utilizamos para medir segmentos y calcular el área de cuadrados.

No intentaremos demostrar el Teorema, sino que comprobaremos la relación que existe entre las áreas de figuras semejantes construidas sobre los lados de un triángulo rectángulo, y como caso particular de esta propiedad se enuncia el Teorema de Pitágoras.

Para realizar las siguientes actividades es necesario que el alumno haya adquirido previamente el concepto de figuras semejantes. Para ello se pueden utilizar las actividades que hay en el capítulo 18.

ACTIVIDADES

Es conveniente utilizar para estas actividades el Geoplano 10×10.

TP-1. Sobre el triángulo ABC se construyen tres triángulos rectángulos semejantes, como indica la figura 16.1.
Calcula el área de cada uno de esos triángulos.

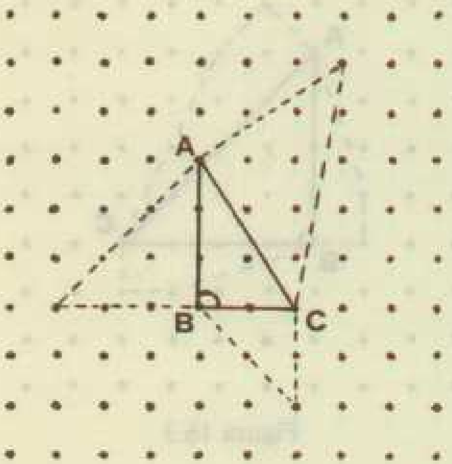


Figura 16.1

TP-2. Sobre el triángulo rectángulo ABC se construyen rectángulos semejantes, como ves en la figura 16.2.
Calcula el área de cada uno de los rectángulos.

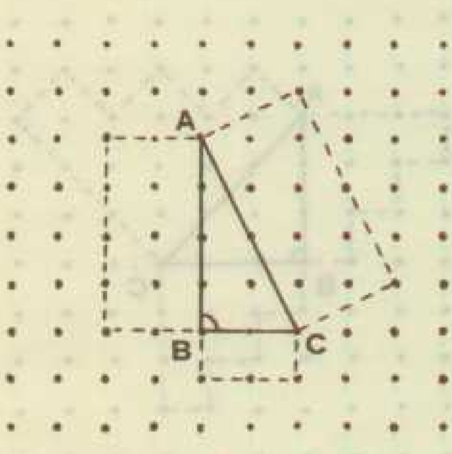


Figura 16.2

TP-3. Sobre los lados del triángulo rectángulo ABC se construyen tres trapecios semejantes, como en la figura 16.3.
Calcula el área de cada uno de estos trapecios.

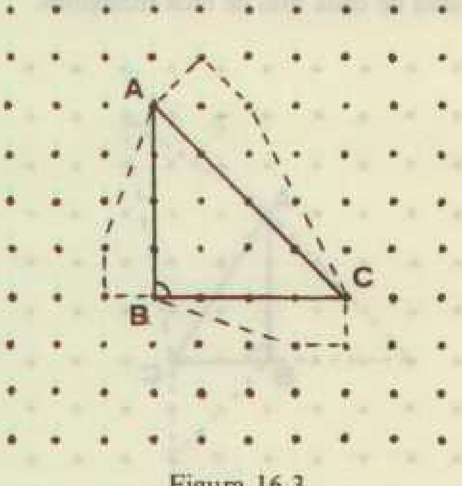


Figura 16.3

TP-4. Sobre los lados del triángulo rectángulo ABC se construyen tres octógonos semejantes, como ves en la figura 16.4.
Calcula el área de cada uno de esos octógonos.

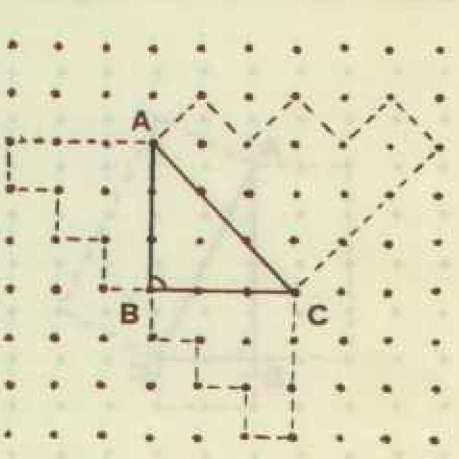


Figura 16.4

TP-5. Sobre los lados del triángulo rectángulo ABC se construyen tres cuadrados, como ves en la figura 16.5.
Calcula el área de cada uno de estos tres cuadrados.

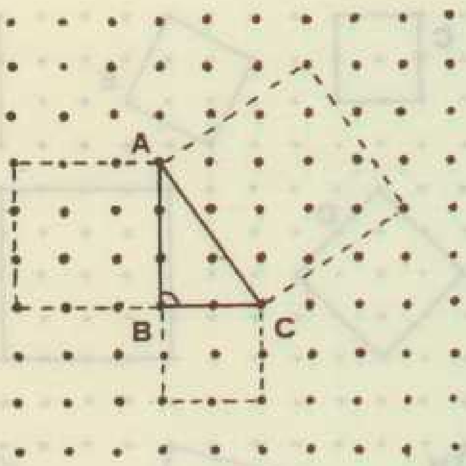


Figura 16.5

TP-6. Con los resultados obtenidos en las anteriores actividades completa la tabla siguiente.

