ENSEÑANZA DE LA TRIGONOMETRÍA CON AYUDA DE SGD

Gutiérrez Rodríguez, Ángel. Dpto. de Didáctica de la Matemática
E.U. de Magisterio
Universidad de Valencia. Valencia
angel.gutierrez@uv.es
Fiallo Leal, Jorge. Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga (Colombia)
jorge.fiallo@yahoo.es

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de la trigonometría puede convertirse en un proceso memorístico y rutinario, sin ningún sentido ni utilidad para los estudiantes si no se les brindan las condiciones para que logren una comprensión profunda, dinámica y utilitaria de estos conceptos, sus propiedades y relaciones. Por esta razón, es importante para los estudiantes que el tema incluya no solo una serie de conceptos y fórmulas, sino también herramientas y estrategias útiles para explorar, relacionar, conjeturar y demostrar. El software de geometría dinámica (SGD) puede desempeñar un papel muy importante en este contexto.

En este capítulo presentamos una propuesta de enseñanza de la trigonometría en Educación Secundaria (en estos momentos 4.º de ESO y 1.º de Bachillerato). Basamos la propuesta en tres ejes, conceptual (aprendizaje de los conceptos y propiedades matemáticos implicados), metodológico (uso de SGD como apoyo en un contexto de enseñanza por descubrimiento guiado) y formativo (mejorar la habilidad de demostración matemática mediante el requerimiento a los estudiantes de validar sus resultados y descubrimientos). En los siguientes párrafos de esta introducción, reflexionamos sobre los principales aspectos de cada eje.

Analizando las sugerencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría contenidas en los "Principios y Estándares" (NCTM, 1991, 2003) y en los currículos oficiales de la ESO y Bachillerato de la Comunidad Valenciana[1] (Generalitat Valenciana, 2007, 2008), vemos poca concreción del enfoque metodológico propuesto para la enseñanza de la trigonometría. Tampoco se dan pautas claras sobre el papel que deben desempeñar en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos trigonométricos sus distintas formas de representación (numérica, geométrica, algebraica, analítica y funcional). En este contexto, los libros de texto suelen adoptar posiciones tradicionales, centrados en enseñar conceptos, propiedades importantes y las conocidas aplicaciones al cálculo de elementos de triángulos o de distancias inaccesibles. En contadas ocasiones, los libros de texto hacen uso de las posibilidades que ofrecen las nuevas tecnologías.

Hay numerosas investigaciones que, durante dos décadas, han dado cuenta del fracaso o del bajo nivel de los estudiantes en la comprensión y elaboración de demostraciones (Battista y Clements, 1995; Clements y Battista, 1992; Fischbein, 1982; Godino y Recio, 2001; Harel y Sowder, 1998; Marrades y Gutiérrez, 2000; Martin y Harel, 1989; Senk, 1985, 1989). En particular, Ibañes y Ortega (1998) realizan un análisis del tratamiento de la demostración matemática en los libros de texto en los

[1] Hemos tomado estos currículos como referencia. Las diferencias entre los contenidos enseñados en las diferentes comunidades autónomas son mínimas.

temas dedicados a las razones trigonométricas. Estos autores plantean como una de sus conclusiones que

> … los autores de los textos se preocupan de demostrar los teoremas que enuncian para cumplir con un trámite obligado y no ser acusados de falta de rigor, pero emplean pocos recursos en hacer comprensibles esas demostraciones, en resaltar sus características, en detenerse en sus razonamientos, en reconocer sus técnicas, en destacar sus funciones, y en potenciar su utilización (pág. 29).

Como reacción a esta situación, en los últimos años hay una tendencia general a incluir el aprendizaje de la demostración en los currículos de matemáticas. En España, el currículo de 4.º de ESO de la Comunidad Valenciana (Generalitat Valenciana, 2007) afirma que:

> … la finalidad de la enseñanza de las Matemáticas es no sólo su aplicación instrumental, sino también, el desarrollo de las facultades de razonamiento, de abstracción y de expresión.

Y el currículo de 1º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología de la Comunidad Valenciana (Generalitat Valenciana, 2008) afirma que:

> Los alumnos deben alcanzar el grado de madurez necesario, en el manejo del lenguaje formal y de los procesos lógicos deductivos, que les permitan, por ejemplo, seguir, interpretar, y desarrollar demostraciones que no sean excesivamente complicadas, plantear conjeturas, analizar procesos lógicos …

En cuanto a los contenidos matemáticos en los que basar la enseñanza y el aprendizaje de la demostración, no nos podemos limitar a las demostraciones de propiedades de los polígonos y análisis matemático, sino que deben plantearse en cualquier contexto en el que sean pertinentes, como en la enseñanza de la trigonometría.

Las nuevas tecnologías ofrecen herramientas que nos pueden ayudar a definir una metodología de enseñanza activa y participativa. El SGD existente pone a disposición del estudiante un micromundo geométrico en el cual los conceptos trigonométricos pasan de ser simples dibujos o fórmulas a convertirse en “objetos geométricos” que pueden ser construidos y manipulados, de forma que, a través del SGD, los estudiantes pueden poner en práctica sus ideas, explorar, analizar, tomar datos, formular y comprobar sus conjeturas y elaborar sus demostraciones.

Aunque hay numerosas publicaciones y páginas web interactivas que muestran la utilidad del SGD para enseñar a los estudiantes a demostrar, son pocas las que se basan en la enseñanza de trigonometría. Shaffer (2006) presenta un libro de actividades de introducción básica a las funciones trigonométricas utilizando el SGD Sketchpad. Las páginas Geometría Activa (MECD, 2005) y Descartes (MECD, 2001, 2003) presentan interactivamente las definiciones de las razones trigonométricas, sus principales propiedades y relaciones, como la identidad pitagórica, y aplicaciones de las razones trigonométricas en diversos contextos. Aunque son páginas interactivas, en ninguna de ellas se pide a los estudiantes justificar o demostrar los resultados presentados.

2. MARCO DE REFERENCIA

La enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría es un campo poco explorado por los investigadores en didáctica de las matemáticas. Brown (2006) ofrece un estudio que reveló que muchos estudiantes tenían una comprensión incompleta o fragmentada de las tres maneras importantes de ver el seno y el coseno, como coordenadas de un punto sobre el círculo unidad, como longitudes horizontales y verticales, y como razones entre lados del triángulo de referencia. También encontramos algunas propuestas innovadoras para la enseñanza de la trigonometría dirigidas a profesores de matemáticas de ESO y de Bachillerato. Así, Munné (2002) presenta varias propuestas para demostrar las fórmulas trigonométricas de suma o resta de ángulos, y Gutmann (2003), unas actividades en las que los valores de seno y coseno de la suma de dos ángulos aparecen ligados a las medidas de segmentos en la circunferencia unidad. También plantea la idea de llamar "lado seno" y "lado coseno" a los segmentos de circunferencias no unidad. Algunas de estas propuestas han sido consideradas al diseñar nuestra unidad de enseñanza.

Los conceptos y propiedades trigonométricos se definen, se conectan, se representan y se demuestran de diversas formas, involucrando conocimientos numéricos, geométricos, métricos, algebraicos y analíticos, por lo que se necesita de un tratamiento didáctico que permita que los estudiantes vean las conexiones entre conceptos, procesos y relaciones mediante las diferentes formas de representación que mencionábamos con anterioridad.

En los "Principios y Estándares" de NCTM (2003) se señala que las diferentes representaciones pueden ayudar a los estudiantes a organizar su pensamiento, a hacer las ideas matemáticas más concretas y asequibles a la reflexión. También se sugiere que los ordenadores amplían el conjunto de representaciones con las que pueden trabajar.

Teniendo en cuenta las ideas anteriores, en la unidad de enseñanza que presentamos a continuación hemos diseñado las actividades con un enfoque geométrico apoyado en SGD para favorecer, inicialmente, conexiones entre procesos, representaciones y procedimientos métricos, numéricos y geométricos y, posteriormente, ampliar las conexiones al plano coordenado favoreciendo procesos, representaciones y procedimientos algebraicos y analíticos.

