

## **Un ejemplo de coordinación entre las asignaturas de matemáticas en el máster de profesorado de educación secundaria**

Ángel Gutiérrez, Gregoria Guillén y Adela Jaime

Dpto. de Didáctica de la Matemática; Universidad de Valencia

**Resumen.** Describimos la organización global de la formación de profesores de matemáticas de Educación Secundaria en la Universidad de Valencia y, con más detalle, las características de los temas dedicados a la geometría en las asignaturas del módulo específico. Mostramos cómo una estrecha coordinación entre las diferentes asignaturas del módulo puede permitir que los estudiantes conozcan de forma interrelacionada diversos aspectos –matemáticos, didácticos y de la práctica de enseñanza– de un tema del currículo de matemáticas de Educación Secundaria, la geometría en nuestro caso.

**Palabras clave:** Formación inicial de profesores, educación secundaria, geometría, educación matemática.

**Abstract.** We describe the global organization of the initial training of secondary school mathematics teachers at the University of Valencia. We pay special attention to the themes devoted to geometry in the subjects of the “specific module”. We show that a narrow coordination among the different subjects in this module may let students know in an inter-related way different aspects –mathematical, educational, and practical teaching– of a given topic of the mathematics curriculum of Secondary School, geometry in this case.

**Keywords:** Pre-service teacher training, secondary school, geometry, mathematics education.

### **CITAR COMO:**

Gutiérrez, A.; Guillén, G.; Jaime, A. (2012): Coordinación entre las asignaturas de matemáticas en el máster de profesorado de educación secundaria, *Uno 59*, 74-81.

## **Un ejemplo de coordinación entre las asignaturas de matemáticas en el máster de profesorado de educación secundaria**

Ángel Gutiérrez, Gregoria Guillén y Adela Jaime

Dpto. de Didáctica de la Matemática; Universidad de Valencia

### **Introducción**

Dentro de la estructura general de los másteres españoles de formación del profesorado de Educación Secundaria fijada por la Orden ECI 3858/2007, las diferentes universidades han desarrollado sus currículos de diversas maneras. Los 8 créditos ects que la Orden ECI no asigna a ningún módulo han sido distribuidos de diferentes formas y las competencias que, según dicha Orden ECI, cada asignatura debe ayudar a desarrollar en los futuros profesores se interpretan y se plasman en los contenidos de las asignaturas de distintas formas. Las organizaciones internas de los módulos también varían de unas universidades a otras.

El objetivo de este artículo es describir la especialidad de matemáticas del máster de formación del profesorado de Educación Secundaria de la Universidad de Valencia y mostrar –mediante un caso– cómo hemos intentado dar una consistencia global a las asignaturas del módulo específico, de manera que los estudiantes puedan analizar la problemática de la enseñanza y el aprendizaje desde varias ópticas diferentes y complementarias.

El *Máster en Profesor/a de Educación Secundaria por la Universitat de València* –ésta es su denominación oficial– está organizado en las siguientes asignaturas:

Módulo genérico: Aprendizaje y desarrollo de la personalidad (4 créditos)

Procesos y contextos educativos (8 créditos)

Sociedad, familia y educación (4 créditos)

Módulo específico: Complementos para la formación disciplinar (6 créditos)

Aprendizaje y enseñanza (16 créditos)

Innovación docente e iniciac. a la invest. educ. (6 créditos)

Practicum: Prácticas de enseñanza (10 créditos)

Trabajo fin de máster (6 créditos)

En la especialidad de matemáticas, los módulos específico y practicum son responsabilidad del Departamento de Didáctica de la Matemática. La organización de las asignaturas del módulo específico en temas está basada en los bloques de contenidos de los currículos oficiales para la Comunidad Valenciana de las asignaturas de matemáticas de ESO y Bachillerato. Los temas de cada asignatura son:

*Complementos para la formación disciplinar de matemáticas:*

Resolución de problemas (heurística) (3 créditos)

Modelización matemática (2 créditos)

Historia y epistemología de las ideas matemáticas (1 crédito)

*Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas:*

Didáctica del álgebra (3 créditos)

Didáctica del análisis matemático (3 créditos)

Didáctica de la aritmética (3 créditos)

Didáctica de la geometría (3 créditos)

Didáctica de la probabilidad y la estadística (3 créditos)

Didáctica de la resolución de problemas (1 crédito)

*Innovación docente e iniciación a la investigación educativa en matemáticas:*

Didáctica del álgebra (2 créditos)