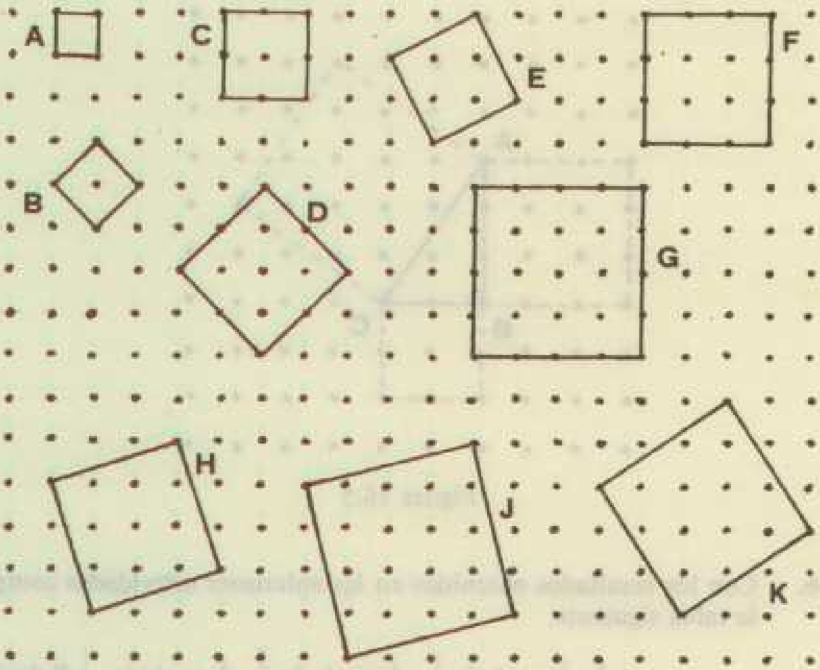
Actividad	*Área de la figura sobre un cateto*	*Área de la figura sobre el otro cateto*	*Área de la figura sobre la hipotenusa*	*Relación entre las áreas*
TP-1				
TP-2				
TP-3				
TP-4				
TP-5				

Al expresar la relación que se obtiene en TP-5 mediante la fórmula del área del cuadrado, tenemos un enunciado que se llama Teorema de Pitágoras.

TP-7. Repite la actividad TP-5 con otros triángulos rectángulos cuyos catetos midan: 1 y 1; 1 y 2; 2 y 2; 1 y 4; 3 y 3 unidades de longitud.
¿Es válida la relación del Teorema de Pitágoras para un triángulo que no sea rectángulo?
Si escogieras un Geoplano mayor que el 10×10 o papel cuadriculado podrías estudiar más casos distintos.

TP-8. Aplicando el Teorema de Pitágoras, mide todos los segmentos diferentes que puedes construir en un Geoplano 5×5.

TP-9. Halla la longitud del lado de cada uno de los cuadrados que hay en la figura siguiente.



TP-10. Completa la tabla siguiente con los resultados y datos de TP-9.

figura	*long. lado*	*área*
A		
B		
C		
D		
E		
F		
G		
H		
J		
K		

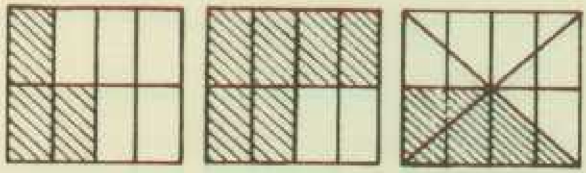
TP-11. Halla la longitud de la diagonal de cada uno de los cuadrados de la actividad TP-9.

17. *Fracciones*

OBJETIVOS — CICLO MEDIO — **ACTIVIDADES SUGERIDAS**

2.3.1. Interpretar fracciones como operadores, como cociente de dos números y como aproximación de una medida. Relacionar estos conceptos.

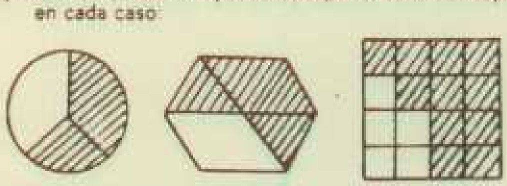
— Expresar en forma de fracción la medida de figuras dadas.
Ejemplo:
Tenemos que medir los dibujos que hay aquí para saber cuánto mide la parte rayada y no disponemos de instrumentos para ello, hemos utilizado las fracciones como medida.



Podremos decir que en el primer cuadrado lo rayado mide los......, en el segundo cuadrado lo rayado mide los......, y en el tercer cuadrado lo rayado mide los......

2.3.2. Representar fracciones gráficamente.

— Reconocer fracciones expresadas en dibujos dados.
Ejemplo:
a) Indicar la fracción que se ha representado con rayado en cada caso:



— Representar con dibujos las fracciones dadas.
Ejemplo:

2/4 6/8 2/6

— Repetir los ejercicios anteriores con ejemplos más complejos.

2.3.4. Realizar, mediante experiencias, sumas y diferencias de fracciones del mismo denominador. Adquirir los automatismos.	— Dividir gráfica o manipulativamente un objeto en partes iguales. Repartir varias de estas partes entre los alumnos. Reunir las partes de dos o más alumnos. Expresar el resultado verbal y gráficamente. Escribir la correspondiente suma. — Realizar experiencias similares para restar fracciones del mismo denominador. — Repetir las actividades anteriores con distintos ejemplos.

El Geoplano también puede utilizarse como material de apoyo en temas no geométricos, tal como en el estudio de las fracciones, pues la manipulación del material por parte del niño es muy sencilla.

ACTIVIDADES

F-1. Construye en tu Geoplano 5×5 una figura tal que la puedas dividir en 2 partes iguales mediante un segmento, como en la fig. 17.1.

La figura resultante es la "mitad" de la construida, o bien $\frac{1}{2}$ de la figura construida.

Una expresión de la forma $\frac{1}{2}$ la llamaremos fracción, donde 1 es el numerador y 2 es el denominador.