Un objetivo de esta unidad de enseñanza es favorecer el aprendizaje de la demostración. Consideramos el concepto de demostración desde una perspectiva amplia, como un proceso que incluye todos los intentos hechos por los estudiantes de explicar, verificar o justificar la veracidad de una afirmación matemática para convencerse a sí mismo, a otros estudiantes o al profesor. En este contexto, los profesores, además de evaluar el progreso de sus alumnos en el aprendizaje de conceptos y propiedades trigonométricos, deben evaluar su progreso en el aprendizaje de las habilidades de demostración.

Marrades y Gutiérrez (2000), apoyados en los trabajos de otros investigadores como Balacheff (1988), Bell (1976) y Harel y Sowder (1998), proponen una estructura de tipos de demostraciones útil para analizar, organizar y describir las demostraciones elaboradas por los estudiantes. Presentamos aquí solo los elementos centrales de esta propuesta, que son suficientes para que los profesores de Secundaria puedan evaluar el progreso de sus alumnos.

Los autores mencionados distinguen dos clases básicas de demostraciones:

- Demostraciones *empíricas,* caracterizadas por el uso de ejemplos como principal (puede ser el único) elemento de convicción. Primero, los estudiantes descubren las conjeturas y aceptan su veracidad cuando han observado regularidades en uno o más ejemplos. Posteriormente, usan los propios ejemplos para demostrar la veracidad de la conjetura.
- Demostraciones *deductivas,* caracterizadas por el uso de deducciones abstractas para conectar datos con conclusiones. Estas demostraciones están descontextualizadas de los ejemplos que hayan podido usarse en la fase inicial de resolución, se basan en los datos del problema y en propiedades genéricas, operaciones mentales y deducciones lógicas. Es importante diferenciar entre las demostraciones deductivas *informales,* muy apoyadas en los ejemplos y con frecuente uso de la visualización, y las demostraciones deductivas *formales,* más abstractas, detalladas y simbólicas.

A continuación, mostramos ejemplos de demostraciones de ambos tipos producidas por estudiantes que participaron en una investigación experimental[2] para el diseño de esta unidad de enseñanza.

Ejemplo 1. Actividad 1.2.4 [los alumnos abren un archivo de Cabri con la construcción de la figura 1]: Mide el ángulo A y calcula sus razones trigonométricas. Mide el ángulo B y calcula sus razones trigonométricas.

¿Qué relación existe entre las medidas de los ángulos A y B? Justifica por qué es verdadera tu respuesta.

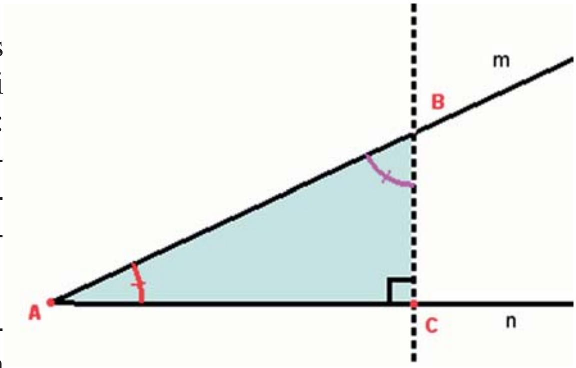

Figura 1.

[2] Estudiantes de 10.º grado (14-16 años) de tres centros de Educación Secundaria del departamento de Santander (Colombia).

Un grupo de estudiantes tomó varios valores de los ángulos *A* y *B* y completó con ellos una tabla. Después escribió la siguiente conjetura: *La suma de las medidas de los ángulos A con el ángulo B va a dar como resultado el ángulo C.* Esta es la interacción posterior con el investigador:

Investigador	Estudiantes
(1) El ángulo C, que mide… ¿cuánto?	*(2) 90º.*
(3) ¿Y eso es para todo triángulo? ¿Siempre se cumple?	*(4) Yo creo que sí.*
(5) ¿Por qué?	*(6) Porque se está utilizando diferentes medidas, entonces da diferentes triángulos.*
(7) Bueno. Entonces, ¿cómo comprobarías o cómo justificarías que efectivamente esa suma da 90º?	*(8) Porque tenemos varias medidas acá en esta tabla* [señala la tabla de valores], *y si las sumamos, siempre nos va a dar 90º, cualquiera de las dos que tomemos.*
(9) ¿Y eso es suficiente para justificarlo?	*(10) Sí.*

La conjetura dada por el grupo estaba apoyada solamente en el uso del conjunto de datos agrupados en la tabla de Cabri, tomados sin ningún criterio. Las justificaciones dadas en (6) y (8) estaban basadas solamente en esos datos observados en la tabla. Para finalizar, el grupo afirmó que esta explicación sí es suficiente para justificar su conjetura. Se trata de un ejemplo de razonamiento empírico muy básico. Una finalidad de la enseñanza de las matemáticas en ESO debe ser mejorar este tipo de razonamientos para aproximarlo a los razonamientos deductivos abstractos informales. El siguiente ejemplo muestra un razonamiento que, siendo también empírico, es bastante diferente del anterior.

<u>Ejemplo 2</u>. Actividad 2.4.2: ¿Qué relación hay entre *cos A* y *cos(–A)*? Escribe una conjetura, justifícala y describe todo lo que pensaste e hiciste para resolver la actividad.

Un grupo de estudiantes resolvió esta actividad con la ayuda de una construcción de Cabri en la que aparecen los ángulos *A* y *–A*. Después de la resolución, tuvo lugar el siguiente diálogo con el investigador:

Investigador	Estudiantes
(1) ¿Cómo son coseno de A y coseno de –A?	*(2) Iguales.*

(3) Iguales. ¿Cómo argumentarías matemáticamente eso? ¿Por qué?	*(4) Porque el coseno de A es x sobre el radio, entonces, al depender de x, las dos tienen el mismo valor de x, y x siempre va a ser positivo, x positivo para este* [señala la coordenada *x* del ángulo *A* en el primer cuadrante], *como para este* [señala la coordenada *x* del ángulo –*A* en el cuarto cuadrante], *y como el radio siempre va a ser positivo, tienen la misma distancia y el mismo ángulo* [señala los lados de los triángulos que forman los ángulo *A* y –*A*].
(5) Sí, pero ahí estás mirando un ángulo particular A en el primer cuadrante. ¿Sucede lo mismo si el ángulo está en cualquier otro cuadrante?	*(6) Sí* [mueve el punto *P* hacia el segundo cuadrante].
(7) ¿Qué pasa ahí, por ejemplo?	*(8) Son negativos.*
(9) ¿Y entonces?	*(10) Porque… es que están dependiendo de la misma x.*
(11) ¡Ah!	*(12) Como dependen de la misma x, como dependen solo de x y no de y, entonces las dos x, como el triángulo se pinta hacia x* [señala los triángulos congruentes que se forman entre las semirrectas de los ángulos *A* y –*A*, el eje *x* y la perpendicular por *P* al eje *x*], *siempre la x de A y –A va a ser la misma.*

El grupo de estudiantes utilizó un ejemplo de un ángulo *A* ubicado inicialmente en el primer cuadrante. Consideraban *A* como un ángulo genérico, pues no tuvieron en cuenta el valor del ángulo en la pantalla, sino las propiedades observadas en él. Con esta primera exploración del ejemplo aseguraron que *cos (A)* y *cos (–A)* son iguales porque en ese caso la *x* y el radio son siempre positivos. Posteriormente, debido a la intervención del investigador, verificaron que la relación también es verdadera en otro cuadrante y utilizaron propiedades generales para su justificación.

Ejemplo 3. Actividad 2.4.5: Busca relaciones entre los valores de las razones trigonométricas para los ángulos α y 180º ± α, siendo α cualquier ángulo positivo o negativo entre 0º y ±360º. Demuestra las relaciones que encuentres utilizando propiedades matemáticas. En particular, ¿es verdad que *sec* (180 + α) = –*sec* (α)?

Los estudiantes disponían de una construcción de Cabri para explorar las relaciones planteadas. Después de hacer en su libreta un dibujo (figura 2a) que reproducía parte de la figura que tenían en la pantalla (figura 2b), escribieron:

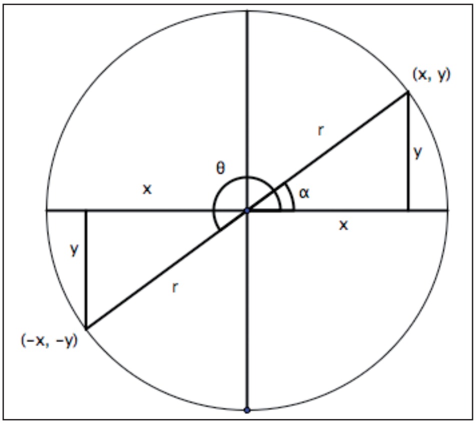

Figura 2a.