Didáctica de la aritmética (2 créditos)

Didáctica de la geometría (2 créditos)

Puede verse que varios temas están presentes en dos asignaturas y la geometría está presente en las tres<sup>1</sup>. Nuestra intención al planificar un tema estudiado en varias asignaturas es que haya una estrecha relación entre los contenidos y metodologías en ambas asignaturas, de forma que, aunque sean impartidas por diferentes profesores, los estudiantes puedan ver el conjunto como un todo con conexiones claras entre los contenidos matemáticos, su didáctica y su enseñanza. La diferencia en las longitudes de las asignaturas no permite incluir más temas comunes a las tres, pero esperamos que los alumnos del máster sean capaces de establecer por sí mismos las relaciones que faltan

---

<sup>1</sup> Aunque el título “modelización matemática” es genérico, el tema se centra en contenidos de geometría.

en los temas que sólo se estudian en una o dos asignaturas.

La geometría es el único contenido de las matemáticas de Educación Secundaria que está presente en las tres asignaturas del módulo específico. Un motivo para esta mayor presencia es el reconocimiento de que los estudiantes del máster tienen un conocimiento de la geometría euclidiana presente en los currículos de educación secundaria más pobre que el que tienen de los otros bloques de contenidos, por lo que es conveniente dedicar a la geometría más créditos –7 en total– que a los otros bloques de contenidos.

En los temas geométricos de las tres asignaturas se trabaja con los mismos contenidos: la semejanza, las isometrías y los poliedros. En el resto del artículo describimos los contenidos y formas de trabajo de estos temas, dividiendo esta descripción en cuatro partes: la primera trata de aspectos comunes a los tres contenidos mencionados antes y las otras tres partes tratan de aspectos específicos de cada uno. El espacio disponible no nos permite dar detalles minuciosos del desarrollo de las clases ni mencionar la amplia bibliografía usada, sino sólo algunas referencias principales.

### **Aspectos globales de la formación geométrica de los futuros profesores**

Tratar los mismos contenidos matemáticos en las tres asignaturas ayuda a dar la continuidad deseada y a enlazar adecuadamente los análisis matemático, didáctico y para la enseñanza.

Haber titulado *Modelización matemática* a un tema de la asignatura de *Complementos disciplinares* es una forma de indicar que entendemos que los contenidos matemáticos presentes en esta asignatura no están elegidos por su valor intrínseco, sino porque son contextos adecuados para mostrar a los futuros profesores la puesta en práctica de la fenomenología didáctica. En este tema se plantean algunos problemas de modelización –adecuados para las clases de Educación Secundaria– que se estudian matemáticamente, explorando los conceptos y propiedades involucrado incluyendo, cuando los profesores lo consideramos adecuado, la demostración formal de propiedades.

En la asignatura de *Aprendizaje y enseñanza* se estudian, desde el punto de vista didáctico, los marcos teóricos de la fenomenología didáctica de Freudenthal (1983) y las Matemáticas Realistas, el modelo de Van Hiele (Jaime y Gutiérrez, 1990) y el modelo

de Vinner, estando presentes en todos los contenidos geométricos, pues siempre se hace mención a estas teorías para justificar decisiones didácticas, diseños de materiales de enseñanza, etc. cuando es oportuno.

En esta asignatura también se retoman algunos ejemplos de modelizaciones estudiados en la asignatura de Complementos disciplinares, para estudiar sus aspectos didácticos (concepciones de los estudiantes, procesos de aprendizaje o resolución de problemas, dificultades y errores, etc.).

En la asignatura de *Innovación docente*, lo aprendido en las dos asignaturas mencionadas forma la base para realizar o analizar diseños de actividades o unidades de enseñanza –de los estudiantes, de libros de texto o de otros profesores–, de manera que los conocimientos matemáticos y didácticos avalen y justifiquen las decisiones del profesor al organizar la enseñanza de estos contenidos en los cursos de ESO o Bachillerato.

### **Enseñanza de la semejanza**

La semejanza geométrica es uno de los temas centrales de las matemáticas de Educación Secundaria. Además de su valor intrínseco, la semejanza es un complemento necesario para estudiar la proporcionalidad numérica y, junto con las isometrías, constituyen una valiosa herramienta de trabajo en cualquier tema de matemáticas. Por este motivo, dedicamos una parte de los temas de geometría a su estudio.