Figura 17.1

F-2. Construye en tu Geoplano una figura tal que la puedas dividir en 3 partes iguales (o de área equivalente) como en la fig. 17.2.

Cada parte es un "tercio" o $\frac{1}{3}$ de la figura construida.

Construye otras figuras y divídelas cada una de ellas en tres partes iguales (o equivalentes de área).

Figura 17.2

F-3. Construye en tu Geoplano una figura tal que la puedas dividir en 4 partes iguales (o equivalentes en área), como en la fig. 17.3

Cada parte es un "cuarto" o $\frac{1}{4}$ de la figura construida.

Construye otras figuras y divídelas en "cuartos"; utiliza si lo necesitas un Geoplano mayor.

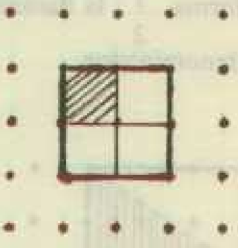


Figura 17.3

F-4. De forma análoga a las actividades anteriores, construye figuras en tu Geoplano de forma que puedas obtener: "quintos" ($\frac{1}{5}$); "sextos" ($\frac{1}{6}$); "séptimos" ($\frac{1}{7}$); "octavos" ($\frac{1}{8}$); etc....

F-5. En tu Geoplano circular construye un dodecágono regular; de él obtén las siguientes fracciones:

$\frac{1}{2}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{6}{12}$

Comprueba si todas las figuras resultantes tienen la misma superficie. Cuando esto ocurra diremos que las fracciones son equivalentes o que "operan" sobre la figura de igual forma.

Escribiremos: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{6}{12} = ... = \frac{1xn}{2xn}$

F-6. Con la misma figura anterior, halla las fracciones que sean equivalentes a $\frac{2}{3}$.

Análogamente para $\frac{3}{4}$.

F-7. Construye figuras en tu Geoplano para comprobar si son equivalentes las siguientes fracciones:

(a): $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{6}$

(b): $\frac{3}{5}$ y $\frac{15}{20}$

(c): $\frac{5}{8}$ y $\frac{10}{16}$

Cuando no sean equivalentes, dí cual es mayor.

F-8. Sobre un Geoplano circular de 24 puntos construye figuras que puedas descomponer en partes iguales, por ejemplo el hexágono regular. De ellas obtén si puedes: su mitad, su tercio, su cuarto, su sexto, su octavo, su doceavo.
En cada caso ordena de menor a mayor las fracciones que has podido obtener.

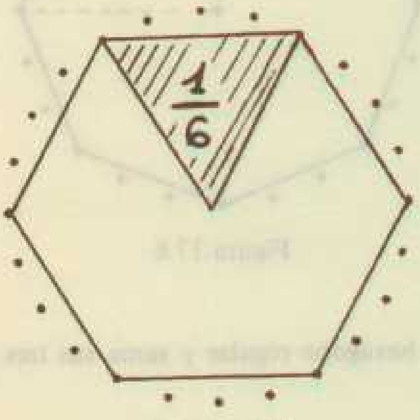


Figura 17.4

La adición de fracciones la podemos representar en el plano como adición de superficies, por ejemplo:

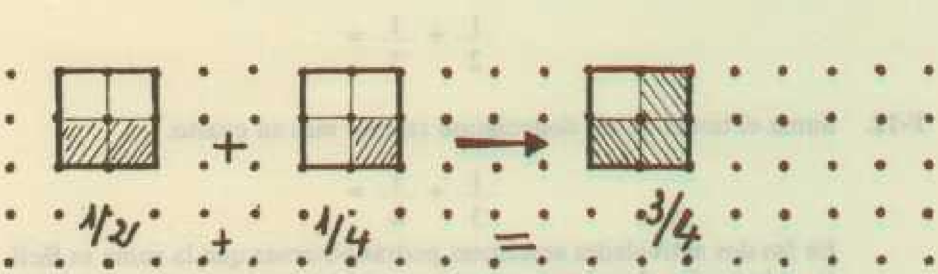


Figura 17.5

F-9. Construye un octógono regular en tu Geoplano circular de 24 clavos y suma sus dos cuartos más su cuarto.

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} =$$

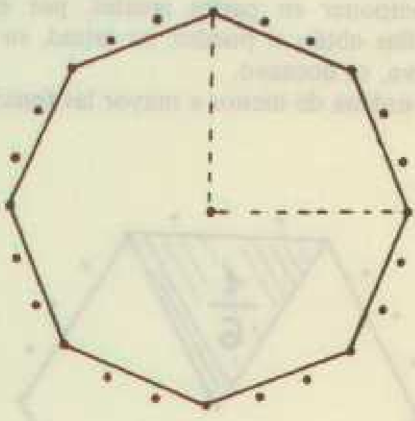


Figura 17.6

F-10. Construye un hexágono regular y suma sus tres sextos más sus dos sextos.

$$\frac{3}{6} + \frac{2}{6} =$$

En las actividades anteriores las fracciones tenían común denominador, por lo que la suma ha resultado muy sencilla. Veamos otros casos.

F-11. Suma la mitad de un hexágono regular más su tercio.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$$

F-12. Suma el tercio de un dodecágono regular más su cuarto.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} =$$

En las dos actividades anteriores podrás observar que la suma es fácil si reduces las fracciones a otras equivalentes pero con el mismo denominador.

F-13. Resuelve, con ayuda del Geoplano, las siguientes sumas:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} =$$

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} =$$

F-14. Construye en tu Geoplano circular la mitad de un hexágono regular, y de esta figura resultante halla su tercio.
¿Qué fracción es el resultado que has obtenido?