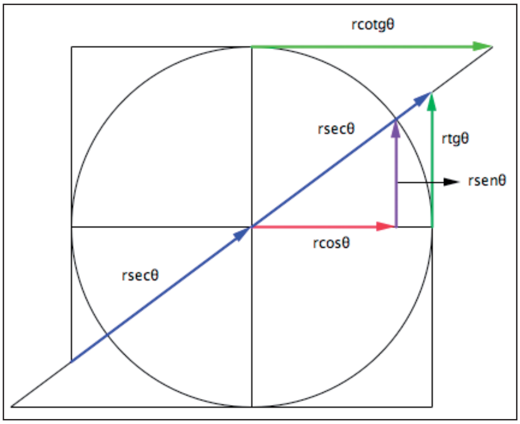

Figura 2b.

$sec\ (180 + \alpha) = \dfrac{r \rightarrow +}{x \rightarrow -}$ $\qquad$ $sec\ \alpha = \dfrac{r \rightarrow +}{x \rightarrow +}$

$sec\ (180 + \alpha) = -sec\ \alpha$

$-sec\ (180 + \alpha) = sec\ \alpha$

$|sec\ (180 + \alpha)| = sec\ \alpha$

→ *Dado que el triángulo referencial de* θ = *(180* + α*) es* α*, por lo que tienen las mismas coordenadas, dado que el lado terminal de* θ *es la prolongación del lado terminal de* α*, en el I cuadran*[te] *sec* α *es positiva, pero en el tercer cuadrante es negativa, pero el radio ya que es una longitud en todos los cuadrantes es positivo, esto también se puede ver en los vectores.*

Aunque los estudiantes habían estado viendo en el ordenador medidas específicas de ángulos, dibujaron un ángulo agudo α genérico, sin ninguna amplitud numérica específica, y el correspondiente ángulo *180* + α. También dibujaron, en la parte de la derecha, los “lados secantes” de los dos ángulos. Después, utilizaron la definición de secante y la regla de los signos para determinar el resultado, y escribieron una demostración verbal en la que utilizaron deducciones abstractas lógicas derivadas de la construcción y de los datos del problema. Finalmente, añadieron una referencia a los vectores de los “lados secantes” para confirmar que la igualdad también es cierta porque “se puede ver”.

Esta demostración es claramente deductiva informal, muy ligada a la figura dibujada (referencia al primer cuadrante) y a los ejemplos previos (referencia a los vectores).

3. UNA UNIDAD DE ENSEÑANZA DE LA TRIGONOMETRÍA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

La unidad de enseñanza que presentamos a continuación se centra en los contenidos de trigonometría usualmente enseñados en los actuales currículos españoles de 4.º de ESO y 1.º de Bachillerato. Tiene dos objetivos centrales: la comprensión y aprendizaje de los contenidos matemáticos, y la iniciación de los estudiantes a la demostración deductiva matemática.

La principal característica metodológica de esta unidad de enseñanza es que propone una enseñanza por descubrimiento guiado basada en el uso de SGD. Las manipulaciones hechas con el SGD deben ayudar a los estudiantes a experimentar y a ver regularidades y diferencias entre múltiples ejemplos para, a continuación, formular conjeturas y demostrar su validez por los medios empíricos o deductivos adecuados. Además, aunque no se mencione explícitamente en el texto de las actividades, al final de cada bloque de actividades relacionadas, el profesor propondrá hacer una puesta en común del grupo en la que algunos estudiantes presenten sus soluciones (a veces correctas, otras incorrectas) para su discusión por los compañeros.

Los currículos oficiales de ESO y de Bachillerato fijan la enseñanza de la trigonometría en 4.º de ESO y 1.º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología. Hemos tomado como referencia los currículos oficiales y los libros de texto de la Comunidad Valenciana, pero creemos que las diferencias con los contenidos enseñados en otras comunidades autónomas son mínimas. Los libros de texto que hemos consultado incluyen los siguientes conceptos, propiedades y tipos de problemas:

En Matemáticas de 4.º de ESO (opción B), los libros de texto incluyen:

Definiciones y cálculo de las razones seno, coseno y tangente en un triángulo rectángulo.

Los valores de las razones trigonométricas dependen de los ángulos, pero no de los lados del triángulo.

Representación gráfica de las razones trigonométricas en el primer cuadrante de una circunferencia.

Identidades trigonométricas fundamentales:

$$tg\ \alpha = sen\ \alpha / cos\ \alpha, \quad (sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1$$

Cálculo de las razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º.

Resolución de triángulos rectángulos conociendo dos lados, o un lado y un ángulo.

Representación y cálculo de las razones trigonométricas de ángulos cualesquiera en la circunferencia goniométrica (o trigonométrica). Signos de las razones en cada cuadrante.

Ángulos negativos y de más de 360º.

Relación entre las razones de ángulos complementarios, suplementarios y opuestos.

El contexto de este tema en 4.º de ESO es generalmente de justificaciones informales, aunque también hay algunas demostraciones formales sencillas de propiedades o relaciones. Las figuras están siempre presentes y se utilizan ejemplos numéricos como apoyo a las explicaciones teóricas y para mostrar la forma de resolver los tipos de problemas.

En Matemáticas I (modalidad de Ciencias y Tecnología), los libros de texto incluyen:

> Definiciones y cálculo de las seis razones trigonométricas.
>
> Cálculo de las razones trigonométricas mediante las coordenadas de los puntos de la circunferencia trigonométrica.
>
> Signos y valores de las razones trigonométricas en los cuatro cuadrantes.
>
> Identidades trigonométricas:
> $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$, $1 + cotg^2\,\alpha = cosec^2\,\alpha$, $tg^2\,\alpha + 1 = sec^2\,\alpha$
>
> Relaciones entre las razones trigonométricas de: α y $180º - \alpha$,
> α y $180º + \alpha$, α y $-\alpha$, α y $90º - \alpha$.
>
> Razones trigonométricas de la suma y de la diferencia de dos ángulos, del ángulo doble y del ángulo mitad.
>
> Resolución de ecuaciones trigonométricas y de sistemas de ecuaciones.
>
> El teorema de los senos. El teorema del coseno. Aplicaciones al cálculo de áreas de triángulos y a la resolución de triángulos cualesquiera.

El contexto de este tema en 1.º de Bachillerato es mayoritariamente formal, con demostraciones formales de todas las relaciones estudiadas. Las figuras están siempre presentes como apoyo a los argumentos deductivos teóricos.

Aunque el tema que nos ocupa se enseña en 4.º de ESO y en 1.º de Bachillerato, lo presentamos como una unidad continua, dejando a cada profesor la decisión de qué partes usar o dejar, dependiendo de su situación específica, la programación de su centro, etc. Los contenidos que hemos abordado en la unidad de enseñanza coinciden ampliamente con los de los actuales libros de texto españoles de estos cursos. En el CD que acompaña a este libro se incluye un mapa conceptual que presenta, de manera global, los conceptos, propiedades y aplicaciones que hemos considerados más importantes y necesarios para la enseñanza y el aprendizaje de las razones trigonométricas y que hemos tenido en cuenta en el diseño de la unidad de enseñanza. Las aplicaciones de las razones trigonométricas (extremo derecho del mapa) no se han utilizado en la unidad de enseñanza porque, en muchos casos, se trata de ejercicios que se pueden realizar en un ambiente de actividad real mejor que en un ordenador o dibujados en el papel.