En la asignatura de *Complementos disciplinares*, empezamos planteando a los futuros profesores algunos problemas que se pueden resolver manipulativamente recurriendo a modelos geométricos. Uno de ellos es el problema de identificar rectángulos semejantes cuando es posible superponerlos; otro problema es el de identificar triángulos semejantes cuando no es posible superponerlos. Después de que los estudiantes hayan resuelto experimentalmente los problemas, les pedimos que identifiquen los conceptos y propiedades matemáticas implícitos en sus formas de resolverlos. Así, surgen el teorema de Tales y los criterios de semejanza de triángulos. La mayoría de estudiantes conocen el teorema de Tales –por lo menos su nombre y la versión de las paralelas y las transversales– pero ninguno sabe cómo demostrarlo. Se plantea un interesante problema

matemático al pedir a los estudiantes que demuestren el teorema de Tales y los criterios de semejanza: Al analizar qué se hace en los libros de texto, los estudiantes pueden ver que algunos textos presentan los criterios de semejanza de triángulos como propiedad previa al teorema de Tales, usada en su demostración, mientras que otros presentan los criterios de semejanza de triángulos como una consecuencia del teorema de Tales, que usan para demostrar los criterios.

Enlazando con la discusión mencionada sobre la demostración del teorema de Tales, en la asignatura de *Aprendizaje y enseñanza* analizamos la problemática del aprendizaje de la demostración matemática por los estudiantes de Educación Secundaria desde diferentes puntos de vista, representados por autores como De Villiers, Balacheff o Harel y Sowder (Marrades y Gutiérrez, 2000).

También planteamos a los estudiantes la realización de demostraciones empíricas de los criterios de semejanza de triángulos utilizando en un programa de geometría dinámica el método de mover uno de los triángulos semejantes hasta colocarlo en una posición homotética respecto del otro triángulo. De esta forma inducimos a los futuros profesores a adquirir una comprensión geométrica integrada de las isometrías y las semejanzas.

El estudio de la didáctica de la semejanza se completa con una revisión de las estrategias típicas de razonamiento proporcional y de propuestas de corrección de las estrategias erróneas más comunes descritas en la literatura sobre este tema.

En la asignatura de *Innovación docente* utilizamos los diversos contenidos estudiados en las dos asignaturas precedentes para analizar ejemplos concretos de enseñanza de la semejanza a estudiantes de ESO y para elaborar secuencias de actividades propias: Los ejemplos de modelización estudiados ayudan a los futuros profesores a utilizar la fenomenología didáctica para introducir el contexto de la semejanza y algunas de sus propiedades, como el teorema de Tales o la semejanza de triángulos. El modelo de Vinner permite a los futuros profesores organizar la enseñanza del concepto de semejanza y su definición mediante el diseño de una serie de ejemplos y contraejemplos. El modelo de Van Hiele y las estrategias típicas de razonamiento proporcional les permiten fundamentar el diseño de secuencias de actividades. Las categorías de demostraciones empíricas y deductivas les ayudan a imaginar posibles

respuestas de estudiantes de Educación Secundaria y a clasificarlas.

### **Enseñanza de las isometrías**

Otro de los contenidos geométricos que se ha tomado como hilo conductor de la enseñanza de la geometría son las isometrías de plano. En los currículos escolares, las isometrías están presentadas como un tema secundario, más lúdico que matemático. Una consecuencia es que la mayoría de alumnos del máster conocen de ellas poco más que sus descripciones intuitivas y algunas propiedades básicas.

En la asignatura de *Complementos disciplinares* intentamos que los estudiantes consigan un dominio razonable de las isometrías en su doble vertiente de movimientos en el plano y de transformaciones formales, de manera que los alumnos sean capaces de conocer el resultado de aplicar ciertas isometrías sin necesidad de analizar el ejemplo concreto que se utilice en un momento determinado. Así, ante dos figuras planas congruentes, los estudiantes deben saber, en primer lugar, qué tipo de movimientos permite pasar de una a la otra, qué composiciones o descomposiciones de movimientos usar, cómo determinar cada movimiento, etc., todo ello sin necesidad de realizar mediciones concretas. Después, en la segunda parte de la tarea, los estudiantes deben poder aplicar esta información para determinar prácticamente los movimientos concretos que permiten relacionar las figuras dadas.