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} =$$

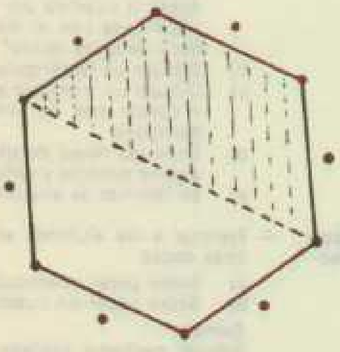


Figura 17.7

F-15. De forma análoga a F-14, de la mitad de un cuadrado obtén su mitad. De los dos tercios de un dodecágono regular obtén su cuarta parte. De los dos sextos de un hexágono regular obtén su mitad.

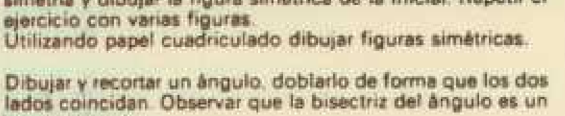
$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} =$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} =$$

$$\frac{2}{6} \times \frac{1}{2} =$$

F-16. Observando los resultados de F-14 y F-15.
¿Puedes dar una regla para multiplicar fracciones?

18. *Movimientos y semejanzas*

OBJETIVOS	CICLO MEDIO — ACTIVIDADES SUGERIDAS
4.2.2. Reconocer ejes de simetría en figuras planas	— Ejercitarse en buscar y comprobar ejes de simetría mediante doblados. *Ejemplos* a) Dibujar en una cuartilla un cuadrado y trazar perpendiculares a los lados por los puntos medios. Si se dobla la cuartilla por cualquiera de estas dos rectas, ¿Qué pasa con el dibujo? Entonces, ¿qué podemos decir de estas rectas? b) Dibujar un rectángulo y buscar ejes de simetría. c) Dibujar un triángulo equilátero y luego uno isósceles y buscar ejes de simetría. Hacer lo mismo con un hexágono. d) Entre las hojas de plantas que se conozcan, buscar alguna simetría y señalar el eje. e) En láminas de anatomía buscar ejes de simetría.
4.2.3. Dibujar figuras simétricas de puntos, segmentos, rectas y polígonos.	— Ejercitar a los alumnos en construir figuras simétricas a otras dadas. a) Sobre papel cuadriculado. b) Sobre papel sin cuadricular. *Ejemplo* Dibujar, mediante doblado, figuras simétricas a las dadas.  — **Dibujar en el cuaderno una figura muy sencilla y un eje de simetría y dibujar la figura simétrica de la inicial. Repetir el ejercicio con varias figuras.** — **Utilizando papel cuadriculado dibujar figuras simétricas.**
4.2.4. Construir mediatrices y bisectrices como aplicación de las propiedades de la simetría.	— **Dibujar y recortar un ángulo, doblarlo de forma que los dos lados coincidan. Observar que la bisectriz del ángulo es un eje de simetría.** — **Doblar un papel en el que hay dibujado un segmento haciendo coincidir los bordes de éste. Observar que ha quedado determinado un eje de simetría del segmento. Identificarle como mediatriz del segmento.**

OBJETIVOS	CICLO SUPERIOR	ACTIVIDADES SUGERIDAS
3.3.2. **Resolución de problemas sobre áreas y perímetros de polígonos semejantes.**		

El estudio de los movimientos en EGB se basa fundamentalmente en la construcción de figuras simétricas de una dada, de figuras con centro o eje de simetría y de figuras que quedan invariantes al aplicarles determinados giros.

Desde el punto de vista del Geoplano, la malla cuadrada es útil para hacer las construcciones de figuras simétricas, si bien plantea un inconveniente debido a que sólo se pueden usar ejes que sigan la cuadrícula o las diagonales (fig. 18.1). Cuando se trata de realizar giros, es evidente la gran ventaja del Geoplano giratorio sobre un Geoplano normal o una hoja de papel.

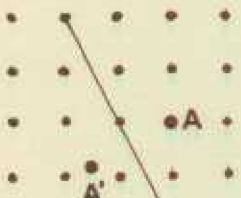


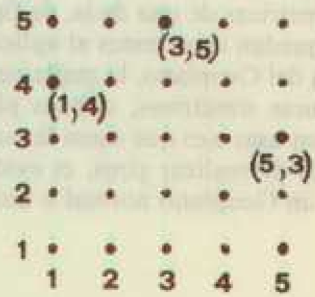
Figura 18.1

Las actividades que planteamos están realizadas sobre geoplanos 5×5; puede ponerse la objeción de que el Geoplano no da espacio suficiente para hacer variedad de figuras, pero estas actividades pueden entenderse como unas directrices para ser desarrolladas si un profesor quiere utilizar geoplanos de mayor tamaño.

En este capítulo estudiamos, en primer lugar, las simetrías axiales, después las simetrías centrales en su doble faceta de simetría y giro de 180º y por último los giros. En la actividad MS-22 hacemos notar la diferencia fundamental entre las simetrías axiales y las centrales, basada en el hecho de que la simetría axial es el único movimiento que invierte las figuras. Esta inversión se nota por la imposibilidad de superponer una figura y su simétrica, salvo en el caso de que la figura sea simétrica.

Por lo que respecta a la semejanza de figuras, es importante destacar el hecho de que no basta con tener la "misma forma", sino que es necesario la misma proporción entre las longitudes. Esto es particularmente importante en algunos tipos de figuras, como los rectángulos, triángulos isósceles, trapecios, etc.