Para construir los archivos de SGD que usan los estudiantes al realizar las actividades, hemos adoptado el modelo de representación gráfica de las razones trigonométricas propuesto en Gutmann (2003). La circunferencia unidad (radio 1 cm) se ve demasiado pequeña en la pantalla, por lo que hemos usado una circunferencia de radio mayor. En este modelo cada razón trigonométrica está representada por un vector (figura 3), de forma que:

- La *longitud* del vector es igual al valor absoluto del producto del radio de la circunferencia por la razón trigonométrica representada.
- El *sentido* del vector determina el signo de la razón trigonométrica. Una razón trigonométrica es *positiva* cuando su vector apunta *hacia la derecha, hacia arriba* o *hacia el exterior* (tiene su origen en el centro de la circunferencia) y *negativa* cuando apunta *hacia la izquierda, hacia abajo* o *hacia el interior* (tiene su terminación en el centro de la circunferencia).

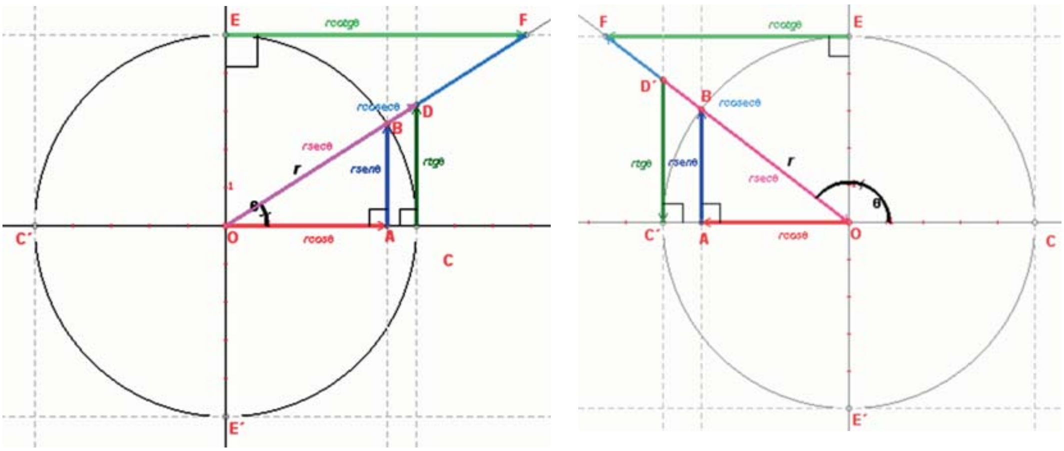

Figura 3. *Representación de los lados trigonométricos en el 1.^er^ y 2.º cuadrantes.*

Por convenio, llamamos lados trigonométricos del ángulo θ a los vectores que representan a sus razones trigonométricas. Por ejemplo, el lado *sen* θ es el vector *AB* (azul): *lado sen* θ = *rsen* θ.

Los *lados trigonométricos* no solo están definidos para ángulos situados en posición normal (empezando en el eje *OX*), sino para los ángulos en cualquier posición (figura 4). Esto es necesario para la demostración de algunos teoremas, por ejemplo el seno de la suma de dos ángulos.

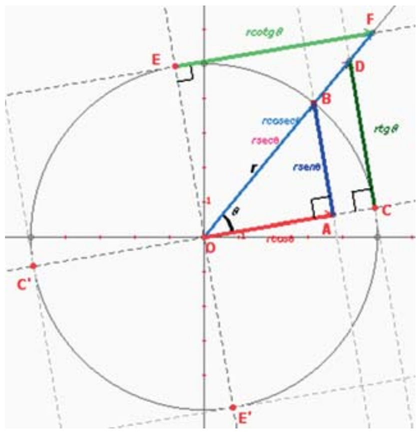

Figura 4. *"Lados trigonométricos" para un ángulo en posición no normal.*

En las experimentaciones que hemos realizado usamos Cabri II, pero no resulta difícil adaptar a otros programas (Geogebra, Sketchpad, Regla y Compás, etc.) estas figuras. En el CD que acompaña al libro incluimos los archivos de las actividades para Cabri II y para GeoGebra. Para facilitar la lectura, hemos incluido, junto al texto de algunas actividades, figuras, mostrando las pantallas de los archivos correspondientes, pero dichas figuras no forman parte de las actividades que reciben los estudiantes, ya que las ven en el ordenador.

El resto del capítulo está dedicado a presentar, de forma resumida, la unidad de enseñanza que hemos elaborado. Se trata de un recorrido por sus objetivos y actividades a vista de pájaro, pues la extensión de las actividades reales impiden incluirlas aquí. Hemos obviado actividades similares que, por ejemplo, estudian una propiedad sobre las diferentes razones trigonométricas, o sobre diferentes ángulos. Por este motivo, se pueden notar saltos en la numeración de las actividades. En el CD que acompaña al libro ofrecemos la versión completa de las actividades, que puede llevarse directamente a las aulas.

UNIDAD DE ENSEÑANZA DE LA TRIGONOMETRÍA

ACTIVIDAD 1: INTRODUCCIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Actividad 1.1: Cálculo de elementos de un triángulo rectángulo

Notas: i. Las actividades 1.1.1 a 1.1.4 se resuelven sin usar el SGD.

ii. Los estudiantes deben aceptar que dos triángulos rectángulos son diferentes cuando alguno de los lados o ángulos de un triángulo no mide lo mismo que el lado o ángulo correspondiente del otro triángulo.

1.1.1. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 8 cm y 10 cm. ¿Cuánto mide su hipotenusa? ¿Cuánto miden sus ángulos? ¿Existen otros triángulos rectángulos diferentes cuyos catetos midan 8 cm y 10 cm? Justifica tus respuestas.

1.1.3. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide el doble que uno de los catetos. ¿Cuánto mide el otro cateto? ¿Cuánto miden los ángulos de este triángulo? ¿Existen otros triángulos rectángulos diferentes cuya hipotenusa mida el doble que uno de los catetos? Justifica tus respuestas.

1.1.4. Un ángulo de un triángulo rectángulo mide 35º. ¿Cuánto miden los otros ángulos de este triángulo? ¿Cuánto miden sus catetos y su hipotenusa? ¿Existen otros triángulos rectángulos diferentes, con un ángulo de 35º, y cuyos ángulos tengan también medidas diferentes? Justifica tus respuestas.

1.1.5. La base de un triángulo isósceles mide 8 cm y sus ángulos iguales miden 40º (figura 5). Calcula el área de este triángulo. Justifica tu respuesta.

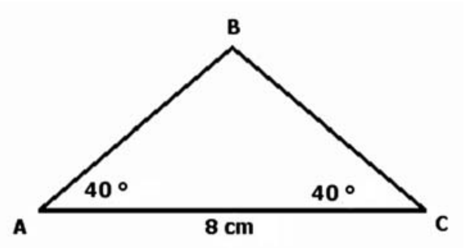

Figura 5.

1.1.6. Resuelve con Cabri los problemas anteriores. Compara las soluciones que habías obtenido inicialmente con las obtenidas al usar Cabri y escribe tus conclusiones.

La actividad 1.1 presenta a los estudiantes problemas que no tienen solución, pues los valores de longitudes o ángulos no se pueden calcular de forma exacta sin usar trigonometría. Una conclusión importante de la actividad 1.1 es que, cuando entre los datos hay una longitud específica de un lado, la solución es única, pero, cuando los datos incluyen relaciones entre lados o medidas de ángulos, hay infinidad de soluciones diferentes. Esta conclusión puede que pase desapercibida a los estudiantes al resolver los ejercicios en papel, pero la notarán muy fácilmente cuando los resuelvan con el SGD.

Actividad 1.2: Razones entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo (I)

1.2.1. Abre el archivo ACT.1.2.1 (figura 6) y calcula las razones entre cada par de lados del triángulo *ABC*. Nombra cada razón con su respectivo cociente entre dos lados del triángulo, por ejemplo *BC/AC*.

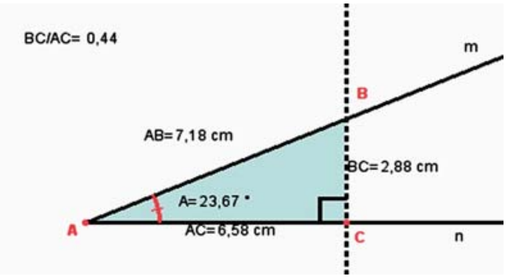

Figura 6.

— Gira la recta *m*. ¿Qué sucede con los valores de las razones cuando el ángulo *A* varía entre 0º y 90º? Escribe una conjetura. Justifica por qué es verdadera tu respuesta.