Los ejemplos de isometrías presentes en nuestro entorno son abundantes y, la mayoría de ellos, fácilmente identificables. Elegimos los mosaicos planos como ejemplo de un modelo matemático usado en situaciones reales con fines decorativos. En esta asignatura se puede hacer, hasta donde el tiempo disponible lo permita, un análisis matemático de algunos modelos de mosaicos planos, identificando diferentes sistemas generadores, las relaciones entre ellos, etc.

En la asignatura de *Enseñanza y Aprendizaje* se proporciona a los estudiantes un soporte didáctico para la enseñanza de las isometrías mediante el modelo de Van Hiele (Jaime, Gutiérrez, 1996), trabajando con sus dos componentes –los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje– en el tema de las isometrías del plano. Además, se estudian los errores usuales cometidos por estudiantes al realizar isometrías y posibles pautas para

prevenir o corregir dichos errores.

En la asignatura de *Innovación docente* se completa el estudio de las isomerías mostrando el contexto de los cubrimientos regulares –en concreto los mosaicos planos y los rosetones– en la práctica de la enseñanza en las aulas de ESO. El innegable atractivo para los estudiantes de este contexto, que combina aspectos matemáticos y artísticos, hace que se puedan encontrar numerosas propuestas de enseñanza en publicaciones y páginas web. Nosotros hemos utilizado Arranz y otros (2009). Nos centramos con los futuros profesores en el diseño de actividades que cubren los dos aspectos principales de los cubrimientos: i) Análisis de cubrimientos ya construidos, identificando movimientos que intervienen, sistemas generadores, motivos mínimos que generan el cubrimiento, secuencias de movimientos que permiten desplazarse desde una celda hasta otra, etc., y ii) Creación de mosaicos a partir de un motivo y un conjunto de movimientos que lo generan.

De esta manera, los futuros profesores ponen en práctica los conocimientos matemáticos adquiridos en la asignatura de *Complementos disciplinares*. Por ejemplo, los diferentes productos de isometrías son necesarios para plantear la búsqueda de sistemas generadores y la equivalencia de conjuntos de movimientos para generar un cubrimiento o rosetón.

La utilización de programas de geometría dinámica, por parte de los estudiantes si es posible, supone una aproximación muy interesante al tema. Existen páginas web con applets que permiten realizar movimientos mediante las diferentes isometrías, diseñar motivos mínimos, crear cubrimientos, etc. (en la sección de bibliografía se mencionan algunas).

### **Enseñanza de la geometría espacial**

El aprendizaje de los diferentes procesos matemáticos debe ser un elemento central en los cursos de Educación Secundaria. En este máster, para hacer reflexionar a los futuros profesores sobre algunos de dichos procesos, utilizamos el contexto de los poliedros, en concreto prismas, pirámides, poliedros regulares y poliedros arquimedianos, contemplados en el currículum oficial de la ESO.

En la asignatura de *Complementos disciplinares* usamos los poliedros regulares para trabajar con los procesos de descripción, establecimiento de relaciones y demostración Guillén (1991). Esto es, en un contexto de construcción, se demuestra que hay 5 poliedros regulares, se enumeran sus características numéricas y se descubren las simetrías de cada uno. Se estudia también el concepto de dualidad de los poliedros regulares y se consideran y analizan diferentes inscripciones entre ellos. Al estudiar los prismas y pirámides se discute sobre diferentes tipos de análisis y las características de los elementos implicados en cada uno; tipos de clasificaciones y diferentes problemas asociados; tipos de generalización y particularización así como diferentes tipos de demostración. También se hacen explícitas diversas familias de prismas o pirámides –de caras regulares, de caras iguales, etc.– y las relaciones y propiedades que se consideran y se hacen notar las relaciones entre los procesos matemáticos de describir, clasificar, definir y demostrar. El estudio de los poliedros arquimedianos nos permite trabajar de nuevo la problemática de la demostración, establecer relaciones entre las familias de los arquimedianos y los regulares e introducir a los futuros profesores en la problemática de la definición al tratar de decidir si hay 12 ó 13 poliedros arquimedianos.

En la asignatura de *Aprendizaje y enseñanza* usamos familias de sólidos para presentar diferentes enfoques y contextos para el estudio de la geometría en Educación Secundaria (Guillén, 2010). Los modelos de Van Hiele y Vinner permiten a los futuros profesores iniciarse en: i) analizar el currículo, ii) describir creencias y concepciones de estudiantes, iii) realizar análisis fenomenológicos de contenidos de geometría espacial, iv) identificar competencias específicas, v) analizar diferentes tipos de actividades, vi) identificar conocimientos matemáticos previos necesarios, vii) considerar respuestas típicas de los estudiantes de Educación Secundaria y sus dificultades y errores usuales.