Para hacer referencia de forma cómoda a los puntos del Geoplano cuadrado, es conveniente usar algún sistema de coordenadas. Aunque es frecuente que sea utilizada la notación de tipo matricial (en la que se empieza a numerar desde la esquina superior izquierda del Geoplano), nosotros nos inclinamos por la que, años más tarde, seguirán los alumnos al usar los ejes de coordenadas cartesianas. La figura siguiente muestra de forma concreta las coordenadas que usaremos en las actividades.



ACTIVIDADES

MS-1. En la figura 18.2 hay una recta. Imagina que es un espejo.
¿Dónde verás reflejado el punto A? ¿Y el B?

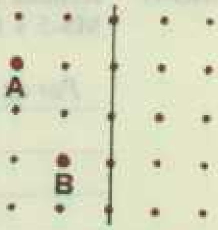


Figura 18.2

MS-2. En la figura 18.3, A ′ es el reflejo de A en el espejo de la recta que va del (3,1) al (3,5). Diremos que A ′ es le punto simétrico de A respecto del eje (3,1)-(3,5), y a esta recta la llamaremos "eje de simetría".
Busca el simétrico respecto del eje (3,1)-(3,5), de los puntos: (1,1), (2,3), (5,1), (4,5), (5,4) y (3,2).

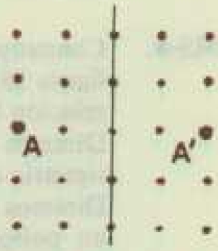


Figura 18.3

MS-3. Busca los simétricos respecto del eje (1,1)-(5,5) de los puntos de MS-2. Construye los segmentos que unen cada punto con su simétrico. ¿Qué relación tienen con el eje de simetría?
¿Es la misma que en MS-2?

MS-4. En la figura 18.4 ves un triángulo. Busca los simétricos de sus vértices respecto del eje (3,1)-(3,5) y une los nuevos puntos con una goma. Diremos que estos dos triángulos son simétricos respecto del eje (3,1)-(3,5).

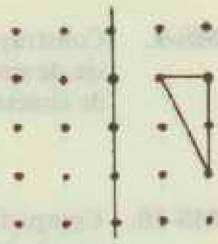


Figura 18.4

MS-5. Construye varios triángulos y dibuja sus simétricos respecto del eje (3,1)-(3,5). Dibuja los simétricos de esos triángulos respecto del eje (1,1)-(5,5) y respecto del eje (1,5)-(5,1).

MS-6. Repite las actividades MS-4 y MS-5 utilizando polígonos de más vértices (incluso cóncavos), pero con cuidado de unir los nuevos vértices en el mismo orden que los del polígono inicial (observa la figura 18.5).

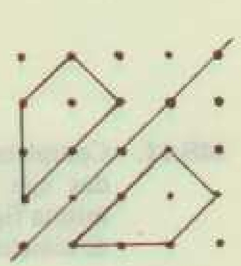


Figura 18.5

MS-7. Rellena la tabla siguiente con los pares de polígonos simétricos de MS-5 y MS-6.

Par de polígonos	*Relación entre lados*	*Relación entre áreas*
1º		
2º		
3º		
4º		
...		

MS-8. Construye el simétrico del polígono de la figura 18.6 respecto del eje (3,1)-(3,5). ¿Qué relación hay entre los dos polígonos?
Diremos que el eje (3,1)-(3,5) es un "eje de simetría del polígono".
Diremos que una recta es "eje de simetría de un polígono" si el simétrico del polígono respecto del eje es él mismo.

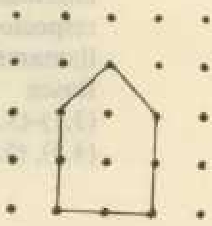
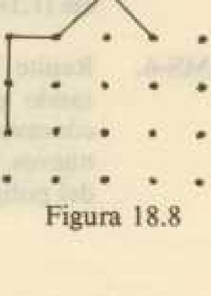


Figura 18.6

MS-9. Construye polígonos que tengan algún eje de simetría. ¿Es único el eje de simetría de un polígono? Construye polígonos con varios ejes de simetría, si es posible.

MS-10. Completa la figura 18.7 de forma que tenga un eje de simetría.

Figura 18.7



MS-11. Completa la figura 18.8 de forma que tenga dos ejes de simetría. Ahora completa la misma figura de forma que tenga sólo un eje de simetría.

Figura 18.8

MS-12. Busca todos los ejes de simetría de los polígonos de la figura 18.9.