— Mueve el punto *C*. ¿Qué sucede con los valores de las razones cuando el triángulo cambia de tamaño? Escribe una conjetura. Justifica por qué es verdadera tu respuesta.

1.2.2. Continúa con el archivo ACT.1.2.1 de la actividad anterior.

— Gira la recta *m*. ¿Qué valores toma cada razón entre los lados a medida que el ángulo *A* varía desde 0º hasta 90º? Justifica por qué es verdadera tu respuesta.

— Escribe en tu hoja de trabajo todo lo que pensaste e hiciste para encontrar tu respuesta y para justificarla.

1.2.3. Definición de las razones trigonométricas *sen A, cos A* y *tg A*. En esta actividad, el profesor hace una síntesis de las actividades 1.1.1 a 1.2.2 en la que identifica las tres razones trigonométricas básicas del ángulo *A,* les da nombres y enseña a los estudiantes a calcularlas con el SGD.

1.2.4. Abre el archivo ACT.1.2.4 (figura 7). Mide el ángulo *A* y calcula sus razones trigonométricas. Mide el ángulo *B* y calcula sus razones trigonométricas.

— Como resumen de las respuestas anteriores, completa estas igualdades:

sen A = _ _ _ _ (90º – *A*)

cos A = _ _ _ _ (90º – *A*)

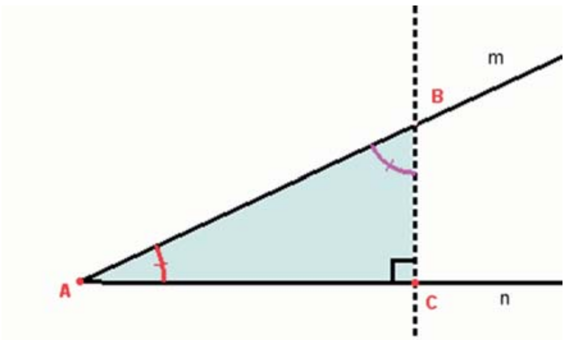

Figura 7.

1.2.6. Planteamos de nuevo a los estudiantes los problemas de la actividad 1.1, para que ahora los resuelvan de forma exacta usando las razones trigonométricas.

Actividad 1.3: Síntesis final

1.3.1. Completa los huecos (celdas y conexiones) del mapa conceptual, en el que se relacionan todas las definiciones y propiedades de las razones trigonométricas que has aprendido hasta ahora.

En la actividad 1.2 se introducen las razones seno, coseno y tangente. El objetivo de la actividad es introducir a los estudiantes al uso de las razones trigonométricas a través de la exploración de las medidas de los lados y de los ángulos de triángulos rectángulos. Esta actividad está diseñada para 4.º de ESO, por lo que solo se mencionan las tres razones básicas. Los profesores de Bachillerato que quieran utilizarla para introducir las seis razones solo tienen que hacer que, en 1.2.1, sus alumnos calculen las seis razones posibles entre los lados del triángulo para que, en 1.2.3, se puedan definir las seis razones trigonométricas. La actividad 1.2.4 es importante porque, en la práctica, se encuentran situaciones en las que es conveniente o necesario combinar razones trigonométricas de ambos ángulos del triángulo para obtener la solución.

En la actividad 1 cabe esperar que las justificaciones iniciales de los estudiantes sean empíricas basadas en los datos que se ven en la pantalla del ordenador, por ejemplo, que *sen A* = *cos* (90º – *A*) porque siempre coinciden sus valores. Esta evidencia es tan clara que, para los estudiantes, es suficiente para darles la certeza absoluta de que las relaciones son siempre ciertas, por lo que pedirles que, además, hagan demostraciones abstractas, les bloqueará con toda seguridad, ya que no entenderán la necesidad de hacer esas demostraciones. El profesor debe asumir, con sus alumnos, que la evidencia de la pantalla basta para estar seguros de que las igualdades son ciertas, pero puede guiarles hacia las justificaciones deductivas planteándoles la cuestión de averiguar *por qué* son ciertas las igualdades. Esta pregunta acepta la veracidad de las igualdades, por lo que no producirá bloqueo y, de esta manera, el profesor puede lograr que los estudiantes se den cuenta de por qué son ciertas las igualdades, por ejemplo, que *sen A* = *cos B* porque el cateto opuesto a *A* es el cateto contiguo a *B*.

Las últimas partes de la actividad 1.2 permiten a los estudiantes darse cuenta de que las razones trigonométricas son una herramienta interesante que les permite resolver problemas cuando el teorema de Pitágoras no es suficiente.

La actividad 1 termina pidiendo a los estudiantes completar el mapa conceptual de 1.3.1 (incluido en el CD). En el mapa no aparece ningún concepto, propiedad o relación nuevos, pues su objetivo es servir de resumen de lo estudiado hasta el momento. En las siguientes actividades presentaremos otros mapas conceptuales con el mismo objetivo. En el CD incluimos los mapas incompletos que deben usar los estudiantes y los mapas completos como referencia para el profesor.

ACTIVIDAD 2: LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA GONIOMÉTRICA

Actividad 2.1: Razones entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo (II)

2.1.1. Abre el archivo ACT.1.2.1. En la actividad 1 calculaste varias razones entre pares de lados del triángulo *ABC*. Calcula ahora todas las razones posibles entre los lados del triángulo. Nombra cada razón con su respectivo cociente entre dos lados del triángulo, por ejemplo, *BC/AC*.

2.1.2. Definición de las razones trigonométricas *sec A*, *cosec A* y *cotg A*. En esta actividad, el profesor hace una síntesis de las actividades 1.2.3 y 2.1.1 en la que identifica las seis razones trigonométricas del ángulo *A*, les da nombres a las nuevas razones y enseña a los estudiantes a calcularlas con el SGD.

Actividad 2.2: Introducción de la circunferencia goniométrica

2.2.1. Abre el archivo ACT.2.2.1 (figura 8). Mueve el punto *P* alrededor de la circunferencia y observa cómo varían sus coordenadas, las longitudes de los lados del triángulo *APD* y el valor del ángulo α.

Habrás observado que el centro de la circunferencia por la que se mueve el

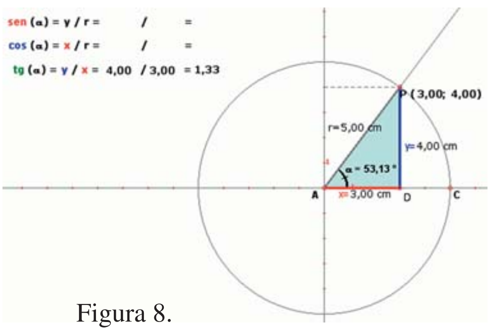

Figura 8.

punto P es el origen de coordenadas (0, 0) y que las longitudes de los catetos del triángulo APD coinciden con las coordenadas del punto P. Entonces, podemos usar las coordenadas de P para calcular las razones trigonométricas de cualquier ángulo α entre 0º y 360º.

2.2.2. Continúa con el archivo ACT.2.2.1 de la actividad anterior y completa la información de la pantalla para calcular las seis razones trigonométricas del ángulo α.

Para cada pregunta, escribe una conjetura y demuestra que es verdadera:

— ¿Qué valores toman las seis razones trigonométricas a medida que varía el ángulo α?

— ¿Qué valores toman las seis razones trigonométricas a medida que varía el radio r?

La actividad 2.1 está planteada para que los estudiantes de 1.º de Bachillerato aprendan las seis razones trigonométricas, por lo que los profesores de 4.º de ESO pueden saltarla. En cuanto a la actividad 2.2, su objetivo es introducir la circunferencia goniométrica y el cálculo de las razones trigonométricas de cualquier ángulo entre 0º y 360º. Los estudiantes de 4.º de ESO pueden resolver la actividad 2 ignorando las razones secante, cosecante y cotangente.

Actividad 2.3: Propiedades de las razones de un ángulo cualquiera

2.3.1. Continúa con el archivo ACT.2.2.1 de la actividad anterior y analiza los signos de las razones trigonométricas en cada uno de los cuatro cuadrantes del plano cartesiano. Completa cada círculo (figura 9) marcando con + o – sus cuadrantes. Demuestra que tus respuestas son correctas.