En la asignatura de *Innovación docente* centramos la atención en el diseño y evaluación de *modelos de enseñanza* para algunos contenidos de geometría espacial estudiados en la asignatura de *Complementos disciplinares* y analizados en la de *Aprendizaje y enseñanza*. Al elaborar un modelo de enseñanza se busca que los estudiantes presten atención al modelo teórico que se usará para estructurar la secuencia de actividades y/o para introducir conceptos, a los enfoques que se darán al estudio y a los contextos

usados para ello. Se estudia también cómo: i) determinar competencias específicas relacionadas con los contenidos seleccionados; ii) hacer y usar análisis fenomenológico y de contenido; iii) plantear actividades para determinar los conocimientos previos de los estudiantes; iv) prever las dificultades y errores de éstos para incluir en la secuencia nuevas actividades y/o sugerencias para la instrucción; v) seleccionar actividades más o menos abiertas, considerando diferentes tipos de respuesta para ellas.

Numerosas publicaciones de Castelnuovo e IOWO, Fielker (1981-83) o Romberg y otros (1993-94) sirven para tomar ejemplos ya elaborados de actividades o secuencias de enseñanza que ayudan a los futuros profesores a iniciarse en el diseño de materiales de enseñanza innovadores.

### **Conclusión**

Los estudiantes del master suelen mostrar un gran desconocimiento de la geometría euclidiana, especialmente de las isometrías y de la geometría de los sólidos, y siguen teniendo dificultades en este tema al finalizar las clases. Muchos de ellos manifiestan que no se sienten seguros para impartir clases de geometría, si bien están sorprendidos y contentos por conocer enfoques que no sospechaban, que les muestran que la geometría permite interpretar y modelizar la realidad y que se pueden combinar conocimientos matemáticos y didácticos para desarrollar actividades y problemas adecuados para la Educación Secundaria.

Hemos mostrado tres ejemplos de nuestra propuesta para la organización de las asignaturas del módulo específico de la especialidad de matemáticas en el máster de formación de profesorado de Educación Secundaria. Hemos tratado de hacer ver al lector la idea central de nuestra propuesta, consistente en seleccionar temas de matemáticas de ESO o Bachillerato y realizar sobre ellos los tres estudios propios de las tres asignaturas del módulo específico, matemático, didáctico y de la práctica escolar. Esta unidad de contenidos permite a los estudiantes disponer de toda la información sobre un tema de las matemáticas escolares necesaria para una enseñanza de calidad.

### **Referencias**

- Arranz, J.M., Losada, R., Mora, J.A., y Sada, M. (2009). Mosaicos con Geogebra. En T. Recio (Ed.), *Geometría Dinámica* (pp. 57–87). Madrid: Anaya.
- Fielker, D.S. (1981-83): Removing the shackles of Euclid, *Mathematics Teaching* 95-104. [Traducción: *Rompiendo las cadenas de Euclides*. Madrid: M.E.C., 1987]
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, Holanda: D. Reidel.
- Guillén, G. (1991). *Poliedros*. Madrid: Síntesis.
- Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? en M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T.A. Sierra (eds.), *Investigación en educación matemática XIV* (pp. 21- 68). Lleida: Ediciones de la Universitat de Lleida.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. En S. Llinares y M.V. Sánchez (eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla: Alfar.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid: Síntesis.
- Marrades, R., y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1/2), 87-125.
- Romberg, T. y otros (1993-94): *Mathematics in context: A connected curriculum for grades 5-8*. Madison, WI, EE.UU.: N.C.R.M.S.E. e Instituto Freudenthal.

## **Anexo**

### **Páginas web para isometrías**

<http://docentes.educacion.navarra.es/~msadaall/geogebra/index.htm>

<http://geometriadinamica.es/Investigaciones/Arte-y-Geometria-Mosaicos/2.10-Las-cuatro-isometrias.html>

<http://jmora7.com>

[http://nlvm.usu.edu/es/nav/category\\_g\\_4\\_t\\_3.html](http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_g_4_t_3.html)

<http://www.acorral.es/index1.htm>

<http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarrojo/matematicas/materiales/3eso/geometria/movimientos/movimientos.html>