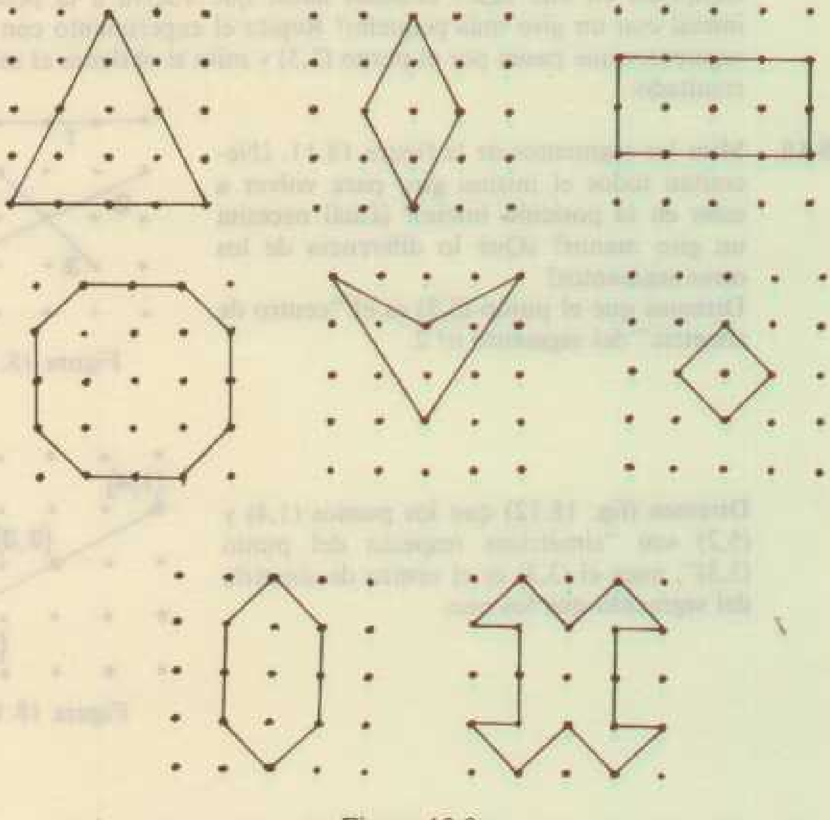


Figura 18.9

MS-13. Construye polígonos estrellados y regulares en el Geoplano circular de 12 puntos. Busca sus ejes de simetría. ¿Cuántos tienen? ¿Qué relación hay entre el número de ejes y el número de lados?

MS-14. Sobre el Geoplano giratorio 5×5, construye el segmento de la figura 18.10. Si empiezas a girar el Geoplano ves que el segmento cambia de posición. ¿Cuántos grados tienes que girar el Geoplano para que el segmento vuelva a estar en la posición inicial?

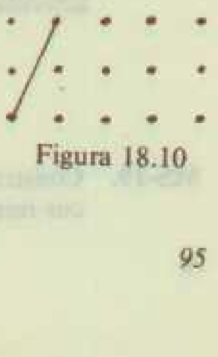


Figura 18.10

MS-15. Repite la operación anterior con otros segmentos como tú quieras. ¿Es necesario hacer siempre el mismo giro? Construye un segmento que pase por el punto (3,3). ¿Cuántos grados tienes que girar el Geoplano en este caso? ¿Puedes hacer que vuelva a la posición inicial con un giro más pequeño? Repite el experimento con más segmentos que pasen por el punto (3,3) y mira si obtienes el mismo resultado.

MS-16. Mira los segmentos de la figura 18.11. ¿Necesitan todos el mismo giro para volver a estar en la posición inicial? ¿Cuál necesita un giro menor? ¿Qué lo diferencia de los otros segmentos?
Diremos que el punto (3,3) es el "centro de simetría" del segmento nº 2.

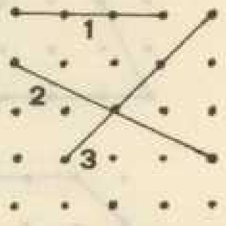


Figura 18.11

Diremos (fig. 18.12) que los puntos (1,4) y (5,2) son "simétricos respecto del punto (3,3)", pues el (3,3) es el centro de simetría del segmento que los une.

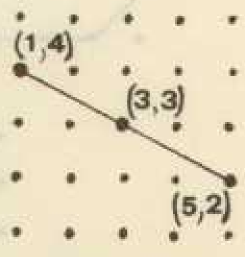


Figura 18.12

MS-17. Di si los pares siguientes son simétricos respecto del (3,3):
(2,2) y (4,4); (1,2) y (3,4); (2,4) y (5,1); (1,3) y (5,3); (2,3) y (4,3).
Busca el simétrico respecto del (3,3) de los puntos siguientes:
(1,2), (2,4), (2,1), (1,1), (4,5), (1,5) y (3,3).

MS-18. Calcula el simétrico del triángulo de la figura 18.13 respecto de (3,3), de forma parecida a como lo has hecho en MS-4. Repite la actividad con otros triángulos.

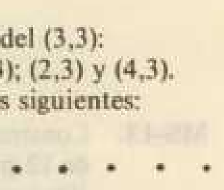


Figura 18.13

MS-19. Construye varios polígonos (incluso cóncavos) y busca sus simétricos respecto del punto (3,3).

MS-20. Rellena la tabla siguiente con los pares de polígonos de las actividades MS-18 y MS-19. Saca conclusiones.

Par de polígonos	*Relación entre lados*	*Relación entre áreas*
1º		
2º		
3º		
⋮		

MS-21. Construye un triángulo en el Geoplano. Construye su simétrico respecto del eje (3,1)–(3,3). Dibuja el resultado en papel cuadriculado, coloréalo y recórtalo. Repite la actividad con el eje (1,5)–(5,1). Repítela haciendo simetría respecto del punto (3,3) y respecto del punto (3,2). Utiliza colores distintos. ¿Son iguales o diferentes los resultados?

MS-22. Pon los cuatro triángulos de papel, que has recortado en MS-21, sobre la mesa con la cara coloreada hacia arriba.
Intenta superponerlos sin darles la vuelta. ¿Puedes hacerlo siempre? ¿Cuánto puedes? ¿Cuándo no puedes?

MS-23. Construye el polígono de la figura 18.14 en el Geoplano giratorio.
Ponte de espaldas al Geoplano y dile a un compañero que, mientras tú no miras, lo gire 90°, 180°, 270° ó 360°.
Al ver nuevamente el Geoplano, tú debes adivinar de cuántos grados ha sido el giro.
Repite la actividad varias veces.

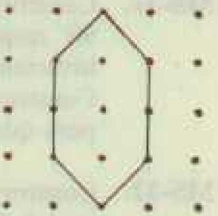


Figura 18.14

MS-24. Repite la actividad MS-23 con otros polígonos.

MS-25. Construye los simétricos respecto de (3,3) de los polígonos que has utilizado en MS-23 y MS-24.