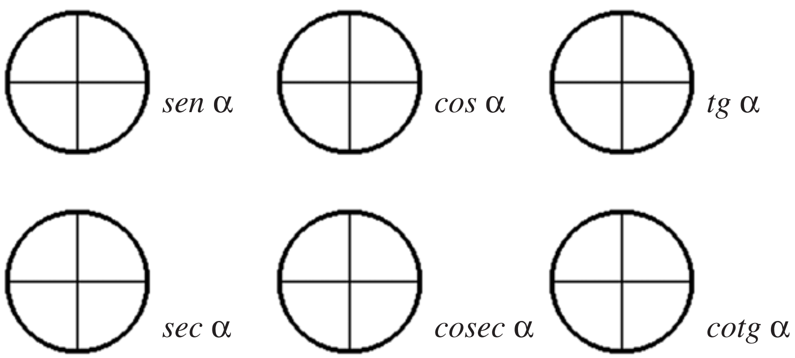

Figura 9.

2.3.4. ¿Qué ocurre cuando el ángulo α es igual a 0º, 90º, 180º, 270º y 360º?

El comportamiento de los diferentes programas de geometría dinámica al representar las medidas de ángulos es variado, pero suelen presentar problemas para medir ángulos negativos. En las actividades con esta problemática, profesor y estudiantes deberían buscar algún procedimiento cómodo e intuitivo para diferenciar los ángulos positivos de los negativos, por ejemplo usando colores diferentes o teniendo en cuenta el sentido en que se está girando el punto *P*.

Actividad 2.4: Propiedades de las razones de ángulos relacionados

En cada una de las actividades siguientes, escribe una conjetura, justifícala y describe todo lo que pensaste e hiciste para resolver la actividad.

2.4.1. ¿Qué relación hay entre *sen* α y *sen* $-\alpha$?

2.4.4. Abre el archivo ACT.2.4.4[3] (figura 10). Busca relaciones entre los valores de las razones trigonométricas para los ángulos α, $\alpha - 90º$ y $90º - \alpha$, siendo α cualquier ángulo positivo o negativo entre 0º y ±360º. Demuestra las relaciones que encuentres utilizando propiedades matemáticas.

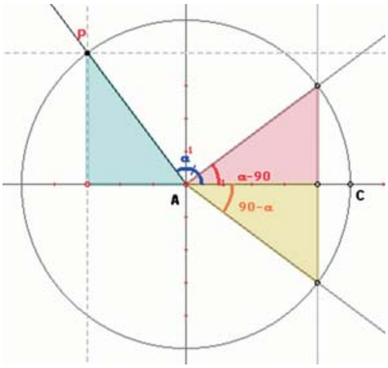

Figura 10.

2.4.5. Abre el archivo ACT.2.4.5. Busca relaciones entre los valores de las razones trigonométricas para los ángulos α y $180º \pm \alpha$, siendo α cualquier ángulo positivo o negativo entre 0º y ±360º. Demuestra las relaciones que encuentres utilizando propiedades matemáticas.

En la actividad 2.4 se plantean diversas relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo α y otros ángulos relacionados con este. No pretendemos ser exhaustivos enunciando todas las posibles relaciones, ni creemos que sea necesario plantear a los estudiantes todas ellas. En la práctica, la solución de estos problemas pasa por identificar triángulos congruentes en la circunferencia goniométrica y verificar los signos de las razones según los cuadrantes. Algunos estudiantes se darán cuenta en poco tiempo de esta estrategia general, mientras que otros estudiantes tardarán en relacionar unos casos con otros y resolverán cada nuevo problema como si fuera el primero.

Actividad 2.5: Cálculo de razones trigonométricas y resolución de triángulos

2.5.1. Encuentra los valores de las otras razones trigonométricas del ángulo α si se sabe que *cos* $\alpha = \frac{-4}{5}$ y *tg* α es positiva. ¿Cuánto vale el ángulo α? Justifica tu respuesta.

[3] Los programas de geometría dinámica suelen manejar incorrectamente los ángulos, que a veces saltan de una parte de la circunferencia a la otra sin pretenderlo el usuario.

2.5.3. ¿Qué significa que *cos* 135º = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$?

2.5.5. Abre el archivo ACT.2.5.5 (figura 11). Estamos junto a un río, y en la orilla opuesta hay un árbol. Nos interesa averiguar la anchura del río y la altura del árbol. Para ello, desde un punto P_1 en la orilla del río enfrente del árbol, medimos el ángulo que forman la horizontal (el suelo) y la visual a la parte más alta del árbol. A continuación, nos separamos del río 20 m, hasta otro punto P_2 de forma que P_2, P_1 y el árbol estén alineados. Volvemos a medir el ángulo que forman la horizontal (el suelo) y la visual a la parte más alta del árbol. ¿Cuánto mide de alto el árbol? ¿Cuánto mide de ancho el río?

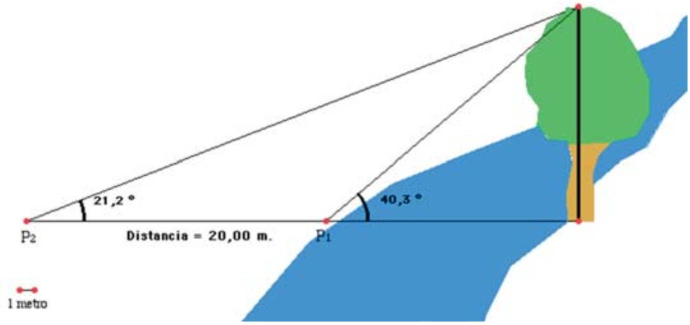

Figura 11.

En las actividades de 2.4.1 a 2.4.3 y en 2.5 se les deja libertad a los estudiantes para que usen o no el ordenador. El profesor, al ver cómo resuelven las actividades, puede decidir sugerirles que utilicen el SGD como apoyo visual.

Cuando los estudiantes menos avanzados hagan demostraciones empíricas basadas solo en los valores numéricos de la pantalla, el profesor debe inducirles a buscar justificaciones basadas en las propiedades de los triángulos congruentes que se forman. Además, el profesor debe inducir a los estudiantes a no conformarse con observar los ángulos del primer cuadrante, sino analizar las particularidades de los cuatro cuadrantes y sacar conclusiones generales.

La actividad 2.5.5 propone uno de los múltiples problemas habituales en los libros de texto de aplicación de las razones trigonométricas. El archivo de SGD que proponemos usar tiene la finalidad de ayudar a los estudiantes a conectar el contexto geométrico de la circunferencia goniométrica y el contexto "realista" del enunciado del problema.

ACTIVIDAD 3: REPRESENTACIONES LINEALES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA GONIOMÉTRICA

Actividad 3.1: Razones entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo

3.1.1. Abre el archivo ACT.3.1.1 (figura 12). Mueve suavemente el punto *P* sobre la circunferencia hasta completar una vuelta y observa con atención los vectores. Estos vectores representan a las razones trigonométricas y los llamaremos "lados trigonométricos":

Lado seno: El vector AB (azul oscuro), *lado seno* $= r \, sen \, \alpha$.

Etc.

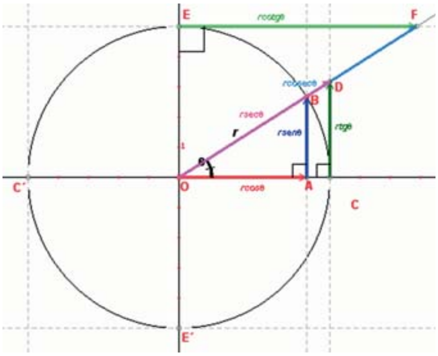

Figura 12.

3.1.2. Abre el archivo ACT.3.1.1. Podemos demostrar que el lado tangente (segmento CD o $D'C'$) está relacionado con $tg\, \alpha$: CD (o $D'C'$) $= r\, tg\, \alpha$.

En efecto, el triángulo OCD (o $OC'D'$) es semejante al triángulo OAB, luego: $CD/OC = AB/OA = tg\, \alpha$. Por tanto, $CD =$ $= OC\, tg\, \alpha = r\, tg\, \alpha$ (se hace el mismo razonamiento con $OC'D'$).

Comprueba en el ordenador que este argumento es válido para los ángulos de los cuatro cuadrantes (excepto cuando α vale 0º ó 180º, pues estos ángulos no tienen tangente).

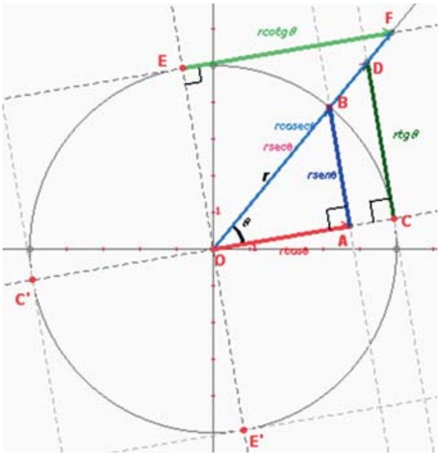

Figura 13.

3.1.3. Abre el archivo ACT.3.1.3 (figura 13). Aunque hasta ahora siempre hemos representado los ángulos de la circunferencia goniométrica apoyados en el eje *OX,* también podemos utilizar ángulos apoyados en otras semirrectas, como en la figura (figura 13). En este caso, también podemos definir y dibujar los lados trigonométricos del ángulo, sin importar la posición en que esté. Gráficamente, es como si creáramos unos nuevos ejes de coordenadas girados respecto de los ordinarios (figura).

En la actividad 3.1.1 se introduce la representación gráfica usual de las seis razones trigonométricas como segmentos sobre la circunferencia. En los libros de texto se representan los segmentos tangente, cotangente, secante y cosecante sólo en los cuadrantes primero y cuarto, pero didácticamente es mejor representarlos en todos los cuadrantes, pues los estudiantes ven que siempre se forma la misma estructura y, por tanto, les resulta más fácil entender las relaciones entre un ángulo y sus segmentos trigonométricos.

La utilización de vectores en vez de meros segmentos para representar las razones es un recurso didáctico que facilita a los estudiantes la identificación de los signos de las razones trigonométricas en cada cuadrante y les ayuda a encontrar las relaciones correctas entre razones.

La actividad 3.1.2 presenta a los estudiantes la demostración de que la longitud del lado tangente de α es igual a $r\ tg\ \alpha$, como ejemplo de la forma de realizar las demostraciones de estas igualdades para las seis razones trigonométricas. La manipulación de la figura en el ordenador les ayudará a entender la demostración dada y a encontrar las correspondientes a las otras razones.

La actividad 3.1.3 plantea la posibilidad de que los ángulos no tengan un lado en el semieje OX. Esta actividad es la base para poder plantear las demostraciones de las relaciones que se estudiarán en las actividades 5 y 6.

Actividad 3.2: Propiedades de las razones de ángulos relacionados

3.2.1. Abre los archivos ACT.2.4.4 y ACT.2.4.5. En la actividad 2.4 demostraste diversas relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo α y los ángulo $-\alpha$, $180º \pm \alpha$, $90º - \alpha$ y $\alpha - 90º$. Añade a las figuras de los archivos los segmentos trigonométricos. Demuestra de nuevo esas relaciones entre razones trigonométricas pero ahora utilizando en las demostraciones los segmentos trigonométricos correspondientes.

ACTIVIDAD 4: IDENTIDADES PITAGÓRICAS

Objetivos de aprendizaje:

- Analizar, comprender y demostrar la identidad pitagórica fundamental a través de la exploración y visualización de la demostración en un diagrama dinámico.
- Demostrar las otras identidades pitagóricas a partir de la visualización y análisis de la identidad pitagórica fundamental.
- Comprender las relaciones geométricas y analíticas de las identidades pitagóricas para que sirvan como ayuda en la visualización y demostración de otras identidades trigonométricas.

Actividad 4.1: La identidad pitagórica fundamental

4.1.1. Abre el archivo ACT.4.1.1 (figura 14). Explora la construcción y analiza las relaciones de los elementos del diagrama dinámico. ¿Qué relación existe entre r, $r\cos\theta$ y $r\,sen\,\theta$? Demuestra las relaciones que encuentres utilizando propiedades matemáticas.

Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para plantear tu conjetura y para demostrarla.

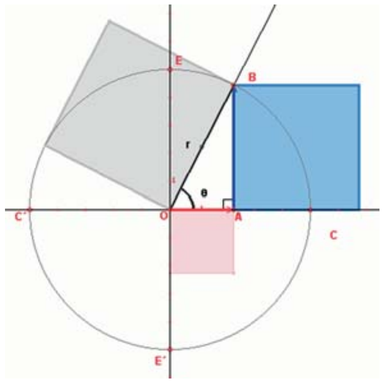

Figura 14.

Actividad 4.2: Otras identidades pitagóricas

4.2.1. Abre el archivo ACT.4.1.1. ¿Qué relación existe entre r, $r\,tg\,\theta$ y $r\,sec\,\theta$? Completa la figura, explora la construcción y analiza las relaciones de los elementos del diagrama dinámico. Demuestra la relación que encuentres utilizando propiedades matemáticas.

Actividad 4.3: Síntesis final

4.3.1. Realiza un mapa conceptual en el que se vean las relaciones entre las definiciones y propiedades de las razones trigonométricas estudiadas en esta actividad (incluye las representaciones geométricas de dichas propiedades).

La actividad 4.1 presenta una representación dinámica de la identidad pitagórica fundamental para que los estudiantes, a través de la visualización y de la exploración, encuentren la relación de las razones seno y coseno y tengan elementos clave para su demostración. Los estudiantes pueden ver que la relación se cumple para cualquier ángulo θ y no solamente para los ángulos agudos, como generalmente ocurre en las demostraciones en los libros de texto y páginas web. Aunque los colores ayudan a visualizar y comprender la relación, es necesario que los estudiantes razonen deductivamente para poder demostrarla de manera algebraica, usando las definiciones de las razones trigonométricas.

A diferencia de las actividades 1 a 3, ahora proponemos que no se dé a los estudiantes un mapa conceptual incompleto, si no que les pedimos que elaboren su propio mapa como un medio de organización de sus ideas y de representación sintética de propiedades estudiadas. En el CD que acompaña al libro incluimos un mapa completo como referencia para el profesor.

ACTIVIDAD 5: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA DE DOS ÁNGULOS

Actividad 5.1: Seno de la suma de dos ángulos

5.1.1. Abre el archivo ACT.5.1.1 (figura 15). Mueve lentamente el lado del ángulo β (junto a la esquina inferior izquierda de la pantalla) hasta completar más de una vuelta. Haz lo mismo con el ángulo α manteniendo fijo el ángulo β. Observa, analiza y relaciona los diferentes elementos de la construcción (ángulos, lados de los ángulos, triángulos, vectores representantes de los lados seno y coseno, rectas auxiliares, segmentos, etc.). Ten en cuenta la figura 15 y las indicaciones que hay a continuación (véase la versión completa de la actividad).

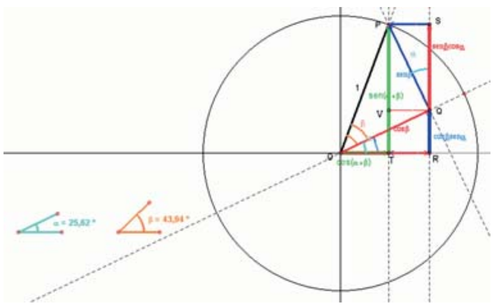

Figura 15. *Representación inicial de la fórmula del seno y del coseno de la suma de dos ángulos.*

5.1.3. ¿A qué es igual *sen* $(\alpha + \beta)$? Escribe una conjetura de lo encontrado en tu hoja de trabajo y demuéstrala utilizando propiedades matemáticas. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura y de la demostración.

Actividad 5.2: Coseno de la suma de dos ángulos

5.2.1. Abre el archivo ACT.5.1.1. ¿A qué es igual *cos* $(\alpha + \beta)$? Escribe una conjetura de lo encontrado en tu hoja de trabajo y demuéstrala utilizando propiedades matemáticas. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura y de la demostración.

Actividad 5.3: Seno y coseno del ángulo doble

5.3.1. ¿A qué es igual *sen* (2α)? Escribe una conjetura de lo encontrado en tu hoja de trabajo y demuéstrala utilizando propiedades matemáticas.