MS-26. Separa los polígonos de MS-23 y MS-24 en los que no sabías distinguir entre un giro de 180° o de 360°.
Separa los polígonos de MS-25 en los que su simétrico coincide con él mismo. Compara los resultados.
En general, diremos que el punto (3,3) es el "centro de simetría" de un polígono si el simétrico de ese polígono respecto de (3,3) es él mismo.

MS-27. Construye polígonos que tengan al (3,3) como centro de simetría, y di cuántas veces aparece cada polígono en la posición inicial si giras una vuelta el Geoplano.

MS-28. Construye un polígono regular sobre el Geoplano circular de 24 puntos. ¿Tiene centro de simetría? ¿Puedes construir algún polígono regular que no tenga centro de simetría? ¿Tienen el mismo centro de simetría todos los polígonos regulares construidos en el Geoplano circular? ¿Qué punto es ése?

MS-29. Completa el polígono de la figura 18.15 para que sea simétrico respecto del punto (3,3).

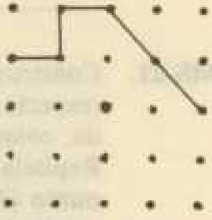


Figura 18.15

MS-30. Construye en el Geoplano circular de 12 puntos polígonos que queden invariantes con un giro de 180° y otros que no queden invariantes.

MS-31. Construye figuras que queden invariantes al aplicarles un giro de 90° respecto del centro del Geoplano circular. ¿Quedan también invariantes con un giro de 180°?
Construye otras que queden invariantes al aplicarles un giro de 90° pero que no queden invariantes con un giro de 180°.

MS-32. Construye figuras que queden invariantes con un giro de 60° y con uno de 90°. Otras que queden invariantes con un giro de 60° pero no con uno de 90°. ¿Quedan las figuras anteriores invariantes con un giro de 180°? Construye figuras que queden invariantes con un giro de 60° pero no con uno de 180°.

MS-33. En la figura 18.16 hay dos triángulos. ¿En qué se diferencian? ¿En qué se parecen? Mide los lados de ambos y busca una relación entre las longitudes de los lados correspondientes. ¿Es la misma en los tres lados?
Diremos que estos dos triángulos son "semejantes".
Los triángulos de la figura 18.17 también son semejantes; compruébalo comparando las longitudes de los dados correspondientes.
Diremos que dos polígonos son "semejantes" si existe una relación constante entre las longitudes de los lados correspondientes de los dos polígonos.

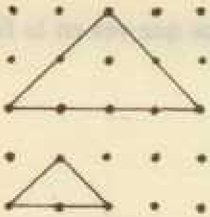


Figura 18.16

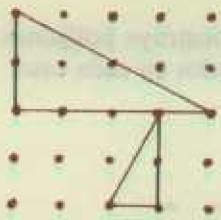


Figura 18.17

MS-34. Construye más triángulos semejantes a los que hay en las figuras 18.16 y 18.17.

MS-35. En cada figura de 18.18 hay dos polígonos. Dí si son semejantes o no.

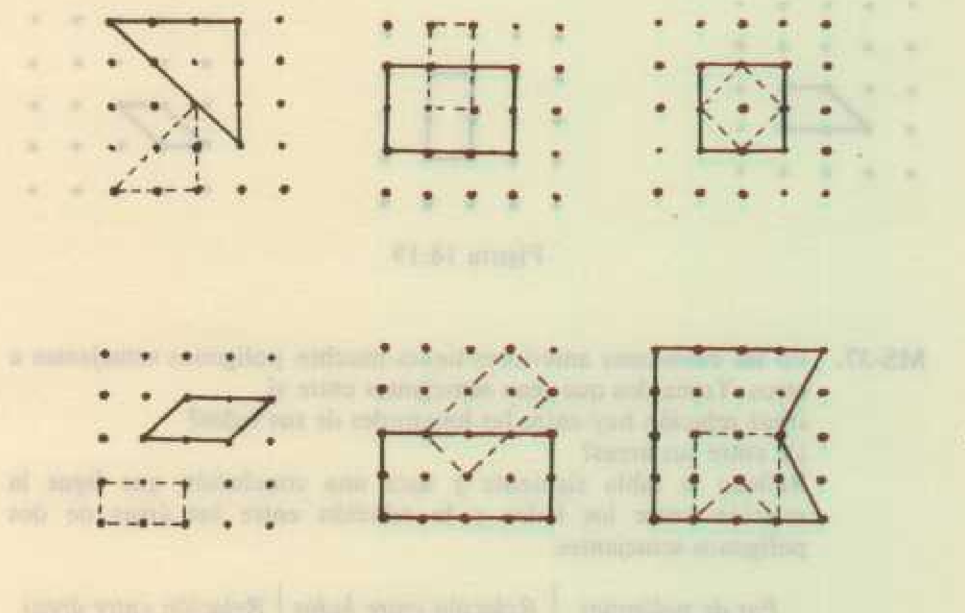


Figura 18.18

MS-36. Construye polígonos semejantes a los que ves en la fig. 18.19. Haz varios en cada caso.