En los libros de texto se presentan demostraciones puramente algebraicas de estas igualdades, no siempre acompañadas de figuras que puedan ayudar a los estudiantes a entenderlas. Las actividades 5.1 y 5.2 proponen a los estudiantes explorar, de manera guiada, unas figuras de SGD en las que se representan dos ángulos y su suma, para inducirles a obtener conclusiones acerca de las relaciones entre las razones trigonométricas de los tres ángulos. Aunque a veces es difícil identificar en la pantalla del ordenador los ángulos, triángulos y segmentos o vectores, es interesante pedir a los estudiantes que verifiquen las relaciones en los cuatro cuadrantes. Ello les inducirá una mayor comprensión de las relaciones entre los ángulos y su suma.

Por el contrario, en las actividades 5.3 a 5.5, los estudiantes deben usar solo la representación algebraica para obtener los resultados, lo cual supone un paso más en el aumento de la abstracción y el formalismo de sus demostraciones. En 5.4, es probable que los estudiantes necesiten alguna indicación del profesor para pensar en la relación $\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$.

ACTIVIDAD 6: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS

Actividad 6.1: Seno de la diferencia de dos ángulos

6.1.1. Abre el archivo ACT.6.1.1 (figura 16). Mueve lentamente el lado del ángulo β hasta completar más de una vuelta. Haz lo mismo con el ángulo α manteniendo fijo el ángulo β. Observa, analiza y relaciona los diferentes elementos de la construcción (ángulos, lados de los ángulos, triángulos, vectores representantes de los lados seno y coseno, rectas auxiliares, segmentos, etc.).

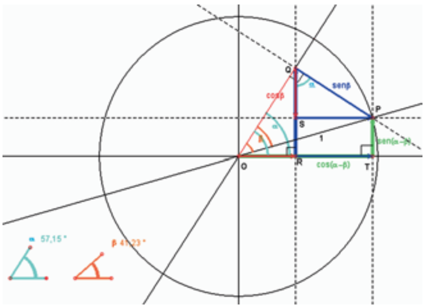

Figura 16.

6.1.2. ¿A qué es igual *sen* ($\alpha - \beta$)? Escribe una conjetura de lo encontrado en tu hoja de trabajo y demuéstrala utilizando propiedades matemáticas. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura y de la demostración.

Actividad 6.2: Coseno de la diferencia de dos ángulos

6.2.1. ¿A qué es igual *cos* ($\alpha - \beta$)? Escribe una conjetura de lo encontrado en tu hoja de trabajo y demuéstrala utilizando propiedades matemáticas.

Actividad 6.3: Tangente de la diferencia de dos ángulos

6.3.1. ¿A qué es igual *tg* ($\alpha - \beta$)? Escribe una conjetura de lo encontrado en tu hoja de trabajo y demuéstrala utilizando propiedades matemáticas.

La metodología de trabajo de esta actividad es análoga a la de la actividad 5. Cabe esperar que los estudiantes resuelvan esta actividad con más facilidad que la actividad 5 y que muestren mayor capacidad de razonamiento deductivo abstracto.

4. Conclusiones

Hemos presentado un marco teórico para la enseñanza de las matemáticas en enseñanza secundaria basado en tres premisas: i) El aprendizaje de contenidos matemáticos organizados. ii) Dicho aprendizaje debe ir acompañado de un aprendizaje de los modos de razonamiento matemático, desde el razonamiento inductivo, empírico, hasta el razonamiento deductivo formal del Bachillerato de Ciencias y Tecnología. iii) La enseñanza es más eficaz en entornos agradables, interesantes y motivadores para los estudiantes. Para la enseñanza de la geometría y la trigonometría, estos entornos se pueden organizar mediante el uso de software de geometría dinámica.

A partir de este marco teórico, hemos elaborado una unidad de enseñanza de la trigonometría para conseguir los objetivos anteriores en este tema de 4º de ESO y 1.º de Bachillerato. Las actividades, de descubrimiento guiado, presentan a los estudiantes figuras de SGD para que manipulen, analicen y descubran relaciones. Otra parte importante del curso, en todas las actividades y complementaria a la del aprendizaje de contenidos matemáticos, es el objetivo de generar en los estudiantes una actitud permanente de justificar las conjeturas formuladas mediante la producción de demostraciones adecuadas a su capacidad de razonamiento.

En las experimentaciones realizadas con versiones previas de estas actividades, el SGD usado ha demostrado ser una valiosa ayuda para que los estudiantes alcanzaran en buena medida los objetivos previstos. Los estudiantes aprenden pronto a manipular este tipo de figuras y a sacarles provecho para resolver los problemas planteados.

5. REFERENCIAS

Balacheff, N. (1988): “Aspects of proof in pupils’ practice of school mathematics”, en Pimm, D. (ed.), *Mathematics, Teachers and Children*, Hodder & Stoughton, Londres, págs. 216-235.

Battista, M.T. y Clements, D.H. (1995): “Geometry and proof”, *Mathematics Teacher* 88.1, págs. 48-54.

Bell, A.W. (1976): “A study of pupil’s proof-explanations in mathematical situations”, en *Educational Studies in Mathematics* 7.1, págs. 23-40.

Brown, S. (2006): *Cognitive obstacles in understanding sine and cosine on the coordinate plane*. Manuscrito no publicado.

Clements, D.H. y Battista, M.T. (1992): “Geometry and spatial reasoning”, en Grouws, D.A. (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* NCTM, MacMillan, Nueva York, págs. 420-464.

Fischbein, E. (1982): “Intuition and Proof”, en *For the Learning of Mathematics* 3.2, págs. 9-18.

Generalitat Valenciana (2007): *Decreto 112/2007 por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Valenciana* (DOGV de 24-julio-2007).

Generalitat Valenciana (2008): *Decreto 102/2008 por el que se establece el currículo del Bachillerato en la Comunidad Valenciana* (DOGV de 15-julio-2008).

Godino, J.D.; Recio, A.M. (2001): “Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática”, en *Enseñanza de las Ciencias* 19.3, págs. 405-414.

Gutmann, T. (2003): “A direct approach to computing the sine or cosine of the sum of two angles”, en *Mathematics Teacher* 96.5, págs. 314-318.

Harel, G. y Sowder, L. (1998): “Students’ proof schemes: Results from exploratory studies”, en Schoenfeld, A.H.; Kaput, J., y Dubinsky, E. (eds.), *Research in collegiate mathematics education,* vol. III. American Mathematical Society, Providence, pág. 234-283.

Ibañes, M. y Ortega, T. (1998): “Pruebas visuales en trigonometría”, en *Aula: Revista de enseñanza e investigación educativa* 10, págs. 105-118.

Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000): “Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment”, en *Educational Studies in Mathematics* 44.1/2, págs. 87-125.

MARTIN, W.G. y HAREL, G. (1989): “Proof Frames of Preservice Elementary Teachers”, en *Journal for Research in Mathematics Education* 20.1, págs. 41-51.

Ministerio de Educación, Ciencia y Deporte (MECD) (2001): *Razones trigonométricas. Operaciones. Identidades y Operaciones.* Página web http://descartes.cnice.mec.es/ materiales_didacticos/razones_trigonometricas_bcnt/indicetri2.htm

Ministerio de Educación, Ciencia y Deporte (MECD) (2003): *Funciones trigonométricas*. Página web http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Funciones_trigonometricas/ Las_funciones_trigonometricas.htm

Ministerio de Educación, Ciencia y Deporte (MECD) (2005). *Curso de Geometría ESO*. Página web http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/2eso.htm

MUNNÉ, J. (2002): “Distintas formas de deducción de las fórmulas trigonométricas de suma o resta de ángulos”, en *Suma* 39, págs. 33-36.

NCTM (1991): *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática.* SAEM Thales, Sevilla.

NCTM (2003): *Principios y estándares para la educación matemática.* SAEM Thales, Sevilla.

SENK, S.L. (1985): “How well do students write geometry proofs?”, en *The Mathematics Teacher* 78.6, págs. 448-456.

SENK, S.L. (1989): “Van Hiele Levels and Achievement in Writing Geometry Proofs”, en *Journal for Research in Mathematics Education* 20.3, págs. 309-321.

SHAFFER, D.W. (2006): *Exploring trigonometry with the sketchpad*. Key Curriculum Press, Emereville.