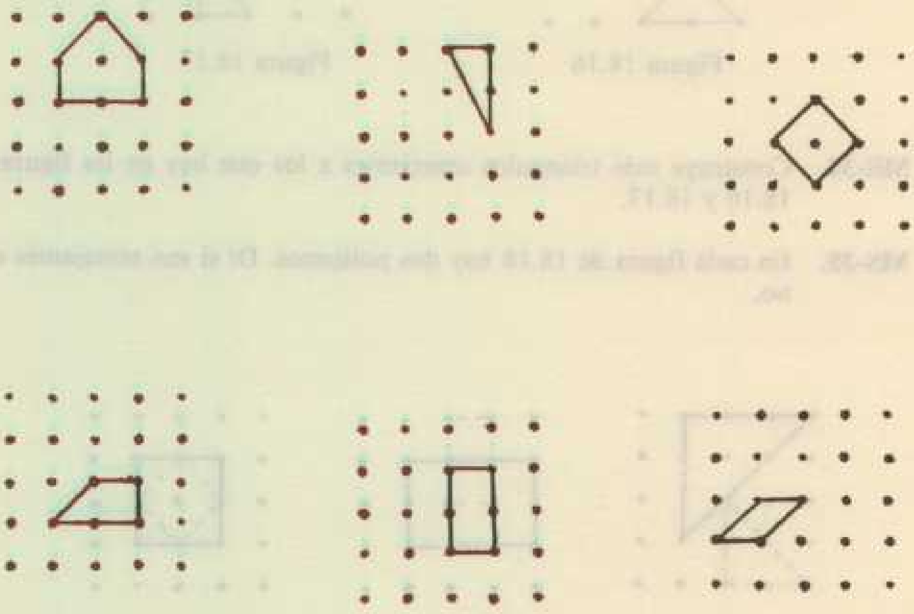
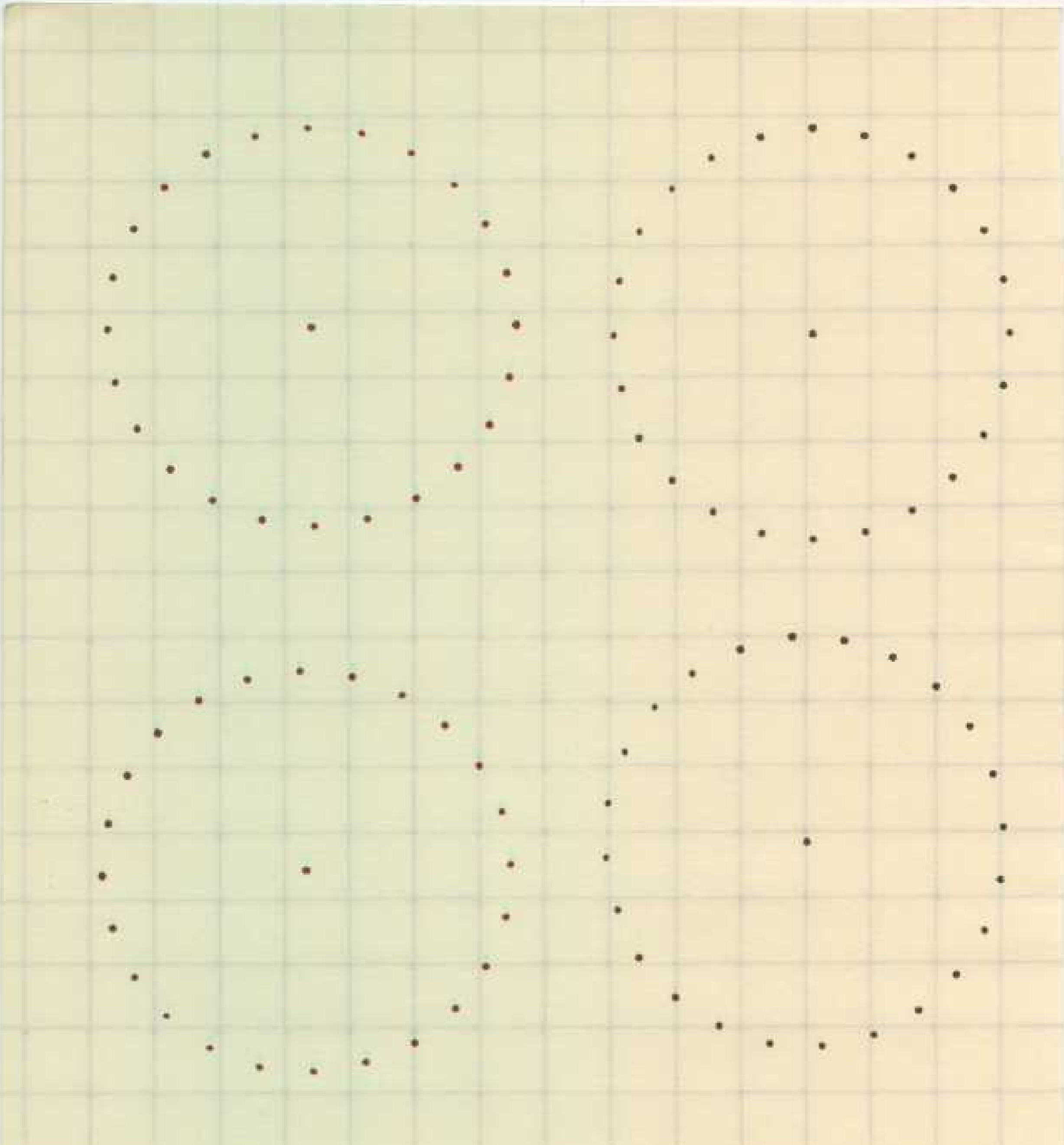


Figura 18.19

MS-37. En las cuestiones anteriores tienes muchos polígonos semejantes a otros. Toma dos que sean semejantes entre sí.
¿Qué relación hay entre las longitudes de sus lados?
¿Y entre sus áreas?
Rellena la tabla siguiente y saca una conclusión que ligue la relación entre los lados y la relación entre las áreas de dos polígonos semejantes.

Par de polígonos	*Relación entre lados*	*Relación entre áreas*
1º		
2º		
3º		

Notas:



Notas: